



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

TRABAJO ESPECIAL
LICENCIATURA EN FÍSICA

FORMACIÓN DE JETS POR AGUJEROS NEGROS
VIAJANDO A ALTAS VELOCIDADES EN UN
CAMPO MAGNÉTICO

RAMIRO CAYUSO

DIRECTOR: DR. OSCAR REULA

19 DE MARZO DE 2018



Formación de jets por agujeros negros viajando a altas velocidades en un campo magnético por Ramiro Cayuso se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Resumen

En este trabajo se continuó el estudio numérico de formación de *jets* por agujeros negros viajando a altas velocidades con respecto a un campo magnético uniforme comenzado en [1]. El esquema numérico implementado es el utilizado en [2] el cual presenta un esquema numérico 3D para la evolución de las ecuaciones de la electrodinámica *force-free* alrededor de un agujero negro de Kerr. Tratamos en este trabajo tres situaciones físicas distintas: i) Un agujero negro de Schwarzschild viajando con velocidades ortogonales al campo magnético asintóticamente uniforme. ii) Un agujero negro de Schwarzschild viajando con velocidades no ortogonales al campo magnético asintóticamente uniforme. iii) Un agujero negro de Kerr en la situación de i) donde el eje de rotación del agujero negro puede estar, o no, alineado con el campo magnético asintóticamente uniforme.

This work continues the numerical study of jet formation as result of black holes traveling with fast velocities with respect to a uniform magnetic field, study that was started in [1]. The numerical scheme implemented is the one used in [2], which presents a novel 3D numerical implementation of the *force-free* electrodynamics evolution around a Kerr black hole. We study three different physical situations: i) A Schwarzschild black hole traveling with velocities that are orthogonal to the asymptotically uniform magnetic field. ii) A Schwarzschild black hole traveling with velocities that are not orthogonal to the asymptotically uniform magnetic field. iii) A Kerr black hole in the i) scenario, where the axis of rotation of the black can be aligned, or not, to the asymptotically uniform magnetic field.

Palabras clave:

- Electrodinámica force-free.
- Agujero negro.
- Jets.
- Transformaciones de Lorentz.
- Plasmas astrofísicos.
- Simulaciones numéricas.

Códigos de clasificación:

- 94.05.-a Space plasma physics
- 47.75.+f Relativistic fluid dynamics
- 02.70.-c Computational techniques; simulations
- 02.30.Jr Partial differential equations

Índice general

Introducción	XIII
Marco Teórico	XV
0.1. Extracción de energía de Agujeros Negros.	XV
0.1.1. Proceso de Penrose en un espacio-tiempo de Schwarzschild boosteado	XV
0.1.2. Blandford-Znajek y emisión de jets.	XVI
0.2. Electrodinámica Force-Free.	XVII
0.3. Descomposición 3+1.	XX
0.4. Ecuaciones de evolución.	XXI
Esquema numérico e Implementación.	XXIII
0.5. Infraestructura numérica	XXIII
0.5.1. Esquema numérico general.	XXIII
0.5.2. Esquema de grillas.	XXIII
0.6. Implementación	XXIV
0.6.1. Datos iniciales	XXV
0.6.2. Condiciones de contorno	XXVI
0.6.3. Dominación magnética y hoja de corriente	XXVIII
0.6.4. Utilización de derivadas de menor orden	XXIX
0.6.5. Cálculo del flujo electromagnético	XXIX
Resultados	XXXVII
0.7. Agujero Negro de Schwarzschild con velocidad ortogonal al campo magnético asintóticamente uniforme	XXXVII
0.7.1. Hoja de corriente	XLV
0.7.2. Energía	XLV
0.8. Agujero Negro de Schwarzschild con velocidad no ortogonal al campo magnético asintóticamente uniforme	XLVIII
0.9. Agujero Negro de Kerr, efectos de la rotación sobre el flujo electromagnético	LII
Conclusiones	LVII
0.9.1. Perspectivas futuras	LVIII
Tablas	LIX
Gráficos de $\Phi_{\mathcal{E}^{boost}(k)}$	LXI

Índice de figuras

1.	Imagen tomada de [3] Ergoesféra para un agujero negro de Schwarzschild boosteado en la dirección +z con velocidad $v = 0,3$ (azul solido) , $v = 0,6$ (naranja punteada), $v=0,9$ (verde punteada) y $v = 0,99$ (roja punteada).	XVII
2.	Coordenadas Cubito, 6 parches generan una superficie esférica, las flechas de la imagen indican como se identifican los bordes para formarla. A la derecha mitad de un dominio numérico típico.	XXIV
3.	Con 12 grillas se representa la la topología tridimensional $S^2 \times \mathbb{R}^+$	XXV
4.	Distintas superficies relevantes para un espacio-tiempo de Kerr (plano $y=0$).	XXVII
5.	Lado derecho: líneas de campo hasta $R=30M$ obtenidas aplicando derivadas de orden dos para los radios menores a aproximadamente 20M (o equivalentemente la primera y segunda capa esférica). Lado izquierdo: derivadas de orden seis en todo el dominio. Ambas para $v = 0,8$	XXIX
6.	Pueden observarse aquí las superficies Σ_t y Σ_{t_o} , junto con las hipersuperficies temporales por donde el flujo abandona o ingresa al dominio.	XXX
7.	Pueden observarse aquí las superficies Σ_t , Σ_{t_o} , Σ'_t y Σ'_{t_o} , junto con los vectores n^a y n'^a determinados por ellas, y los vectores N^a y N'^a pertenecientes a cada uno a su hipersuperficie.	XXXII
8.	Flujo $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ en el plano (y-z), para $t= 300M$, para un agujero negro con velocidad $v = 0,1$ (izquierda) y $v = 0,2$ (derecha).	XXXVIII
9.	Flujo $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ en el plano (y-z), para $t= 300M$ en el plano (y-z) (izquierda) $t=400$ (derecha), para un agujero negro con velocidad $v = 0,3$ (izquierda) y $v = 0,3$ (derecha).	XXXVIII
10.	Flujo $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ en el plano (y-z), para $t= 400M$, para un agujero negro con velocidad $v = 0,5$ (izquierda) y $v = 0,6$ (derecha).	XXXIX
11.	Flujo $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ en el plano (y-z), para $t= 400M$, para un agujero negro con velocidad $v = 0,7$ (izquierda) y $v = 0,8$ (derecha).	XXXIX
12.	Superficies de integración utilizadas para calcular el flujo electromagnético total, para $v=0,5$ (izquierda) y $v=0,7$ (derecha), estos dos elipsoides corresponden a esferas de radio 90 M en el referencial solidario al plasma.	XL
13.	Superficie de integración utilizada para calcular el flujo electromagnético colimado para $v=0,7$, este cascaron corresponde a la intersección del elipsoide que define la superficie total de integración, con un cilindro hueco de radio 30 M cuyo centro pasa por el punto de mayor intensidad del <i>jet</i> . Para obtener el flujo colimado total es necesario integrar también sobre el casquete que contiene al otro <i>jet</i>	XLI

