

ÓRBITAS NILPOTENTES EN ÁLGEBRAS DE KAC MOODY AFINES

Por: Lorena Valencia

Presentado ante la Facultad de Matemáticas, Astronomía y Física como parte
de los requerimientos para la obtención del grado de Doctora en Matemática de la
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FaMAF - UNC 2018

Dirigido por: Dra. Esther Galina



Órbitas nilpotentes en Álgebras de Kac Moody afines por Lorena Valencia se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.

A mis padres
Eliecer y Bertha

Agradecimientos

Gracias a mis padres, por su amor, sus enseñanzas, por entregarlo todo por mí.

Gracias a mi hermano, por andar en este viaje juntos.

Gracias a Armando, por su incondicional amor y paciencia, por enseñarme a ser valiente y a soñar.

Gracias a mis amigos: Eli, Sergio, Diana, Marcos, Oscar, Edwin, y otros más (...), por hacer el camino más feliz.

Gracias a mi directora, por su paciencia, por alentarme a continuar.

Gracias a Conicet, al jurado de mi tesis, a Famaf, a sus profesores, especialmente al profesor Jorge Vargas.

Y finalmente, gracias a la vida, por esta oportunidad.

Resumen

Las órbitas nilpotentes en álgebras de Lie semisimples complejas de dimensión finita bajo la acción adjunta de su grupo de Lie simplemente conexo, están totalmente clasificadas y han sido ampliamente trabajadas y aplicadas al estudio de otros objetos, como por ejemplo, las representaciones de álgebras y grupos de Lie. Por otro lado, las álgebras de Kac Moody son extensiones de álgebras de Lie, en particular las de tipo afín tienen una estructura y clasificación muy similar a la de las álgebras de Lie semisimples complejas de dimensión finita.

En esta tesis definimos las órbitas nilpotentes en álgebras de Kac Moody afines no torcidas bajo la acción adjunta del grupo de Kac Moody maximal sobre la extensión positiva del álgebra de Kac Moody, damos algunos resultados de estructura y encontramos elementos destacados en cada una.

Para el caso particular en que el álgebra es $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$, se introducen un conjunto de matrices que denominamos cuasi-Jordan, las cuales son clave para obtener el resultado de clasificación de las órbitas nilpotentes en esta álgebra:

Teorema: Hay una correspondencia biyectiva entre órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ y el conjunto

$$\{(\sigma, j) : \sigma = [i_1, \dots, i_d] \in \mathcal{P}(n) \text{ y } 0 \leq j < i_d\} \times \mathbb{C},$$

donde $\mathcal{P}(n)$ denota el conjunto de particiones de n .

Finalmente se asocia a cada órbita nilpotente en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ un diagrama de Dynkin con pesos, pasando por la correspondencia entre ciertos elementos nilpotentes representativos en el álgebra y triplas estándar conteniendo a cada uno de estos como su elemento nilpositivo.

Palabras claves: órbitas nilpotentes, álgebras de Kac Moody, grupos de Kac Moody.

2010 Mathematics subject classification: 17B67.

Abstract

Nilpotent orbits in finite dimensional complex semisimple Lie algebras, under the adjoint action of simply connected Lie groups are totally classify. These objects have been extensively worked and applied to study other objects, for example Lie groups and algebras representations. On the other hand, Kac Moody algebras are extensions of Lie algebras, and particularly, affine type has a similar structure and classification as finite dimensional complex semisimple Lie algebras have.

In this Thesis we define nilpotent orbits in affine untwisted Kac Moody algebras under the adjoint action of the maximal Kac Moody group asociated to positive extension of Kac Moody algebra, we give some structure results and found outstanding elements in every orbit.

In the particular case that $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$, are introduced a set of matrixes denominated cuasi-Jordan, which are the key to the classification of nilpotent orbits in this algebra:

Theorem: There is a bijective correspondence between nilpotent orbits in $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ and

$$\{(\sigma, j) : \sigma = [i_1, \dots, i_d] \in \mathcal{P}(n) \text{ y } 0 \leq j < i_d\} \times \mathbb{C},$$

where $\mathcal{P}(n)$ denotes the partition set of n .

Finally we asociate to every nilpotent orbit in $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ a Dynkin diagram with weights, passing by the correspondence between some representative nilpotent elements in the algebra and standard triples containing each of them like its nilpositive element.

Key words: Nilpotent Orbits, Kac Moody algebras, Kac Moody groups.

2010 Mathematics subject classification: 17B67.

Índice general

Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Órbitas nilpotentes en Álgebras de Lie de dimensión finita	1
1.2. Diagramas de Dynkin con pesos	5
1.3. Órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$	6
2. Álgebras y grupos de Kac Moody	11
2.1. Álgebras de Kac Moody	11
2.1.1. Definición y clasificación de álgebras de Kac Moody	11
2.1.2. Descomposición en espacios raíces	14
2.1.3. Grupo de Weyl	15
2.2. Álgebras de Kac Moody afines	18
2.3. Grupo de Kac Moody	24
3. Órbitas localmente nilpotentes	27
3.1. Definición	27
3.2. Estructura	28
3.2.1. Endomorfismos nilpotentes	28
3.2.2. Subálgebras \mathfrak{b}_w	29
3.2.3. Componente de la derivación de elementos localmente nilpotentes	31
3.2.4. Elementos destacados en órbitas localmente nilpotentes	32
3.2.5. Elementos nilpotentes	33
4. Clasificación de órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$	35
4.1. Matrices cuasi-Jordan	35
4.2. Órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$	36
5. Triplas estándar y diagramas de Dynkin	49
5.1. Triplas estándar	49
5.2. Diagramas de Dynkin con pesos	52
A. Grupos de Kac Moody	55
A.0.1. Definición	55
A.0.2. Representación adjunta	61
A.0.3. Relación entre los grupos \mathcal{G} y $\bar{\mathcal{L}}(\dot{G})$	63

Introducción

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita. Consideremos \dot{G}_{ad} el grupo adjunto de \mathfrak{g} y Ad la representación adjunta de \dot{G}_{ad} sobre \mathfrak{g} . Decimos que un elemento $x \in \mathfrak{g}$ es nilpotente en \mathfrak{g} , si adx es un endomorfismo nilpotente sobre \mathfrak{g} . Ahora, si $x \in \mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces, para todo $g \in \dot{G}_{\text{ad}}$, $\text{Ad } g(x)$ también lo es. Este hecho permite definir las órbitas nilpotentes en un álgebra de Lie semisimple: si $x \in \dot{G}_{\text{ad}}$ es nilpotente, entonces la órbita a través de x es

$$\mathfrak{O}_x = \text{Ad } \dot{G}_{\text{ad}}(x).$$

Las órbitas nilpotentes tienen una serie de aplicaciones en la teoría de representaciones de grupos de Lie y grupos algebraicos, de álgebras de Lie, grupos de Weyl, entre otros objetos relacionados. Es por esto que ha habido gran interés en su estudio y clasificación. Dynkin y Kostant, dieron una clasificación de dichas órbitas mediante diagramas de Dynkin con pesos [Co]. En el caso particular en el que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, dado que esta es un álgebra de Lie semisimple sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces los elementos nilpotentes en \mathfrak{g} , son justamente los endomorfismos nilpotentes de traza 0. En este caso (y en general para las álgebras de Lie semisimples clásicas) la forma normal de Jordan nos permite parametrizar las órbitas nilpotentes en \mathfrak{g} mediante particiones de n . Para el caso de las órbitas nilpotentes en álgebras de Lie excepcionales, aunque se tiene que hay una correspondencia biyectiva entre diagramas de Dynkin con pesos y órbitas nilpotentes, fueron Bala y Carter quienes determinaron qué diagramas de Dynkin con pesos correspondían en efecto a órbitas nilpotentes en dichas álgebras.

Las álgebras de Kac Moody, son álgebras de Lie, las cuales contienen a las álgebras de Lie de dimensión finita. Las álgebras de Kac Moody (indescomponibles) se dividen en tres tipos: las de tipo finito (álgebras de Lie semisimples de dimensión finita), las afines y las indefinidas. Las álgebras afines son las más estudiadas entre las álgebras de Lie de dimensión infinita y tienen extensas aplicaciones. Estas están completamente clasificadas y poseen una interesante teoría de representaciones, pero más aún, tanto su clasificación como su teoría de representaciones, son muy similares a la de las álgebras de Lie simples.

Es justamente esta extensibilidad de la teoría de álgebras de Lie semisimples a la de álgebras afines, la que nos ha llevado a preguntarnos si es posible hablar de órbitas nilpotentes en el contexto afín y si una clasificación o parametrización de estos objetos es posible.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie simple compleja, y $\mathcal{L}(\mathfrak{g}) := \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ el álgebra de lazos asociada a \mathfrak{g} . Entonces, el álgebra

$$\mathfrak{g} = \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

con el corchete dado por

$$\begin{aligned} [t^m \otimes x + \lambda c + \mu d, t^n \otimes y + \lambda' c + \mu' d] = \\ = t^{m+n} \otimes [x, y] + \mu n t^n \otimes y - \mu' m t^m \otimes x + m \delta_{m,-n} \langle x, y \rangle c \end{aligned}$$

donde \langle, \rangle denota la forma de Killing sobre $\hat{\mathfrak{g}}$, para $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \hat{\mathfrak{g}}$, es un álgebra de Kac Moody afín. Definimos la extensión de \mathfrak{g} , como el álgebra

$$\hat{\mathfrak{g}} := \mathbb{C}[[t]][t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

y cuyo corchete se define extendiendo naturalmente la definición sobre \mathfrak{g} .

La correspondencia entre álgebras de Lie semisimples complejas de dimensión finita y grupos de Lie conexos, simplemente conexos, ha sido extendida por Kac-Peterson a la correspondencia entre Álgebras de Kac Moody y ciertos grupos topológicos simplemente conexos, conocidos como grupos de Kac Moody [Ku]. Estos grupos se comportan como grupos de Lie, en el sentido en que ambos contienen un toro maximal de dimensión finita y un grupo de Weyl.

En la literatura se encuentran diversas construcciones de grupos de Kac Moody asociados a álgebras de Kac Moody. Nosotros trabajaremos con el grupo de Kac Moody maximal [Ku], que a su vez es presentado de diferentes maneras. En el caso más general, este es el producto amalgamado de un cierto sistema de grupos. Otra construcción, realizada para los grupos de Kac Moody asociados a álgebras de Kac Moody afines, con la cual estaremos trabajando, es realizada a partir del grupo de lazos (loop) asociada al álgebra de Lie de dimensión finita. En general \mathcal{G} es un grupo ind-algebraico y comparte muchas propiedades importantes con los grupos algebraicos simples, como por ejemplo, la descomposición de Bruhat y la descomposición Gaussiana generalizada.

Denotamos por Ad la representación adjunta de \mathcal{G} sobre el álgebra $\hat{\mathfrak{g}}$. Diremos que $X \in \mathfrak{g}$ (resp. $X \in \hat{\mathfrak{g}}$) es *localmente nilpotente sobre \mathfrak{g}* (resp. sobre $\hat{\mathfrak{g}}$), si el endomorfismo $\text{ad}_{\mathfrak{g}} X$ es localmente nilpotente sobre \mathfrak{g} (resp. $\text{ad}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ es localmente nilpotente sobre $\hat{\mathfrak{g}}$). Todos los elementos localmente nilpotentes en un álgebra de Kac Moody afín $\hat{\mathfrak{g}}$ extendida, son de hecho, nilpotentes. Además, se tiene que para todo $X \in \hat{\mathfrak{g}}$ nilpotente y $g \in \mathcal{G}$, $\text{Ad } g(X)$ también es nilpotente, por lo que tiene sentido hablar de órbitas nilpotentes en $\hat{\mathfrak{g}}$. En este trabajo daremos algunas propiedades de los elementos nilpotentes en álgebras de Kac Moody afines y damos una parametrización de las órbitas nilpotentes en el caso particular $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$.

A continuación daremos un esquema de lo que se trabajará en cada capítulo:

En el capítulo 1, describimos la clasificación de las órbitas nilpotentes en álgebras de Lie semisimples complejas de dimensión finita, bajo la acción adjunta del grupo \hat{G}_{ad} sobre el álgebra $\hat{\mathfrak{g}}$, mediante diagramas de Dynkin con pesos.

En el capítulo 2, damos la definición de álgebras y grupos de Kac Moody. En la primera sección definimos las álgebras de Kac Moody asociadas a matrices de Cartan generalizadas, damos su descomposición triangular, definimos su grupo de Weyl. En la siguiente sección presentamos las álgebras de Kac moody afines como extensiones centrales de álgebras de lazos (loop). Igualmente, presentamos los grupos de Kac Moody como extensiones centrales de grupos de lazos.

En el apéndice agregamos además la construcción y definición formal de grupos de Kac Moody, la cual hace uso de la teoría de pro-grupos y pro-álgebras de Lie y vemos cual es la conexión entre esta presentación y la dada en el capítulo 2 (Ver [Ku] cap. 6 y 13).

En el capítulo 3 presentamos los objetos centrales de este trabajo, es decir, definimos los elementos nilpotentes y las órbitas nilpotentes en álgebras de Kac Moody afines bajo la acción adjunta del grupo \mathcal{G} sobre el álgebra $\hat{\mathfrak{g}}$. Se dan algunos resultados de estructura de estas órbitas, y en particular se muestra que todo elemento nilpotente en \mathfrak{g} es conjugado por \mathcal{G} a un elemento en $\mathbb{C}[[t]] \otimes \mathfrak{h}^+ \oplus \mathbb{C}c$, es decir, todo elemento nilpotente es \mathcal{G} -conjugado a uno cuya componente en $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}[[t]][t^{-1}])$ es una matriz triangular superior con entradas en $\mathbb{C}[[t]]$.

En el capítulo 4, nos centramos en las órbitas nilpotentes en el álgebra de Kac Moody afín $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$. Introducimos un conjunto de elementos en $\mathfrak{sl}_n(\mathcal{K})$ a las que denominamos matrices cuasi-Jordan, las cuales tienen 0 en toda sus entradas, excepto en las entradas de la forma $(i, i + 1)$ y vemos que toda órbita contiene un elemento de la forma $D + \lambda c$, donde D es una matriz cuasi-Jordan y $\lambda \in \mathbb{C}$. El tener estos elementos destacados en cada órbita, nos permitirá llegar al resultado principal de esta tesis, el cual es la clasificación de las órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$, dado por el siguiente teorema:

Teorema: Hay una correspondencia biyectiva entre órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ y el conjunto $\{(\sigma, j) : \sigma = [i_1, \dots, i_d] \in \mathcal{P}(n) \text{ y } 0 \leq j < i_d\} \times \mathbb{C}$.

Finalmente se asocia a cada órbita nilpotente en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ un diagrama de Dynkin con pesos, pasando por la correspondencia entre ciertos elementos nilpotentes representativos en el álgebra y triplas estándar conteniendo a cada uno de estos como su elemento nilpositivo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos la clasificación de órbitas nilpotentes en álgebras de Lie simples complejas de dimensión finita, mediante diagramas de Dynkin con pesos, de acuerdo a la presentación en [Co].

1.1. Órbitas nilpotentes en Álgebras de Lie de dimensión finita

La idea de la clasificación de las órbitas nilpotentes mediante diagramas de Dynkin con pesos, requiere establecer una correspondencia uno a uno entre órbitas nilpotentes y una cierta colección finita de órbitas semisimples denominadas órbitas semisimples distinguidas.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita. Consideremos la aplicación adjunta

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}); \quad \text{ad}_x(y) = [x, y] \text{ si } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Definición 1.1.1 *Decimos que un elemento $x \in \mathfrak{g}$ es nilpotente (respectivamente semisimple) si ad_x es un endomorfismo nilpotente (respectivamente semisimple) de \mathfrak{g} .*

Notemos que en un álgebra asociativa se dice que un elemento x es *nilpotente*, si $x^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$; formalmente la definición en 1.1.1 es la de ad-nilpotencia. En un álgebra de Lie arbitraria tenemos que la nilpotencia de un elemento implica la ad-nilpotencia del mismo, pero la recíproca no siempre se tiene. Sin embargo, si el álgebra de Lie es semisimple, como en nuestro caso, las dos definiciones son equivalentes. Por esto denominaremos a los elemento ad-nilpotentes, elementos nilpotentes.

Sean $\mathcal{S} = \{\text{elementos semisimples de } \mathfrak{g}\}$, $\mathcal{N} = \{\text{elementos nilpotentes de } \mathfrak{g}\}$. Se tiene que $\mathcal{S} \cap \mathcal{N} = \{0\}$.

Sabemos que un álgebra de Lie tiene asociados diversos grupos de Lie, para el estudio de la clasificación de órbitas nilpotentes se trabaja particularmente con el grupo adjunto G_{ad} , el cual es un grupo de Lie conexo complejo, definido como el subgrupo de $GL(\mathfrak{g})$ con álgebra de Lie $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$.

Sea G un grupo de Lie semisimple conexo con álgebra de Lie \mathfrak{g} , y

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$$

la representación adjunta de G . Para $g \in G$, $\text{Ad}(g)$ es la diferencial en la identidad del automorfismo interior dado por $\text{Int}_g(x) = gxg^{-1}$. Entonces, definimos el grupo adjunto de \mathfrak{g} como

$$G_{\text{ad}} := \text{Im Ad} \tag{1.1}$$

Luego, G_{ad} es un subgrupo de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

Definición 1.1.2 Sea $x \in \mathfrak{g}$. La órbita adjunta en \mathfrak{g} a través de x es el conjunto

$$\mathfrak{D}_x := G_{\text{ad}} \cdot x = \{\phi(x) \mid \phi \in G_{\text{ad}}\}$$

Si $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$, entonces tenemos que

$$\phi \cdot \text{ad}_x \cdot \phi^{-1} = \text{ad}_{\phi(x)} \quad (1.2)$$

por lo tanto, si $x \in \mathfrak{g}$ es nilpotente (respectivamente semisimple), entonces $\phi(x)$ es nilpotente (respectivamente semisimple), para todo $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$.

Definición 1.1.3 Una órbita adjunta \mathfrak{D}_x en \mathfrak{g} se denomina órbita nilpotente (respectivamente órbita semisimple), si x es nilpotente (respectivamente semisimple).

Observación 1.1.1 Si \mathfrak{D}_x es una órbita nilpotente (respectivamente semisimple) en \mathfrak{g} , entonces por 1.2 tenemos que todo elemento en \mathfrak{D}_x es nilpotente (respectivamente semisimple).

El paso clave para la clasificación de órbitas nilpotentes en \mathfrak{g} mediante diagramas de Dynkin con pesos, es el de asociar a cada órbita nilpotente una subálgebra de \mathfrak{g} la cual resultará isomorfa al álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Para ver como se da esta correspondencia empezaremos dando la siguiente definición.

Definición 1.1.4 Una tripla $\{h, x, y\} \subset \mathfrak{g}$ se denomina tripla estándar, si la subálgebra de \mathfrak{g} generada por $\{h, x, y\}$ es isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Es decir, se satisfacen las relaciones

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h.$$

A los elementos h, x, y se les denomina elemento neutral, nilpositivo, y nilnegativo respectivamente.

El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es el álgebra de Lie simple no abeliana de menor dimensión, $\dim \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = 3$. Toda subálgebra de \mathfrak{g} isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es generada por una tripla estándar.

Teorema 1.1.1 (Jacobson-Morozov) Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja. Si $x \in \mathfrak{g}$ es un elemento nilpotente no nulo, entonces existe una tripla estándar para \mathfrak{g} cuyo elemento nilpositivo es x .

Demostración. Ver ([Co], Teorema 3.3.1). ■

Denotamos por

$$\mathcal{A}_{\text{triple}} = \{G_{\text{ad}} - \text{clases de conjugación de triplas estándar en } \mathfrak{g}\} \quad (1.3)$$

y definimos la aplicación

$$\Omega : \mathcal{A}_{\text{triple}} \rightarrow \{\text{Órbitas nilpotentes en } \mathfrak{g}\} \quad (1.4)$$

donde $\Omega(\{h, x, y\}) = \mathfrak{D}_x$. La aplicación Ω está bien definida pues todo elemento nilpositivo de una tripla estándar en \mathfrak{g} es nilpotente en \mathfrak{g} . Del teorema 1.1.1 se deduce directamente que Ω

es sobreyectiva. Esta aplicación resultará también inyectiva, pero antes de mostrar esto, debemos hacer una exposición más detallada de la estructura de los centralizadores de elementos nilpotentes.

Sea $x \in \mathfrak{g}$ nilpotente, entonces el teorema 1.1.1 nos permite encontrar una tripla estándar $\{h, x, y\}$ teniendo a x como su elemento nilpositivo. Como ad_h actúa semisimplemente sobre \mathfrak{g} , entonces podemos descomponer a \mathfrak{g} en la suma de sus ad_h -espacios propios:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathfrak{g}_\lambda, \quad \mathfrak{g}_\lambda = \{z \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_h z = \lambda z\} \quad (1.5)$$

Sea \mathfrak{a} la subálgebra de \mathfrak{g} generada por $\{h, x, y\}$, como mencionamos anteriormente \mathfrak{a} es isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. La representación adjunta de \mathfrak{a} sobre \mathfrak{g} da a \mathfrak{g} una estructura de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulo, luego \mathfrak{g} se puede descomponer como suma de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulos irreducibles. Antes de continuar con nuestro propósito, daremos un importante resultado sobre la estructura de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulos irreducibles.

Como antes consideraremos que el álgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ es generada por h, x e y . Sea V un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulo de dimensión finita. Dado que h actúa semisimplemente sobre V , entonces V es suma directa de espacios propios $V_\lambda = \{v \in V : h \cdot v = \lambda v\}$ para $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $V_\lambda \neq 0$, decimos que λ es un *peso* de h en V y V_λ es un *espacio peso*.

Lema 1.1.2 *Si $v \in V_\lambda$, entonces $x \cdot v \in V_{\lambda+2}$ y $y \cdot v \in V_{\lambda-2}$.*

Demostración. Ver ([Hu1], lema página 31). ■

Como V es un espacio de dimensión finita y $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda$, entonces existe $V_\lambda \neq 0$ tal que $V_{\lambda+2} = 0$; para tal λ , los elementos de V_λ se denominarán *vectores maximales de peso λ* .

Lema 1.1.3 *Sea V un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulo irreducible de dimensión finita, $v_0 \in V_\lambda$ un vector maximal. Supongamos $v_{-1} = 0$ y $v_i = (1/i!)y^i \cdot v_0$, ($i \geq 0$); entonces*

1. $h \cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i$,
2. $y \cdot v_i = (i + 1)v_{i+1}$,
3. $x \cdot v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$ ($i \geq 0$).

Proposición 1.1.4 *Sea V un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ módulo irreducible*

1. *Relativo a h , V es suma directa de espacios peso V_μ , con $\mu = m, m - 2, \dots, -(m - 2), -m$; donde $m + 1 = \dim V$ y $\dim V_\mu = 1$ para todo μ .*
2. *V tiene (bajo múltiplos escalares) un vector maximal único, cuyo peso (llamado el peso máximo de V) es m .*
3. *Para todo $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ existe a lo sumo (bajo isomorfismo) un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -módulo irreducible de dimensión $m + 1$.*

Demostración. Ver ([Hu1] página 33). ■

La parte (1) de la anterior proposición implica que ad_h toma valores propios enteros sobre los sumandos irreducibles, por lo tanto, ad_h toma valores propios enteros sobre \mathfrak{g} . Así,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i \quad (1.6)$$

Por la identidad de Jacobi tenemos que $\mathfrak{g}^x = \{z \in \mathfrak{g} \mid [z, x] = 0\}$ es ad_h -estable. Luego

$$\mathfrak{g}^x = \bigoplus_{i \in F} \mathfrak{g}_i^x, \quad \mathfrak{g}_i^x = \mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{g}_i \quad (1.7)$$

Más aún, por el lema 1.1.3 y la proposición 1.1.4 se tiene que \mathfrak{g}^x es la suma de los espacios de peso máximo de cada submódulo irreducible, entonces

$$\mathfrak{g}^x = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i^x.$$

Lema 1.1.5 *Sea x un elemento nilpotente de un álgebra de Lie semisimple compleja \mathfrak{g} . Entonces $\mathfrak{u}^x := \mathfrak{g}^x \cap [\mathfrak{g}, x]$ es un ideal nilpotente, ad_h -invariante de \mathfrak{g}^x . Más aún, $\mathfrak{u}^x = \bigoplus_{i > 0} \mathfrak{g}_i^x$.*

Demostración. Ver ([Co], Lema 3.4.5). ■

Sea U^x el subgrupo conexo de G_{ad}^x con álgebra de Lie \mathfrak{u}^x , donde G_{ad}^x denota el centralizador de x en G_{ad} .

Teorema 1.1.6 (Kostant) *Sean $\{h, x, y\}$ y $\{h', x, y'\}$ triplas estándar en \mathfrak{g} con el mismo elemento nilpositivo x . Entonces existe $g \in U^x$ tal que $g \cdot h = h'$, $g \cdot x = x$ y $g \cdot y = y'$.*

Demostración. Ver ([Co], Teorema 3.4.10). ■

La inyectividad de Ω , es equivalente a ver que si dos elementos nilpotentes pertenecen a la misma órbita entonces estos pertenecen a triplas estándar conjugadas, lo cual se obtiene inmediatamente del teorema anterior. Con lo que queda demostrada la correspondencia biyectiva entre clases de conjugación de triplas estándar y órbitas nilpotentes.

Continuando con el objetivo de establecer una correspondencia entre órbitas nilpotentes y un subconjunto de órbitas semisimples, consideremos la aplicación

$$\Upsilon : \mathcal{A}_{\text{triple}} \rightarrow \{\text{Órbitas semisimples en } \mathfrak{g}\}, \quad (1.8)$$

donde $\Upsilon(\{h, x, y\}) = \mathfrak{D}_h$. Como h es un elemento semisimple en \mathfrak{a} , entonces h es semisimple en \mathfrak{g} , luego Υ está bien definida. El siguiente resultado nos permite establecer que la aplicación Υ es además inyectiva.

Teorema 1.1.7 (Mal'cev) *Cualesquiera dos triplas estándar con el mismo elemento neutral son conjugadas por algún elemento de G_{ad} .*

Demostración. Ver ([Co], Teorema 3.4.12). ■

Observación 1.1.2 *Más precisamente, en [Co] se muestra que el elemento en el teorema 1.1.7 conjugando tales triplas pertenece a la componente conexa del estabilizador de h en G_{ad} .*

Sea $S_{\text{dist}} := \text{Im } \Upsilon$. Decimos que las órbitas semisimples en S_{dist} son *órbitas semisimples distinguidas*. La aplicación $\Upsilon : \mathcal{A}_{\text{triple}} \rightarrow S_{\text{dist}}$ es sobreyectiva. Así, las aplicaciones Ω y Υ nos permiten establecer una correspondencia uno a uno entre órbitas nilpotentes y órbitas semisimples distinguidas.

1.2. Diagramas de Dynkin con pesos

Un diagrama de Dynkin con pesos es un diagrama de Dynkin, en el cual cada nodo está etiquetado con un cierto número entero no negativo. En esta sección mostraremos como asociar a cada órbita nilpotente en un álgebra de Lie semisimple compleja un diagrama de Dynkin con pesos.

En la sección anterior establecimos una correspondencia biyectiva entre órbitas nilpotentes y órbitas semisimples distinguidas vía

$$\mathfrak{D}_x \rightsquigarrow \{h, x, y\} \rightsquigarrow \mathfrak{D}_h$$

donde $\{h, x, y\}$ es una tripla estándar conteniendo a x como su elemento nilpositivo y a h como su elemento neutro.

Fijemos una subálgebra de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , y una subálgebra de Borel \mathfrak{b} conteniendo a \mathfrak{h} . Entonces \mathfrak{b} se puede descomponer como

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n},$$

donde $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ consiste exactamente de los elementos nilpotentes en \mathfrak{b} . Más aún se puede elegir un sistema de raíces positivas Φ^+ tal que

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Sea Δ una base de raíces simples para Φ^+ . Sea $\bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{h} \oplus \bar{\mathfrak{n}}$ la subálgebra de Borel opuesta, tal que $\bar{\mathfrak{n}} = \sum_{\alpha \in -\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$.

