



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

TRABAJO ESPECIAL  
LICENCIATURA EN FÍSICA

# MONITOREO DEL ESTADO DE IONES ATRAPADOS EN UNA CAVIDAD ÓPTICA

ALAN KAHAN  
DIRECTORA: DRA. CECILIA CORMICK

20 DE MARZO DE 2018



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



# Resumen

El objeto de estudio considerado en este trabajo es un ion en el interior de una cavidad óptica bombeada por un láser, en el régimen de acoplamiento dispersivo y en aproximación armónica. Este trabajo se propone complementar y continuar el estudio del espectro de emisión de la cavidad reportado en [1, 2]. En particular, se analiza la conexión entre distintos rasgos espectrales y las características de la dinámica del sistema compuesto por los iones acoplados con la cavidad (por ejemplo, las frecuencias de los modos normales, su nivel de ocupación, o su grado de acoplamiento con el entorno). Se identifican métodos para medir propiedades del sistema en forma no invasiva, por medio de los fotones que escapan a través de los espejos.

**Palabras clave:** cavidades ópticas - optomecánica - iones atrapados - acoplamiento dispersivo - espectro



# Abstract

Our object of study is an ion inside a laser-pumped optical cavity, in the dispersive coupling regime and in harmonic approximation. In this work we complement and continue the study of the emission spectrum from the optical cavity reported in [1, 2]. In particular, we analyze the connection between different spectral features and the characteristics of the dynamics of the system composed by the ions coupled to the cavity field (ie: the normal modes frequency, their occupation level, or their coupling with the environment). Our goal is to identify procedures to measure system properties in noninvasive ways, through the photons that escape from the cavity due to mirror losses.

**Keywords:** optical cavities - optomechanics - trapped ions - dispersive coupling - spectrum



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
1.1. Iones atrapados . . . . .	9
1.2. Sistemas optomecánicos . . . . .	10
1.3. Organización de este trabajo . . . . .	11
<b>2. Formalismo de estados Gaussianos</b>	<b>13</b>
2.1. Sistemas de variables continuas . . . . .	13
2.2. Funciones características y distribuciones de Wigner . . . . .	13
2.3. Estados Gaussianos . . . . .	14
2.4. Entrelazamiento en sistemas de variables continuas . . . . .	15
2.4.1. Criterio de separabilidad de Peres-Horodecki . . . . .	15
2.4.2. Negatividad . . . . .	17
<b>3. Dinámica de un modo en una cavidad óptica</b>	<b>19</b>
3.1. Cavidades ópticas . . . . .	19
3.2. Descripción del efecto del ambiente . . . . .	19
3.3. Incorporando a la descripción el bombeo por láser . . . . .	21
3.4. Campo dentro de una cavidad con pérdidas. Input-output . . . . .	23
3.4.1. Propiedades de los operadores de input . . . . .	25
<b>4. Acoplamiento dispersivo entre átomos y cavidades.</b>	<b>27</b>
4.1. Aproximación de campo clásico . . . . .	27
4.2. Campo cuantizado . . . . .	29
<b>5. Descripción teórica de un ion acoplado dispersivamente a una cavidad bombeada por un láser</b>	<b>31</b>
5.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	31
5.2. Límite semiclásico . . . . .	33
5.2.1. Valores de equilibrio . . . . .	33
5.2.2. Fluctuaciones . . . . .	35
5.3. Análisis de la evolución unitaria de las fluctuaciones . . . . .	37
<b>6. Análisis del estado estacionario</b>	<b>41</b>
6.1. Solución de las ecuaciones para las fluctuaciones y de las vibraciones. . . . .	41
6.2. Análisis del estado estacionario de las fluctuaciones . . . . .	44
6.3. Entrelazamiento para dos modos . . . . .	46

<b>7. Espectro emitido por la cavidad</b>	<b>49</b>
7.1. Operadores de output . . . . .	49
7.2. Cálculo del espectro a partir de la diagonalización del problema . . . . .	50
7.3. Cálculo del espectro transformando las ecuaciones de movimiento . . . . .	52
<b>8. Estimación no invasiva de los parámetros del problema por medio del espectro de emisión</b>	<b>55</b>
8.1. Cavidades optomecánicas . . . . .	55
8.2. Iones atrapados . . . . .	58
8.2.1. Caso sin ambiente para las vibraciones . . . . .	60
8.2.2. Caso incluyendo un ambiente débilmente acoplado a las vibraciones . . . . .	63
<b>9. Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>A. Derivación alternativa de la matriz de covarianza en el estado asintótico</b>	<b>69</b>
A.1. Solución para el estado asintótico. . . . .	71



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Iones atrapados

Los átomos ionizados pueden ser confinados por medio de campos electromagnéticos [3], los sistemas usados para lograr esto se denominan trampas de iones [4]. Los grados de libertad electrónicos de los iones proporcionan un sistema cuántico controlable, que permite que estos puedan ser enfriados mediante distintas técnicas [5] hasta su estado vibracional fundamental [6, 7]. El confinamiento usualmente se logra utilizando campos de radiofrecuencia o combinando campos eléctricos y magnéticos estáticos [8]. Los experimentos con iones atrapados comenzaron en 1978 [9, 10], estos aumentaron el interés en lograr la preparación y manipulación de estos estados, en tanto que renovaron la investigación de la interacción fundamental entre la radiación electromagnética y la materia, con un énfasis particular en el acoplamiento entre los grados de libertad internos (atómicos) y externos (dinámicos) [11, 12]. Tanto los grados de libertad electrónicos del átomo como los grados de libertad vibracionales pueden ser manipulados precisamente usando láseres. De esta forma, estos sistemas pueden ser enfriados hasta formar estructuras ordenadas llamadas cristales de Coulomb, que pueden ser creadas y manipuladas con facilidad. Estos cristales pueden tomar la forma de cadenas lineales [2], cadenas en zigzag [13] o de estructuras planas. En estas estructuras, el espaciamiento entre partículas está dado por el balance entre los campos electromagnéticos y la repulsión electrostática entre las partículas [14].

Los experimentos con iones atrapados pueden ser utilizados para espectrometría de masas [15, 16], para realizar mediciones muy precisas de tiempo y estándares de frecuencia [17], y como sensores de fuerza [18]. Estos también proporcionan un medio para preparar estados no clásicos del campo [19, 20, 21]. Además, estos sistemas presentan una amplia variedad de aplicaciones como transferir estados [22], simulaciones de la dinámica de sistemas complejos [23, 24, 25], preparar estados entrelazados de las vibraciones y los grados de libertad interna de los átomos [26, 27] o entre los grados de libertad vibracionales del átomo y el campo dentro de la cavidad [1]. Los sistemas de iones atrapados en trampas ópticas se encuentran entre los numerosos sistemas propuestos como una posible plataforma para implementar tareas de computación cuántica [28, 29, 30].

Una cavidad resonante es un volumen contenido entre espejos, usados para localizar modos del campo electromagnético [31]. Varios grupos de investigación comenzaron recientemente a trabajar para integrar iones atrapados y cavidades [32, 33, 34, 35]. Más en general, el uso de cavidades permite un incremento del acoplamiento entre los átomos y ciertos modos del campo. Estos sistemas pueden ser usados para la producción de fotones individuales [36, 37] o simular modelos de fricción [38, 39]. Además, para la implementación de protocolos de comunicación, los fotones conforman un medio ideal para transmitir información. Atrapar iones dentro de cavidades ópticas permite intercambiar la información almacenada entre iones y fotones, aprovechando las

ventajas de ambos sistemas. Usando estos sistemas pueden generarse estados entrelazados de los grados de libertad internos de iones [40], o estados entrelazados de iones y fotones [41]. Esto, junto a los largos tiempos de decoherencia de los iones atrapados, y a la posibilidad de implementar compuertas lógicas con alta fidelidad, hace que los sistemas de iones atrapados en cavidades resonantes constituyan un candidato ideal para la distribución de información en redes [42]. En este trabajo nos enfocaremos en iones atrapados en cavidades en el régimen dispersivo, en el que los grados de libertad electrónicos son eliminados dando lugar a un sistema optomecánico que involucra el campo en la cavidad y los grados de libertad de vibración de los iones.

## 1.2. Sistemas optomecánicos

La primera observación experimental del enfriamiento cercano al estado fundamental de objetos mecánicos de mayor escala se dio en 2009 [43, 44], en estos experimentos la posición de un oscilador mecánico está acoplada a la frecuencia de una cavidad óptica. Tales dispositivos son buscados por sus posibles aplicaciones para sensores, amplificadores ópticos y como interfaces en sistemas cuánticos híbridos [45, 46].

La cuantización del movimiento lleva a una asimetría en el espectro de la luz dispersada por un oscilador [47]. Esta asimetría puede ser observada fácilmente en sistemas pequeños como ensamblajes de pocos átomos [12]; pero los aspectos cuánticos del movimiento de osciladores masivos o de ensamblajes de un gran número de partículas son más difíciles de detectar debido al ruido térmico y a un gran número de ocupación de los modos vibracionales [47]. Controlar y medir el movimiento de objetos de mayor escala a las atómicas, al mismo tiempo de poder observar los efectos cuánticos del movimiento, es fundamental para poder lograr distintas aplicaciones de importancia tanto tecnológica como para la investigación de fenómenos fundamentales. Estos incluyen por ejemplo la generación de estados no clásicos de la luz y el movimiento mecánico [48], sensores de muy alta sensibilidad para medir fuerzas [49, 50], desplazamientos, masas y aceleraciones; la operación de detectores de ondas gravitacionales [51, 52], preparar estados no clásicos del campo y de las vibraciones [53, 54], transferir estados de la luz al movimiento mecánico [55, 56, 57], la realización de simulaciones [58], o de protocolos que permitan almacenar y transmitir información [59, 60]. Todo esto contribuye al creciente interés en la optomecánica de cavidades.

Los experimentos que involucran el enfriamiento de osciladores mecánicos mesoscópicos utilizan métodos basados en la asimetría del espectro emitido por la cavidad para medir la temperatura y caracterizar el comportamiento cuántico de esos osciladores [61]. Estos procedimientos generalmente necesitan de más de un láser en las configuraciones experimentales: uno que bombee fotones a la cavidad y otro que independientemente mida el movimiento del modo mecánico de la cavidad [61].

Un ejemplo de un sistema optomecánico está dado por una cavidad de Fabry-Pérot en la cual uno de los espejos es mucho más liviano que el otro, de forma que este puede moverse bajo la acción de la presión de radiación [53]. La principal diferencia entre los sistemas optomecánicos considerados en esta sección y los iones atrapados acoplados a cavidades resonantes, está dada por el mecanismo que da lugar al acoplamiento de los modos vibracionales y del campo electromagnético. En el caso de iones atrapados, es la interacción entre los grados de libertad internos del átomo y el campo electromagnético la que da lugar a este acoplamiento (ver sección 5.1). En el caso de los sistemas optomecánicos más tradicionales, el acoplamiento surge de la presión de radiación: la transmisión de momento por parte de los fotones al oscilador mecánico; o del corrimiento (dependiente de la posición del oscilador) de la frecuencia de resonancia de la cavidad; o del acoplamiento con el campo cercano de la cavidad (por ejemplo en el caso de un objeto microscópico acoplado al campo evanescente fuera de la cavidad). Asimismo, otro tipo

de acoplamiento posible es llamado a veces “acoplamiento disipativo”, en este caso, la transparencia de los espejos móviles de una cavidad depende de su velocidad, y por lo tanto, la tasa de pérdidas de la cavidad  $\kappa$  es también una función de la velocidad [62]. Distintos ejemplos de sistemas optomecánicos son [54, 63]:

- **Espejos suspendidos:** El movimiento mecánico cambia directamente la frecuencia de la cavidad. Un ejemplo de estos sistemas podría ser una cavidad de Fabry-Pérot con un espejo móvil.
- **Resonadores ópticos:** La luz es guiada por *whispering-gallery modes* a lo largo de superficies cóncavas. Las vibraciones de estas estructuras generan un cambio en la longitud del resonador y esto corre la frecuencia de resonancia óptica, lo que provee el acoplamiento optomecánico. Este tipo de sistemas usualmente tienen geometrías de discos [43], esferas o toroides.
- **Guías de onda y cristales fotónicos:** Los cristales fotónicos están formados por materiales en los que se modula periódicamente el índice de refracción, lo que lleva a la formación de “bandas ópticas” en analogía con las bandas electrónicas para el movimiento de los electrones en una red cristalina. Introduciendo defectos en la estructura, pueden lograrse modos localizados del campo electromagnético. El acoplamiento optomecánico se origina de las vibraciones en el borde del material.
- **Objetos de escala nanométrica suspendidos o levitados:** Estos dispositivos están formados por cavidades ópticas rígidas que contienen elementos (como membranas [64], o “*nanowires*”) o bien dentro o cerca del campo de la cavidad.
- **Átomos ultra fríos:** El movimiento colectivo de ensambles de átomos tiene características similares a la de un oscilador. El acoplamiento dispersivo del movimiento colectivo de la nube de átomos con el campo de una cavidad óptica resulta en un corrimiento (dependiente de la posición) de la frecuencia de la cavidad, y esto da lugar al acoplamiento optomecánico.

En el caso de iones atrapados en resonadores ópticos, cuando tanto el modo de la cavidad como la frecuencia del láser se hallan suficientemente lejos de la resonancia con la transición atómica, la interacción entre el campo óptico y los iones puede describirse por medio de un Hamiltoniano efectivo que acopla las posiciones de los átomos con el número de fotones en la cavidad. Esta interacción da lugar a una dinámica muy rica, ya que la intensidad del campo puede considerarse como un potencial cuántico no lineal actuando sobre los iones, y la dependencia de esta intensidad con la posición de los iones da lugar a una interacción efectiva entre iones, con rango infinito. Por otra parte, a bajas temperaturas, las vibraciones de los iones tienen una amplitud mucho menor a la separación entre ellos, permitiendo una aproximación armónica del potencial de Coulomb y la descripción de las vibraciones en términos de modos normales [1, 65]. De este modo, puede verse que las fluctuaciones del campo y de las posiciones atómicas en torno de sus valores de equilibrio también están acopladas [66]. Esto puede generar entrelazamiento en el estado asintótico, o puede ser utilizado para enfriar las vibraciones del cristal por medio de las pérdidas de la cavidad [66].

### 1.3. Organización de este trabajo

Este trabajo se propone complementar y continuar el estudio del espectro de emisión de la cavidad reportado en [1, 2, 13]. En particular, se analiza la conexión entre distintos rasgos espectrales y las características de la dinámica del sistema compuesto por los iones acoplados

con la cavidad (por ejemplo, las frecuencias de los modos normales, su nivel de ocupación, o su grado de acoplamiento con el entorno). El objetivo de este trabajo es identificar métodos para medir propiedades del sistema en forma no invasiva por medio de los fotones que escapan a través de los espejos. Como el estado asintótico del sistema es un estado Gaussiano, toda la información sobre el estado asintótico está dada por los primeros y segundos momentos de los operadores creación y aniquilación de cada modo del sistema. Entonces, en el caso ideal, debería ser posible obtener todos los parámetros que determinan la evolución del sistema, y así poder reconstruir la matriz de covarianza.

En el capítulo 2, se describe el formalismo de estados Gaussianos, el cual constituye la base de este trabajo. Además, en el mismo se describen algunas generalidades sobre entrelazamiento en sistemas de variables continuas. En el capítulo 3, se estudia la evolución del campo electromagnético en una cavidad resonante, incorporando la descripción de la dinámica no unitaria debida a la interacción del sistema con un sistema externo. Para esto, se utiliza el formalismo de la ecuación maestra para sistemas abiertos, y se introducen algunas generalidades de la teoría de *input-output*. En el capítulo 4 se estudia la dinámica unitaria de un átomo atrapado en una cavidad resonante en el régimen dispersivo. Luego, en el capítulo 5, se estudia la dinámica del sistema completo estudiado en este trabajo: un átomo ionizado de dos niveles, atrapado en una cavidad óptica, en una descripción linealizada. Para esto se utiliza una aproximación semiclassical, en la cual los operadores del sistema se pueden descomponer como fluctuaciones alrededor de valores clásicos de equilibrio [1]. En el capítulo 6, se estudian las propiedades del estado asintótico en el caso de tener la información completa sobre el sistema, es decir, de conocer la matriz de covarianza en el estado asintótico. Además, se describe la generación de entrelazamiento en el estado estacionario. Luego, en el capítulo 7, se estudia el espectro emitido por la cavidad, el cual sirve como un registro de la interacción entre los modos vibracionales y el campo dentro de la cavidad. Estos resultados fueron publicados anteriormente en [13]. Por último en el capítulo 8, se estudia la posibilidad de estimar los parámetros que determinan el estado asintótico del sistema, o lo que es equivalente, estimar los parámetros del Hamiltoniano efectivo que describe la dinámica lineal de los modos del sistema. Este capítulo comprende los principales resultados originales de este trabajo. Finalmente, en el Apéndice A se incluye una forma alternativa de estudiar el estado asintótico del sistema a partir del formalismo de la ec. maestra.

## Capítulo 2

# Formalismo de estados Gaussianos

### 2.1. Sistemas de variables continuas

En esta sección se considera un sistema de  $N$  grados de libertad adimensionales que pueden representar por ejemplo  $N$  osciladores armónicos,  $N$  modos del campo electromagnético,  $N$  modos de vibración en una red, o cualquier combinación. Los operadores canónicos  $q_k, p_k$  están relacionados a operadores creación y aniquilación de un modo mediante [67]:

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{(a_k + a_k^\dagger)}{\sqrt{2}} \\ p_k &= \frac{i(a_k^\dagger - a_k)}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

El sistema estudiado en este trabajo es un sistema de variables continuas de 2 modos bosónicos. En general, un sistema de  $N$  modos bosónicos está descrito por el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_k$ , donde cada uno de los espacios  $\mathcal{H}_k$  corresponde al espacio de dimensión infinita del modo  $k$ .

Los operadores canónicos pueden agruparse en un vector de la forma

$$\vec{\mathbf{R}} = (q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_N, p_N), \quad (2.2)$$

esto permite escribir las relaciones de conmutación canónicas como (2.3).

$$[R_k, R_l] = i\Omega_{kl}, \quad (2.3)$$

donde  $\Omega$  es la forma simpléctica dada por:

$$\Omega = \bigoplus_{k=1}^N \omega, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

### 2.2. Funciones características y distribuciones de Wigner

Los autoestados  $|\alpha\rangle$  del operador  $a_k$  constituyen el conjunto de *estados coherentes*, el cual es sobrecompleto en el espacio  $\mathcal{H}_k$  [68]. Los estados  $|\alpha\rangle$  son estados de incertidumbre mínima [69]. Los estados coherentes se pueden escribir en términos de la base de estados de Fock  $\{|n\rangle_k\}$  como:

$$|\alpha\rangle_k = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |n\rangle_k \quad (2.5)$$

Los valores de expectación de los operadores  $a_k$ ,  $a_k^\dagger a_k$  y  $a_k^2$  con respecto a los estados coherentes  $|\alpha\rangle_k$  están dados por

$$\begin{aligned}\langle a_k \rangle &= \alpha_k, \\ \langle a_k^2 \rangle &= \alpha_k^2, \\ \langle a_k^\dagger a_k \rangle &= \alpha_k \alpha_k^*.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Los estados coherentes de  $N$  modos pueden obtenerse a partir de la operación del operador desplazamiento  $D(\boldsymbol{\alpha}) = \bigotimes_{k=1}^N D_k(\alpha_k)$  sobre el vacío  $|0\rangle$ :  $|\alpha\rangle = D(\boldsymbol{\alpha})|0\rangle$ , donde  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^N$  y

$$D_k(\alpha_k) = e^{\alpha_k a_k^\dagger - \alpha_k^* a_k}\tag{2.7}$$

En tanto que los valores  $\alpha_k \in \mathbb{C}$  satisfacen:

$$\hat{a}_k |\boldsymbol{\alpha}\rangle = \alpha_k |\boldsymbol{\alpha}\rangle$$

El conjunto de operadores desplazamiento  $D(\boldsymbol{\alpha})$  con  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^N$  es completo, en el sentido de que cualquier operador  $O$  actuando en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , puede ser escrito como [70]:

$$O = \int_{\mathbb{C}^N} \frac{d^{2N}\boldsymbol{\alpha}}{\pi^N} \text{Tr}[OD(\boldsymbol{\alpha})] D^\dagger(\boldsymbol{\alpha})\tag{2.8}$$

La función  $\chi_o(\boldsymbol{\alpha}) = \text{Tr}[OD(\boldsymbol{\alpha})]$  es la *función característica del operador*  $O$ . De la relación (2.8) puede verse que la función característica  $\chi_o(\boldsymbol{\alpha})$  especifica unívocamente el operador  $O$ . En particular, la función característica  $\chi_\rho(\boldsymbol{\alpha})$  del estado  $\rho$  de un sistema tiene toda la información necesaria sobre este. La función de Wigner del operador  $O$  se define como la transformada de Fourier de la función característica [71]:

$$W[O](\alpha) = \int_{\mathbb{C}^N} \frac{d^{2N}\boldsymbol{\lambda}}{\pi^{2N}} e^{(\boldsymbol{\lambda}^\dagger \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\alpha}^\dagger)} \chi_o(\boldsymbol{\lambda})\tag{2.9}$$

La función de Wigner de un estado  $\rho$  es una distribución de cuasi-probabilidad para ese estado, esto es así dado que  $W(q, p)$  puede tomar valores negativos, a diferencia de una distribución de probabilidad normal. Sin embargo, las integrales marginales de  $W(q, p)$  son las distribuciones de probabilidad usuales para un estado [72].

### 2.3. Estados Gaussianos

Los estados Gaussianos son aquellos cuya función característica  $\chi_\rho(\boldsymbol{\alpha})$  es una función Gaussiana de  $\boldsymbol{\alpha}$  [73]. Para describir en forma completa los estados Gaussianos alcanza con dar los primeros momentos (2.2) y la matriz de covarianza [71]:

$$\sigma_{k,l} = \langle \{R_k, R_l\} \rangle - 2\langle R_l \rangle \langle R_k \rangle,\tag{2.10}$$

esto permite que algunos problemas típicos de sistemas de variables continuas puedan ser resueltos usando matrices finitas. Ejemplos de estados Gaussianos son los estados coherentes, los estados térmicos, y los estados estrujados (*squeezed states*).

Un caso particular de estados Gaussianos son los estados térmicos de Hamiltonianos cuadráticos [71]:

$$\rho_{th} = \frac{e^{-\beta H}}{\text{tr}(e^{-\beta H})}\tag{2.11}$$

Williamson [74] demostró que para cada matriz de covarianza  $\sigma$  de un sistema con  $N$  grados de libertad canónicos existe una transformación simpléctica  $S$  (aquellas que preservan la forma simpléctica  $\Omega$ :  $S^T \Omega S = \Omega$ ) tal que

$$\sigma = S^T \nu S, \quad (2.12)$$

donde

$$\nu = \bigoplus_{k=1}^N \begin{pmatrix} \nu_k & 0 \\ 0 & \nu_k \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Los elementos diagonales  $\nu_k$  se denominan *autovalores simplécticos* de la matriz de covarianza  $\sigma$ . En lugar de encontrar la transformación simpléctica  $S$  que lleva la matriz de covarianza a la forma normal de Williamson, los autovalores simplécticos pueden obtenerse como el valor absoluto de los autovalores de  $i\Omega\sigma$  [75].

## 2.4. Entrelazamiento en sistemas de variables continuas

El análisis del entrelazamiento de un sistema es central en muchas ramas de la información y la computación cuánticas, tanto por arrojar luz en aspectos fundamentales de la naturaleza como por sus aplicaciones como un recurso básico en varios esquemas del procesamiento cuántico de la información [76]. Además, recientemente ha habido un creciente interés en el estudio de sistemas de variables continuas [77, 78, 79, 80]. Esto hace que sea importante poder reconocer si un dado estado de un sistema de variables continuas es entrelazado o separable.

### 2.4.1. Criterio de separabilidad de Peres-Horodecki

La forma más general de un estado separable de un sistema bipartito está dado por [81]:

$$\rho = \sum_j p_j \rho_j^A \otimes \rho_j^B \quad (2.14)$$

El estado de un sistema bipartito puede escribirse en una dada base como

$$\rho_{AB} = \sum_{ijkl} \rho_{ijkl} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l| \quad (2.15)$$

La transposición parcial con respecto a los grados de libertad del subsistema B se define como [82]:

$$\rho_{AB}^{T_B} = \sum_{ijkl} \rho_{ijkl} |i\rangle\langle j| \otimes |l\rangle\langle k| \quad (2.16)$$

El espectro de  $\rho_{AB}^{T_B}$  es independiente de la base elegida para cada subsistema, y también es independiente de sobre cuál subsistema se realiza la operación de transposición [82]. En el caso de un estado de la forma (2.14), la operación de transposición parcial lleva un estado  $\rho$  a un estado  $\rho^{T_B}$  válido, en particular definido positivo. Esta observación constituye la base del criterio de separabilidad de Peres-Horodecki. La positividad de la transpuesta parcial (PPT por sus siglas en inglés) es entonces una condición necesaria pero no suficiente para la separabilidad; *si un estado es separable  $\Rightarrow$   $\rho^{T_B}$  es una matriz definida positiva* [83].

De la definición de la distribución de Wigner (2.9) se sigue que, en un sistema con  $N$  grados de libertad, la operación de transposición parcial sobre la matriz densidad de un subsistema

con  $N - i$  grados de libertad es equivalente a una reflexión especular en el espacio de fases correspondiente a ese subsistema [84]:

$$PT : W(q_1, p_1, \dots, q_i, p_i, q_{i+1}, p_{i+1}, \dots, q_N, p_N) \rightarrow W(q_1, p_1, \dots, q_i, p_i, q_{i+1}, -p_{i+1}, \dots, q_N, -p_N) \quad (2.17)$$

Esto puede verse de la siguiente manera: la distribución de Wigner (2.9) de un estado  $\rho$  puede escribirse como función de las coordenadas canónicas como

$$W(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} dq'_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dq'_n \langle q_1 - q'_1 | \cdots \langle q_N - q'_N | \rho | q_1 + q'_1 \rangle \cdots | q_N + q'_N \rangle e^{i2\vec{q}' \cdot \vec{p}} \quad (2.18)$$

Por claridad se ejemplifica la reflexión en el espacio de fases ante la transposición parcial para el caso de un sistema de 2 modos:

$$W(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq'_1 \int_{-\infty}^{\infty} dq'_2 \langle q_1 - q'_1 | \langle q_2 - q'_2 | \rho | q_1 + q'_1 \rangle | q_2 + q'_2 \rangle e^{i2\vec{q}' \cdot \vec{p}} \quad (2.19)$$

La distribución de Wigner correspondiente a un estado  $\rho^{T_2}$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned} W_{T_2}(\vec{q}, \vec{p}) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq'_1 \int_{-\infty}^{\infty} dq'_2 \langle q_1 - q'_1 | \langle q_2 - q'_2 | \rho^{T_2} | q_1 + q'_1 \rangle | q_2 + q'_2 \rangle e^{i2\vec{q}' \cdot \vec{p}} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq'_1 \int_{-\infty}^{\infty} dq'_2 \langle q_1 - q'_1 | \langle q_2 + q'_2 | \rho | q_1 + q'_1 \rangle | q_2 - q'_2 \rangle e^{i2\vec{q}' \cdot \vec{p}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Haciendo el cambio de variables  $q'_2 = -q''_2$ :

$$\begin{aligned} W_{T_2}(\vec{q}, \vec{p}) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq'_1 \int_{-\infty}^{\infty} dq''_2 \langle q_1 - q'_1 | \langle q_2 - q''_2 | \rho | q_1 + q'_1 \rangle | q_2 + q''_2 \rangle e^{i2(q'_1 p_1 - q''_2 p_2)} \\ &= W(q_1, p_1, q_2, -p_2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

De esta forma, puede verse que en el caso de sistemas de variables continuas, la operación de transposición parcial adquiere una interpretación simple como una reflexión en el espacio de fases de uno de los subsistemas. Para considerar el efecto de la transposición parcial en el formalismo de la matriz de covarianza, se divide el sistema total en dos subsistemas  $A$  y  $B$  con  $N_A = i$  y  $N_B = N - i$  modos cada uno, entonces se tiene que la matriz de covarianza  $\tilde{\sigma}$  correspondiente a  $\rho^{T_B}$  está dada por [75]:

$$\tilde{\sigma} = \theta \sigma \theta, \quad (2.22)$$

con

$$\theta = \text{diag}\{\underbrace{1, 1, \dots, 1, 1}_{N_A}, \underbrace{-1, \dots, 1, -1}_{N_B}\}, \quad (2.23)$$

de forma que  $\tilde{\sigma}$  corresponde a cambiar el signo de los momentos del subsistema  $B$  en  $\sigma$ .