14. Flujo $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ (izquierda) y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ (derecha) integrados en las zonas de la elipsoide (correspondiente al boosteo de Lorentz de una esfera de radio 90M) que presentan flujo electromagnético colimado . Se realizó ajustes cuadráticos de la forma $y = ax^2 + bx + c$ obteniendo como parámetros para el ajuste los valores $a = (5, 1 \pm 0, 1) \times 10^1$, $b = (-2, 1 \pm 0, 3) \times 10^1$, $c = (9 \pm 2) \times 10^{-1}$ y un $R^2 = 0, 999717873553755$. (izquierda) y $a = (6, 8 \pm 0, 3) \times 10^1$, $b = (-1, 1 \pm 0, 1) \times 10^1$, $c = (9 \pm 2) \times 10^{-1}$ y un $R^2 = 0, 998894579218815$ (derecha). XLI
15. Diferencia relativa $\frac{\Phi_{\mathcal{E}boost(n)} - \Phi_{\mathcal{E}boost(k)}}{\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}}$ entre las dos cantidades que utilizamos para obtener el flujo electromagnético integrado vs. velocidad del boost. XLII
16. Izquierda: $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)} - \Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y Derecha: $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, en el plano (y-z), para t= 400M, para un agujero negro con velocidad $v = 0, 7$ XLII
17. Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ (izquierda) y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ (derecha) integrado en todo el elipsoide (correspondiente al boosteo de Lorentz de una esfera de radio 90M). Se realizó un ajuste cuadrático, para valores hasta $v=0,6$, de la forma $y = ax^2 + bx + c$ obeniendo como parámetros para el ajuste los valores $a = (3, 2 \pm 0, 3) \times 10^1$, $b = (3, 4 \pm 0, 2)$, $c = (8, 4 \pm 0, 4)$ y un $R^2 = 0, 997670829960073$ (izquierda) y $a = (4, 4 \pm 0, 2) \times 10^1$, $b = (0 \pm 1)$, $c = (9, 3, 4 \pm 0, 2)$ y un $R^2 = 0, 999760843991069$ (derecha). XLIII
18. Esta figura presenta la tangente del ángulo θ que forman los *jets* con el eje z vs. la velocidad de boost. Estos ángulos están medidos desde el referencial del plasma. Se realizó un ajuste lineal del tipo $y = ax + b$ el cual arrojó los siguiente parámetros de ajuste, $a = (1, 05 \pm 0, 02)$, $b = 0, 02 \pm 0, 01$ y un $R^2 = 0, 99714931026012$ XLIV
19. La cantidad $B^2 - E^2$ hasta $r = 30M$ para el plano (x-y) para velocidades $v = 05$ (izquierda) y $v = 06$ (derecha), para t= 400 M. Puede verse que la región donde se genera la hoja de corriente es una región de forma lobular que puede verse de un color verdoso, mientras que el resto del dominio presenta una fuerte dominación magnética (color rojo). XLV
20. La cantidad $B^2 - E^2$ hasta $r = 30M$ para el plano (x-y) para velocidades $v = 07$ (izquierda) y $v = 08$ (derecha), para t= 400 M. XLVI
21. Energía en función del tiempo para velocidades $v = 0, 4$ (izquierda) y $v = 0, 7$ (derecha). Para simulaciones con una resolución de $61 \times 61 \times 151$ y un radio exterior de $\approx 160M$.Puede verse como después de $t \approx 200M$ la energía es constante, con lo cual decimos que llegamos a soluciones verdaderamente estacionárias XLVI
22. Energía final del sistema dividida por $\gamma^2(v)$ en función de la velocidad del agujero negro para un radio exterior de $\approx 160M$ y una resolución de $61 \times 61 \times 151$. Se realizó un ajuste cuadrático del tipo $y = c + bx + ax^2$ que arrojó los siguientes parámetros de ajuste $a = (9, 24 \pm 0, 02) \times 10^6$, $b = (1, 1 \pm 0, 2) \times 10^5$, $c = (8, 994 \pm 0, 005) \times 10^6$ y $R^2 = 0, 99999803246787$ XLVII
23. La energía del sistema para un agujero negro con velocidad $v = 0, 5$ con dato inicial de campo magnético uniforme boosteado (izquierda) y dato inicial de Wald (derecha) para un dominio numérico de tamaño $\approx 60M$ y resolución $41 \times 41 \times 101$ XLVIII
24. Flujo electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ en el plano (y-z), para t= 400M en el plano (y-z) para un agujero negro con velocidad $v = 0, 5$ que forma un ángulo $\chi = \frac{-\pi}{16}$ (izquierda) y $\chi = \frac{\pi}{16}$ (derecha) con el campo magnético asintóticamente uniforme. XLIX
25. Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost}$ en el plano (y-z), para t= 400M en el plano (y-z) para un agujero negro con velocidad $v = 0, 5$ que forma un ángulo $\chi = \frac{-\pi}{8}$ (izquierda) y $\chi = \frac{\pi}{8}$ (derecha) con el campo magnético asintóticamente uniforme. XLIX
26. Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost}$ en el plano (y-z), para t= 400M en el plano (y-z) para un agujero negro con velocidad $v = 0, 5$ que forma un ángulo $\chi = \frac{-3\pi}{16}$ (izquierda) y $\chi = \frac{3\pi}{16}$ (derecha) con el campo magnético asintóticamente uniforme. L