Vamos a describir como asociamos a cada órbita nilpotente en \mathfrak{g} un diagrama de Dynkin con pesos. Sea \mathfrak{D} una órbita nilpotente distinta de cero en \mathfrak{g} :

1. Por el Teorema de Jacobson-Morozov 1.1.1, todo elemento $x \in \mathfrak{D}$ puede ser embebido en una tripla estándar $\{h, x, y\}$.
2. Como h es semisimple en \mathfrak{g} , existe una subálgebra de Cartan \mathfrak{h}_x conteniendo a h . Ahora, toda subálgebra de Cartan es conjugada por un elemento en G_{ad} a \mathfrak{h} . Luego, existe $g \in G_{\text{ad}}$ tal que $g \cdot \mathfrak{h}_x = \mathfrak{h}$. Así, la tripla $g \cdot \{h, x, y\}$ tiene su elemento neutral en \mathfrak{h} . Sin pérdida de generalidad podemos asumir entonces que $h \in \mathfrak{h}$.
3. Sea \mathcal{W} el grupo de Weyl para el sistema de raíces Δ . Las órbitas semisimples en un álgebra de Lie semisimple compleja están en correspondencia biyectiva con \mathfrak{h}/\mathcal{W} (Ver [Co], Teorema 2.2.4), donde \mathfrak{h}/\mathcal{W} es el conjunto de clases de equivalencia

$$h_1 \sim h_2 \text{ sii existe } w \in \mathcal{W} \text{ tal que } w \cdot h_1 = h_2.$$

La correspondencia está dada por la aplicación

$$\mu : \mathfrak{h}/\mathcal{W} \rightarrow \{\mathfrak{D}_x | x \in S\}; \quad \mu([z]) = \mathfrak{D}_z$$

donde z es un representante arbitrario de la clase de equivalencia $[z]$.

Ahora, sea D un dominio fundamental para la acción de \mathcal{W} sobre \mathfrak{h} , entonces todo elemento en \mathfrak{h} es \mathcal{W} -conjugado a exactamente un elemento en D . Así, en particular las órbitas semisimples son parametrizadas por D . Lo que implica que podemos conjugar $\{h, x, y\}$ por un elemento en G_{ad} , de tal manera que $h \in D$. En este caso, el dominio fundamental para la acción de \mathcal{W} sobre \mathfrak{h} es $D = \{x \in \mathfrak{h} | \text{Re}(\alpha(x)) \geq 0 \text{ y si } \text{Re}(\alpha(x)) = 0, \text{ entonces } \text{Im}(\alpha(x)) \geq 0, \text{ para todo } \alpha \in \Delta\}$. Asumamos $h \in D$.

4. Ahora, 1.6 implica que $\alpha(h) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ para todo $\alpha \in \Delta$, por lo tanto, $h \in D$ y

$$\alpha(h) \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \text{ para todo } \alpha \in \Delta. \quad (1.9)$$

Como $y \in \mathfrak{g}_{-2}$, entonces y pertenece a la suma de espacios pesos, cuyos pesos son suma de raíces simples negativas, luego $y \in \bar{\mathfrak{n}}$. Además, como toda raíz negativa es combinación entera de raíces simples negativas, entonces $[x_\alpha, y] \in \bar{\mathfrak{b}}$ para todo $\alpha \in \Delta$. Sea $\alpha \in \Delta$:

- Si $[x_\alpha, y] = 0$, entonces $x_\alpha \in \mathfrak{g}^y$. Luego, por la teoría de las representaciones de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, tenemos que \mathfrak{g}^y es la suma de los espacios de peso mínimo para la acción de \mathfrak{a} sobre \mathfrak{g} , así $\mathfrak{g}^y = \bigoplus_{i \leq 0} (\mathfrak{g}^y \cap \mathfrak{g}_i)$. Esto implica que $\alpha(h) \in \mathbb{N} \cap -\mathbb{N} = \{0\}$.

- Si $[x_\alpha, y] \neq 0$, entonces

$$\text{ad}_h([x_\alpha, y]) = (\alpha(h) - 2)[x_\alpha, y]$$

Pero $[x_\alpha, y] \in \bar{\mathfrak{b}}$ implica que $\alpha(h) - 2 \in -\mathbb{N}$. Así, $\alpha(h) = 1$ o 2 .

Combinando ambos casos, tenemos que $\alpha(h) \in \{0, 1, 2\}$ para todo $\alpha \in \Delta$.

5. Finalmente tenemos que h está completamente determinado por los valores $\alpha(h)$, $\alpha \in \Delta$, pues Δ es una base de \mathfrak{h}^* . Luego, a la órbita \mathfrak{D} le asociamos el diagrama de Dynkin asociado al álgebra de Lie \mathfrak{g} y etiquetamos cada uno de los nodos del diagrama de la siguiente manera: El nodo correspondiente al espacio raíz simple \mathfrak{g}_α tendrá como etiqueta al autovalor $\alpha(h)$ de h . Por (4), tenemos que las etiquetas solo toman valores $0, 1$ o 2 . Tal diagrama de Dynkin con las etiquetas se denomina *el diagrama de Dynkin con pesos asociado a \mathfrak{D}* y será denotado por $\Delta(\mathfrak{D})$.

Esta parametrización nos permite obtener además el siguiente resultado, siendo $\text{rg}(\mathfrak{g})$ el rango del álgebra \mathfrak{g} .

Teorema 1.2.1 (Kostant) *Existen finitas órbitas nilpotentes en \mathfrak{g} . Más aún hay a lo sumo $3^{\text{rg}(\mathfrak{g})}$. El diagrama de Dynkin con pesos de una órbita nilpotente es un invariante completo, es decir, $\Delta(\mathfrak{D}) = \Delta(\mathfrak{D}')$ si y solo si $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'$.*

Demostración. Ver ([Co], Teorema 3.5.4). ■

Observación 1.2.1 *Tenemos que la correspondencia entre órbitas nilpotentes y diagramas de Dynkin con pesos no es sobreyectiva, es decir, no a todo diagrama de Dynkin con pesos le corresponderá una órbita nilpotente en \mathfrak{g} .*

1.3. Órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

Esta sección la dedicaremos al estudio de órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Mostraremos como construir triplas estándar conteniendo a un elemento nilpotente. Además, veremos que para este tipo de álgebras las órbitas nilpotentes también pueden ser parametrizadas por las particiones de n . Este método de clasificación nos servirá para conocer que diagramas de Dynkin con pesos de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ corresponden a órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

Como lo mencionamos en la sección anterior, las órbitas nilpotentes que se están estudiando son órbitas a través de la acción adjunta del grupo adjunto asociado a $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. El grupo adjunto para $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ es el grupo $PSL_n(\mathbb{C}) = SL_n(\mathbb{C})/\{1, -1\}$, donde $SL_n(\mathbb{C}) = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) : \det g = 1\}$.

Recordemos que una *partición de n* es una tupla $[d_1, \dots, d_k]$ de enteros positivos tales que

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k > 0 \quad \text{y} \quad d_1 + d_2 + \dots + d_k = n$$

Si $i \in \mathbb{Z}$, construimos la matriz

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual es denominada *bloque elemental de Jordan*, esta es una matriz nilpotente de tamaño $i \times i$, o equivalentemente un endomorfismo nilpotente de \mathbb{C}^i . Denotamos por $\mathcal{P}(n)$ el conjunto de todas las particiones de n . Si $\mathbf{p} = [d_1, \dots, d_k] \in \mathcal{P}(n)$, entonces denotamos por X_d al elemento en $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, dado por

$$X_d = X_{[d_1, \dots, d_k]} = \begin{pmatrix} J_{d_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{d_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{d_k} \end{pmatrix}$$

donde J_{d_i} es un bloque elemental de Jordan de tamaño d_i para cada $i = 1, \dots, k$. Luego, X_d es un endomorfismo nilpotente de \mathbb{C}^n . Más aún, X_d es un elemento nilpotente de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

Recíprocamente si $x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ (en general podemos considerar $x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$) nilpotente, entonces existen enteros positivos r y d_1, \dots, d_r y vectores v_1, v_2, \dots, v_r , haciendo que

$$\{x^j v_i \mid 1 \leq i \leq r, 0 \leq j < d_i\} \quad (1.10)$$

sea una base de \mathbb{C}^n y en donde $x^{d_i} v_i = 0$, para cada i .

Podemos asumir (después de permutar la base si es necesario) que $d_1, \dots, d_r > 0$, tenemos claramente que $\sum_{i=1}^r d_i = n$. Así, los d_i forman una partición de n . La teoría de la forma normal de Jordan, nos dice que los d_i están determinados de forma única por x .

Proposición 1.3.1 *Hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto de órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ y el conjunto $\mathcal{P}(n)$ de particiones de n .*

Demostración. Consideremos la aplicación Λ entre el conjunto de órbitas nilpotentes de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ y $\mathcal{P}(n)$ definida de la siguiente manera: Si \mathfrak{D} es una órbita nilpotente de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ y $x \in \mathfrak{D}$, entonces x es $GL_n(\mathbb{C})$ conjugado a una matriz en bloques elementales de Jordan, cuyos bloques son de tamaño d_1, \dots, d_k para algunos $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{N}$, satisfaciendo que $d_1 + \dots + d_k = n$. Además podemos asumir que $d_1 \geq \dots \geq d_k > 0$. Entonces como d_1, \dots, d_k es una partición de n , definimos $\Lambda(\mathfrak{D}) = [d_1, \dots, d_k]$.

Tenemos que las $GL_n(\mathbb{C})$ y las $PSL_n(\mathbb{C})$ clases de conjugación coinciden pues si $g \cdot Z = Z'$ para algún $g \in GL_n(\mathbb{C})$ y algunos $Z, Z' \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, entonces $\frac{g}{\sqrt{\det g}} \cdot Z = g \cdot Z = Z'$ y $\frac{g}{\sqrt{\det g}} \in PSL_n(\mathbb{C})$. Así, si $x, x' \in \mathfrak{D}$, entonces son $PSL_n(\mathbb{C})$ conjugados a $X_d, X_{d'}$ respectivamente, para algunos d, d' particiones de n ; pero como x, x' son $PSL_n(\mathbb{C})$ conjugados, entonces $X_d, X_{d'}$ también lo son, por lo tanto $d = d'$.

La inyectividad de Λ se tiene directamente de la unicidad de la forma de Jordan para matrices. ■

Sea $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ el álgebra de Lie generada por

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para todo $r \in \mathbb{N}$, definimos el morfismo de álgebras de Lie $\rho_r : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ definido por

$$\begin{aligned} \rho_r(h) &= \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -r+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r \end{pmatrix} \\ \rho_r(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \rho_r(y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_r & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $\mu_i = i(r+1-i)$.

Ya sabemos que toda órbita nilpotente \mathfrak{D} en $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ contiene un elemento de la forma X_d para algún $d \in \mathcal{P}(n)$, entonces $g \cdot x = X_d$ para algún $g \in PSL_n(\mathbb{C})$. Ahora, definimos el morfismo de álgebras de Lie

$$\phi_{\mathfrak{D}} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), \quad \text{via } \phi_{\mathfrak{D}} = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \rho_{d_i-1}.$$

Entonces, $\phi_{\mathfrak{D}}(x) = X_d$ y más aún

$$\{\phi_{\mathfrak{D}}(h), \phi_{\mathfrak{D}}(x), \phi_{\mathfrak{D}}(y)\} = \{H_d, X_d, Y_d\}$$

es una tripla estándar en $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ conteniendo a X_d . Así, $g^{-1} \cdot \{H_h, X_d, Y_d\}$ es una tripla estándar conteniendo a x .

Queremos asociar a \mathfrak{D} su respectivo diagrama de Dynkin con pesos, para esto debemos encontrar un elemento H en la órbita de H_d perteneciendo al dominio fundamental para alguna subálgebra de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} y un sistema de raíces Δ de \mathfrak{g} .

Consideremos $\mathfrak{h} = \{\text{matrices diagonales en } \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \text{ de traza } 0\}$, sabemos que esta es una subálgebra de Cartan para $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Elegimos un sistema de raíces Δ para \mathfrak{g} de tal manera que la correspondiente subálgebra de borel \mathfrak{b} de \mathfrak{g} consiste de las matrices triangulares superiores de traza 0. Con esta elección de Δ , tenemos que

$$D = \{\text{diag}(h_1, \dots, h_n) \mid h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n\}$$

es el dominio fundamental para la acción de \mathcal{W} sobre \mathfrak{h} , donde $\mathcal{W} = S_n$ es el grupo simétrico de permutaciones de n elementos.

Tenemos que

$$H_d = \begin{pmatrix} D(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D(d_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D(d_k) \end{pmatrix}$$

donde $D(d_i) = \rho_{d_i}(h)$. Si reordenamos al conjunto formado por las entradas de la diagonal de H_d ,

$$\{d_1 - 1, d_1 - 3, \dots - d_1 + 3, -d_1 + 1, \dots, d_k - 1, \dots - d_k + 3, -d_1 + 1\} = \{d_{i_1}, \dots, d_{i_n}\}$$

de tal manera que $d_{i_1} \geq \dots \geq d_{i_n}$ y consideramos

$$\bar{H}_d = \begin{pmatrix} d_{i_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{i_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{i_n} \end{pmatrix}$$

entonces $\bar{H}_d \in D$.

Lema 1.3.2 *El diagrama de Dynkin con pesos asociado a \mathfrak{D}_{X_d} para $d \in \mathcal{P}(n)$ está dado por*

$$\begin{array}{ccccccc} h_1-h_2 & \text{---} & h_2-h_3 & \text{---} & \dots & \text{---} & h_{n-2}-h_{n-1} & \text{---} & h_{n-1}-h_n \\ \circ & & \circ & & & & \circ & & \circ \end{array}$$

Ejemplo 1.3.1 *En $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, tenemos 3 órbitas nilpotentes, en la tabla encontramos la tripla estándar correspondiente a cada órbita y su diagrama de Dynkin con pesos,*

Órbita	X_d	H_d	\bar{H}_d	$\Delta(\mathfrak{D}_d)$
$\mathfrak{D}_{[3]}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{array}{c} 2 \\ \circ \text{---} \circ \\ 2 \end{array}$
$\mathfrak{D}_{[2,1]}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{array}{c} 1 \\ \circ \text{---} \circ \\ 1 \end{array}$
$\mathfrak{D}_{[1,1,1]}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{array}{c} 0 \\ \circ \text{---} \circ \\ 0 \end{array}$

En el caso de $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$,

Órbita	X_d	H_d	\overline{H}_d	$\Delta(\mathfrak{D}_d)$
$\mathfrak{D}_{[4]}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{array}{c} 2 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$
$\mathfrak{D}_{[3,1]}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{array}{c} 2 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$
$\mathfrak{D}_{[2,2]}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{array}{c} 0 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$
$\mathfrak{D}_{[2,1,1]}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{array}{c} 1 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$
$\mathfrak{D}_{[4]}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{array}{c} 0 \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$

Capítulo 2

Álgebras y grupos de Kac Moody

En este capítulo, presentamos algunas nociones generales de álgebras y grupos de Kac Moody, haciendo especial hincapié en los de tipo afín, lo cuales son el centro de estudio de este trabajo. Las álgebras de Kac Moody afines son una clase especial de álgebras de Lie de dimensión infinita. Estas álgebras se pueden realizar como extensiones centrales de álgebras loop de álgebras de Lie semisimples. Las principales referencias para este capítulo serán [Ka] y [Ku].

2.1. Álgebras de Kac Moody

2.1.1. Definición y clasificación de álgebras de Kac Moody

En esta sección presentamos las álgebras de Kac Moody, las cuales se pueden clasificar en términos de sus matrices de Cartan generalizadas, o equivalentemente en términos de sus diagramas de Dynkin.

Definición 2.1.1 Una matriz de Cartan generalizada de tamaño n , es una matriz $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, con entradas enteras, tal que, para todo $1 \leq i, j \leq n$:

1. $c_{ii} = 2$,
2. $c_{ij} < 0$ si $i \neq j$,
3. $c_{ij} = 0$ si y solo si $c_{ji} = 0$.

Recordemos que una matriz de Cartan, es una matriz de Cartan generalizada, satisfaciendo además que $\det C > 0$.

Definición 2.1.2 Sea C una matriz de Cartan generalizada de tamaño n y de rango l . Una realización de C es una tripla $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, donde:

1. \mathfrak{h} es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión $2n - l$;
2. $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ es un subconjunto linealmente independiente de \mathfrak{h}^* ;
3. $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$ es un subconjunto linealmente independiente de \mathfrak{h} ,

tal que $\alpha_j(\alpha_i^\vee) = c_{ij}$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Proposición 2.1.1 *Sea C una matriz de Cartan generalizada, entonces existe $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, una realización de C . Más aún esta es única salvo isomorfismo, es decir, si $(\mathfrak{h}', \Pi', \Pi'^\vee)$ es otra realización de C , entonces existe $\theta : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}'$ isomorfismo de álgebras, tal que $\theta(\alpha_i^\vee) = \alpha_i'^\vee$ y $\theta^*(\alpha_i') = \alpha_i$, donde $\theta^* : \mathfrak{h}'^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$ es el isomorfismo inducido por θ .*

Demostración. (Ver proposición 1.1 [Ka]). ■

Ahora, veremos cómo un álgebra de Kac Moody es determinada por una matriz de Cartan generalizada.

Definición 2.1.3 *Sea C una matriz de Cartan generalizada y $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ una realización de C . El álgebra de Kac Moody $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$ es el álgebra $L(X)/\langle R \rangle$, donde $L(X)$ es el álgebra asociativa libre generada por*

$$X = \{E_1, \dots, E_n\} \cup \{F_1, \dots, F_n\} \cup \mathfrak{h}$$

y cuyo producto es el conmutador y R consiste de las relaciones

$$(R1) \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0,$$

$$(R2) \quad [H, E_i] = \alpha_i(H)E_i; \quad [H, F_i] = -\alpha_i(H)F_i,$$

$$(R3) \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij}\alpha_i^\vee,$$

$$(R4) \quad (adE_i)^{1-c_{ij}}(E_j) = 0, \quad i \neq j,$$

$$(R5) \quad (adF_i)^{1-c_{ij}}(F_j) = 0, \quad i \neq j,$$

para todo $H \in \mathfrak{h}$, $1 \leq i, j \leq n$.

La subálgebra \mathfrak{h} es llamada *subálgebra de Cartan de \mathfrak{g}* y los elementos E_i, F_i , *generadores de Chevalley*. Las relaciones (R4) y (R5) son llamadas *relaciones de Serre*.

Fijamos un álgebra de Kac Moody $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$ y una realización $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ para C , donde $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ y $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$.

Observación 2.1.1 *El álgebra de Lie \mathfrak{g} no depende de la elección de la realización gracias a la proposición 2.1.1.*

Sea $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ una matriz generalizada de Cartan. Entonces A es llamada *descomponible*, si $\{1, \dots, n\}$ es unión disjunta de subconjuntos no vacíos Y_1, Y_2 , tales que $c_{ij} = 0$ para $i \in Y_1, j \in Y_2$ y $c_{ji} = 0$ para $j \in Y_2$ e $i \in Y_1$. Para $Y \subset \{1, \dots, n\}$ no vacío, sea $C_Y := (c_{ij})_{i, j \in Y}$ una submatriz generalizada de Cartan de C . Así, bajo alguna permutación de $\{1, \dots, n\}$, C es suma de bloques

$$C = \begin{pmatrix} C_{Y_1} & 0 \\ 0 & C_{Y_2} \end{pmatrix}$$

Sean $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ y $(\mathfrak{h}_2, \Pi_2, \Pi_2^\vee)$ realizaciones de C_{Y_1}, C_{Y_2} respectivamente. Entonces $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ es una realización de C , donde $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, $\Pi = \Pi_1 \sqcup \Pi_2$, $\Pi^\vee = \Pi_1^\vee \sqcup \Pi_2^\vee$. En este caso es fácil ver que $\mathfrak{g}(C) \simeq \mathfrak{g}(C_{Y_1}) \oplus \mathfrak{g}(C_{Y_2})$, como álgebras de Lie. Si C no es descomponible, se denomina *indescomponible*.

Es claro que para clasificar las álgebras de Kac Moody, es suficiente con estudiar aquellas asociadas a matrices de Cartan generalizadas indescomponibles. Por ello, en adelante, consideraremos únicamente matrices de este tipo. Recordemos que en particular, las álgebras de Lie simples de dimensión finita, corresponden a matrices de Cartan indescomponibles.

Es de notar que las álgebras de Kac Moody se obtienen en la misma vía que las álgebras de Lie simples de dimensión finita, considerando matrices generalizadas de Cartan en lugar de matrices de Cartan.

Toda matriz de Cartan además es semidefinida positiva, es decir, el determinante de las matrices que se obtienen desde C por eliminar la fila y la columna i es positivo, para cada $i = 1, \dots, n$. Diremos que una matriz de Cartan generalizada semidefinida positiva con determinante 0, es una *matriz afín*. Las álgebras de Kac Moody, asociadas a matrices afines, se denominan *álgebras de Kac Moody afines*. Entre las álgebras de Kac Moody afines, encontramos a su vez dos tipos: las torcidas (twisted) y, las que nos conciernen a nosotros en este trabajo, las no torcidas (untwisted), que como veremos más adelante tienen una clasificación muy similar a la de las álgebras de Lie simples complejas de dimensión finita.

Las álgebras de Kac Moody asociadas a matrices de Cartan generalizadas, que no son de Cartan, ni afines, se denominan *álgebras de Kac Moody indefinidas*.

Ejemplo 2.1.1 Sea

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es claro que C es una matriz afín y $\text{rg}(C) = 1$. Luego, si $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ es una realización para C , la $\dim \mathfrak{h} = 3$.

Consideremos $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^3$ y $\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}^3$ con bases $\{\alpha_1, \alpha_2, d\}$ y $\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \delta\}$, y sean $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ y $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee\}$. El álgebra de Kac Moody asociada a C , es entonces un álgebra de Kac Moody afín, con generadores de Chevalley $\{E_i, F_i | i = 1, 2\}$ y sujeto a las relaciones (R1)-(R5) (más adelante mostraremos explícitamente quienes son).

Las álgebras de Kac Moody están completamente clasificadas mediante diagramas de Dynkin. Lo que se hace es asociar a cada matriz de Cartan generalizada un diagrama de Dynkin, con algunas etiquetas.

Una vez la clasificación de las álgebras de Lie simples de dimensión finita es conocida, la de álgebras de Kac Moody afines es directa. Si consideramos $C = (c_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ una matriz afín, entonces vemos que al borrar la fila y la columna i de C lo que se obtiene es una matriz de Cartan de tamaño n . En lo que sigue, mostraremos una tabla con la clasificación de las álgebras de Kac Moody afines no torcidas (untwisted).

Nombre	Diagrama de Dynkin
$A_1^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ \\ 1 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \circ \\ 1 \end{array}$
$A_n^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ \\ 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \quad \cdots \quad \circ \quad \circ \\ 1 \quad 1 \quad \quad 1 \quad 1 \end{array}$
$B_n^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ \\ 1 \\ \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \Rightarrow \circ \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad \quad 2 \quad 2 \end{array}$
$C_n^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ \Rightarrow \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \Leftarrow \circ \\ 1 \quad 2 \quad \quad 2 \quad 2 \end{array}$
$D_n^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ \\ 1 \\ \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \text{---} \circ \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad \quad 2 \quad 1 \end{array}$
$G_2^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \Rightarrow \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array}$
$F_4^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \Rightarrow \circ \text{---} \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array}$
$E_6^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ \\ 1 \\ \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array}$
$E_7^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ \\ 1 \\ \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array}$
$E_8^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ \\ 1 \\ \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \end{array}$

Mirando la tabla anterior, podemos revisar que en efecto, al eliminar un nodo cualquiera de un diagrama de Dynkin para un álgebra de Kac Moody afin, lo que se obtiene es un diagrama de Dynkin correspondiente a un álgebra de Lie simple. La notación $X_n^{(1)}$ para las álgebras de Kac Moody afines, ha sido elegida de tal manera que, X_n corresponde al álgebra de Lie simple que resulta al remover uno de los nodos del diagrama. El diagrama de $X_n^{(1)}$ tiene $n + 1$ nodos.

Las etiquetas en los diagramas corresponden a las coordenadas del único vector $v = (a_0, \dots, a_n)$, satisfaciendo que $C \cdot v^t = 0$ y tal que los a_i son enteros positivos y primos relativos. La existencia de este vector se obtiene del hecho que $\text{rg}(C) = n$. Las coordenadas del vector v se denominan *números de coxeter*.

Para más detalle en la clasificación de las álgebras de Kac Moody, ver ([Ka], 1.4).

2.1.2. Descomposición en espacios raíces

Sea C una matriz de Cartan de tamaño n y $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$. Consideremos η^+ (respectivamente η^-) la subálgebra de Lie de \mathfrak{g} generada por $\{E_1, \dots, E_n\}$ (respectivamente $\{F_1, \dots, F_n\}$) y $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \eta^+$ la subálgebra de borel de \mathfrak{g} . Definimos el \mathbb{Z} -módulo $\mathcal{Q} := \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*$ el cual denominaremos el *retículo de raíces*. Sea $\mathcal{Q}^+ = \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_+\alpha_i \subset \mathcal{Q}$. Para todo $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, sea

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X, \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}$$

el espacio propio con respecto a la acción de \mathfrak{h} correspondiente al valor propio α .

Teorema 2.1.2 (a) *Descomposición triangular:* $\mathfrak{g} = \eta^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \eta^+$.

(b) *Descomposición en espacios raíces:* $\eta^\pm = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{Q}^+ \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$.

(c) $\dim \mathfrak{g}_\alpha < \infty$ para todo α .

(d) *El álgebra de Lie η^+ (respectivamente η^-) es generada por $\{E_1, \dots, E_n\}$ (respectivamente $\{F_1, \dots, F_n\}$), sujeto a la relación (R4) (respectivamente (R5)) de la definición 2.1.3.*

Demostración. (Ver Teorema 1.2.1, [Ku]). ■

Definición 2.1.4 *Definimos el conjunto de raíces $\Delta := \{\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \{0\} : \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$. Cada elemento en Δ se denomina raíz y, para todo α en Δ , \mathfrak{g}_α se denomina espacio raíz.*

Consideramos $\Delta^+ := \Delta \cap \mathcal{Q}^+$ y $\Delta^- := \Delta \cap \mathcal{Q}^-$, entonces $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ y además la unión es disjunta. Los elementos de Δ^+ (respectivamente Δ^-) se denominan *raíces positivas* (respectivamente *raíces negativas*).

Es claro que $\alpha_i \in \Delta^+$ para todo $1 \leq i \leq n$. Llamaremos a las raíces α_i *raíces simples* y a α_i^\vee *coraíces simples* ($1 \leq i \leq n$)

Proposición 2.1.3 1. *Los espacios raíces $\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ son espacios 1-dimensionales generados por E_i y F_i respectivamente.*

2. *Para todo $\alpha, \beta \in \Delta \setminus \{0\}$, $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*

Demostración. (Ver Proposición 1.5.1, [Ka]). ■

Definimos la *completación de η^+* $= \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$, como

$$\hat{\eta}^+ = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad (2.1)$$

la cual resulta un álgebra de Lie con el corchete definido por

$$\left[\sum_{\alpha \in \Delta^+} x_\alpha, \sum_{\beta \in \Delta^+} y_\beta \right] = \sum_{\gamma \in \Delta^+} \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Delta^+ \\ \alpha + \beta = \gamma}} [x_\alpha, y_\beta] \quad (2.2)$$

para $x_\alpha, y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Dado que para cualquier $\lambda \in \Delta^+$ hay finitos $\alpha, \beta \in \Delta^+$ tales que $\alpha + \beta = \lambda$, 2.2 está bien definido. Similarmente, definimos la completación $\hat{\mathfrak{g}}$ de \mathfrak{g} por

$$\hat{\mathfrak{g}} = \eta^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \hat{\eta}^+, \quad (2.3)$$

con el mismo corchete de 2.2, $\hat{\mathfrak{g}}$ es un álgebra de Lie extendiendo la estructura de álgebra de Lie de \mathfrak{g} .

2.1.3. Grupo de Weyl

Para todo $1 \leq i \leq n$, definimos la reflexión $s_i \in \text{Aut}(\mathfrak{h}^*)$ por

$$s_i(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i, \text{ para } \chi \in \mathfrak{h}^* \quad (2.4)$$

La reflexión s_i fija el hiperplano $V_i = \{\chi \in \mathfrak{h}^* : \langle \chi, \alpha_i^\vee \rangle = 0\}$ punto a punto, $s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$ y $s_i^2 = 1$, $1 \leq i \leq n$

Definición 2.1.5 El grupo de Weyl del álgebra de Kac Moody \mathfrak{g} , es el subgrupo $\mathcal{W} \subset \text{Aut}(\mathfrak{h}^*)$ generado por $\{s_i : 1 \leq i \leq n\}$. Las reflexiones s_i son llamadas reflexiones simples.

Dualizando la acción de \mathcal{W} sobre \mathfrak{h}^* , podemos ver $\mathcal{W} \subset \text{Aut}(\mathfrak{h})$, donde

$$s_i(h) = h - \langle \alpha_i, h \rangle \alpha_i^\vee, \text{ para } h \in \mathfrak{h} \quad (2.5)$$

Proposición 2.1.4 El conjunto de raíces Δ es estable para la acción de \mathcal{W} , es decir $w\alpha \in \Delta$, para todo $w \in \mathcal{W}$ y $\alpha \in \Delta$.

