

TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA

# Sedimentación de cristales de hielo en presencia de un campo eléctrico

*Guadalupe Peñaranda*

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y  
COMPUTACIÓN  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Septiembre de 2018

Director: Dr. Rodrigo Bürgesser



## Resumen

El clima terrestre está fuertemente influenciado por las nubes, ya que éstas lo modifican y participan de distintos procesos que lo modelan. En particular, las nubes son una parte fundamental del balance radiativo entre el sol y el sistema Tierra-Atmósfera, regulan tanto el ciclo hidrológico de este sistema como la circulación general de la atmósfera y, además, son uno de los componentes principales del circuito global eléctrico.

El contenido de hielo de las nubes es uno de los parámetros relevantes del albedo terrestre y éste, en parte, está determinado por el proceso de sedimentación de los cristales de hielo. Este proceso es un mecanismo que tiene un rol importante en el clima terrestre ya que influye en la cobertura nubosa y en la evolución temporal de las nubes. En particular, las nubes de tormenta presentan un campo eléctrico en su interior, el cual produce un alineamiento de los cristales de hielo, afectando el proceso de sedimentación y a las propiedades ópticas de éstas.

En este trabajo se presentan mediciones de laboratorio de la velocidad de caída, tamaño y actitud de caída de cristales de hielo individuales tipo columnas, en presencia de un campo eléctrico horizontal de distintas magnitudes. Las mediciones se realizaron a una temperatura de  $-8^{\circ}C$  utilizando una cámara rápida ( $1000fps$ ), la cual tiene un arreglo óptico que permite resolver distancias de hasta  $1,72\mu m$ . Los resultados muestran que los cristales de hielo tipo columna que caen libremente, al interactuar con el campo eléctrico, se orientan en la dirección del mismo. Dicha orientación depende fuertemente de la magnitud del campo eléctrico y en menor medida del tamaño de los cristales de hielo. Además, los resultados no muestran una dependencia de la velocidad de caída con la magnitud del campo eléctrico horizontal aplicado.

De los resultados obtenidos, se obtuvo una parametrización de la velocidad de caída con la capacidad de los cristales de hielo. Si bien esta parametrización no es la representación más adecuada, es suficientemente simple para ser utilizada en modelos numéricos. Además, se obtuvo una relación empírica tipo ley de potencia entre el número de *Reynolds* y de *Best* a partir de las mediciones y de la estimación de la masa de los cristales de hielo.

Se compararon las observaciones con resultados obtenidos de simulaciones numéricas, y se encontró que los resultados numéricos son consistente con las observaciones.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Nubes . . . . .	5
1.2. Sedimentación de cristales de hielo . . . . .	5
1.3. Nubes de tormenta . . . . .	8
1.4. Interacción entre campo eléctrico y cristales de hielo . . . . .	9
1.5. Objetivos . . . . .	10
<b>2. Metodología</b>	<b>11</b>
2.1. Dispositivo Experimental . . . . .	11
2.2. Desarrollo Experimental . . . . .	12
2.2.1. Armado y elaboración del experimento . . . . .	12
2.2.2. Condiciones de trabajo . . . . .	12
2.2.3. Adquisición de imágenes . . . . .	14
2.2.4. Toma de réplicas plásticas . . . . .	14
2.3. Simulaciones . . . . .	15
<b>3. Análisis de datos y resultados</b>	<b>17</b>
3.1. Mediciones de laboratorio . . . . .	17
3.2. Simulaciones . . . . .	25
<b>4. Conclusiones</b>	<b>29</b>
4.1. Mediciones de laboratorio . . . . .	29
4.2. Simulaciones . . . . .	30
<b>Bibliografía</b>	<b>31</b>
<b>Apéndice</b>	<b>33</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Nubes

Las nubes en la atmósfera están formadas por vapor de agua, partículas de agua líquida y/o partículas de hielo. Se forman cuando el aire alcanza la sobresaturación de vapor de agua, siempre y cuando existan partículas que sirvan como núcleos de condensación. La forma más común de que se alcance la sobresaturación es a partir del ascenso de parcelas de aire, el cual resulta en la expansión adiabática de las mismas. Durante la expansión, el aire se enfría y aumenta la presión de vapor. Si la parcela alcanza las condiciones de sobresaturación se forma la nube.

Aquellas nubes que se encuentran completamente por debajo de la isoterma de  $0^{\circ}C$  se las denominan nubes cálidas, y contienen únicamente gotas de agua. En cambio, las nubes que se extienden por arriba de la isoterma de los  $0^{\circ}C$  se las conoce como nubes frías. Estas nubes se caracterizan por tener partículas de hielo. En particular, las nubes que poseen sólo partículas de hielo se conocen como nubes congeladas.

Las nubes que se extienden algunos kilómetros por sobre la isoterma de  $0^{\circ}C$  están formadas por un conjunto de gotas de agua, partículas de hielo y vapor de agua. Éstas se denominan nubes con mezcla de fase. A pesar de que la temperatura se encuentra por debajo de los  $0^{\circ}C$ , las gotas de agua pueden existir en dichas nubes. En este caso nos referimos a las gotas como gotas de agua sobreenfriadas. Estas nubes están compuestas por dos tipos de partículas de hielo, cristales de hielo y granizos.

### 1.2. Sedimentación de cristales de hielo

Un parámetro relevante para el estudio de las nubes frías (nubes con mezcla de fase y nubes congeladas) es la velocidad de caída de los cristales de hielo ya que éste influye en la cobertura nubosa, en el tiempo de vida de las nubes, y por lo tanto, en sus propiedades radiativas (Sanderson et al., 2008 [25]).

La velocidad terminal de caída de las partículas de hielo está determinada, principalmente, por el tamaño de las mismas y por su masa. Distintos trabajos teóricos y experimentales han sido realizados para determinar la velocidad de sedimentación de los cristales de hielo. Entre los trabajos experimentales se encuentran los de Jayaweera y Ryan (1972, [13]), Kajikawa (1973, [15]), Michaeli (1977, [20]) y Bürgesser et al. (2016, [3]). Estos autores midieron, directamente, la velocidad de caída de los

cristales de hielo bajo ciertas condiciones de laboratorio controladas. Estos estudios de laboratorio utilizaron arreglos experimentales similares. Dichos arreglos se ubicaron en una cámara fría y tenían dos partes principales: en la parte superior se generaron los cristales de hielo y, en la parte inferior, se realizaron las observaciones de los cristales de hielo que caían. Las velocidades de los cristales de hielo se midieron a través de una seguidilla de imágenes que mostraban a los cristales cayendo a través de un haz de luz.

En los estudios realizados por Jayaweera y Ryan (1972, [13]), Kajikawa (1973, [15]), Michaeli(1977,[20]) los cristales que cayeron fueron colectados en láminas de vidrio cubiertas por una película de aceite. Luego, estos fueron fotografiados y directamente de estas fotografías se determinó su tamaño. Luego, los cristales de hielo colectados fueron derretidos con el fin de determinar sus masas. Por otro lado, Bürgesser et al. (2016, [3]) determinaron los tamaños de los cristales de hielo de los fotogramas obtenidos durante la caída de estos.

Jayaweera y Ryan (1972, [13]) midieron experimentalmente la velocidad terminal de pequeñas placas y columnas de hielo. A partir de las mediciones determinaron las velocidades terminales de los cristales de hielo, su masa y su tamaño.

Michaeli (1977, [20]) determinó la velocidad terminal, la masa y tamaño de los cristales de hielo para doce temperaturas diferentes ubicadas en un rango de temperaturas entre los  $-3,4^{\circ}C$  y  $-20^{\circ}C$ . Para cada valor de temperatura, reportó los valores medios de los parámetros medidos de aproximadamente 100 cristales de hielo para cada temperatura.

Kajikawa (1973, [15]) realizó mediciones de velocidad de caída de cristales de hielo individuales. Este investigador encontró una relación entre ésta y la dimensión de los cristales de hielo tipo columnas y placas. Sin embargo, cabe destacar que los tamaños y masas de cristales de hielo que midió no correspondían a aquellos cristales cuyas trayectorias fueron fotografiadas dado que, luego de fotografiados, se tomó muestras de otros cristales de hielo del mismo tipo a los cuales se les midió la masa y el espesor.

Bürgesser et al. (2016, [3]) reportaron mediciones experimentales de la velocidad de caída, tamaño y orientación de cristales de hielo tipo columna para tamaños menores a  $160\mu m$ . A diferencia de los anteriores trabajos, la masa no fue medida si no que fue estimada. Además, estos investigadores reportaron que los cristales de hielo no tienen una orientación preferencial durante el proceso de sedimentación para el rango de tamaños medidos. Reportaron, también, que la capacidad eléctrica del cristal de hielo es la longitud característica que mejor representa los datos experimentales. La capacidad tiene en cuenta la forma y tamaño de los cristales de hielo y representa al radio hidrodinámico de los mismos (Westbrook, 2008 [29]).

Westbrook, en su trabajo (2008,[29]), describió un nuevo método para calcular con precisión la capacidad de partículas de hielo naturales, es decir, semejantes a las que se encuentran en las nubes. Los resultados fueron claves para estimaciones precisas de las tasas de deposición y evaporación en modelos numéricos del clima. Lo logró a través del muestreo directo de trayectorias de moléculas de agua que se difundieron, utilizando caminantes aleatorios. Al contar cuántas de estas trayectorias se cruzaron con la superficie de la partícula de hielo, la cual podía tener cualquier forma, y cuántas escaparon fuera de un límite esférico lejos de la partícula, se estimó la capacidad de varios hábitos cristalinos de partículas de hielo (columnas y placas hexagonales, columnas y placas escaleno, etc).

Para el caso de columnas y placas hexagonales, dicho parámetro está dado por:

$$C = 0,58a[1 + 0,95(\mathcal{A})^{0,75}] \quad (1.1)$$

con  $\mathcal{A} = \frac{L}{2a}$  definida como la razón de aspecto, donde  $2a$  es la máxima dimensión de la cara basal del cristal de hielo y  $L$  es la longitud perpendicular a la cara basal del mismo como se muestra en la figura 1.1. Luego,  $\mathcal{A} < 1$  para el caso de placas hexagonales y  $\mathcal{A} > 1$  para el caso de columnas hexagonales.

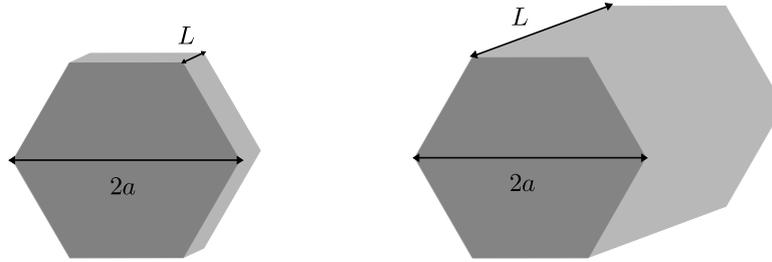


Figura 1.1: Esquema de los cristales tipo placa (imagen izquierda) y tipo columna (imagen derecha).

Una forma de parametrizar el proceso de caída de los cristales de hielo es a través de la determinación de los números *Best* ( $\mathcal{B}_e$ ) y *Reynolds* ( $\mathcal{R}_e$ ), y encontrar una relación entre estos dos números adimensionales.

El número de *Reynolds* es un número adimensional que compara la magnitud entre las fuerzas viscosas e inerciales presentes en un fluido de densidad  $\rho_a$  y viscosidad  $\eta$ , cuando por él se mueve un cuerpo de dimensión característica  $D$ , a una velocidad  $v$ . Para valores bajos del número de Reynolds ( $\ll 1$ ), el flujo tiende a estar dominado por un flujo en el cual las fuerzas ejercidas entre las partículas del fluido son totalmente viscosas. Es decir, las fuerzas viscosas son dominantes y se caracteriza por un movimiento suave y constante del fluido.

El número de *Reynolds* se define como:

$$\mathcal{R}_e = \frac{Dv\rho_a}{\eta} \quad (1.2)$$

donde  $D$  es la longitud característica de la partícula,  $v$  es la velocidad de la partícula,  $\rho_a$  la densidad del fluido y  $\eta$  la viscosidad dinámica del fluido.

El número *Best* (o número de *Davies*) no depende de la velocidad de la partícula pero si depende de variables primarias para su determinación. Éstas son la masa de la partícula ( $m$ ) y el área transversal con la cual la partícula se presenta al flujo ( $A$ ). El número de *Davies* se define como:

$$\mathcal{B}_e = \frac{2mgD^2\rho_a}{A\eta^2} \quad (1.3)$$

donde  $D$  es la longitud característica de la partícula,  $m$  la masa de la partícula,  $\rho_a$  la densidad del fluido,  $\eta$  la viscosidad dinámica del fluido,  $g$  la aceleración debido a la gravedad y, por último,  $A$  el área transversal con la cual la partícula se presenta al flujo.

Estudios experimentales calcularon los números *Reynolds* y *Best* para partículas cayendo libremente (como por ejemplo Heymsfield y Kajikawa, 1983 [11], Jayaweera y Ryan, 1972 [13] y Bürgesser

et al. 2016, [3]) y encontraron una ley de potencia entre  $\mathcal{R}_e$  y  $\mathcal{B}_e$  dada por la forma:

$$\mathcal{B}_e = a\mathcal{R}_e^b \quad (1.4)$$

Conociendo esta relación, la masa y área transversal con respecto al fluido de las partículas de hielo, se puede obtener la velocidad de caída de las mismas.