27.	Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost}$ en el plano (y-z), para t= 400M en el plano (y-z) para un agujero negro con velocidad $v = 0,5$ que forma un ángulo $\chi = \frac{\pi}{4}$ (izquierda) y $\chi = \frac{\pi}{4}$ (derecha) con el campo magnético asintóticamente uniforme.	L
28.	Integral del flujo electromagnético para el <i>jet</i> superior (rojo) y el inferior (negro), para distintos ángulos χ comprendidos entre la velocidad del agujero negro y el eje <i>y</i> para $v = 0,5$	LI
29.	Integral del flujo electromagnético que resulta de la suma de las integrales de los <i>jets</i> inferior y superior en función del ángulo χ para $v = 0,5$	LII
30.	Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, para t= 300M en el plano (y-z) para un agujero negro de Schwarzschild (izquierda) y un agujero negro de Kerr con $a = 0,9$ (derecha), Ambos con velocidad $v = 0,1$	LIII
31.	Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, para t= 300M en el plano (y-z) para un agujero negro de Schwarzschild (izquierda) y un agujero negro de Kerr con $a = 0,9$ (derecha), Ambos con velocidad $v = 0,2$	LIII
32.	Superficies de nivel para el flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, para t= 400M a un agujero negro de Schwarzschild con velocidad $v = 0,5$, donde el las superficies de nivel son 0,01(rojo) y -0,01 (azul).	LIV
33.	Superficies de nivel para el flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, para t= 400M a un agujero negro de Kerr ($a = 0,9$) con velocidad $v = 0,5$, donde el las superficies de nivel son 0,01(rojo) y -0,01 (azul).	LIV
34.	Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ (izquierda) y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ (derecha) integrado en las zonas de la elipsoide (correspondiente al boosteo de Lorentz de una esfera de radio 90M) que presentan flujo electromagnético colimado, para un agujero negro de Schwarzschild y un agujero negro de Kerr con $a = 0,9$, en función de la velocidad de boost.	LV
35.	Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ (izquierda) y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ (derecha) integrado para el <i>jet</i> superior, para un agujero negro de Schwarzschild , un agujero negro de Kerr ($a = 0,9$) y un agujero negro de Kerr ($a = 0,9$) donde el eje de rotación coincide con la dirección del <i>jet</i> superior, en función de la velocidad de boost.	LVI
36.	Flujo de Poynting $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ en el plano (y-z), para t= 300M, para un agujero negro con velocidad $v = 0,1$ (izquierda) y $v = 0,2$ (derecha).	LXI
37.	Flujo de Poynting $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ en el plano (y-z), para t= 300M en el plano (y-z) (izquierda) t=400 (derecha), para un agujero negro con velocidad $v = 0,3$ (izquierda) y $v = 0,3$ (derecha).	LXII
38.	Flujo de Poynting $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ en el plano (y-z), para t= 400M, para un agujero negro con velocidad $v = 0,5$ (izquierda) y $v = 0,6$ (derecha).	LXII
39.	Flujo de Poynting $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ en el plano (y-z), para t= 400M, para un agujero negro con velocidad $v = 0,7$ (izquierda) y $v = 0,8$ (derecha).	LXIII

Índice de cuadros

1.	Tabla de flujos $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ colimados y totales, integrados sobre la superficie de un elipsoide que corresponde a una esfera de radio 90M en el referencial solidario al plasma.	LIX
2.	Tabla de flujos $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, integrados sobre la superficie de un elipsoide que corresponde a una esfera de radio 90M en el referencial solidario al plasma, para un agujero negro de Schwarzschild que viaja con una velocidad de módulo $v = 0,5$ y que forma un ángulo χ con el eje y en el plano (y-z).	LIX
3.	Tabla de flujos $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ colimados y totales, integrados sobre la superficie de un elipsoide que corresponde a una esfera de radio 90M en el referencial solidario al plasma, para un agujero negro de Schwarzschild y uno de Kerr ($a = 0,9$), en función de la velocidad del boost.	LX
4.	Tabla de flujos $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ colimados y totales, integrados sobre la superficie de un elipsoide que corresponde a una esfera de radio 90M en el referencial solidario al plasma, para un agujero negro de Schwarzschild y uno de Kerr ($a = 0,9$), en función de la velocidad del boost.	LX
5.	Tabla de flujos $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$, integrados en la región correspondiente al <i>jet</i> superior, para un agujero negro de Schwarzschild , uno de Kerr ($a = 0,9$) uno de Kerr ($a = 0,9$) para el cual el eje de simetría esta alineado con la dirección <i>jet</i> superior.	LX
6.	Tabla de flujos $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, integrados en la región correspondiente al <i>jet</i> superior, para un agujero negro de Schwarzschild , uno de Kerr ($a = 0,9$) uno de Kerr ($a = 0,9$) para el cual el eje de simetría esta alineado con la dirección <i>jet</i> superior.	LX

Introducción

Eventos enormemente poderosos iluminan nuestro universo y desafían nuestro entendimiento, entre ellos están las observaciones de cantidades gigantescas de energía desplazada por *jets* altamente colimados, provenientes de una región central. Se creó que esta región central se encuentra el motor que da origen a estos *jets*, y que los mismos son agujeros negros de los cuales a través de ciertos procesos entregan energía cinética al plasma circundante. De todas maneras, estos procesos todavía no se entienden con el detalle necesario. Se conocen de eventos astrofísicos presentando estas características que son luminosos tanto en ondas electromagnéticas, como en ondas gravitacionales, teniendo como primer evidencia la reciente primera detección de la colisión o “merger” de un par de estrellas de neutrones, lo cual dio inicio a una nueva era de la física y la astronomía.