Definición 2.1.6 Sea $w \in \mathcal{W}$. Definimos la longitud de w , $\ell(w)$, a ser el menor $m \in \mathbb{Z}_+$ para el cual $w = s_{i_1} \dots s_{i_m}$, $1 \leq i_j \leq n$. Además, tal expresión con $\ell(w) = n$, es llamada una expresión reducida.

Definición 2.1.7 Sea $T : V \rightarrow V$ una aplicación lineal de un espacio vectorial complejo V . La aplicación T es llamada localmente finita si para cada $v \in V$, existe un subespacio de dimensión finita $W_v \subset V$ conteniendo a v , tal que $TW_v \subset W_v$. Si en adición, $T|_{W_v}$ es una transformación nilpotente, entonces decimos que T es localmente nilpotente.

Observación 2.1.2 Sea $T : V \rightarrow V$ una aplicación lineal de un espacio vectorial complejo V . Si para todo $v \in V$, existe n_v tal que $T^{n_v}(v) = 0$, entonces T es localmente nilpotente. Pues, si para cada $v \in V$, consideramos el subespacio $W_v \subset V$ generado por $\{v, Tv, \dots, T^{n_v-1}v\}$, tenemos que W_v es un espacio de dimensión finita, tal que $T|_{W_v} \subset W_v$ y $T|_{W_v}$ es nilpotente.

Si $T : V \rightarrow V$ es un morfismo localmente finito, podemos definir un automorfismo $\exp_T : V \rightarrow V$ por

$$\exp_T = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \quad (2.6)$$

Definición 2.1.8 Una representación (V, π) de un álgebra de Kac Moody \mathfrak{g} es llamado un módulo peso si V es suma directa de sus \mathfrak{h} -espacios peso, es decir, $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$, donde

$$V_\lambda := \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda(h)v, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}.$$

La multiplicidad de un peso λ es $\text{mult}(\lambda) := \dim(V_\lambda)$.

Un módulo peso V de \mathfrak{g} es llamado una representación integrable si cada E_i, F_i ($1 \leq i \leq n$) actúa de manera localmente nilpotente sobre V .

Definición 2.1.9 Sea $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ y C_λ la representación 1-dimensional de \mathfrak{h} en \mathbb{C} definida por: $x \cdot z = \lambda(x)z$ para $x \in \mathfrak{h}$ y $z \in \mathbb{C}$. Extendemos la estructura de \mathbb{C}_λ a un \mathfrak{b} -módulo, definiendo la acción de η sobre \mathbb{C}_λ a ser la trivial. Definimos el módulo de Verma $M(\lambda)$, como el módulo inducido

$$M(\lambda) := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda,$$

donde $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ actúa sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ vía multiplicación a derecha, y la estructura de \mathfrak{g} -módulo sobre $M(\lambda)$ es obtenida por la multiplicación a izquierda del factor $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Todo \mathfrak{g} -módulo cociente $L = L(\lambda) \neq 0$ de un módulo Verma $M(\lambda)$, se denomina un módulo de peso máximo con peso máximo λ .

Observación 2.1.3 Todo \mathfrak{g} -módulo de peso máximo, se convierte canónicamente en un $\hat{\mathfrak{g}}$ -módulo.

Si (V, π) es una representación integrable de \mathfrak{g} , entonces para cada reflexión simple s_i , definimos

$$s_i(\pi) = (\exp_{\pi} F_i)(\exp_{\pi} -E_i)(\exp_{\pi} F_i) \in \text{Aut}V \quad (2.7)$$

Lema 2.1.5 *Sea \mathfrak{s} un álgebra de Lie y $x \in \mathfrak{s}$. Si*

$$\mathfrak{s}_x := \{y \in \mathfrak{s} \mid (\text{adx})^{n_y} y = 0, \text{ para algún } n_y \in \mathbb{N}\},$$

entonces \mathfrak{s}_x es una subálgebra de Lie de \mathfrak{s} .

Demostración. Ver ([Ku], 1.3.3). ■

Lema 2.1.6 *La representación ad es una representación integrable de \mathfrak{g} .*

Demostración. Sea $1 \leq j \leq n$ fijo. Por el lema 2.1.5, las álgebras \mathfrak{g}_{E_j} y \mathfrak{g}_{F_j} son subálgebras de \mathfrak{g} , las cuales además, por (R2) – (R5) en la definición 2.1.3, contienen los generadores de \mathfrak{g} , $E_i, F_i, h \in \mathfrak{h}$, para cada $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, $\mathfrak{g}_{E_j} = \mathfrak{g}_{F_j} = \mathfrak{g}$. Así, la observación 2.1.2, implica que E_j, F_j son localmente nilpotentes. ■

Lema 2.1.7 *Para toda representación integrable (V, π) de \mathfrak{g} , si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ y s_i es una reflexión simple, entonces*

1. $s_i(\pi)(V_{\lambda}) = V_{s_i \lambda}, y$
2. para todo $v \in V_{\lambda}$, $s_i(\pi)^2 v = (-1)^{\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle} v$

La acción del grupo de Weyl de un álgebra de Lie de tipo finito sobre Δ es transitiva, es decir, para todo $\chi \in \Delta$, existen $w \in \mathcal{W}$ y $\alpha \in \Delta$ tales que $w\alpha = \chi$. Sin embargo, este no es el caso para las álgebras de Lie de tipo afín, para ver esto tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.10 $\alpha \in \Delta$ es una raíz real si $\alpha = w\alpha_i$ para algún $w \in \mathcal{W}$ y algún $\alpha_i \in \Pi$. Una raíz que no es real se denomina raíz imaginaria.

Denotaremos los conjuntos de raíces reales (resp. imaginarias) por Δ_{re} (resp. Δ_{im}). Luego, por definición, tenemos que $\Delta = \Delta_{re} \sqcup \Delta_{im}$. Además, emplearemos la notación $\Delta_{re}^+ = \Delta^+ \cap \Delta_{re}$ y $\Delta_{re}^- = \Delta^+ \cap \Delta_{im}$ para el conjunto de raíces reales positivas e imaginarias positivas respectivamente.

Si $\alpha \in \Delta$, definimos la *multiplicidad de α* , a la que denotaremos $\text{mult}(\alpha)$, a ser la dimensión del espacio raíz \mathfrak{g}_{α} .

Proposición 2.1.8 1. *El conjunto de raíces $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ es estable bajo la acción de \mathcal{W} .*

2. *Para todo $\alpha \in \Delta$ y $w \in \mathcal{W}$, se tiene que $\text{mult}(\alpha) = \text{mult}(w\alpha)$. En particular, $\dim(\mathfrak{g}_{\alpha}) = 1$ para todo $\alpha \in \Delta_{re}$.*

3. *Si $\alpha \in \Delta_{re}$, entonces $z\alpha$ es raíz si y solo si $z = \pm 1$.*

Demostración. Ver ([Ku] 1.3.6). ■

Proposición 2.1.9 *Si $\alpha \in \Delta_{im}$ entonces $m\alpha \in \Delta_{im}$ para todo $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Demostración. Ver ([Ka], proposición 1.5.1). ■

2.2. Álgebras de Kac Moody afines

La cercana conexión que hay entre diagramas de Dynkin de álgebras de Lie simples y álgebras de Kac Moody afines, sugiere que las álgebras de Kac Moody afines podrían ser obtenidas como una generalización de las álgebras de Lie simples complejas de dimensión finita. Este de hecho es el caso, como mostraremos en esta sección.

Sea $\mathcal{A} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ el álgebra de polinomios de Laurent y $\mathcal{K} = \mathbb{C}[[t]][t^{-1}]$ el cuerpo de series formales de Laurent. Consideremos \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita.

Definición 2.2.1 *El álgebra de lazos (Loop) de \mathfrak{g} es el álgebra $\mathfrak{L}(\mathfrak{g}) := \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ con la estructura de álgebra de Lie dada por*

$$[P \otimes x, Q \otimes y] = PQ \otimes [x, y] \quad (2.8)$$

para todo $P, Q \in \mathcal{A}$, $x, y \in \mathfrak{g}$.

Observación 2.2.1 *$\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ es el álgebra de Lie de aplicaciones polinomiales del círculo unitario \mathfrak{g} . De hecho, si $\{X_a | a = 1, \dots, d\}$ es una base de \mathfrak{g} , entonces una base de $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$, es*

$$\{X_a^m | a = 1, \dots, d; m \in \mathbb{Z}\}$$

donde $X_a^m := t^m \otimes X_a$.

En contraste con las álgebras de Lie simples finitas, las álgebras de Kac Moody afines poseen un centro no trivial, el cual exhibiremos explícitamente. Para esto, sean \mathfrak{g} un álgebra de Kac Moody afín asociada a la matriz de Cartan afín C , \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan para \mathfrak{g} y $\{\alpha_0^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$ una base de \mathfrak{h} . Sea $v^\vee = (\alpha_0^\vee, \dots, \alpha_n^\vee)$ tal que $v^\vee C^T = 0$ (los números α_i^\vee se denominan números duales de Coxeter). Consideremos

$$K = \sum_{i=0}^n a_i^\vee \alpha_i^\vee,$$

entonces $[K, H] = 0$ para todo $H \in \mathfrak{h}$, y si $\{E_i, F_i | i = 0, \dots, n\}$ son los generadores de Chevalley de \mathfrak{g} , se tiene que

$$[K, E_j] = \sum_{i=0}^n a_i^\vee \alpha_j(\alpha_i^\vee) = \sum_{i=0}^n a_i^\vee c_{ij} = 0;$$

de igual manera se puede ver que $[K, F_i] = 0$. Por lo tanto K pertenece al centro de \mathfrak{g} .

En lo siguiente definiremos el álgebra de Kac Moody \mathfrak{g} como una extensión central de $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$. Para hacer esta construcción, antes debemos definir un 2-cociclo ν . Recordemos que la forma de Killing \langle, \rangle sobre \mathfrak{g} es la forma bilineal simétrica, invariante, no degenerada, \mathbb{C} -valuada, dada por

$$\langle x, y \rangle = \text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_y) \quad (2.9)$$

Trabajaremos con la forma de Killing normalizada de tal manera que la forma inducida sobre el espacio dual \mathfrak{h}^* satisface $\kappa(\theta, \theta) = 2$, donde θ es la raíz de peso máximo en \mathfrak{g} .

Si extendemos los escalares de \mathbb{C} a \mathcal{K} en la \mathbb{C} -álgebra $\mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$, damos a $\mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ una estructura de \mathcal{K} -álgebra, la cual tiene la misma dimensión de \mathfrak{g} . Denotaremos a esta álgebra por $\mathfrak{g}^{\mathcal{K}}$ (Ver

[Kn], sección 1.3). En $\mathfrak{g}^{\mathcal{K}}$, tenemos también una forma de Killing, definida de la misma manera que en 2.9, y a la cual denotaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$. Se cumple que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_t|_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}} = \langle \cdot, \cdot \rangle \quad (2.10)$$

Si definimos la forma bilineal $(\cdot, \cdot) : \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{A}$, por

$$(P \otimes x, Q \otimes y) = PQ \langle x, y \rangle \quad (2.11)$$

para todo $P, Q \in \mathcal{A}$ y $x, y \in \mathfrak{g}$, entonces tenemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle_t = (\cdot, \cdot)$.

Definimos las aplicaciones lineales $\frac{d}{dt} : \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ y $\text{res} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, por

$$\frac{d}{dt}(P \otimes x) = \frac{dP}{dt} \otimes x \quad (2.12)$$

para todo $P \in \mathcal{A}$, $x \in \mathfrak{g}$, y

$$\text{res}(t^r) = \delta_{r,-1} \quad (2.13)$$

para todo $r \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.2.2 La aplicación bilineal $\nu : \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$ está definida por

$$\nu(f, g) = \text{res} \left(\left\langle \frac{df}{dt}, g \right\rangle_t \right) \quad (2.14)$$

Lema 2.2.1 ν es un 2-cociclo sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$. Es decir, ν es una función bilineal \mathbb{C} -valuada, satisfaciendo que para todo $f, g, h \in \mathfrak{L}(\mathfrak{g})$

1. $\nu(f, g) = -\nu(g, f)$
2. $\nu([f, g], h) + \nu([g, h], f) + \nu([h, f], g) = 0$

Demostración. Ver ([He] Lema 3.4). ■

Denotamos por $\tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g})$ la extensión central del álgebra de Lie $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$, asociada al 2-cociclo ν . Entonces,

$$\tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g}) := \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c$$

y su corchete está dado por

$$[f, c] = 0 \quad (2.15)$$

$$[f, g] = [f, g]_{\mathfrak{L}(\mathfrak{g})} + \nu(f, g)c \quad (2.16)$$

para todo $f, g \in \mathfrak{L}(\mathfrak{g})$. Aquí $[f, g]_{\mathfrak{L}(\mathfrak{g})}$ es el corchete en $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$. La antisimetría para $\tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g})$ es una consecuencia de 2.2.1 y la identidad de Jacobi para $\tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g})$ es consecuencia de la identidad de Jacobi en $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ y la segunda propiedad de 2.2.1.

Definición 2.2.3 El álgebra de Kac Moody afín (untwisted) asociada a \mathfrak{g} es el álgebra

$$\hat{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d = \tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}d$$

la cual es obtenida por adicionar a $\tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g})$ una derivación d , que actúa sobre $\mathfrak{L}(\mathfrak{g})$ por $t \frac{d}{dt}$ y anula a c . El corchete está dado por

$$[t^m \otimes x + \lambda c + \mu d, t^n \otimes y + \lambda' c + \mu' d] = t^{m+n} \otimes [x, y] + \mu n t^n \otimes y - \mu' m t^m \otimes x + m \delta_{m,-n} \langle x, y \rangle c \quad (2.17)$$

para $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathfrak{g}$.

La aplicación $x \mapsto 1 \otimes x$ es un embedding de álgebras de Lie $\mathfrak{g} \hookrightarrow \hat{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g})$. Luego, podemos considerar el álgebra \mathfrak{g} como una subálgebra de $\hat{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g})$. Sea \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} , entonces $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ es una subálgebra abeliana de $\tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g})$ y, más aún como veremos adelante, es una subálgebra de Cartan de $\tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{g})$.

Sea $\dot{C} = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, la matriz de cartan asociada a \mathfrak{g} y $C = (c_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ la matriz obtenida desde \dot{C} al agregar la fila y la columna 0, dadas por:

$$c_{00} = 2, \quad c_{0j} = -\alpha_j(\theta^\vee), \quad c_{j0} = -\theta(\alpha_j^\vee), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

donde $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ son las raíces simples de \mathfrak{g} , θ es la raíz más larga y, $\{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee, \theta^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ son sus correspondientes coraíces. Es claro que C es una matriz generalizada de Cartan, pero más aún, es afín, y por lo tanto, de rango n .

Sea $\delta \in \mathfrak{h}^*$, definida por:

$$\delta|_{\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c} \equiv 0, \quad \delta(d) = 1$$

Podemos visualizar $\mathfrak{h}^* \hookrightarrow \mathfrak{h}^*$, donde

$$\lambda|_{\mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d} \equiv 0, \quad \text{para } \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Lema 2.2.2 *La tripla $(\mathfrak{h}, \pi, \pi^\vee)$, es una realización de C , donde*

$$\begin{aligned} \pi &= \{\alpha_0 := \delta - \theta, \alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*, \quad y \\ \pi^\vee &= \{\alpha_0^\vee := c - \theta^\vee, \alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h} \end{aligned}$$

y $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$.

Demostración. Es claro que π y π^\vee son subconjuntos linealmente independientes de \mathfrak{h}^* y \mathfrak{h} respectivamente, además $\dim \mathfrak{h} = 2(n+1) - n = n+2$, por lo tanto se cumple 1, 2 y 3 de la definición 2.1.1. ■

Lema 2.2.3 *Como \mathfrak{h} -módulo, \mathfrak{g} se descompone del modo siguiente*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} t^j \otimes \mathfrak{h} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}, \beta \in \dot{\Delta}} t^j \otimes \mathfrak{g}_\beta \right)$$

Más aún, \mathfrak{h} actúa sobre $t^j \otimes \mathfrak{h}$ (respect. $t^j \otimes \mathfrak{g}_\beta$) vía los pesos $j\delta$ (respect. $j\delta + \beta$). Por lo tanto, el conjunto de \mathfrak{h} pesos de \mathfrak{g} es

$$\{0\} \cup \{j\delta; j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{j\delta + \beta; j \in \mathbb{Z}, \beta \in \dot{\Delta}\},$$

donde $\dot{\Delta}$ es el sistema de raíces de \mathfrak{g} con respecto a \mathfrak{h} .

Demostración. Ver ([Ku], lema 13.1.2). ■

Consideremos ω la involución lineal de $\dot{\mathfrak{g}}$, definida por

$$\omega(e_i) = -f_i, \quad \omega(f_i) = -e_i, \quad \omega(h_i) = -h_i$$

Escojamos $f_0 \in \dot{\mathfrak{g}}_\theta$ tal que

$$\langle f_0, \omega(f_0) \rangle = -1$$

y definimos $e_0 = -\omega(f_0) \in \dot{\mathfrak{g}}_{-\theta}$. Denotamos por

$$E_0 = t \otimes e_0, \quad F_0 = t^{-1} \otimes f_0, \quad H_0 = [E_0, F_0]$$

Teorema 2.2.4 *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$ el álgebra de Kac Moody, con generadores $\{\mathfrak{h}, e_i, f_i | 0 \leq i \leq n\}$, asociada a la matriz de Cartan generalizada C , definida en 2.1.3. Entonces, existe un único isomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ satisfaciendo:*

$$\begin{aligned} e_0 &\mapsto E_0, \quad e_i \mapsto E_i \quad (1 \leq i \leq n) \\ f_0 &\mapsto F_0, \quad f_i \mapsto F_i \quad (1 \leq i \leq n), \quad \phi|_{\mathfrak{h}} = I, \end{aligned}$$

donde $\{E_i, F_i | 1 \leq i \leq n\}$ son los generadores de Chevalley de $\dot{\mathfrak{g}} := \dot{\mathfrak{g}}(\dot{C})$, tal que E_i , respectivamente F_i , pertenecen a los espacios raíces $\dot{\mathfrak{g}}_{\alpha_i}$, resp. $\dot{\mathfrak{g}}_{-\alpha_i}$.

Demostración. Ver ([Ku], 13.1.3). ■

Consideremos la \mathbb{C} -álgebra $\mathcal{K} = \mathbb{C}[[t]][t^{-1}]$. Definimos la completación de $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ como el álgebra

$$\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})_{\text{comp}} := \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d \tag{2.18}$$

con el corchete definido como en 2.17, el cual tiene sentido puesto que son permitidos solo un número finito de potencias negativas de t .

Observación 2.2.2 *El teorema 2.2.4 nos permite identificar el álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$ con $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$. En adelante, nos referiremos a \mathfrak{g} como el álgebra de Kac Moody afín (untwisted) dada en 2.2.3. De igual manera identificaremos las álgebras $\hat{\mathfrak{g}}$ y $\hat{\mathfrak{L}}(\dot{\mathfrak{g}})_{\text{comp}}$.*

Corolario 2.2.5 *El conjunto de raíces de \mathfrak{g} es*

$$\Delta = \{j\delta; j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{j\delta + \beta; j \in \mathbb{Z}, \beta \in \dot{\Delta}\}$$

y

$$\Delta^+ = \{j\delta; j \in \mathbb{Z}_{>0}\} \cup \{j\delta + \beta; j \in \mathbb{Z}_{>0}, \beta \in \dot{\Delta}\} \cup \{\beta; \beta \in \dot{\Delta}^+\}$$

es un sistema de raíces positivas en Δ . Más aún, las multiplicidades de las raíces están dadas por: $\text{mult}(j\delta) = n := \text{rg}(\dot{\mathfrak{g}})$ para todo $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, y $\text{mult}(j\delta + \beta) = 1$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ y $\beta \in \dot{\Delta}$. De manera que la descomposición triangular es $\mathfrak{g} = \eta^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \eta^-$, donde

$$\begin{aligned} \eta^+ &= t\mathbb{C}[t] \otimes (\dot{\eta}^- \oplus \dot{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{C}[t] \otimes \dot{\eta}^+ \\ \eta^- &= t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}] \otimes (\dot{\eta}^+ \oplus \dot{\mathfrak{h}}) \oplus \mathbb{C}[t^{-1}] \otimes \dot{\eta}^- \end{aligned}$$

Demostración. Ver ([Ku], corolario 13.1.4). ■

Ejemplo 2.2.1 Sea $\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ el álgebra de Lie de dimensión finita asociada a la matriz de Cartan $\dot{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Denotemos por $E_{ij} \in \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$ a la matriz cuya única entrada no nula es un 1 en la entrada ij .

La subálgebra $\dot{\mathfrak{h}} = \{\text{matrices diagonales de traza } 0\} = \{h_1 = E_{11} - E_{22}, h_2 = E_{22} - E_{33}, h_3 = E_{11} - E_{33}\}$, es una subálgebra de Cartan para $\dot{\mathfrak{g}}$. Si $h = \text{diag}(h_1, h_2, h_3)$ es una matriz diagonal, definimos $e_i \in \dot{\mathfrak{h}}^*$ por $e_i(h) = h_i$. Entonces, $\dot{\Pi} = \{\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3\}$ es un sistema de raíces simples para $\dot{\mathfrak{g}}$, $\dot{\Delta}^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \theta = \alpha_1 + \alpha_2\}$ es un sistema de raíces positivas para $\dot{\mathfrak{g}}$, θ es la raíz de peso máximo, y $\dot{\Delta} = \dot{\Delta}^+ \cup \dot{\Delta}^-$ es su sistema de raíces.

La descomposición de $\dot{\mathfrak{g}}$ en espacios pesos está dada por $\dot{\mathfrak{g}} = \dot{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \dot{\Delta}} \dot{\mathfrak{g}}_\alpha$, donde

$$\dot{\mathfrak{g}}_{\alpha_1} = \mathbb{C}E_{12}, \quad \dot{\mathfrak{g}}_{\alpha_2} = \mathbb{C}E_{23}, \quad \dot{\mathfrak{g}}_{\alpha_3} = \mathbb{C}E_{13}.$$

Además, $\{e_1 = E_{12}, e_2 = E_{23}, f_1 = E_{21}, f_2 = E_{32}\}$ son sus generadores de Chevalley. Sean $e_0 = -E_{31}$ y $f_0 = E_{13}$.

Consideremos $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3^{(1)}(\mathbb{C}) = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$, el álgebra de Kac Moody afín, asociada a la matriz afín

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathfrak{h} = \dot{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ es una subálgebra de Cartan para \mathfrak{g} , $\Pi = \{\alpha_0 = \delta - \theta, \alpha_1, \alpha_2\}$ es un sistema de raíces simples para \mathfrak{g} , $\Delta_{re} = \{j\delta + \beta; j \in \mathbb{Z}, \beta \in \dot{\Delta}\}$ y $\Delta_{im} = \{j\delta; j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ son sus raíces reales e imaginarias respectivamente. Sus generadores de Chevalley son

$$\begin{aligned} E_0 &= t \otimes e_0, E_1 = 1 \otimes e_1, E_2 = 1 \otimes e_2 \\ F_0 &= t^{-1} \otimes f_0, F_1 = 1 \otimes f_1, F_2 = 1 \otimes f_2 \end{aligned}$$

Los espacios peso vienen dados por

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{j\delta} &= \mathbb{C}t^j \otimes \mathfrak{h}, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \setminus 0 \\ \mathfrak{g}_{j\delta+\beta} &= \mathbb{C}t^j \otimes \dot{\mathfrak{g}}_\beta \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \text{ y } \beta \in \dot{\Delta} \end{aligned}$$

Sea \dot{W} el grupo de Weyl de $\dot{\mathfrak{g}}$, y sea $\dot{Q}^\vee := \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \subset \dot{\mathfrak{h}}$ el retículo de coraíces de $\dot{\mathfrak{g}}$. Entonces \dot{W} tiene una acción canónica sobre \dot{Q}^\vee denotada por \bullet , obtenida desde su acción sobre $\dot{\mathfrak{h}}$.

Definimos el grupo de Weyl afín, como el producto semidirecto

$$\text{Aff } \dot{W} := \dot{W} \ltimes \dot{Q}^\vee$$

Para $q \in \dot{Q}^\vee$, denotamos por $\tau_q = (1, q) \in \text{Aff } \dot{W}$.

Proposición 2.2.6 Sea W el grupo de Weyl asociado al álgebra de Kac Moody afín \mathfrak{g} . Existe un (único) isomorfismo de grupos

$$\beta : W \rightarrow \text{Aff } \dot{W} \tag{2.19}$$

llevando $s_0 \mapsto \tau_{\theta^\vee} \gamma_\theta$ y $s_i \mapsto \dot{s}_i$, para $1 \leq i \leq n$, donde $\{s_0, \dots, s_n\}$ son las reflexiones simples de W , $\{\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_n\}$ son las reflexiones simples de \dot{W} y, $\gamma_\theta \in \dot{W}$ es la reflexión correspondiente a la raíz de peso máximo θ .

Demostración. Ver ([Ku], Proposición 13.1.7). ■

Definición 2.2.4 Sea $\Theta \subset \Delta^+$ un subconjunto tal que para $\alpha, \beta \in \Theta$, si $\alpha + \beta \in \Delta^+$, entonces $\alpha + \beta \in \Theta$. Llamamos a tal subconjunto Θ cerrado para el corchete.

Observación 2.2.3 Dado $\Theta \subset \Delta^+$ un subconjunto cerrado para el corchete, entonces $\mathfrak{n}_\Theta = \bigoplus_{\alpha \in \Theta} \mathfrak{g}_\alpha$ y $\hat{\mathfrak{n}}_\Theta = \prod_{\alpha \in \Theta} \mathfrak{g}_\alpha$ son subálgebras de \mathfrak{g} y $\hat{\mathfrak{g}}$ respectivamente.

Para todo $w \in \mathcal{W}$, sea

$$\Delta_w = \{\alpha \in \Delta^+ | w^{-1}\alpha \in \Delta^-\} = \Delta^+ \cap w\Delta^-. \quad (2.20)$$

Lema 2.2.7 Para todo $w \in \mathcal{W}$, Δ_w tiene longitud $l(w)$. Además si $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$ es una expresión reducida, entonces

$$\Delta_w = \{\alpha_{i_1}, s_{i_1}\alpha_{i_2}, \dots, s_{i_1} \dots s_{i_{l-1}}\alpha_{i_l}\}.$$

Demostración. Ver ([Ku], lema 1.3.14). ■

Lema 2.2.8 Sea $w \in \mathcal{W}$. Entonces Δ_w es cerrado para el corchete.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \Delta_w$ tales que $\alpha + \beta \in \Delta^+$. Entonces, por definición $w^{-1}\alpha, w^{-1}\beta \in \Delta^-$. Luego, $w^{-1}(\alpha + \beta) = w^{-1}\alpha + w^{-1}\beta \in \Delta^-$. Por lo tanto, $\alpha + \beta \in \Delta_w$. ■

Para cada $w \in \mathcal{W}$, definimos

$$\mathfrak{b}_w := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_w} \mathfrak{g}_\alpha \quad (2.21)$$

la cual, por la observación 2.2.3 y el lema 2.2.8, resulta ser subálgebra de \mathfrak{g} . Además, como todas las raíces en Δ_w son reales, se tiene que \mathfrak{b}_w es un álgebra de dimensión finita.

Definimos una forma bilineal simétrica sobre $\hat{\mathfrak{g}}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \langle p \otimes x, q \otimes y \rangle &= \text{res}(t^{-1}pq) \langle x, y \rangle, \text{ para } x, y \in \hat{\mathfrak{g}}, p, q \in \mathcal{A} \\ \langle \mathbb{C}c + \mathbb{C}d, \mathcal{A} \otimes \hat{\mathfrak{g}} \rangle &= \langle c, c \rangle = \langle d, d \rangle = 0, \langle c, d \rangle = 1 \end{aligned}$$

donde res denota como antes el residuo.

Lema 2.2.9 La forma bilineal definida anteriormente, satisface:

1. Es invariante,
2. La forma restringida a \mathfrak{h} es invariante normalizada,
3. Es la única forma que satisface que:
 - $\langle \mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta \rangle = 0$ excepto cuando $\alpha + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$, y
 - $[x, y] = \langle x, y \rangle \alpha^\vee$ para $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ y $\alpha \in \Delta$.