### 2.4.2. Negatividad

En general, cuando dos sistemas cuánticos interactúan se establecen correlaciones entre ellos. Esta correlación persiste incluso luego de que los sistemas dejaron de interactuar. Un sistema contiene correlaciones cuánticas si observables asociados a cada uno de los subsistemas están correlacionados, y sus correlaciones no pueden ser reproducidas sólo por medios clásicos. El entrelazamiento se define como aquella clase de correlaciones que no pueden ser creadas sólo mediante operaciones locales y comunicación clásica (LOCC por sus siglas en inglés) [82].

Un ejemplo particular de medidas de entrelazamiento para estados mezcla son las *negatividades*. La negatividad cuantifica la violación del criterio PPT, es decir, cuánto falla la operación de transposición parcial de  $\rho$  en dar una matriz definida positiva. La *negatividad*  $\mathcal{N}(\rho)$  se define como [85]:

$$\mathcal{N}(\rho) = \frac{\|\rho^{T_B}\|_1 - 1}{2}, \quad (2.24)$$

donde  $\|O\|_1 = \text{Tr}\sqrt{O^\dagger O}$  es la norma traza. La negatividad no aumenta ante LOCC [85] y tiene la ventaja de ser computable [75]:

$$\mathcal{N}(\rho) = \text{máx} \left\{ 0, -\sum_k \lambda_k^- \right\} \quad (2.25)$$

donde  $\{\lambda_k^-\}$  es el conjunto de autovalores negativos de  $\rho^{T_B}$ . La negatividad tiene la deficiencia de no ser aditiva, uno de los requerimientos impuestos a las medidas de entrelazamiento [82]. La *negatividad logarítmica* se define como [85]:

$$E_{\mathcal{N}}(\rho) = \log\|\rho^{T_B}\| \quad (2.26)$$

La ventaja de las negatividades es que son fácilmente computables para estados Gaussianos. En el caso de un estado Gaussiano con matriz de covarianza  $\sigma$  la negatividad logarítmica resulta [75]:

$$E_{\mathcal{N}}(\sigma) = \begin{cases} -\sum_k \log(\tilde{\nu}_k) & \text{para } k : \tilde{\nu}_k < 1 \\ 0 & \text{si } \tilde{\nu}_k > 1 \quad \forall k \end{cases} \quad (2.27)$$

donde  $\{\tilde{\nu}_k^-\}$  es el conjunto de autovalores simplécticos de  $\tilde{\sigma}$ , la matriz de covarianza correspondiente al estado  $\rho^{T_B}$ .



## Capítulo 3

# Dinámica de un modo en una cavidad óptica

### 3.1. Cavidades ópticas

El sistema considerado en este capítulo es una cavidad resonante, que por ejemplo podría tratarse una cavidad de Fabry-Pérot, que consiste de dos espejos de gran reflectividad separados por una distancia  $L$ . Una dada cavidad contiene una serie de frecuencias de resonancia. La transparencia de los espejos lleva a la pérdida de los fotones de la cavidad a una tasa  $2\kappa$  (de esta forma la tasa de decaimiento de la amplitud del campo está entonces dada por  $\kappa$ ).

Una cantidad de interés es la *fineza* (*optical finesse*), la cual está dada por

$$\mathcal{F} \equiv \frac{\Delta\omega}{\kappa}, \quad (3.1)$$

donde  $\Delta\omega$  es el apartamiento entre las frecuencias de los modos de la cavidad. La cantidad (3.1) puede interpretarse como el número promedio de viajes que realiza un fotón antes de dejar la cavidad [54]. Principalmente, a lo largo de todo el trabajo nos concentraremos sólo en un modo de la cavidad, cuya frecuencia se denota por  $\omega_c$ .

### 3.2. Descripción del efecto del ambiente

La descripción de una cavidad acoplada con el campo electromagnético del exterior puede obtenerse tanto mediante el uso de una ecuación maestra (si sólo interesa la dinámica del sistema reducido, en este caso, el campo dentro de la cavidad), o mediante el uso del formalismo de input-output en el caso de que se necesite además estudiar propiedades de la luz emitida o reflejada por la cavidad [86]. En esta sección, se utiliza el formalismo de la ec. maestra. Se considera un sistema abierto  $S$  acoplado a un ambiente  $B$ . El sistema  $S$  es un subsistema del sistema total  $S + B$  que se considera un sistema cerrado, y por lo tanto, con una evolución unitaria descrita por la ecuación de Liouville:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] \quad (3.2)$$

Si se estudia la dinámica reducida del sistema  $S$ , puede observarse que este experimenta fluctuaciones y decaimientos, debidos a su interacción con el ambiente. Bajo la suposición de que las funciones de correlación de los operadores del ambiente decaen rápidamente se pueden desprestigiar los efectos de memoria sobre el sistema, y describir la dinámica del sistema reducido mediante la ecuación maestra Markoviana [87]:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_s(t) &= \mathcal{L}\rho_s(t) \\ &= -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_s] + \mathcal{D}\rho_s\end{aligned}\quad (3.3)$$

El primer término de la ecuación (3.3) representa la parte unitaria de la evolución del sistema. El segundo término es el correspondiente a la evolución no unitaria del sistema reducido, lo llamamos *disipador*  $\mathcal{D}$  y está dado por:

$$\mathcal{D}(\rho_s) \equiv \sum_k \gamma_k \left( A_k \rho_s A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho_s - \frac{1}{2} \rho_s A_k^\dagger A_k \right), \quad (3.4)$$

los operadores  $A_k$  son los operadores de Lindblad [88] y los coeficientes  $\gamma_k$  están dados en términos de ciertas funciones de correlación del ambiente [88].

A continuación se considera un modo del campo electromagnético dentro de una cavidad, que interactúa con el campo electromagnético del exterior. El campo externo representa un reservorio con un número infinito de grados de libertad. El Hamiltoniano del sistema (el campo dentro de la cavidad) es

$$H_c = \hbar\omega_c a^\dagger a,$$

los operadores  $a$  y  $a^\dagger$  son operadores de Lindblad del Hamiltoniano  $H_c$ . Si se considera que el ambiente está dado por un sistema de bosones que representan los modos del campo electromagnético fuera de la cavidad, entonces, en el régimen en el cual el número total de excitaciones se conserva, la dinámica de un modo del campo electromagnético confinado dentro de la cavidad está descrita por la ecuación maestra [89]:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_s &= -i\omega_c [a^\dagger a, \rho_s] + 2\kappa(N+1) \left( a\rho_s a^\dagger - \frac{1}{2} a^\dagger a \rho_s - \frac{1}{2} \rho_s a^\dagger a \right) \\ &\quad + 2\kappa N \left( a^\dagger \rho_s a - \frac{1}{2} a a^\dagger \rho_s - \frac{1}{2} \rho_s a a^\dagger \right) \\ &\equiv -i\omega_c [a^\dagger a, \rho_s] + \mathcal{D}(\rho_s),\end{aligned}\quad (3.5)$$

donde  $N$  (ec. (3.6)) es el número medio de fotones de un modo con frecuencia  $\omega_c$  del reservorio térmico y está dado por:

$$N = \frac{1}{\exp(\hbar\omega_c/k_B T) - 1} \quad (3.6)$$

La interacción entre el ambiente y los modos dentro de la cavidad lleva al decaimiento del número de fotones dentro de la cavidad a una tasa  $2\kappa$ . Con la ecuación maestra (3.5) se pueden obtener ecuaciones para los valores de expectación de cualquier observable  $\widehat{O}$  del sistema, por medio de:

$$\frac{d\langle \widehat{O} \rangle}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \text{tr}_s \{ \rho_s \widehat{O} \} \right) = \text{tr}_s \left( \frac{d\rho_s}{dt} \widehat{O} \right) \quad (3.7)$$

Haciendo la transformación a un marco de referencia que rota con la frecuencia del campo dentro de la cavidad:

$$\tilde{\rho}_s = U^\dagger \rho_s U = e^{iH_c t/\hbar} \rho_s e^{-iH_c t/\hbar}, \quad (3.8)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\rho}}_s &= 2\kappa(N+1) \left( a\tilde{\rho}_s a^\dagger - \frac{1}{2}a^\dagger a\tilde{\rho}_s - \frac{1}{2}\tilde{\rho}_s a^\dagger a \right) \\
&+ 2\kappa N \left( a^\dagger \tilde{\rho}_s a - \frac{1}{2}a a^\dagger \tilde{\rho}_s - \frac{1}{2}\tilde{\rho}_s a a^\dagger \right) \\
&\equiv \mathcal{D}(\tilde{\rho}_s)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Se denotan los valores de expectación obtenidos en el marco rotante por  $\langle \widetilde{O} \rangle = \text{tr}_s(\tilde{\rho}_s \widetilde{O})$ . De esta manera, las ecuaciones que determinan la evolución de los modos del campo dentro de la cavidad son:

$$\begin{cases} \frac{d\langle \widetilde{a} \rangle}{dt} = -\kappa \langle \widetilde{a} \rangle \\ \frac{d\langle \widetilde{a^\dagger a} \rangle}{dt} = -2\kappa \langle \widetilde{a^\dagger a} \rangle + 2\kappa N \\ \frac{d\langle \widetilde{a^2} \rangle}{dt} = -2\kappa \langle \widetilde{a^2} \rangle \end{cases} \tag{3.10}$$

La solución a estas ecuaciones es:

$$\begin{cases} \langle \widetilde{a} \rangle(t) = a_0 e^{-\kappa t} \\ \langle \widetilde{a^\dagger a} \rangle(t) = (N_0 - N) e^{-2\kappa t} + N \\ \langle \widetilde{a^2} \rangle(t) = b_0 e^{-2\kappa t} \end{cases} \tag{3.11}$$

donde  $a_0$ ,  $N_0$  y  $b_0$  son constantes de integración. De la ec. (3.11) puede verse que los valores asintóticos de las soluciones se corresponden con los de un estado térmico a la temperatura del ambiente. Transformando nuevamente al marco estático se obtiene:

$$\begin{cases} \langle a \rangle(t) = a_0 e^{-\kappa t} e^{-i\omega_c t} \\ \langle a^\dagger a \rangle(t) = (N_0 - N) e^{-2\kappa t} + N \\ \langle a^2 \rangle(t) = b_0 e^{-2\kappa t} e^{-i2\omega_c t} \end{cases} \tag{3.12}$$

A partir de la ec. (3.6), puede observarse que a temperaturas del orden de 300K o menores, el número medio de fotones  $N$  para un campo con frecuencias en el rango de la luz visible tiene aproximadamente  $N \simeq 0$  excitaciones.

### 3.3. Incorporando a la descripción el bombeo por láser

En esta sección se asume que el campo de la cavidad está en contacto con un modo del campo electromagnético exterior que se corresponde a un modo bombeado por un láser. Llamemos  $\hat{b}$  al operador correspondiente a ese modo. Entonces, el Hamiltoniano de interacción entre los modos del campo dentro de la cavidad y el campo externo está dado por:

$$H_L = \hbar\tilde{c} \left( ab^\dagger + a^\dagger b \right) \tag{3.13}$$

Este Hamiltoniano de interacción permite el intercambio de excitaciones entre los modos del campo del láser y el modo del campo dentro de la cavidad. Si se asume que el campo del láser se puede aproximar por un estado coherente, entonces se puede escribir el campo del láser como un campo clásico, y así la interacción está dada por:

$$H_L(t) = \hbar\eta \left( ae^{i\omega_l t} + a^\dagger e^{-i\omega_l t} \right) \quad (3.14)$$

Se agrega  $H_L$  a la descripción de la dinámica del sistema agregando  $H_L$  al término correspondiente a la evolución unitaria de la ec. (3.3). Esto está justificado en la medida en que  $\omega_l \gg \eta$ , donde  $\eta$  es proporcional a la intensidad del bombeo láser. Bajo esta suposición, el bombeo láser no cambia el acoplamiento con el campo externo, y las funciones de correlación del ambiente no se ven modificadas, de esta manera los coeficientes  $\gamma_k$  de la ec. (3.4) tampoco cambian al incorporar el bombeo láser. Bajo la misma suposición, se asume que los operadores de Lindblad no cambian al incorporar el láser a la descripción. De este modo, el disipador sigue estando dado por (3.4) y tomando  $H = H_C + H_L$ , la ec. (3.3) entonces queda

$$\dot{\rho}_s = -\frac{i}{\hbar} [H_C + H_L(t), \rho_s] + \mathcal{D}\rho_s \quad (3.15)$$

Pasando a un marco rotante con la frecuencia del láser, dado por:

$$U = e^{-i\frac{H_p t}{\hbar}}, \quad H_p \equiv \hbar\omega_l a^\dagger a, \quad (3.16)$$

se obtiene:

$$\dot{\tilde{\rho}}_s = -\frac{i}{\hbar} [H_C - H_p, \tilde{\rho}_s] - \frac{i}{\hbar} \eta [a + a^\dagger, \tilde{\rho}_s] + \mathcal{D}\tilde{\rho}_s \quad (3.17)$$

Nuevamente, usando (3.7) se encuentran ecuaciones para los valores de expectación de los operadores del sistema. Las ecuaciones obtenidas son:

$$\begin{cases} \frac{d\langle \widetilde{a} \rangle}{dt} = -i\frac{\eta}{\hbar} - (\kappa + i\Delta) \langle \widetilde{a} \rangle \\ \frac{d\langle \widetilde{a^\dagger a} \rangle}{dt} = -i\frac{\eta}{\hbar} (\langle a^\dagger \rangle + \langle a \rangle) - 2\kappa \langle \widetilde{a^\dagger a} \rangle + 2\kappa N \\ \frac{d\langle \widetilde{a^2} \rangle}{dt} = -2(i\Delta + \kappa) \langle \widetilde{a^2} \rangle - 2i\frac{\eta}{\hbar} \langle a \rangle \end{cases} \quad (3.18)$$

donde  $\Delta \equiv \omega_c - \omega_l$  es el *detuning* entre la frecuencia del láser y la frecuencia del modo de la cavidad. A diferencia del sistema de ecuaciones (3.10), se puede ver que ahora las ecuaciones están acopladas. Las soluciones al sistema de ecuaciones (3.18) son (en el marco de referencia estático):

$$\begin{cases} \langle a \rangle(t) = \beta_1 e^{-(\kappa + i\omega_c)t} - i\frac{\eta}{\hbar} \frac{e^{-i\omega_l t}}{(\kappa + i\Delta)} \\ \langle a^\dagger a \rangle(t) = \beta_2 e^{-2\kappa t} - i\frac{\eta}{\hbar} \left[ -\beta_1 \frac{e^{-i\Delta t}}{(\kappa - i\Delta)} + \beta_1^* \frac{e^{i\Delta t}}{(\kappa + i\Delta)} \right] e^{-\kappa t} + \frac{\eta^2}{\hbar^2} \frac{1}{(\kappa^2 + \Delta^2)} + N \\ \langle a^2 \rangle(t) = \beta_3 e^{-2(\kappa + i\omega_c)t} - i2\beta_1 \frac{\eta}{\hbar} \frac{e^{-i(\omega_c + \omega_l)t} e^{-\kappa t}}{(\kappa + i\Delta)} - \frac{\eta^2}{\hbar^2} \frac{e^{-i2\omega_l t}}{(\kappa + i\Delta)^2} \end{cases} \quad (3.19)$$

donde  $\beta_1, \beta_2$  y  $\beta_3$  son constantes de integración. Los valores de expectación del estado asintótico están dados en la ec. (3.20). Puede verse de estas ecuaciones que  $\langle a \rangle$  y  $\langle a^2 \rangle$  no tienden a 0 como se esperaría para un estado térmico, sino que oscilan a la frecuencia del láser. En este caso, *el estado asintótico no es térmico*.

También se puede ver de la ec. (3.20) que  $\langle a^\dagger a \rangle$ , además de tener el término  $N$  (correspondiente a la contribución al número de fotones por parte del baño térmico) tiene un término correspondiente a la contribución del láser. En el caso de que  $\kappa \rightarrow \infty$  (las pérdidas de la cavidad

son muy grandes), o de que  $\Delta \rightarrow \infty$  (el láser está lejos de la resonancia con el modo de la cavidad), se observa que las contribuciones del láser al número medio de excitaciones  $\langle a^\dagger a \rangle$  tiende a 0.

$$\begin{cases} \langle a \rangle(t) = -i \frac{\eta}{\hbar} \frac{e^{-i\omega t}}{(\kappa + i\Delta)} \\ \langle a^\dagger a \rangle(t) = \frac{\eta^2}{\hbar^2} \frac{1}{(\kappa^2 + \Delta^2)} + N \\ \langle a^2 \rangle(t) = -\frac{\eta^2}{\hbar^2} \frac{e^{-i2\omega t}}{(\kappa + i\Delta)^2} \end{cases} \quad (3.20)$$

Dado que *el estado asintótico es Gaussiano*, entonces está completamente determinado por sus primeros y segundos momentos [90]. Hay dos casos para analizar:  $T = 0$  y  $T \neq 0$ .

Para el caso bombeado a  $T = 0$

A  $T \rightarrow 0$  se tiene de la ec. que (3.6)  $N \rightarrow 0$ , es decir, no hay contribución del baño térmico al número de fotones dentro de la cavidad. En este caso se verifica por medio de la ec. (3.20) que  $\langle a^2 \rangle(t) = \langle a(t) \rangle^2$  y que  $\langle a^\dagger a \rangle(t) = \langle a(t) \rangle \langle a(t) \rangle^*$ . Comparando con la ec. (2.6), se ve que el estado asintótico a temperatura nula es el estado coherente con  $\alpha(t) = -i \frac{\eta}{\hbar} \frac{e^{-i\omega t}}{(\kappa + i\Delta)}$ .

Para el caso bombeado a  $T \neq 0$

A  $T \neq 0$  se tiene  $N \neq 0$  y por lo tanto  $\langle a^\dagger a \rangle(t) \neq \langle a(t) \rangle^* \langle a(t) \rangle$ . Entonces el estado asintótico a  $T > 0$  no es un estado coherente (ec. (2.6)). Además, ya que los valores de expectación de  $a$  y  $a^2$  no tienden a 0, tampoco es un estado térmico.

### 3.4. Campo dentro de una cavidad con pérdidas. Input-output

En esta sección, se utiliza el formalismo de “input-output” en el cual se tienen en cuenta explícitamente los “input” del baño térmico al sistema, y los “output” hacia el ambiente [91]. Para eso se derivan ecuaciones de Heisenberg-Langevin para los operadores del sistema, en las cuales las fuerzas de Langevin están dadas por los modos de “input”. Luego, estas ecuaciones se usan para encontrar el estado asintótico de las funciones de correlación del sistema, y a partir de estas, se pueden encontrar las funciones de correlación del sistema a tiempos grandes, y también el espectro emitido por la cavidad. La teoría de input-output permite modelar directamente las fluctuaciones que ingresan al sistema debido al contacto con un ambiente, además de permitir estudiar la luz emitida por la cavidad.

En un primer lugar, se consideran las pérdidas de la cavidad, a través de un ambiente correspondiente a un reservorio térmico. Para eso, se considera que el Hamiltoniano está dado por  $H = H_{sys} + H_B + H_{int}$ , donde  $H_{sys}$  está dado por

$$H_{sys} = \hbar \Omega_c a^\dagger a, \quad (3.21)$$

donde  $\Omega_c$  es la frecuencia del campo dentro de la cavidad, mientras que el Hamiltoniano del baño y su interacción con el sistema están dados respectivamente por ec. (3.22) y (3.23):

$$H_B = \hbar \sum_k \omega_k c_k^\dagger c_k \quad (3.22)$$

$$H_{int} = \hbar \sum_k (\gamma_k a c_k^\dagger + \gamma_k^* a^\dagger c_k) \quad (3.23)$$

Los operadores  $c_k$  corresponden al baño térmico de los operadores  $a$ , y la interacción describe procesos en los que se crea una excitación en la cavidad acompañada por una desexcitación de un modo del ambiente y viceversa. De las ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.23) se derivan las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para los operadores  $a$  y  $c_k$  (la dependencia temporal denota que los operadores están en representación de Heisenberg):

$$\dot{a}(t) = -i\Omega_c a(t) - i \sum_k \gamma_k^* c_k(t) \quad (3.24)$$

$$\dot{c}_k(t) = -i(\omega_k c_k(t) + \gamma_k a(t)) \quad (3.25)$$

$$(3.26)$$

Integrando (3.25) se obtiene:

$$c_k(t) = c_k(t_0) e^{-i\omega_k(t-t_0)} - i\gamma_k \int_{t_0}^t d\tau a(\tau) e^{i\omega_k(\tau-t)} \quad (3.27)$$

Reemplazando (3.27) en la ec. (3.24) se obtiene:

$$\dot{a}(t) = -i\Omega_c a(t) - i \sum_k \gamma_k^* c_k(t_0) e^{-i\omega_k(t-t_0)} - \sum_k |\gamma_k|^2 \int_{t_0}^t d\tau a(\tau) e^{i\omega_k(\tau-t)} \quad (3.28)$$

Luego se pasa la sumatoria a una integral, al hacer este cambio debe agregarse la densidad de modos con frecuencia  $\omega$ :  $\rho(\omega)$ . Entonces, haciendo el cambio  $\sum_k \rightarrow \int d\omega \rho(\omega)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) = & -i\Omega_c a(t) - i \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho(\omega) \gamma^*(\omega) c_\omega(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)} \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho(\omega) |\gamma(\omega)|^2 \int_{t_0}^t d\tau a(\tau) e^{i\omega(\tau-t)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

La integral en la ec. (3.29) tiene límites de integración entre  $-\infty$  y  $\infty$ , esto se debe a que comúnmente se trabaja en un marco rotante, y las frecuencias involucradas son en realidad diferencias de frecuencias. En la ec. (3.29) se puede ver que el tercer término depende del valor del operador  $a(\tau)$  a tiempos  $\tau$  anteriores a  $t$ . Para evitar esto, en la ec. (3.30) se hace la aproximación de que las constantes de acoplamiento son independientes de la frecuencia, es decir  $\gamma(\omega) \simeq \gamma(\omega_c) = \gamma$ . Esta aproximación está justificada en tanto que los modos más importantes de la interacción entre el sistema y el ambiente, son aquellos que tienen frecuencias cercanas a la frecuencia de resonancia de la cavidad. Bajo la misma suposición, la densidad de modos  $\rho(\omega)$  también es una constante, y puede absorberse en la constante de acoplamiento con el ambiente. Esto permite reescribir el tercer término de (3.29) para que sólo dependa del valor del operador  $a(t)$  al instante  $t$ , y por eso a esta aproximación se la llama primera aproximación Markoviana [92]. De esta forma, se obtiene una ecuación del tipo de una oscilación amortiguada (ec. (3.32)).

$$\dot{a}(t) = -i\Omega_c a(t) - i\gamma^* \int_{-\infty}^{\infty} d\omega c_\omega(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)} - |\gamma|^2 \int_{t_0}^t d\tau a(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(\tau-t)} \quad (3.30)$$

Usando que  $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(\tau-t)} = 2\pi\delta(\tau-t)$  y definiendo:

$$a_{in}(t) \equiv \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega c_\omega(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)}, \quad (3.31)$$

se tiene que



$$\begin{aligned}
\dot{a}(t) &= -i\Omega_c a(t) - \gamma^* \sqrt{2\pi} a_{in}(t) - |\gamma|^2 2\pi \int_{t_0}^t d\tau a(\tau) \delta(\tau - t) \\
&= -(i\Omega_c + \kappa) a(t) - \sqrt{2\kappa} a_{in}(t),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

donde en la última línea de (3.32) se hizo el reemplazo  $\gamma = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}$ . La ecuación (3.32) es una ecuación tipo Heisenberg-Langevin para los operadores del campo dentro de la cavidad. Los operadores  $a_{in}(t)$  pueden interpretarse como un campo estocástico. En el caso más simple, el que consideraremos a lo largo de este trabajo, representan las fluctuaciones de vacío del campo eléctrico acoplado a la cavidad al tiempo  $t$ . Sin embargo, este mismo formalismo podría usarse para describir estados estrujados u otros estados del campo externo a la cavidad.

### 3.4.1. Propiedades de los operadores de input

Bajo la suposición de un ambiente sin memoria o de ruido blanco, los operadores de input satisfacen  $[a_{in}(t), a_{in}^\dagger(t')] = \delta(t' - t)$ . El estado de input que más se acerca a las propiedades de ruido blanco clásico no es un ensamble térmico, sino uno en el que el operador densidad de input satisface:

$$\begin{aligned}
\langle a_{in}^\dagger(t) a_{in}(t) \rangle &\equiv \text{tr}(\rho_{in} a_{in}^\dagger(t) a_{in}(t)) = N \delta(t' - t) \\
\langle a_{in}(t) a_{in}^\dagger(t) \rangle &\equiv \text{tr}(\rho_{in} a_{in}(t) a_{in}^\dagger(t)) = (N + 1) \delta(t' - t)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Esto se corresponde con [91]:

$$\begin{aligned}
\langle c_\omega^\dagger(t_0) c_\omega(t_0) \rangle &\equiv \text{tr}(\rho_{in} c_\omega^\dagger(t_0) c_\omega(t_0)) = N \delta(\omega - \omega'), \\
\langle c_\omega(t_0) c_\omega^\dagger(t_0) \rangle &\equiv \text{tr}(\rho_{in} c_\omega(t_0) c_\omega^\dagger(t_0)) = (N + 1) \delta(\omega - \omega'),
\end{aligned} \tag{3.34}$$

donde  $\rho_{in}$  es un estado de input tal que el número de excitaciones  $N$  por unidad de ancho de banda es constante (no depende de  $\omega$ ). De todas formas, se asume que en las frecuencias en donde es constante, el valor de  $N$  es el correspondiente al de un estado térmico en la frecuencia  $\omega_c$  (dado por la ec. (3.6)).



## Capítulo 4

# Acoplamiento dispersivo entre átomos y cavidades.

En este capítulo se describe la interacción entre el campo dentro de una cavidad resonante y un átomo atrapado dentro de la misma. Los detalles del acoplamiento de este sistema pueden ser ajustados finamente a partir de cambiar los parámetros del láser. Esta flexibilidad convierte a estos sistemas en excelentes candidatos para la preparación de estados [8].