### 1.3. Nubes de tormenta

Las nubes denominadas cumulonimbus son nubes densas, de gran desarrollo vertical, la cuales suelen ser asociadas a tormentas eléctricas. Observaciones muestran que las nubes cumulonimbus deben extenderse al menos  $2 - 3Km$  por sobre la isoterma de  $0^\circ C$  antes de que se observe la primera descarga eléctrica. Estas observaciones son consistentes con el mecanismo que explica la separación de carga eléctrica que lleva a la descarga: la colisión entre granizos y cristales de hielo (Teoría precipitativa no inductiva). La presencia de este tipo de partículas requieren de nubes con mezcla de fase.

Todas las nubes se encuentran electrificadas hasta cierto grado, pero en aquellas nubes convectivas de gran tamaño suficiente carga eléctrica es separada como para generar campos eléctricos que exceden la ruptura dieléctrica del aire.

Se sostiene que la distribución de carga en nubes de tormenta está dada por una estructura electrostática tripolar, es decir, una región difusa de carga positiva ubicada en la parte alta de la nube; una región de carga negativa a una altura media, llamada zona principal de carga, la cual se encuentra definida entre los  $-10^\circ C$  y los  $-20^\circ C$ ; y una región pequeña de carga positiva ubicada en la parte baja de la nube. La magnitud de carga de las regiones de carga negativa y carga positiva superior se encuentra entre los  $10 - 100 \frac{C}{m^3}$ , siendo menor la densidad de carga para la carga positiva superior. Dichas regiones se encuentran separadas por una zona cuasi-neutral. Esta distribución de carga genera, en el interior de las nubes, un campo eléctrico.

Marshall y Rust reportaron en su trabajo (1991, [18]) mediciones de campo eléctrico en nubes de tormenta obtenidos de 12 globos de sondeo. Estos investigadores reportaron una magnitud máxima promedio del campo eléctrico en tormentas de  $100 \frac{kV}{m}$ , donde el valor máximo medido fue de  $150 \frac{kV}{m}$ . Este campo eléctrico máximo se observó, generalmente, entre regiones verticales adyacentes de carga opuesta. Estos autores concluyeron que existen de cuatro a diez regiones de carga en las nubes de tormentas, donde la magnitud de la densidad de carga varió entre 0,2 y  $13 \frac{nC}{m^3}$  y con una extensión vertical entre 130 y 2100m.

Win et al.(1974, [30]), a través de cohetes instrumentados, registraron campos eléctricos intesos, superiores a los  $4 \times 10^5 \frac{V}{m}$ , superando los valores encontrados por Marshall y Rust (1991, [18]). Sin embargo estos valores son poco probables, es decir, de un total de 64 casos, sólo se registraron esos valores para 6 casos. De una tabulación de valores picos del campo eléctrico a lo largo de cada trayectoria,  $4,3 \times 10^4 \frac{V}{m}$  es el valor de la mediana.

## 1.4. Interacción entre campo eléctrico y cristales de hielo

Se sabe que los campos eléctricos de la atmósfera afectan a los cristales de hielo ejerciendo torques sobre los mismos. Como resultado, se genera una orientación preferencial de los cristales de hielo.

Vonnegut, 1965 ([27]), sugirió el alineamiento de los cristales de hielo basandose en sus propias observaciones. Dicho autor observó cambio de brillo en las nubes (destellos de luz) coincidentes con descargas eléctricas atmosféricas. Planteó que los cristales de hielo funcionan como pequeños espejos que se ven afectados por el campo eléctrico produciendo que los cristales de hielo tengan una misma orientación. El campo eléctrico produce este efecto porque induce dipolos eléctricos en los cristales de hielo generando un torque sobre los mismos. Esto concuerda con lo descrito por Hale (1950, [9]) y Lacy (1950, [16]), quienes sostuvieron que los efectos ópticos inusuales observados se deben a la orientación de los cristales de hielo producida por el fuerte campo eléctrico en las nubes de tormentas.

Mendez 1969 ([19]) relacionó el cambio en la luz solar polarizada reflejada por las nubes con el cambio en el campo eléctrico y las descargas eléctricas. Éste mostró, a través de sus resultados, que el campo eléctrico contenido dentro de una tormenta, antes y después de una descarga eléctrica, se vincula al grado local de polarización producida por la luz solar reflejada por cristales de hielo orientados en la superficie de la tormenta.

Foster and Hallet (2002, [6] y 2008, [7]) realizaron mediciones de la orientación de cristales de hielo tipo placas en presencia de un campo eléctrico. Los resultados reportados por estos investigadores muestran una alineación completa de los cristales de hielo para campos eléctricos de magnitud igual o mayor a  $10 \frac{kV}{m}$  y con un tiempo para dicha alineación del orden de las decenas de los microsegundos. Esto indicaría que, bajo las magnitudes del campo eléctrico observado en las nubes, el torque producido por el campo eléctrico orientaría a los cristales de hielo.

Otro efecto importante de los cristales de hielo que se encuentran en las nubes puede verse en el sensado remoto de las nubes mediante radares meteorológicos. El sensado se ve afectado por la orientación de los cristales de hielo (Reinking et al., 1997, [23]), la cual es modificada por el campo eléctrico presente en las nubes de tormenta.

Todas estas observaciones constituyen evidencia suficiente para la ocurrencia de alineamiento de partículas de hielo en nubes de tormenta. Sin embargo, desde el punto de vista microfísico, una parte importante sería analizar la dinámica individual de las partículas para determinar las fuerzas requeridas para la alineación, es decir, un análisis de los torques actuantes sobre las partículas.

Weinheimer y Few presentaron en su trabajo (1987, [28]) condiciones bajo las cuales el alineamiento de cristales de hielo en presencia de campo eléctrico ocurre. Aproximaron cristales columnas y placas por esferoides prolados y oblados, respectivamente. Estos pueden ser considerados como conductores o dieléctricos. Estos investigadores consideraron cuatro torques: el torque eléctrico, el torque de Drag (*Stokes drag torque*), el torque aerodinámico (*aerodynamics driving torque*) y, por último, el torque producido por la turbulencia y el movimiento Browniano.

Cuando un cristal de hielo, de carga neta cero, se encuentra en presencia de un campo eléctrico uniforme se induce una distribución de carga en el cristal. Esta distribución interactúa con el campo eléctrico y genera un torque sobre la partícula de hielo. Esto se conoce como torque eléctrico. Para el caso de un cristal que se traslada y rota en un flujo de Stokes ( $\mathcal{R}_e \ll 1$ ), el único torque que sufre es el de Drag (*Stokes drag torque*). Si se considera el caso de partículas de hielo de gran tamaño, cayendo

a alta velocidad, el flujo del aire alrededor de éstas resulta en un torque el cual impulsa el eje mayor de la partícula hacia la dirección perpendicular al flujo. Este torque se conoce como torque aerodinámico. Por último, para partículas de hielo pequeñas, es necesario tener en cuenta los efectos del movimiento Browniano rotacional. Para campos eléctricos débiles las colisiones con las moléculas de gas pueden evitar que las partículas se mantengan alineadas con el campo. A su vez, la turbulencia también genera un torque sobre las partículas de hielo que evita la alineación de las mismas. Cabe destacar que en situaciones donde domina el torque eléctrico o el aerodinámico, las velocidades turbulentas son débiles.

## 1.5. Objetivos

Como vimos anteriormente, pocos trabajos de laboratorio han presentado mediciones experimentales de sedimentación de cristales de hielo en presencia de campo eléctrico. Debido a las implicancias que provoca en el desarrollo y evolución de nubes, como también en propiedades ópticas de las mismas, el objetivo del presente trabajo es llevar a cabo el estudio del proceso de sedimentación de cristales de hielo en nubes de tormenta.

Se pretende realizar mediciones experimentales de la velocidad de caída, tamaño y orientación de cristales de hielo tipo columna en presencia de un campo eléctrico transversal a la dirección de caída (horizontal) con magnitudes en el rango de valores registrados por investigadores en las nubes de tormenta de la atmósfera.

# Capítulo 2

## Metodología

### 2.1. Dispositivo Experimental

El experimento se llevó a cabo en una cámara de nube. Ésta consiste en una caja de cobre de  $2 \times 1 \times 1m^3$ , ubicada dentro de una cámara fría de temperatura regulable. Un tubo de acrílico de sección cuadrada de  $5 \times 5cm^2$  y de  $1m$  de altura se ubicó por de bajo de la cámara de nube ingresando a la misma como se muestra en la Figura 2.1a.

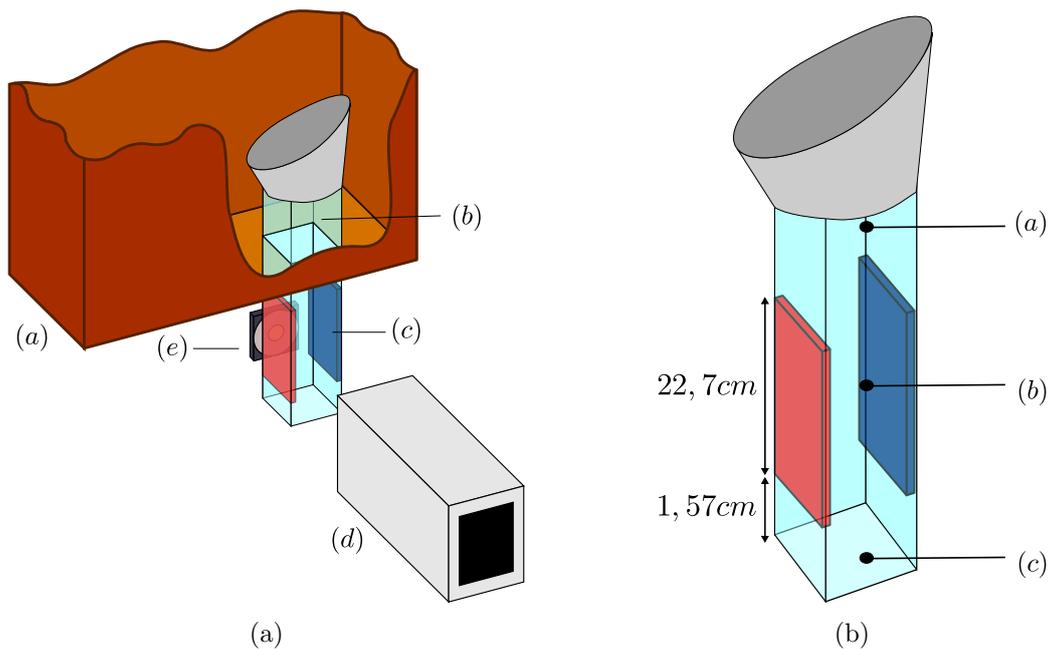


Figura 2.1: Figura (a): Esquema del dispositivo experimental. (a) Cámara de nube. (b) Tubo acrílico. (c) placas metálicas. (d) Cámara rápida. (e) Lámpara led. Figura (b): Esquema del tubo acrílico. (a), (b) y (c) posiciones de las termocupas.

A lo largo del tubo de acrílico se colocaron termocupas ubicadas en la parte alta, media y baja del mismo. A una distancia de  $(1,57 \pm 0,02)cm$  desde el extremo inferior del tubo, y por dentro de éste, se ubican dos placas metálicas dispuestas de forma tal que funcionen como un capacitor de placas paralelas. Las placas tienen una longitud de  $(22,7 \pm 0,1)cm$  y están separadas una distancia de  $(3,66 \pm 0,05)cm$ . Las placas están conectadas a una fuente de voltaje variable. El tubo posee el extremo inferior cerrado y el extremo superior, que se encuentra en la cámara de nube, abierto. Sobre éste último se colocó un embudo para facilitar la entrada de cristales de hielo en el mismo. Al final de

las placas se ubicó una cámara rápida modelo Photron FASTCAM SA3, que cuenta con una velocidad de cuadro máxima de  $1000\text{fps}$  (fotos por segundo) y una resolución máxima de  $1028 \times 1028\text{pixeles}$ . A ésta se le adjuntó una lente macro provista de un zoom donde un pixel del cuadro representa  $1,748\mu\text{m}$ . Se dispuso la cámara de tal forma que el plano focal se encontrara en el centro del tubo acrílico. Ésta se conectó mediante un cable de red (ethernet) a una computadora. Los cristales de hielo, durante su caída por el tubo acrílico, fueron iluminados por una lámpara led.

## 2.2. Desarrollo Experimental

### 2.2.1. Armado y elaboración del experimento

Para realizar las mediciones, se dispuso el dispositivo experimental en la cámara fría y se ajustó la misma a la temperatura deseada.

Ya alcanzada la temperatura con la cual se pretende trabajar, se calentó agua destilada en un termo hasta llegar a su punto de ebullición. Luego, se ubicó el termo dentro de la cámara de nube. De esta manera, se logró la formación de una nube de gotitas de agua sobreenfriadas a partir de la cual se generaron los cristales de hielo en la cámara de nube. La nube de gotitas de agua se generó mediante la condensación de vapor de agua sobre los núcleos de condensación de nubes naturales presentes en la cámara de nube. La convección del aire, producida por el calor proporcionado por el termo, ayudó a la mezcla y homogenización de la temperatura y del agua líquida contenida en la cámara de nube. Luego de dos minutos de colocado el termo en la cámara, la nube alcanzó un estado estacionario dando como resultado una nube de gotitas de agua sobreenfriada distribuidas homogéneamente. A continuación, los núcleos de hielo presentes en la cámara de nube fueron activados mediante el enfriamiento de un volumen de aire de la nube mediante la expansión rápida del aire comprimido en una jeringa (Ávila et al., 2013 [1] y Castellano et al., 2014 [4]). Es decir, dentro de la cámara de nube, se realizó el "sembrado" que significó hacer cinco expansiones con la jeringa y de esta manera activar los núcleos de hielo presentes. Una vez activados los núcleos, estos crecieron por deposición de vapor provisto por las gotas de agua y por el termo formando los cristales de hielo. Estos cristales de hielo crecen hasta alcanzar un tamaño suficiente para sedimentar en el tubo de acrílico.