Demostración. Ver ([Ku], Lema 13.1.8). ■

Observación 2.2.4 Con respecto a la forma bilineal \langle, \rangle definida anteriormente, \mathfrak{h}^* tiene descomposición ortogonal

$$\mathfrak{h}^* = \hat{\mathfrak{h}}^* \perp (\mathbb{C}\delta \oplus \mathbb{C}\omega_0)$$

donde $\omega_0 \in \mathfrak{h}^*$ es definida por $\omega_0|_{\hat{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}d} \equiv 0$ y $\omega_0(c) = 1$. Más aún, $\langle, \rangle|_{\hat{\mathfrak{h}}^*}$ coincide con la forma original inducida desde $\hat{\mathfrak{g}}$, además,

$$\langle \delta, \delta \rangle = \langle \omega_0, \omega_0 \rangle = 0, \quad \langle \delta, \omega_0 \rangle = 1.$$

2.3. Grupo de Kac Moody

En esta sección mostraremos que así como las álgebras de Kac Moody afines se pueden presentar como extensiones centrales de álgebras de lazos, los grupos de Kac Moody afines pueden ser visualizados como extensiones centrales de grupos de lazos.

Sea \dot{G} un grupo algebraico complejo conexo, simplemente conexo, con álgebra de Lie $\dot{\mathfrak{g}}$. Consideremos la \mathbb{C} -álgebra $\mathcal{K} = \mathbb{C}[[t]][t^{-1}]$ de series de potencias de Laurent y sea $\dot{G}(\mathcal{K})$ el conjunto de puntos \mathcal{K} -racionales del grupo algebraico \dot{G} , el cual es el grupo loop asociado a \dot{G} .

Por hipótesis \dot{G} es un subgrupo de $SL_N(\mathbb{C})$, para N conveniente. Sea I el ideal de $\mathbb{C}[SL_N(\mathbb{C})]$ tal que $\mathbb{C}[\dot{G}] = \mathbb{C}[SL_N(\mathbb{C})]/I$. Entonces, bajo identificación canónica

$$\dot{G}(\mathcal{K}) = \{g = (g_{ij}) \in SL_N(\mathcal{K}) : P(g_{ij}) = 0, \text{ para todo } P \in I\}$$

Extendemos $\dot{G}(\mathcal{K})$ adicionándole "Exp d " de la siguiente manera: Denotamos por $\text{Aut}(\mathcal{K})$ al grupo de automorfismos de \mathbb{C} -álgebra de \mathcal{K} . Sea

$$\gamma : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut } \mathcal{K} \quad (2.22)$$

el homomorfismo de grupos definido como $\gamma(z)(P(t)) = P(zt)$, para $z \in \mathbb{C}^*$ y $P \in \mathcal{K}$. Este induce canónicamente un homomorfismo de grupos

$$\gamma_{\dot{G}} : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut } \dot{G}(\mathcal{K}) \quad (2.23)$$

definido por $\gamma_{\dot{G}}(z)(P_{ij}(t)) = (P_{ij}(zt))$, donde $\text{Aut } \dot{G}(\mathcal{K})$ es el grupo de automorfismos del grupo $\dot{G}(\mathcal{K})$.

Definimos el grupo producto semidirecto

$$\overline{\mathfrak{L}}(\dot{G}) := \mathbb{C}^* \ltimes \dot{G}(\mathcal{K}) \quad (2.24)$$

Para todo $z \in \mathbb{C}^*$, denotaremos por d_z al correspondiente elemento $(z, 1) \in \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$.

Definición 2.3.1 *El grupo de Kac Moody \mathcal{G} asociado al álgebra de Kac Moody afín es la extensión central del grupo $\overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$.*

En [PS] se muestra en detalle que existe una única extensión central de $\overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$.

La representación adjunta de \dot{G} en $\dot{\mathfrak{g}}$ se extiende a una representación $\text{Ad}_{\mathcal{K}}$ de $\dot{G}(\mathcal{K})$ en $\mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\mathfrak{g}}$. Por nuestra elección de inclusión de grupos algebraicos $\dot{G} \hookrightarrow SL_N(\mathbb{C})$, resulta que

$$\text{Ad}_{\mathcal{K}}g(x) = gXg^{-1} \quad (2.25)$$

para $g \in \dot{G}(\mathcal{K}) \subset SL_N(\mathcal{K})$ y $X \in \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\mathfrak{g}} \subset M_N(\mathcal{K})$ (donde $M_N(\mathcal{K})$ es el espacio de todas las matrices $N \times N$ sobre \mathcal{K}).

En este caso, la representación adjunta Ad de $\overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$ en $\hat{\mathfrak{g}}$ se calcula de la siguiente manera: para $g \in \dot{G}(\mathcal{K})$, $x \in \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\mathfrak{g}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned} \text{Ad } g(x + \lambda c + \mu d) &:= \text{Ad}_{\mathcal{K}}g(x) - \mu t \left(\frac{dg}{dt} \right) g^{-1} + \\ &\quad \left(\lambda - \text{res} \left\langle g^{-1} \frac{dg}{dt}, x - \frac{1}{2} \mu t g^{-1} \frac{dg}{dt} \right\rangle_t \right) c + \mu d \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\text{Ad } d_z(x + \lambda c + \mu d) := \gamma_{\hat{\mathfrak{g}}}(z)(x) + \lambda c + \mu d$$

donde \langle, \rangle_t es la \mathcal{K} -forma bilineal sobre $\mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}}$ extendiendo la forma bilineal invariante normalizada definida en 2.11, res denota el coeficiente de t^{-1} , $\gamma_{\hat{\mathfrak{g}}} : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut } \hat{\mathfrak{g}}$ es la aplicación inducida desde γ (similar a la aplicación $\gamma_{\dot{G}}$) y, representando $g = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in \text{SL}_n(\mathcal{K})$, $\frac{dg}{dt}$ es definido a ser $(\frac{dg_{ij}}{dt})_{ij} \in M_n(\mathcal{K})$. Además, $(\frac{dg}{dt})g^{-1} = g^{-1}\frac{dg}{dt} \in \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}}$.

Observación 2.3.1 Si \langle, \rangle_t es la forma bilineal sobre $\mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}}$ extendiendo a 2.11, como antes, entonces

$$\langle \text{Ad}_{\mathcal{K}}g(X), \text{Ad}_{\mathcal{K}}g(Y) \rangle_t = \langle X, Y \rangle_t \quad (2.27)$$

para todo $g \in \dot{G}(\mathcal{K})$ y todo $X, Y \in \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}}$, pues $\text{Ad}_{\mathcal{K}}g$ actúa como \mathcal{K} -automorfismo sobre $\hat{\mathfrak{g}}^{\mathcal{K}}$.

Lema 2.3.1 Para todo $g \in \bar{\mathfrak{Z}}(\dot{G})$, $\text{Ad } g$ actúa como automorfismo sobre $\hat{\mathfrak{g}}$.

Demostración. Sean $g, h \in \dot{G}(\mathcal{K})$ y $X + \lambda c + \mu d \in \hat{\mathfrak{g}}$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g)\text{Ad}(h)(X + \lambda c + \mu d) &= \\ &= \text{Ad } g \left(\underbrace{\text{Ad}_{\mathcal{K}}h(X) - \mu t \frac{dh}{dt} h^{-1}}_{X'} + \underbrace{(\lambda - \text{res}\langle h^{-1} \frac{dh}{dt}, X - \frac{1}{2} \mu t h^{-1} \frac{dh}{dt} \rangle_t)}_{\lambda'} c + \mu d \right) \\ &= \text{Ad}_{\mathcal{K}}g(X') - \mu t \frac{dg}{dt} g^{-1} + \left(\lambda' - \text{res}\langle g^{-1} \frac{dg}{dt}, X' - \frac{1}{2} \mu t g^{-1} \frac{dg}{dt} \rangle_t \right) c + \mu d \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \text{Ad}(gh)(X + \lambda c + \mu d) &= \\ &= \text{Ad}_{\mathcal{K}}(gh)(X) - \mu t \frac{dgh}{dt} (gh)^{-1} + \left(\lambda - \text{res}\langle (gh)^{-1} \frac{dgh}{dt}, X - \frac{1}{2} \mu t (gh)^{-1} \frac{dgh}{dt} \rangle_t \right) c + \mu d \end{aligned}$$

Es claro que las componentes en $\mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}}$ y $\mathbb{C}d$ de las dos ecuaciones coinciden. Ahora,

$$\begin{aligned} \langle (gh)^{-1} \frac{dgh}{dt}, X - \frac{1}{2} \mu t (gh)^{-1} \frac{dgh}{dt} \rangle_t &= \\ &= \langle h^{-1} g^{-1} \frac{dg}{dt} h + h^{-1} \frac{dh}{dt}, X - \frac{1}{2} \mu t h^{-1} g^{-1} \frac{dg}{dt} h - \frac{1}{2} \mu t h^{-1} \frac{dh}{dt} \rangle_t \\ &= \langle h^{-1} \frac{dh}{dt}, X - \frac{1}{2} \mu t h^{-1} \frac{dh}{dt} \rangle + \langle h^{-1} \frac{dh}{dt}, -\frac{1}{2} \mu t h^{-1} g^{-1} \frac{dg}{dt} h \rangle_t + \\ &+ \langle h^{-1} g^{-1} \frac{dg}{dt} h, X - \frac{1}{2} \mu t h^{-1} g^{-1} \frac{dg}{dt} h - \frac{1}{2} \mu t h^{-1} \frac{dh}{dt} \rangle_t \end{aligned}$$

Además, por la observación 2.3.1, tenemos

$$\begin{aligned} \langle h^{-1} g^{-1} \frac{dg}{dt} h, X - \frac{1}{2} \mu t h^{-1} g^{-1} \frac{dg}{dt} h - \frac{1}{2} \mu t h^{-1} \frac{dh}{dt} \rangle_t &= \\ &= \langle g^{-1} \frac{dg}{dt}, h X h^{-1} - \frac{1}{2} \mu t g^{-1} \frac{dg}{dt} - \frac{1}{2} \mu t \frac{dh}{dt} h^{-1} \rangle_t \\ &= \langle g^{-1} \frac{dg}{dt}, h X h^{-1} - \frac{1}{2} \mu t g^{-1} \frac{dg}{dt} \rangle_t + \langle g^{-1} \frac{dg}{dt}, -\frac{1}{2} \mu t \frac{dh}{dt} h^{-1} \rangle_t \end{aligned}$$

De nuevo aplicando la observación 2.3.1, y por la bilinealidad y simetría de \langle, \rangle_t

$$\begin{aligned}
\langle h^{-1} \frac{dh}{dt}, -\frac{1}{2} \mu t h^{-1} g^{-1} \frac{dg}{dt} h \rangle_t &= \\
&= \langle h^{-1} g^{-1} \frac{dg}{dt} h, -\frac{1}{2} \mu t h^{-1} \frac{dh}{dt} \rangle_t \\
&= \langle g^{-1} \frac{dg}{dt}, -\frac{1}{2} \mu t \frac{dh}{dt} h^{-1} \rangle_t
\end{aligned}$$

Luego,

$$\langle h^{-1} \frac{dh}{dt}, -\frac{1}{2} \mu t h^{-1} g^{-1} \frac{dg}{dt} h \rangle_t + \langle g^{-1} \frac{dg}{dt}, -\frac{1}{2} \mu t \frac{dh}{dt} h^{-1} \rangle_t = \langle g^{-1} \frac{dg}{dt}, -\mu t \frac{dh}{dt} h^{-1} \rangle_t$$

■

Capítulo 3

Órbitas localmente nilpotentes

En este capítulo iniciamos el estudio de las \mathcal{G} -órbitas localmente nilpotentes en álgebras de Kac Moody afines extendidas. Las definiremos, daremos algunas características especiales de estas, y encontraremos representantes ‘distinguidos’ de cada órbita localmente nilpotente en $\hat{\mathfrak{g}}$, lo que nos permitirá tener un primer acercamiento a la clasificación de las mismas.

3.1. Definición

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Kac Moody afín y $\hat{\mathfrak{g}}$ un álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita, de tal manera que $\mathfrak{g} = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$. Consideremos $\hat{\mathfrak{g}} = \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ el álgebra extendida de \mathfrak{g} como en 2.18. Sea \mathcal{G} el grupo de Kac Moody (afín) asociado a $\hat{\mathfrak{g}}$.

Definición 3.1.1 Sea $X \in \mathfrak{g}$ (resp. $X \in \hat{\mathfrak{g}}$). Decimos que X es localmente nilpotente sobre \mathfrak{g} (resp. sobre $\hat{\mathfrak{g}}$), si $\text{ad}_{\mathfrak{g}}X \in \text{End}(\mathfrak{g})$ (resp. $\text{ad}_{\hat{\mathfrak{g}}}X \in \text{End}(\hat{\mathfrak{g}})$) es localmente nilpotente.

Ejemplo 3.1.1 En vista de la definición 2.1.8 y el lema 2.1.6, tenemos que los generadores de Chevalley E_i, F_i , ($i = 0, \dots, n$) de \mathfrak{g} , son elementos localmente nilpotentes sobre \mathfrak{g} , para toda álgebra de Kac Moody afín \mathfrak{g} , y fácilmente se puede ver que también lo son sobre $\hat{\mathfrak{g}}$.

Proposición 3.1.1 Sea $X \in \hat{\mathfrak{g}}$ $\text{ad}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ -localmente nilpotente. Entonces $\text{Ad } g(X)$ es $\text{ad}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ -localmente nilpotente, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Demostración. Sean $g \in \mathcal{G}$ y $X \in \hat{\mathfrak{g}}$ $\text{ad}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ -localmente nilpotente. Por el lema A.0.10, tenemos que $\text{Ad } g \in \text{Aut}(\hat{\mathfrak{g}})$, luego para $Y \in \hat{\mathfrak{g}}$

$$\begin{aligned} \text{ad}(\text{Ad } g(X))(Y) &= [\text{Ad } g(X), Y] \\ &= \text{Ad } g([X, (\text{Ad } g)^{-1}(Y)]) \quad . \\ &= (\text{Ad } g)(\text{ad}X)(\text{Ad } g)^{-1}(Y) \end{aligned}$$

Como $\text{ad}X$ es localmente nilpotente sobre $\hat{\mathfrak{g}}$ y $\text{Ad } g \in \text{Aut}(\hat{\mathfrak{g}})$, entonces $(\text{Ad } g)(\text{ad}X)(\text{Ad } g)^{-1}$ es localmente nilpotente sobre $\hat{\mathfrak{g}}$, por lo tanto, $\text{Ad } g(X)$ también lo es. ■

La proposición anterior, nos dice que la clase de conjugación de un elemento localmente nilpotente bajo la acción adjunta del grupo de Kac Moody sobre la extensión $\hat{\mathfrak{g}}$ de un álgebra de Kac Moody afín \mathfrak{g} , consiste de elementos localmente nilpotentes, esto nos permite introducir la definición de órbitas localmente nilpotentes en álgebras de Kac Moody afines.

Definición 3.1.2 Sea $X \in \hat{\mathfrak{g}}$. Diremos que la \mathcal{G} -órbita a través de X ,

$$\mathfrak{D}_X = \text{Ad } \mathcal{G}(X) = \text{Ad } \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})(X) \quad (3.1)$$

es una órbita localmente nilpotente en $\hat{\mathfrak{g}}$ si cada uno de sus elementos es $\text{ad}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ -localmente nilpotente.

Observación 3.1.1 Dado que \mathcal{G} es una extensión central del grupo $\overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$, era de esperarse que la órbita a través de $X \in \mathfrak{g}$ para cualquiera de los dos grupos sería la misma. Para más detalle ver (Apéndice, lema A.0.18).

Observación 3.1.2 Es de notar que las órbitas localmente nilpotentes las estamos viendo sobre $\hat{\mathfrak{g}}$, la extensión del álgebra de Kac Moody afín \mathfrak{g} , y no sobre \mathfrak{g} , dado que $\text{Ad } \mathcal{G}(\mathfrak{g}) \subset \hat{\mathfrak{g}}$.

Definición 3.1.3 El conjunto de órbitas nilpotentes en \mathfrak{g} , al que denotamos por $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$, es el subconjunto de órbitas en $\hat{\mathfrak{g}}$, cuya intersección con \mathfrak{g} es no vacía, es decir

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \{\mathfrak{D}_X \subset \hat{\mathfrak{g}} \mid X \in \mathfrak{g}\} \quad (3.2)$$

Nuestro interés es caracterizar y clasificar justamente las órbitas que se encuentran en $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$. Por convención, en adelante, siempre que nos refiramos a una órbita localmente nilpotente en \mathfrak{g} , nos estaremos refiriendo a un elemento de $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$.

Observación 3.1.3 Hasta el momento hemos hecho distinción entre la adjunta sobre \mathfrak{g} y $\hat{\mathfrak{g}}$, denotándolas por $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ y $\text{ad}_{\hat{\mathfrak{g}}}$; en adelante, simplemente denotaremos la adjunta sobre $\hat{\mathfrak{g}}$ por $\text{ad} = \text{ad}_{\hat{\mathfrak{g}}}$, y diremos que un elemento en $\hat{\mathfrak{g}}$ es localmente nilpotente si es $\text{ad}_{\hat{\mathfrak{g}}}$ -localmente nilpotente.

3.2. Estructura

3.2.1. Endomorfismos nilpotentes

Consideremos la \mathcal{K} -álgebra de dimensión finita $\mathfrak{g}^{\mathcal{K}}$, que como se mencionó en la sección 2.2, es la \mathcal{K} -álgebra que se obtiene al extender los escalares de \mathbb{C} a \mathcal{K} en $\mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ y cuyo corchete $[\cdot, \cdot]_*$, está definido por

$$[t^n \otimes x, t^m \otimes y]_* = t^{n+m} \otimes [x, y],$$

para $m, n \in \mathbb{Z}$ y $x, y \in \mathfrak{g}$. Denotaremos a la representación adjunta de $\mathfrak{g}^{\mathcal{K}}$ en $\text{End}_{\mathcal{K}}(\mathfrak{g}^{\mathcal{K}})$ por $\widetilde{\text{ad}}$.

Sabemos que toda álgebra de Lie, de dimensión finita, sobre un cuerpo de característica cero, admite una representación fiel sobre un espacio vectorial de dimensión finita. De esa manera, $\mathfrak{g}^{\mathcal{K}}$ puede ser visualizada como una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, donde V es un \mathcal{K} -espacio vectorial de dimensión finita.

Además, $\widetilde{\text{ad}}(X) \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\text{End}_{\mathbb{C}}(V))$. Se tiene que

$$\text{ad}(t^n \otimes x)(t^m \otimes y) = \widetilde{\text{ad}}(t^n \otimes x)(t^m \otimes y) + n\delta_{m,-n}\langle x, y \rangle c.$$

Lema 3.2.1 Si $X \in \mathfrak{g}^{\mathcal{K}}$ es nilpotente (visualizando a X como un elemento en $\mathfrak{gl}(V)$), entonces $\widetilde{\text{ad}}X$ es nilpotente.

Demostración. Sean $X, Y \in \mathfrak{g}^{\mathcal{K}}$, entonces

$$[X, Y]_* = XY - YX.$$

Tenemos que $\widetilde{\text{ad}}X = \lambda_X - \rho_X$, donde $\lambda_X(Y) = XY$ y $\rho_X(Y) = YX$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $X^n = 0$, entonces $\lambda_X^n = \rho_X^n = 0$, es decir, λ_X, ρ_X son nilpotentes. Además λ_X, ρ_X son morfismos que conmutan. Por lo tanto, $\widetilde{\text{ad}}X$ es nilpotente. ■

Lema 3.2.2 *Sea $X \in \mathfrak{g}^{\mathcal{K}}$ nilpotente (visualizando a X como un elemento en $\mathfrak{gl}(V)$), entonces $\text{ad}X \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\hat{\mathfrak{g}})$ es nilpotente.*

Demostración. Sea $X \in \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}}$ nilpotente, entonces por el lema anterior, $\widetilde{\text{ad}}X \in \text{End}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}})$ también lo es. Luego, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $(\widetilde{\text{ad}}X)^n = 0$. Sea $Y + \lambda c + \mu d \in \hat{\mathfrak{g}}$, entonces

$$(\text{ad}X)(Y + \lambda c + \mu d) = \widetilde{\text{ad}}X(Y) + \mu[X, d] + k_1 c$$

para un cierto $k_1 \in \mathbb{C}$. Como $[X, d] \in \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}}$, se tiene que $\text{ad}^2 X(d) = \widetilde{\text{ad}}X([X, d]) + kc$ para algún $k \in \mathbb{C}$. Así,

$$\begin{aligned} (\text{ad}X)^2(Y + \lambda c + \mu d) &= \text{ad}X(\widetilde{\text{ad}}X)(Y) + \mu(\text{ad}X)([X, d]) \\ &= (\widetilde{\text{ad}}X)^2(Y) + \mu\widetilde{\text{ad}}X([X, d]) + k_2 c \end{aligned}$$

para algún $k_2 \in \mathbb{C}$. Continuando el razonamiento inductivo, tenemos

$$\begin{aligned} (\text{ad}X)^n(Y + \lambda c + \mu d) &= \text{ad}X(\widetilde{\text{ad}}X)^{n-1}(Y) + \mu(\widetilde{\text{ad}}X)^{n-1}([X, d]) + kc \\ &= (\widetilde{\text{ad}}X)^n(Y) + \mu(\widetilde{\text{ad}}X)^{n-1}([X, d]) + k_n c \end{aligned}$$

para algunos $k, k_n \in \mathbb{Z}$.

Luego, $(\text{ad}X)^{n+1}(Y + \lambda c + \mu d) = k_{n+1}c$ y $(\text{ad}X)^{n+2}(Y + \lambda c + \mu d) = 0$. Lo que implica que $\text{ad}X$ es nilpotente. ■

Lema 3.2.3 *Sea $X \in \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}}$. Si $\text{ad}X$ es localmente nilpotente, entonces $\widetilde{\text{ad}}X \in \text{End}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}})$ es localmente nilpotente.*

Demostración. Supongamos $\text{ad}X$ es localmente nilpotente, entonces existe $n_Y \in \mathbb{Z}$ tal que $(\text{ad}X)^{n_Y}(Y) = 0$. Si $Y \in \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \hat{\mathfrak{g}}$, entonces

$$(\text{ad}X)^n(Y) = (\widetilde{\text{ad}}X)^n(Y) + kc$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $(\widetilde{\text{ad}}X)^{n_Y}(Y) = 0$. Así, $\widetilde{\text{ad}}X$ es localmente nilpotente. ■

3.2.2. Subálgebras \mathfrak{b}_w

En esta sección haremos uso del hecho de que todo elemento localmente nilpotente de \mathfrak{g} es conjugado a un elemento en una subálgebra \mathfrak{b}_w , para algún $w \in \mathcal{W}$, donde \mathfrak{b}_w es como se definió en 2.21, para mostrar que todo elemento localmente nilpotente es conjugado a un elemento en $\mathbb{C}[[t]] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^+ \oplus \mathbb{C}c$.

Definición 3.2.1 Sea \mathfrak{s} un álgebra de Lie, y (V, π) un \mathfrak{s} -módulo, entonces \mathfrak{s} es llamada

- π -triangular, si existe una bandera de \mathfrak{s} -submódulos: $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$ tales que $\bigcup V_i = V$ y, para cada $i \geq 0$, $\dim(V_{i+1}/V_i) = 1$.
- π -localmente diagonalizable, resp. π -finitamente semisimple, si V es suma directa de \mathfrak{s} -submódulos irreducibles 1-dimensionales, resp. de dimensión finita.
- π -localmente finita, si todo $x \in V$ está contenido en un \mathfrak{s} -submódulo de dimensión finita.

Teorema 3.2.4 Las siguientes condiciones son equivalentes para una subálgebra $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$:

1. \mathfrak{s} es $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -triangular.
2. \mathfrak{s} es un álgebra de Lie de dimensión finita la cual es $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -localmente finita.
3. Existe $g \in \mathcal{G}$ y $w \in \mathcal{W}$ tal que $\text{Ad } g(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{b}_w$.

Demostración. Ver ([Ku] 10.2.5). ■

Observación 3.2.1 Todo elemento $X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -localmente nilpotente es en particular $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -localmente finito y la subálgebra de \mathfrak{g} generada por este es también $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -localmente finita. Luego por 3.2.4, tenemos que para cada elemento localmente nilpotente en \mathfrak{g} , existen $g \in \mathcal{G}$ y $w \in \mathcal{W}$ tales que $\text{Ad } g(X) \in \mathfrak{b}_w$, para algún $w \in \mathcal{W}$.

Nuestro propósito inmediato, es caracterizar los elementos localmente nilpotentes contenidos en las subálgebras \mathfrak{b}_w , con $w \in \mathcal{W}$. Para esto, estudiaremos algunas propiedades de los subconjuntos Δ_w , para $w \in \mathcal{W}$, dados en 2.20.

Lema 3.2.5 1. $s_i(\delta) = \delta$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$

2. $s_i(\alpha + m\delta) = s_i(\alpha) + m\delta$ para todo $i = 1, \dots, n$.

3. $s_0(\alpha + m\delta) = \begin{cases} \alpha + m\delta, & \text{si } \langle \alpha, \theta^\vee \rangle = 0; \\ \alpha - \theta + (m+1)\delta, & \text{si } \langle \alpha, \theta^\vee \rangle = 1; \\ \alpha + \theta + (m-1)\delta, & \text{si } \langle \alpha, \theta^\vee \rangle = -1. \end{cases}$

Decimos que un subconjunto $\dot{\Lambda} \subset \dot{\Delta}$ es *cerrado*, si para todo $\alpha, \beta \in \dot{\Lambda}$, tales que $\alpha + \beta \in \dot{\Delta}$, entonces $\alpha + \beta \in \dot{\Lambda}$.

Lema 3.2.6 Sea $\dot{\mathfrak{g}}$ un álgebra de Lie simple y $\dot{\Lambda} \subset \dot{\Delta}$ un subconjunto cerrado y tal que si $\alpha \in \dot{\Lambda}$ entonces $-\alpha \notin \dot{\Lambda}$. Entonces, existe $w \in \mathcal{W}$ tal que $w \cdot \dot{\Lambda} \subset \dot{\Delta}^+$.

Demostración. Ver ([Bo], Proposición 22, Capítulo IV). ■

Lema 3.2.7 Sea $w \in \mathcal{W}$. Entonces existe $z \in \mathcal{W}$ tal que $z \cdot \Delta_w \subset \dot{\Delta}^+ \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\delta$.

Demostración. Consideremos el subconjunto $\dot{\Lambda}$ de $\dot{\Delta}$ formado por las raíces α para las cuales $\alpha + m\delta \in \Delta_w$, para algún $m \in \mathbb{Z}$.

Veamos que si $\alpha \in \dot{\Lambda}$, entonces $-\alpha \notin \dot{\Lambda}$: razonemos por contradicción. Supongamos existen $\alpha \in \dot{\Delta}^+$, $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que $\alpha + m\delta, -\alpha + n\delta \in \Delta_w$. Nótese que $\Delta_w \subset \Delta_{re}^+$, luego m y n solo pueden tomar valores enteros positivos, pues en el caso de ser cero, entonces $-\alpha \notin \Delta_w$. Ahora,

si $m, n > 0$, por el lema 2.2.8 tenemos que $(m+n)\delta \in \Delta_w$, lo cual es absurdo, pues esta es una raíz imaginaria. Por lo tanto, para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+$, o bien $\alpha + m\delta \in \Delta_w$, o $-\alpha + n\delta \in \Delta_w$.

Así, el Lema 3.2.6 nos garantiza que podemos encontrar $z \in \mathcal{W}$, tal que $z \cdot \dot{\Lambda} \subset \dot{\Lambda}^+$. Como $\dot{\mathcal{W}}$ está generado por las reflexiones simples s_1, \dots, s_n y $s_i(\alpha + m\delta) = s_i\alpha + m\delta$ para cada $i = 1, \dots, n$, entonces $z \cdot \Delta_w \subset \dot{\Lambda}^+ \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\delta$. ■

Lema 3.2.8 Sean $w \in \mathcal{W}$ y $Y \in \mathfrak{b}_w$. Entonces, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $\text{Ad } g(Y) \in \mathfrak{h} \oplus \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda$, donde $\Lambda = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \dot{\Lambda}^+, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

Demostración. Por el lema 3.2.7, existe $z \in \mathcal{W}$ tal que $z \cdot \Delta_w \subset \dot{\Lambda}^+ \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\delta$. Por otro lado, si $s_i \in \mathcal{W}$, entonces por A.13, existe $\tilde{s}_i \in \mathcal{G}$ tal que

$$\text{Ad } \tilde{s}_i(X) = s_i(\text{ad})(X),$$

donde $s_i(\text{ad})$ está definida como en 2.7; además por el lema 2.1.7, $\text{Ad } \tilde{s}_i(X_\alpha) \in \mathfrak{g}_{s_i(\alpha)}$, para todo $\alpha \in \Delta$ y $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$.