### 4.1. Aproximación de campo clásico

El sistema considerado en esta sección consiste de un átomo interactuando con un modo del campo electromagnético bombeado por un láser. En la aproximación del campo clásico se considera sólo el Hamiltoniano del átomo  $H_a$  y la interacción del campo electromagnético con este (sin tener en cuenta el Hamiltoniano del campo). Se considera que el campo tiene una amplitud proporcional a  $\Omega$ , la frecuencia de Rabi en resonancia [93]. Se asume que la frecuencia  $\omega_c$  se encuentra cerca de resonancia con la transición dipolar (de frecuencia  $\omega_0$ ) entre dos niveles atómicos. En este régimen, el nivel cercano a la resonancia será el más poblado, y por esto puede tenerse en consideración sólo este par de niveles:  $|e\rangle$  y  $|g\rangle$ , el nivel excitado y el fundamental del átomo, respectivamente. Se considera que el 0 de la energía del átomo se encuentra en el estado fundamental. Así se obtiene que el Hamiltoniano que describe la dinámica del sistema está dado por [89]:

$$\begin{aligned} H &= H_a + H_{int}(t) \\ &= \hbar\omega_0|e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\Omega}{2}(e^{i\omega_c t} + e^{-i\omega_c t})(\sigma_+ + \sigma_-), \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $\sigma_+$  y  $\sigma_-$  son operadores subida y bajada;  $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$  describe la absorción de un fotón seguida por la excitación del átomo, en tanto que  $\sigma_- = \sigma_+^\dagger$  describe la correspondiente emisión de un fotón acompañada por la desexcitación del átomo. Utilizando el operador unitario

$$U = e^{-i\omega_c t|e\rangle\langle e|}, \quad (4.2)$$

se puede pasar a un marco de referencia rotante con la frecuencia del campo electromagnético por medio de la transformación:

$$\tilde{H} = U^\dagger H U - i\hbar U^\dagger \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (4.3)$$

Entonces en el marco rotante el Hamiltoniano es

$$\tilde{H} = \hbar\Delta_\alpha |e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\Omega}{2}(e^{i\omega_c t} + e^{-i\omega_c t})(e^{i\omega_c t}\sigma_+ + e^{-i\omega_c t}\sigma_-), \quad (4.4)$$

donde  $\Delta_\alpha = \omega_0 - \omega_c$  es la desintonía entre la frecuencia del campo y la frecuencia de la transición atómica.

En esta representación el operador de evolución temporal está dado por:

$$\begin{aligned} U &= \underline{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t ds \tilde{H}(s)\right) \\ &= \underline{T} \exp\left(-i\Delta_\alpha |e\rangle\langle e| t - i \int_0^t ds \frac{\Omega}{2}(e^{i2\omega_c s}\sigma_+ + \sigma_- + \sigma_+ + e^{-i2\omega_c s}\sigma_-)\right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde puede verse que las escalas de tiempo asociadas a la amplitud de  $\tilde{H}(t)$  son  $\frac{\Omega}{2}$  y  $\Delta_\alpha$ , mientras que dos de sus términos oscilan a frecuencias  $2\omega_c$ . En el rango de las frecuencias ópticas, se tiene que  $\Delta_\alpha, \frac{\Omega}{2} \ll 2\omega_c$ . Por lo que en ese régimen estos términos oscilan a una escala mucho más rápida que la escala de tiempo asociada a la amplitud del Hamiltoniano, y por lo tanto se pueden despreciar. Esto constituye la *aproximación de onda rotante*.

Al hacer esta aproximación, se obtiene que el Hamiltoniano en el marco rotante, definido por la transformación (4.2), está dado por (4.6):

$$\tilde{H} = \hbar\Delta_\alpha |e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma_+ + \sigma_-) \equiv \tilde{H}_a + \tilde{H}_I \quad (4.6)$$

Bajo la suposición de que  $|\Delta_\alpha|$  es muy grande comparado con  $\Omega$ ,  $\tilde{H}_I$  puede considerarse como una perturbación a los niveles de energía del átomo. Utilizando teoría de perturbaciones independiente del tiempo se obtienen los niveles de energía del sistema:

$$\begin{aligned} E_e &= \hbar\Delta_\alpha + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta_\alpha} \\ E_g &= -\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta_\alpha} \end{aligned} \quad (4.7)$$

La condición  $|\Delta_\alpha| \gg 1$  representa que la frecuencia del campo electromagnético está suficientemente lejos de la frecuencia de la transición  $\omega_0$  entre los niveles atómicos de forma tal que no se produzcan transiciones directas entre los niveles  $|e\rangle$  y  $|g\rangle$ , pero sin embargo siguen ocurriendo interacciones dispersivas entre el campo y el átomo (régimen dispersivo) [93].

En general, la amplitud del campo  $\Omega$  es una función dependiente de la posición [93], por lo que el corrimiento de los niveles de energía depende de la posición. Esto genera un potencial efectivo para los grados de libertad de movimiento. Si se piensa por ejemplo en una onda estacionaria se tiene que  $\Omega = \Omega_0 \cos(kx)$ . En ese caso se tiene:

$$E_e \approx \hbar\Delta_\alpha + \frac{\hbar\Omega_0^2}{4\Delta_\alpha} \cos^2(kx) \quad (4.8)$$

$$E_g \approx -\frac{\hbar\Omega_0^2}{4\Delta_\alpha} \cos^2(kx) \quad (4.9)$$

Se ve que la energía del nivel fundamental queda igualmente descripta por un Hamiltoniano de la forma:

$$H_{eff} = V_{eff}(x)|g\rangle\langle g|, \quad (4.10)$$

donde  $V_{eff}(x) = -\frac{\hbar\Omega_0^2}{4\Delta_\alpha} \cos^2(kx)$  es el potencial efectivo para los grados de libertad de movimiento. De esta manera, la energía del estado fundamental depende de la posición del átomo: si el átomo se encuentra en este estado, tiende a confinarse en los mínimos de este potencial. Esto proporciona el mecanismo para atrapar átomos en redes ópticas [94].

## 4.2. Campo cuantizado

En esta sección se estudia el mismo sistema que en la sección 4.1, es decir, un átomo interactuando con un modo del campo electromagnético. Pero en este caso, se trata el campo electromagnético cuantizado. Para estudiar el acoplamiento entre los niveles de energía de un átomo y el campo electromagnético, se va a suponer que sólo un modo del campo se acopla al átomo. Esta clase de interacción resulta particularmente relevante cuando el átomo está confinado en un resonador [95]. Nuevamente se supone que el modo del campo considerado se encuentra cerca de resonancia con la transición entre un par de niveles atómicos, lo que favorece mayormente la transición entre esos dos niveles. Por esta razón pueden tenerse en cuenta sólo estos niveles. El Hamiltoniano (4.11) describe la dinámica del sistema compuesto por ese único modo de la cavidad y el átomo de dos niveles.

$$H = H_c + H_a + H_I \quad (4.11)$$

Donde:

$$\begin{aligned} H_c &= \hbar\omega_c a^\dagger a && \text{campo dentro de la cavidad} \\ H_a &= \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e| && \text{átomo de dos niveles} \\ H_I &= \hbar\tilde{\Omega}(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) && \text{interacción entre ambos sistemas} \end{aligned} \quad (4.12)$$

El Hamiltoniano  $H_I$  describe el acoplamiento dipolar entre el modo de la cavidad y el átomo. En el mismo ya se realizó la aproximación de onda rotante como en la sección 4.1. Contiene un término correspondiente a la absorción de un fotón acompañada de la excitación del átomo, y otro término correspondiente a la emisión de un fotón con el consecuente decaimiento del átomo al nivel fundamental. La frecuencia  $\tilde{\Omega}$  da la intensidad del acoplamiento entre el modo de la cavidad y el átomo, y análogamente a la de la sección 4.1,  $\tilde{\Omega}$  depende del momento dipolar del átomo, de la geometría de la cavidad y tiene la dependencia espacial del campo eléctrico [96]. Si se supone que  $|\Delta_\alpha| \gg \tilde{\Omega}$ , ( $\Delta_\alpha \equiv \omega_0 - \omega_c$ ) entonces se puede considerar a  $H_I$  como una perturbación y utilizar teoría de perturbaciones independiente del tiempo, obteniendo así los niveles de energía (4.14) del sistema.

$$E_{|e,n\rangle} \approx \hbar\omega_0 + \hbar\omega_c n + \frac{\hbar\tilde{\Omega}^2(n+1)}{\Delta_\alpha} \quad (4.13)$$

$$E_{|g,n\rangle} \approx \hbar\omega_c n - \frac{\hbar\tilde{\Omega}^2 n}{\Delta_\alpha} \quad (4.14)$$

Si  $|\Delta_\alpha| \gg \tilde{\Omega}\sqrt{n}$ , con  $n$  el número de fotones, es posible despreciar la excitación del átomo debida al campo, y dado que el nivel excitado decae espontáneamente se puede despreciar la población del mismo. En este régimen, se puede pensar que todos los átomos están en el estado fundamental y así estudiar únicamente la dinámica de este estado. El corrimiento en la energía del estado fundamental (4.14) se corresponde con un Hamiltoniano efectivo (4.15):

$$H_{fund} = \hbar\omega_{eff} a^\dagger a, \quad (4.15)$$

en el cual no aparece un término de interacción entre el átomo y el campo, sino solo una frecuencia efectiva  $\omega_{eff}$  dada por:

$$\omega_{eff} = \left( \omega_c - \frac{\tilde{\Omega}^2}{\Delta_\alpha} \right), \quad (4.16)$$

de este modo, se ve que la presencia del átomo generó un corrimiento en la frecuencia del modo de la cavidad.

En general,  $\tilde{\Omega}$  es una función de la posición del átomo,  $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(\vec{\mathbf{r}})$  [96]. En el caso particular de una onda estacionaria se tiene  $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_0 \cos(kx)$ , y se obtiene el Hamiltoniano

$$H_{fund} = \hbar \left( \omega_c - \frac{\tilde{\Omega}_0^2 \cos^2(kx)}{\Delta_\alpha} \right) a^\dagger a, \quad (4.17)$$

con energía (4.18) para el estado fundamental.

$$E_{|g,n\rangle}(x) = \hbar\omega_c n - \frac{\hbar\tilde{\Omega}_0^2 \cos^2(kx)n}{\Delta_\alpha} \quad (4.18)$$

Así, la energía del estado fundamental depende de la posición del átomo, lo que da un *acoplamiento entre la intensidad del campo y la posición del átomo*. Por último, se observa que si en la ec. (4.13) se reemplaza  $\tilde{\Omega}^2 a^\dagger a$  por  $\frac{\Omega^2}{4}$  se recupera el resultado (4.7), para el cual se había considerado la aproximación clásica del campo.

Tratando el campo tanto clásica como cuánticamente se obtuvo que hay un potencial efectivo para el nivel fundamental (ecs. (4.9) y (4.15)). Si se considera que los átomos pueden enfriarse lo suficiente, y en ausencia de otros potenciales externos, el átomo queda atrapado en uno de los mínimos del potencial efectivo, como se ilustra en la Fig. 4.1. En el caso de iones atrapados, los grados de libertad de movimiento se acoplan también al potencial de la trampa; por lo tanto, la posición de equilibrio dependerá también de este potencial.

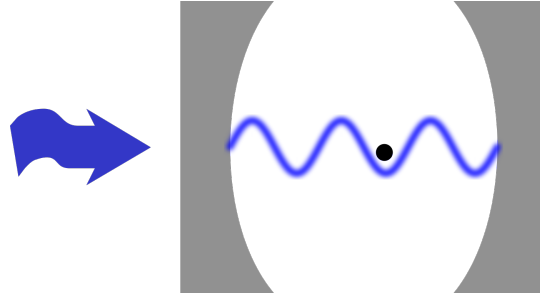


Figura 4.1: La transición dipolar de un átomo se acopla fuertemente con un modo de una cavidad óptica. En el régimen dispersivo, esto genera un potencial efectivo para el movimiento del átomo.

## Capítulo 5

# Descripción teórica de un ion acoplado dispersivamente a una cavidad bombeada por un láser

### 5.1. Ecuaciones de movimiento

En esta sección se estudia el estado estacionario de las excitaciones vibracionales de un ion en una cavidad, utilizando una aproximación semiclásica. El sistema tratado en esta sección es un caso particular del sistema de  $N$  iones atrapados estudiado más detalladamente en [1]. El Hamiltoniano del sistema en el marco de referencia rotante con el láser está dado por:

$$H_{sys} = H_{cav} + H_{el} + H_{ion} + H_{JC}, \quad (5.1)$$

donde:

$$H_{cav} = -\hbar\Delta_c a^\dagger a + H_{laser}, \quad (5.2)$$

es el Hamiltoniano de la cavidad. Los operadores  $a^\dagger$  y  $a$  crean y aniquilan un fotón de la cavidad, respectivamente; y  $\Delta_c = \omega_l - \omega_c$  es la desintonía entre la frecuencia del campo del láser y el modo de la cavidad. El Hamiltoniano del láser está dado por:

$$H_{laser} = \lambda \left( ac^\dagger + a^\dagger c \right) \quad (5.3)$$

Si el modo del campo del láser está en un estado coherente con un número de ocupación muy grande, entonces el campo del láser en ese modo puede aproximarse por un campo clásico  $\Rightarrow c \in \mathbb{C}$  [68]:

$$\begin{aligned} H_{laser} &= \hbar\lambda \left( c^* a + ca^\dagger \right) \\ &= -i\hbar \left( \eta^* a - \eta a^\dagger \right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde en la última línea se usó  $i\eta = \lambda c$ . El término  $H_{el}$  describe un átomo de dos niveles, donde  $|e\rangle$  es el estado excitado del electrón, y  $\Delta_0 = \omega_l - \omega_0$  es la desintonía entre la frecuencia del láser y la frecuencia de la transición dipolar:

$$H_{el} = -\hbar\Delta_0 |e\rangle\langle e|, \quad (5.5)$$

mientras que el Hamiltoniano para los grados de libertad de movimiento del ion es:

$$H_{ion} = \frac{p^2}{2m} + V_{ion}(x) \quad (5.6)$$

Aquí,  $V_{ion}$  comprende sólo el potencial  $V_{trap}$  de la trampa, pero en el caso de considerar más de un ion hay que incluir además el potencial de Coulomb.  $V_{trap}(x)$  describe un potencial armónico:

$$V_{trap}(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \quad (5.7)$$

El Hamiltoniano de interacción entre el campo y el átomo está dado en la aproximación dipolar por [93]:

$$H_{JC} = \hbar\tilde{\Omega}(x) (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger), \quad (5.8)$$

y describe la absorción de un fotón seguida por la excitación del átomo, dada por el operador  $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ , y la correspondiente emisión de un fotón acompañada por la desexcitación del átomo, dada por  $\sigma_- = \sigma_+^\dagger$ . La frecuencia  $\tilde{\Omega}(x)$  da la intensidad del acoplamiento entre el campo de la cavidad y el ion en la posición  $x$ .

Al igual que en la sección (4.2), en el caso de que  $|\Delta_0| \gg \tilde{\Omega}(x), |\Delta_c|$ , es decir, que la frecuencia del campo está fuera de resonancia con la transición atómica, no se estimulan las transiciones al nivel excitado. En esta sección, se asume que la escala de tiempo más rápida está determinada por  $\Delta_0$ , es decir que  $|\Delta_0| \gg \kappa, |\Delta_c|, \tilde{\Omega}_0\sqrt{N}$ . De este modo, bombeando el nivel excitado por debajo de la saturación este puede ser eliminado adiabáticamente [97, 98], dando lugar así a un potencial efectivo correspondiente al nivel fundamental de los grados de libertad electrónicos [1]:

$$H_{eff} = -\hbar \left( \Delta_c - \frac{\tilde{\Omega}^2(x)}{\omega_c - \omega_0} \right) a^\dagger a - i\hbar (\eta^* a - \eta a^\dagger) + \frac{p^2}{2m} + V_{trap}(x), \quad (5.9)$$

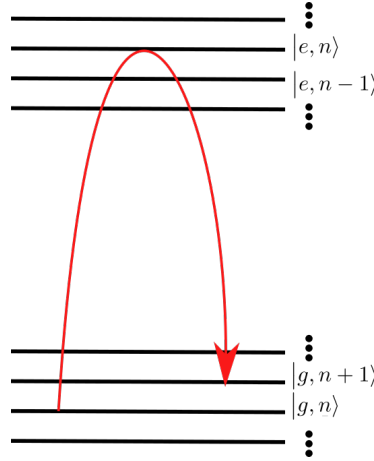


Figura 5.1: Eliminación adiabática del estado excitado. El estado excitado  $|e\rangle$  sólo aparece como un estado virtual intermedio y el átomo siempre regresa al estado fundamental  $|g\rangle$ . Los niveles  $|n\rangle$  representan estados vibracionales.

Esto genera un acoplamiento entre el campo y los estados vibracionales. En este caso, el estado excitado  $|e\rangle$  sólo aparece como un estado virtual intermedio y el átomo siempre regresa al estado fundamental  $|g\rangle$  [31] como se ilustra en la Fig. 5.1. Estas transiciones mediadas por el campo se deben a la dependencia en de la posición en  $\tilde{\Omega}(x)$ . Esto genera una dinámica en el



estado fundamental que está mediada por el estado excitado. Asumiendo  $|\Delta_c| \ll |\Delta_0|$ , se puede aproximar  $\omega_c - \omega_0 = \Delta_0 - \Delta_c \approx \Delta_0$ . Entonces

$$H_{eff} = -\hbar \left( \Delta_c - \frac{\tilde{\Omega}^2(x)}{\Delta_0} \right) a^\dagger a - \hbar i \left( \eta^* a - \eta a^\dagger \right) + \frac{p^2}{2m} + V_{trap}(x) \quad (5.10)$$

Esta descripción no considera la posibilidad de que el átomo absorba un fotón de la cavidad y lo reemita por emisión espontánea en modos del campo externo; esto es correcto en tanto  $|\Delta_0|$  sea mucho mayor que la tasa de emisión espontánea. Hay dos maneras equivalentes de tratar al sistema como un sistema abierto: La ecuación maestra (capítulo 3), y utilizando el formalismo de las ecuaciones de Heisenberg-Langevin. Preferimos este último porque permite describir propiedades del campo emitido por la cavidad. Utilizando el formalismo de input-output detallado en la sección (3.4) se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = (i\Delta_{eff} - \kappa) a(t) + \eta - \sqrt{2\kappa} a_{in}(t) \\ \dot{x}(t) = \frac{p}{m} \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} V_{ion}(x) - \hbar \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tilde{\Omega}^2(x)}{\Delta_0} \right) a^\dagger a \end{cases} \quad (5.11)$$

donde  $\Delta_{eff}$  está dado por

$$\Delta_{eff} = \left( \Delta_c - \frac{\tilde{\Omega}^2(x)}{\Delta_0} \right) \quad (5.12)$$

Al igual que en la sección 3.2 el acoplamiento al ambiente lleva a una tasa de decaimiento de los fotones dentro de la cavidad a una tasa  $2\kappa$ . Este canal de decaimiento está caracterizado por la emisión de un fotón de la cavidad en un fotón del campo electromagnético externo, que luego puede utilizarse para realizar mediciones del estado del sistema acoplado dentro de la cavidad.

## 5.2. Límite semiclásico

Bajo la suposición de que las fluctuaciones de los operadores  $a, p$  y  $x$  alrededor de sus valores medios son muy pequeñas, se puede tratar de encontrar las soluciones a las ecuaciones de movimiento del Hamiltoniano (5.10) teniendo en cuenta las pérdidas de la cavidad y el contacto con un baño térmico. Para eso, se descomponen los operadores como una suma de sus valores medios y sus fluctuaciones:

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} + \delta a \\ x &= \bar{x} + \delta x \\ p &= \bar{p} + \delta p \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde  $\bar{a} \equiv \langle a \rangle$ ,  $\bar{x} \equiv \langle x \rangle$ , y  $\bar{p} \equiv \langle p \rangle$ , es decir que los valores de expectación de  $\delta a$ ,  $\delta x$  y  $\delta p$  se anulan.

### 5.2.1. Valores de equilibrio

Las ecuaciones de movimiento para los valores medios se encuentran a partir de despreciar los operadores de input en las ecuaciones (5.11):

$$\dot{\bar{a}}(t) = (i\Delta_{eff} - \kappa)\bar{a} + \eta \quad (5.14)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \frac{\bar{p}}{m} \quad (5.15)$$

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} V_{ion}(x) - \hbar \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\tilde{\Omega}^2(x)}{\Delta_0} \right) |\bar{a}|^2 \quad (5.16)$$

Para determinar los valores de equilibrio clásicos, se requiere que las cantidades  $\bar{a}$ ,  $\bar{x}$  y  $\bar{p}$  correspondan a soluciones estacionarias de las ecuaciones de movimiento:  $\partial_t \bar{a} = 0$ ,  $\partial_t \bar{x} = 0$  y  $\partial_t \bar{p} = 0$ . Así, de la ec. (5.14) se obtiene:

$$\bar{a} = \frac{\eta}{\kappa - i\Delta_{eff}}, \quad (5.17)$$

de donde puede verse que la intensidad del campo dentro de la cavidad como función de la desintonía  $\Delta_{eff}$  es una lorentziana de ancho  $2\kappa$  (ec. (5.18)) tal como se muestra en la Fig. 5.2.

$$|\bar{a}|^2 = \frac{\eta^2}{\kappa^2} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \Delta_{eff}^2} \quad (5.18)$$

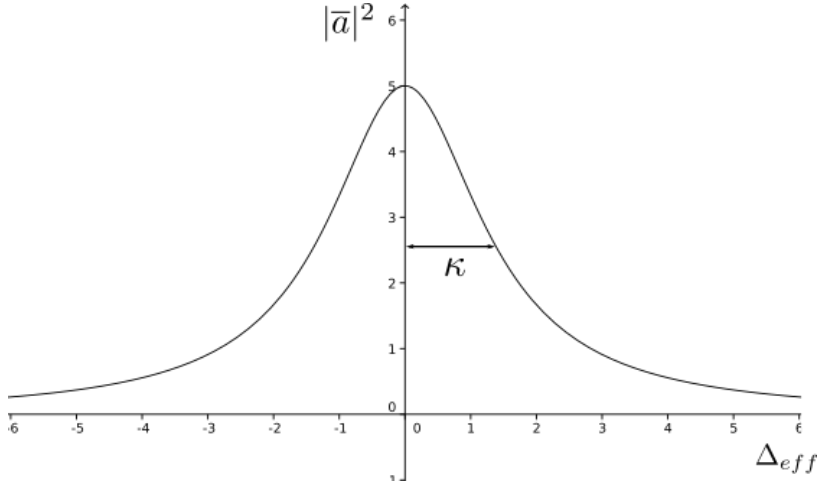


Figura 5.2: Intensidad del campo en el interior de la cavidad como función de la desintonía entre el bombeo láser y la frecuencia efectiva de la cavidad.

De la ec. (5.15) se tiene:

$$\bar{p} = 0, \quad (5.19)$$

mientras que de la ec. (5.16) se tiene que el valor clásico de equilibrio para la posición de los iones es tal que satisface:

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (V_{ion}(\bar{x}) + V_{eff}(\bar{x})), \quad (5.20)$$

donde  $V_{eff}$  está dado por [1]:

$$V_{eff}(\bar{x}) = \frac{\hbar|\eta|^2}{\kappa} \arctan\left(-\frac{\Delta_{eff}}{\kappa}\right) \quad (5.21)$$

### 5.2.2. Fluctuaciones

Reemplazando las ecuaciones (5.13) en las ecuaciones (5.11), utilizando que los valores de equilibrio satisfacen las ecuaciones (5.14)-(5.16) y reteniendo sólo los términos de primer orden en las fluctuaciones se obtienen las ecuaciones de movimiento para las fluctuaciones:

$$\dot{\delta a} = (i\Delta_{eff} - \kappa) \delta a - i\bar{a} \frac{\partial U_0(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \delta x - \sqrt{2\kappa} a_{in}(t) \quad (5.22)$$

$$\dot{\delta p} = -\hbar \frac{\partial U_0(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \left( \bar{a} \delta a^\dagger + \bar{a}^* \delta a \right) - \left( \hbar |\bar{a}|^2 \frac{\partial^2 U_0(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 V_{ion}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \right) \delta x \quad (5.23)$$

$$\dot{\delta x} = \frac{\delta p}{m} \quad (5.24)$$

donde

$$U_0(\bar{x}) = \frac{\tilde{\Omega}^2(\bar{x})}{\Delta_0} \quad (5.25)$$

Esta descripción linealizada sólo es correcta en el llamado régimen de Lamb-Dicke. En este, la amplitud de movimiento de los iones en la dirección de radiación es mucho menor que  $\lambda/2\pi$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la radiación [10, 99]. Si las fluctuaciones del campo son 0, entonces las ecuaciones (5.23) y (5.24) son las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico con frecuencia dada por

$$m\omega_v^2 = \left( \hbar |\bar{a}|^2 \frac{\partial^2 U_0(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 V_{ion}(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \right), \quad (5.26)$$

esto justifica la descripción en términos de operadores creación y aniquilación según:

$$\begin{aligned} \delta x = q &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_v}} (b + b^\dagger), \\ \delta p = p &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_v}{2}} (b^\dagger - b), \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde los operadores  $b$  y  $b^\dagger$  son operadores bosónicos que aniquilan y crean un cuanto de energía del modo de vibración con frecuencia  $\omega_v$ .

Ahora, se incluye un ambiente para los modos de vibración, por simplicidad se asume que el ambiente está dado por un baño térmico de osciladores armónicos:

$$\begin{aligned} H_B &= \hbar \sum_k \Omega_k d_k^\dagger d_k \\ H_{int} &= \hbar \sum_k (\Gamma_k b d_k^\dagger + \Gamma_k^* b^\dagger d_k) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Y de la misma forma, la ec. para los modos de vibración queda:

$$\dot{b}(t) = -(i\omega_v + \Gamma)b(t) - i\bar{a}c_0 \left( \delta a(t) + \delta a^\dagger(t) \right) - \sqrt{2\Gamma} b_{in}(t), \quad (5.29)$$

donde  $b_{in}(t)$  está definido de manera análoga a  $a_{in}(t)$  como:

$$b_{in}(t) \equiv \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d_\omega(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)}, \quad (5.30)$$

y  $c_0$  está dado por:

$$c_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_v}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} U_0(\bar{x}). \quad (5.31)$$

Este tratamiento para las vibraciones es correcto en tanto  $\omega_v \gg \Gamma$ . La disipación mecánica en sistemas de iones atrapados tiene diversos orígenes, entre ellos se encuentran [99]:

- **Decoherencia radiativa.** Una fuente fundamental de la decoherencia del modo de movimiento del centro de masa puede entenderse considerando que el dipolo asociado con la carga oscilante de los iones se acopla a los campos electromagnéticos del ambiente.
- **Ruido en los electrodos.** El estado vibracional de los iones puede perder coherencia debido a las fluctuaciones en el potencial de los electrodos.
- **Excitación de las vibraciones por los campos de radiofrecuencia en una trampa Paul.**

En [99] se especifican en mucho más detalle las fuentes de decoherencia recién nombradas y otras fuentes adicionales de decoherencia en el movimiento de los iones.