Se realizaron mediciones con y sin campo eléctrico. Para cada medición se registró una secuencia de imágenes de los cristales de hielo cayendo por el tubo acrílico y se registró las temperaturas que marcaban las termocuplas ubicadas en el tubo acrílico.

También se tomaron réplicas plásticas de los tamaños de los cristales durante los experimentos a través de laminas porta-muestra y una preparación de formvar al 3% masa en masa (Schaefer, 1956 [26]).

### 2.2.2. Condiciones de trabajo

La temperatura de la cámara fría fue configurada a los  $-8^{\circ}\text{C}$  para la cual el hábito cristalino son columnas de hielo (Bailey y Hallett, 2009 [2]), como muestra la figura 2.2. La temperatura fue monitoreada durante el experimento continuamente mediante las termocuplas, y se observó una variación menor a  $1^{\circ}\text{C}$  en cada temperatura registrada por éstas. También, se aseguró que la parte baja del tubo

estuviera levemente más fría que la parte superior para evitar la convección térmica y asegurarnos la caída libre de los cristales de hielo.

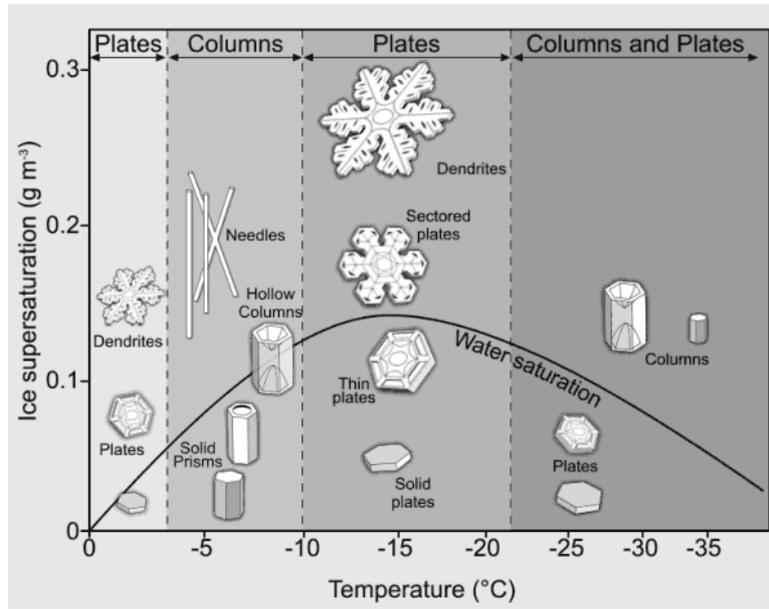


Figura 2.2: Diagrama morfológico de cristales de hielo según la sobresaturación de hielo y la temperatura de los mismos. Se muestra que en el rango de  $-5^{\circ}\text{C}$  y  $-10^{\circ}\text{C}$  habitan los cristales de hielo tipo columnas y agujas (Emersic, [5]).

Para evitar la evaporación de los cristales de hielo en su caída por el tubo acrílico, se colocó una pequeña cantidad de hielo en la parte inferior del mismo. Esto provocó que el interior del tubo acrílico se encuentre saturado respecto al hielo.

Se configuró la cámara, a través de la computadora, utilizando el programa Photron FASTCAM Viewer3 (PFV). Se estableció un *frame rate* de  $250\text{fps}$ , un tiempo de obturación (*shutter*) de  $\frac{1}{5000}\text{s}$  y, por último, una resolución de  $1024 \times 768\text{píxeles}$ . De esta manera, se obtuvo un tiempo de grabación de  $7,27\text{s}$ .

El valor del *frame rate* fue elegido de manera que la cantidad de cuadros por segundo sean los suficientes para seguir un cristal de hielo y poder obtener su velocidad de caída. Estableciendo una resolución de  $1024 \times 768\text{píxeles}$  y suponiendo una velocidad de caída del orden de unos pocos  $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$  (Bürgesser et al., 2016 [3]), se calculó el tiempo medio que tarda un cristal en recorrer  $768\text{px}$ , sabiendo que un píxel del cuadro representa  $1,748\mu\text{m}$ . El tiempo así obtenido es del orden de las decenas de  $\text{ms}$ , y utilizando un *frame rate* de  $250\text{fps}$ , los cristales de hielo pueden ser observados durante decenas de cuadros.

Para elegir el valor de obturación (*shutter*), se consideró que este tiempo no fuera tan grande como para que el cristal de hielo dejara rastro en las imágenes al caer, ni tan pequeño como para que la luz que ingresara no fuera suficiente y para iluminar el cristal en cuestión. Para esto, se calculó la distancia recorrida por el cristal en un tiempo de obturación de  $\frac{1}{5000}\text{s}$  y se supuso una velocidad de caída del cristal del orden de unos pocos  $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$  (al igual que en el caso del *frame rate*, Bürgesser et al. 2016 [3]), obteniendo como resultado un valor de la distancia recorrida del orden de los  $2 - 6\mu\text{m}$ , el cual se encuentra dentro del error asociado a la determinación del tamaño del cristal de hielo.

En las mediciones con campo eléctrico se utilizaron los siguientes valores de voltaje:  $1000\text{V}$ ,  $500\text{V}$ ,  $100\text{V}$  y  $50\text{V}$ . Estos valores de voltaje representan un campo eléctrico con magnitud entre  $25\frac{\text{kV}}{\text{m}}$  Y  $1\frac{\text{kV}}{\text{m}}$ .

Si bien estos valores de campo eléctrico son bajos respecto a los valores máximos observados en las nubes de tormenta son valores representativos del campo eléctrico en la etapa inicial de electrificación. Además, dado los resultados reportados por Foster and Hallet (2002,[6]), se utilizaron este rango de valores de campo eléctrico para poder estudiar la dinámica de la caída de los cristales de hielo.

### 2.2.3. Adquisición de imágenes

Para registrar las imágenes se procedió de la siguiente manera: primero se observó, mediante la cámara, que efectivamente los cristales ingresaran al tubo acrílico; si se observaban, se procedía a grabar con el programa PFV; al finalizar el video, se comienza nuevamente el proceso y, en caso de no observar cristales, se comienza una nueva medición.

De las imágenes adquiridas, se obtuvieron el tamaño y ángulo de caída de los cristales de hielo tipo columna. Éste último se midió entre el eje vertical y el eje mayor del cristal. Perpendicular a la dirección de caída se encontraba el campo eléctrico aplicado (Figura 2.3a).

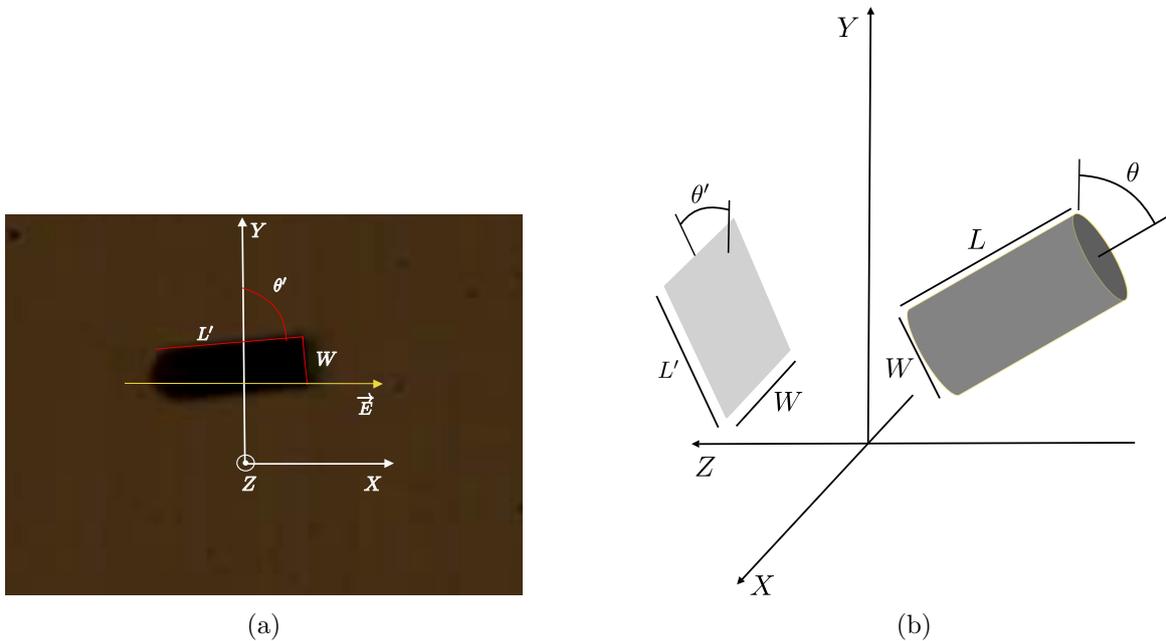


Figura 2.3: (a) Ejemplo de un cristal de hielo tipo columna obtenido de los datos registrados con dimensiones medidas ( $L'$  y  $W$ ) y ángulo de caída ( $\theta'$ ). Campo eléctrico perpendicular a la dirección de caída del cristal. (b) Esquema de un cristal de hielo tipo columna y su proyección sobre el plano focal de la cámara rápida (plano  $X$ - $Y$ ) con las dimensiones reales y las dimensiones de la proyección del cristal de hielo.

Los tamaños medidos de los cristales de hielo son una proyección del tamaño real sobre el plano focal de la cámara rápida (plano  $X$ - $Y$ ) (Figura 2.3b). Se puede observar que la proyección, sobre el plano focal de la cámara, de la longitud  $L$  del cristal de hielo tipo columna es  $L'$  con  $L' < L$  y que el ángulo medido  $\theta'$  es una proyección de  $\theta$  con  $\theta' < \theta$ . A su vez, un cilindro con diámetro  $W$  es una buena aproximación para cristales de hielo tipo columna y, debido a la simetría, el ancho medido es el mismo que el proyectado en el plano  $X$ - $Y$ .

### 2.2.4. Toma de réplicas plásticas

Para la toma de las réplicas plásticas se utilizaron láminas porta-muestra, preparación de formvar al 3% masa en masa y un recipiente con gel de sílice (silica gel). Para obtener las réplicas plásticas se

extendió una fina capa de formvar sobre el porta muestra y luego, abriendo uno de los compartimientos de la cámara de nube, se introdujeron las láminas dentro de la nube de tal forma que los cristales de hielo se depositaran en ellas. Acto siguiente, sin salir de la cámara fría, se colocaron las láminas dentro del recipiente con silica gel. Al recipiente se le colocó una tapa para evitar condensación de agua al retirarlo de la cámara fría. Debido a que el silica gel absorbe la humedad, los cristales de hielo depositados sobre la película plástica de formvar, se evaporaron y dejaron su huella en el portamuestra. Luego, estas huellas fueron observadas a través de un microscopio modelo Olympus BH-2. Utilizando éste último y a través del programa ENLTV Win32, se obtuvieron imágenes de las huellas con el fin de obtener el tamaño de los cristales de hielo tipo columna.

## 2.3. Simulaciones

Con el fin de resolver la ecuación de movimiento de un esferoide, bajo las condiciones medidas, se tuvieron en cuenta las siguiente suposiciones:

- Los cristales tipo columnas se aproximaron por elipsoides prolados (Weinheimer y Few, 1987 [28]).
- Como se trabajó con números de *Reynolds* menores que uno, el torque aerodinámico no fue tenido en cuenta.
- Debido a los valores de campo eléctrico utilizados, el torque debido al movimiento Browniano fue despreciado. También así los efectos debido a turbulencias, ya que las mediciones se realizaron bajo condiciones de aire quieto.

Por lo tanto, sólo fueron considerados el torque eléctrico y el torque de Drag. La ecuación de movimiento que rige un esferoide bajo la influencia de dichos torques se puede escribir como:

$$\ddot{\beta} = -\frac{15}{2} \frac{\epsilon_0 E^2 f}{\rho a^3 (q^3 + q)} \sin(2\beta) - \frac{30\mu g}{\rho a^3 (q^3 + q)} \dot{\beta} \quad (2.1)$$

Donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío,  $E$  el módulo del campo eléctrico,  $\rho$  la densidad del esferoide,  $a$  el radio ecuatorial del esferoide,  $q$  la razón de ejes del esferoide,  $f$  una función  $q$  y la permitividad relativa del hielo ( $\epsilon_r$ ),  $\mu$  la viscosidad del aire,  $\beta$  el ángulo entre la dirección del campo eléctrico y el eje de simetría del esferoide,  $\dot{\beta}$  la velocidad angular del esferoide y, por último,  $g$  una función que depende  $q$ . (Si desea ver el desarrollo matemático de la ecuación anterior consultar con el apéndice 4.2).