Un evento muy interesante para la detección de estos fenómenos podría ser el merger de dos agujeros negros super-masivos, situados cada uno en el centro de una galaxia. Este es un escenario muy prometedor para el entendimiento de las contrapartes electromagnéticas ya que a medida que las órbitas del merger se van juntando, alrededor de los agujeros negros se forma un disco de acreción común, que puede seguir la dinámica del merger hasta momentos cercanos a la colisión, dichos discos están comúnmente magnetizados, lo cual genera un un anclamiento de las líneas de campo magnético en el área que contiene a los agujeros negros. La producción de *jets* por agujeros negros debido a la interacción con su disco de acreción ha sido estudiada en profundidad y se cree que la extracción de la energía de rotación del agujero negro es la que lo genera. Sin embargo, estudios numéricos y analíticos indican que agujeros negros que posean momento lineal y orbital pueden generar *jets* mediante la transferencia de energía cinética del mismo al campo electromagnético, pero su entendimiento no es completo. Agujeros negros con altas energías cinéticas pueden encontrarse en las etapas finales de un merger, en la cual tendrán velocidades comparables con la velocidad de la luz.

En este trabajo se tratará una situación simplificada en la cual un único agujero negro se desplaza a altas velocidades en un campo magnético asintóticamente uniforme. En [4] se estudia numéricamente la emisión de *jets* y ondas gravitacionales de un agujero negro solitario viajando en un campo magnético asintóticamente uniforme y también al igual que en [5] y [6] se estudia el sistema completo, es decir, se estudia la dinámica de dos agujeros negros supermasivos en un merger, lo cual involucra lidiar con las ecuaciones de electromagnetismo, junto con las de gravedad. En este trabajo, al tratarse de un agujero negro solitario, se pueden evolucionar las ecuaciones de electromagnetismo con una métrica de agujero negro de fondo, el hecho de que tomemos una métrica de fondo esta fundamentado en la suposición de que debido a que el plasma por el cual se mueve el agujero negro es uno tenue, la energía que el mismo le extraería al agujero negro sería insignificante comparada con su momento lineal. Es importante también resaltar que las ecuaciones que usamos para modelar la evolución del campo electromagnético no son las ecuaciones de Maxwell sino que son las ecuaciones de la electrodinámica *force-free* de las cuales hablaremos en profundidad en 0.2.

Lo que diferencia en particular a este trabajo numérico de los otros es múltiple:

- Las ecuaciones utilizadas para describir la evolución son aquellas que provienen de una hiperbolización covariante de la electrodinámica *force-free*.

- El problema es tratado desde el referencial solidario al agujero negro, en vez del referencial en que el agujero negro es el que se mueve en un campo magnético asintóticamente uniforme. Esto nos permite obtener soluciones verdaderamente estacionarias para un rango de velocidades mucho mayor que en [4].
- Tratamos el problema para velocidades del agujero negro no perpendiculares al campo magnético asintóticamente uniforme.

Este trabajo surgió como una nueva aplicación al nuevo esquema numérico desarrollado en [2] para la evolución 3D de la electrodinámica *force-free* alrededor de un agujero negro de Kerr. El problema tratado en este trabajo fue primero estudiado por Barbara Sbarato en el contexto de su trabajo especial de Licenciatura [1], en el cual se adaptó la estructura numérica utilizada en [2] para implementar las condiciones de contorno e iniciales necesarias para las simulaciones numéricas, también se estudió una manera de obtener una cantidad representativa del flujo electromagnético que presenta la solución final, aquí se encontraron soluciones que presentaban *jets* fuertemente colimados. El aporte que se realizó en este trabajo al proyecto fue tratar de encontrar otras maneras de calcular este flujo, y estudiar el comportamiento del mismo para distintas velocidades, las cuales pueden ser ortogonales o no al campo magnético asintóticamente uniforme. Luego de haber estudiado el problema para el agujero negro de Schwarzschild, que fue para el cual Barbara Sbarato hizo su trabajo, pasamos a ver las modificaciones que induce la rotación del agujero negro a la emisión de *jets*, para lo cual usamos la métrica de Kerr.

La estructura del trabajo es como sigue, en el Capítulo 1 se introducirá el marco teórico necesario para entender el problema que estamos estudiando, donde se discuten la electrodinámica *force-free*, y procesos de extracción de energía de agujeros negros. En el Capítulo 0.4 se detalla es la esquema e infraestructura numérica utilizados y los detalles de la implementación, como las condiciones iniciales y de contorno y el cálculo del flujo electromagnético. En el Capítulo 4 se presentan los resultados para el caso del agujero negro de Schwarzschild y para el de Kerr para los distintos módulos e inclinaciones de la velocidad del agujero negro. Finalmente en el 0.6.5 se presentan las conclusiones y las perspectivas a futuro.

El presente trabajo utilizó recursos computacionales del cluster Pirayu, adquirido con fondos de la Agencia Santafesina de Ciencia, Tecnología e Innovación (ASACTEI), Gobierno de la Provincia de Santa Fe, mediante el Proyecto AC-00010-18, Resolución No 117/14. Este equipo forma parte del Sistema Nacional de Computación de Alto Desempeño del Min.Ciencia y Tecnología de la Rep. Argentina.

Marco Teórico

0.1. Extracción de energía de Agujeros Negros.

En esta sección se comentará un poco sobre los fundamentos teóricos que argumentan la posible existencia de un proceso en el cual permita extraer energía de un agujero negro, en particular nos vamos a centrar en el caso de agujeros de negros de Schwarzschild que posean momento lineal. Varios trabajos analíticos [3] [7] [8] y trabajos numéricos [4] [6] [5] sugieren que es posible la producción de *jets* cuando un agujero negro con momento lineal viaja en un campo magnético y argumentan que su origen es que los campos electromagnéticos toman parte de la energía traslacional del agujero negro. Los trabajos [4] , [7] [3] encuentran que el poder de estos *jets* estimulados se comporta como v^2 donde v es la velocidad del agujero negro.