En general, todos los operadores de input tienen los valores de expectación usuales de operadores creación y aniquilación bosónicos:

$$\begin{aligned} \langle a_{in}^\dagger(t) a_{in}(t) \rangle &= n \delta(t' - t) \\ \langle a_{in}(t) a_{in}^\dagger(t) \rangle &= (n + 1) \delta(t' - t) \\ \langle b_{in}^\dagger(t) b_{in}(t) \rangle &= N \delta(t' - t) \\ \langle b_{in}(t) b_{in}^\dagger(t) \rangle &= (N + 1) \delta(t' - t) \\ \langle a_{in}(t) b_{in}(t) \rangle &= \langle a_{in}(t) b_{in}^\dagger(t) \rangle = \langle a_{in}^\dagger(t) b_{in}(t) \rangle = \langle a_{in}^\dagger(t) b_{in}^\dagger(t) \rangle = 0 \\ \langle b_{in}(t) a_{in}(t) \rangle &= \langle b_{in}(t) a_{in}^\dagger(t) \rangle = \langle b_{in}^\dagger(t) a_{in}(t) \rangle = \langle b_{in}^\dagger(t) a_{in}^\dagger(t) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

De esta manera, las ecuaciones de movimiento (5.22) y (5.29) para los modos del sistema quedan:

$$\begin{cases} \dot{\delta a} = (i\Delta_{eff} - \kappa) \delta a - i\bar{a}c_0 (b + b^\dagger) - \sqrt{2\kappa} a_{in}(t) \\ \dot{b}(t) = -(i\omega_v + \Gamma)b(t) - i\bar{a}c_0 (\delta a(t) + \delta a^\dagger(t)) - \sqrt{2\Gamma} b_{in}(t) \end{cases} \quad (5.33)$$

La descripción lineal dada en las ecuaciones (5.33) es válida incluso cuando el número de fotones en la cavidad es bajo [54]. Notar que el acoplamiento entre los modos vibracionales y del campo  $g \equiv \bar{a}c_0$  es una función de la intensidad del bombeo láser, y de la posición de equilibrio del ion.

También es conveniente notar que las ecuaciones (5.33) son equivalentes a las ecuaciones que se obtienen de aplicar la teoría de input-output descrita en la sección 3.4 a un sistema con un Hamiltoniano dado por:

$$H_{sys} = -\hbar\Delta_{eff} \delta a^\dagger \delta a + \hbar\omega_v b^\dagger b + \hbar g (\delta a + \delta a^\dagger) (b + b^\dagger) \quad (5.34)$$

$$H_B = \hbar \sum_k \omega_k c_k^\dagger c_k + \hbar \sum_k \Omega_k d_k^\dagger d_k \quad (5.35)$$

$$H_{int} = \hbar \sum_k (\gamma_k \delta a c_k^\dagger + \gamma_k^* \delta a^\dagger c_k) + \hbar \sum_k (\Gamma_k b d_k^\dagger + \Gamma_k^* b^\dagger d_k), \quad (5.36)$$

donde  $H_{sys}$  es el Hamiltoniano del sistema compuesto por el modo de la cavidad y el modo vibracional,  $H_B$  el del ambiente, y  $H_{int}$  el de la interacción (que se asume débil).

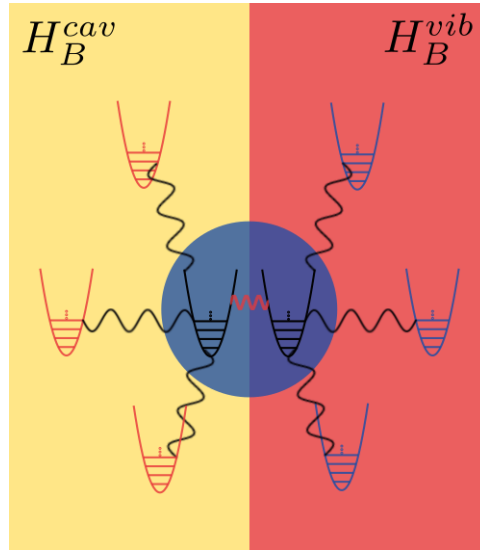


Figura 5.3: Esquema de la interacción entre los sistemas y con cada uno de sus correspondientes reservorios. Cada uno de los modos del sistema interactúa indirectamente con el ambiente del otro, ya que ambos pueden intercambiar excitaciones entre sí.

### 5.3. Análisis de la evolución unitaria de las fluctuaciones

De acuerdo a lo visto en la sección anterior, las vibraciones del átomo están acopladas a las fluctuaciones del campo en la cavidad. En esta sección se analizan las resonancias de la evolución puramente unitaria. El Hamiltoniano está dado por:

$$H = H_a + H_v + H_{int}, \quad (5.37)$$

donde

$$\begin{aligned} H_a &= -\hbar\Delta_{eff}\delta a^\dagger\delta a && \text{campo dentro de la cavidad} \\ H_v &= \hbar\omega_v b^\dagger b && \text{vibraciones del átomo} \\ H_I &= \hbar g(\delta a + \delta a^\dagger)(b + b^\dagger) && \text{interacción entre ambos sistemas} \end{aligned} \quad (5.38)$$

da las mismas ecuaciones de movimiento (5.33), en el caso en el que se desprecia la interacción con el ambiente de cada subsistema. En la representación interacción

$$\tilde{H} = \hbar g \left[ \delta a b e^{i(\Delta_{eff}-\omega_v)t} + \delta a b^\dagger e^{i(\Delta_{eff}+\omega_v)t} + \delta a^\dagger b e^{-i(\Delta_{eff}+\omega_v)t} + \delta a^\dagger b^\dagger e^{-i(\Delta_{eff}-\omega_v)t} \right] \quad (5.39)$$

Si  $\Delta_{eff} = -\omega_v$

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \hbar g \left[ \delta a b e^{-i2\omega_v t} + \delta a b^\dagger + \delta a^\dagger b + \delta a^\dagger b^\dagger e^{i2\omega_v t} \right] \\ &\approx \hbar g \left[ \delta a b^\dagger + \delta a^\dagger b \right], \end{aligned} \quad (5.40)$$

donde en la segunda línea se usó la aproximación de onda rotante. En la representación original, el Hamiltoniano se aproxima por:

$$\Rightarrow H \approx H_a + H_v + \hbar g \left( \delta a b^\dagger + \delta a^\dagger b \right) \quad (5.41)$$

De esta forma tenemos dos osciladores de la misma frecuencia que pueden intercambiar excitaciones. Este es el caso relevante para enfriamiento en el llamado régimen de *resolved sidebands* [100, 101]: se transfiere la energía de los fonones al modo del campo electromagnético; y también para transferir estados entre luz y movimiento [55, 57]. En este caso la interacción es del tipo *beam-splitter* [102]. En representación de Heisenberg se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_H &= -\frac{i}{\hbar} [a_H, H] \\ &= -i(\omega_v a_H + g b_H) \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} b_H &= -\frac{i}{\hbar} [b_H, H] \\ &= -i(\omega_v b_H + g a_H) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Los autovalores de este sistema de ecuaciones son  $\lambda_{\pm} = i(\omega_v \pm g)$ , y las soluciones:

$$\begin{aligned} \delta a_H(t) &= \left[ \left( \frac{\delta a + b}{2} \right) e^{-igt} + \left( \frac{\delta a - b}{2} \right) e^{igt} \right] e^{i\omega_v t} \\ b_H(t) &= \left[ \left( \frac{\delta a + b}{2} \right) e^{-igt} - \left( \frac{\delta a - b}{2} \right) e^{igt} \right] e^{i\omega_v t} \end{aligned} \quad (5.44)$$

es decir que la evolución es oscilatoria. Por ejemplo, si  $gt_1 = \pi/2$ , se tiene  $\delta a_H(t_1) = -ib_H(t_0) = -ib$ ,  $b_H(t_1) = -i\delta a_H(t_0) = -ia$ . Es decir, el estado se intercambia entre vibraciones y fluctuaciones del campo, mientras que a  $gt_2 = 2\pi$  se vuelve al estado inicial.

Si  $\Delta_{eff} = \omega_v$

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \hbar g \left[ \delta a b + \delta a b^\dagger e^{i2\omega_v t} + \delta a^\dagger b e^{-i2\omega_v t} + \delta a^\dagger b^\dagger \right] \\ &\approx \hbar g \left[ \delta a b + \delta a^\dagger b^\dagger \right], \end{aligned} \quad (5.45)$$

donde en la segunda línea se volvió a usar la aproximación de onda rotante. En la representación original:

$$\Rightarrow H \approx H_a + H_v + \hbar g \left( \delta a b + \delta a^\dagger b^\dagger \right) \quad (5.46)$$

Este tipo de interacción describe un *squeezing* de dos modos [71]. En ausencia de disipación, esto lleva a un crecimiento exponencial de las energías almacenadas en cada modo, y al establecimiento de fuertes correlaciones entre ambos. En este caso se tiene de las ecuaciones de Heisenberg:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta a_H &= -\frac{i}{\hbar} [\delta a_H, H] \\ &= i(\omega_v \delta a_H - g b_H^\dagger) \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} b_H^\dagger &= -\frac{i}{\hbar} [b_H^\dagger, H] \\ &= i(\omega_v b_H^\dagger + g \delta a_H) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Los autovalores de este sistema de ecuaciones son  $\lambda_{\pm} = i\omega_v \pm g$ , y las soluciones:

$$\begin{aligned} \delta a_H(t) &= \left[ \left( \frac{\delta a - ib^\dagger}{2} \right) e^{gt} + \left( \frac{\delta a + ib^\dagger}{2} \right) e^{-gt} \right] e^{i\omega_v t} \\ b_H^\dagger(t) &= i \left[ \left( \frac{\delta a - ib^\dagger}{2} \right) e^{gt} - \left( \frac{\delta a + ib^\dagger}{2} \right) e^{-gt} \right] e^{i\omega_v t} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Se puede ver de la ec. (5.49) que el valor de los operadores  $\delta a_H$  y  $b_H$  tienen una evolución exponencial, no estable. En presencia de un ambiente disipativo, es posible que las pérdidas estabilicen el sistema permitiendo alcanzar un estado asintótico donde la creación de excitaciones por parte del Hamiltoniano se compense con las pérdidas.





## Capítulo 6

# Análisis del estado estacionario

### 6.1. Solución de las ecuaciones para las fluctuaciones y de las vibraciones.

En esta sección se encuentra el estado estacionario de las fluctuaciones. Si el estado inicial es un estado Gaussiano, entonces el estado sigue siendo Gaussiano a todo tiempo para el modelo de ruido térmico considerado en este trabajo [1]. Por lo tanto, el estado asintótico está caracterizado por sus primeros y segundos momentos. Para encontrar una solución al estado asintótico de las ecuaciones (5.33), se escriben las ecuaciones conjugadas hermitianas de estas, y así se tiene el sistema de ecuaciones (6.1):

$$\begin{aligned}
 \dot{\delta a}(t) &= (i\Delta_{eff} - \kappa) \delta a(t) - ig \left( b(t) + b^\dagger(t) \right) - \sqrt{2\kappa} a_{in}(t) \\
 \dot{\delta a}^\dagger(t) &= -(i\Delta_{eff} + \kappa) \delta a^\dagger(t) + ig \left( b(t) + b^\dagger(t) \right) - \sqrt{2\kappa} a_{in}^\dagger(t) \\
 \dot{b}(t) &= -(i\omega_v + \Gamma) b(t) - ig \left( \delta a(t) + \delta a^\dagger(t) \right) - \sqrt{2\Gamma} b_{in}(t) \\
 \dot{b}^\dagger(t) &= (i\omega_v - \Gamma) b^\dagger(t) + ig \left( \delta a(t) + \delta a^\dagger(t) \right) - \sqrt{2\Gamma} b_{in}^\dagger(t)
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

El sistema (6.1) es de la forma  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} i\Delta_{eff} - \kappa & 0 & -ig & -ig \\ 0 & -(i\Delta_{eff} + \kappa) & ig & ig \\ -ig & -ig & -(i\omega_v + \Gamma) & 0 \\ ig & ig & 0 & i\omega_v - \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a \\ \delta a^\dagger \\ b \\ b^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2\kappa} a_{in}(t) \\ -\sqrt{2\kappa} a_{in}^\dagger(t) \\ -\sqrt{2\Gamma} b_{in}(t) \\ -\sqrt{2\Gamma} b_{in}^\dagger(t) \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Si se tiene la matriz de autovectores  $\mathbb{P}$  tal que  $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} = \mathbb{D}$  y definiendo  $\mathbf{y} \equiv \mathbb{P}^{-1}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{c} \equiv \mathbb{P}^{-1}\mathbf{f}$ , entonces multiplicando  $\dot{\mathbf{x}}$  por  $\mathbb{P}^{-1}$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{y}} &= \mathbb{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}} \\
 &= \mathbb{D}\mathbb{P}^{-1}\mathbf{x} + \mathbb{P}^{-1}\mathbf{f} \\
 &= \mathbb{D}\mathbf{y} + \mathbf{c}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

En componentes:

$$\dot{y}_i(t) = \mathbb{D}_i y_i(t) + c_i(t) \tag{6.4}$$

Entonces

$$y_i(t) = \beta_i e^{\mathbb{D}_i(t-t_0)} + e^{\mathbb{D}_i(t-t_0)} \int_{t_0}^t ds c_i(s) e^{-\mathbb{D}_i(s-t_0)}, \quad (6.5)$$

donde  $\beta_i$  es una constante determinada por las condiciones iniciales. Si se define  $f_j(t) = \alpha_j \varphi_{in}^j(t)$  con  $\vec{\alpha} = (-\sqrt{2\kappa}, -\sqrt{2\kappa}, -\sqrt{2\Gamma}, -\sqrt{2\Gamma})$  y  $\vec{\varphi}_{in}(t) = (a_{in}(t), a_{in}^\dagger(t), b_{in}(t), b_{in}^\dagger(t))$ . Entonces se tiene que la ec. (6.5) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \beta_i e^{\mathbb{D}_i(t-t_0)} + \int_{t_0}^t ds c_i(s) e^{-\mathbb{D}_i(s-t)} \\ &= \beta_i e^{\mathbb{D}_i(t-t_0)} + \sum_{j=1}^4 \mathbb{P}_{ij}^{-1} \alpha_j \int_{t_0}^t ds \varphi_{in}^j(s) e^{-\mathbb{D}_i(s-t)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Si  $Re(\mathbb{D}_i) < 0 \quad \forall i$ , entonces para  $t \gg t_0$  el primer término en la ec. (6.6) tiende a 0. Esto quiere decir que cuando el sistema es estable, siempre alcanza el mismo estado asintótico independientemente de las condiciones iniciales. En este caso, para los primeros momentos se tiene:

$$\langle y_i(t) \rangle = 0, \quad (6.7)$$

ya que  $tr(a_{in}(t)) = tr(b_{in}(t)) = 0$ , mientras que para los segundos momentos se puede escribir:

$$y_i^\dagger(t) y_{i'}(t') = \sum_{j=1}^4 \sum_{j'=1}^4 \mathbb{P}_{ij}^{-1*} \mathbb{P}_{i'j'}^{-1} \alpha_j^* \alpha_{j'} \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^{t'} ds' \varphi_{in}^{j\dagger}(s) \varphi_{in}^{j'}(s') e^{-\mathbb{D}_i^*(s-t)} e^{-\mathbb{D}_{i'}(s'-t')} \quad (6.8)$$

Tomando el valor de expectación de la ecuación (6.8) sobre el estado del ambiente  $\langle y_i^\dagger(t) y_{i'}(t') \rangle = tr(\rho_{in} y_i(t) y_{i'}(t'))$ :

$$\langle y_i^\dagger(t) y_{i'}(t') \rangle = \sum_{j=1}^4 \sum_{j'=1}^4 \mathbb{P}_{ij}^{-1*} \mathbb{P}_{i'j'}^{-1} \alpha_j^* \alpha_{j'} \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^{t'} ds' \langle \varphi_{in}^{j\dagger}(s) \varphi_{in}^{j'}(s') \rangle e^{-\mathbb{D}_i^*(s-t)} e^{-\mathbb{D}_{i'}(s'-t')} \quad (6.9)$$

Debido a las relaciones (5.32) se cumple que:

$$\langle \varphi_{in}^{j\dagger}(s) \varphi_{in}^{j'}(s') \rangle = \langle \chi_j^\dagger \chi_{j'} \rangle \delta_{j,j'} \delta(s-s'), \quad (6.10)$$

donde  $\langle \chi_j^\dagger \chi_{j'} \rangle$  está dado por los valores de expectación de la ec. (5.32). Entonces

$$\begin{aligned} \langle y_i^\dagger(t) y_{i'}(t') \rangle &= \sum_{j=1}^4 \mathbb{P}_{ij}^{-1*} \mathbb{P}_{i'j}^{-1} |\alpha_j|^2 \langle \chi_j^\dagger \chi_j \rangle \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^{t'} ds' \delta(s-s') e^{-\mathbb{D}_i^*(s-t)} e^{-\mathbb{D}_{i'}(s'-t')} \\ &= \sum_{j=1}^4 \mathbb{P}_{ij}^{-1*} \mathbb{P}_{i'j}^{-1} \frac{|\alpha_j|^2 \langle \chi_j^\dagger \chi_j \rangle}{-(\mathbb{D}_i^* + \mathbb{D}_{i'})} e^{\mathbb{D}_i^* t + \mathbb{D}_{i'} t'} \left( e^{-(\mathbb{D}_i^* + \mathbb{D}_{i'}) \min(t,t')} - e^{-(\mathbb{D}_i^* + \mathbb{D}_{i'}) t_0} \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Para que el sistema sea estable, todos los autovalores deben satisfacer  $Re(\mathbb{D}_i) < 0$ . Entonces para  $t, t' \gg \min(\{|\text{Re}(\mathbb{D}_i^{-1})|\})$  se puede despreciar el término proporcional a  $e^{-(\mathbb{D}_i^* + \mathbb{D}_{i'}) t_0}$ . De este modo se tiene que:

$$\langle y_i^\dagger(t) y_{i'}(t') \rangle = \sum_{j=1}^4 \mathbb{P}_{ij}^{-1*} \mathbb{P}_{i'j}^{-1} \frac{|\alpha_j|^2 \langle \chi_j^\dagger \chi_j \rangle}{-(\mathbb{D}_i^* + \mathbb{D}_{i'})} \begin{cases} e^{\mathbb{D}_{i'}(t'-t)} & \text{si } t < t' \\ e^{\mathbb{D}_i^*(t-t')} & \text{si } t' < t \end{cases} \quad (6.12)$$

Poniendo  $t = t'$  en la ec. (6.12) entonces se obtiene:

$$\langle y_i^\dagger(t)y_{i'}(t) \rangle = \sum_{j=1}^4 \mathbb{P}_{ij}^{-1*} \mathbb{P}_{i'j}^{-1} \frac{|\alpha_j|^2 \langle \chi_j^\dagger \chi_j \rangle}{-(\mathbb{D}_i^* + \mathbb{D}_{i'})} \quad (6.13)$$

Ahora, por medio de la ec. (6.13) y usando que  $\mathbf{x} = \mathbb{P}\mathbf{y}$  entonces se obtiene una expresión para los segundos momentos en el estado asintótico:

$$\begin{aligned} \langle x_m^\dagger(t)x_{m'}(t) \rangle &= \sum_{i,i'=1}^4 \mathbb{P}_{mi}^* \mathbb{P}_{m'i'} \langle y_i^\dagger(t)y_{i'}(t) \rangle \\ &\equiv [\mathbb{P}^* \mathbb{Y} \mathbb{P}^T]_{mm'} \end{aligned} \quad (6.14)$$

El sistema no tiene siempre un estado estacionario. Bajo ciertas condiciones el sistema puede ser inestable, y en este caso, no existe un estado asintótico. En [1] se describen rigurosamente las condiciones que describen la estabilidad del problema. Basándose en los comentarios de la sección 5.3, puede verse que cuando  $\Delta_{eff} > 0$  los términos del tipo  $a^\dagger b^\dagger$  y  $ab$  del Hamiltoniano de interacción cobran más relevancia. En este caso, si las pérdidas del sistema o su acoplamiento con el ambiente no son lo suficientemente grandes, el estado asintótico del sistema no existe.

A partir de las ecuaciones (2.1) y (6.1) se puede encontrar la matriz de covarianza correspondiente al estado asintótico. Esto es equivalente a (6.2) con la única diferencia de que está expresado en la base de los operadores canónicos. El sistema de ecuaciones correspondientes a los operadores canónicos queda de la forma  $\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{f}}$ :

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa & -\Delta_{eff} & 0 & 0 \\ \Delta_{eff} & -\kappa & -2g & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma & \omega_v \\ -2g & 0 & -\omega_v & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2\kappa}(c_{in} + c_{in}^\dagger) \\ i\sqrt{2\kappa}(c_{in}^\dagger - c_{in}) \\ \sqrt{2\Gamma}(d_{in} + d_{in}^\dagger) \\ i\sqrt{2\Gamma}(d_{in}^\dagger - d_{in}) \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

De la misma manera que en la sección 7.2, se obtiene que la solución para los segundos momentos del estado asintótico del sistema de ecuaciones (6.15) está dada por

$$X_{jj'} \equiv \langle x_j(t)x_{j'}(t) \rangle = [PY P^T]_{jj'}, \quad (6.16)$$

mientras que los primeros momentos se anulan en el estado asintótico. Los elementos de la matriz  $Y$  están dados por:

$$Y_{ii'} \equiv \langle y_i(t)y_{i'}(t) \rangle = -\frac{1}{D_i + D_{i'}} [P^{-1}\alpha P^{-1T}]_{ii'}, \quad (6.17)$$

donde la matriz  $P$  es tal que  $P^{-1}AP = D$ , con  $D$  una matriz diagonal (si  $A$  es diagonalizable), mientras que la matriz  $\alpha$  contiene los valores de expectación del término inhomogéneo:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \kappa(2\bar{n} + 1) & i\kappa & 0 & 0 \\ -i\kappa & \kappa(2\bar{n} + 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma(2\bar{N} + 1) & i\Gamma \\ 0 & 0 & -i\Gamma & \Gamma(2\bar{N} + 1) \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Así, con estos resultados y con las definiciones (2.10) y (6.15), puede construirse la matriz de covarianza para un sistema de dos modos como:

$$\sigma_{jj'} = (X_{jj'} + X_{j'j}) \quad (6.19)$$

En el apéndice A, se derivó una forma alternativa de derivar la matriz de covarianza usando el formalismo de la ecuación maestra.

## 6.2. Análisis del estado estacionario de las fluctuaciones

En la Fig. 6.1 se muestra el número medio de ocupación de las fluctuaciones (panel superior) y del modo vibracional (panel inferior), calculados usando la ec. (6.14) en función de la desintonía efectiva. En la misma puede verse que cuando el láser se encuentra muy lejos de la resonancia con la cavidad el número medio de ocupación de ambos modos tiende al valor dado por el baño térmico.

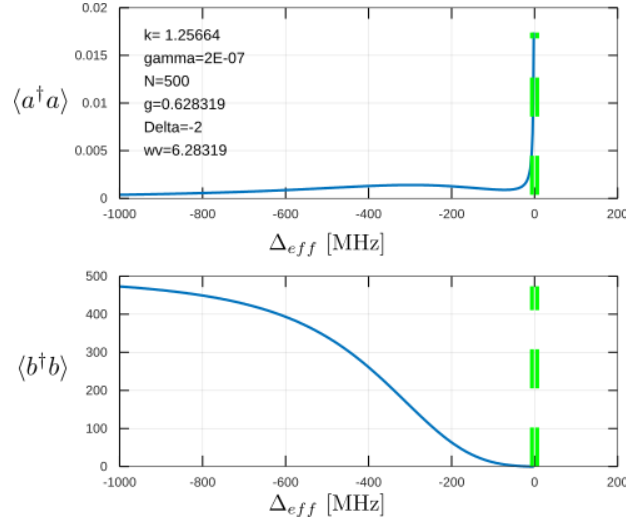


Figura 6.1: **Panel superior:** Número medio de ocupación de las fluctuaciones del campo. **Panel Inferior:** 2 Número medio de ocupación de las vibraciones. La línea vertical punteada corresponde a la frecuencia del modo de vibración. En el extremo derecho del gráfico el sistema se vuelve inestable.

Por otra parte, en la Fig. 6.2 puede observarse que a medida que la desintonía efectiva se acerca a la resonancia con la frecuencia del modo de vibración, el número medio de fonones disminuye. Esto se corresponde al enfriamiento de los modos vibracionales. Y como se comentó en la sección 5.3, esto corresponde a una interacción del tipo  $\delta a^\dagger b + \delta a b^\dagger$ . En la Fig. 6.3 puede observarse el mismo efecto cuando la desintonía está cerca de la resonancia  $\Delta_{eff} \approx -\omega_v$ . Además de esto, en la misma puede observarse que cerca de la resonancia  $\Delta_{eff} \approx \omega_v$  se puede ver un aumento en el número de ocupación de ambos modos. Esto se corresponde a una interacción del tipo  $\delta a^\dagger b^\dagger + \delta a b$ . Comparando las figuras Fig. 6.2 y Fig. 6.3 puede observarse que la Fig. 6.3, presenta una resonancia en el número de fotones dentro de la cavidad, mientras que la Fig. 6.2 no. Esto se debe a la distinta relación entre las tasas de pérdidas y los valores de las frecuencias de vibración.

Para que sea posible observar resonancias es necesario que  $\kappa, \Gamma \ll \omega_v$ . Esto se ilustra en la Fig. 6.4. Puede verse como al aumentar la tasa de pérdidas de la cavidad estas resonancias dejan de observarse. Es importante notar el cambio de escala en el panel inferior de las figuras 6.4: en 6.4-a) puede verse que en la resonancia el modo de vibración puede enfriarse casi hasta su estado fundamental. En cambio, en las figuras 6.4-b) y 6.4-c), a medida que aumentan las pérdidas de la cavidad y se pierde la resonancia entre los modos del campo y las vibraciones, el número de fonones aumenta.

En la figura 6.5, se graficaron los números medios de ocupación de cada modo, en función del acoplamiento  $g$  entre los subsistemas para los dos casos de resonancia comentados en la sección 5.3:  $\Delta_{eff} = -\omega_v$  en la Fig. 6.5-a) y  $\Delta_{eff} = \omega_v$  en la Fig. 6.5-b). En el caso de la Fig.

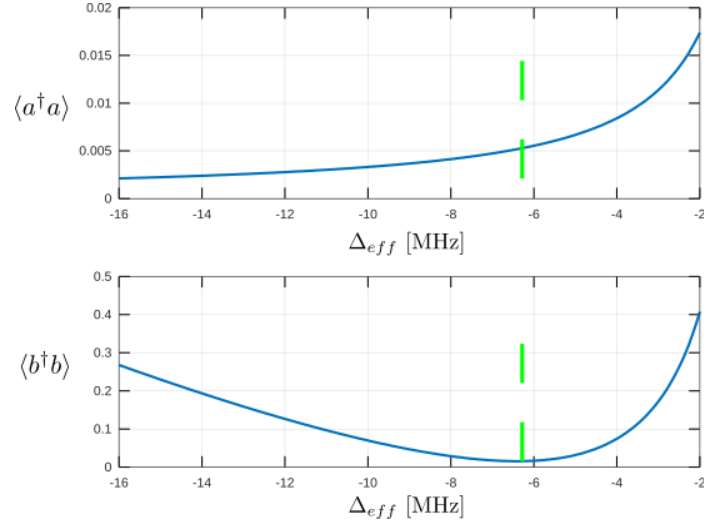


Figura 6.2: **Panel superior:** Número medio de ocupación de las fluctuaciones del campo. **Panel Inferior:** Número medio de ocupación de las vibraciones. Los parámetros utilizados son  $\omega_v/2\pi = 1$ ,  $\kappa/2\pi = 0,2$ ,  $\Gamma/2\pi = \frac{10^{-4}}{N}$ ,  $g/2\pi = 0,1$ ,  $N = 500$ . Todas las frecuencias están en MHz. La línea vertical punteada corresponde a la frecuencia del modo de vibración.