Para la resolución de la ecuación diferencial 2.1 se utilizó el método numérico Runge Kutta. Se consideró una velocidad angular inicial cero ( $\dot{\theta} = 0$ ) y distintos ángulos iniciales ( $\theta_0$ ). La ecuación de movimiento depende del ángulo  $\beta$  el cual puede reescribirse en función del ángulo  $\theta$ , ángulo que se consideró en las mediciones, de la siguiente manera:  $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta$ . Por lo tanto, la ecuación de movimiento que se resolvió fue:

$$\ddot{\theta} = \frac{15}{2} \frac{\epsilon_0 E^2 f}{\rho a^3 (q^3 + q)} \sin(2\theta) - \frac{30\mu g}{\rho a^3 (q^3 + q)} \dot{\theta} \quad (2.2)$$

donde la razón de los ejes se definió como el cociente entre el ancho y el largo del cristal de hielo tipo columna,  $q = \frac{L'}{W}$ , y  $a$  como la mitad del ancho de la columna ( $W$ ).

Se tomaron los siguientes valores de constantes:

- $\epsilon_0 = 8,854187817 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$
- $\rho = 600 \frac{kg}{m^3}$ , densidad de los cristales de hielo para una temperatura de  $-8^\circ C$  (Ryan et al. 1976 [24])
- $\mu = 1,71 \times 10^{-5} \frac{Ns}{m^2}$

La ecuación de movimiento fue resuelta para los distintos valores de campo eléctrico utilizados y para los distintos pares de longitudes,  $L'$  y  $W$ , obtenidas de las mediciones realizadas. De las soluciones obtenidas, se obtuvo el tiempo que tardaría en orientarse un cristal de hielo de cierto tamaño en presencia de un campo eléctrico. Dicho tiempo se denota como  $T_f$ .

También se calculó el tiempo de interacción entre los cristales de hielo y el campo eléctrico. Utilizando la velocidad de caída de los cristales de hielo y el largo de las placas, se calculó el tiempo que emplea el cristal en recorrer la región de campo eléctrico. Dicho tiempo se denotó por  $T_p$ . Para los cálculos se consideró un campo eléctrico horizontal, uniforme y constante. Tampoco se consideraron los efectos de borde.

## Capítulo 3

# Análisis de datos y resultados

### 3.1. Mediciones de laboratorio

Con el fin de determinar si las mediciones de las dimensiones de los cristales medidos por la cámara son representativos de los que se encuentran en la nube, se compararon las mediciones de tamaños realizados por ambos métodos. La figura 3.1 muestra la relación entre el largo ( $L'$ : longitud medida de las imágenes y  $L$ : longitud medida de las muestras de formvar) y el ancho  $W$  de los cristales de hielo tipo columna, donde el error de los tamaños se encuentra contenido en el punto.

En dicha figura (3.1) se muestran las mediciones de los tamaños de los cristales obtenidos a partir de las imágenes para los distintos valores de campo eléctrico utilizados ( $(27,4 \pm 0,5) \frac{kV}{m}$ ,  $(13,7 \pm 0,2) \frac{kV}{m}$ ,  $(2,74 \pm 0,05) \frac{kV}{m}$ ,  $(1,37 \pm 0,02) \frac{kV}{m}$  y sin campo) y aquellos obtenidos de las muestras de formvar. También se muestra, a través de la línea sólida, la relación entre  $W - L$  presentada por Ono (1969 [21] y 1970 [22]) para cristales de hielo naturales tipo columna.

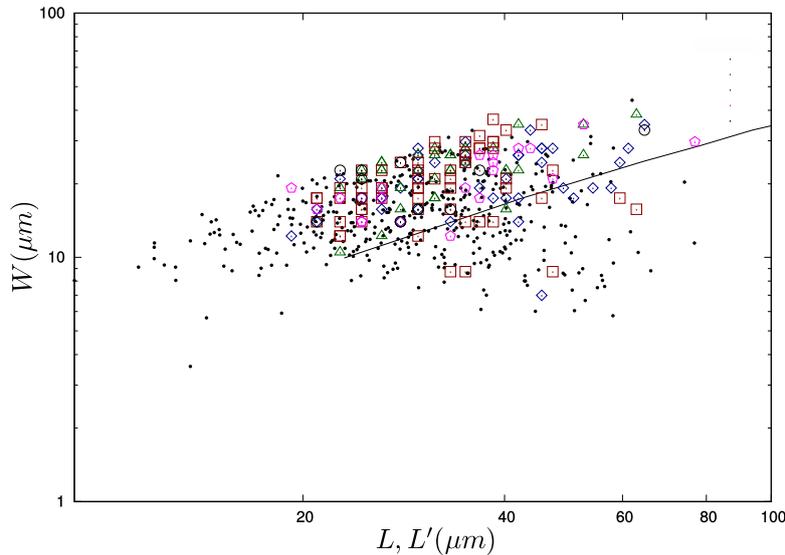


Figura 3.1: Ancho ( $W$ ) de los cristales tipo columna en función de la longitud de las muestras ( $L$ -círculos negros) y la longitud de los cristales de hielo obtenidos de las imágenes ( $L'$ ). Para este último caso se muestran los tamaños para los distintos campos eléctricos utilizados (figuras sin relleno:  $(27,4 \pm 0,5) \frac{kV}{m}$ -rombo,  $(13,7 \pm 0,2) \frac{kV}{m}$ -triángulo,  $(2,74 \pm 0,05) \frac{kV}{m}$ -cuadrado,  $(1,37 \pm 0,02) \frac{kV}{m}$ -pentágono y sin campo-círculo). La línea sólida muestra la relación entre  $W - L$  presentada por Ono (1969 [21] y 1970 [22]) para cristales de hielo naturales tipo columna.

En esta figura se observa que los tamaños de los cristales de hielo obtenidos de las muestras y

aquellos obtenidos de las imágenes son indistinguibles dentro de la dispersión observada. Los tamaños de las muestras se distribuyen en un rango que abarca a los tamaños de los cristales de hielo obtenidos de las imágenes. No se observa ninguna tendencia en los tamaños medidos de las imágenes para los distintos campos eléctricos utilizados respecto a los que se observan en las nubes.

La figura 3.2 muestra la distribución de longitudes de los cristales de hielo para distintos intervalos de  $W$  ( $5 - 15\mu m$ ,  $15 - 25\mu m$  y  $25 - 35\mu m$ ). La caja izquierda representa la distribución de longitudes de las muestras ( $L'$ ) mientras que la caja derecha representa la distribución de longitudes de las réplicas plásticas ( $L$ ). Las líneas continuas dentro de las cajas representan las medias de las longitudes y las líneas discontinuas las medianas de las longitudes. Los bordes de la caja indican los rangos de longitud para los cuales se incluyen el 25 % y el 75 % de los datos totales. Los guiones pequeños hacen referencia al 5 y 95 percentil. Por último, los puntos negros hacen referencia a los valores máximos y mínimos.

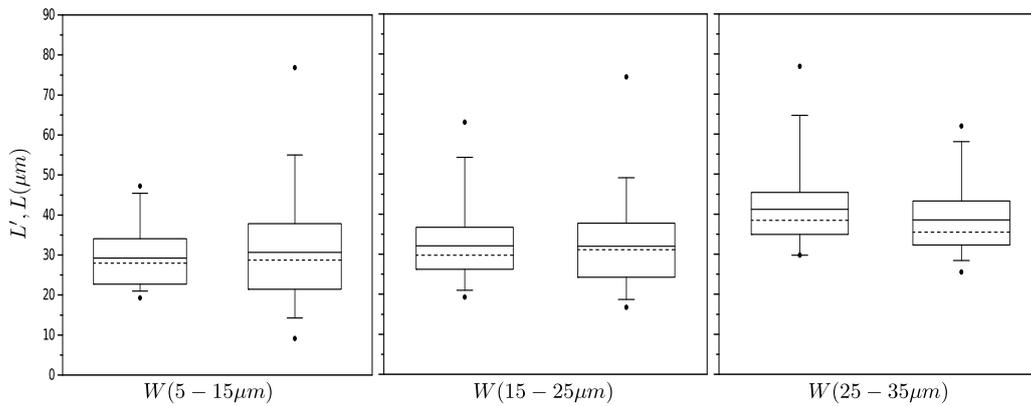


Figura 3.2: Gráfico de cajas de la longitud  $L'$  de las muestras (caja izquierda) y de la longitud  $L$  de las réplicas plásticas (caja derecha) para distintos intervalos del ancho de los cristales  $W$ . La línea punteada hace referencia a la mediana de los datos y la línea continua a la media.

Los valores de longitudes media y mediana para  $L'$ , según el intervalo de  $W$  obtenidos, fueron:

- $W(5 - 15\mu m)$ ,  $29,2\mu m$  y  $27,9\mu m$
- $W(15 - 25\mu m)$ ,  $32,1\mu m$  y  $29,7\mu m$
- $W(25 - 35\mu m)$ ,  $41,2\mu m$  y  $38,4\mu m$

Para el caso de  $L$  (réplicas plásticas):

- $W(5 - 15\mu m)$ ,  $30,6\mu m$  y  $28,7\mu m$
- $W(15 - 25\mu m)$ ,  $32,0\mu m$  y  $31,1\mu m$
- $W(25 - 35\mu m)$ ,  $38,5\mu m$  y  $35,5\mu m$

De la comparación entre los dos conjuntos de mediciones, se observa que la mediana de  $L$  es mayor a la de  $L'$  a excepción del intervalo  $25 - 35\mu m$  de  $W$  donde la mediana de  $L'$  es mayor que la de  $L$ . Para el caso de la longitud media, sólo en el intervalo  $W(5 - 15\mu m)$  de  $L$  supera a la de  $L'$ . Estos resultados permiten concluir que los cristales a los que se le mide la velocidad de caída son representativos del conjunto de los cristales de la nube.

Por otro lado, del ajuste presentado por Ono (1969, [21] y 1970, [22]) y de la distribución de tamaños de los cristales de hielo obtenidos de las muestras y las imágenes, se puede concluir que los

crisales de hielo, formados en los experimentos, son una buena representación de crisales de hielo naturales.

Las velocidades de caída de los crisales tipo columna fueron determinadas mediante un programa de seguimiento (*tracking*), denominado Tracker 4.9.8, el cual nos permitió marcar los crisales de hielo sobre las imágenes y seguir su trayectoria de manera automática. El programa arroja una tabla de posiciones en las direcciones  $X$  e  $Y$  y el tiempo asociado a cada posición para cada cristal de hielo marcado.

Para obtener las velocidades, vertical (velocidad de caída) y horizontal, se realizó un ajuste lineal a los datos obtenidos de las tablas (posición-tiempo) cuya pendiente es la velocidad asociada al cristal de hielo. Para el ajuste sólo se tomaron crisales de hielo que fueron observados en, al menos, 5 imágenes. En todos los ajustes analizados se encontró un coeficiente de regresión  $R^2 > 0,99$ , indicando que los crisales se movían a velocidad constante.

La figura 3.3 muestra el comportamiento de la velocidad horizontal (3.3a) y la velocidad vertical (3.3b) en función de la dimensión máxima medida  $L'$ .

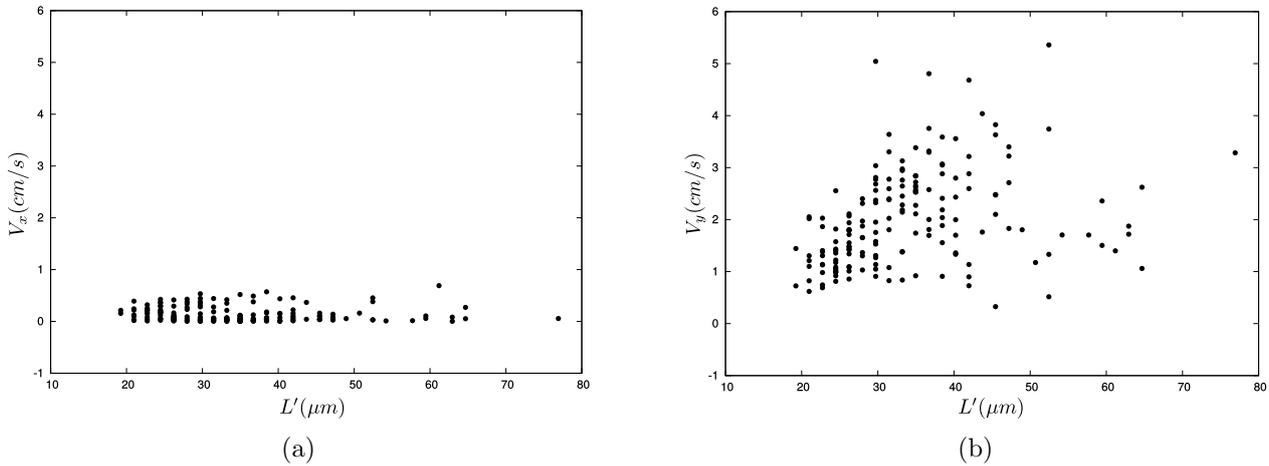


Figura 3.3: (a) Velocidad de caída de crisales de hielo tipo columna en la dirección  $X$  ( $V_x$ ) en función de la longitud  $L'$ . (b) Velocidad de caída de crisales de hielo tipo columna en la dirección  $Y$  ( $V_y$ ) en función de la longitud  $L'$ .