0.1.1. Proceso de Penrose en un espacio-tiempo de Schwarzschild boostado

Un ejemplo clásico de la extracción de energía rotacional de un agujero negro de Kerr es el proceso de Penrose. En este proceso, una partícula cae en la ergoesfera de la métrica de Kerr, la ergoesfera es una región del espacio tiempo donde existen geodésicas de energía negativa. Cuando la partícula ingresa a la ergoesfera, es posible entonces, que la misma se divida en dos partículas, de las cuales una se mueve por una geodésica de energía negativa (que cae inevitablemente) y otra que logra escapar al infinito. Con esto, por conservación de energía la partícula final tiene más energía que la inicial y por lo tanto se consigue extraer energía del agujero negro.

En el caso del agujero negro de Schwarzschild no existe tal ergoesfera, pero si uno piensa en un agujero negro que se mueve a altas velocidades, uno puede en principio operar de la siguiente manera como en [3] para encontrar una ergoesfera efectiva:

Partiendo de la métrica de Kerr en las coordenadas de Kerr-Schild, (τ, x, y, z) , que es,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2Hl_{\mu}l_{\nu} \quad (1)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica plana,

$$H = \frac{Mr}{r^2 + A^2 \cos^2(\theta)} \quad (2)$$

$$r^2 = \frac{1}{2}(\rho^2 - A^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(\rho^2 - A^2)^2 + A^2 z^2} \quad (3)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (4)$$

con M la masa del agujero negro, y $A = \frac{J}{M}$ es el parámetro adimensional de espín y l es un cierto vector nulo respecto a ambas métricas (la métrica plana y la completa). En coordenadas cartesianas el co-vector l es:

$$l = dt + \frac{rx + Ay}{r^2 + A^2} dx + \frac{ry + Ax}{r^2 + A^2} dy + \frac{z}{r} dz \quad (5)$$

para obtener la métrica de Schwarzschild apartir de esta forma general basta con evaluar en $A = 0$. Con lo que $H = \frac{M}{r}$, $r = \rho$. Para obtener la solución boosteada se realiza el siguiente cambio de variables:

$$d\tau = \gamma(d\tau' - vdz'), \quad (6)$$

$$dz = \gamma(dz' - vd\tau'), \quad (7)$$

$$dx = dx', \quad (8)$$

$$dy = dy', \quad (9)$$

donde v es un parámetro constante, $0 < v < 1$ y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Rápidamente puede observarse que dicho cambio corresponde a una transformación de Lorentz para una velocidad v en la dirección \hat{z} , con lo cual en el frame boosteado, $(d\tau', dx', dy', dz')$ el agujero negro se esta moviendo en en la dirección \hat{z} . La métrica boosteada es una solución a las ecuaciones de Einstein de vacío, ya que la misma representa tan solo una transformación de coordenadas de la métrica se Schwarzschild.

Con esto podemos encontrar ahora una ergoesféra efectiva, para hacerlo, buscamos la región donde $\partial_{\tau'}$ es espacial, o equivalentemente,

$$g_{\tau'\tau'} = \gamma^2(g_{\tau\tau} + v^2g_{zz} - 2vg_{zt}) > 0 \quad (10)$$

Haciendo esto se obtiene el radio de la ergoesféra,

$$r_{ergoesfera} = 2M\gamma^2(1 - v\cos(\theta))^2 \quad (11)$$

para $v = 0$ coincide con el horizonte de eventos y para $v \rightarrow 1$, se extiende hasta el infinito. Mirar la figura Fig. 1.

Puede entonces así pensarse así el mismo proceso de Penrose que se mencionó anteriormente para una partícula ingresando a esta ergoesféra, pero es importante destacar que existen notables diferencias. Un detalle importante es que la extracción de energía de un agujero negro boosteado es un proceso observador-dependiente, lo que un observador de interpreta como energía transferida de del agujero negro a la materia, otro observador lo interpreta como transferencia de energía de la materia al agujero negro. Claramente el proceso de Penrose no es posible para un agujero negro de Schwarzschild estático, pero pareciera que es posible para el caso boosteado, ambas descripciones son equivalentes, pero el punto esta en que la energía definida como la componente temporal del cuadrimento no es una cantidad invariante a Lorentz.

0.1.2. Blandford-Znajek y emisión de jets.

En este trabajo se va a tratar el problema de la extracción de energía de un agujero negro cuando el mismo viaja e interactúa con el campo electromagnético generado por el plasma circundante, en la aproximación *force-free* de la electrodinámica, es por eso que ahora vamos a mencionar un poco lo que se sabe de procesos de extracción de agujeros negros rotantes cuando interactúan con plasmas magnéticamente dominados.

Blandford y Znajek [9] consideraron en detalle el problema de una magnetoesfera *force-free* axi-simétrica y estacionaria alrededor de un agujero negro de Kerr, y construyeron perturbativamente -en el parámetro de espín- una solución válida para agujeros negros que rotan lentamente. Dicha solución exhibe un flujo saliente de energía y momento angular electromagnético, cuya potencia estimada es lo suficiente alta como para dar cuenta de las observaciones de radiogalaxias

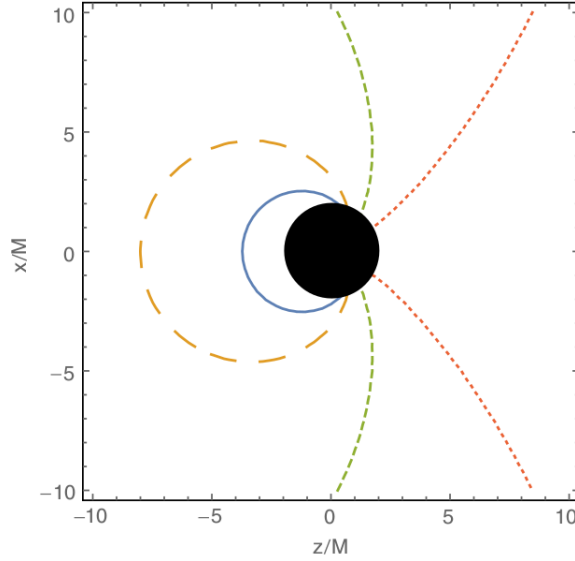


Figura 1: Imagen tomada de [3] Ergoesféra para un agujero negro de Schwarzschild boosteado en la dirección $+z$ con velocidad $v = 0,3$ (azul solido) , $v = 0,6$ (naranja punteada), $v=0,9$ (verde punteada) y $v = 0,99$ (roja punteada).

y quásares. Con lo cual dieron a conocer que un agujero negro, inmerso en un plasma tenue y magnéticamente dominado, puede transferir energía de rotación al campo electromagnético y está puede escapar a infinito como un flujo de Poynting. Hoy en día se utiliza "mecanismo de Blandford-Znajek" para referir a cualquier proceso de extracción de energía rotacional por medio de campo electromagnético.