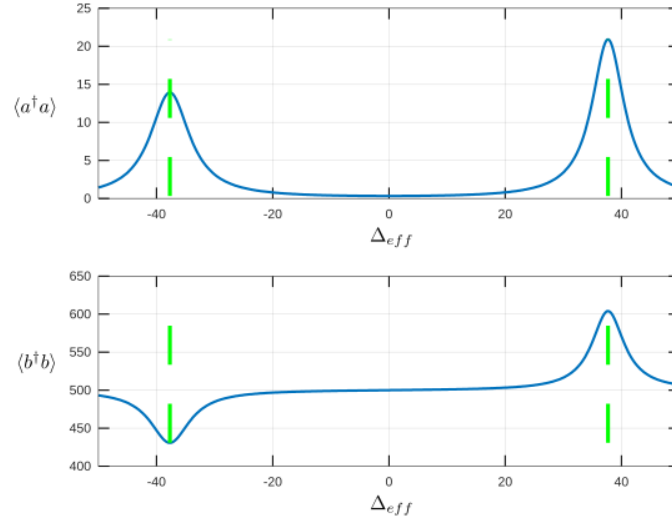


Figura 6.3: **Panel superior** Número medio de ocupación de las fluctuaciones del campo. **Panel Inferior** Número medio de ocupación de las vibraciones. Los parámetros utilizados son  $\omega_v/2\pi = 6$ ,  $\kappa/2\pi = 0,5$ ,  $\Gamma/2\pi = 0,1$ ,  $g/2\pi = 0,1$ ,  $N = 500$ . Todas las frecuencias están en MHz. La línea vertical punteada corresponde a la frecuencia del modo de vibración.

6.5-a) puede verse que al aumentar la interacción entre los subsistemas, el número de fonones disminuye a medida que el número de fotones dentro de la cavidad aumenta, esto también se debe a la interacción del tipo  $\delta a b^\dagger + \delta a^\dagger b$ , que tiende a intercambiar excitaciones entre la cavidad y las vibraciones. Por supuesto, la situación se vería invertida en el caso de que el número de excitaciones del baño térmico de la cavidad fuera mayor al número de excitaciones

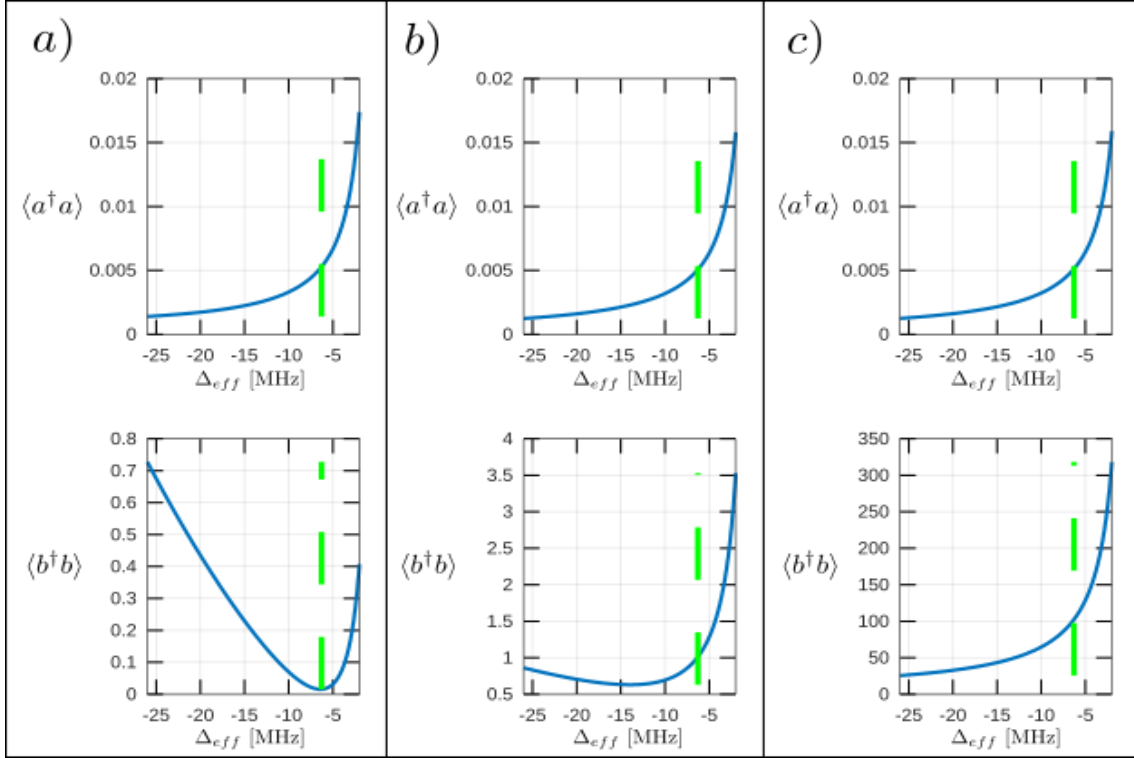


Figura 6.4: **Panel superior** Número medio de ocupación de las fluctuaciones del campo. **Panel Inferior** Número medio de ocupación de las vibraciones. Los parámetros utilizados son  $\omega_v/2\pi = 1$ ,  $\Gamma/2\pi = \frac{10^{-4}}{N}$ ,  $g/2\pi = 0,1$ ,  $N = 500$ . Todas las frecuencias están en MHz. En la figura *a*) se usó  $\kappa = 0,2$ . En la figura *b*) se usó  $\kappa = 2$ . En la figura *c*) se usó  $\kappa = 20$ . La línea vertical punteada corresponde a la frecuencia del modo de vibración.

del baño térmico de las vibraciones. En la Fig. 6.5-b), el Hamiltoniano de interacción entre ambos sistemas es aproximadamente  $\delta a b + \delta a^\dagger b$  (ver sección 5.3). En este caso, se ve que al aumentar  $g$ , el número medio de ocupación de ambos modos aumenta. Notar también el cambio de escala entre los paneles inferiores: en la resonancia correspondiente a  $\Delta_{eff} = -\omega_v$  el número medio de fonones es menor a 1, lo que muestra que es posible lograr el enfriamiento de los modos vibracionales.

### 6.3. Entrelazamiento para dos modos

A partir de ec. (2.22) y (6.15) se puede encontrar  $\tilde{\sigma}$ , la matriz de covarianza correspondiente a la transpuesta parcial del estado  $\rho$ . Buscando luego el espectro simpléctico (2.13)  $(\nu_-, \nu_+)$  como el módulo de los autovalores de la matriz  $i\Omega\tilde{\sigma}$ , puede calcularse la negatividad logarítmica  $E_{\mathcal{N}}(\rho)$  usando la ec. (2.27). Así, puede calcularse la negatividad logarítmica  $E_{\mathcal{N}}$ , que para estados Gaussianos de dos modos resulta:

$$E_{\mathcal{N}} = \max\{0, -\log(\tilde{\nu}_-)\}, \quad (6.20)$$

dato que todos los estados Gaussianos de dos modos satisfacen  $\tilde{\nu}_+ > 1$  [103]. Así, se tiene como ejemplo en la Fig. 6.6 un gráfico de las curvas de nivel de  $E_{\mathcal{N}}$ , en función de  $\Delta_{eff}$  y de  $g$ . Puede verse, como era de esperarse, que el entrelazamiento aumenta con el acoplamiento entre los dos

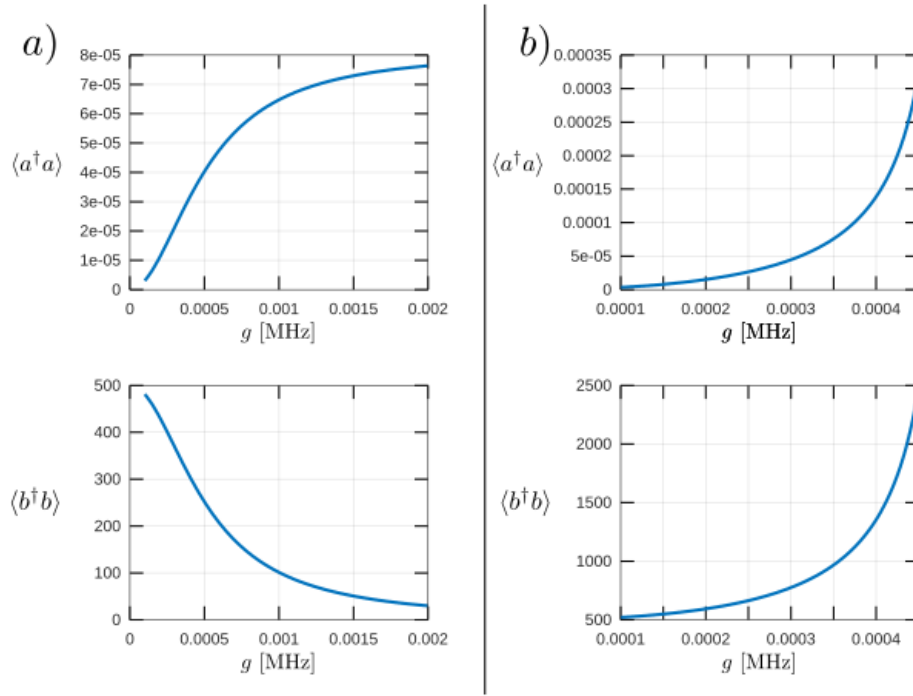


Figura 6.5: **Panel superior** Número medio de ocupación de las fluctuaciones del campo. **Panel Inferior** Número medio de ocupación de las vibraciones. Los parámetros utilizados son  $\omega_v/2\pi = 1$ ,  $\Gamma/2\pi = \frac{10^{-4}}{N}$ ,  $\kappa/2\pi = 0,2$ ,  $N = 500$ . Todas las frecuencias están en MHz. En la figura a) se usó  $\Delta_{eff} = -\omega_v$ . En la figura b) se usó  $\Delta_{eff} = \omega_v$ .

sistemas. Es de esperarse que el entrelazamiento aumente a medida que  $\Delta_{eff}$  se aproxime a una de las resonancias con los modos vibracionales, es decir, cuando  $\Delta_{eff} \approx \pm\omega_v$ . Sin embargo, la posibilidad de obtener un estado estacionario entrelazado depende del ruido introducido por el contacto con el ambiente. Además, puede observarse comparando los paneles izquierdo y derecho de la Fig. 6.6, que  $E_{\mathcal{N}}$  disminuye al aumentar  $N$ , el número medio de excitaciones del ambiente de las vibraciones; es decir que a menor temperatura del ambiente del modo vibracional se logra un mayor entrelazamiento entre el modo vibracional y el modo del campo.

En la Fig. 6.7 se muestra  $E_{\mathcal{N}}$  como función de  $\Delta_{eff}$  y  $g$  para distintos valores de  $\Gamma$ . Puede verse que para valores del acoplamiento con el ambiente  $\Gamma$  mayores a cierto valor crítico (Fig. 6.7-a)), el máximo del entrelazamiento se encuentra en la resonancia correspondiente a  $\Delta_{eff} \approx \omega_v$ . Valores grandes de  $\Gamma$  son característicos de cavidades optomecánicas, para los cuales es normal encontrar entrelazamiento cuando la interacción es del tipo *squeezing* de dos modos [54], como en el caso de la Fig. 6.7-a). A medida que  $\Gamma$  se acerca a cierto valor crítico (Fig. 6.7-b)) puede observarse que se presentan máximos de  $E_{\mathcal{N}}$  en ambas resonancias. Mientras  $\Gamma$  disminuye por debajo del valor crítico (Fig. 6.7-c)), puede verse que ahora el máximo del entrelazamiento se encuentra en la resonancia correspondiente a  $\Delta_{eff} \approx -\omega_v$ . Valores pequeños de  $\Gamma$  son característicos de sistemas de iones atrapados en cavidades, para los cuales también se reporta que el entrelazamiento es máximo en la resonancia del tipo *beam-splitter* [53]. Asimismo, es importante notar el cambio de escala entre las figuras 6.7-a) - 6.7-c): como era de esperarse a medida que la tasa de pérdidas disminuye se observa un mayor valor del máximo de  $E_{\mathcal{N}}$ . Cabe aclarar que la desaparición del pico de entrelazamiento en la resonancia  $\Delta_{eff} \approx \omega_v$  para  $\Gamma$  pequeño tiene que ver con la inestabilidad del sistema, que ya no tiene estado asintótico definido.

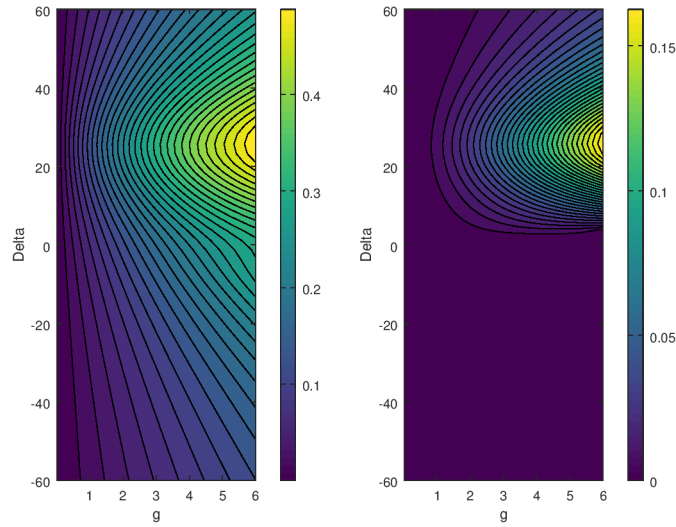


Figura 6.6: Curvas de nivel de  $E_{\mathcal{N}}$  como función de  $\Delta_{eff}$  y  $g$ . El panel izquierdo corresponde a  $N = 0$ , mientras que el panel derecho corresponde a  $N = 1$ . El resto de los parámetros utilizados fueron  $\kappa = 10$ ,  $\omega_v = 5$  y  $\Gamma = 5$ . Todas las frecuencias están en MHz.

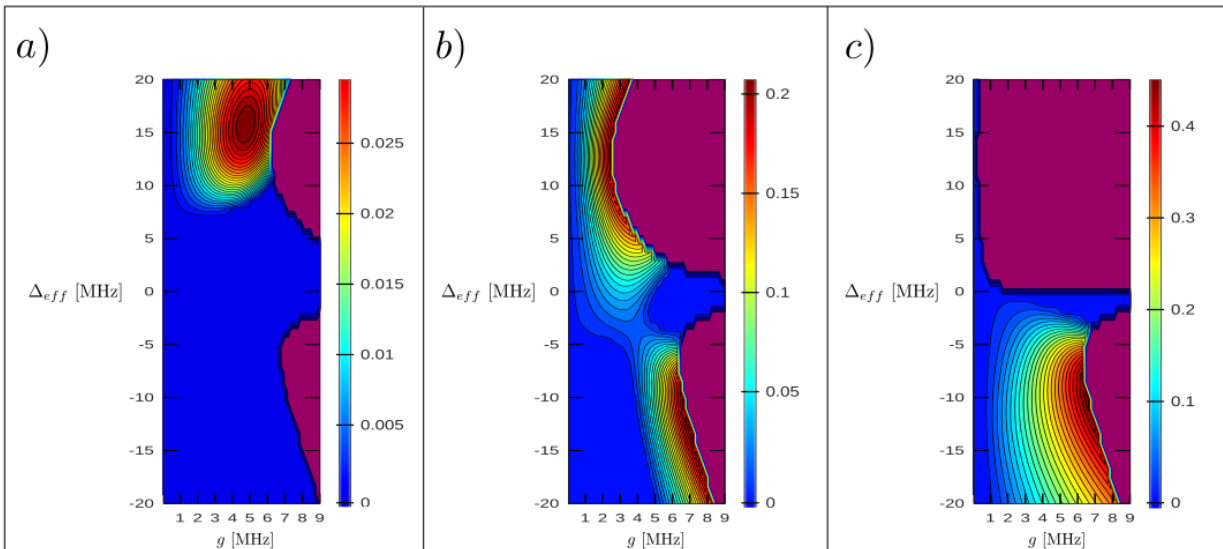


Figura 6.7: Curvas de nivel de  $E_{\mathcal{N}}$  como función de  $\Delta_{eff}$  y  $g$ . Los valores utilizados son  $\omega_v/2\pi = 2$ ,  $\kappa/2\pi = 1$ ,  $N = 1$ . a)  $\Gamma = 5$ . b)  $\Gamma = 0,9$ . c)  $\Gamma = 0,008$ . Todos los valores están en MHz. Las regiones inestables se muestran en violeta.



## Capítulo 7

# Espectro emitido por la cavidad

A partir del espectro observado a la salida de la cavidad puede obtenerse información del sistema en el estado estacionario. Tales mediciones se realizaron, por ejemplo en [47, 104]. Este capítulo se dedica al cálculo del espectro de emisión en el estado estacionario en función de los parámetros del problema.

### 7.1. Operadores de output

Los operadores  $a_{in}(t)$  y  $b_{in}(t)$  se interpretan como entradas o *input* hacia el sistema. Para encontrar las salidas del sistema, se encuentran las ecuaciones de Langevin con el tiempo invertido. Si al integrar las ecuaciones para los modos del baño se considera un tiempo  $t_1 > t$  en lugar de utilizar un tiempo  $t_0 < t$  como en la ec. (3.27), y se sigue el mismo procedimiento que en la sección 3.4, se obtienen las ecuaciones:

$$\dot{\delta}a(t) = (i\Delta_{eff} + \kappa)\delta a(t) - i\bar{a}c_0 \left( b(t) + b^\dagger(t) \right) - \sqrt{2\kappa}a_{out}(t) \quad (7.1)$$

$$\dot{b}(t) = -(i\omega_v - \Gamma)b(t) - i\bar{a}c_0 \left( \delta a(t) + \delta a^\dagger(t) \right) - \sqrt{2\Gamma}b_{out}(t) \quad (7.2)$$

Comparando con las ecuaciones (3.32) y (5.29), se ve que las correspondientes ecuaciones en términos de los modos de output se obtienen a partir de las ecuaciones en términos de los modos de input por medio de los reemplazos (7.3) para los modos de input del campo, y análogos para las vibraciones.

$$\begin{aligned} a_{in}(t) &\rightarrow a_{out}(t) \\ \sqrt{\kappa} &\rightarrow \sqrt{\kappa} \\ \kappa &\rightarrow -\kappa \end{aligned} \quad (7.3)$$

Comparando las ecuaciones (7.1) y (3.32), y por otro lado las ecuaciones (7.2) y (5.29), se puede ver que los operadores de input y output satisfacen las relaciones

$$a_{out}(t) - a_{in}(t) = \sqrt{2\kappa}\delta a(t) \quad (7.4)$$

$$b_{out}(t) - b_{in}(t) = \sqrt{2\kappa}b(t) \quad (7.5)$$

El espectro de los fotones emitidos por la cavidad, omitiendo el pico de Rayleigh del espectro, está dado por:

$$S(\nu) \propto \langle [a_{out}(\nu)]^\dagger a_{out}(\nu) \rangle \quad (7.6)$$

Usando la descomposición de los operadores en valores medios y fluctuaciones (ec. (5.13)), la ecuación (7.4), y que el estado del ambiente de la cavidad es el vacío, entonces se tiene que:

$$S(\nu) \propto \langle [\delta a(\nu)]^\dagger \delta a(\nu) \rangle, \quad (7.7)$$

donde  $\delta a(\nu)$  es la transformada de Fourier de  $\delta a$ . Considerar que el estado del ambiente del campo de la cavidad es el vacío está justificado por el hecho de que a temperaturas iguales o menores que la temperatura ambiente y para campos que oscilan a frecuencias en el rango de la luz visible, el número de excitaciones del ambiente es aproximadamente 0, por lo que la cavidad sólo tiene pérdidas (no ingresan fotones térmicos a la cavidad).

La mayor parte de los fotones que interactúan con el átomo son dispersados elásticamente (*Rayleigh scattering*). Sin embargo, el movimiento de los átomos dispersa una proporción menor de fotones de la cavidad a través de excitaciones electrónicas virtuales, como se ilustra en la Fig. 5.1, causando transiciones entre distintos estados vibracionales (*Raman scattering*) [12]. En estos procesos puede absorberse un cuanto de energía mecánica, con la consecuente pérdida de una energía  $\hbar\omega_v$  por parte de los fotones (*Stokes scattering*) Fig. 7.1-a); o el oscilador puede emitir un cuanto de energía mecánica, con lo que los fotones emitidos en este proceso ganan una energía  $\hbar\omega_v$  (*anti-Stokes scattering*), Fig. 7.1-b). El nivel excitado  $|e, n\rangle$  solo es virtualmente ocupado, y los procesos involucrados siempre son de segundo orden [8]. De esta forma, el espectro de la luz emitido por la cavidad sirve como una forma de estudiar la energía intercambiada entre el campo y el movimiento del oscilador. En la Fig. 7.1-c) puede observarse un esquema del espectro emitido por la cavidad debido a la interacción del campo con las vibraciones del átomo (en la misma se omite el pico de Rayleigh debido a la dispersión elástica de los fotones). Sin embargo, esta descripción simplificada puede fallar cuando el acoplamiento entre modos no es suficientemente débil.

## 7.2. Cálculo del espectro a partir de la diagonalización del problema

Definiendo la transformada de Fourier como [101]:

$$\widetilde{\delta a}(\nu) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\nu t} \delta a(t), \quad (7.8)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} [\widetilde{\delta a}(\nu)]^\dagger &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i\nu t} \delta a^\dagger(t) \\ &= \widetilde{\delta a}^\dagger(-\nu) \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\widetilde{\delta a}^\dagger(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\nu t} \delta a^\dagger(t) \quad (7.10)$$

Entonces el espectro está dado por (omitiendo prefactores):

$$\begin{aligned} S(\nu) &= \langle \widetilde{\delta a}^\dagger(-\nu) \widetilde{\delta a}(\nu) \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' e^{-i\nu t} e^{i\nu t'} \langle \delta a^\dagger(t) \delta a(t') \rangle \end{aligned} \quad (7.11)$$

## 7.2. CÁLCULO DEL ESPECTRO A PARTIR DE LA DIAGONALIZACIÓN DEL PROBLEMA51

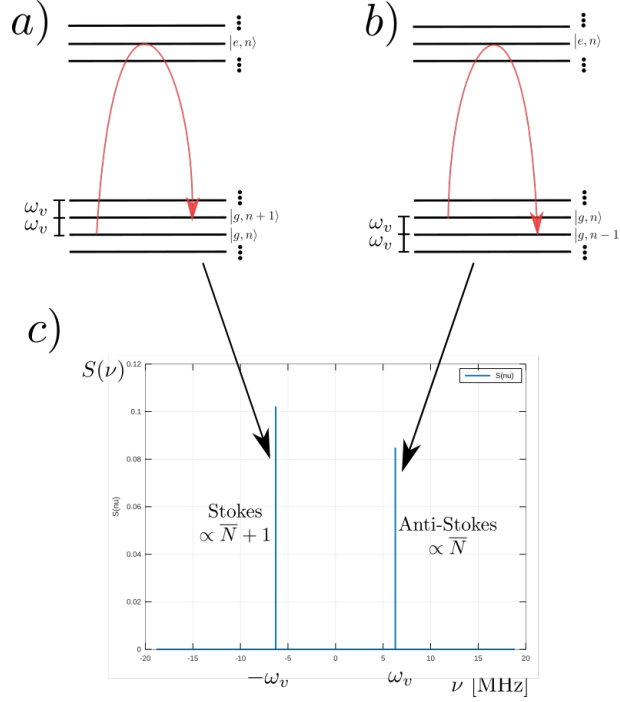


Figura 7.1: a) *Stokes scattering*. b) *anti-Stokes scattering* c) Espectro emitido por una cavidad debido a los cambios en los estados vibracionales del oscilador, en función de  $\nu = \omega - \omega_l$ . Se omite el pico de Rayleigh a la frecuencia del láser. El valor  $\bar{N}$  indica la ocupación media de las vibraciones.

El valor de  $\langle \delta a^\dagger(t) \delta a(t') \rangle$  se puede encontrar a partir de las ecuaciones (6.12) y (6.14). Y así se tiene que:

$$S(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{i, i', j=1}^4 \mathbb{P}_{1i}^* \mathbb{P}_{1i'} \mathbb{P}_{ij}^{-1*} \mathbb{P}_{i'j}^{-1} \frac{|\alpha_j|^2 \langle \chi_j^\dagger \chi_j \rangle}{-(\mathbb{D}_i^* + \mathbb{D}_{i'})} \times \dots$$

$$\frac{1}{2\pi T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' e^{-i\nu t} e^{i\nu t'} \left[ e^{\mathbb{D}_{i'}(t'-t)} \Theta(t' - t) + e^{\mathbb{D}_i^*(t-t')} \Theta(t - t') \right]$$
(7.12)

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{i, i', j=1}^4 \mathbb{P}_{1i}^* \mathbb{P}_{1i'} \mathbb{P}_{ij}^{-1*} \mathbb{P}_{i'j}^{-1} \frac{|\alpha_j|^2 \langle \chi_j^\dagger \chi_j \rangle}{-(\mathbb{D}_i^* + \mathbb{D}_{i'})} \times \dots$$

$$\frac{1}{2\pi T} \left[ - \left( \frac{T}{\mathbb{D}_i^* - i\nu} + \frac{T}{\mathbb{D}_{i'} + i\nu} \right) + \frac{e^{(\mathbb{D}_i^* - i\nu)T}}{(\mathbb{D}_i^* - i\nu)^2} - \frac{e^{(\mathbb{D}_{i'} + i\nu)T}}{(\mathbb{D}_{i'} + i\nu)^2} \right]$$
(7.13)

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{i, i', j=1}^4 \mathbb{P}_{1i}^* \mathbb{P}_{1i'} \mathbb{P}_{ij}^{-1*} \mathbb{P}_{i'j}^{-1} \frac{|\alpha_j|^2 \langle \chi_j^\dagger \chi_j \rangle}{(\mathbb{D}_i^* - i\nu)(\mathbb{D}_{i'} + i\nu)},$$
(7.14)

donde en la última línea de la ec. (7.14) se usó que  $Re(\mathbb{D}_i) < 0 \forall i$ , y  $\Theta(\tau)$  es la función escalón:

$$\Theta(\tau) = \begin{cases} 1 & si \tau > 0 \\ 0 & si \tau < 0 \end{cases}$$
(7.15)

De la ec. (7.14) puede verse que el espectro tiene polos en el plano complejo en los autovalores del sistema. Como las frecuencias  $\nu$  toman valores reales, entonces, en el caso de picos bien separados el espectro va a tener máximos cuando  $\nu = \pm \text{Im}(\mathbb{D}_i)$ . Sin embargo, si los distintos picos se superponen, la ubicación de los máximos puede ser distinta.

A grandes rasgos, puede verse a partir de la ec. (7.14) que además, la parte real de los autovalores está relacionada con el ancho de los picos del espectro. Para ver esto, primero se considera el caso en el cual  $g = 0$ . En esta situación, las matrices  $\mathbb{P}$  son proporcionales a la matriz identidad. Entonces, en este caso, todos los términos distintos de 0 en la suma (7.14) son los que tienen  $i = i'$ . Por lo tanto, si se descomponen los autovalores del sistema en su parte real e imaginaria como:  $D_i = \gamma_i + i\delta_i$ , entonces puede verse que los factores que incluyen a los autovalores en cada término toman la forma:

$$\frac{1}{(\mathbb{D}_i^* - i\nu)(\mathbb{D}_i + i\nu)} = \frac{1}{\gamma_i^2 + (\delta_i + \nu)^2}, \quad (7.16)$$

es decir, son Lorentzianas centradas en  $\pm\delta_i$  (los autovalores siempre vienen en pares complejos conjugados [1]), y con ancho  $\sigma = 2|\Re(\mathbb{D}_i)| = 2|\gamma_i|$ . Ahora, el caso  $g = 0$ , en donde los modos vibracionales están desacoplados de las fluctuaciones del campo, no tiene ningún tipo de interés. Sin embargo, a lo largo de este trabajo se asume que el acoplamiento entre los modos es débil, lo que justifica la aproximación de que incluso cuando  $g \neq 0$ , pero pequeño, la posición y el ancho de los picos está dada aproximadamente por la parte real e imaginaria de los autovalores de (6.2).