En la figura 3.3, puede observarse que las velocidades  $V_x$  son un orden de magnitud más chico que las velocidades de caída  $V_y$  y también que esta velocidad no depende del tamaño de los crisales de hielo. Estos resultados, junto con los valores de  $R^2$  obtenidos en los ajustes, nos aseguran que los crisales de hielo no se vieron afectados por movimientos del aire dentro del túnel de acrílico debido a turbulencia y a convección y, de esta manera, podemos afirmar que las velocidades de caída  $V_y$  medidas son efectivamente velocidades terminales de los crisales de hielo en aire quieto.

La figura 3.4 muestra la velocidad de caída como función de la longitud  $L'$  de los crisales de hielo para los distintos campos eléctricos utilizados. En esta figura se puede observar que a medida que aumenta la longitud del cristal de hielo,  $L'$ , la velocidad terminal del cristal de hielo aumenta. Esto coincide con las observaciones reportadas por otros investigadores (Jayaweera y Ryan ([13]), Kajikawa ([15]), Michaeli([20]), Bürgesser et al. ([3])). Además, puede verse que los valores de campo eléctrico aplicados no afectan a la velocidad de caída ya que estos valores son indistinguibles, dentro de la dispersión experimental, para las distintas mediciones.

Siguiendo lo propuesto por Bürgesser et al. ([3]), la figura 3.5 muestra la velocidad de caída en

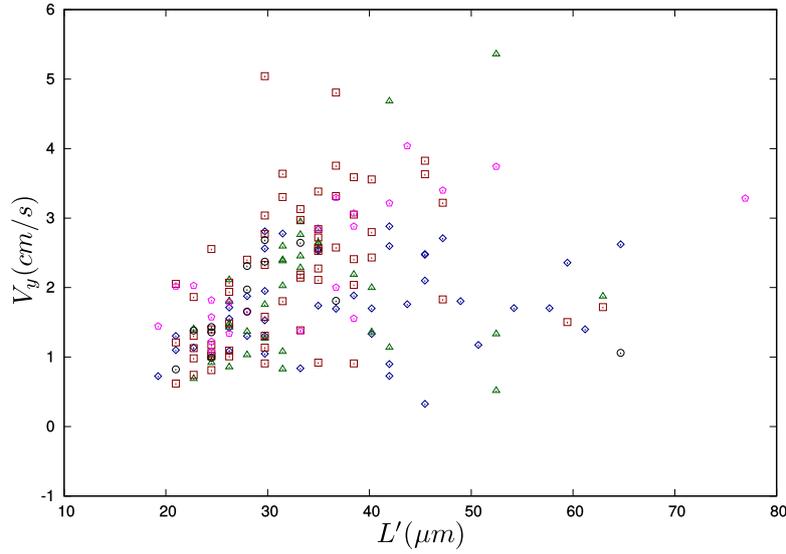


Figura 3.4: Velocidad de caída de cristales de hielo tipo columna en función de la longitud  $L'$  para distintos campos  $((27, 4 \pm 0, 5) \frac{kV}{m}$ -rombo,  $(13, 7 \pm 0, 2) \frac{kV}{m}$ -triángulo,  $(2, 74 \pm 0, 05) \frac{kV}{m}$ -cuadrado,  $(1, 37 \pm 0, 02) \frac{kV}{m}$ -pentágono y sin campo-círculo).

función de la capacidad de los cristales de hielo ( $C$ ) dada por la ecuación 1.1 para los distintos valores de campo eléctrico utilizados.

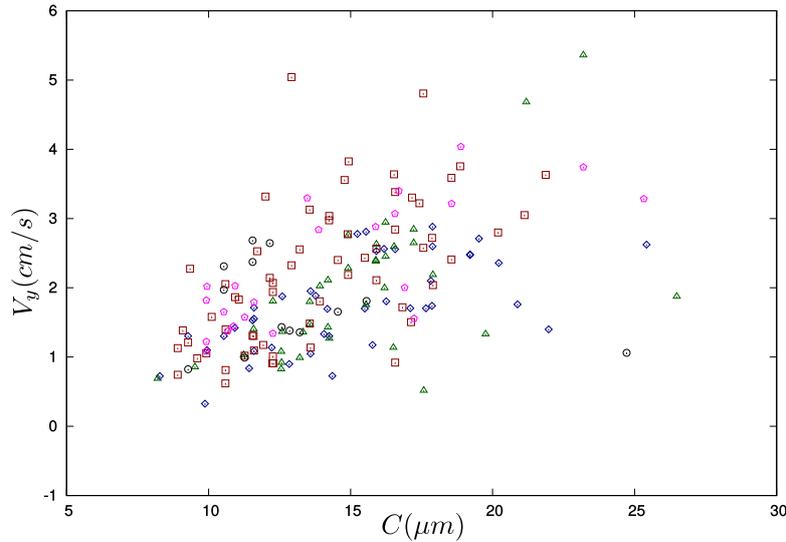


Figura 3.5: Velocidad de caída de cristales de hielo en función de la capacidad para distintos campos  $((27, 4 \pm 0, 5) \frac{kV}{m}$ -rombo,  $(13, 7 \pm 0, 2) \frac{kV}{m}$ -triángulo,  $(2, 74 \pm 0, 05) \frac{kV}{m}$ -cuadrado,  $(1, 37 \pm 0, 02) \frac{kV}{m}$ -pentágono y sin campo-círculo).

Se puede observar que la dispersión de los datos experimentales de la velocidad de caída disminuye, cuando la capacidad es usada como variable, en comparación con la dispersión observada cuando se utiliza el parámetro de longitud  $L'$  (3.5). Esto permite confirmar que la capacidad del cristal de hielo es una longitud característica del mismo, en acuerdo con lo propuesto por Westbrook ([29]) y observado por Bürgesser et al. ([3]).

Dado que las velocidades de caída medidas no muestran una dependencia con el valor de campo eléctrico, se encontró una relación entre la velocidad de caída de los cristales de hielo y la capacidad de los mismos utilizando todas las mediciones realizadas, la cual se muestra en la figura 3.6.

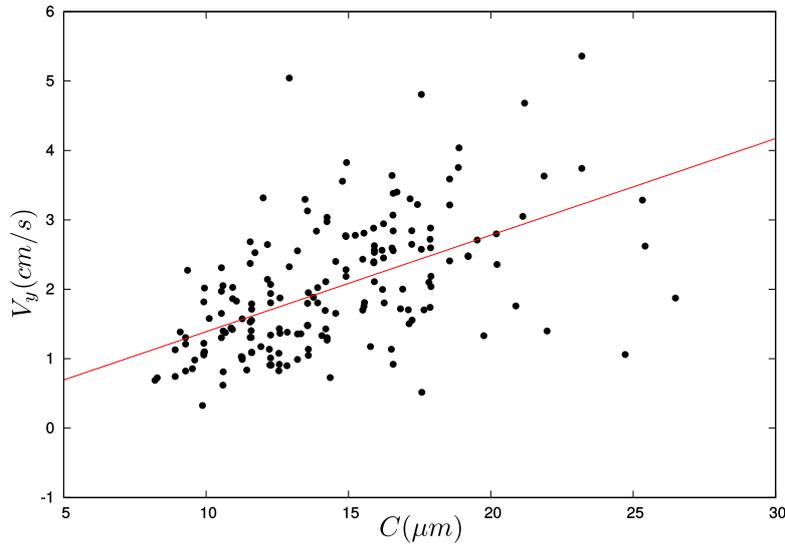


Figura 3.6: Relación entre la velocidad terminal del cristal de hielo ( $V_y$ ) y la capacidad del cristal ( $C$ ).

El ajuste entre  $V_y$  y  $C$  está dado por la ecuación

$$V_y = a * C$$

donde  $a = (0,139 \pm 0,004) \frac{cm}{s\mu m}$  con un  $R^2 = 0,87295$ . La ordenada al origen es cero ya que si el cristal es muy pequeño la velocidad tiende a cero.

Dada la dispersión de los datos, el ajuste realizado no es la parametrización mas adecuada para representar a los mismos. Sin embargo, provee de una relación simple que permite obtener la velocidad de caída a partir de mediciones de tamaño realizadas por medio de satélites y de radares meteorológicos.

Se comparó el ajuste presentado por Bürgesser et al. ([3]),  $V_y = (0,132 \pm 0,002) \frac{cm}{s\mu m} * C$ , con el ajuste que se obtuvo de las presentes mediciones. Se observa que ambas pendientes discrepan. Se encontró un error relativo porcentual entre las pendientes del 0,7%.

De acuerdo a Heymsfield (1979, [10]), la masa de los cristales de hielo es el parámetro principal que determina el proceso de sedimentación. Por lo tanto, la dispersión observada en los datos medidos se podría deber a la variación en la masa de los cristales de hielo ya que, de acuerdo con el diagrama de hábitos cristalino (Figura 2.2), a la temperatura que se realizaron los experimentos pueden existir columnas huecas y sólidas. Para tener en cuenta la variabilidad de este parámetro, se calcularon los números adimensionales  $Best$ ,  $\mathcal{B}_e$ , y  $Reynolds$ ,  $\mathcal{R}_e$ .

Para ello se utilizaron las ecuaciones 1.3 y 1.2 donde se estableció como longitud característica de la partícula a la capacidad de los cristales de hielo tipo columna,  $D = 2C$ . Para determinar el valor del número  $Best$  es necesario conocer la masa del cristal de hielo. Sin embargo, este parámetro no fue medido y por ello se estimó su valor asumiendo una densidad aparente constante y utilizando geometría. La densidad de los cristales de hielo fue estimada usando la parametrización para columnas presentada por Ryan ([24]). El valor del área  $A$  fue calculado usando los valores medidos de  $L'$ ,  $W$  y  $\theta'$  asumiendo geometría cilíndrica.

La figura (3.7) muestra el número  $\mathcal{B}_e$  en función de  $\mathcal{R}_e$  para los distintos campos eléctricos utilizados.

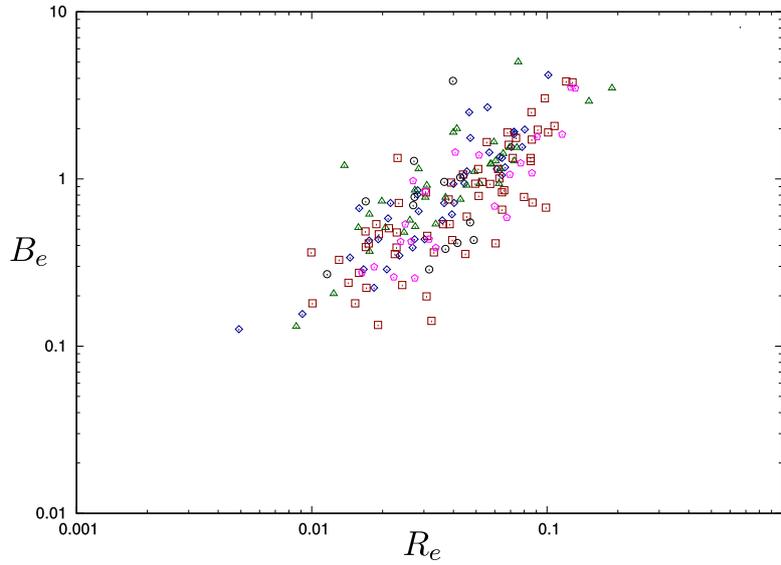


Figura 3.7: Número  $\mathcal{B}_e$  (*Best*) versus el número  $\mathcal{R}_e$  (*Reynolds*) para cristales de hielo tipo columna. Se muestran para los distintos campos utilizados  $(27, 4 \pm 0, 5) \frac{kV}{m}$ -rombo,  $(13, 7 \pm 0, 2) \frac{kV}{m}$ -triángulo,  $(2, 74 \pm 0, 05) \frac{kV}{m}$ -cuadrado,  $(1, 37 \pm 0, 02) \frac{kV}{m}$ -pentágono y sin campo-círculo).

De la figura 3.7 se observa que no existe una dependencia con los valores de campo eléctrico utilizados.

También se encontró una ley de potencia empírica  $\mathcal{B}_e - \mathcal{R}_e$  (ecuación 1.4) que se muestra en la figura 3.8, donde  $b = (0,94 \pm 0,07)$  y  $a = (17 \pm 3)$ , con un  $R^2 = 0,62583$ . Esta ley de potencia se obtuvo utilizando todos los puntos experimentales, sin importar el campo eléctrico aplicado.

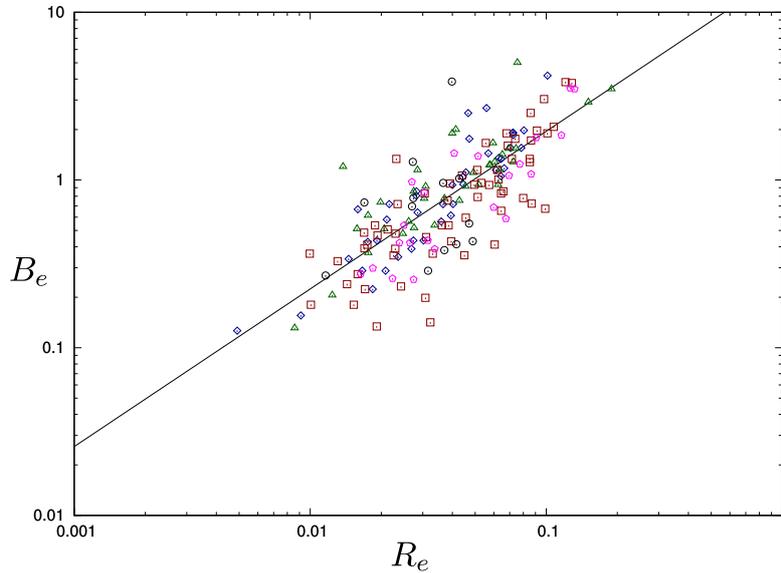


Figura 3.8: Número  $\mathcal{B}_e$  (*Best*) versus el número  $\mathcal{R}_e$  (*Reynolds*) para cristales de hielo tipo columna. Se muestran para los distintos campos utilizados  $(27, 4 \pm 0, 5) \frac{kV}{m}$ -rombo,  $(13, 7 \pm 0, 2) \frac{kV}{m}$ -triángulo,  $(2, 74 \pm 0, 05) \frac{kV}{m}$ -cuadrado,  $(1, 37 \pm 0, 02) \frac{kV}{m}$ -pentágono y sin campo-círculo). La línea sólida que se muestra en la figura hace referencia a la ley de potencia para esta distribución de puntos.