Teniendo estas ideas en mente se comenzó el estudio de la emisión de *jets* por una agujero negro boosteado cuando este interactúa con campos electromagnéticos. En [3] y [7] se desarrollan análogos de la potencia estimada del *jet* para el caso del agujero negro boosteado, estos estimativos resultan cuadráticos en la velocidad. Resultados de simulaciones numéricas [4] presentan este mismo comportamiento, pero con una potencia de entre unas 50 y 100 veces menor, lo cual es probablemente producto de las aproximaciones y suposiciones realizadas. En [4] se estudió, entre otras cosas, un único agujero negro de Schwarzschild moviéndose en un campo magnético asintóticamente uniforme, y se obtuvieron resultados tanto para la potencia de los *jets* emitidos, como para el de las ondas gravitacionales generadas. Dejando afuera el hecho de que nosotros no tratamos el problema de ondas gravitacionales, existe una diferencia sustancial en como es el estudio de este fenómeno en relación con [4], en nuestro caso tratamos el problema desde el referencial del agujero negro, mientras que allí se hace desde el referencial del plasma (donde el campo electromagnético es asintóticamente un campo magnético uniforme). Esta diferencia hace que tengamos que utilizar transformaciones de Lorentz para poder, en principio, imponer las condiciones de borde e iniciales adecuadas, también es necesario su uso para luego poder obtener cantidades que representativas para un referencial solidario al plasma, esto sera explicado en detalle en la sección 0.6.5.

0.2. Electrodinámica Force-Free.

Como se mencionó en la introducción, trataremos nuestro problema desde la aproximación de la electrodinámica Force-Free o FFE por sus siglas en ingles. La misma describe un régimen

particular de plasmas magnéticamente dominados, régimen que Blandford y Znajek utilizaron para demostrar [9] que, en sistemas de agujeros negros solitarios y con simetría axial, es posible convertir parte de la energía del agujero negro en flujos electroctromgnéticos colimados y estacionarios. En estos regímenes la dinámica del plasma está dominada por los campos magnéticos en relación de la materia que los constituyen (plasmas), esto permite una descripción desacoplada para el electromagnetismo, donde los campos obedecen una versión modificada de las ecuaciones de Maxwell, mientras que el plasma solo interviene acomodándose al campo electromagnético para cancelar localmente la fuerza de Lorentz. A continuación detallaremos el proceso a través del cual se encuentran las ecuaciones de Force-Free, para ello vamos a seguir el procedimiento tomado por [10]:

Se parte de las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla_b F^{ab} = J^a \quad (12)$$

$$\nabla_b F^{*ab} = 0 \quad (13)$$

donde J^4 es la 4-corriente electromagnética, F^{ab} es el tensor de Maxwell y F_{ab}^* es el tensor de Faraday, que cuando las susceptibilidades eléctrica y magnética del medio son cero, toma la forma,

$$F_{ab}^* := \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} F^{cd} \quad (14)$$

con $\epsilon_{abcd} \equiv \sqrt{-g} e_{abcd}$ el elemento de volumen asociado a la métrica g_{ab} y e_{abcd} es el símbolo de Levi-Civita.

Asociada a esta teoría se tiene el siguiente tensor Energía-Momento,

$$T_{ab}^{EM} := F_{ac} F_b^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \quad (15)$$

En presencia de materia este tensor generalmente no es conservado, de hecho,

$$\nabla^b T_{ab}^{EM} := -F_{ab} J^b \quad (16)$$

la cual representa la fuerza local de Lorentz. En el contexto de la magnetohidrodinámica relativista, el tensor energía momento tiene tanto contribuciones del electromagnetismo, como de la materia. La aproximación de Force-Free describe un régimen donde se la transferencia de energía y momento entre el campo y el plasma puede ser despreciada debido a la fuerte dominación de la energía y momento electromagnéticos, es decir $T_{ab} = T_{ab}^{EM} + T_{ab}^{plasma} \approx T_{ab}^{EM}$.

Entonces a partir de la conservación del tensor energía momento total ,

$$0 = \nabla^a T_{ab} = \nabla^a T_{ab}^{EM} \quad (17)$$

fácilmente se obtiene la ecuación:

$$F_{ab} J^b = 0 \quad (18)$$

Esta última ecuación indica, que si $J^b \neq 0$, existe un “frame” en el cual el campo eléctrico es cero. La ecuación (18) también indica que el tensor de Maxwell es degenerado, lo cual puede expresarse como,

$$G := F^{ab} F_{ab}^* = 0 \quad (19)$$

La antisimetría y la degeneración del tensor de Maxwell implican que el Kernel de F^a_b , para el caso de dominación magnética (i.e. $F := F^{ab} F_{ab}$), es un espacio 2-dimensional y por lo tanto existen dos vectores linealmente independientes $\{u^a, v^a\}$ talque

$$F^a{}_b u^b = F^a{}_b v^b = 0 \quad (20)$$

Con lo cual es directo ver :

$$F_{ab}^* = 2v_{[a}u_{b]} \quad (21)$$

Es importante notar, que cualquier combinación lineal de u^a y v^a puede ser utilizada para definir F_{ab}^* , lo cual indica que lo que importa es el plano que definen, llamada superficie de flujo. Para el caso magnéticamente dominado estas superficies son temporales, y su intersección con la hipersuperficie espacial ($t = \text{constante}$) ortogonal a un observador, determina las líneas de campo magnético del mismo.