### 7.3. Cálculo del espectro transformando las ecuaciones de movimiento

Una expresión alternativa para el espectro emitido por la cavidad puede obtenerse tomando la transformada de Fourier del sistema de ecuaciones (6.1):

$$\begin{aligned} -i\nu\widetilde{\delta a}(\nu) &= (i\Delta_{eff} - \kappa)\widetilde{\delta a}(\nu) - i\bar{a}c_0 \left( \widetilde{b}(\nu) + \widetilde{b}^\dagger(\nu) \right) - \sqrt{2\kappa}\widetilde{a}_{in}(\nu) \\ -i\nu\widetilde{\delta a}^\dagger(\nu) &= -(i\Delta_{eff} + \kappa)\widetilde{\delta a}^\dagger(\nu) + i\bar{a}c_0 \left( \widetilde{b}(\nu) + \widetilde{b}^\dagger(\nu) \right) - \sqrt{2\kappa}\widetilde{a}_{in}^\dagger(\nu) \\ -i\nu\widetilde{b}(\nu) &= -(i\omega_v + \Gamma)\widetilde{b}(\nu) - i\bar{a}c_0 \left( \widetilde{\delta a}(\nu) + \widetilde{\delta a}^\dagger(\nu) \right) - \sqrt{2\Gamma}\widetilde{b}_{in}(\nu) \\ -i\nu\widetilde{b}^\dagger(\nu) &= (i\omega_v - \Gamma)\widetilde{b}^\dagger(\nu) + i\bar{a}c_0 \left( \widetilde{\delta a}(\nu) + \widetilde{\delta a}^\dagger(\nu) \right) - \sqrt{2\Gamma}\widetilde{b}_{in}^\dagger(\nu) \end{aligned} \quad (7.17)$$

y así se obtiene

$$S(\nu) = \langle \widetilde{\delta a}^\dagger(-\nu)\widetilde{\delta a}(\nu) \rangle = S_0(\nu) \left\{ \frac{4\kappa|\theta(\nu)|^2\bar{a}^4}{\kappa^2 + (\nu - \Delta_{eff})^2} + \Gamma\bar{a}^2c_0^2 \left[ \frac{\bar{N}}{\Gamma^2 + (\omega_v - \nu)^2} + \frac{\bar{N} + 1}{\Gamma^2 + (\omega_v + \nu)^2} \right] \right\}, \quad (7.18)$$

donde

$$S_0(\nu) = \frac{2}{\left[ \kappa^2 + (\Delta_{eff} + \nu)^2 \right] \left| 1 + \frac{4\Delta_{eff}\bar{a}^2\theta(\nu)}{(\kappa - i\nu)^2 + \Delta_{eff}} \right|^2} \quad (7.19)$$

$$\theta(\nu) = \frac{c_0^2\omega_v}{(\Gamma - i\nu)^2 + \omega_v^2} \quad (7.20)$$

El primer término de (7.18) se debe a la interacción indirecta de las vibraciones con el campo electromagnético fuera de la cavidad, mediada por el acoplamiento entre el campo de la cavidad

y las vibraciones del ion, mientras que el segundo y tercer término de (7.18) se deben al baño térmico de las vibraciones.

En el caso particular de que  $\Delta_{eff} = 0$ , el espectro tiene una expresión mucho más simple:

$$S(\nu) = \frac{2}{\kappa^2 + \nu^2} \left\{ \frac{4\kappa\bar{a}^4 c_0^4 \omega_v^2}{(\kappa^2 + \nu^2) |\omega_v^2 + (\Gamma - i\nu)^2|^2} + \Gamma\bar{a}^2 c_0^2 \left[ \frac{\bar{N}}{\Gamma^2 + (\omega_v - \nu)^2} + \frac{\bar{N} + 1}{\Gamma^2 + (\omega_v + \nu)^2} \right] \right\} \quad (7.21)$$

En esta situación, la señal medida puede multiplicarse por el prefactor, ya que por lo explicado en torno a Fig. 5.2,  $\kappa$  es un parámetro conocido. De esta manera, el segundo y el tercer término son Lorentzianas de ancho  $2\Gamma$  centradas en  $\omega_v$  y  $-\omega_v$  respectivamente; mientras que el primer término del espectro tiene máximos en  $\nu = 0$  y en  $\nu = \pm\sqrt{\omega_v^2 - \Gamma^2}$ . En el caso de que las contribuciones del primer término sean relevantes, los picos van a estar corridos de  $\pm\omega_v$ . Así, la forma del espectro va a estar determinada por las contribuciones de cada término.



## Capítulo 8

# Estimación no invasiva de los parámetros del problema por medio del espectro de emisión

En este capítulo, se estudia el espectro de la luz emitida por la cavidad. A través de este, se analiza la posibilidad de estimar los parámetros que describen la evolución del sistema. Asumiendo que el estado asintótico es un estado Gaussiano <sup>1</sup>, reconstruir la matriz de covarianza daría toda la información necesaria sobre el estado del sistema compuesto, y permitiría estimar el número de ocupación de los modos del sistema, además del entrelazamiento entre los modos vibracionales y las fluctuaciones del campo.

El objetivo en este capítulo es entonces encontrar las frecuencias características que determinan la evolución del sistema: la frecuencia  $\omega_v$  y la tasa de calentamiento  $\Gamma\bar{N}$  de los modos vibracionales, la intensidad del acoplamiento  $g$  entre los modos vibracionales y los modos de la cavidad, y la frecuencia efectiva  $\Delta_{eff}$  del modo del campo electromagnético dentro de la cavidad. Bajo la suposición de que la presencia del átomo dentro de la cavidad no modifica la tasa de pérdidas  $\kappa$  (esto es, no hay pérdidas de fotones debido a la emisión espontánea del átomo hacia otros modos del campo), esta tasa puede determinarse a partir de mediciones del espectro emitido por la cavidad cuando el ion no está interactuando con ésta, dado que en este caso, como puede verse en la Fig. 5.2, el espectro está dado por una lorentziana de ancho  $2\kappa$ , ec. (3.20). Cabe aclarar que en el caso de un ion atrapado en la cavidad, la constante de acoplamiento  $g$ , la frecuencia efectiva  $\Delta_{eff}$  y la de vibración  $\omega_v$  están relacionadas con los parámetros externos en forma compleja (ver ecuaciones (5.12) y (5.26)). Por ejemplo, cambiar la intensidad del bombeo láser o su frecuencia podría modificar los valores de todas ellas. Esto representa un obstáculo para la utilización de protocolos desarrollados para otros sistemas optomecánicos [104].

### 8.1. Cavidades optomecánicas

Estos sistemas pueden describirse en una aproximación lineal por ecuaciones equivalentes a las ecuaciones de movimiento (5.33) obtenidas en el capítulo 5 [53, 54]. Normalmente, los procesos estocásticos  $b_{in}(t)$  que describen la evolución de estos sistemas no tienen las correlaciones del tipo (5.32), y por lo tanto, la evolución del sistema es no Markoviana. Sin embargo, los efectos cuánticos del movimiento sólo pueden observarse cuando  $\omega_v \gg \Gamma$ , y en este límite el ruido que

---

<sup>1</sup>Dado que estamos asumiendo que los operadores  $a_{in}$  y  $b_{in}$  satisfacen las características de ruido blanco Gaussiano (5.32) y dado que estamos considerando que la dinámica es lineal (5.33), el estado estacionario para las fluctuaciones es un estado Gaussiano con primeros momentos nulos [53].

describen los operadores  $b_{in}$  se vuelve ruido blanco Gaussiano, y en este caso la evolución es Markoviana [53]. En el caso de dispositivos optomecánicos, el término  $\tilde{\Omega}^2/\Delta_0$  (que provenía de la eliminación adiabática del nivel excitado del átomo) de  $\Delta_{eff}$  (ver ec. (5.12)), debe reemplazarse por el correspondiente término debido a la influencia de la presión de radiación sobre el oscilador [53].

En el caso de dispositivos optomecánicos, el espectro es asimétrico, esto se debe a la asimetría de entre los procesos de absorción (proporcionales a  $N$ ) y emisión (proporcionales a  $N + 1$ ) del oscilador. Esta asimetría en el espectro permite medir la temperatura correspondiente al estado vibracional [61]. El objetivo de este trabajo es buscar una forma de determinar además una estimación de los parámetros que determinan las propiedades del movimiento de los iones y del acoplamiento optomecánico a partir de estas asimetrías. La asimetría del espectro no tiene análogo clásico. Puede verse que para el caso en el que el acoplamiento del oscilador mecánico con su baño térmico es muy grande ( $\Gamma$  grande), se tiene que el espectro está dado por:

$$S(\nu) = S_0(\nu)\Gamma g^2 \left[ \frac{\bar{N}}{\Gamma^2 + (\omega_v - \nu)^2} + \frac{\bar{N} + 1}{\Gamma^2 + (\omega_v + \nu)^2} \right] \quad (8.1)$$

En el caso de dispositivos optomecánicos, las tasas de disipación son mucho mayores que en el caso de átomos o iones atrapados. Las principales causas de la disipación mecánica están dadas por [54]:

- Interacciones con el gas circundante.
- Efectos anarmónicos, tales como interacciones fonón-fonón.

Una descripción extensiva de los mecanismos que llevan a la decoherencia de dispositivos optomecánicos está dada en [105]. Para un número de ocupación del baño térmico  $N$  muy grande, se tiene que  $N \approx N + 1$ , y entonces de la ec. (8.1) se tiene:

$$S(\nu) = S_0(\nu)g^2 \frac{\bar{N}}{\Gamma} \left[ \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\omega_v - \nu)^2} + \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\omega_v + \nu)^2} \right] \quad (8.2)$$

El espectro en este caso sigue siendo asimétrico debido a la desintonía entre la frecuencia del láser y la frecuencia de resonancia de la cavidad vacía. En el caso de que  $\Delta_{eff} = 0$  se recupera un espectro simétrico. En lo que sigue se asume que  $\Delta_{eff} \neq 0$  y se aprovecha esta asimetría para obtener una estimación de los parámetros del Hamiltoniano del sistema. En el régimen de interés para sistemas optomecánicos, se tiene que la tasa de pérdidas  $\Gamma$  es mayor a la tasa de pérdidas que se presenta en el caso de sistemas de iones atrapados. Aun así, seguimos trabajando en el régimen en donde  $\Gamma \ll \omega_v$ , que es el régimen donde los picos están bien resueltos. En este régimen, se tiene que el prefactor  $S_0(\nu)$  es una función que varía muy suavemente comparada con las Lorentzianas del espectro (términos entre corchetes de ec. (8.2)), como se ilustra en la Fig. 8.1, donde se grafica el prefactor y el espectro correspondiente para un conjunto de valores basados en la tabla 8.1. De esta forma, puede asumirse que la variación con la frecuencia está dada mayormente por los términos entre corchetes de la ec. (8.2), de donde puede verse que el espectro está formado por dos Lorentzianas centradas en  $\pm\omega_v$ , cada una de ancho  $2\Gamma$  y cuya altura sí está modulada por el prefactor  $S_0(\nu)$ .

El prefactor  $S_0(\nu)$  en los picos del espectro puede aproximarse como:

$$\begin{aligned} S_0(\omega_v) &\approx \frac{2}{\kappa^2 + (\Delta_{eff} + \omega_v)^2} \\ S_0(-\omega_v) &\approx \frac{2}{\kappa^2 + (\Delta_{eff} - \omega_v)^2} \end{aligned} \quad (8.3)$$



	[106]	[107]	[61]	[108]
$\omega_v/2\pi$	—	—	$3,99 \times 10^3$	57,8
$\Delta_{eff}/2\pi$	200 – 400	> 70	—	—
$\kappa/2\pi$	0,16	1,01	390	50
$\Gamma/2\pi$	$11 \times 10^{-3}$	—	0,043	0,02
$g/2\pi$	—	—	0,960	—
$N$	$T = 200\mu K$	2	$T = 18 K$	—

Cuadro 8.1: Valores característicos de los parámetros para cavidades optomecánicas ( $\Gamma$  grande). Todos los datos están en MHz.

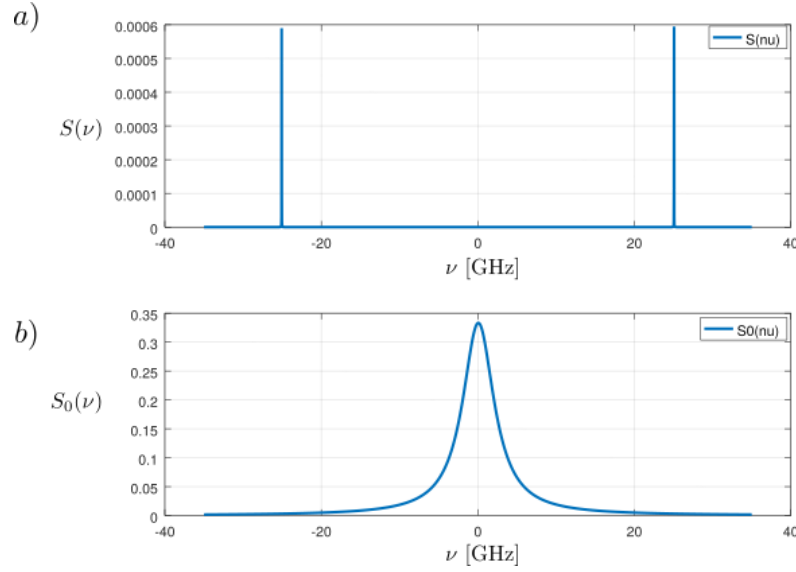


Figura 8.1: a) Espectro emitido por la cavidad. Los valores utilizados son  $\omega_v/2\pi = 3,99$   $\Delta_{eff}/2\pi = -0,01$   $\kappa/2\pi = 0,39$   $\Gamma/2\pi = 0,000043$   $g/2\pi = 0,00096$   $N = 500$ . Todos los valores están en GHz. b) Prefactor  $S_0(\nu)$ . Puede verse que el  $S_0(\nu)$  es una función que varía muy suavemente comparada con el espectro.

Bajo esta aproximación,  $\Delta_{eff}$  satisface la ecuación:

$$0 = \Delta_{eff}^2 + \frac{4\omega_v p}{\Delta h} \Delta_{eff} + (\kappa^2 - \omega_v^2), \quad (8.4)$$

donde  $\Delta h$  y  $p$  están definidos como  $\Delta h \equiv S(\nu_0) - S(-\nu_0)$  y  $p \equiv \frac{1}{2}(S(\nu_0) + S(-\nu_0))$ . Si se supone como se comentó al principio de este capítulo que la tasa de decaimiento de los fotones de la cavidad puede medirse cuando esta no está acoplada a los grados de libertad mecánicos que correspondan al sistema, entonces, a partir de la ec. (8.4) puede determinarse  $\Delta_{eff}$ . Luego, a partir de la altura de cualquiera de los picos puede obtenerse  $g^2 \bar{N}$ . Por ejemplo:

$$g^2 \bar{N} = \left( \kappa^2 + (\Delta_{eff} + \omega_v)^2 \right) \frac{S(\nu_0) \Gamma}{2} \frac{1}{\left( 1 + \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + 4\omega_v^2} \right)} \quad (8.5)$$

En resumen, los parámetros pueden estimarse como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_v \approx \frac{d}{2} \\ \sigma \approx 2\Gamma \\ \Delta_{eff} \approx -\frac{2\omega_v p}{\Delta h} \pm \sqrt{\left(\frac{2\omega_v p}{\Delta h}\right)^2 - (\kappa^2 - \omega_v^2)} \\ g^2 \bar{N} \approx (\kappa^2 + (\Delta_{eff} + \omega_v)^2) \frac{S(\nu_0)\Gamma}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + 4\omega_v^2}\right)} \end{array} \right. \quad (8.6)$$

Usualmente, para medir propiedades de estos sistemas, se utiliza un láser adicional con una frecuencia cercana a otra frecuencia de resonancia de la cavidad  $\omega_r$ . Este láser funciona como sonda [61, 109]. En este caso, el espectro de los fotones emitidos por la cavidad tiene coeficientes dependientes de la desintonía  $\Delta_r = \omega_l - \omega_r$  entre el láser de readout y la frecuencia del segundo modo de la cavidad. Por ejemplo en [61] obtienen un espectro dado por:

$$S(\omega + \omega_{lr}) = \frac{\kappa_{e,r}}{\pi\kappa_r} A_-^{(r)} \frac{\Gamma \bar{N}}{(\omega_v - \omega)^2 + \Gamma^2} + \frac{\kappa_{e,r}}{\pi\kappa_r} A_+^{(r)} \frac{\Gamma (\bar{N} + 1)}{(\omega_v + \omega)^2 + \Gamma^2} \quad (8.7)$$

Donde  $A_{\pm}^{(r)}$  son los coeficientes dependientes de la desintonía entre el láser de lectura y el modo de lectura de la cavidad. Entonces, variando la frecuencia del láser de lectura los distintos picos del espectro pueden ser filtrados selectivamente, y luego a partir del área de estos picos, logran estimar la temperatura efectiva de las vibraciones [61] y el acoplamiento del campo con las vibraciones  $g$  se obtiene a través de ajustes a datos experimentales de la tasa de decaimiento de las vibraciones en función de el número de fotones en la cavidad [110]. El inconveniente de este método es que no tiene en cuenta la reacción del láser de lectura en el sistema. En particular, las tasas de decaimiento de las vibraciones y el número medio de fonones. Entonces, uno debe luego tener en cuenta correcciones para la reacción del sistema al incorporar el láser de lectura. Tales correcciones son obtenidas en [61].

Si en este caso se utiliza  $\Delta_{eff} = 0$ , la expresión (8.2) del espectro es aún más simple. El espectro depende de  $\kappa$  en una forma conocida, y por lo tanto esa dependencia se puede eliminar:

$$\tilde{S}(\nu) \equiv (\kappa^2 + \nu^2) S(\nu) = \frac{2g^2 \bar{N}}{\Gamma} \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\omega_v - \nu)^2} + \frac{2g^2 (\bar{N} + 1)}{\Gamma} \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\omega_v + \nu)^2} \quad (8.8)$$

Los picos se encuentran exactamente en  $\pm\omega_v$ , y cada uno de ellos tiene ancho  $2\Gamma$ , de donde se pueden conocer las frecuencias de vibración y  $\Gamma$ . Y así fácilmente pueden determinarse todos los parámetros que determinan el estado asintótico:

$$g = \sqrt{\frac{\Gamma \Delta h}{2}}, \quad (8.9)$$

donde  $\Delta h \equiv \tilde{S}(-\nu_0) - \tilde{S}(\nu_0)$ , y

$$\bar{N} = \frac{\tilde{S}(\nu_0)}{\tilde{S}(-\nu_0) - \tilde{S}(\nu_0)}. \quad (8.10)$$

## 8.2. Iones atrapados

Para el caso de los sistemas considerados en esta sección, es decir, iones atrapados en cavidades ópticas, se verifica experimentalmente que las pérdidas de los modos vibracionales son

muy pequeñas comparadas con todas las demás escalas de tiempo del sistema [99]. Entonces, en primer lugar, en la sección 8.2.1 se buscan los valores de estos parámetros suponiendo que no hay pérdidas en los modos vibracionales, es decir  $\Gamma = 0$ , y luego estos resultados se utilizan en la sección 8.2.2 para encontrar los parámetros en el caso en el que  $\Gamma \neq 0$ . En este caso, a diferencia de la sección anterior, no puede argumentarse que la posición de los picos no está relacionada al prefactor del espectro. También debe tenerse en cuenta el prefactor para encontrar la posición de los máximos. Para contrastar con el caso de cavidades optomecánicas, se calcula el espectro y se muestra junto al correspondiente prefactor en la Fig. 8.2 para un conjunto de valores de los parámetros basados en configuraciones experimentales típicas de iones atrapados. Algunos valores característicos para las frecuencias de este tipo de sistemas se muestran en la tabla 8.2.

	[1]	[96]	[111]	[112]	[113]	[114]	[115]
$\omega_v/2\pi$	2,26	—	1,45	0,9	5	—	—
$\Delta_{eff}/2\pi$	0,18	—	—	-2	—	—	—
$\kappa/2\pi$	0,5	4,1	0,117	—	—	—	—
$\Gamma/2\pi$	—	—	—	—	—	$10^{-3}/N$	$10^{-5}/N$
$N$	5,7	—	—	—	$10^3$	—	—
$g_0/2\pi$	9,4	34	—	—	—	—	—

Cuadro 8.2: Valores característicos de los parámetros para iones atrapados ( $\Gamma$  pequeño). Todos los datos están en MHz. Las tres columnas de la derecha corresponden a valores obtenidos experimentalmente.

El valor de  $g$  puede determinarse a partir de los valores de  $g_0$  y  $\omega_v$ , usando la ec. (5.31).

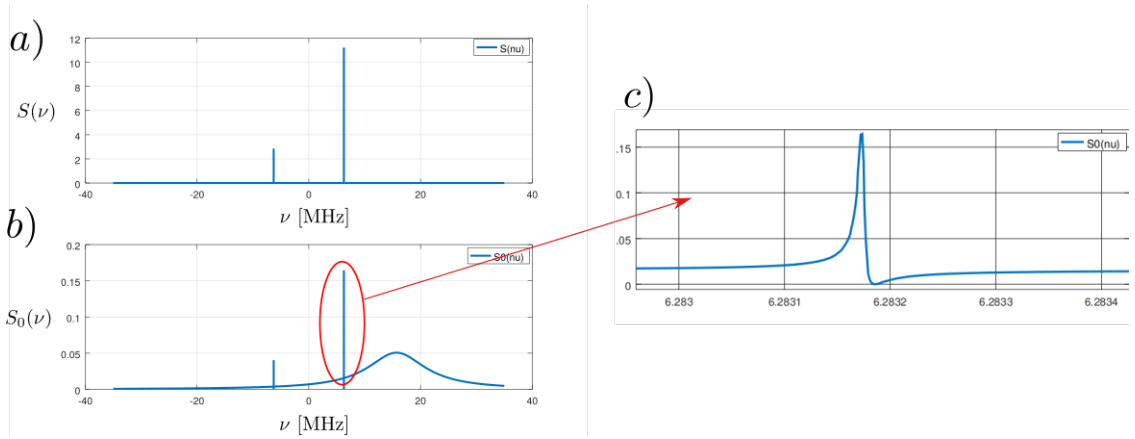


Figura 8.2: a) Espectro emitido por la cavidad calculado para valores correspondientes a iones atrapados. b) Prefactor  $S_0(\nu)$ . Puede verse en este caso que  $S_0(\nu)$  ya no es una función suave de  $\nu$ . c) Ampliación de uno de los picos del prefactor.

Si en el polinomio característico de la matriz (6.2):

$$0 = [(\kappa + \lambda)^2 + \Delta_{eff}^2] [(\Gamma + \lambda)^2 + \omega_v^2] + 4g^2\omega_v\Delta_{eff}, \quad (8.11)$$

se toma el límite  $\Gamma \rightarrow 0$ , y además también se usa  $\Delta_{eff} = 0$  entonces los autovalores del sistema son:

$$\begin{cases} \lambda = -\kappa \\ \lambda = \pm i\omega_v \end{cases} \quad (8.12)$$

El sistema tiene dos autovalores imaginarios puros, y por lo tanto el sistema no tiene un estado asintótico definido. Por esto, a lo largo de todo este capítulo no se considera el caso en el que  $\Gamma \rightarrow 0$  y al mismo tiempo  $\Delta_{eff} = 0$ . Por esto, en estos sistemas, donde la escala de acoplamiento con el ambiente de las vibraciones es mucho más pequeña que en el caso de cavidades optomecánicas, es necesario que  $\Delta_{eff} < 0$  para que haya un estado asintótico definido.