Luego, si z tiene expresión reducida $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ en \mathcal{W} , entonces existe $g_z = \tilde{s}_{i_1} \cdots \tilde{s}_{i_k} \in \mathcal{G}$ tal que $\text{Ad } g_z(X_\alpha) \in \mathfrak{g}_{z\alpha}$, para todo $\alpha \in \Delta$ y $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Por lo tanto, si tomamos $g = g_z$, tenemos que $\text{Ad } g(Y) \in \mathfrak{h} \oplus \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda$, donde $\Lambda = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \dot{\Lambda}^+, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. ■

3.2.3. Componente de la derivación de elementos localmente nilpotentes

El objetivo de esta sección es mostrar que todo elemento localmente nilpotente de \mathfrak{g} es conjugado a uno de la forma $X + \lambda c$, donde $X \in \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\mathfrak{g}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Observación 3.2.2 Sea $X + \lambda c + \mu d \in \hat{\mathfrak{g}}$, donde $X \in \mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\mathfrak{g}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\text{ad}^k(X + \lambda c + \mu d) = \text{ad}^k(X + \mu d)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, dado que c es central en \mathfrak{g} .

Lema 3.2.9 Sea $Y = X + \lambda c + \mu d \in \hat{\mathfrak{g}}$. Si Y es localmente nilpotente, entonces $\mu = 0$.

Demostración. La idea de la demostración es mostrar que cualquier potencia de la adjunta de Y aplicada a $t \otimes H$ es no nula, donde $H \in \mathfrak{h}$, claramente esto implicará que $\text{ad}Y$ no es localmente nilpotente. Por el lema 3.2.8, podemos encontrar un elemento en la órbita de Y para el cual su componente en $\mathcal{K} \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\mathfrak{g}}$ pertenece a $\dot{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}[[t]] \otimes \dot{\eta}^+$. Supongamos $X \in \dot{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}[[t]] \otimes \dot{\eta}^+$.

Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \text{ad}^k(X + \mu d)(t \otimes H) &= (\text{ad}X + \text{ad}\mu d)^k(t \otimes H) \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_s) \in \Upsilon} \text{ad}^{i_1}(X) \text{ad}^{i_2}(\mu d) \dots \text{ad}^{i_{s-1}}(X) \text{ad}^{i_s}(\mu d)(t \otimes H) \end{aligned}$$

donde $\Upsilon = \cup_{s=2}^k \{(i_1, \dots, i_s) \in \mathbb{N}^s \mid i_1 + \dots + i_s = k\}$.

Ahora, cada uno de los términos de la suma, excepto el término $\text{ad}^k(\mu d)(t \otimes H) = \mu^k t \otimes H$, pertenece a $\mathbb{C}[[t]] \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\eta}^+$, pues:

$$\text{ad}^i(X)(t \otimes H) \in \mathbb{C}[[t]] \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\eta}^+, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}$$

y

$$\text{ad}^i(d)(Z) \in \mathbb{C}[[t]] \otimes \dot{\eta}^+, \text{ para todo } Z \in \mathbb{C}[[t]] \otimes \dot{\eta}^+, i \in \mathbb{N}.$$

Luego, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\text{ad}^k(X + \mu d)(t \otimes H) = X' + \mu^k t \otimes H$, donde $X' \in \mathbb{C}[[t]] \otimes \dot{\eta}^+$ ó $X' = 0$. Por lo tanto, $\text{ad}(X + \lambda c + \mu d)^k(t \otimes H) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mu = 0$.

Ahora, cualquier otro elemento en la órbita de Y es de la forma

$$\begin{aligned} \text{Ad } g(X + \lambda c) &= \text{Ad}_{\mathcal{K}} g(X) + (\lambda - \text{res}\langle g^{-1} \frac{dg}{dt}, X \rangle_t) c \\ \text{Ad } d_z(X + \lambda c) &= \gamma_{\mathfrak{g}}(z)(X) + \lambda c \end{aligned}$$

con $g \in \mathcal{G}$, $z \in \mathbb{C}$. Luego, lo que tenemos es que en particular para Y , su componente en la derivación es 0, obteniendo lo deseado. ■

3.2.4. Elementos destacados en órbitas localmente nilpotentes

El objetivo de esta sección es mostrar que todo elemento localmente nilpotente de \mathfrak{g} es conjugado a uno de la forma $X + \lambda c$, donde $X \in \mathbb{C}[[t]] \otimes \dot{\eta}^+$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lema 3.2.10 *Sea $Y \in \mathfrak{h} \oplus \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda$, donde $\Lambda = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \dot{\Delta}^+, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, un elemento localmente nilpotente. Entonces la componente de Y en $\dot{\mathfrak{h}}$ es nula.*

Demostración. Sea $Y = H + X + \lambda c$ localmente nilpotente, con $X \in \mathbb{C}[[t]] \otimes \dot{\eta}^+$, $H = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i^\vee$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Si H es no nulo, entonces $k_j \neq 0$ para algún $j \in \{0, \dots, n\}$. Veamos que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\text{ad}^k(Y)(E_j) \neq 0$.

Para cada $\alpha \in \dot{\Delta}^+$, con $\alpha = \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$, denotemos por $|\alpha| = \sum_{i=1}^n m_i$ y definamos los conjuntos

$$\mathfrak{g}_1 = \bigoplus_{\substack{\alpha+n\delta \in \Delta \\ |\alpha|=1}} \mathfrak{g}_{\alpha+n\delta}, \quad \mathfrak{g}_2 = \bigoplus_{\substack{\alpha+n\delta \in \Delta \\ |\alpha| \geq 2}} \mathfrak{g}_{\alpha+n\delta}.$$

Con un cálculo sencillo se puede ver que

$$\text{ad}^k(Y)(E_j) = r^k E_j + X_k,$$

donde $r = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_j(\alpha_i^\vee) \neq 0$. Además se tiene que $r^k E_j \in \mathfrak{g}_1$ y $X_k \in \mathfrak{g}_2$ o $X_k = 0$, lo que contradice el hecho de que Y sea localmente nilpotente. Es claro que la contradicción resulta del hecho de haber supuesto que $H \neq 0$, por lo tanto se debe tener que $H = 0$. ■

Teorema 3.2.11 *Sea $X \in \mathfrak{g}$ localmente nilpotente. Entonces existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $\text{Ad } g(X) \in \mathbb{C}[[t]] \otimes \dot{\eta}^+ \oplus \mathbb{C}c$*

Demostración. Todo elemento en \mathfrak{g} localmente nilpotente, es en particular $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -localmente finito. Luego, existen $g_1 \in \mathcal{G}$ y $w \in \mathcal{W}$ tales que $\text{Ad } g_1(Y) = Y' \in \mathfrak{b}_w$. Ahora, por la observación 3.2.1 y el lema 3.2.7, tenemos que existen $g_2 \in \mathcal{G}$ y $\Lambda \subset \dot{\Delta}^+ \oplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\delta$ tales que $\text{Ad } g_2(Y') \in \mathfrak{h} \oplus \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}[[t]] \otimes \dot{\eta}^+$. Así, tomando $g = g_2 g_1$, se tiene que $\text{Ad } g(X) = X' + H + \lambda c + \mu d$, donde $X' \in \mathbb{C}[[t]] \otimes \dot{\eta}^+$, $H \in \dot{\mathfrak{h}}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Ahora, por los lemas 3.2.9 y 3.2.10, se tiene que $H = \mu = 0$, por lo tanto, $\text{Ad } g(X) \in \mathbb{C}[[t]] \otimes \dot{\eta}^+ \oplus \mathbb{C}c$. ■

3.2.5. Elementos nilpotentes

Teorema 3.2.12 *Sea $X \in \mathfrak{g}$ localmente nilpotente, entonces X es nilpotente.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.11, tenemos que existe $Y \in \mathfrak{D}_X$ tal que $Y = (\sum_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ n \in \mathbb{N}}} t^n \otimes Y_\alpha) + \lambda c$, donde $\Lambda \subset \dot{\Delta}^+$. Si consideramos el elemento $\bar{Y} = \sum_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha \in \dot{\mathfrak{g}}$, entonces \bar{Y} es nilpotente en $\dot{\mathfrak{g}}$, luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{ad}^k(\bar{Y})|_{\dot{\mathfrak{g}}} \equiv 0$.

Tenemos que $\text{ad}(\bar{Y})|_{\mathfrak{h}}$ es nilpotente. Además, si $Z = \sum_{\substack{\beta \in \Lambda' \\ m \in \mathbb{Z}}} t^m \otimes Z_\beta$, donde $\Lambda' \subset \dot{\Delta}$, entonces

$$[Y, Z] = \sum_{\alpha \in \Lambda, \beta \in \Lambda'} t^{n+m} \otimes [Y_\alpha, Z_\beta] + n\delta_{n,-m}\kappa(Y, Z)c \quad (3.3)$$

Cada término de $\text{ad}^k(Y)(Z)$ será de la forma rc para algún $r \in \mathbb{C}$ ó, $t^s \otimes W$ para algún $s \in \mathbb{Z}$ y

$$W = [Y_{\alpha_k}, [\dots [Y_{\alpha_1}, Z_\beta] \dots]] \in \dot{\mathfrak{g}} \quad (3.4)$$

para algunos $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda$ y algún $\beta \in \Lambda'$. Es claro que $W = 0$ por la nilpotencia de \bar{Y} sobre $\dot{\mathfrak{g}}$. Así, $\text{ad}^{k+1}(Y)|_{\mathfrak{g}} \equiv 0$. Por lo tanto, Y es nilpotente, y así también lo es X . ■

Proposición 3.2.13 *Sea $X \in \mathfrak{g}$. Si X es localmente nilpotente sobre \mathfrak{g} , entonces es localmente nilpotente sobre $\hat{\mathfrak{g}}$.*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{g}$, localmente nilpotente sobre \mathfrak{g} . Tomemos $Z = Y + \sum_{\alpha \in \dot{\Delta}} P_\alpha \otimes X_\alpha \in \hat{\mathfrak{g}}$, donde $Y \in \mathfrak{g}$, $P_\alpha \in \mathbb{C}[[t]]$ y $X_\alpha \in \dot{\mathfrak{g}}_\alpha$, para cada $\alpha \in \dot{\Delta}$. Los elementos en $\hat{\mathfrak{h}}$ corresponden a $\alpha = 0$. Ahora, para $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{ad}^k(Q_\beta \otimes X_\beta)(P_\alpha \otimes X_\alpha) = Q_\beta^k P_\alpha \otimes X_{k\beta+\alpha} + \lambda';$$

más aún,

$$\text{ad}^k X(P_\alpha \otimes X_\alpha) = \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_k) \in \Lambda^k} Q_{\beta_1} \cdots Q_{\beta_k} P_\alpha \otimes X_{\beta_1 + \dots + \beta_k + \alpha} + \lambda''c,$$

para ciertos $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{C}$, donde $\Lambda = \{\beta \in \dot{\Delta} | Q_\beta \neq 0\}$. Tenemos que existe $n_\alpha \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\text{ad}^{n_\alpha} X(X_\alpha) = \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_{n_\alpha}) \in \Lambda^{n_\alpha}} Q_{\beta_1} \cdots Q_{\beta_{n_\alpha}} \otimes X_{\beta_1 + \dots + \beta_{n_\alpha} + \alpha} + \lambda'''c = 0,$$

lo que implica que cada vector raíz $X_{\beta_1 + \dots + \beta_{n_\alpha} + \alpha} = 0$. Por lo tanto, $\text{ad}^{n_\alpha+1}(X)(P_\alpha \otimes X_\alpha) = 0$. Ahora, si $n_Y \in \mathbb{Z}$ es tal que $\text{ad}^{n_Y} X(Y) = 0$ y tomamos $n = \max\{n_Y, n_\alpha + 1 | \alpha \in \dot{\Delta}\}$, entonces $\text{ad}^n X(Z) = 0$. Así, X es localmente nilpotente sobre $\hat{\mathfrak{g}}$. ■

Capítulo 4

Clasificación de órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$

En este capítulo, damos una clasificación de las órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$, bajo la representación adjunta del grupo $\overline{\mathfrak{S}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$, como se definió en el capítulo anterior. Introduciremos un conjunto de matrices de $\mathfrak{sl}_n(\mathcal{K})$, a las que denominaremos matrices cuasi-Jordan y mostraremos que todo elemento nilpotente en $\hat{\mathfrak{sl}}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ será conjugado a una de estas matrices, más un elemento en $\mathbb{C}c$. Este hecho, será clave, para poder dar una parametrización de las órbitas en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$, mediante particiones de n y un par de datos adicionales.

4.1. Matrices cuasi-Jordan

Debido a que \mathcal{K} es un cuerpo, si $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathcal{K})$ es una matriz nilpotente, se tiene que todos los valores propios de X son 0 y, es conjugada por un elemento en $GL_n(\mathcal{K})$ a una matriz en bloques de Jordan.

Nos preguntamos si para cada órbita nilpotente en \mathfrak{g} , es posible encontrar un representante de la forma $X + \lambda c$, donde $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathcal{K})$ es una matriz en bloques de Jordan y $\lambda \in \mathbb{C}$; la respuesta es no. Pero sí es posible encontrar en cada órbita nilpotente un elemento de la forma $X + \lambda c$, donde $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathcal{K})$ es una matriz con bloques de la forma

$$J_{(p_1, \dots, p_{n-1})} = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & p_{n-1} \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_n(\mathcal{K}) \quad (4.1)$$

para algunos $p_1, \dots, p_{n-1} \in \mathcal{K}$, y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definición 4.1.1 Sea X una matriz como en 4.1, entonces X se denomina una matriz cuasi-Jordan. Si X es una matriz diagonal por bloques, con bloques cuasi-Jordan, diremos simplemente que X es una matriz por bloques cuasi-Jordan.

Denotaremos por $\mathcal{K}_{m,n}$ el conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en \mathcal{K} . Además, J_{d_i} , denotará como es usual, una matriz de Jordan de tamaño d_i y $\mathrm{diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_m})$ una matriz diagonal por bloques, cuyos bloques son matrices de Jordan de tamaños d_1, \dots, d_m .

Lema 4.1.1 Sea $X \in \mathcal{K} \otimes \eta^+$. Entonces X es conjugada por $T \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ a una matriz de Jordan $J = \mathrm{diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_m})$, donde cada J_{d_i} es un bloque de Jordan de tamaño d_i . Más aún, existen filas $t_1, \dots, t_m \in \mathcal{K}_{1,n}$ tales que

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_m \end{pmatrix}, \text{ donde } T_i = \begin{pmatrix} t_i \\ t_i X \\ \vdots \\ t_i X^{d_i-2} \\ t_i X^{d_i-1} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, m$$

Demostración. Dado que \mathcal{K} es un cuerpo, el teorema de descomposición en forma canónica de Jordan se aplica para $\mathfrak{gl}_n(\mathcal{K})$. Como X es nilpotente, existe $T \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ tal que $TXT^{-1} = J = \mathrm{diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_m})$ para algún $m \in \mathbb{N}$, y algunos d_i con $i = 1, \dots, m$.

Si reescribimos a T como

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_m \end{pmatrix}, \text{ donde } T_i = \begin{pmatrix} \bar{t}_{i,1} \\ \bar{t}_{i,2} \\ \vdots \\ \bar{t}_{i,d_i-1} \\ \bar{t}_{i,d_i} \end{pmatrix} \in \mathcal{K}_{d_i,n}; \bar{t}_{i,j} \in \mathcal{K}_{1,n}$$

para $j = 1, \dots, d_i; i = 1, \dots, m$, entonces $TX = JT$ implica que

$$T_i X = (O_1 J_{d_i} O_2) T_i,$$

donde O_1 y O_2 son matrices nulas de tamaño $(d_i \times (d_1 + \dots + d_{i-1}))$ y $(d_i \times (d_{i+1} + \dots + d_m))$. De esto, podemos concluir que

$$\bar{t}_{i,1} X = \bar{t}_{i,2},$$

$$\bar{t}_{i,2} X = \bar{t}_{i,1} X^2 = \bar{t}_{i,3},$$

...

$$\bar{t}_{i,d_i-2} X = \bar{t}_{i,1} X^{d_i-2} = \bar{t}_{i,d_i-1},$$

$$\bar{t}_{i,d_i-1} X = \bar{t}_{i,1} X^{d_i-1} = \bar{t}_{i,d_i}.$$

Si denotamos $t_i = \bar{t}_{i-1} \in \mathcal{K}_{1,n}$, esto implica que

$$T_i = \begin{pmatrix} \bar{t}_{i,1} \\ \bar{t}_{i,1} X \\ \vdots \\ \bar{t}_{i,1} X^{d_i-2} \\ \bar{t}_{i,1} X^{d_i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_i \\ t_i X \\ \vdots \\ t_i X^{d_i-2} \\ t_i X^{d_i-1} \end{pmatrix}$$

Como esto se cumple para todo $i = 1, \dots, m$, el lema queda probado. ■

4.2. Órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$

En esta sección consideraremos el grupo $\bar{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) := \mathbb{C}^* \ltimes \mathfrak{L}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{C}^* \ltimes \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ como se definió en 2.24 y, el álgebra $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{sl}}_n^{(1)}(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}_n(\mathcal{K}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$, la completación del álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ como se definió en 2.18.

Si $X + \lambda c \in \hat{\mathfrak{g}}$, con $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathcal{K})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces la acción adjunta de $\overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ sobre $X + \lambda c$, definida como en 2.26, está dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} \, g(X + \lambda c) &= gXg^{-1} + \left(\lambda - \mathrm{res} \left\langle g^{-1} \frac{dg}{dt}, X \right\rangle_t \right) c \\ \mathrm{Ad} \, d_z(X + \lambda c) &= \gamma_{\hat{\mathfrak{g}}}(z)(X) + \lambda c \end{aligned} \quad (4.2)$$

para todo $g \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ y todo $z \in \mathbb{C}$. Además, como en 2.25, denotamos por $\mathrm{Ad}_{\mathcal{K}}$ la representación adjunta de $\mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ en $\mathfrak{sl}_n(\mathcal{K})$, dada por la conjugación.

Dadas $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, si estas son conjugadas por un elemento en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, entonces también lo son por un elemento en $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, pues

$$TAT^{-1} = \left(\frac{T}{\det(T)^{\frac{1}{n}}} \right) \cdot A \cdot \left(\frac{T}{\det(T)^{\frac{1}{n}}} \right)^{-1}$$

y para cualquier $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ se tiene que $\det \left(\frac{T}{\det(T)^{\frac{1}{n}}} \right) = 1$. Pero esto no ocurre en $\mathfrak{gl}_n(\mathcal{K})$, dado que \mathcal{K} no contiene las raíces n -ésimas de todos sus elementos. En lo que sigue, nos es de gran importancia saber cuándo un elemento en \mathcal{K} tiene una raíz n -ésima en \mathcal{K} , eso lo veremos a continuación, para ello empezamos introduciendo la siguiente definición.

Definición 4.2.1 Si $s \in \mathcal{K}$, $s = \sum_{i=-k}^{\infty} a_i t^i$, entonces definimos el orden de s como el entero

$$\mathcal{O}(s) := \min\{m \mid a_m \neq 0\} \quad (4.3)$$

Lema 4.2.1 Sea $s \in \mathcal{K}$. Entonces s tiene una raíz n -ésima en \mathcal{K} si y sólo si $\mathcal{O}(s)$ es múltiplo de n .

Demostración. Sean $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ y $r = \sum_{k=-l}^{\infty} b_k t^k$, entonces r es una raíz n -ésima de s , si $r^n = s$. Si $b_{-l} \neq 0$, entonces $(b_{-l})^n \neq 0$ es el coeficiente de t^{-ln} . Dado que $\mathcal{O}(s) = 0$, se debe tener que $l = 0$. Ahora, $r^n = s$ si:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0^n \\ a_1 &= n b_0^{n-1} b_1 \\ &\vdots \\ a_k &= \sum_{i_1 + \dots + i_n = k} b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_n}. \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es claro que siempre podemos encontrar elementos $b_0, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{C}$ satisfaciendo las anteriores ecuaciones. Por lo tanto, s tiene raíz n -ésima.

En general, si consideramos $\mathcal{O}(s) = m$, $m \in \mathbb{Z}$, y tomamos $s = t^m \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. Tenemos por lo anterior que $q = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ tiene raíz n -ésima. Luego, existe $\tilde{r} \in \mathcal{K}$ tal que $q = \tilde{r}^n$. Por otro lado, t^m tiene como raíz n -ésima a $t^{\frac{m}{n}}$, y esta pertenece a \mathcal{K} si y sólo si m es múltiplo de n . Por lo tanto, si m es múltiplo de n , $r = \tilde{r} t^{\frac{m}{n}}$ es una raíz n -ésima de s en \mathcal{K} . ■

Observación 4.2.1 Si $p, q \in \mathcal{K}$ son tales que $\mathcal{O}(p) = m$ y $\mathcal{O}(q) = n$, entonces $\mathcal{O}(pq) = m + n$ y $\mathcal{O}(pq^{-1}) = m - n$.

Lema 4.2.2 Sea $X \in \mathfrak{sl}_n(\mathcal{K})$ nilpotente. Entonces, X es $\mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ -conjugado a una matriz en bloques cuasi-Jordan.

Demostración. Sea $T \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ tal que $TXT^{-1} = J = \mathrm{diag}(J_{d_1}, \dots, J_{d_m})$ es una matriz en bloques de Jordan. Sean $q = \det(T)$ y $\mathcal{O}(q) = k$. Consideramos dos casos:

Si $k = ln$, entonces por 4.2.1, q tiene una raíz n -ésima en \mathcal{K} . Luego $T' = \frac{T}{q^{\frac{1}{n}}} \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ y es tal que $T'XT'^{-1} = J$.

Si $k \equiv l \pmod{n}$, $0 < l < n$, entonces por 4.2.1, $\mathcal{O}(qt^{-l}) = k - l$. Por lo que nuevamente por 4.2.1, qt^{-l} tiene raíz n -ésima en \mathcal{K} . Consideremos $S = \mathrm{diag}(t^{-l}, 1, \dots, 1)$ y $T' = \frac{T}{(qt^{-l})^{\frac{1}{n}}}$. Así $T'XT'^{-1} = J$ y $\det(T) = t^{-l}$. Luego,

$$(ST')X(ST')^{-1} = SJS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & t^{-l} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & J_{d_2} \\ & & & & \ddots \\ & & & & J_{d_m} \end{pmatrix}$$

es una matriz cuasi-Jordan y, además $\det(ST') = 1$. ■

En adelante denotamos con $D(J_{\bar{p}_{1,i_1}}, \dots, J_{\bar{p}_{d,i_d}})$ a una matriz diagonal con bloques cuasi-Jordan, donde cada bloque $J_{\bar{p}_{k,i_k}}$, de tamaño i_k , es como en 4.1 y, $\bar{p}_{k,i_k} = (p_{k,1}, \dots, p_{k,i_k-1}) \in \mathcal{K}^{i_k-1}$. Por convención, tendremos siempre que $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_d$.

Así como en 4.1.1 dimos una forma general para la matriz en $\mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ conjugando una matriz triangular superior estricta a una matriz en bloques de Jordan, también tenemos una caracterización para la matriz en $\mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ conjugando una matriz triangular superior estricta a una matriz cuasi-Jordan.

Proposición 4.2.3 *Si $X \in \mathcal{K} \otimes \eta^+$ es conjugado por $T \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ a una matriz en bloques cuasi-Jordan $D(J_{\bar{p}_{1,d_1}}, \dots, J_{\bar{p}_{m,d_m}})$, para algunos $\bar{p}_{i,d_i} = (p_{i,1}, \dots, p_{i,d_i-1}) \in \mathcal{K}^{d_i-1}$. Entonces, existen filas $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_m \in \mathcal{K}^n$ tales que*

$$T = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_m \end{pmatrix}, \quad T_i = \begin{pmatrix} \bar{t}_i \\ p_{i,1}^{-1} \bar{t}_i X \\ \vdots \\ p_{i,1}^{-1} \cdots p_{i,d_i-2}^{-1} \bar{t}_i X^{d_i-2} \\ p_{i,1}^{-1} \cdots p_{i,d_i-1}^{-1} \bar{t}_i X^{d_i-1} \end{pmatrix}$$

Demostración. Sea $T \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ tal que

$$TXT^{-1} = D(J_{\bar{p}_{1,d_1}}, \dots, J_{\bar{p}_{m,d_m}}) \tag{4.4}$$

Podemos reescribir a T como

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_m \end{pmatrix}, \quad \text{donde } T_i = \begin{pmatrix} \bar{t}_{i,1} \\ \bar{t}_{i,2} \\ \vdots \\ \bar{t}_{i,d_i-1} \\ \bar{t}_{i,d_i} \end{pmatrix} \quad \text{con } \bar{t}_{i,j} \in \mathcal{K}^n$$

Entonces, de 4.4 tenemos que

$$T_i X = (O_1 J_{\bar{p}_{i,d_i}} O_2) T$$

donde O_1 y O_2 son matrices nulas de tamaño $d_i \times (d_1 + \dots + d_{i-1})$ y $d_i \times d_{i+1} + \dots + d_m$ respectivamente

De esta igualdad podemos deducir que

$$\bar{t}_{i,1} X = p_{i,1} \bar{t}_{i,2}, \text{ entonces } \bar{t}_{i,2} = p_{i,1}^{-1} \bar{t}_{i,1} X$$

$$\bar{t}_{i,2} X = p_{i,2} \bar{t}_{i,3}, \text{ entonces } \bar{t}_{i,3} = p_{i,2}^{-1} \bar{t}_{i,2} X = p_{i,2}^{-1} p_{i,1}^{-1} \bar{t}_{i,1} X^2$$

\vdots

$$\bar{t}_{i,d_i-1} X = p_{i,d_i-1} \bar{t}_{i,d_i}, \text{ entonces } \bar{t}_{i,d_i} = p_{i,d_i-1}^{-1} \bar{t}_{i,d_i-1} X = \dots = p_{i,d_i-1}^{-1} \dots p_{i,1}^{-1} \bar{t}_{i,1} X^{n-1}$$

Luego, si consideramos $\bar{t}_{i,1} = \bar{t}_i$ para cada $i = 1, \dots, m$, obtenemos la igualdad deseada. ■

Si $X = J(p_1, \dots, p_{n-1})$ es un bloque cuasi-Jordan de tamaño n , definimos la *multiplicidad de* X por

$$\mathbf{m}(X) := p_1^{n-1} p_2^{n-2} \dots p_{n-1}. \quad (4.5)$$

Lema 4.2.4 Sean $X = J(p_1, \dots, p_{n-1})$ e $Y = J(q_1, \dots, q_{n-1})$ en $\mathfrak{sl}_n(\mathcal{K})$. Entonces X, Y son $\mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ -conjugadas si y solo si existe $r \in \mathcal{K}$ tal que

$$r^n = \mathbf{m}(X) \mathbf{m}(Y)^{-1} \quad (4.6)$$

donde \mathbf{m} viene dado por 4.5.

Demostración. Sea $T \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ tal que $T X T^{-1} = Y$, entonces por 4.2.3, tenemos que

$$T = \begin{pmatrix} \bar{t} \\ q_1^{-1} \bar{t} X \\ \vdots \\ q_1^{-1} \dots q_{n-2}^{-1} \bar{t} X^{n-2} \\ q_1^{-1} \dots q_{n-2}^{-1} q_{n-1}^{-1} \bar{t} X^{n-1} \end{pmatrix}, \text{ donde } \bar{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{K}_{1,n}$$

para algunos $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{K}$. Si $T = (t_{ij})$, entonces

$$t_{ii} = t_1 \prod_{j=1}^{i-1} p_j q_j^{-1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dado que $\det T = 1$ y T es triangular superior, entonces

$$\begin{aligned} \det T &= \prod t_{ii} \\ &= t_1^n p_1^{n-1} p_2^{n-2} \dots p_{n-1} q_1^{-(n-1)} q_2^{-(n-2)} \dots q_{n-1}^{-1} \\ &= t_1^n \mathbf{m}(X) \mathbf{m}(Y)^{-1} \end{aligned}$$

Luego, tomando $r = t_1^{-1}$ obtenemos lo deseado.

Recíprocamente, si consideramos $a_1 = 1$ y $a_{i+1} = \prod_{k=1}^i p_k q_k^{-1}$ para $i = 1, \dots, n-1$, entonces la matriz diagonal $T = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$, satisface que $T X T^{-1} = Y$. Además, 4.6 implica que $\det T = 1$. ■

Corolario 4.2.5 Sean $X = J_{(p_1, \dots, p_{n-1})}$ e $Y = J_{(q_1, \dots, q_{n-1})}$ en $\mathfrak{sl}_n(\mathcal{K})$. Entonces X, Y son $\mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ -conjugadas si y solo si $\mathcal{O}(\mathfrak{m}(X)) - \mathcal{O}(\mathfrak{m}(Y))$ es múltiplo de n .