La figura 3.9 muestra distintos ajustes realizados por trabajos anteriores. La línea de color azul representa el ajuste presentado por Bürgesser et al. (2016,[3]). Las líneas de color rojo representan los ajustes de los datos presentados por Juan Pablo Giovacchini (2017, [8]), donde la línea continua roja hace referencia a cristales de hielo con orientación vertical y la línea punteada roja a los cristales de

hielo con orientación horizontal.

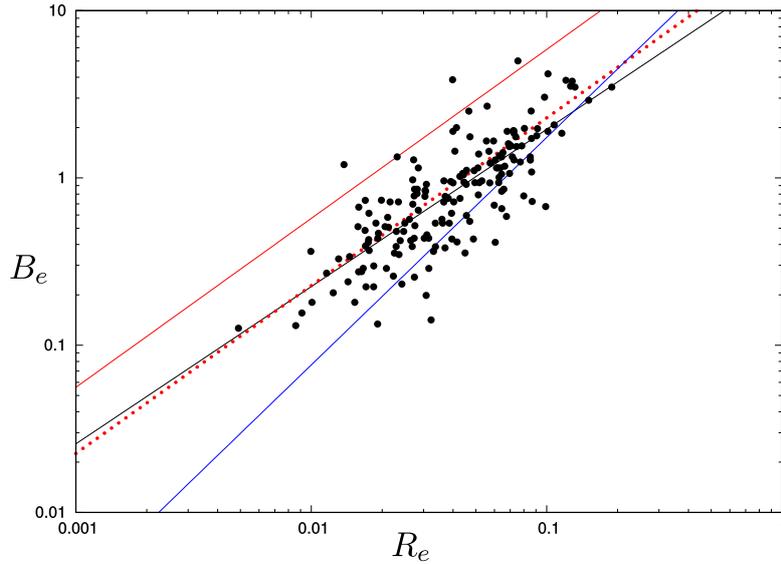


Figura 3.9: Número  $B_e$  (*Best*) versus el número  $R_e$  (*Reynolds*) para cristales de hielo tipo columna. Las líneas rojas muestran los ajustes realizados por Giovacchini (2017, [8]), donde la línea continua hace referencia a cristales de hielo con orientación vertical y la línea punteada hace referencia a cristales de hielo con orientación horizontal. La línea azul representa el ajuste presentado por Bürgesser et al. (2016, [3]). La línea negra representa la ley de potencia para la distribución de puntos que se muestra.

Se comparó el ajuste de la distribución de puntos medidos con el presentado por Bürgesser et al. (2016, [3]). Se encontró un error relativo porcentual del 33 % para el caso de la variable  $a$  y del 24 % para el caso de la variable  $b$ . Dicho error puede deberse a que los cristales de hielo medidos presentan mayor área contra el flujo de aire (debido a que se orientan en la dirección del campo eléctrico) en comparación a los cristales de hielo cayendo aleatoriamente presentados en el trabajo de Bürgesser et al. (2016, [3]). Esto puede verse en el buen acuerdo que presenta el ajuste de datos de Giovacchini (2017, [8]) en el caso de cristales de hielo cayendo de manera horizontal y los datos medidos en este trabajo.

Las figuras 3.10 y 3.11 muestran los ángulos de caída de los cristales de hielo tipo columna en función de la longitud característica  $C$  y del número de *Reynolds*, respectivamente, para los distintos campos eléctricos utilizados.

En ambos ejes, vertical y horizontal, se encuentran la capacidad para la imagen 3.10 y el número de *Reynolds* para la imagen 3.11. Ambas variables se mantienen fijas radialmente. Sobre el arco de la gráfica encontramos los distintos ángulos de orientación de los cristales de hielo.

En rasgos generales, dichas figuras muestran una dependencia de la orientación de los cristales de hielo tipo columna según el valor del campo eléctrico utilizado y el tamaño de los cristales de hielo. En ambos casos,  $C$  y  $R_e$  muestran las mismas tendencias. Para valores de campo eléctrico alto los cristales de hielo se encuentran orientados, mientras que para valores de campo eléctrico bajos no. Se observa que el ángulo de orientación depende del tamaño de los cristales.

En las figuras 3.10(d) y 3.11(d), donde el valor de campo eléctrico es de  $(27,4 \pm 0,5) \frac{V}{m}$ , todos los cristales muestran un ángulo de caída de  $90^\circ$ . El campo eléctrico es lo suficientemente fuerte como para orientar a todos los cristales en el tiempo  $T_p$ , es decir, en el tiempo que tardan en recorrer los cristales de hielo la región de campo eléctrico. Esta observación acuerda con lo reportado por Foster y

Hallet (2002, [6] y 2008, [7]) quienes obtuvieron un tiempo de orientación, para cristales de hielo tipo placas, de decenas de microsegundos para campos eléctricos de magnitud mayor a 10 kV/m.

Para los otros valores de campo eléctrico (3.10(a)-(c) y 3.11(a)-(c)), se observa que no todos los cristales de hielo están orientados. A medida que el valor del campo disminuye, aumenta la cantidad de cristales sin orientar. Además, se puede apreciar que la orientación de los cristales depende del tamaño de los mismos.

Las figuras 3.11(b) y 3.10(b) muestran mayor cantidad de cristales sin orientar que en el caso de las figuras 3.11(a) y 3.10(a) a pesar de que el campo eléctrico de las figuras (b) es mayor que en el caso de las figuras (a). Esto se debe a que la cantidad de datos registrados para cada caso es distinta, por lo que puede parecer mayor la cantidad de cristales sin orientar pero el porcentaje sobre el total de muestras es mayor para el campo eléctrico menor. Con respecto al tamaño de los cristales de hielo y a la orientación, se observa que en las figuras 3.11(a) y (c), y las figuras 3.10 (a) y (c), los cristales de hielo sin orientar son los de menor tamaño. También, el hecho de que los cristales de hielo no se orienten podría deberse a que el tiempo de caída en la región de campo eléctrico no es suficiente y, por lo tanto, los cristales de hielo no alcanzan a orientarse en la dirección del campo eléctrico.

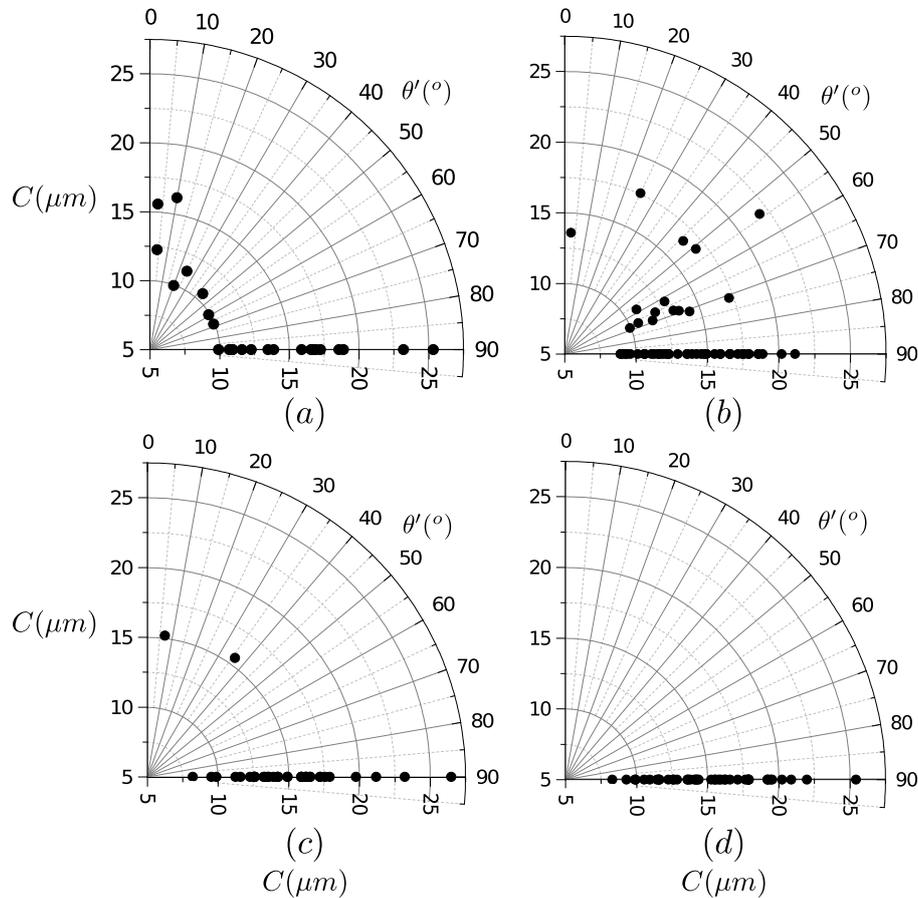


Figura 3.10: Ángulo de caída del cristal en función de la capacidad  $C$  para los distintos valores de campo eléctrico utilizados: (a)  $(1,37 \pm 0,02) \frac{kV}{m}$ , (b)  $(2,74 \pm 0,05) \frac{kV}{m}$ , (c)  $(13,7 \pm 0,2) \frac{kV}{m}$  y (d)  $(27,4 \pm 0,5) \frac{kV}{m}$ .

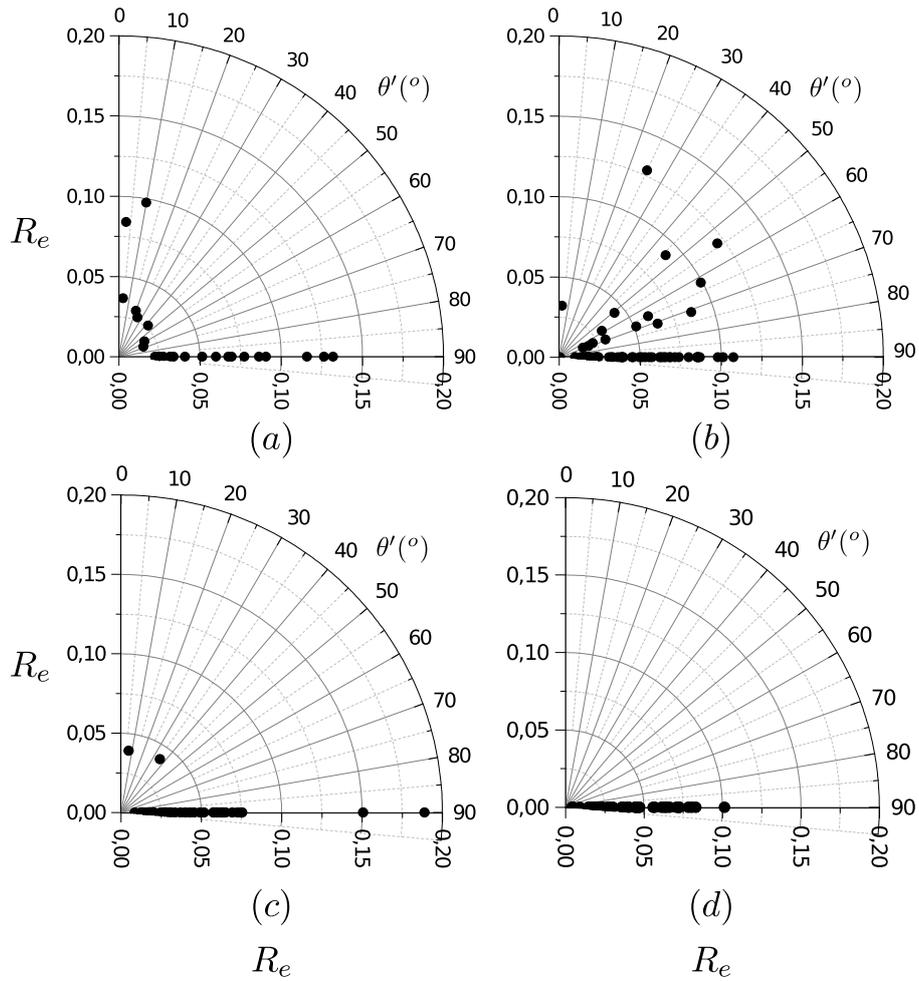


Figura 3.11: Ángulo de caída del cristal en función del parámetro  $R_e$  para los distintos valores de campo eléctrico utilizados: (a)  $(1,37 \pm 0,02) \frac{kV}{m}$ , (b)  $(2,74 \pm 0,05) \frac{kV}{m}$ , (c)  $(13,7 \pm 0,2) \frac{kV}{m}$  y (d)  $(27,4 \pm 0,5) \frac{kV}{m}$ .