### 8.2.1. Caso sin ambiente para las vibraciones

En una primera aproximación se considera que los modos vibracionales no tienen pérdidas, en este caso, el espectro emitido por la cavidad está dado por la ec. (8.13), que se obtiene a partir de la ec. (7.18) con  $\Gamma = 0$ , donde se definió  $g \equiv \bar{a}c_0$ .

$$S(\nu) = \frac{8\kappa g^4 \omega_v^2}{\left[ (\omega_v^2 - \nu^2) (\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \nu^2) + 4g^2 \Delta_{eff} \omega_v \right]^2 + 4\kappa^2 \nu^2 (\omega_v^2 - \nu^2)^2} \quad (8.13)$$

En este régimen, se tiene que el espectro es simétrico:  $S(\nu) = S(-\nu)$ . En el caso de acoplamiento débil entre los modos vibracionales y las fluctuaciones del campo se tiene que  $g^2 \Delta_{eff}$  es muy pequeño. Si se toma  $g^2 \Delta_{eff} = 0$ , entonces puede determinarse que las frecuencias  $\nu_0$  de los picos están exactamente en las frecuencias de los modos vibracionales. En el caso de que  $g^2 \Delta_{eff}$  sea pequeño pero distinto de 0, se espera que las frecuencias de las resonancias se encuentren aproximadamente en las frecuencias correspondientes a los modos vibracionales. Entonces, definiendo un parámetro  $\epsilon$  pequeño mediante

$$\nu_0^2 = \omega_v^2 + \epsilon, \quad (8.14)$$

el denominador de la ec. (8.13) puede reescribirse como

$$D(\nu_0) = \left\{ \left[ \kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2 \right]^2 + 4\kappa \omega_v^2 \right\} \epsilon^2 - 8\omega_v (\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2) \epsilon (g^2 \Delta_{eff}) + 16\omega_v^2 (g^2 \Delta_{eff})^2 + \mathcal{O} \left( (g^2 \Delta_{eff})^3 \right), \quad (8.15)$$

para luego buscar el desplazamiento  $\epsilon$  al orden más bajo en  $g^2 \Delta_{eff}$ . Despreciando los términos de orden mayor a  $g^2 \Delta_{eff}$ , la expresión (8.15) para el denominador del espectro, es una función cuadrática de  $\epsilon$  por lo que tiene un mínimo en el valor de  $\epsilon$  dado por

$$\epsilon \approx \frac{4\omega_v (\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2) g^2 \Delta_{eff}}{\left( \kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2 \right)^2 + 4\kappa^2 \omega_v^2}, \quad (8.16)$$

de esta forma, utilizando la ec. (8.14), pueden encontrarse las frecuencias  $\nu_0$  correspondientes a los picos del espectro, estas están dados por

$$\nu_0^2 \approx \omega_v^2 + 4g^2 \Delta_{eff} \omega_v \left[ \frac{\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2}{\left( \kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2 \right)^2 + 4\kappa^2 \omega_v^2} \right]. \quad (8.17)$$

Utilizando la misma aproximación (8.15) para el denominador del espectro, la altura  $h \equiv S(\nu_0)$  de cada pico puede estimarse como:

$$\begin{aligned}
h \equiv S(\nu_0) &\approx \frac{8\kappa g^4 \omega_v^2}{d(\nu_0)} \\
&= \frac{\left(\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2\right)^2 + 4\kappa^2 \omega_v^2}{8\kappa \Delta_{eff}^2 \omega_v^2}.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Ahora, para determinar el ancho de los picos, se repite el mismo procedimiento que para encontrar la posición de estos. En primer lugar, se escribe  $\tilde{\nu}$ , la frecuencia correspondiente al ancho de los picos a la mitad de la altura, como:

$$\tilde{\nu}^2 = \omega_v^2 + \alpha. \tag{8.19}$$

Haciendo las mismas aproximaciones que en la ec. (8.15), se obtiene

$$D(\tilde{\nu}) = \left\{ \left[ \kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2 \right]^2 + 4\kappa \omega_v^2 \right\} \alpha^2 - 8\omega_v \left( \kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2 \right) \alpha \left( g^2 \Delta_{eff} \right) + 16\omega_v^2 \left( g^2 \Delta_{eff} \right)^2, \tag{8.20}$$

Y a partir de las ecuaciones (8.15) y (8.20) se puede estimar el ancho  $\sigma$  de los picos a la mitad de la altura, usando:

$$D(\tilde{\nu}) = 2D(\nu_0). \tag{8.21}$$

La ecuación (8.21) es una ecuación cuadrática en  $\alpha$  de la que se pueden encontrar las frecuencias  $\tilde{\nu}_+$  y  $\tilde{\nu}_-$  a las cuales el espectro tiene la mitad de la altura que en los picos, para luego encontrar el ancho de los picos como  $\sigma = |\tilde{\nu}_+ - \tilde{\nu}_-|$  (a lo largo de todo este trabajo, ancho siempre se refiere al ancho completo a la mitad de la altura):

$$\sigma \approx \frac{8\kappa \omega_v^2 g^2 |\Delta_{eff}|}{\left[ \left( \kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2 \right)^2 + 4\kappa^2 \omega_v^2 \right] |\nu_0|}. \tag{8.22}$$

A partir de las ecuaciones (8.17), (8.18) y (8.22), que se muestran a continuación para futura referencia

$$\left\{ \begin{array}{l}
\nu_0^2 \approx \omega_v^2 + 4g^2 \Delta_{eff} \omega_v \left[ \frac{\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2}{\left( \kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2 \right)^2 + 4\kappa^2 \omega_v^2} \right] \\
h = \frac{\left( \kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2 \right)^2 + 4\kappa^2 \omega_v^2}{8\kappa \Delta_{eff}^2 \omega_v^2} \\
\sigma \approx \frac{8\kappa \omega_v^2 g^2 |\Delta_{eff}|}{\left[ \left( \kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2 \right)^2 + 4\kappa^2 \omega_v^2 \right] |\nu_0|}
\end{array} \right. \tag{8.23}$$

pueden determinarse las cantidades de interés. Si se desprecia  $\epsilon$  en la ec. (8.17) se tiene que la frecuencia de los modos de vibración está dada por

$$\omega_v \approx \frac{d}{2} \tag{8.24}$$

donde  $d$  es la distancia entre los picos. De esta manera, la ec. (8.18) es una ec. de grado 4 en  $\Delta_{eff}$ , con raíces:

$$\Delta_{eff} \approx \pm \left( \kappa d^2 h - \left( \kappa^2 - \frac{d^2}{4} \right) \pm \sqrt{(\kappa h d^2)^2 - 2 \kappa h d^2 \left( \kappa^2 - \frac{d^2}{4} \right) - (\kappa d)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.25)$$

Asumiendo cierto conocimiento previo sobre la frecuencia de resonancia de la cavidad, es posible identificar cual de las raíces es la solución correcta. Reemplazando (8.18) en (8.22) se obtiene

$$g \approx \sqrt{\sigma |\Delta_{eff}| \frac{dh}{2}} \quad (8.26)$$

Para llegar a las ecuaciones (8.17), (8.18) y (8.22), se despreciaron los términos  $\mathcal{O} \left( (g^2 \Delta_{eff})^3 \right)$  de la ecuación (8.15). Más precisamente, para hacer esta aproximación se supuso que

$$\begin{aligned} 4g^2 |\Delta_{eff}| &\ll (\kappa^2 + \Delta_{eff}^2) \omega_v - \omega_v^3 \\ &\text{ó} \\ g^2 |\Delta_{eff}| &\ll \frac{\kappa^2 \omega_v^3}{\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2} \end{aligned} \quad (8.27)$$

Para verificar que las aproximaciones sean consistentes, las relaciones (8.27) deberían satisfacerse para los parámetros calculados mediante las ecuaciones (8.24), (8.25) y (8.26). De modo que la verificación de las ecuaciones (8.27) es una condición necesaria pero no suficiente para la validez de los resultados obtenidos. Recapitulando, conocida la tasa de pérdidas  $\kappa$ , y dados los valores de las frecuencias  $d$  (la distancia entre los picos), altura  $h$  y el ancho  $\sigma$  de los picos, entonces se pueden estimar los parámetros  $\omega_v$ ,  $\Delta_{eff}$  y  $g$ .

Una forma alternativa de derivar la posición y el ancho de los picos del espectro es desarrollar a los autovalores en serie de potencias de  $g^2 \Delta_{eff}$  y luego derivar iterativamente los mismos a partir del polinomio característico de la matriz (6.2):

$$0 = [(\kappa + \lambda)^2 + \Delta_{eff}^2] [(\Gamma + \lambda)^2 + \omega_v^2] + 4g^2 \omega_v \Delta_{eff} \quad (8.28)$$

Si se pone  $\Gamma = 0$  en la ecuación (8.11) entonces se puede despejar (definiendo  $\lambda = -i\nu$ ):

$$\nu^2 = \omega_v^2 + \frac{4g^2 \Delta_{eff} \omega_v \left[ (\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \nu^2) + 2i\kappa\nu \right]}{(\kappa^2 + \omega_v^2 - \nu^2)^2 + 4\kappa^2 \nu^2} \quad (8.29)$$

Si se desarrollan los autovalores en serie de potencias de  $g^2 \Delta_{eff}$ :

$$\nu = \nu_0 + (g^2 \Delta_{eff}) \nu_1 + (g^2 \Delta_{eff})^2 \nu_2 + \dots \quad (8.30)$$

Entonces, a orden 0 en  $(g^2 \Delta_{eff})$  se obtiene:

$$\nu \approx \pm \omega_v \quad (8.31)$$

Luego, la solución a orden 0 puede utilizarse para encontrar los autovalores a orden 1 en  $(g^2 \Delta_{eff})$ . Para eso se reemplaza la solución a orden 0 en (8.29) y así se obtiene:

$$\nu^2 \approx \omega_v^2 + \frac{4g^2\Delta_{eff}\omega_v \left[ (\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2) + 2i\kappa\omega_v \right]}{(\kappa^2 + \omega_c^2 - \omega_v^2)^2 + 4\kappa^2\omega_v^2} \quad (8.32)$$

Según lo comentado al final de la sección 7.2, la parte real de la ecuación (8.32) da la posición de los picos, y el resultado obtenido es idéntico al resultado obtenido en (8.17). En tanto que la parte imaginaria de los autovalores estaba relacionada al ancho de los picos del espectro mediante  $\sigma = 2|\Re(\mathbb{D}_i)|$ , entonces, asumiendo que  $\nu_1$  es pequeño se obtiene:

$$\sigma \approx \frac{8\kappa\omega_v g^2 |\Delta_{eff}|}{\left[ (\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2)^2 + 4\kappa^2\omega_v^2 \right]}, \quad (8.33)$$

que es idéntica a la ec. (8.22), reemplazando  $|\nu_0|$  por  $\omega_v$ .

### 8.2.2. Caso incluyendo un ambiente débilmente acoplado a las vibraciones

En este caso, el espectro está dado por la ec. (7.18). Para extender el análisis de la sección 8.2.1 al caso  $\Gamma \neq 0$ , pero pequeño, se toman los límites  $\Gamma \rightarrow 0$  y  $\bar{N} \rightarrow \infty$ , manteniendo  $\Gamma\bar{N}$  constante. Los mismos resultados pueden obtenerse siguiendo un procedimiento similar al de la sección 8.2.1 pero ahora despreciando además los términos de orden mayor o igual a  $\mathcal{O}(\Gamma^3)$  y  $\mathcal{O}(g^2\Delta_{eff}\Gamma^2)$ . Así

$$S(\nu) = \frac{2}{d(\nu)} \left\{ 4\kappa g^4 \omega_v^2 + g^2 \Gamma \bar{N} \left[ \kappa^2 + (\omega_v + \nu)^2 \right] \left[ (\omega_v + \nu)^2 + (\omega_v - \nu)^2 \right] \right\}, \quad (8.34)$$

donde  $d(\nu)$  en este límite está dado todavía por el denominador de la ecuación (8.13), por lo que las frecuencias correspondientes a los máximos del espectro siguen estando dadas por la ec. (8.17). Además, puede verse que en este límite, los nuevos términos son funciones suaves de  $\nu$ , y por lo tanto, puede despreciarse su efecto en la posición de los picos ni su ancho, y estos siguen siendo (8.17) y (8.22), respectivamente.

Cuando  $\Gamma \neq 0$ , el espectro es asimétrico. Entonces se puede estudiar la diferencia  $\Delta h$  y el promedio  $p$  de las alturas de los picos del espectro:

$$\begin{aligned} \Delta h &\equiv S(\nu_0) - S(-\nu_0) \\ &= -\frac{\Gamma\bar{N}}{8\kappa^2 g^2 \Delta_{eff} \omega_v^3} \left\{ 4\omega_v^2 \left( (\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2)^2 + 4\kappa^2\omega_v^2 \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + 16g^2\Delta_{eff}\omega_v (\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2) - 8g^4\Delta_{eff}^2 \frac{(\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2)^2}{(\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2)^2 + 4\kappa^2\omega_v^2} + \mathcal{O}\left((g^2\Delta_{eff})^3\right) \right\} \end{aligned} \quad (8.35)$$

Si se desprecian los términos  $\mathcal{O}(g^2\Delta_{eff})$  de la expresión (8.35), se obtiene:

$$\Delta h = -\frac{\Gamma\bar{N}}{2\kappa^2 g^2 \Delta_{eff} \omega_v} \left( (\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2)^2 + 4\kappa^2\omega_v^2 \right) \quad (8.36)$$

Esta aproximación (ec. (8.36)) es equivalente a la que se obtendría de evaluar el espectro  $S(\nu)$  en  $\nu_0$  de la ec. (8.17) a orden 0 en  $g^2\Delta_{eff}$ , es decir,  $\nu_0 = \omega_v$ . De la misma forma, se obtiene para el promedio de las alturas de los picos:

$$\begin{aligned}
p &\equiv \frac{1}{2} (S(\nu_0) + S(-\nu_0)) \\
&= \frac{\left(\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2\right)^2 + 4\kappa^2\omega_v^2}{4\kappa^2\omega_v^2\Delta_{eff}^2g^2} \left\{ \kappa g^2 + \Gamma\bar{N} (\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 + \nu_0^2) \right\}
\end{aligned} \tag{8.37}$$

Entonces, se tiene el sistema de ecuaciones dado por las ecs. (8.17), (8.22), (8.36) y (8.37):

$$\left\{ \begin{array}{l}
\nu_0^2 \approx \omega_v^2 + 4g^2\Delta_{eff}\omega_v \left[ \frac{\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2}{\left(\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2\right)^2 + 4\kappa^2\omega_v^2} \right] \\
\sigma \approx \frac{8\kappa\omega_v^2g^2|\Delta_{eff}|}{\left[\left(\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2\right)^2 + 4\kappa^2\omega_v^2\right] |\nu_0|} \\
\Delta h \approx -\frac{\Gamma\bar{N}}{2\kappa^2g^2\Delta_{eff}\omega_v} \left( \left(\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2\right)^2 + 4\kappa^2\omega_v^2 \right) \\
p \approx \frac{\left(\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2\right)^2 + 4\kappa^2\omega_v^2}{8\kappa^2\omega_v^2\Delta_{eff}^2g^2} \left\{ \kappa g^2 + \Gamma\bar{N} (\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 + \nu_0^2) \right\}
\end{array} \right. \tag{8.38}$$

y los parámetros que se quieren encontrar son  $\omega_v$ ,  $\Gamma\bar{N}$ ,  $g$  y  $\Delta_{eff}$ . Reemplazando la ec. (8.22) en (8.36), se tiene que

$$\Gamma\bar{N} \approx \frac{\sigma\kappa|\Delta h|}{4} \tag{8.39}$$

Luego, reemplazando la ecs. (8.22) y (8.39) en la ec. (8.37) se obtiene:

$$p = \frac{2}{|\Delta_{eff}|d\sigma} \left\{ g^2 + \frac{\sigma\Delta h}{4} \left( \kappa^2 + \Delta_{eff}^2 + \frac{d^2}{4} \right) \right\} \tag{8.40}$$

De donde se obtiene que  $|\Delta_{eff}|$  satisface la ecuación:

$$\begin{aligned}
0 &= |\Delta_{eff}|^4 \nu_0 + |\Delta_{eff}|^3 (2\kappa|\Delta h|\omega_v^2) + |\Delta_{eff}|^2 [2(\kappa^2 - \omega_v^2) - \omega_v^2\kappa p 8] \nu_0 + \dots \\
&\quad + |\Delta_{eff}| (2\kappa|\Delta h|\omega_v^2(\kappa^2 + \nu_0^2)) + \nu_0 (\kappa^2 - \omega_v^2)^2
\end{aligned} \tag{8.41}$$

Y así se puede utilizar la ec. (8.22) para determinar  $g$ .

$$g \approx \sqrt{\frac{\nu_0\sigma \left( \left(\kappa^2 + \Delta_{eff}^2 - \omega_v^2\right) + 4\kappa^2\omega_v^2 \right)}{8\kappa|\Delta_{eff}|\omega_v^2}} \tag{8.42}$$

Para conocer el signo de  $\Delta_{eff}$  puede variarse la frecuencia del láser, analizando la intensidad del campo dentro de la cavidad. El máximo de la intensidad corresponde a  $\Delta_{eff} = 0$  y a partir de este punto puede conocerse el signo de  $\Delta_{eff}$ . En este caso, las ecuaciones (8.27) continúan siendo condiciones necesarias pero no suficientes para asegurar la validez de los resultados obtenidos mediante las ecs. (8.41) y (8.42). Ahora, se eligen unos valores de los parámetros basados en los



de la tabla 8.2. Luego, se calcula el espectro usando los resultados de la sección 7, particularmente la ec. (7.18). Entonces, a partir de la determinación de las posiciones de los picos y la altura de los mismos pueden determinarse todas las frecuencias características del sistema usando las ecuaciones (8.39), (8.41) y (8.42). Un ejemplo del espectro emitido por la cavidad puede verse en la Fig. 8.3.

Para estimar las frecuencias, es necesario conocer la distancia entre los picos, su altura y su ancho. Para el ejemplo de la Fig. 8.3 estos valores resultan:

$$\begin{cases} S(\nu_0) = 0,732 \text{ MHz}^{-1} \\ S(-\nu_0) = 0,680 \text{ MHz}^{-1} \\ \nu_0 = 12,580 \text{ MHz} \\ \sigma_{izq} = 0,01537 \text{ MHz} \\ \sigma_{der} = 0,01537 \text{ MHz} \end{cases} \quad (8.43)$$

Luego, utilizando las ecuaciones (8.39), (8.41) y (8.42), y suponiendo  $\kappa$  como una frecuencia conocida (por lo discutido al comienzo de la sección 8), se obtienen las frecuencias:

$$\begin{cases} \omega_v/2\pi \simeq 2,0021 \text{ MHz} \\ \Gamma\bar{N}/2\pi \simeq 0,99749 \times 10^{-4} \text{ MHz} \\ |\Delta_{eff}|/2\pi \simeq 0,44323 \text{ MHz} \\ g/2\pi \simeq 0,10720 \text{ MHz} \end{cases} \quad (8.44)$$

Comparando los valores obtenidos según este método con los parámetros exactos elegidos para calcular el espectro de la Fig. 8.3, se observa un error del orden de 0,1 % en  $\omega_v$ , de 0,25 % para  $\Gamma\bar{N}$ , de 11 % para  $|\Delta_{eff}|$ , y de 7 % para  $g$ .

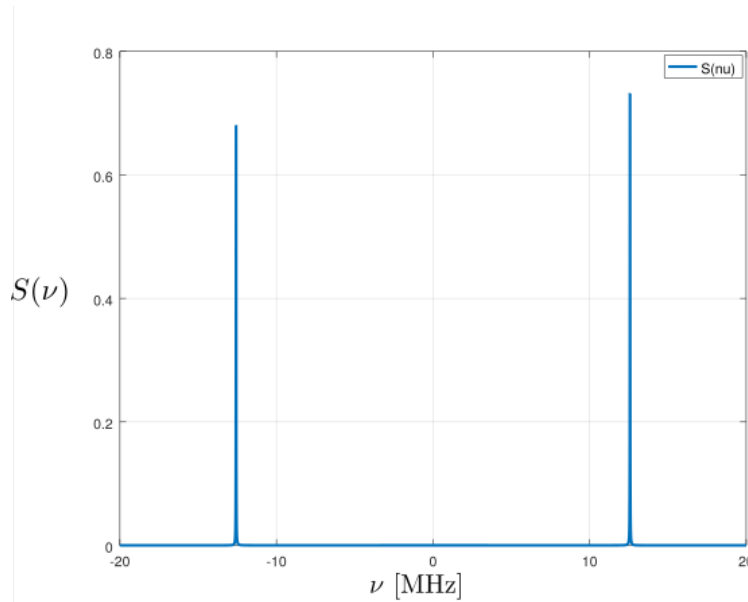


Figura 8.3: Espectro emitido por la cavidad. Los valores utilizados para calcular el espectro son:  $\Delta_{eff}/2\pi = -0,5$   $\omega_v/2\pi = 2$   $\kappa/2\pi = 0,5$   $\Gamma/2\pi = \frac{10^{-4}}{N}$   $g/2\pi = 0,1$   $N = 500$ . Todos los valores están dados en MHz.

Este conjunto de valores obtenidos representa un buen punto inicial para hacer un ajuste numérico del espectro. Además, usando los parámetros estimados como se indica en las ecuaciones

(8.24), (8.39), (8.41) y (8.42), es posible reconstruir la matriz de covarianza en el límite  $\Gamma \rightarrow 0$ ,  $\bar{N} \rightarrow \infty$  con  $\Gamma\bar{N}$  constante. Entonces, en este caso, como el estado asintótico es gaussiano, y los primeros momentos del sistema son nulos, a partir de la matriz de covarianza se tiene toda la información necesaria sobre el estado del sistema. Cualquier cantidad que se quiera calcular se puede conocer a través de la matriz de covarianza. Por ejemplo, se puede estimar el número medio de ocupación de cada modo, o el entrelazamiento entre modos, en la forma en la que se detalló en el capítulo 6.

## Capítulo 9

# Conclusiones

La primera parte de este trabajo, desde el capítulo 2 al 4, contiene material preliminar para el desarrollo del trabajo. En ella se describió el formalismo de estados Gaussianos y se analizaron por separado cada una de las partes del sistema completo, es decir, la dinámica de una cavidad bombeada y de un átomo en acoplamiento dispersivo con el campo. Luego, en el capítulo 5 se estudió la dinámica de un ion atrapado en una cavidad, utilizando una aproximación semiclásica y el formalismo de input-output se obtuvieron ecuaciones de Heisenberg-Langevin que describen la evolución de las fluctuaciones del campo dentro de la cavidad y de los modos vibracionales. En el capítulo 6 se estudiaron propiedades del estado asintótico del sistema, como el número de ocupación de los modos y el entrelazamiento entre modos. Se confirmó numéricamente que los máximos de la negatividad logarítmica se encuentran cuando hay resonancias entre la desintonía efectiva y la frecuencia de los modos vibracionales. Además, se observó que la resonancia que presenta un máximo de entrelazamiento depende del acoplamiento con los modos vibracionales. Para el caso en el que  $\Gamma \simeq \kappa$  (característico de sistemas optomecánicos) se verifica que el máximo de entrelazamiento se presenta en  $\Delta_{eff} \simeq \omega_v$ , es decir, cuando la interacción entre sistemas es predominantemente del tipo de *squeezing* de dos modos. Mientras que cuando  $\Gamma \ll \kappa$  (característico de iones atrapados en cavidades ópticas), se tiene que el máximo de entrelazamiento se presenta en  $\Delta_{eff} \simeq -\omega_v$ , es decir, cuando la interacción predominante es del tipo *beam-splitter*.

Luego, en el capítulo 8 se analizó la posibilidad de obtener los parámetros que describen el estado estacionario del sistema a partir del estudio de distintos rasgos espectrales. Se obtuvo un sistema de ecuaciones no lineales a partir del cual pueden determinarse los parámetros que describen el estado asintótico del sistema. Haciendo aproximaciones consistentes con configuraciones experimentales de iones atrapados en cavidades ópticas se encontraron formas de aproximar el acoplamiento entre los modos vibracionales y las fluctuaciones, la desintonía entre el láser y la frecuencia efectiva de la cavidad, y el producto  $\Gamma\bar{N}$  entre el acoplamiento de los modos vibracionales con su ambiente y el número medio de excitaciones del mismo. A pesar de haber encontrado una forma de estimar estas cantidades, no es posible encontrar una forma de estimar  $\Gamma$  o  $\bar{N}$  por separado. Esto se debe a que se trabajó en el régimen en donde  $\bar{N} \approx \bar{N} + 1$  y  $\Gamma$  pequeño, lo que resulta en que en todas las ecuaciones esta cantidad aparezca siempre como el producto  $\Gamma\bar{N}$ . Esto último significa que sólo es posible reconstruir la matriz de covarianza en el estado asintótico en este mismo límite, no para un caso arbitrario (tales mediciones son posibles, y se realizaron por ejemplo en [116, 117]). Así, es posible encontrar la matriz de covarianza en el límite de  $\Gamma \rightarrow 0$ ,  $\bar{N} \rightarrow \infty$  con  $\Gamma\bar{N}$  finito. En este caso, dado que el estado asintótico del sistema es un estado Gaussiano, se recupera toda la información sobre el estado, y a partir de esto es posible estimar cualquier cantidad de interés, como por ejemplo, el número de ocupación de los modos vibracionales o el entrelazamiento entre modos, utilizando los métodos descriptos en el capítulo 6.

Además, estas estimaciones podrían utilizarse como un punto inicial para resolver numéricamente los sistemas de ecuaciones no lineales que determinan los parámetros antes mencionados. También podrían utilizarse como un punto inicial para hacer un ajuste numérico del espectro. Otro paso a seguir para continuar este trabajo es la incorporación de un ion más al sistema, lo que da lugar a la inclusión de un segundo modo vibracional.

## Apéndice A

# Derivación alternativa de la matriz de covarianza en el estado asintótico

La dinámica de un modo del campo electromagnético confinado dentro de la cavidad y un modo de vibración de un átomo está descrita por la ecuación maestra (3.5) para un sistema de bosones en contacto con un baño térmico. Donde ahora  $H$  está dado (en el marco de referencia que rota a la frecuencia del láser) por:

$$H = H_c + H_L + H_v + H_{acop} \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\begin{aligned} H_c &= \hbar\omega_{eff} \delta a^\dagger \delta a \\ H_v &= \hbar\omega_v b^\dagger b \\ H_L &= \hbar c(\delta a + \delta a^\dagger) \\ H_{acop} &= \hbar g(\delta a + \delta a^\dagger)(b + b^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

y donde  $\omega_{eff} = \omega_c + g^2/\Delta_0$ . A la evolución unitaria de los modos  $\delta a$  del campo dentro de la cavidad, se le agregan las pérdidas de fotones a través del espejo a una tasa  $2\kappa$ , que se corresponden con un acoplamiento con un baño térmico tomando  $N = 0$ , es decir que el baño no introduce fotones dentro de la cavidad. Esta aproximación es válida para campos con frecuencias en el rango de la luz visible a temperaturas menores que la temperatura ambiente. Se incorpora a la descripción un modo de vibración  $b$  de un átomo atrapado dentro de la cavidad. Los modos de vibración  $b$  del átomo están acoplados a otro baño térmico con tasa de pérdidas de fonones  $2\Gamma$  y  $N \neq 0$ .

Entonces  $H = H_c + H_v + H_{acop}$  y se tiene de la ec. (3.3)

$$\dot{\rho}_s = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_s] + \mathcal{D}_c \rho_s + \mathcal{D}_v \rho_s \quad (\text{A.3})$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_c &= \kappa(2\delta a \rho \delta a^\dagger - \delta a^\dagger \delta a \rho - \rho \delta a^\dagger \delta a) \\ \mathcal{D}_v &= \Gamma(N+1)(2b\rho b^\dagger - b^\dagger b \rho - \rho b^\dagger b) + \Gamma N(2b^\dagger \rho b - b b^\dagger \rho - \rho b b^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Pasando a un marco rotante con la frecuencia del láser, al igual que en (3.16) se tiene la ec. (A.5) para la dinámica de dos modos acoplados entre sí y a dos baños térmicos.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}} &= -\frac{i}{\hbar} [H_c - H_p, \tilde{\rho}] - \frac{i}{\hbar} [H_{vib}, \tilde{\rho}] - \frac{i}{\hbar} [H_{acop}, \tilde{\rho}] + \mathcal{D}_c \tilde{\rho} + \mathcal{D}_v \tilde{\rho} \\ &= i\Delta_{eff} [\delta a^\dagger \delta a, \tilde{\rho}] - i\omega_v [b^\dagger b, \rho] - ig [(\delta a + \delta a^\dagger)(b + b^\dagger), \tilde{\rho}] + \mathcal{D}_c \tilde{\rho} + \mathcal{D}_v \tilde{\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Nuevamente, por medio de (3.7) se pueden obtener ecuaciones para los primeros y segundos momentos de los operadores del sistema. Las ecuaciones obtenidas son (A.6) (todos los valores de expectación están obtenidos en el marco rotante, pero se omite el símbolo  $\sim$  por claridad).

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle\delta a\rangle}{dt} &= -(\kappa - i\Delta_{eff})\langle\delta a\rangle - ig(\langle b\rangle + \langle b^\dagger\rangle) \\
\frac{d\langle\delta a^\dagger\delta a\rangle}{dt} &= -2\kappa\langle\delta a^\dagger\delta a\rangle - ig\left\{\left(\langle\delta a b^\dagger\rangle - \langle\delta a b^\dagger\rangle^*\right) + \left(\langle\delta a b\rangle - \langle\delta a b\rangle^*\right)\right\} \\
\frac{d\langle\delta a^2\rangle}{dt} &= -2(\kappa - i\Delta_{eff})\langle\delta a^2\rangle - 2ig(\langle\delta a b\rangle + \langle\delta a b^\dagger\rangle) \\
\frac{d\langle b\rangle}{dt} &= -(\Gamma + i\omega_v)\langle b\rangle - ig(\langle\delta a\rangle + \langle\delta a^\dagger\rangle) \\
\frac{d\langle b^\dagger b\rangle}{dt} &= -2\Gamma\langle b^\dagger b\rangle + 2\Gamma N + ig\left\{\left(\langle\delta a b\rangle - \langle\delta a b\rangle^*\right) - \left(\langle\delta a b^\dagger\rangle - \langle\delta a b^\dagger\rangle^*\right)\right\} \\
\frac{d\langle b^2\rangle}{dt} &= -2(\Gamma + i\omega_v)\langle b^2\rangle - 2ig(\langle\delta a b\rangle + \langle\delta a b^\dagger\rangle^*) \\
\frac{d\langle\delta a b\rangle}{dt} &= -[(\kappa - i\Delta_{eff}) + (\Gamma + i\omega_v)]\langle\delta a b\rangle - ig\{\langle\delta a^2\rangle + \langle b^2\rangle + \langle\delta a^\dagger a\rangle + \langle b^\dagger b\rangle + 1\} \\
\frac{d\langle\delta a b^\dagger\rangle}{dt} &= -[(\kappa - i\Delta_{eff}) + (\Gamma - i\omega_v)]\langle\delta a b^\dagger\rangle - ig\{-\langle\delta a^2\rangle + \langle b^2\rangle^* - \langle\delta a^\dagger a\rangle + \langle b^\dagger b\rangle\}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

De la ec. (A.6) se puede ver que las ecuaciones para los primeros momentos están desacopladas de las ecuaciones para los segundos momentos.