Entonces la ecuación (13) y la ecuación que se obtiene mediante la eliminación de J^a al combinar las ecuaciones (18) y (12),

$$F^a{}_b \nabla_c F^{bc} = 0 \quad (22)$$

constituyen lo que se conoce como el sistema restringido, donde (22) representa solo dos ecuaciones y (13) representa tres ecuaciones de evolución y un vínculo ($\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$). Entonces este sistema proporciona la evolución para los cinco grados de libertad de un tensor electromagnético restringido por (19), de allí proviene su denominación como sistema restringido.

Para poder evolucionar todo el tensor de Maxwell es necesario agrandar el sistema, esto tiene que ser hecho de manera tal que la condición $G = 0$ se cumpla a lo largo de toda la evolución. La estrategia es entonces promover el vínculo algebraico (19) a una ecuación diferencial como $\nabla_a G = 0$. Esto es lo que se hace en la literatura [11] y a lo que han llamado *sistema aumentado*, resulta entonces el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$F^{ab} \nabla^c F_{bc} = 0 \quad (23)$$

$$\nabla_b F^{*ab} = 0 \quad (24)$$

$$F^{*bc} \nabla^a F_{bc} = 0 \quad (25)$$

En las simulaciones numéricas, los vínculos nunca son satisfechos de manera exacta, la estrategia que se adopta para tener control sobre estos involucra extender el sistema más allá de la subvariedad del vínculo ($G = 0$). De todas maneras, al hacerlo no se quiere alterar de manera drástica la estructura de las ecuaciones y vínculos. Al hacer esta extensión se tienen que garantizar dos cosas: preservar la covariancia de manera que las ecuaciones sean siempre las mismas, sin importar que tipo de foliación se elija en la descomposición 3+1 (la cual discutiremos mas adelante) para la evolución; y además, se procura mantener las ecuaciones bien puestas, para garantizar una evolución controlada.

Entonces, se define la siguiente extensión para el campo de fondo,

$$\tilde{F}_{ab} := F_{ab} + \sigma F_{ab}^* \quad (26)$$

donde $\sigma = \frac{G}{F + \sqrt{F^2 + G^2}}$, de lo cual se puede notar que sobre la subvariedad $G = 0$, este nuevo campo coincide con el original. Se puede notar, además, que ahora el campo es degenerado y magnéticamente dominado por construcción, es decir,

$$\tilde{G} \equiv \tilde{F}^{ab} \tilde{F}_{ab}^* = 0 \quad (27)$$

y

$$\tilde{F} \equiv \tilde{F}^{ab} \tilde{F}_{ab} \geq F > 0 \quad (28)$$

Con lo cual de manera análoga puede escribirse el sistema extendido como,

$$\tilde{F}^{ab}\nabla^c F_{bc} = 0 \quad (29)$$

$$\nabla_b F^{*ab} = 0 \quad (30)$$

$$\tilde{F}^{*bc}\nabla^a F_{bc} = 0 \quad (31)$$

Con el fin de controlar el vínculo asociado a la divergencia del campo magnético, se incluye al *sistema extendido* un nuevo campo escalar ϕ . Esta es la manera estándar de lidiar con este vínculo en la actualidad (ver por ejemplo [12],[13], [14], [15]) . La idea es no forzar el vínculo de manera exacta, sino promover una evolución que mantenga al sistema cercano a la superficie del vínculo. Para esto, se modifica la ecuación (24) de la siguiente manera:

$$\nabla_b F^{*ab} + \nabla^a \phi = \kappa n^a \phi \quad (32)$$

De esta manera tanto $\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}}$, como el nuevo campo ϕ satisfacen una ecuación del tipo “telegráfica”,

$$\square \phi + \kappa \partial t \phi = 0 \quad (33)$$

determinando así la propagación y el decaimiento de estos campos, asegurando el cumplimiento del vínculo de manera dinámica.

Una vez incorporado este nuevo campo al sistema, junto con la modificación (32), el paso siguiente sería, con fines de una implementación numérica, la construcción de una hiperbolización adecuada del mismo , dicha hiperbolización constituye parte de la tesis doctoral del Dr. Carrasco. Remitimos a la sección 5.3 de dicha tesis [10] para ver los detalles de la construcción de la familia de simetrizadores para el sistema extendido.

0.3. Descomposición 3+1.

El formalismo de 3+1 es un abordaje a la relatividad general y a las ecuaciones de Einstein que se basa en foliado del espacio-tiempo cuadridimensional en hipersuperficies tridimensionales. Estas hipersuperficies tienen que ser espaciales, de modo que la métrica inducida en ellas por la métrica Lorentziana [signatura(-,+,+,+)] sea Riemanniana [signatura (+,+,+)]. Desde un punto de vista matemático, este procedimiento permite ver el problema de resolver las ecuaciones de Einstein como un *problema de Cauchy* con vínculos. También se puede interpretar como la descomposición del espacio- tiempo en “espacio” y “tiempo”, lo cual no es a priori una estructura de la relatividad general, pero se basa en la elección de un tiempo coordinado arbitrario.

Con los fines de obtener un sistema apropiado para la discretización numérica y posterior evolución se emplea la descomposición 3+1 al sistema de interés.

Para esto, se considera una región del espacio-tiempo foliada por las hipersuperficies de nivel de una función suave t , $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ y un campo vectorial t^a , que será normalizado de manera que $t^a \nabla_a t = 1$. De esta manera, cualquier parche coordinado local en Σ_0 , $\{x^i\}$, puede ser extendido a $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ propagando constantemente los valores de las coordenadas en Σ_0 a lo largo de las curvas integrales de $\frac{\partial}{\partial t}$, es decir, $\frac{\partial}{\partial t} \cdot dx^i = 0$, $\frac{\partial}{\partial x^i} \cdot dx^j = \delta_i^j$.

De esta manera, se obtiene un sistema de coordenadas completo $\{t, x^i\}$, para el cual las coordenadas espaciales son preservadas a lo largo del campo vectorial $t^a := (\partial t)^a$. La normal a la hipersuperficie se obtiene al promover $\nabla_a t$ a un vector usando la métrica del espacio-tiempo g^{ab} ,

$$n^a := -\alpha g^{ab} (dt)_b \quad (34)$$

donde el factor α conocido como *lapse function* proporciona la normalización del mismo. Definimos también el *shift vector*:

$$\beta^a = t^a - \alpha n^a \quad (35)$$

En este sistema de coordenadas construido, la métrica puede expresarse como:

$$ds^2 = (\beta^2 - \alpha^2)dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j \quad (36)$$

donde h_{ij} es la métrica inducida en la hipersuperficie $\{\Sigma_t\}$.