## 3.2. Simulaciones

Las figuras 3.12a y 3.12c muestran el tiempo que tarda en orientarse un cristal de hielo,  $T_f$ , en función del largo  $L'$  para distintos ángulos iniciales y magnitudes de campos eléctricos. La figura 3.12b muestra el tiempo que tarda en orientarse un cristal del hielo,  $T_f$ , en función de la razón de aspecto  $q$ . La figura 3.12a y 3.12b muestran los distintos ángulos iniciales utilizados en las simulaciones ( $80^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $20^\circ$ ) para un campo eléctrico fijo de módulo igual a  $(2,74 \pm 0,05) \frac{kV}{m}$ . En cambio, en la figura 3.12c se fijó el ángulo inicial igual a  $45^\circ$  para los distintos campos utilizados en las mediciones.

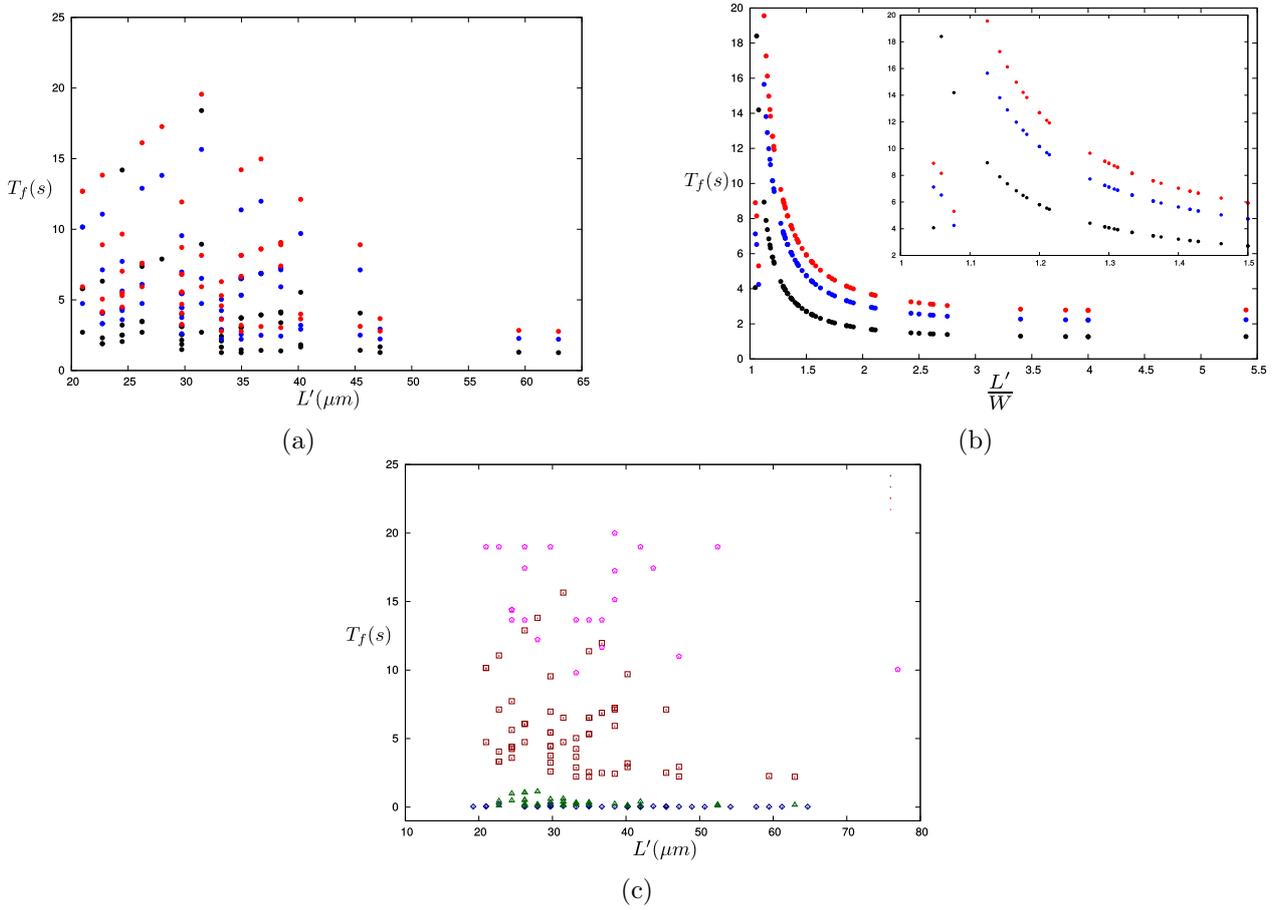


Figura 3.12: (a) Para un campo eléctrico igual a  $(2,74 \pm 0,05) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ , la figura muestra el tiempo que tarda en orientarse el cristal de hielo ( $T_f$ ) en función del largo del cristal ( $L'$ ). Los distintos ángulos iniciales utilizados fueron: rojo- $\theta_0 = 20$ , azul- $\theta_0 = 45$  y negro- $\theta_0 = 80$ . (b) Para un campo eléctrico igual a  $(2,74 \pm 0,05) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ , la figura muestra el tiempo que tarda en orientarse el cristal de hielo ( $T_f$ ) en función de la razón de aspecto ( $q$ ). Los distintos ángulos iniciales utilizados fueron: rojo- $\theta_0 = 20$ , azul- $\theta_0 = 45$  y negro- $\theta_0 = 80$ . (c) Para un ángulo inicial igual a  $\theta_0 = 45$ , la figura muestra el tiempo que tarda en orientarse el cristal de hielo ( $T_f$ ) en función del largo del cristal ( $L'$ ). Los distintos campos eléctricos utilizados fueron:  $(27,4 \pm 0,5) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ -rombo,  $(13,7 \pm 0,2) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ -triángulo,  $(2,74 \pm 0,05) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ -cuadrado,  $(1,37 \pm 0,02) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ -pentágono.

En la figura 3.12a se puede apreciar una diferencia de un orden de magnitud en los tiempos de orientación de cristales de hielo de igual tamaño que tengan un ángulo inicial entre  $80^\circ$  y  $20^\circ$ . Es decir, que los cristales que tengan un ángulo inicial pequeño tardarán más en orientarse que aquellos que se encuentren próximos al ángulo de orientación con el campo eléctrico (en nuestro caso  $90^\circ$ ). Puede observarse que con el aumento de  $L'$  el tiempo de orientación disminuye.

En la figura 3.12b se observa claramente la dependencia  $T_f$  con respecto a la razón de aspecto  $q$ . A medida que aumenta la razón de aspecto, disminuye el tiempo de orientación  $T_f$ . Al igual que en la figura 3.12a, se observa que a medida que el ángulo inicial aumenta el tiempo de orientación disminuye. También se observa un cambio en el comportamiento de los puntos a medida que  $q$  se aproxima a 1, es decir, a medida que  $L'$  se aproxima a  $W$ . Esto puede deberse a cómo se definió la ecuación de movimiento (2.2). A medida que  $L'$  se aproxima  $W$ , el cristal de hielo deja de tener una dirección privilegiada y el dipolo eléctrico que forma el cristal de hielo disminuye en magnitud.

En la figura 3.12c puede observarse la gran dependencia que tiene el tiempo de orientación  $T_f$  con el campo eléctrico utilizado. A medida que aumenta el campo eléctrico el tiempo disminuye, existiendo una diferencia de 2 o hasta 3 ordenes de magnitud en los tiempos de orientación entre el campo eléctrico de  $(27,4 \pm 0,5) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$  y  $(1,37 \pm 0,02) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$ .

En la figura 3.13 se muestra el cociente entre el tiempo que tarda en orientarse el cristal calculado mediante las simulaciones ( $T_f$ ) y el tiempo que tarda en orientarse los cristales dadas las velocidades obtenidas de las mediciones ( $T_p$ ) en función del largo de los cristales de hielo tipo columna ( $L'$ ). Para este caso se fijó el ángulo inicial igual a  $45^\circ$ .

Por como se definieron los tiempos  $T_f$  y  $T_p$ , se puede ver en la gráfica que si  $\frac{T_f}{T_p} > 1$ , los cristales de hielo no se orientarían ya que el tiempo  $T_f > T_p$ . En caso contrario,  $\frac{T_f}{T_p} < 1$ , los cristales de hielo se encontrarían orientados.

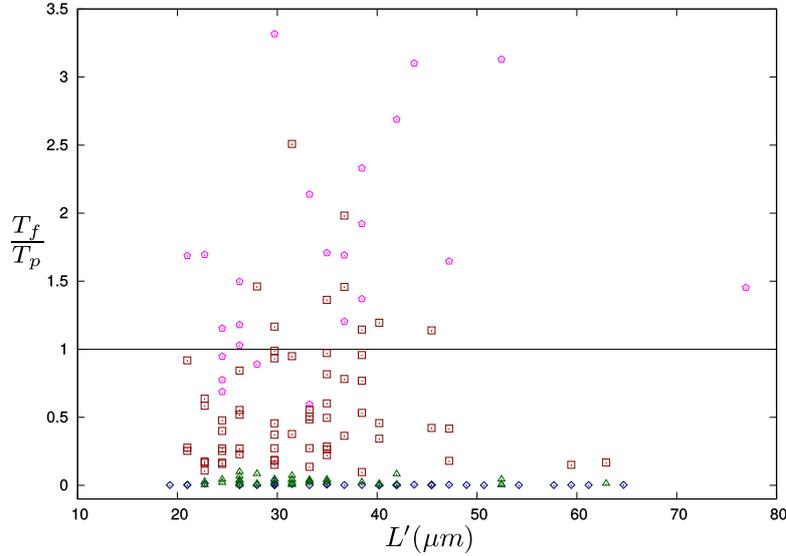


Figura 3.13: Cociente entre los tiempos  $T_f$  y  $T_p$  en función del largo del cristal,  $L'$ , para distintos campos eléctricos utilizados  $(27, 4 \pm 0, 5) \frac{kV}{m}$ -rombo,  $(13, 7 \pm 0, 2) \frac{kV}{m}$ -triángulo,  $(2, 74 \pm 0, 05) \frac{kV}{m}$ -cuadrado,  $(1, 37 \pm 0, 02) \frac{kV}{m}$ -pentágono).

Puede observarse en la gráfica 3.13 que los cristales de hielo que se encuentran en presencia de los campos eléctricos más fuertes se encuentran orientados ya que se ubican debajo de la recta igual a 1. No se observa algún comportamiento con respecto al largo  $L'$ .

En la figura 3.14 se muestra, al igual que en la figura anterior, el cociente de los tiempos  $T_f$  y  $T_p$  en función del largo del cristal de hielo tipo columna,  $L'$ . La diferencia con el gráfico anterior es que se compara las orientaciones establecidas por las simulaciones con las orientaciones observadas en las imágenes de las mediciones. Los puntos que se encuentran rellenos muestran los cristales de hielo que se observaron orientados en las imágenes de las mediciones, de lo contrario no se encuentran orientados en las mediciones.

Puede observarse que no en todos los casos coincide la orientación observada en las mediciones con la orientación que muestra las simulaciones realizadas. Para el caso de aquellos cristales que según las simulaciones deberían estar orientados (los que se encuentran por debajo de la recta igual a 1) pero en las mediciones no se observan orientados puede deberse a que, en el momento de interactuar con el campo, entraron con un ángulo inicial muy pequeño. Como se muestra en la figura 3.12a, el tiempo que tarda en orientarse el cristal dependerá del ángulo inicial. Además puede observarse que la falta de coincidencia sucede en campos de menor magnitud, donde el tiempo de orientación es mayor (3.12c). Para aquellos cristales de hielo que no coinciden y se encuentran sobre la recta igual a 1 se puede hacer una suposición parecida a la anterior. Se puede suponer que los cristales ingresaron con un ángulo inicial próximo a la orientación con el campo, lo cual hizo que el tiempo de interacción con el campo

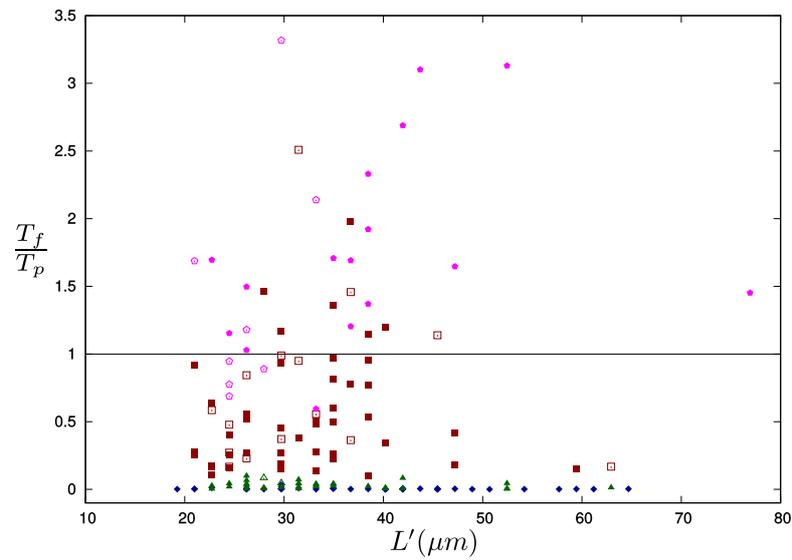


Figura 3.14: Cociente entre los tiempos  $T_f$  y  $T_p$  en función del largo del cristal,  $L'$ , para distintos campos eléctricos utilizados  $((27, 4 \pm 0, 5) \frac{kV}{m}$ -rombo,  $(13, 7 \pm 0, 2) \frac{kV}{m}$ -triángulo,  $(2, 74 \pm 0, 05) \frac{kV}{m}$ -cuadrado,  $(1, 37 \pm 0, 02) \frac{kV}{m}$ -pentágono). Las figuras rellenas denotan a los cristales que se encuentran orientados en las mediciones realizadas, de lo contrario figuran como no orientados en las mediciones.

eléctrico sea el suficiente para que los cristales de hielo se orienten a pesar de que la magnitud del mismo sea pequeño.