Definiendo el vector (A.7) se puede reescribir el sistema de ecuaciones para los primeros momentos como (A.8).

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \langle\delta a\rangle \\ \langle\delta a^\dagger\rangle \\ \langle b\rangle \\ \langle b^\dagger\rangle \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = A\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -(\kappa - i\Delta_{eff}) & 0 & -ig & -ig \\ 0 & -(\kappa + i\Delta_{eff}) & ig & ig \\ -ig & -ig & -(\Gamma + i\omega_v) & 0 \\ ig & ig & 0 & -(\Gamma - i\omega_v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\delta a\rangle \\ \langle\delta a^\dagger\rangle \\ \langle b\rangle \\ \langle b^\dagger\rangle \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

De la misma forma, el sistema de ecuaciones para los segundos momentos está dado por (A.9)



$$\begin{aligned}
y_i(t) &= \alpha_i e^{\mathbb{D}_i t} - e^{\mathbb{D}_i t} c_i \left( \frac{e^{-\mathbb{D}_i t} - 1}{\mathbb{D}_i} \right) \\
&= \alpha_i e^{\mathbb{D}_i t} + \frac{c_i}{\mathbb{D}_i} (e^{\mathbb{D}_i t} - 1)
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Si cada uno de los autovalores cumple  $Re(\mathbb{D}_i) < 0$  entonces  $y_i(t) \rightarrow -\frac{c_i}{\mathbb{D}_i}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Luego, usando  $\mathbf{x} = \mathbb{P}\mathbf{y}$  se obtienen los valores asintóticos de los segundos momentos. Esto permite construir la matriz de covarianza. Los resultados obtenidos mediante la ec. (A.14) son equivalentes a los obtenidos mediante una ecuación maestra en la sección 6 (ec. (6.14)).



# Agradecimientos

Son incontables las personas que se involucraron y me ayudaron a terminar esta etapa, entonces en este momento podría ponerme tan cursi como quiera. Sin embargo, me voy a quedar en el molde. Nada de todo esto hubiera sido posible sin la ayuda de todas las personas con las que me encontré a lo largo de estos años. No voy a hacer una lista exhaustiva, porque es imposible nombrar a todos los profesores con tanta predisposición a enseñar, a todos los compañeros con tantas ganas de ayudar y todos los amigos y familiares que estuvieron constantemente acompañándome y que hicieron posible esto. De todas maneras, voy a nombrar a algunas pocas de estas personas.

Antes que nada, le quiero agradecer a Cecilia por todo su trabajo y por todo el tiempo, dedicación y esfuerzo; por dedicar a lo largo de todo este año tanto tiempo a enseñarme cada detalle con toda la paciencia necesaria (que no fue poca), y por ayudarme en un montón de otros aspectos y en cada una de las cosas que estuvo a su alcance.

También quería agradecerles, en general, a cada uno de los profesores que a lo largo de estos años dedicaron muchísimo tiempo y compromiso para ayudarme, sin esperar nada de vuelta. En este punto en particular sería injusto nombrar a personas, porque seguro me faltaría un montón de gente. La facultad fue siempre un lugar un lugar muy cálido, lleno de gente increíblemente predispuesta a dar una mano en todo.

Le quería agradecer a toda mi familia y especialmente a mi mamá, porque todo lo que pude hacer lo hice gracias a su apoyo. Además quiero agradecerles a todos los amigos que estuvieron acompañándome, incluso aunque no hayamos estado tan cerca.

Por supuesto le quiero agradecer a todos mis compañeros, y en particular, a la gente de Rongacatonga. Fueron la mejor compañía que alguien podría haber tenido en estos años. Gracias por toda la ayuda y por arrastrarme hasta acá. En particular gracias a Santi por explicarme todas las cosas y por enseñarme tanto, además de hacerlo con la paciencia digna de un monje. Algún día voy a entender dónde va la masa.



# Bibliografía

- [1] C. Cormick and G. Morigi, “Ion chains in high-finesse cavities,” *Phys. Rev. A*, vol. 87, p. 013829, Jan 2013.
- [2] T. Fogarty, C. Cormick, H. Landa, V. M. Stojanović, E. Demler, and G. Morigi, “Nanofriction in cavity quantum electrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 115, p. 233602, Dec 2015.
- [3] P. Ghosh, *Ion Traps*. International Series of Monogr, Clarendon Press, 1995.
- [4] D. J. Wineland, “Trapped ions, laser cooling, and better clocks,” *Science*, vol. 226, no. 4673, pp. 395–400, 1984.
- [5] J. Eschner, G. Morigi, F. Schmidt-Kaler, and R. Blatt, “Laser cooling of trapped ions,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 20, pp. 1003–1015, May 2003.
- [6] M. Tomza, K. Jachymski, R. Gerritsma, A. Negretti, T. Calarco, Z. Idziaszek, and P. S. Julienne, “Cold hybrid ion-atom systems,” *ArXiv e-prints*, Aug. 2017.
- [7] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, “Quantum dynamics of single trapped ions,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 75, pp. 281–324, Mar 2003.
- [8] S. Haroche and J. Raimond, *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons*. Oxford Graduate Texts, OUP Oxford, 2013.
- [9] D. J. Wineland, R. E. Drullinger, and F. L. Walls, “Radiation-pressure cooling of bound resonant absorbers,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 40, pp. 1639–1642, Jun 1978.
- [10] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. Toschek, and H. Dehmelt, “Optical-sideband cooling of visible atom cloud confined in parabolic well,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 41, pp. 233–236, Jul 1978.
- [11] F. Diedrich, J. C. Bergquist, W. M. Itano, and D. J. Wineland, “Laser cooling to the zero-point energy of motion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 62, pp. 403–406, Jan 1989.
- [12] P. S. Jessen, C. Gerz, P. D. Lett, W. D. Phillips, S. L. Rolston, R. J. C. Spreeuw, and C. I. Westbrook, “Observation of quantized motion of rb atoms in an optical field,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 69, pp. 49–52, Jul 1992.
- [13] C. Cormick and G. Morigi, “Structural transitions of ion strings in quantum potentials,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 053003, Aug 2012.
- [14] F. Cartarius, C. Cormick, and G. Morigi, “Stability and dynamics of ion rings in linear multipole traps,” *Phys. Rev. A*, vol. 87, p. 013425, Jan 2013.
- [15] D. J. Douglas, A. J. Frank, and D. Mao, “Linear ion traps in mass spectrometry,” *Mass Spectrometry Reviews*, vol. 24, no. 1, pp. 1–29, 2005.
- [16] R. March, “Quadrupole ion trap mass spectrometry: A view at the turn of the century,” vol. 200, pp. 285–312, 12 2000.
- [17] C. W. Chou, D. B. Hume, T. Rosenband, and D. J. Wineland, “Optical clocks and relativity,” *Science*, vol. 329, no. 5999, pp. 1630–1633, 2010.
- [18] R. Shaniv and R. Ozeri, “Quantum lock-in force sensing using optical clock doppler velocimetry,” *Nature Communications*, vol. 8, pp. 14157 EP –, Feb 2017. Article.
- [19] C. A. Muschik, H. Krauter, K. Jensen, J. M. Petersen, J. I. Cirac, and E. S. Polzik, “Robust entanglement generation by reservoir engineering,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 45, no. 12, p. 124021, 2012.
- [20] D. V. Vasilyev, C. A. Muschik, and K. Hammerer, “Dissipative versus conditional generation of Gaussian entanglement and spin squeezing,” *Phys. Rev. A*, vol. 87, p. 053820, May 2013.
- [21] C. Arenz, C. Cormick, D. Vitali, and G. Morigi, “Generation of two-mode entangled states by quantum reservoir engineering,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 46, no. 22, p. 224001, 2013.

- [22] B. Vogell, B. Vermersch, T. E. Northup, B. P. Lanyon, and C. A. Muschik, “Deterministic quantum state transfer between remote qubits in cavities,” *Quantum Science and Technology*, vol. 2, no. 4, p. 045003, 2017.
- [23] R. Blatt and C. F. Roos, “Quantum simulations with trapped ions,” *Nature Physics*, vol. 8, pp. 277 EP –, Apr 2012. Review Article.
- [24] C. Muschik, M. Heyl, E. Martinez, T. Monz, P. Schindler, B. Vogell, M. Dalmonte, P. Hauke, R. Blatt, and P. Zoller, “U(1) wilson lattice gauge theories in digital quantum simulators,” *New Journal of Physics*, vol. 19, no. 10, p. 103020, 2017.
- [25] E. A. Martinez, C. A. Muschik, P. Schindler, D. Nigg, A. Erhard, M. Heyl, P. Hauke, M. Dalmonte, T. Monz, P. Zoller, and R. Blatt, “Real-time dynamics of lattice gauge theories with a few-qubit quantum computer,” *Nature*, vol. 534, pp. 516 EP –, Jun 2016.
- [26] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, and D. J. Wineland, “A “schrödinger cat” superposition state of an atom,” *Science*, vol. 272, no. 5265, pp. 1131–1136, 1996.
- [27] J. D. Jost, J. P. Home, J. M. Amini, D. Hanneke, R. Ozeri, C. Langer, J. J. Bollinger, D. Leibfried, and D. J. Wineland, “Entangled mechanical oscillators,” *Nature*, vol. 459, pp. 683 EP –, Jun 2009.
- [28] R. Blatt and D. Wineland, “Entangled states of trapped atomic ions,” *Nature*, vol. 453, pp. 1008 EP –, Jun 2008.
- [29] J. I. Cirac and P. Zoller, “Quantum computations with cold trapped ions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74, pp. 4091–4094, May 1995.
- [30] H. Häffner, C. Roos, and R. Blatt, “Quantum computing with trapped ions,” *Physics Reports*, vol. 469, no. 4, pp. 155 – 203, 2008.
- [31] J. Garrison and R. Chiao, *Quantum Optics*. Oxford Graduate Texts, OUP Oxford, 2008.
- [32] A. B. Mundt, A. Kreuter, C. Becher, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler, and R. Blatt, “Coupling a single atomic quantum bit to a high finesse optical cavity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, p. 103001, Aug 2002.
- [33] P. F. Herskind, A. Dantan, J. P. Marler, M. Albert, and M. Drewsen, “Realization of collective strong coupling with ion coulomb crystals in an optical cavity,” *Nat Phys*, vol. 5, pp. 494–498, Jul 2009.
- [34] M. Cetina, A. Bylinskii, L. Karpa, D. Gangloff, K. M. Beck, Y. Ge, M. Scholz, A. T. Grier, I. Chuang, and V. Vuleti, “One-dimensional array of ion chains coupled to an optical cavity,” *New Journal of Physics*, vol. 15, no. 5, p. 053001, 2013.
- [35] B. Casabone, K. Friebe, B. Brandstätter, K. Schüppert, R. Blatt, and T. E. Northup, “Enhanced quantum interface with collective ion-cavity coupling,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 114, p. 023602, Ene 2015.
- [36] M. Keller, B. Lange, K. Hayasaka, W. Lange, and H. Walther, “Continuous generation of single photons with controlled waveform in an ion-trap cavity system,” *Nature*, vol. 431, pp. 1075 EP –, Oct 2004.
- [37] H. G. Barros, A. Stute, T. E. Northup, C. Russo, P. O. Schmidt, and R. Blatt, “Deterministic single-photon source from a single ion,” *New Journal of Physics*, vol. 11, no. 10, p. 103004, 2009.
- [38] A. Bylinskii, D. Gangloff, and V. Vuletić, “Tuning friction atom-by-atom in an ion-crystal simulator,” *Science*, vol. 348, no. 6239, pp. 1115–1118, 2015.
- [39] D. Gangloff, A. Bylinskii, I. Counts, W. Jhe, and V. Vuletic, “Velocity tuning of friction with two trapped atoms,” *Nature Physics*, vol. 11, pp. 915 EP –, Sep 2015.
- [40] B. Casabone, A. Stute, K. Friebe, B. Brandstätter, K. Schüppert, R. Blatt, and T. E. Northup, “Heralded entanglement of two ions in an optical cavity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, p. 100505, Sep 2013.
- [41] A. Stute, B. Casabone, P. Schindler, T. Monz, P. O. Schmidt, B. Brandstatter, T. E. Northup, and R. Blatt, “Tunable ion-photon entanglement in an optical cavity,” *Nature*, vol. 485, pp. 482–485, May 2012. 22622573[pmid].
- [42] J. D. Sterk, L. Luo, T. A. Manning, P. Maunz, and C. Monroe, “Photon collection from a trapped ion-cavity system,” *Phys. Rev. A*, vol. 85, p. 062308, Jun 2012.
- [43] S. Gröblacher, J. B. Hertzberg, M. R. Vanner, G. D. Cole, S. Gigan, K. C. Schwab, and M. Aspelmeyer, “Demonstration of an ultracold micro-optomechanical oscillator in a cryogenic cavity,” *Nature Physics*, vol. 5, pp. 485 EP –, Jun 2009.
- [44] A. Schliesser, O. Arcizet, R. Rivière, G. Anetsberger, and T. J. Kippenberg, “Resolved-sideband cooling and position measurement of a micromechanical oscillator close to the Heisenberg uncertainty limit,” *Nature Physics*, vol. 5, pp. 509 EP –, Jun 2009. Article.
- [45] K. Stannigel, P. Rabl, A. S. Sørensen, P. Zoller, and M. D. Lukin, “Optomechanical transducers for long-distance quantum communication,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 220501, Nov 2010.

- [46] M. Wallquist, K. Hammerer, P. Rabl, M. Lukin, and P. Zoller, “Hybrid quantum devices and quantum engineering,” *Physica Scripta*, vol. 2009, no. T137, p. 014001, 2009.
- [47] N. Brahms, T. Botter, S. Schreppler, D. W. C. Brooks, and D. M. Stamper-Kurn, “Optical detection of the quantization of collective atomic motion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 133601, Mar 2012.
- [48] M. P. Blencowe and M. N. Wybourne, “Sensitivity of a micromechanical displacement detector based on the radio-frequency single-electron transistor,” *Applied Physics Letters*, vol. 77, no. 23, pp. 3845–3847, 2000.
- [49] D. W. C. Brooks, T. Botter, N. Brahms, T. P. Purdy, S. Schreppler, and D. M. Stamper-Kurn, “Ponderomotive light squeezing with atomic cavity optomechanics,” *ArXiv e-prints*, July 2011.
- [50] L. F. Buchmann, S. Schreppler, J. Kohler, N. Spethmann, and D. M. Stamper-Kurn, “Complex squeezing and force measurement beyond the standard quantum limit,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 117, p. 030801, Jul 2016.
- [51] K. Goda, O. Miyakawa, E. E. Mikhailov, S. Saraf, R. Adhikari, K. McKenzie, R. Ward, S. Vass, A. J. Weinstein, and N. Mavalvala, “A quantum-enhanced prototype gravitational-wave detector,” *Nature Physics*, vol. 4, pp. 472 EP –, Mar 2008.
- [52] A. Arvanitaki and A. A. Geraci, “Detecting high-frequency gravitational waves with optically levitated sensors,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, p. 071105, Feb 2013.
- [53] D. Vitali, S. Gigan, A. Ferreira, H. R. Bohm, P. Tombesi, A. Guerreiro, V. Vedral, A. Zeilinger, and M. Aspelmeyer, “Optomechanical entanglement between a movable mirror and a cavity field,” in *2007 European Conference on Lasers and Electro-Optics and the International Quantum Electronics Conference*, pp. 1–1, June 2007.
- [54] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, and F. Marquardt, “Cavity optomechanics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 86, pp. 1391–1452, Dec 2014.
- [55] A. S. Parkins and H. J. Kimble, “Quantum state transfer between motion and light,” *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 1, no. 4, p. 496, 1999.
- [56] Y.-D. Wang and A. A. Clerk, “Using interference for high fidelity quantum state transfer in optomechanics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 153603, Apr 2012.
- [57] J. L. Sørensen, D. Møller, T. Iversen, J. B. Thomsen, F. Jensen, P. Staunum, D. Voigt, and M. Drewsen, “Efficient coherent internal state transfer in trapped ions using stimulated raman adiabatic passage,” *New Journal of Physics*, vol. 8, no. 11, p. 261, 2006.
- [58] D. E. Bruschi and A. Xuereb, ““Mechano-optics”: An optomechanical quantum simulator,” *ArXiv e-prints*, Dec. 2017.
- [59] K. Stannigel, P. Rabl, A. S. Sørensen, P. Zoller, and M. D. Lukin, “Optomechanical transducers for long-distance quantum communication,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 220501, Nov 2010.
- [60] Q. Lin, J. Rosenberg, D. Chang, R. Camacho, M. Eichenfield, K. J. Vahala, and O. Painter, “Coherent mixing of mechanical excitations in nano-optomechanical structures,” *Nature Photonics*, vol. 4, pp. 236 EP –, Feb 2010. Article.
- [61] A. H. Safavi-Naeini, J. Chan, J. T. Hill, T. P. M. Alegre, A. Krause, and O. Painter, “Observation of quantum motion of a nanomechanical resonator,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 033602, Jan 2012.
- [62] K. Karrai, I. Favero, and C. Metzger, “Doppler optomechanics of a photonic crystal,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, p. 240801, Jun 2008.
- [63] T. J. Kippenberg and K. J. Vahala, “Cavity optomechanics: Back-action at the mesoscale,” *Science*, vol. 321, no. 5893, pp. 1172–1176, 2008.
- [64] R. W. Peterson, T. P. Purdy, N. S. Kampel, R. W. Andrews, P.-L. Yu, K. W. Lehnert, and C. A. Regal, “Laser cooling of a micromechanical membrane to the quantum backaction limit,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 063601, Feb 2016.
- [65] D. James, “Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation,” *Applied Physics B*, vol. 66, pp. 181–190, Feb 1998.
- [66] T. Fogarty, H. Landa, C. Cormick, and G. Morigi, “Optomechanical many-body cooling to the ground state using frustration,” *Phys. Rev. A*, vol. 94, p. 023844, Aug 2016.
- [67] A. Ekert and P. L. Knight, “Entangled quantum systems and the schmidt decomposition,” *American Journal of Physics*, vol. 63, no. 5, pp. 415–423, 1995.
- [68] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*. OUP Oxford, 2000.
- [69] W.-M. Zhang, D. H. Feng, and R. Gilmore, “Coherent states: Theory and some applications,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 62, pp. 867–927, Oct 1990.

- [70] K. E. Cahill and R. J. Glauber, “Ordered expansions in boson amplitude operators,” *Phys. Rev.*, vol. 177, pp. 1857–1881, Jan 1969.
- [71] A. Ferraro, S. Olivares, and M. Paris, *Gaussian States in Quantum Information*. Napoli Series on physics and Astrophysics, Bibliopolis, 2005.
- [72] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [73] J. Eisert and M. B. Plenio, “Introduction to the basics of entanglement theory in continuous-variable systems,” *International Journal of Quantum Information*, vol. 01, no. 04, pp. 479–506, 2003.
- [74] J. Williamson, “On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems,” *American Journal of Mathematics*, vol. 58, no. 1, pp. 141–163, 1936.
- [75] G. Adesso and F. Illuminati, “Entanglement in continuous-variable systems: recent advances and current perspectives,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 40, no. 28, p. 7821, 2007.
- [76] D. P. DiVincenzo, “Quantum computation,” *Science*, vol. 270, no. 5234, pp. 255–261, 1995.
- [77] D. A. R. Dalvit, R. L. de Matos Filho, and F. Toscano, “Quantum metrology at the Heisenberg limit with ion trap motional compass states,” *New Journal of Physics*, vol. 8, no. 11, p. 276, 2006.
- [78] D. S. Tasca, R. M. Gomes, F. Toscano, P. H. Souto Ribeiro, and S. P. Walborn, “Continuous-variable quantum computation with spatial degrees of freedom of photons,” *Phys. Rev. A*, vol. 83, p. 052325, May 2011.
- [79] R. Laurenza, S. L. Braunstein, and S. Pirandola, “Finite-resource teleportation stretching for continuous-variable systems,” *arXiv preprint arXiv:1706.06065*, 2017.
- [80] P. Jouguet, S. Kunz-Jacques, A. Leverrier, P. Grangier, and E. Diamanti, “Experimental demonstration of long-distance continuous-variable quantum key distribution,” *Nature Photonics*, vol. 7, pp. 378 EP –, Apr 2013.
- [81] K. Blum, *Density Matrix Theory and Applications*. Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [82] M. B. Plenio and S. Virmani, “An introduction to entanglement measures,” *Quantum Info. Comput.*, vol. 7, pp. 1–51, Jan. 2007.
- [83] A. Peres, “Separability criterion for density matrices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, pp. 1413–1415, Aug 1996.
- [84] R. Simon, “Peres-horodecki separability criterion for continuous variable systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 2726–2729, Mar 2000.
- [85] G. Vidal and R. F. Werner, “Computable measure of entanglement,” *Phys. Rev. A*, vol. 65, p. 032314, Feb 2002.
- [86] C. Gardiner and P. Zoller, *The Quantum World of Ultra-Cold Atoms and Light Book II: The Physics of Quantum-Optical Devices*, pp. 1–524. 2015.
- [87] H.-P. Breuer, E.-M. Laine, J. Piilo, and B. Vacchini, “Colloquium: Non-Markovian dynamics in open quantum systems,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 88, p. 021002, Apr 2016.
- [88] A. Rivas and S. F. Huelga. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [89] H. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002.
- [90] G. Giedke and J. Ignacio Cirac, “Characterization of Gaussian operations and distillation of Gaussian states,” *Phys. Rev. A*, vol. 66, p. 032316, Sep 2002.
- [91] C. Gardiner, *Quantum noise*. Springer series in synergetics, Springer-Verlag, 1991.
- [92] C. W. Gardiner and M. J. Collett, “Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation,” *Phys. Rev. A*, vol. 31, pp. 3761–3774, Jun 1985.
- [93] C. Gerry and P. Knight, *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005.
- [94] C. Cormick, T. Schaetz, and G. Morigi, “Trapping ions with lasers,” *New Journal of Physics*, vol. 13, no. 4, p. 043019, 2011.
- [95] V. Bužek, G. Drobný, M. S. Kim, G. Adam, and P. L. Knight, “Cavity qed with cold trapped ions,” *Phys. Rev. A*, vol. 56, pp. 2352–2360, Sep 1997.
- [96] R. Miller, T. E. Northup, K. M. Birnbaum, A. Boca, A. D. Boozer, and H. J. Kimble, “Trapped atoms in cavity qed: coupling quantized light and matter,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 38, no. 9, p. S551, 2005.
- [97] E. Brion, L. H. Pedersen, and K. Mølmer, “Adiabatic elimination in a lambda system,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 40, no. 5, p. 1033, 2007.

- [98] I. Marzoli, J. I. Cirac, R. Blatt, and P. Zoller, “Laser cooling of trapped three-level ions: Designing two-level systems for sideband cooling,” *Phys. Rev. A*, vol. 49, pp. 2771–2779, Apr 1994.
- [99] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King, and D. M. Meekhof, “Experimental issues in coherent quantum-state manipulation of trapped atomic ions,” *J Res Natl Inst Stand Technol*, vol. 103, pp. 259–328, Jun 1998.
- [100] J. I. Cirac, R. Blatt, P. Zoller, and W. D. Phillips, “Laser cooling of trapped ions in a standing wave,” *Phys. Rev. A*, vol. 46, pp. 2668–2681, Sep 1992.
- [101] M. Orszag, *Quantum Optics*. Advanced texts in physics, Springer, 2000.
- [102] S. Singh, H. Jing, E. M. Wright, and P. Meystre, “Quantum-state transfer between a bose-einstein condensate and an optomechanical mirror,” *Phys. Rev. A*, vol. 86, p. 021801, Aug 2012.
- [103] G. Adesso, A. Serafini, and F. Illuminati, “Extremal entanglement and mixedness in continuous variable systems,” *Phys. Rev. A*, vol. 70, p. 022318, Aug 2004.
- [104] F. Marquardt, J. P. Chen, A. A. Clerk, and S. M. Girvin, “Quantum theory of cavity-assisted sideband cooling of mechanical motion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 093902, Aug 2007.
- [105] A. Cleland, *Foundations of Nanomechanics: From Solid-State Theory to Device Applications*. Advanced Texts in Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [106] M. Hosseini, Y. Duan, K. M. Beck, Y.-T. Chen, and V. Vuletić, “Cavity cooling of many atoms,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 118, p. 183601, May 2017.
- [107] M. H. Schleier-Smith, I. D. Leroux, H. Zhang, M. A. Van Camp, and V. Vuletić, “Optomechanical cavity cooling of an atomic ensemble,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 143005, Sep 2011.
- [108] A. Schliesser, P. Del’Haye, N. Nooshi, K. J. Vahala, and T. J. Kippenberg, “Radiation pressure cooling of a micromechanical oscillator using dynamical backaction,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 97, p. 243905, Dec 2006.
- [109] T. Botter, D. W. C. Brooks, S. Schreppler, N. Brahms, and D. M. Stamper-Kurn, “Optical readout of the quantum collective motion of an array of atomic ensembles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, p. 153001, Apr 2013.
- [110] J. Chan, T. P. M. Alegre, A. H. Safavi-Naeini, J. T. Hill, A. Krause, S. Gröblacher, M. Aspelmeyer, and O. Painter, “Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state,” *Nature*, vol. 478, pp. 89 EP –, Oct 2011.
- [111] D. R. Leibbrandt, J. Labaziewicz, V. Vuletić, and I. L. Chuang, “Cavity sideband cooling of a single trapped ion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 103001, Aug 2009.
- [112] C. Schneider, M. Enderlein, T. Huber, and T. Schaetz, “Optical trapping of an ion,” *Nature Photonics*, vol. 4, pp. 772 EP –, Oct 2010.
- [113] G.-D. Lin, S.-L. Zhu, R. Islam, K. Kim, M.-S. Chang, S. Korenblit, C. Monroe, and L.-M. Duan, “Large-scale quantum computation in an anharmonic linear ion trap,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 86, no. 6, p. 60004, 2009.
- [114] B. E. King, C. S. Wood, C. J. Myatt, Q. A. Turchette, D. Leibfried, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland, “Cooling the collective motion of trapped ions to initialize a quantum register,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 1525–1528, Aug 1998.
- [115] H. Rohde, S. T. Gulde, C. F. Roos, P. A. Barton, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler, and R. Blatt, “Sympathetic ground-state cooling and coherent manipulation with two-ion crystals,” *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 3, no. 1, p. S34, 2001.
- [116] J. Laurat, G. Keller, J. A. Oliveira-Huguenin, C. Fabre, T. Coudreau, A. Serafini, G. Adesso, and F. Illuminati, “Entanglement of two-mode gaussian states: characterization and experimental production and manipulation,” *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, vol. 7, no. 12, p. S577, 2005.
- [117] I. I. Arkhipov and J. Peina, “Retrieving the covariance matrix of an unknown two-mode gaussian state by means of a reference twin beam,” *Optics Communications*, vol. 375, pp. 29 – 33, 2016.





Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación de tesis, damos Fe que el presente ejemplar impreso, se corresponde con el aprobado por éste Tribunal.

Dra. Cecilia Cormick

Dr. Ricardo Zamar

Dr. Federico Pont