Demostración. Se obtiene directamente del lema anterior y de 4.2.1. ■

Teorema 4.2.6 Sean $X = D(J_{\bar{p}_1, i_1}, \dots, J_{\bar{p}_d, i_d}), Y = D(J_{\bar{q}_1, j_1}, \dots, J_{\bar{q}_l, j_l})$ matrices diagonales por bloques cuasi-Jordan $\mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ conjugadas, entonces:

1. $d = l$, es decir, tienen la misma cantidad de bloques,
2. $i_k = j_k$, para $k = 1, \dots, d$, es decir, los bloques tienen el mismo tamaño; o dicho de otra manera, X, Y tienen asociada la misma partición.

Demostración. Si X, Y son matrices en bloques cuasi-Jordan con bloques de tamaño i_1, \dots, i_d y j_1, \dots, j_l respectivamente, entonces X e Y son $\mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ -conjugadas a matrices en bloques de Jordan con bloques de tamaño i_1, \dots, i_d y j_1, \dots, j_l respectivamente. Por otro lado, dado que X, Y son $\mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ -conjugadas, entonces son también $\mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ -conjugadas. Luego X y Y son $\mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ -conjugadas a la misma matriz en bloques de Jordan; por lo que se debe tener que $d = l$ e $i_k = j_k$ para todo $k = 1, \dots, d$. ■

El siguiente resultado nos dará condiciones suficientes para que dos matrices en bloques cuasi-Jordan sean conjugadas por $\mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$. Antes, generalizaremos la notación dada en 4.5, para matrices en bloques cuasi-Jordan: Si $X = D(J_{\bar{p}_1, i_1}, \dots, J_{\bar{p}_d, i_d})$, entonces decimos que el orden de las multiplicidades de X es

$$\mathbf{n}_X = \mathcal{O} \left(\prod_{k=1}^d \mathfrak{m}(J_{\bar{q}_k, j_k}) \right). \quad (4.7)$$

Teorema 4.2.7 Sean $X = D(J_{\bar{p}_1, i_1}, \dots, J_{\bar{p}_d, i_d}), Y = D(J_{\bar{q}_1, j_1}, \dots, J_{\bar{q}_l, j_l})$ matrices diagonales por bloques cuasi-Jordan. Si X, Y satisfacen

1. $d = l$, es decir, tienen la misma cantidad de bloques,
 2. $i_k = j_k$, para $k = 1, \dots, d$, es decir, los bloques tienen el mismo tamaño, y
 3. $\mathcal{O} \left(\prod_{k=1}^d \frac{\mathfrak{m}(J_{\bar{q}_k, j_k})}{\mathfrak{m}(J_{\bar{p}_k, i_k})} \right) = \mathbf{n}_X - \mathbf{n}_Y$, es múltiplo de i_d ,
- entonces, son $\mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ -conjugadas.

Demostración. Dado (1) y (2), la forma normal de Jordan garantiza que X e Y son $\mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ -conjugadas. Consideremos $T \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{K})$ como se dio en la proposición 4.2.3, y además asumamos sin pérdida de generalidad, que en cada uno de los vectores \bar{t}_k , la entrada $i_1 + \dots + i_k + 1$ es t_k y las demás entradas son 0, con lo que T resultará ser la matriz diagonal por bloques $T = D(T_1, \dots, T_d)$, donde

$$T_k = \begin{pmatrix} t_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{t_k p_{k,1}}{q_{k,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t_k p_{k,1} p_{k,2}}{q_{k,1} q_{k,2}} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{\prod_{j=1}^{i_k-1} p_{k,j}}{\prod_{j=1}^{i_k-1} q_{k,j}} \end{pmatrix}$$

para $k = 1, \dots, d$. Es claro, que tomando T de esta forma, tenemos que $TXT^{-1} = Y$; además

$$\det T = \prod_{k=1}^d t_k^{i_k} \mathfrak{m}(J_{\bar{p}_{k,i_k}}) \mathfrak{m}(J_{\bar{q}_{k,i_k}})^{-1}.$$

Así, si en particular tomamos $t_1 = \dots = t_{d-1} = 1$ y t_d igual a la raíz i_d -ésima de $\prod_{k=1}^d \frac{\mathfrak{m}(J_{\bar{q}_{k,i_k}})}{\mathfrak{m}(J_{\bar{p}_{k,i_k}})}$, cuya existencia es garantizada por (3), entonces $\det T = 1$. Luego, $T \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$. ■

Teorema 4.2.8 *Sea $X \in \mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ nilpotente. Entonces existe $g \in \overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ tal que*

$$\mathrm{Ad} g(X) = D(J_{\bar{p}_{1,i_1}}, \dots, J_{\bar{p}_{d,i_d}}) + \lambda c$$

para algunos $d \in \mathbb{N}$, $\bar{p}_{k,i_k} \in \mathcal{K}^{i_k}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración. Si $X \in \mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ es nilpotente, entonces por el teorema 3.2.11, tenemos que existe $g_1 \in \overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ tal que $\mathrm{Ad} g_1(X) = Y + \lambda_1 c$, donde $Y \in \mathbb{C}[[t]] \otimes \mathfrak{h}^+$ y $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Además por la proposición 4.2.3, existe $g_2 \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ tal que $\mathrm{Ad}_{\mathcal{K}} g_2(X) = g_2 X g_2^{-1} = D(J_{\bar{p}_{1,d_1}}, \dots, J_{\bar{p}_{m,d_m}})$, para algunos $\bar{p}_{k,i_k} \in \mathcal{K}^{i_k}$ y $d \in \mathbb{N}$. Así

$$\mathrm{Ad} g_2 g_1(X) = \mathrm{Ad} g_2(Y + \lambda_1 c) = D(J_{\bar{p}_{1,d_1}}, \dots, J_{\bar{p}_{m,d_m}}) + (\lambda_1 - \mathrm{res}\langle g_2^{-1} \frac{dg_2}{dt}, Y \rangle_t) c$$

luego, tomando $g = g_2 g_1$ y $\lambda = \lambda_1 - \mathrm{res}\langle g_2^{-1} \frac{dg_2}{dt}, Y \rangle_t$, obtenemos lo deseado. ■

Hasta el momento, hemos mostrado que todo elemento nilpotente en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ es $\overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ -conjugado a un elemento de la forma $D + \lambda c$, donde D es una matriz cuasi-Jordan. Ahora nos preguntamos si las $\mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ y $\overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ clases de conjugación coinciden.

Teorema 4.2.9 *Sea $X \in \mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ nilpotente. Entonces, las órbitas nilpotentes de X en $\hat{\mathfrak{sl}}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ a través de $\mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ y $\overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ son iguales, es decir,*

$$\mathrm{Ad} \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})(X) = \mathrm{Ad} \overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))(X)$$

Demostración. Por el teorema 4.2.8, tenemos que toda $\overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ -órbita nilpotente en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$, contiene un elemento de la forma $D + \lambda c \in \hat{\mathfrak{sl}}_n^{(1)}(\mathbb{C})$, con D una matriz cuasi-Jordan y $\lambda \in \mathbb{C}$; entonces, solo debemos mostrar que $\mathrm{Ad} \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})(D + \lambda c) = \mathrm{Ad} \overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))(D + \lambda c)$, o equivalentemente que para cualquier $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $\mathrm{Ad} d_z(D + \lambda c) \in \mathrm{Ad} \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})(D + \lambda c)$. Sea $D = D(J_{\bar{p}_{1,i_1}}, \dots, J_{\bar{p}_{d,i_d}})$, donde $J_{\bar{p}_{j,i_j}} = J(p_{j,1}, \dots, p_{j,i_j})$ y $(p_{j,1}, \dots, p_{j,i_j}) \in \mathcal{K}^{i_j}$. Entonces

$$\mathrm{Ad} d_z(D + \lambda c) = D(J(p_{1,1}(zt), \dots, p_{1,i_1}(zt)), \dots, J(p_{d,1}(zt), \dots, p_{d,i_d}(zt))) + \lambda c \quad (4.8)$$

Denotemos $D_z = D(J(p_{1,1}(zt), \dots, p_{1,i_1}(zt)), \dots, J(p_{d,1}(zt), \dots, p_{d,i_d}(zt)))$. Tenemos que $\mathcal{O}(p(t)) = \mathcal{O}(p(zt))$, para todo $p \in \mathcal{K}$ y $z \in \mathbb{C}$. Así también, $\mathcal{O}(p) = -\mathcal{O}(p^{-1})$. Luego, para cada $j = 1, \dots, d$, se tiene que

$$\mathcal{O}(p_{j,1}(t)^{i_j-1} \dots p_{j,i_j}(t)) + \mathcal{O}(p_{j,1}(zt)^{-i_j+1} \dots p_{j,i_j}(zt)^{-1}) = 0 \quad (4.9)$$

Así, por el Teorema 4.2.7, tenemos que D y D_z son $\mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ -conjugados. ■

Los siguientes tres lemas, son resultados técnicos, que nos darán las herramientas necesarias para demostrar qué elementos nilpotentes conjugados, cuya componente en $\mathfrak{sl}_n(\mathcal{K})$ son matrices en bloques cuasi-Jordan, tienen la misma componente en $\mathbb{C}c$, lo que nos llevará a definir el nivel de una órbita nilpotente.

Lema 4.2.10 *Sea $X = D(J_{\bar{p}_{1,d_1}}, \dots, J_{\bar{p}_{m,d_m}})$, para algunos $\bar{p}_{i,d_i} = (p_{i,1}, \dots, p_{i,d_i-1}) \in \mathcal{K}^{d_i-1}$ y, $T = (t_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ tal que TXT^{-1} es una matriz en bloques cuasi-Jordan. Si*

$$\begin{aligned} i &= r + d_1 + \dots + d_\alpha, \text{ con } r \leq d_\alpha \\ j &= s + d_1 + \dots + d_\beta, \text{ con } s \leq d_\beta \end{aligned}$$

y $1 \leq s < r \leq d_1$, entonces $t_{ij} = 0$

Demostración. Sean $i = r + d_1 + \dots + d_\alpha, j = s + d_1 + \dots + d_\beta$, con $r \leq d_\alpha, s \leq d_\beta$ y $1 \leq s < r \leq d_1$. Por el lema 4.2.3, tenemos que existe $\bar{t}_{\alpha+1} \in \mathcal{K}^n$ tal que

$$t_{ij} = \bar{t}_{\alpha+1} \cdot \mathrm{col}_j X^{r-1}$$

Es fácil ver que las columnas $\lambda + d_1 + \dots + d_\beta$ de X^{r-1} , para $1 \leq \lambda \leq r-1$, son nulas. Dado que $s < r$, se tiene entonces que la columna j de X^{r-1} es nula. Por lo tanto, $t_{ij} = 0$. ■

Lema 4.2.11 *Sea $X = D(J_{\bar{p}_{1,d_1}}, \dots, J_{\bar{p}_{m,d_m}})$, con $\bar{p}_{i,d_i} = (p_{i,1}, \dots, p_{i,d_i-1}) \in \mathcal{K}^{d_i-1}$ y, $T = (t_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ tal que TXT^{-1} es una matriz en bloques cuasi-Jordan. Sea M_{ij} el determinante de la matriz que se obtiene desde T al eliminar la fila i y la columna j . Si*

$$\begin{aligned} i &= r + d_1 + \dots + d_\alpha, \text{ con } r \leq d_\alpha \\ j &= s + d_1 + \dots + d_\beta, \text{ con } s \leq d_\beta \end{aligned}$$

y $1 \leq r < s \leq d_1$, entonces $M_{ij} = 0$.

Demostración. Denotemos por

$$j_1 = 1; \quad j_l = 1 + d_1 + \dots + d_{l-1}, \text{ si } 2 \leq l \leq m-1 \quad (4.10)$$

y, para $0 \leq u < d_1$ tomemos los conjuntos

$$I_u = \{j_1 + u, \dots, j_{r_u} + u\}, \text{ donde } d_{r_u} \geq u + 1 \text{ y } d_{r_u+1} < u + 1. \quad (4.11)$$

Sean $i = r + d_1 + \dots + d_\alpha$ y $j = s + d_1 + \dots + d_\beta$, con $r < d_\alpha, s < d_\beta$ y $1 \leq r < s \leq d_1$. Consideremos dos casos:

- Si $i \neq j_l$, para todo $1 \leq l \leq m-1$, entonces

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^m \pm t_{j_k, j_l} M_{(i, j_k / j, j_m)}$$

Sea $1 \leq k \leq m$ fijo. Tomemos $S = \{1, \dots, n\} \setminus \{j, j_m\}$, $S' = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j_k\}$ y $\Omega = \{\sigma : S \rightarrow S' \text{ inyectiva}\}$.

Si $\sigma \in \Omega$ satisface que $t_{\sigma_a, a} \neq 0$ para todo $a \in S$, entonces de acuerdo con el lema 4.2.10, se debe tener que:

- Si $a \in I_0 \setminus \{j_m\}$, entonces $\sigma_a \in I_0 \setminus \{j_k\}$.
- Si $1 < \lambda < r$ y $a \in I_{\lambda-1}$, entonces $\sigma_a \in I_{\lambda-1}$
- Si $a \in I_{r-1}$, entonces $\sigma_a \in I_{r-1} \setminus \{i\}$.

Luego, para algún $a \in I_{r-1}$, se debe tener que $g_{\sigma_a, a} = 0$. Por lo tanto, para todo $\sigma \in \Omega$, $\prod_{a \in S} t_{\sigma_a, a} = 0$; y así, $M_{ij} = 0$.

- Si $i = j_l$, para algún $1 \leq l \leq m - 1$, entonces

$$M_{ij} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m \pm t_{j_k, j_l} M_{(i, j_k / j, j_m)}$$

Consideremos S, S' y Ω como en el caso anterior. Tenemos que $t_{\sigma_a, a} \neq 0$ si y solo si para todo $a \in I_0 \setminus \{j_m\}$, se tiene que $\sigma_a \in I_0 \setminus \{j_l, j_k\}$. Por lo tanto, para todo $\sigma \in \Omega$, $\prod_{a \in S} t_{\sigma_a, a} = 0$, por lo que $M_{ij} = 0$. ■

Lema 4.2.12 Sea $X = D(J_{\bar{p}_{1,d_1}}, \dots, J_{\bar{p}_{m,d_m}})$, con $\bar{p}_{i,d_i} = (p_{i,1}, \dots, p_{i,d_i-1}) \in \mathcal{K}^{d_i-1}$ y $T = (t_{ij}) \in \text{SL}_n(\mathcal{K})$ tal que TXT^{-1} es una matriz en bloques cuasi-Jordan. Sea M_{ij} el determinante de la matriz que se obtiene desde T al eliminar la fila i y la columna j . Si $t_{ij} \neq 0$, entonces $M_{i,j+1} = 0$.

Demostración. Sea $t_{ij} \neq 0$, entonces por el lema 4.2.10, tenemos que $i = r + d_1 + \dots + d_\alpha$, $j = s + d_1 + \dots + d_\beta$, con $r \leq d_\alpha$, $s \leq d_\beta$ y $1 \leq r \leq s \leq d_1$. Dado que $r < s + 1$, por el lema 4.2.11, tenemos que $M_{i,j+1} = 0$. ■

En el siguiente resultado, los enteros j_i son como en 4.10.

Lema 4.2.13 Sea $X = D(J_{\bar{p}_{1,d_1}}, \dots, J_{\bar{p}_{m,d_m}})$, con $\bar{p}_{i,d_i} = (p_{i,1}, \dots, p_{i,d_i-1}) \in \mathcal{K}^{d_i-1}$ y $T = (t_{ij}) \in \text{SL}_n(\mathcal{K})$ tal que TXT^{-1} es una matriz en bloques cuasi-Jordan. Entonces, para todo $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_2 - 1, \dots, j_d - 1\}$, la entrada $(i + 1, i)$ de $T^{-1} \frac{dT}{dt}$, a la que denotaremos $(T^{-1} \frac{dT}{dt})_{i+1,i}$, es cero.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \left(T^{-1} \frac{dT}{dt}\right)_{i+1,i} &= \text{fil}_{i+1} T^{-1} \cdot \text{col}_i \frac{dT}{dt} \\ &= \text{col}_{i+1} \text{cof}(T) \cdot \text{col}_i \frac{dT}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^n \text{cof}(T)_{j,i+1} \cdot \frac{dT}{dt}_{j,i}, \end{aligned}$$

donde $\text{cof}(T)$ denota la matriz de cofactores de T . Ahora, por los lemas 4.2.10 y 4.2.12, se tiene que cada uno de los términos de la suma de arriba son cero. ■

Teorema 4.2.14 Sean $\bar{D} = D + \lambda c$, y $\bar{D}' = D' + \lambda' c$, donde D y D' son matrices en bloques cuasi-Jordan. Si $\mathfrak{D}_{\bar{D}} = \mathfrak{D}_{\bar{D}'}$, entonces $\lambda = \lambda'$. Más aún, si $gDg^{-1} = D'$, para algún $g \in \text{SL}_n(\mathcal{K})$, entonces $\text{Ad } g(D) = D'$.

Demostración. Razonemos por contradicción. Supongamos existe $T \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ conjugando $D_k = D_{\sigma,k}$ a $D_{k'} = D_{\sigma,k'}$, con T dado como en la proposición 4.2.3.

1. Denotemos por

$$l_1 = 0; \quad l_m = \sum_{j=1}^{m-1} k_j i_j, \quad \text{para } 2 \leq m \leq s \quad (4.14)$$

Sea M la matriz obtenida desde T al tomar las filas y las columnas

$$L_{t,r} = 1 + l_t + (r-1)i_t, \quad \text{con } 1 \leq t \leq s \text{ y } 1 \leq r \leq k_t$$

y M_j la matriz obtenida al tomar las primeras $k_1 + \dots + k_j$ filas y columnas de M , para $1 \leq j \leq s$. En particular, $M = M_s$. Sea

$$T_{r,p}^{u,v} = t_{L_{r,u}, L_{p,v}}$$

2. Tenemos que para $1 \leq r \leq s$

$$T_{r,p}^{u,v} = 0, \quad \text{si } 1 \leq p \leq r-1, \quad 1 \leq u \leq k_r \text{ y } 1 \leq v \leq k_p \quad (4.15)$$

En efecto, consideremos $1 \leq r \leq s$ fijo, y tomemos $1 \leq u \leq k_r$. Por la proposición 4.2.3, Se tiene que

$$\mathrm{fil}_{L_{r,u}+(i_r-1)}(TD_k) = \mathrm{fil}_{L_{r,u}}(T)D_k^{i_r};$$

ahora, dado que $i_p < i_r$ si $1 \leq p < r$, entonces la entrada $L_{p,v}, L_{p,v} + i_r$ de $D_k^{i_r}$ es 1, si $1 \leq v \leq k_p$. Por lo tanto

$$(TD_k)_{L_{r,u}, L_{p,v}+i_r} = t_{L_{r,u}, L_{p,v}} = T_{r,p}^{u,v}.$$

Por otro lado, $\mathrm{fil}_{L_{r,u}+(i_r-1)}(D_{k'}T) = \mathrm{fil}_{L_{r,u}+(i_r-1)}(D_{k'})T$ es nula. Dado que $TD_k = D_{k'}T$, 4.15 se tiene.

3. De acuerdo con la notación en (1), por (2) se puede ver que

$$M_j = \begin{pmatrix} M_{j-1} & [T_{r,j}^{u,v}]_{1 \leq r \leq j-1} \\ 0 & [T_{j,j}^{u,v}] \end{pmatrix}$$

para cada $1 \leq j \leq s$. Así, $\det M_j = \det M_{j-1} \det [T_{j,j}^{u,v}]$.

4. Tenemos que $\det T = t^{k-k'} (\det M_1)^{i_1-i_2} (\det M_2)^{i_2-i_3} \dots (\det M_{s-1})^{i_{s-1}-i_s} (\det M_s)^{i_s}$.

5. Sea $P_i = \det M_i$. Entonces, por (3) y (4), $\det T = t^{k-k'} \prod_{j=1}^s P_j^{m_j}$, donde $m_j \geq i_s$, para todo $1 \leq j \leq s$. Luego, si consideramos $1 \leq k < k' \leq i_s$, entonces $0 < k' - k < i_s$. Por lo tanto, no es posible hallar elementos P_i en \mathcal{K} , para los cuales se tenga que $t^{k'-k} = \prod_{j=1}^s P_j^{m_j}$ si $m_j \geq i_s$. Luego, no es posible hallar $T \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{K})$ tal que $TD_k T^{-1} = D_{k'}$. ■

Teorema 4.2.17 *Hay una correspondencia biyectiva entre órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ y el conjunto $\{(\sigma, j) : \sigma = [i_1, \dots, i_d] \in \mathcal{P}(n) \text{ y } 0 \leq j < i_d\} \times \mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{D}(\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C}))$ el conjunto de órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$. Consideremos

$$\Psi : \mathfrak{D}(\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})) \rightarrow \{(\sigma, j) : \sigma = [i_1, \dots, i_d] \in \mathcal{P}(n) \text{ y } 0 \leq j < i_d\} \times \mathbb{C} \quad (4.16)$$

la aplicación definida de la siguiente manera: Sea $X \in \mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ nilpotente, entonces por el corolario 4.2.15, existen $g \in \overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$, $\sigma = [i_1, \dots, i_d]$ partición de n y $0 \leq k < i_d$, tales que $\mathrm{Ad}gX = D_{\sigma,k} + \lambda c$. Entonces,

$$\Psi(\mathfrak{D}_X) = ([i_1, \dots, i_d], k, \lambda) \quad (4.17)$$

1. Ψ está bien definida: Sean $X, Y \in \mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ elementos nilpotentes, $\overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ -conjugados. Supongamos existen $g_1, g_2 \in \overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$, $\sigma_1 = [i_1, \dots, i_d]$, $\sigma_2 = [j_1, \dots, j_r]$ particiones de n , $0 \leq k_1 < i_d$, $0 \leq k_2 < j_r$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tales que

$$\mathrm{Ad} g_1(X) = D_{\sigma_1, k_1} + \lambda_1 c, \quad \mathrm{Ad} g_2(Y) = D_{\sigma_2, k_2} + \lambda_2 c.$$

Dado que $D_{\sigma_1, k_1} + \lambda_1 c$ y $D_{\sigma_2, k_2} + \lambda_2 c$ resultan ser también $\overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ -conjugados, entonces por el teorema 4.2.6 se tiene que $\sigma_1 = \sigma_2$; por la proposición 4.2.16, $k_1 = k_2$ y por el teorema 4.2.14, se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2$. Por lo tanto, Ψ está bien definida.

2. Ψ es inyectiva: Si X, Y son elementos nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$, y

$$\Psi(\mathfrak{D}_X) = \Psi(\mathfrak{D}_Y) = (\sigma = [i_1, \dots, i_d], k, \lambda),$$

entonces existen $g_1, g_2 \in \overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ tales que $\mathrm{Ad} g_1 X = D_{\sigma, k} + \lambda c = \mathrm{Ad} g_2 Y$. Por lo tanto, X e Y son $\overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ -conjugados, luego $\mathfrak{D}_X = \mathfrak{D}_Y$.

3. Ψ es sobre: Sean $\sigma = [i_1, \dots, i_d]$ una partición de n , $0 \leq k < i_d$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\Psi(\mathfrak{D}_{D_{\sigma, k} + \lambda c}) = (\sigma, k, \lambda)$. ■

Observación 4.2.4 *El número de órbitas nilpotentes en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ de nivel λ , para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, es finito.*

Ejemplo 4.2.1 *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4^{(1)}(\mathbb{C})$. Las particiones de 4 son $[1, 1, 1, 1]$, $[1, 1, 2]$, $[1, 3]$, $[2, 2]$, $[4]$, luego $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ tiene 5 órbitas nilpotentes. Así, en $\mathfrak{sl}_4^{(1)}(\mathbb{C})$, las órbitas nilpotentes de nivel 0 son:*

<i>Partición</i>	<i>k</i>	$X_{\mathfrak{d}}$
[1, 1, 1, 1]	0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
[2, 1, 1]	0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
[2, 2]	0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
[2, 2]	1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
[3, 1]	0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
[4]	0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
[4]	1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
[4]	2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
[4]	3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Capítulo 5

Triplas estándar y diagramas de Dynkin

En este capítulo, consideraremos $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ y $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{sl}}_n^{(1)}(\mathbb{C})$. Para esta última parte, mostraremos que para todo elemento nilpotente de nivel 0 en \mathfrak{g} , existe una tripla estándar en $\hat{\mathfrak{g}}$ conteniéndolo como su elemento nilpositivo. Finalmente, asociaremos a cada órbita nilpotente de nivel 0 en \mathfrak{g} un diagrama de Dynkin con pesos.

5.1. Triplas estándar

El teorema de Jacobson Morozov nos dice que todo elemento nilpotente en un álgebra de Lie semisimple compleja $\hat{\mathfrak{g}}$ de dimensión finita está contenido en una tripla estándar de $\hat{\mathfrak{g}}$. Nos preguntamos si este resultado se puede generalizar para un álgebra de Kac Moody afín \mathfrak{g} . Por ahora responderemos a esa pregunta para el caso en que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$

Comenzaremos con un ejemplo en $\mathfrak{sl}_3^{(1)}(\mathbb{C})$, donde esto no se cumple.

Ejemplo 5.1.1 *Tenemos que*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = t \otimes x_{\alpha_1}$$

es un elemento nilpotente en $\mathfrak{sl}_3^{(1)}(\mathbb{C})$. Si tomamos

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se cumple que $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$ y $[X, Y] = H$, así $\{H, X, Y\}$ es una tripla estándar en $\mathfrak{sl}_3^{(1)}(\mathbb{C})$.

Ahora consideremos el elemento $t \otimes x_{\alpha_1} + \tau c \in \mathfrak{sl}_3^{(1)}(\mathbb{C})$, para algún $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, este es también un elemento nilpotente en $\mathfrak{sl}_3^{(1)}(\mathbb{C})$. Veamos que no es posible encontrar una tripla estándar en $\mathfrak{sl}_3^{(1)}(\mathbb{C})$ conteniéndolo. Si existiese $H \in \mathfrak{sl}_3^{(1)}(\mathbb{C})$ satisfaciendo

$$[H, t \otimes x_{\alpha_1} + \tau c] = 2(t \otimes x_{\alpha_1} + \tau c) \tag{5.1}$$

con

$$H = \sum_i c_i t^{k_i} \otimes x_{\alpha_i} + \sum_j c_j t^{k_j} \otimes h_j + \lambda c + \mu d$$

tal que $\lambda, \mu, c_i, c_j \in \mathbb{C}$, $k_i, k_j \in \mathbb{Z}$, $h_j \in \dot{\mathfrak{h}}$ y $x_{\alpha_i} \in \dot{\mathfrak{g}}_{\alpha_i}$, para $\alpha_i \in \dot{\Delta}$, no necesariamente distintos. Entonces

$$\begin{aligned} [H, t \otimes x_{\alpha_1} + \tau c] &= \sum_i c_i [t^{k_i} \otimes x_{\alpha_i}, t \otimes x_{\alpha_1}] + \sum_j c_j [t^{k_j} \otimes h_{\alpha_j}, t \otimes x_{\alpha_1}] + [\mu d, t \otimes x_{\alpha_1}] \\ &= \sum_i c_i \left(t^{k_i+1} \otimes [x_{\alpha_i}, x_{\alpha_1}] + k_i \delta_{k_i, -1} \langle x_{\alpha_i}, x_{\alpha_1} \rangle c \right) + \\ &\quad \sum_j c_j \left(t^{k_j+1} \otimes [h_j, x_{\alpha_1}] + k_j \delta_{k_j, -1} \langle h_j, x_{\alpha_1} \rangle c \right) + \mu t \otimes x_{\alpha_1} \end{aligned}$$

Entonces, para que se tenga 5.1, debemos tener que

$$2t \otimes x_{\alpha_1} = \sum_i c_i (t^{k_i+1} \otimes [x_{\alpha_i}, x_{\alpha_1}]) + \sum_j c_j (t^{k_j+1} \otimes [h_j, x_{\alpha_1}]) + \mu t \otimes x_{\alpha_1} \quad (5.2)$$

$$2\tau = \sum_i c_i k_i \delta_{k_i, -1} \langle x_{\alpha_i}, x_{\alpha_1} \rangle + \sum_j c_j k_j \delta_{k_j, -1} \langle h_j, x_{\alpha_1} \rangle \quad (5.3)$$

Por un lado tenemos que $\langle h_j, x_{\alpha_1} \rangle = 0$ para todo $h_j \in \dot{\mathfrak{h}}$ y además $\langle x_{\beta}, x_{\alpha_1} \rangle = 0$ para todo $\beta \in \dot{\Delta} \setminus \{-\alpha_1\}$. Luego, si $S = \{i \mid c_i \neq 0 \wedge x_{\alpha_i} \in \dot{\mathfrak{g}}_{-\alpha_1}\}$, tenemos que

$$2\tau = \sum_{i \in S} -c_i \langle x_{\alpha_i}, x_{\alpha_1} \rangle$$

Así si $S \neq \emptyset$, $\sum_{i \in S} c_i \neq 0$, lo que implica que del lado derecho de 5.2 aparecerá el término no nulo, $h_1 \sum_{i \in S} c_i$, lo cual no es posible, por lo tanto $S = \emptyset$. Como estamos asumiendo $\tau \neq 0$, vemos que no es posible encontrar $H \in \mathfrak{g}$ satisfaciendo 5.2, de lo que se obtiene directamente que no existe una tripla estándar conteniendo a $t \otimes x_{\alpha_1} + \tau c$.