# Capítulo 4

## Conclusiones

### 4.1. Mediciones de laboratorio

En este trabajo se logró medir la velocidad de caída, tamaño y orientación de cristales de hielo tipo columnas en presencia de un campo eléctrico perpendicular a la dirección de caída de los cristales de hielo. Los tamaños de los cristales de hielo utilizados en las mediciones se encuentran entre los  $10 - 100\mu m$  y con una relación de aspecto entre 1 y 3 (95 % de los cristales de hielo), los cuales son representativos de cristales de hielo naturales.

Se encontró que la capacidad  $C$  es el parámetro que mejor representa a la velocidad de caída de los cristales de hielo tipo columna en acuerdo con resultados previos. También se encontró una relación lineal entre la velocidad de caída y la capacidad. Dicha relación discrepa con respecto a la reportada en trabajos previos (Bürgesser et al. 2016, [3]) pero tan solo con un error relativo porcentual del 0,7 %. Si bien esta relación no parece ser la más adecuada, dado que no tiene en cuenta parámetros relevantes para los procesos de sedimentación como es la masa de los cristales de hielo, es suficientemente simple para ser utilizada en modelos numéricos.

Con respecto a la interacción entre cristales de hielo y el campo eléctrico, se encontró que el campo eléctrico horizontal no afecta a la velocidad de caída de los cristales dentro de la dispersión observada. Si bien, diferentes orientaciones generan un cambio en el área que el cristal de hielo le ofrece al flujo y este es un parámetro que afecta al proceso de sedimentación, el cambio esperado en la velocidad de caída es del orden del 10 – 20 %, cambio que no se puede observar experimentalmente. Por otro lado, se observó que el campo eléctrico sí afecta a la orientación de los cristales de hielo, produciendo una alineación del eje principal del cristal de hielo tipo columna con el campo eléctrico horizontal. La orientación de los cristales de hielo depende de su tamaño y del módulo del campo eléctrico aplicado, lo cual concuerda con la teoría y con reportes experimentales previos.

Se encontró una relación entre el número *best* ( $B_e$ ) y el número de *Reynolds* ( $R_e$ ) del tipo  $B_e = aR_e^b$ . Dicha relación discrepa con respecto a la reportada en trabajos previos (Bürgesser et al. 2016, [3]) con un error relativo porcentual del 33 % para el caso de la variable  $a$  y del 24 % para el caso de la variable  $b$ . Sin embargo, presentan un buen acuerdo con los datos reportados para cristales de hielo cayendo con orientación horizontal presentado por Giovacchini (2017, [8]).

## 4.2. Simulaciones

Con respecto a las simulaciones realizadas, se resolvió la ecuación de movimiento para un cristal de hielo que se encuentra bajo el efecto del torque eléctrico y el torque de Drag. A partir de esto, se obtuvo el tiempo que tarda en orientarse un cristal de hielo ( $T_f$ ) en presencia de un campo eléctrico uniforme.

Se encontró que el tiempo de orientación varía según el módulo del campo eléctrico aplicado, el ángulo inicial y el largo de los cristales de hielo. También, se calculó el tiempo que tarda en recorrer un cristal de hielo el largo de las placas capacitivas según la velocidad del mismo ( $T_p$ ). Se comparó ambos tiempos con el fin de obtener información acerca de la orientación de los cristales.

Se comparó la orientación de los cristales de hielo prevista por la simulación con las observadas según las mediciones y se encontró un acuerdo general entre las observaciones experimentales y los resultados numéricos.

# Bibliografía

- [1] Ávila EE, Lighezzolo RA, Castellano NE, Pereyra RG, Bürgesser RE. 2013. Laboratory measurements of charge separation in low liquid water content conditions and low impact velocity. *J. Geophys. Res. Atmos.* **118**: 6680-6687
- [2] Bailey MP, Hallett J. 2009. A comprehensive habit diagram for atmospheric ice crystals: Confirmation from the laboratory, AIRS II, and other field studies. *J. Atmos. Sci.* **66**: 2888-2899.
- [3] Bürgesser RE, Ávila EE, Castellano NE. 2016. Laboratory measurements of sedimentation velocity of columnar ice crystals. *Q.J.R. Meteorol. Soc.* Doi: 10.1002/qj.2766
- [4] Castellano NE, Ávila EE, Bürgesser RE, Saunders CPR. 2014. The growth of ice particles in a mixed phase environment based on laboratory observations. *Atmos. Res.* **150**: 12-20
- [5] Emersic, C. Cloud physics research-Light scattering by ice crystals. [Figura]. Recuperado de <http://www.cas.manchester.ac.uk/resactivities/cloudphysics/topics/lightscattering/>
- [6] Foster T.C., Hallet, J. 2002. The alignment of ice crystals in changing electric fields. *Atmos. Res.* **62**:149-169
- [7] Foster T.C., Hallet, J. 2008. Enhanced alignment of plate ice crystals in a non-uniform electric field. *Atmos. Res.* **90**:41-53
- [8] Giovacchini, J. P. (2017), Sedimentation analysis of small ice crystals by the lattice Boltzmann method. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 143: 3085-3093. doi:10.1002/qj.3164
- [9] Hale, R.B. 1950. Unusual lightning. *Weather*, 4. (II) p. 394
- [10] Heymsfield A.J. 1972. Ice crystal terminal velocities. *J. Atmos. Sci.* **29**:1348-1357
- [11] Heymsfield A.J., Kajikawa M. 1987. An improved approach to calculating terminal velocities of plate-like crystals and graupel. *J. Atmos. Sci.* 44: 1088–1099.
- [12] Jayaweera KOLF, Cottis RE. 1969. Fall velocities of plate-like and columnar ice crystals. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **95**: 703–709.
- [13] Jayaweera KOLF, Ryan BF. 1972. Terminal velocities of ice crystals. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **98**: 193–197.
- [14] Jeffery, G.B. 1922. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **102**. 161-179.

- [15] Kajikawa M. 1973. Laboratory measurements of falling velocity of individual ice crystals. *J. Meteorol. Soc. Jpn.* **51**: 263–271.
- [16] Lacy, R.E. 1950. Unusual lightning. *Ibid*, 4. (II) p. 395
- [17] Lamb, H.H. 1932. *Hydrodynamics*, 6th Ed., 733 pp., Dover, New York.
- [18] Marshall, T.C., Rust, W.D. 1991. Electric field soundings through thunderstorms, *J. Geophys. Res.*, 96, 22297, 1991
- [19] Mendez, D.A. 1969. Optical polarization induced by electric fields of thunderstorm. *J. Geophys. Res.* 74,7032-7037.1
- [20] Michaeli G. 1977. Settling velocities of small ice crystals. *Tellus* **29**: 282–285.
- [21] Ono A. 1969. The shape and riming properties of ice crystals in natural clouds. *J. Atmos. Sci.* **26**: 138–147.
- [22] Ono A. 1970. Growth mode of ice crystals in natural clouds. *J. Atmos. Sci.* **27**:649–658.
- [23] Reinking, R.F., Matrosov, S.Y., Brientjes, R.T. and Martner, B.E., 1997. Identification of hydrometeors with elliptical and linear polarization Ka-band radar. *J. Appl. Meteorol.*, 36, 322–339
- [24] Ryan BF, Wishart ER, Shaw DE. 1976. The growth rates and densities of ice crystals between  $-3^{\circ}\text{C}$  and  $-21^{\circ}\text{C}$ . *J. Atmos. Sci.* **33**: 842–850.
- [25] Sanderson, B., Piani, C., Ingram, W., Stone, D. and Allen, M. 2008. Towards constraining climate sensitivity by linear analysis of feedback patterns in thousands of perturbed-physics GCM simulations. *Clim. Dyn.*, 30, 175-190.
- [26] Schaefer VJ. 1956. The preparation of snow crystal replicas-VI. *Weatherwise.* **9**: 132-135.
- [27] Vonnegut, B. 1965. Orientation of ice crystals in the electric field of a thunderstorm. *Weather* 20, 310-312.
- [28] Weinheimer, A.J., Few, A.A. 1987. The electric field alignment of ice particles in thunderstorms. *J. Geophys. Res.*, 92(12),14,833-14,844.
- [29] Westbrook, C.D., Hogan, R.J. and Illingworth A.J. 2008. The capacitance of pristine ice crystals and aggregate snowflakes. *arXiv preprint physics/0610038*.
- [30] Winn, W.P., Schwede, G.W. and Moore, C.B. 1974. Measurements of electric fields in thunderclouds, *J. Geophys. Res.*, 79, 1761.

# Apéndice

## Alineamiento de cristales de hielo en presencia de campo eléctrico

Para el caso de un elipsoide dieléctrico que interactúa con un campo eléctrico uniforme, el módulo de dicho torque está dado por:

$$\mathcal{T}_E = \mathcal{T}'_E \cos(\beta) \sin(\beta) \quad (4.1)$$

donde  $\beta$  es el ángulo entre la dirección del campo eléctrico y el eje de simetría del esferoide. El factor  $\mathcal{T}'_E$  está dado por,

$$\mathcal{T}'_E = 4\pi\epsilon_0 E^2 a^3 f(q, \epsilon_r) \quad (4.2)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío,  $E$  el módulo del campo eléctrico,  $a$  el radio ecuatorial del esferoide y  $f$  es una función de la razón de ejes del esferoide ( $q$ ) y la permitividad relativa del hielo ( $\epsilon_r$ ).

La razón de ejes del esferoide,  $q$ , se define como el cociente entre el eje de simetría mayor del elipsoide y el ancho perpendicular a dicho eje. Notar que  $q = \mathcal{A}$ , razón de aspecto definida anteriormente. Para el caso de esferoides oblatos,  $q < 1$ , y para el caso de esferoides prolados,  $q > 1$ . La función  $f$  está dada por:

$$f(q, \epsilon_r) = \frac{2}{3} \frac{q(\epsilon_r - 1)^2 |\alpha_0 - \gamma_0|}{(2 + [\epsilon_r - 1]\alpha_0)(2 + [\epsilon_r - 1]\gamma_0)} \quad (4.3)$$

donde  $\alpha_0$  y  $\gamma_0$  son funciones que dependen de  $q$ . Las expresiones integrales de dichas funciones fueron dadas por Lamb (1932, [17]).

Si dicho torque fuese el único torque actuante sobre el esferoide, la ecuación de movimiento estaría dada por:

$$\ddot{\beta} = -\frac{15}{2} \frac{\epsilon_0 E^2 f}{\rho a^3 (q^3 + q)} \sin(2\beta) \quad (4.4)$$

donde  $\rho$  es la densidad del esferoide.

Para el caso de un elipsoide bajo los efectos del torque de Drag (*Stokes drag torque*), la magnitud del torque,  $\mathcal{T}_S$ , está dada por la ecuación de Jeffery (1922, [14]), que para el caso de esferoides es igual a:

$$\mathcal{T}_S = 8\pi\mu\dot{\beta}a^3g(q) \quad (4.5)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad del aire,  $\dot{\beta}$  es la velocidad angular del esferoide y  $g$  una función que depende de la razón de ejes  $q$  y está dada por:

$$g(q) = \frac{2}{3} \frac{q^3 + q}{(\alpha_0 + q^2\gamma_0)} \quad (4.6)$$

Si se incluye este torque en la ecuación de movimiento 4.4 nos queda:

$$\ddot{\beta} = -\frac{15}{2} \frac{\epsilon_0 E^2 f}{\rho a^3 (q^3 + q)} \sin(2\beta) - \frac{30\mu g}{\rho a^3 (q^3 + q)} \dot{\beta} \quad (4.7)$$

Para el caso de partículas de hielo que se ven afectadas por el torque aerodinámico, cuyos números de *Reynolds* son grandes, se puede utilizar el potencial del flujo para aproximar el torque.

La magnitud del torque, para el caso de un esferoide, está dada por:

$$\mathcal{T}_P = \mathcal{T}'_P \cos(\phi) \sin(\phi) \quad (4.8)$$

donde  $\phi$  es el ángulo entre el eje de simetría del esferoide y la dirección del flujo.  $\mathcal{T}'_P$  está dado por:

$$\mathcal{T}'_P = 8\rho_a U^2 a^3 h(q, r) \quad (4.9)$$

donde  $\rho_a$  es la densidad del aire,  $U$  la velocidad de caída de la partícula y  $h(q, r)$  una función que depende de la razón de los ejes  $q$  y de la razón de densidades  $r = \frac{\rho_a}{\rho}$ . La función  $h$  puede ser expresada como:

$$h(q, r) = \frac{4}{3} q \frac{|k_x - k_z|}{1 + k_r r} \quad (4.10)$$

donde  $k_x$ ,  $k_z$  y  $k_r$  son coeficientes de inercia y están definidos en terminos de  $q$  y son proporcionales a la energía cinética del fluido para varios tipos de movimiento (traslación paralela al eje de simetría, traslación perpendicular al eje de simetría y movimiento rotacional con respecto al diámetro ecuatorial).