Para todo $r \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{Z}$, definimos el morfismo de álgebras de Lie $\rho_{r,p} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}_{r+1}^{(1)}(\mathbb{C})$ definido por

$$\begin{aligned} \rho_{r,p}(h) &= \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -r+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r \end{pmatrix} + 2rpc \\ \rho_{r,p}(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t^p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \rho_{r,p}(y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_r t^{-p} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $\mu_i = i(r+1-i)$.

Teorema 5.1.1 *Sea $X + \tau c \in \mathfrak{g}$ nilpotente. Entonces existe una tripla estándar en $\hat{\mathfrak{g}}$ conteniendo a $X + \tau c$ como su elemento nilpositivo, si y solo si $X + \tau c$ es de nivel 0.*

Demostración. Si $X + \tau c \in \mathfrak{g}$ es nilpotente de nivel 0, entonces por el teorema 4.2.15, existe $g \in \overline{\mathfrak{L}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ tal que $\mathrm{Ad}(g)(X + \tau c) = D_{\sigma,k}$ para algunos $\sigma = [i_1, \dots, i_d]$ partición de n y $0 \leq k < i_d$. Consideremos la aplicación

$$\phi_{\mathfrak{D}} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}, \text{ via } \phi_{\mathfrak{D}} = \bigoplus_{1 \leq j \leq d} \rho_{i_j-1, p_j}, \quad (5.4)$$

donde $p_j = 0$ si $1 \leq j \leq d-1$, y $p_j = k$ si $j = d$. Entonces, $\phi_{\mathfrak{D}}(x) = D_{\sigma,k}$ y más aún

$$\{\phi_{\mathfrak{D}}(h), \phi_{\mathfrak{D}}(x), \phi_{\mathfrak{D}}(y)\} = \{H_{\sigma,k}, X_{\sigma,k}, Y_{\sigma,k}\} \quad (5.5)$$

es una tripla estándar en $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$ conteniendo a $D_{\sigma,k}$. Dado que $\mathrm{Ad} g$ es un automorfismo sobre $\hat{\mathfrak{g}}$ lineal, entonces

$$\mathrm{Ad}(g^{-1}) \cdot \{H_{\sigma,k}, D_{\sigma,k}, Y_{\sigma,k}\}$$

es una tripla estándar en $\hat{\mathfrak{g}}$ conteniendo a $X + \tau c$.

Ahora, si el nivel de $X + \tau c$ es distinto de 0, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que

$$\mathrm{Ad} g(X + \tau c) = D_{\sigma,k} + \chi c = D + \chi c \quad (5.6)$$

para algún $\chi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces, si logramos mostrar que no existe $H \in \mathfrak{g}$, satisfaciendo $[H, D + \chi c] = 2(D + \chi c)$ habremos terminado la demostración, pues esto implicará que no existe una tripla estándar en \mathfrak{g} conteniendo a $D + \chi c$ como su elemento nilpositivo, y así mismo tampoco existirá para $X + \tau c$. Supongamos lo contrario, sea

$$H = \sum_i c_i t^{k_i} \otimes h_i + \sum_j c_j t^{k_j} \otimes x_{\alpha_j} + \zeta c + \epsilon d$$

para algunos $k_i, k_j \in \mathbb{Z}$, $h_i \in \dot{\mathfrak{h}}$ y $x_{\alpha_j} \in \dot{\mathfrak{g}}_{\alpha_j}$ con $\alpha_j \in \dot{\Delta}$ no necesariamente distintos, tal que

$$[H, D + \chi c] = 2(D + \chi c) \quad (5.7)$$

Consideremos los conjuntos

$$\Theta_D = \{\alpha \in \dot{\Delta} \mid p \otimes x_\alpha \text{ es un sumando de } D \text{ para algún } p \in \mathcal{K}\}$$

$$\Theta_H = \{\alpha \in \dot{\Delta} \mid p \otimes x_\alpha \text{ es un sumando de } H \text{ para algún } p \in \mathcal{K}\}$$

Tenemos que si $\alpha_i \in \Theta_D$, entonces $[t^{k_i} \otimes X_{-\alpha_i}, D + \chi c]$ tiene algún sumando en $\mathcal{K} \otimes \dot{\mathfrak{h}}$. Luego 5.7 implica que $-\alpha_i \notin \Theta_H$ para todo $\alpha_i \in \Theta_D$. Así, para todo $\beta \in \Theta_H$ y $\alpha \in \Theta_D$, se tiene que $\langle \dot{\mathfrak{g}}_\beta, \dot{\mathfrak{g}}_\alpha \rangle = 0$. Por lo tanto, la componente en $\mathbb{C}c$ de $[H, D + \chi c]$ es 0. Luego, no existe $H \in \mathfrak{g}$ satisfaciendo 5.7, obteniendo así lo deseado. ■

Observación 5.1.1 Aunque para elementos nilpotentes de nivel diferente de cero, no existen triplas estándar conteniéndolos como su elemento nilpositivo, esto no resultará ser un problema en el análisis y clasificación de las órbitas nilpotentes, pues de alguna manera, todos los demás niveles resultarán ser copias de este (teorema 4.2.17).

5.2. Diagramas de Dynkin con pesos

Denotemos por $\dot{\mathfrak{D}}$ el conjunto de diagramas de Dynkin con pesos de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ asociados a órbitas nilpotentes de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Recordemos que no todo diagrama de Dynkin con pesos tiene asociada una órbita nilpotente.

Observación 5.2.1 Como mostramos en la proposición 1.3.1, las órbitas nilpotentes en $\dot{\mathfrak{g}}$ están en correspondencia con las particiones de n ; luego, hay una correspondencia entre los diagramas de Dynkin con pesos asociados a órbitas nilpotentes en $\dot{\mathfrak{g}}$ y particiones de n .

Teorema 5.2.1 Hay una correspondencia biyectiva entre órbitas nilpotentes en \mathfrak{g} de nivel λ , para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y el conjunto de elementos de la forma $(\Delta(\dot{\mathfrak{D}}), k)$, donde $\Delta(\dot{\mathfrak{D}}) \in \dot{\mathfrak{D}}$ es el diagrama de Dynkin con pesos de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, asociado a la partición $[i_1, \dots, i_d]$ y $0 \leq k < i_d$.

Demostración. Consideremos $\lambda \in \mathbb{C}$ fijo. Sea \mathfrak{D}_X una órbita nilpotente en $\hat{\mathfrak{g}}$ de nivel λ . Por el teorema 4.2.17, existe un único par $(\sigma = [i_1, \dots, i_d], k)$, donde σ es una partición de n y $0 \leq k < i_d$, asociado a la órbita \mathfrak{D}_X , de tal manera que X es \mathcal{G} -conjugado a $D_{\sigma, k} + \lambda c$. La observación 5.2.1, nos garantiza la existencia de un único diagrama de Dynkin con pesos, $\Delta(\dot{\mathfrak{D}})$ de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, asociado a la partición σ . Por lo tanto, por el teorema 4.2.17, la correspondencia $\mathfrak{D}_X \rightsquigarrow (\Delta(\dot{\mathfrak{D}}), k)$ es biyectiva, donde \mathfrak{D}_X corre sobre todas las órbitas nilpotentes de nivel λ . ■

Ahora, sea \mathfrak{D} el conjunto de diagramas de Dynkin con pesos de $\mathfrak{sl}_n^{(1)}(\mathbb{C})$, satisfaciendo las siguientes características:

- Al nodo correspondiente a la raíz α_0 , le asociaremos la raíz ω_0 , donde ω_0 es la raíz definida en la observación 3.1.3. Los demás nodos se mantendrán igual.
- Para todo $\Delta(\mathfrak{D}) \in \mathfrak{D}$, el diagrama de pesos que resulta al remover el nodo correspondiente a la raíz ω_0 , pertenece a $\dot{\mathfrak{D}}$.

- Si el diagrama que resulta de remover el nodo correspondiente a ω_0 es el asociado a la órbita $\mathfrak{D}_{[d_1, \dots, d_r]}$, entonces el peso r_0 de ω_0 es tal que $0 \leq r_0 < d_r$.

A cada órbita nilpotente \mathfrak{D} en \mathfrak{g} , de nivel 0, asociaremos un diagrama de Dynkin con pesos $\Delta(\mathfrak{D}) \in \mathfrak{D}$ de la siguiente manera:

1. Sea \mathfrak{D} una órbita nilpotente en $\hat{\mathfrak{g}}$ de nivel 0. Entonces por el teorema 4.2.17 en \mathfrak{D} hay un elemento de la forma $D_{\sigma, k}$ como en 4.13, donde $\sigma = [d_1, \dots, d_r]$ es una partición de n y $0 \leq k < d_r$.
2. Como en la demostración de la proposición 5.1.1, existe una tripla estándar

$$\{H_{\sigma, k}, D_{\sigma, k}, Y_{\sigma, k}\}$$

conteniendo a $D_{\sigma, k}$ como su elemento nilpositivo. Además, si $x_\sigma \in \hat{\mathfrak{g}}$ es la matriz en bloques de Jordan correspondiente a la partición σ y $h \in \hat{\mathfrak{g}}$ es tal que $[h, x_\sigma] = 2x_\sigma$, entonces $H = h + 2d_r k c$ es tal que $\{H, D_{\sigma, k}, Y_{\sigma, k}\}$ es una tripla estándar. Como h es semisimple en $\hat{\mathfrak{g}}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $h \in \hat{\mathfrak{h}}$. Luego h es conjugado por \dot{W} a un único elemento en el dominio fundamental D para la acción de \dot{W} sobre $\hat{\mathfrak{h}}$. Así, podemos suponer a $h \in D$.

3. $\Delta(\mathfrak{D}) \in \mathfrak{D}$ tiene como peso en la raíz $\alpha_i \in \hat{\Delta}$ a $\alpha_i(h)$ para $i = 1, \dots, n$ y en la raíz ω_0 a $\frac{\omega_0(H)}{2d_r} = k$.

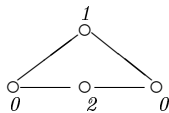
Ejemplo 5.2.1 Consideremos $D = D_{\sigma, 1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_4^{(1)}(\mathbb{C})$, donde $\sigma = [2, 2]$. Sean

$$H = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_h + 2c, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $[H, D, Y]$ es una tripla estándar conteniendo a D como su elemento nilpositivo. Además,

$h' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es conjugado a h por \dot{W} y se encuentra en el dominio fundamental

para la acción de \dot{W} sobre $\hat{\mathfrak{h}}$. El diagrama de Dynkin con pesos asociado a la órbita nilpotente \mathfrak{D}_D es



En la construcción de esta correspondencia entre diagramas de Dynkin con pesos en \mathfrak{D} y órbitas nilpotentes en \mathfrak{g} , supusimos que el elemento neutro de la tripla estándar conteniendo al representante de la órbita nilpotente tenía una forma particular. El objetivo ahora es lograr

desligarnos de esta elección. Por ahora, tenemos como conjetura la generalización del teorema de Kostant (teorema 1.1.6), de la cual tenemos algunas evidencias, pero nos falta completar algunos detalles.

Conjetura: Sea $X \in \mathfrak{g}$ nilpotente de nivel 0 y $\{H, X, Y\}, \{H', X, Y'\}$ triplas estándar en $\hat{\mathfrak{g}}$ conteniendo a X como su elemento nilpositivo. Entonces H, Y son \mathcal{G} conjugados a H', Y' respectivamente.

Apéndice A

Grupos de Kac Moody

En esta sección definimos el grupo de Kac Moody asociado a un álgebra de Kac Moody, como el producto amalgamado de algunos de sus subgrupos. Para definir una estructura algebraica sobre \mathcal{G} , damos una rápida introducción a la teoría de pro-grupos y pro-álgebras de Lie. Además mostramos como en el caso afín es posible definir a \mathcal{G} como extensión central del grupo $\overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$.

A.0.1. Definición

Para presentar la definición de grupo de Kac Moody, necesitamos dar antes algunas definiciones y resultados, los cuales se encuentran en [Ku] para más detalle.

Sistemas y límites inversos: Un *sistema inverso de grupos (álgebras)*, es un conjunto dirigido I , junto con una familia de grupos (álgebras) $(A_i)_{i \in I}$ y una familia de morfismos de grupos (álgebras) $f_{ij} : A_j \rightarrow A_i$, para cada $i \leq j$, tales que:

1. f_{ii} es la identidad sobre A_i , para todo $i \in I$
2. $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$ para todo $i \leq j \leq k$.

Denotamos el sistema inverso de grupos por $((A_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leq j})$.

El *límite inverso* de un sistema inverso de grupos (álgebras) $((A_i)_{i \in I}, (f_{ij})_{i \leq j})$, es el subgrupo (subálgebra) de $\prod_{i \in I} A_i$

$$A := \varprojlim_{i \in I} A_i = \{ \bar{a} \in \prod_{i \in I} A_i \mid a_i = f_{ij}(a_j), \forall i \leq j \in I \}$$

Pro-grupos: Sea G un grupo y \mathfrak{F} una familia de subgrupos normales de G , no vacía, tal que para cada $N \in \mathfrak{F}$, G/N es un k -grupo algebraico afín. El par (G, \mathfrak{F}) es un *pro-grupo algebraico* sobre un cuerpo k , si satisface:

- (a1) Si $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.
- (a2) Si $N_1 \in \mathfrak{F}$, entonces un subgrupo normal N_2 de G , conteniendo a N_1 , pertenece a \mathfrak{F} si y solo si N_2/N_1 es un subgrupo normal cerrado de G/N_1 .
- (a3) Si $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$ son tales que $N_1 \subset N_2$, entonces la aplicación cociente $\gamma_{N_1, N_2} : G/N_1 \rightarrow G/N_2$ es un morfismo de k -grupos algebraicos.

(a4) El homomorfismo natural $\gamma : G \rightarrow \varprojlim_{N \in \mathfrak{F}} G/N$ es biyectivo, donde \mathfrak{F} es un conjunto dirigido bajo el orden parcial: $N_1 \leq N_2$ si y solo si $N_2 \subset N_1$.

Definimos la *pro-topología* en un pro-grupo G como la topología más pequeña sobre G haciendo que $\gamma_N : G \rightarrow G/N$ sea continua para cada $N \in \mathfrak{F}$.

Sean (G, \mathfrak{F}) y (G', \mathfrak{F}') pro-grupos. Un homomorfismo de grupos $\phi : G \rightarrow G'$ es llamado *morfismo de pro-grupos*, si para todo $N' \in \mathfrak{F}'$, $\phi^{-1}(N') \in \mathfrak{F}$ y, la aplicación inducida $\phi_{N'} : G/\phi^{-1}(N') \rightarrow G'/N'$ es un morfismo de grupos algebraicos.

Pro-álgebras de Lie: Sea \mathfrak{s} un álgebra de Lie sobre un cuerpo k , \mathcal{F} una familia de ideales de \mathfrak{s} no vacío de codimensión finita. El par $(\mathfrak{s}, \mathcal{F})$ es una *pro-álgebra de Lie* si satisface que:

(b1) Para todo $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \in \mathcal{F}$, $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \in \mathcal{F}$.

(b2) Si $\mathfrak{a}_1 \in \mathcal{F}$ y $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2$ es un ideal, entonces $\mathfrak{a}_2 \in \mathcal{F}$.

(b3) El homomorfismo canónico de álgebras de Lie $\gamma : \mathfrak{s} \rightarrow \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}} \mathfrak{s}/\mathfrak{a}$ es un isomorfismo, donde \mathfrak{F} es un conjunto dirigido bajo el orden parcial: $\mathfrak{a}_1 \leq \mathfrak{a}_2$ si y solo si $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_1$.

Definimos la *pro-topología de una pro-álgebra de Lie* \mathfrak{s} como la topología de límite inverso sobre \mathfrak{s} , vía el isomorfismo γ en (b3), y en donde la topología sobre cada $\mathfrak{s}/\mathfrak{a}$ es la topología discreta.

Sean $(\mathfrak{s}, \mathfrak{F})$ y $(\mathfrak{s}', \mathfrak{F}')$ pro-álgebras de Lie. Un homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}'$ es un *homomorfismo de pro-álgebras de Lie*, si para todo $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{F}'$, $\phi^{-1}(\mathfrak{a}') \in \mathfrak{F}$. Un homomorfismo de álgebras continuo (tomando la pro-topología), entre pro-álgebras de Lie, resulta ser un homomorfismo de pro-álgebras de Lie.

Pro-álgebra de Lie de un pro-grupo: Sea (G, \mathfrak{F}) un pro-grupo. Para cada $N \in \mathfrak{F}$, denotemos por \mathfrak{s}_N el álgebra de Lie del grupo algebraico G/N . Para $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, la proyección $\gamma_{N_2, N_1} : G/N_1 \rightarrow G/N_2$ induce un homomorfismo de álgebras de Lie $\dot{\gamma}_{N_2, N_1} : \mathfrak{s}_{N_1} \rightarrow \mathfrak{s}_{N_2}$. Así, obtenemos un sistema inverso de álgebras de Lie $(\mathfrak{s}_N)_{N \in \mathfrak{F}}$. Sea $\mathfrak{s} = \varprojlim_{N \in \mathfrak{F}} \mathfrak{s}_N$. Entonces \mathfrak{s} es una pro-álgebra de Lie ([Ku], 4.4.16). Denominamos a \mathfrak{s} la *pro-álgebra de Lie del pro-grupo* G y la denotamos $\mathfrak{s} = \text{Lie } G$.

Diferencial de un morfismo de pro-grupos: Sea $\phi : G \rightarrow G'$ un morfismo entre los pro-grupos (G, \mathfrak{F}) y (G', \mathfrak{F}') . Para todo $N \in \mathfrak{F}, N' \in \mathfrak{F}'$ tal que $\phi(N) \subset N'$, el morfismo de grupos algebraicos $\phi_{N', N} : G/N \rightarrow G'/N'$ induce un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\dot{\phi}_{N', N} : \mathfrak{s}_N \rightarrow \mathfrak{s}_{N'}$$

Los homomorfismos de álgebras de Lie $\{\dot{\phi}_{N', N}\}$, definen un homomorfismo de pro-álgebras de Lie

$$\dot{\phi} : \text{Lie } G \rightarrow \text{Lie } G'$$

Grupo pro-unipotente y pro-álgebra de Lie pro-nilpotente: Un pro-grupo (S, \mathfrak{F}) (resp. pro-álgebra de Lie $(\mathfrak{s}, \mathfrak{F})$), es llamado *pro-unipotente* (resp. *pro-nilpotente*) si el grupo algebraico S/N es unipotente para cada $N \in \mathfrak{F}$ (resp. el álgebra de Lie $\mathfrak{s}/\mathfrak{a}$ es nilpotente para cada $\mathfrak{a} \in \mathfrak{F}$).

Teorema A.0.1 *La categoría de pro-grupos unipotentes es equivalente a la categoría de pro-álgebras de Lie nilpotentes bajo el funtor \mathfrak{L} , llevando $S \rightsquigarrow \text{Lie } S$ y un morfismo de pro-grupos $\phi \rightsquigarrow \dot{\phi}$. Más aún, la aplicación exponencial $\text{Exp} : \text{Lie } S \rightarrow S$ es biyectiva para todo pro-grupo pro-unipotentente S .*

Demostración. Ver ([Ku], 4.4.19). ■

Pro-representaciones: Sea (G, \mathfrak{F}) un pro-grupo. Un G -módulo V es una *pro-representación de G* , si todo $v \in V$ está contenido en un G -submódulo de dimensión finita $W \subset V$, tal que

1. Existe $N = N_W \in \mathfrak{F}$ actuando trivialmente sobre W , y
2. La representación inducida del grupo algebraico G/N sobre W es algebraica.

Sea $(\mathfrak{s}, \mathfrak{F})$ una pro-álgebra de Lie. Un \mathfrak{s} -módulo V es una *pro-representación de \mathfrak{s}* si todo $v \in V$ está contenido en un \mathfrak{s} -submódulo $W \subset V$ de dimensión finita para el cual existe un ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_W \in \mathfrak{F}$ actuando trivialmente sobre W .

Sean (G, \mathfrak{F}) un pro-grupo con pro-álgebra de Lie \mathfrak{s} , y $\pi : G \rightarrow \text{Aut } V$ una pro-representación de G . Para todo G -submódulo W de dimensión finita, existe $N = N_W \in \mathfrak{F}$ tal que π desciende a una representación algebraica $\pi_W : G/N_W \rightarrow \text{Aut } W$. Diferenciando π_W obtenemos una \mathfrak{s}_N -representación $\dot{\pi}_W : \mathfrak{s}_N \rightarrow \text{End } W$, donde $\mathfrak{s}_N = \text{Lie } G/N$. Dado que la estructura de \mathfrak{s}_N -módulo de W no depende de N y el hecho que los submódulos de dimensión finita de V generan a V , podemos definir una pro-representación $\dot{\pi} : \mathfrak{s} \rightarrow \text{End } V$.

Lema A.0.2 *Sean π y ρ pro-representaciones de un pro-grupo conexo G en un espacio vectorial V . Entonces*

$$\pi = \rho \Leftrightarrow \dot{\pi} = \dot{\rho}$$

Demostración. Ver ([Ku], 4.4.24). ■

Lema A.0.3 *Sea G un pro-grupo pro-unipotentente con pro-álgebra de Lie \mathfrak{s} . La categoría de pro-representaciones de G es equivalente a la categoría de pro-representaciones de \mathfrak{s} bajo $(V, \pi) \rightsquigarrow (V, \dot{\pi})$.*

Demostración. Ver ([Ku], 4.4.26). ■

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Kac Moody, \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan para \mathfrak{g} , $\Delta = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ sus raíces simples y, \mathcal{W} su grupo de Weyl.

Elijamos $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{h}$ un \mathbb{Z} -módulo finitamente generado, satisfaciendo:

1. $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ es una forma entera de \mathfrak{h} , es decir, la aplicación natural $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un isomorfismo,
2. $\alpha_i^{\vee} \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$, para todo $0 \leq i \leq n$,
3. $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^* := \text{Hom}(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) \subset \mathfrak{h}^*$ contiene todas las raíces simples α_i y,
4. $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} / \sum_{i=0}^n \mathbb{Z}\alpha_i^{\vee}$ es libre de torsión.

En particular $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$, resp. $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$, es \mathcal{W} -estable, bajo la acción definida en 2.4 y 2.5. Denominamos a $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ una *subálgebra integral de Cartan*.

Sea $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ una subálgebra integral de Cartan fija para \mathfrak{g} . Sea $D_{\mathbb{Z}} := D \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$, donde

$$D = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : \langle \lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle \in \mathbb{Z}_+, \text{ para toda coraíz simple } \alpha_i^{\vee}\} \quad (\text{A.1})$$

Definimos el grupo algebraico T por

$$T := \text{Hom}(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*). \quad (\text{A.2})$$

Entonces, T es un toro de dimensión igual a la de \mathfrak{h} .

Todo \mathfrak{h} -módulo peso (V, π) , para el cual sus pesos están en $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$, se integra a un T -módulo, bajo la acción

$$t \cdot v_{\lambda} = t(\lambda)v_{\lambda}, \text{ para } t \in T \text{ y } v_{\lambda} \in V_{\lambda} \quad (\text{A.3})$$

Sea N el grupo generado por $T \cup \{\bar{s}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ (para ciertos símbolos \bar{s}_i) y, sujeto a las siguientes relaciones:

(d1) Las relaciones que definen el grupo T

(d2) $\bar{s}_i t \bar{s}_i^{-1} = s_i(t)$, para todo $1 \leq i \leq n$.

(d3) $\bar{s}_i^2 = (-1)^{\alpha_i^{\vee}}$, para todo $1 \leq i \leq n$.

(d4) $\underbrace{\bar{s}_i \bar{s}_j \bar{s}_i \cdots}_{m_{ij} \text{ factores}} = \underbrace{\bar{s}_j \bar{s}_i \bar{s}_j \cdots}_{m_{ij} \text{ factores}}$, para $1 \leq i \neq j \leq n$, siempre que $m_{ij} < \infty$,

donde $s_i(t) \in T$ se define de acuerdo a la acción de \mathcal{W} en T , inducida naturalmente por la acción de \mathcal{W} sobre $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$, m_{ij} es el orden de $s_i s_j \in \mathcal{W}$ y, $(-1)^{\alpha_i^{\vee}} \in T$ está definido por $(-1)^{\alpha_i^{\vee}}(\lambda) = -1^{\langle \lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle}$, para cada $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$.

Lema A.0.4 *Toda representación integrable (V, π) de \mathfrak{g} para la cual todos los pesos de V están en $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$, es un módulo para el grupo N , bajo la acción de T dada en A.3, y \bar{s}_i actuando sobre V vía $s_i(\pi)$, como en 2.7.*

Demostración. Ver ([Ku], 6.1.7). ■

Sea $Y \subset \{1, \dots, n\}$, definimos

$$\mathfrak{g}_Y = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta_Y} \mathfrak{g}_{\alpha}) \quad (\text{A.4})$$

$$\mathfrak{u}_Y = \oplus_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_Y^+} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathfrak{p}_Y = \mathfrak{g}_Y \oplus \mathfrak{u}_Y \quad (\text{A.6})$$

donde

$$\Delta_Y = \Delta \cap (\oplus_{i \in Y} \mathbb{Z} \alpha_i), \text{ y}$$

$$\Delta_Y^{\pm} = \Delta^{\pm} \cap \Delta_Y$$

las álgebras $\mathfrak{g}_Y, \mathfrak{u}_Y, \mathfrak{p}_Y$ son subálgebras de \mathfrak{g} . Denominamos a \mathfrak{p}_Y la *subálgebra parabólica de \mathfrak{g} correspondiente a Y* , \mathfrak{g}_Y la *componente de Levi estándar*, y \mathfrak{u}_Y el *nilradical de \mathfrak{p}_Y* . Si la dim \mathfrak{g}_Y es finita, decimos que Y es de *tipo finito*.

Consideremos Y de tipo finito. De la misma manera en que definimos $\hat{\eta}^+$ la completación de η^+ en 2.1, definimos la completación $\hat{\mathfrak{p}}_Y$ de \mathfrak{p}_Y por

$$\hat{\mathfrak{p}}_Y = \mathfrak{g}_Y \oplus \hat{\mathfrak{u}}_Y,$$

donde $\hat{\mathfrak{u}}_Y := \prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_Y^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Definimos el corchete de álgebra de Lie sobre $\hat{\mathfrak{p}}_Y$ de la misma manera que se definió en 2.2. Daremos a $\hat{\mathfrak{p}}_Y$ estructura de pro-álgebra de Lie.

Para todo $\beta = \sum n_i \alpha_i \in \Delta$, definimos su altura relativa a Y por

$$\text{ht}_Y \beta = \left| \sum_{i \notin Y} n_i \right|. \quad (\text{A.7})$$

En particular, para todo $\beta \in \Delta_Y$, $\text{ht}_Y \beta = 0$.

Definimos la familia $\hat{\mathfrak{F}}_Y$ de ideales de $\hat{\mathfrak{p}}_Y$ por

$$\hat{\mathfrak{F}}_Y = \{ \text{ideales } \mathfrak{a} \subset \hat{\mathfrak{p}}_Y \mid \hat{\mathfrak{u}}_Y(k) \subset \mathfrak{a}, \text{ para algún } k > 0 \} \quad (\text{A.8})$$

donde

$$\hat{\mathfrak{u}}_Y(k) := \prod_{\substack{\beta \in \Delta^+ \\ \text{ht}_Y \beta \geq k}} \mathfrak{g}_\beta. \quad (\text{A.9})$$

Lema A.0.5 1. El conjunto de ideales $\hat{\mathfrak{F}}_Y$ da estructura de pro-álgebra de Lie a $\hat{\mathfrak{p}}_Y$.

2. $M_k := \bar{\mathfrak{u}}_Y(k) / \hat{\mathfrak{u}}_Y(k+1)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, para todo $k \geq 1$. Más aún,

$$M_k \simeq \bigoplus_{\substack{\beta \in \Delta^+ \\ \text{ht}_Y \beta = k}} \mathfrak{g}_\beta.$$

Demostración. Ver ([Ku], 6.1.11). ■

Sea \mathcal{G}_Y el único (bajo isomorfismo) grupo lineal algebraico reductivo conexo asociado a los datos $\Psi_Y = (\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*, \Delta_Y, \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}, \Delta_Y^\vee)$ ([Sp], teorema 10.1.1). En particular, denotamos por $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{\{i\}}$. Entonces $\text{Lie } \mathcal{G}_Y = \mathfrak{g}_Y$ y, $T = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*)$ es un toro maximal con $\text{Lie } T = \mathfrak{h}$.

Sea V un (\mathfrak{g}_Y, T) -módulo de dimensión finita, es decir, un \mathfrak{g}_Y -módulo para el cual la estructura de \mathfrak{h} -módulo, obtenido por la restricción, se integra a un T -módulo. Entonces podemos dar a V estructura de \mathcal{G}_Y -módulo: Sea $\pi : \mathcal{G}_Y \rightarrow \text{Aut } V$ extendiendo la estructura de T -módulo y tal que la derivada $\dot{\pi}$ es la estructura original de \mathfrak{g}_Y -módulo de V .

Consideremos como en el lema A.0.5(2), el espacio de dimensión finita $M_k := \bigoplus_{\substack{\beta \in \Delta^+ \\ \text{ht}_Y \beta = k}} \mathfrak{g}_\beta$, este resulta ser un (\mathfrak{g}_Y, T) -módulo bajo la acción adjunta: es claro que (M_K, ad) es un \mathfrak{g} -módulo peso bajo la acción adjunta, luego, en particular es un \mathfrak{g}_Y -módulo. Si $v_\lambda \in V_\lambda$, para $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$, entonces definimos para cada $t \in T$:

$$t \cdot v_\lambda = t(\lambda)v_\lambda \quad (\text{A.10})$$

Así, M_k es un \mathcal{G}_Y -módulo, y por lo tanto $\hat{\mathfrak{u}}_Y$ también lo es. Para cada $g \in \mathcal{G}_Y$, g actúa sobre $\hat{\mathfrak{u}}_Y$ como un automorfismo de álgebras de Lie: Sean $x \in \mathfrak{g}_Y, v \in M_{k_1}$ y $w \in M_{k_2}$, para algunos $k_1, k_2 \geq 1$. Definimos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow M_{k_1+k_2}$ por

$$f(t) = [\text{Exp}(tx)v, \text{Exp}(tx)w] - \text{Exp}(tx)[v, w]$$

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden $\frac{d}{dt}f(t) = xf(t)$, con condición inicial $f(0) = 0$. Es claro que f satisface la ecuación y, por la unicidad de la solución obtenemos que $f \equiv 0$. Luego $\text{Exp } x$ actúa sobre $\widehat{\mathfrak{u}}_Y$ como un automorfismo de álgebras de Lie, para todo $x \in \mathfrak{g}_Y$. Dado que $\text{Exp } \mathfrak{g}_Y$ genera a \mathcal{G}_Y como grupo, obtenemos lo deseado.

La acción de g sobre $\widehat{\mathfrak{u}}_Y$ es continua (bajo la pro-topología de $\widehat{\mathfrak{u}}_Y$), así g actúa como un homomorfismo de pro-álgebras de Lie. Por el teorema A.0.1, obtenemos un homomorfismo de grupos

$$\phi : \mathcal{G}_Y \rightarrow \text{Aut } \mathcal{U}_Y$$

donde \mathcal{U}_Y es el pro-grupo pro-unipotente con álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{u}}_Y$, como en el teorema A.0.1 y $\text{Aut } \mathcal{U}_Y$ es el grupo de todos los automorfismos de pro-grupos de \mathcal{U}_Y .

Definimos el *grupo parabólico estándar* \mathcal{P}_Y , asociado al subconjunto Y de tipo finito y al álgebra de Kac Moody \mathfrak{g} , como el producto semidirecto

$$\mathcal{P}_Y = \mathcal{U}_Y \rtimes \mathcal{G}_Y \tag{A.11}$$

En particular denotamos por $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{\{i\}}$ y $\mathcal{B} = \mathcal{P}_\emptyset$.

Lema A.0.6 $(\mathcal{P}_Y, \mathfrak{F}_Y)$ es un pro-grupo, donde

$$\mathfrak{F}_Y = \{ \text{subgrupos normales } N \subset \mathcal{P}_Y \mid \mathcal{U}_Y(k) \subset N, \text{ para algún } k = k(N) \geq 1, \\ \text{y } N/\mathcal{U}_Y(k) \text{ es cerrado Zariski en } (\mathcal{U}_Y/\mathcal{U}_Y(k)) \rtimes \mathcal{G}_Y \}$$

donde $\mathcal{U}_Y(k)$ es el pro-subgrupo de \mathcal{U}_Y correspondiente a la pro-subálgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{u}}_Y(k) \subset \widehat{\mathfrak{u}}_Y$.

Demostración. Ver ([Ku], 6.1.14). ■

Lema A.0.7 Sean $Y_1 \subset Y_2 \subset \{1, \dots, n\}$ conjuntos de tipo finito. Existe un único morfismo inyectivo de pro-grupos $\gamma = \gamma_{Y_2, Y_1} : \mathcal{P}_{Y_1} \hookrightarrow \mathcal{P}_{Y_2}$ tal que $\dot{\gamma}$ es la inclusión $\widehat{\mathfrak{p}}_{Y_1} \subset \widehat{\mathfrak{p}}_{Y_2}$.

Demostración. Ver ([Ku], 6.1.15). ■

Definimos el grupo de Kac Moody \mathcal{G} , asociado al álgebra de Kac Moody \mathfrak{g} , como el producto amalgamado del sistema de grupos $(N, \mathcal{P}_i; 1 \leq i \leq n)$, donde los grupos N y \mathcal{P}_i son vistos como subconjuntos del conjunto $Z = ((\sqcup_{1 \leq i \leq n} \mathcal{P}_i) \sqcup N) / \sim$, bajo la siguiente identificación:

- Para todo $n \in N_i \subset N$, $n \sim \theta_i(n)$, donde $N_i \subset N$ es el subgrupo generado por $T \cup \{\bar{s}_i\}$,

$$N_i = T \cup T\bar{s}_i \text{ unión disjunta}$$

y $\theta_i : N_i \hookrightarrow \mathcal{G}_i \subset \mathcal{P}_i$ es el embedding definido por

$$\theta_{iT} = I, \quad \text{y } \theta_i(\bar{s}_i) = \text{Exp}(F_i)\text{Exp}(-E_i)\text{Exp}(F_i) \in \mathcal{G}_i \tag{A.12}$$

donde Exp es la aplicación exponencial de $\mathfrak{g}_i := \mathfrak{g}_{\{i\}}$ en \mathcal{G}_i . Por el lema 2.1.7, se tiene que θ_i se extiende a un homomorfismo de grupos inyectivo de N_i en \mathcal{P}_i .

- Para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $b \in \mathcal{B}$, $\gamma_i(b) \sim \gamma_j(b)$, donde $\gamma_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}_i$ es la inclusión dada en el lema A.0.7.

A.0.2. Representación adjunta

Definición A.0.1 Una representación (V, π) de \mathcal{G} , resp. $\hat{\mathfrak{g}}$, es una pro-representación de \mathcal{G} , resp de $\hat{\mathfrak{g}}$, si para todo $1 \leq i \leq n$, la representación $\pi|_{\mathcal{P}_i}$, resp. $\pi|_{\hat{\mathfrak{p}}_i}$, es una pro-representación del pro-grupo \mathcal{P}_i , resp. de la pro-álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{p}}_i$.

Sea $\mathfrak{M}(\mathcal{G})$, resp. $\mathfrak{M}(\hat{\mathfrak{g}})$, la categoría de pro-representaciones de \mathcal{G} , resp. de $\hat{\mathfrak{g}}$. Un $\hat{\mathfrak{g}}$ -módulo V es un $(\hat{\mathfrak{g}}, T)$ -módulo, si la estructura de \mathfrak{h} -módulo de V , obtenido por la restricción de $\hat{\mathfrak{g}}$ a \mathfrak{h} , se integra a una estructura de T -módulo, localmente finita sobre V . Denotamos la categoría de $(\hat{\mathfrak{g}}, T)$ -módulos por $\mathfrak{M}_T(\hat{\mathfrak{g}})$.

Lema A.0.8 Sea (V, π) una pro-representación de \mathcal{G} . Entonces existe una única pro-representación $(V, \hat{\pi})$ de $\hat{\mathfrak{g}}$, tal que para todo $1 \leq i \leq n$, $\hat{\pi}|_{\hat{\mathfrak{p}}_i} = \hat{\pi}_i$, donde $\pi_i = \pi|_{\mathcal{P}_i}$.

Demostración. Ver ([Ku], lema 6.2.2). ■

Proposición A.0.9 La categoría $\mathfrak{M}(\mathcal{G})$ es equivalente a la categoría $\mathfrak{M}_T(\hat{\mathfrak{g}})$ bajo $(V, \pi) \rightsquigarrow (V, \hat{\pi})$ y $f \rightsquigarrow f$ para toda aplicación de \mathcal{G} -módulos $f : V \rightarrow V$, entre dos pro-representaciones de \mathcal{G} . Además, la categoría $\mathfrak{M}_T(\hat{\mathfrak{g}})$ consiste justamente de los $(\hat{\mathfrak{g}}, T)$ -módulos (V, π) , tales que V es integrable como un \mathfrak{g} -módulo y $(V, \pi|_{\hat{\eta}^+})$ es una pro-representación de $\hat{\eta}^+$. En particular, todo \mathfrak{g} -módulo integrable V de peso máximo $\lambda \in D_{\mathbb{Z}}$ pertenece a $\mathfrak{M}_T(\hat{\mathfrak{g}})$, y por lo tanto tiene estructura de \mathcal{G} -módulo.

Demostración. Ver ([Ku], teorema 6.2.3). ■

Vamos a definir la representación adjunta Ad de \mathcal{G} sobre $\hat{\mathfrak{g}}$:

1. $\hat{\mathfrak{g}}$ es un T -módulo bajo la acción

$$t \cdot \left(\sum_{\beta \in \Delta \cup \{0\}} x_{\beta} \right) = \sum t(\beta) x_{\beta}.$$

2. $\hat{\mathfrak{g}}$ es un N -módulo: dado que \mathfrak{g} es un \mathfrak{g} -módulo integrable bajo la acción adjunta (lema 2.1.6), entonces \mathfrak{g} tiene estructura de N -módulo (lema A.0.4), donde cada \bar{s}_i actúa sobre \mathfrak{g} vía $s_i(\text{ad})$. La acción se puede extender a $\hat{\mathfrak{g}}$, esto se obtiene directamente del lema 2.1.7 y el hecho que $s_i \Delta^+ \cap \Delta^-$ es finito (lema 2.2.7).
3. $\hat{\mathfrak{g}}$ es un \mathcal{P}_i -módulo ($1 \leq i \leq n$): Consideremos la filtración por ideales $\hat{\mathfrak{u}}_i(k)$ de la pro-álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{p}}_i$ dada en A.9. Tenemos que $\hat{\mathfrak{g}}_i(k) := \hat{\mathfrak{g}}/\hat{\mathfrak{u}}_i(k)$ es una pro-representación de $\hat{\mathfrak{p}}_i$ bajo la acción adjunta. Así, en particular $\hat{\mathfrak{g}}_i(k)$ es un $(\hat{\mathfrak{p}}_i, T)$ -módulo y $\hat{\mathfrak{u}}_i$ -pro-representación. Luego por definición de (\mathfrak{g}_i, T) -módulo y por A.0.3 se tiene que $\hat{\mathfrak{g}}_i(k)$ tiene estructura de \mathcal{G}_i -módulo y de \mathcal{U}_i pro-representación. Con lo que se obtiene que $\hat{\mathfrak{g}}_i(k)$ es una pro-representación de \mathcal{P}_i , denotada por Ad_i^k .

Definimos Ad_i como la pro-representación de \mathcal{P}_i en $\hat{\mathfrak{g}}$, obtenida como el límite inverso de las pro-representaciones Ad_i^k , bajo el isomorfismo $\hat{\mathfrak{g}} \simeq \varprojlim_k \hat{\mathfrak{g}}_i^k$.

Definimos la representación adjunta de \mathcal{G} en $\hat{\mathfrak{g}}$ por

$$\text{Ad}|_{\mathcal{P}_i} = \text{Ad}_i, \quad \text{Ad}(\theta_i(\bar{s}_i)) = s_i(\text{ad}) \quad (\text{A.13})$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Veamos Ad está bien definida:

- Se tiene por A.0.2 que $\text{Ad}_i|_{\mathcal{B}} = \text{Ad}_j|_{\mathcal{B}}$, pues sus morfismos derivados coinciden con ad . Luego, $\text{Ad}(\gamma_i(b)) = \text{Ad}(\gamma_j(b))$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ y $b \in \mathcal{B}$.
- Para todo $1 \leq i \leq n$, $\text{Ad}(\theta_i(\bar{s}_i)) = \text{Ad}_i(\theta_i(\bar{s}_i)) = s_i(\text{ad})$.

Lema A.0.10 *Sea $g \in \mathcal{G}$, entonces $\text{Ad } g \in \text{Aut } \hat{\mathfrak{g}}$.*

Demostración. Dado que Ad se obtiene como el límite inverso de las pro-representaciones $(\text{Ad}_i^k, \hat{\mathfrak{g}}_i(k))$ de \mathcal{P}_i , es suficiente mostrar que para cada $g \in \mathcal{P}_i$, $\text{Ad}_i^k(g) \in \text{Aut } \hat{\mathfrak{g}}_i(k)$.

Consideremos para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $k \in \mathbb{Z}^+$, la pro-representación $(\text{Ad}_i^k, \hat{\mathfrak{g}}_i(k))$ de \mathcal{P}_i , como arriba. Sean $x \in \mathfrak{g}_i$ y $v, w \in \hat{\mathfrak{g}}_i(k)$ fijos. Definimos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathfrak{g}}_i(k)$ por

$$f(t) = [\text{Exp}(tx)v, \text{Exp}(tx)w] - \text{Exp}(tx)[v, w]$$

Entonces, f satisface la ecuación diferencial $\frac{d}{dt}f(t) = x \cdot f(t)$, con la condición inicial $f(0) = 0$. Por la unicidad de la solución, tenemos que $f \equiv 0$. Luego, $\text{Exp } x$ actúa sobre $\mathfrak{g}_i(k)$ como un automorfismo de álgebras de Lie para todo $x \in \hat{\mathfrak{g}}_i$. Dado que $\text{Exp } \hat{\mathfrak{g}}_i$ genera \mathcal{G}_i como grupo, entonces cada elemento en \mathcal{G}_i actúa sobre $\hat{\mathfrak{g}}_i(k)$ como un automorfismo de álgebras de Lie.

De igual manera si $x \in \hat{\mathfrak{u}}_i$ y v, w y f como antes, siguiendo el mismo razonamiento, tenemos que $\text{Exp } x$ actúa sobre $\hat{\mathfrak{g}}_i(k)$ como automorfismo de álgebras de Lie y dado que $\text{Exp} : \hat{\mathfrak{u}}_i \rightarrow \mathcal{U}_i$ es biyectiva, obtenemos que \mathcal{U}_i actúa sobre $\hat{\mathfrak{g}}_i(k)$ como automorfismo de álgebra de Lie. Por lo tanto, $\text{Ad}_i^k(\mathcal{P}_i) \subset \text{Aut } \hat{\mathfrak{g}}_i(k)$. ■

Sea (V, π) una pro-representación de \mathcal{G} , $x \in \hat{\mathfrak{g}}$ y $g \in \mathcal{G}$, entonces

$$\hat{\pi}(\text{Ad } g(x)) = \pi(g)\hat{\pi}(x)\pi(g)^{-1} \quad (\text{A.14})$$

Observación A.0.1 *Las representaciones ad y Ad de $\hat{\mathfrak{g}}$ y \mathcal{G} respectivamente, no son en general pro-representaciones.*

Para todo espacio vectorial V , denotamos por $\text{End}_{\text{fin}}(V)$ el conjunto de todos los endomorfismos localmente finitos de V . Además,

$$\mathfrak{g}_{\text{fin}} := \bigcup_Y \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \text{Ad } g(\hat{\mathfrak{p}}_Y) \subset \hat{\mathfrak{g}},$$

donde \cup_Y corre sobre todos los subconjuntos $Y \subset \{1, \dots, n\}$ de tipo finito.

Proposición A.0.11 *Existe una única aplicación $\text{Exp} : \mathfrak{g}_{\text{fin}} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que para toda pro-representación (V, π) de \mathcal{G} , el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{\text{fin}} & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \text{End}_{\text{fin}}(V) \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\pi} & \text{Aut } V \end{array}$$

es conmutativo, donde \exp es la aplicación definida en 2.6. Más aún, para todo $g \in \mathcal{G}$ y $X \in \mathfrak{g}_{\text{fin}}$,

$$g(\text{Exp}X)g^{-1} = \text{Exp}(\text{Ad } g(X)).$$

Demostración. Ver ([Ku], teorema 6.2.11). ■

A.0.3. Relación entre los grupos \mathcal{G} y $\overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$

Para todo espacio vectorial V , sea $GL(V) \subset \text{Aut } V$ el grupo de todos los automorfismos lineales de V y sea $PGL(V) := GL(V)/\mathbb{C}^*$ el cociente de $GL(V)$ por el subgrupo central \mathbb{C}^* formado por los automorfismos escalares. Entonces $PGL(V)$ actúa sobre $\text{End } V$ vía la acción adjunta, a la que denotaremos Ad_V .

Proposición A.0.12 Sea $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } V$ una representación integrable de \mathfrak{g} de peso máximo, con peso máximo $\lambda \in D_{\mathbb{Z}} := \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^* \cap D$. Entonces existe un único homomorfismo de grupos $\hat{\pi} : \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G}) \rightarrow PGL(V)$, tal que para todo $g \in \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$ y $X \in \hat{\mathfrak{g}}$

$$(\text{Ad}_V \hat{\pi}(g))(\pi(x)) = \pi(\text{Ad } g(X)) \quad (\text{A.15})$$

donde $\bar{\pi} : \hat{\mathfrak{g}} \rightarrow \text{End } V$ es la extensión de π .

Demostración. Ver ([Ku], proposición 13.2.4). ■

Proposición A.0.13 Para todo $\lambda \in D$ tal que $\lambda(c) \neq 0$, la aplicación

$$\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } L(\lambda)$$

es inyectiva, donde $L(\lambda)$ es un \mathfrak{g} -módulo integral de peso máximo λ , definido en 2.1.9.

Demostración. Ver ([Ku], proposición 13.2.5). ■

Corolario A.0.14 Para todo $\lambda \in D_{\mathbb{Z}}$ tal que $\lambda(c) \neq 0$, la aplicación

$$\hat{\pi} : \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G}) \rightarrow PGL(L(\lambda))$$

de la proposición A.0.12, tiene centro C , donde $C \subset \dot{G} \subset \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$ es el centro de \dot{G} .

Demostración. Ver ([Ku], corolario 13.2.6). ■

Observación A.0.2 En la demostración de A.0.14, se puede ver que C es justamente el núcleo de $\text{Ad } \kappa$, y más aún, por ([Bo], cap 1, 3.15) se tiene que $\text{Nu Ad } \kappa = Z(\mathcal{K})$, donde Z es el centro del grupo algebraico \dot{G} y $Z(\mathcal{K})$ denota sus puntos \mathcal{K} -racionales. Además, como Z es discreto (pues \dot{G} es un grupo algebraico simple), se tiene que $Z = Z(\mathcal{K})$. Tenemos que la aplicación $\hat{\pi}$ de la proposición A.0.12 induce una aplicación

$$\hat{\pi} : \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})/C \rightarrow PGL(L(\lambda)). \quad (\text{A.16})$$

Teorema A.0.15 *Existe un único homomorfismo de grupos $\Psi : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})/C$ haciendo el siguiente diagrama conmutativo para todo \mathfrak{g} -módulo integrable de peso máximo V , con peso máximo $\lambda \in D_{\mathbb{Z}}$*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & GL(L(\lambda)) \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})/C & \xrightarrow{\hat{\pi}} & PGL(L(\lambda)) \end{array}$$

donde $\hat{\pi}$ es la aplicación dada en A.16 y $\tilde{\pi}$ es la aplicación inducida desde $\tilde{\pi}$ (la extensión de π a $\hat{\mathfrak{g}}$ -módulo) vía la proposición A.0.9. La aplicación Ψ en adición satisface que es sobreyectiva y $\text{Nu } \Psi = \text{centro de } \mathcal{G}$.

Demostración. Ver ([Ku], teorema 13.2.8). ■

Observación A.0.3 *El homomorfismo de grupos $\Psi : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})/C$ puede ser levantado a un homomorfismo sobre $\hat{\Psi} : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$, cuyo núcleo es igual a $\mathbb{C}^* = \text{Exp}(\mathbb{C}c)$ (Ver [Ga]). Con esto tiene sentido la siguiente definición.*

Definición A.0.2 *El grupo de Kac Moody \mathcal{G} asociado a \mathfrak{g} es la extensión central del grupo $\overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$ por \mathbb{C}^* , es decir, \mathcal{G} satisface que la sucesión*

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G}) \rightarrow 1$$

es exacta.

Lema A.0.16 *La aplicación $\text{Ad} : \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})/C \rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathfrak{g}})$, con $\text{Ad } gC = \text{Ad } g$ para cada $g \in \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$, donde $\text{Ad } g$ es la representación adjunta sobre $\overline{\mathfrak{L}}(\dot{G})$ dada en 2.26, está bien definida.*

Demostración. Sea $z \in C$. Por la observación 4.2.15 tenemos que $z \in \text{Nu Ad } \kappa$ y $\frac{dz}{dt} = 0$. Luego $(gz)^{-1} \frac{dgz}{dt} = g^{-1} \frac{dg}{dt}$ y $\frac{dgz}{dt} (gz)^{-1} = \frac{dg}{dt} g^{-1}$. Por lo tanto,

$$\text{Ad } gz(X + \lambda c + \mu d) = \text{Ad } g(X + \lambda c + \mu d)$$

para todo $X + \lambda c + \mu d \in \hat{\mathfrak{g}}$. Así, $\text{Ad } gC = \text{Ad } g$ para cada $g \in \mathcal{G}$. ■

Teorema A.0.17 *Para todo $g \in \mathcal{G}$ y $X \in \hat{\mathfrak{g}}$*

$$\text{Ad } g(X) = \text{Ad } \Psi(g)(X), \tag{A.17}$$

donde $\text{Ad } g$ se refiere a la representación adjunta definida en 2.3.2 y $\text{Ad } \Psi(g)$ a la definida por 2.26.

Demostración. Sean $X \in \hat{\mathfrak{g}}$ y $g \in \mathcal{G}$. Sea $(L(\lambda), \pi)$ un $\hat{\mathfrak{g}}$ -módulo de peso máximo, con peso máximo $\lambda \in D_{\mathbb{Z}}$ y $\lambda(c) \neq 0$, entonces por la proposición A.0.13, π es inyectiva. Sea $\hat{\pi} : \overline{\mathfrak{L}}(\dot{G}) \rightarrow PGL(L(\lambda))$ garantizada por la proposición A.0.12 y la cual satisface que

$$(\text{Ad}_V \hat{\pi}(\Psi(g)))(\hat{\pi}(x)) = \hat{\pi}(\text{Ad } \Psi(g)(X)),$$

donde $\bar{\pi} : \hat{\mathfrak{g}} \rightarrow PGL(L(\lambda))$ es la extensión de π . Por otro lado, por A.14 tenemos que

$$\bar{\pi}(\text{Ad } g(X)) = \tilde{\pi}(g)\bar{\pi}(X)\tilde{\pi}(g)^{-1},$$

donde $\tilde{\pi}$ es la aplicación obtenida desde $\bar{\pi}$ (la extensión de π a $\hat{\mathfrak{g}}$ -módulo) vía la correspondencia dada en A.0.9. Por el teorema A.0.15, tenemos que

$$(\text{Ad}_V \hat{\pi}(\Psi(g)))(\bar{\pi}(x)) = \hat{\pi}(\Psi(g))(\bar{\pi}(x))\hat{\pi}(\Psi(g))^{-1} = \tilde{\pi}(g)\bar{\pi}(X)\tilde{\pi}(g)^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$\bar{\pi}(\text{Ad } \Psi(g)(X)) = \bar{\pi}(\text{Ad } g(X))$$

Luego, por la proposición A.0.13 tenemos que π es inyectiva, luego $\bar{\pi}$ también lo es, pues si $y \in \ker \bar{\pi}$, entonces cada componente $y_\beta \in \ker \bar{\pi}$, para todo $\beta \in \Delta$. Así, $\text{Ad } \Psi(g)(X) = \text{Ad } g(X)$, para todo $X \in \hat{\mathfrak{g}}$. ■

Lema A.0.18 *Sea $X \in \hat{\mathfrak{g}}$. Entonces $\text{Ad } \mathcal{G}(X) = \text{Ad } \bar{\mathfrak{L}}(\dot{G})(X)$, donde $\text{Ad } \mathcal{G}$ se refiere a la representación definida en la sección 2.3.2 y $\text{Ad } \bar{\mathfrak{L}}(\dot{G})$ a la definida en 2.26.*

Demostración. Sea $g \in \mathcal{G}$, entonces por el teorema A.0.17, tenemos que $\text{Ad } g = \text{Ad } \Psi(g) \in \text{Ad } \bar{\mathfrak{L}}(\dot{G})$, donde Ψ es la función dada en el teorema A.0.15. De igual manera, si $g \in \bar{\mathfrak{L}}(\dot{G})$, dado que Ψ es sobre, entonces existe $\tilde{g} \in \mathcal{G}$ tal que $\Psi(\tilde{g}) = gC$, luego $\text{Ad } g = \text{Ad } gC = \text{Ad } \tilde{g} \in \text{Ad } \mathcal{G}$. ■

Del anterior lema, tenemos que para todo $X \in \hat{\mathfrak{g}}$ localmente nilpotente, la órbita a través de X es

$$\mathfrak{O}_X = \text{Ad } \bar{\mathfrak{L}}(\dot{G})(X) \tag{A.18}$$

Bibliografía

- [Ba] Bala, P., Carter, R. Classes of Unipotent elements in simple algebraic groups I, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **79**, 1976.
- [Bo] Borel, A. *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Math. 126, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1991.
- [Bu] Bourbaki, N., *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres 1-9, Masson, Paris, 1990.
- [Ca] Carter, R. W., *Finite groups of Lie type, Conjugacy classes and complex characters*. John Wiley & Sons, Chichester, 1985.
- [Co] Collingwood, D., McGovern, W. *Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.
- [Di] Dimitrov, V., Futorny, V., Grantcharov, D., *Parabolic Set Groups*, *Contemp. Math.* **499** (2009), 61-74.
- [Fu] Fuchs, J. *affine Lie Algebras and quantum groups*. Cambridge University Press, 1992.
- [Ga] Garland, H. *The Arithmetic Theory of Loop Groups*, *Publ. Math. IHES* **52** (1980), 5-136.
- [Go] Gohberg, L., Lancaster, P., Rodman, L. *Matrix polynomials*, Society for Industrial and applied Mathematics Philadelphia, 2009.
- [Hu1] Humphreys, J.E. *Introduction to Lie Algebras and Representations Theory*, GTM 9, Springer-Verlag, 1972.
- [Hu2] Humphreys, J. E. *Conjugacy Classes in Semisimple Algebraic Groups*. Amer. Math. Soc., (Math Surveys and Monographs 43), Providence, R.I. 1995.
- [Ja] Jantzen, J., Neeb, K. *Lie Theory, Lie Algebras and Representation*. Springer Science+Business Media New York, 2004.
- [Ka] Kac, V.G. *Infinite Dimensional Lie Algebras*, Third Edition, Cambridge University Press, 1990.
- [Ko] Kostant, B., Rallis, S., 1971. *Orbits and representations associated with symmetric spaces*. *Amer. J. Math.* **93**, 753-809.
- [Ku] Kumar, S. *Kac Moody Groups, their Flag Varieties and Representation Theory*, Birkhauser, 2002.

- [Li] Littelmann, P., 1996. An effective method to classify nilpotent orbits. In: Algorithms in Algebraic Geometry and Applications (Santander, 1994). In: Progr. Math., vol. 143. Birkhauser, Basel, pp. 255-269.
- [PS] Pressley, A., Segal, G. Loop Groups, Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [Pe] Peterson, D. H., Kac V.G. Infinite Flag Varieties and Conjugacy Theorem, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 80(1983), 1778-1782.
- [Sp] Springer, T.A. Linear Algebraic Groups, Second Edition, Progress in math 9, Birkhauser, 1998.
- [Vi] Vinberg, E.B., The classification of nilpotent elements of graded Lie algebras. Dokl. Akad. Nauk SSSR 225 (4), 745-748. 1975.
- [Wa] Wakimoto, M. Infinite-Dimensional Lie Algebras, Editorial Board, 1999.