Puede así, en estas coordenadas, expresarse en componentes del vector normal como:

$$n_a = (\alpha, 0, 0, 0) \quad (37)$$

y

$$n^a = \frac{1}{\alpha}(1, -\beta^i). \quad (38)$$

De esta manera puede verse rápidamente que $(n^a \beta_a) = 0$, con lo cual β^a constituye un vector tangente a las hipersuficies $\{\Sigma_t\}$.

Como mencionamos antes, la descomposición 3+1 se basa en el elegir un tiempo coordenado, con eso en mente, usamos el vector normal n^a como *frame* para descomponer al campo electromagnético en componentes eléctrica y magnética, es decir

$$E_a := F_{ab} n^b \quad (39)$$

$$B_a := -F_{ab}^* n^b \quad (40)$$

De ellas pueden deducirse las relaciones inversas,

$$F_{ab} = 2n_{[a} E_{b]} + \epsilon_{abcd} n^c B^d \quad (41)$$

$$F_{ab}^* = 2B_{[a} n_{b]} + \epsilon_{abcd} n^c E^d \quad (42)$$

También se define el vector de Poynting como:

$$S^a = n_e \epsilon^{eabc} E_b B_c \quad (43)$$

Se aplican las mismas definiciones para descomposición del tensor electromagnético \tilde{F}_{ab} , en los campos \tilde{E}^a , \tilde{B}^a , \tilde{S}^a . Como \tilde{F}_{ab} es degenerado (por construcción) entonces estos tres campos son ortogonales entre si, con lo cual, junto con el vector n^a conforman una tetraada $\{n^a, \tilde{E}^a, \tilde{B}^a, \tilde{S}^a\}$.

0.4. Ecuaciones de evolución.

Para obtener las ecuaciones de evolución de los campos (E^i, B^i, ϕ) se extraen las componentes del *sistema simetrizado* presentado en [10] utilizando la tetraada $\{n^a, \tilde{E}^a, \tilde{B}^a, \tilde{S}^a\}$. Haciendo esto el Dr. Carrasco presento en su tesis el siguiente sistema de evolución:

$$\partial_t \phi = \beta^k \partial_k \phi - \alpha^2 d_j \left(\frac{B^j}{\alpha} \right) - \alpha \kappa \phi - \frac{\alpha}{\tilde{F}} \tilde{E}^k r_k \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{E^i}{\alpha} \right) &= \left(\delta_k^i - \frac{\tilde{B}^i \tilde{B}_k}{\tilde{B}^2} \right) [\beta^k d_j \left(\frac{E^j}{\alpha} \right) + d_j (F^{kj})] - \frac{\alpha \tilde{S}^i}{\tilde{B}^2} d_j \left(\frac{E^j}{\alpha} \right) \\ &+ \frac{\tilde{B}^i}{\tilde{B}^2} \left[\tilde{E}_k d_j (F^{*kj}) - \tilde{E}_\beta d_j \left(\frac{B^j}{\alpha} \right) + \frac{\beta^k}{2\alpha} r_k + \tilde{E}^k \partial_k \phi \right] \end{aligned} \quad (45)$$

$$\partial_t \left(\frac{B^i}{\alpha} \right) = -d_j (F^{*ij}) + \beta^i d_j \left(\frac{B^j}{\alpha} \right) + \frac{1}{\tilde{F}} \tilde{\epsilon}^{ijk} r_j \tilde{B}_k + \frac{\tilde{E}^i}{\tilde{F} \tilde{B}^2} \tilde{S}^k r_k - h_{ij} \partial_j \phi \quad (46)$$

donde

$$r_i := \frac{\alpha^2}{2} \left(\partial_i \left(\frac{G}{\alpha^2} \right) + \sigma \partial_i \left(\frac{F}{\alpha^2} \right) \right) \quad (47)$$

Además se denota $\hat{\epsilon}^{ijk} \equiv n_a \epsilon^{abcd}$ al elemento de volumen inducido a la hipersuperficie, y el operador diferencial, $d_j(\cdot) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j (\sqrt{-g}, \cdot)$

Estas son las ecuaciones que se evolucionan finalmente en el código. Es importante destacar que en estas ecuaciones finales, todas las derivadas actúan sobre campos sin tilde; con lo cual toda la estructura no lineal se escribe en términos de las variables tilde.

Esquema numérico e Implementación.

En este capítulo se presentaran los detalles de la implementación numérica, donde en un primer lugar se detallara lo más relevante de la infraestructura numérica y posteriormente se explicaran los distintos tratamientos numéricos que se llevan a cabo para llevar adelante de manera adecuada la implementación de este problema.

0.5. Infraestructura numérica

0.5.1. Esquema numérico general.

La infraestructura general, desarrollada casi en su totalidad por Oscar Reula, (y posteriormente adaptada a este problema particular por Dr. Carrasco, Y la Lic. Barbara barato), ya se encontraba construida al comiencio de este trabajo. Esta compuesto en esencia de un esquema general y una estructura de grillas que son la base la de la implementación.

Con el fin de construir un esquema de diferencias finitas estables para el problema de valores iniciales, se utiliza el "método de líneas", lo cual implica que primero se discretizan las derivadas espaciales, mediante la construcción de operadores en diferencias finitas, con lo cual uno termina teniendo un gran sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. A éste se lo conoce como sistema semi-deiscreto. Garantizar la estabilidad es una tarea bastante involucrada y conlleva varios pasos. Para esto primero se corroboró que el problema de valores iniciales a implementar era bien puesto en el continuo, y que las soluciones satisfacen una estimación de energía que acote alguna norma de la solución. Luego eligiendo adecuadamente los operadores discretos y los términos de penalización en las interfaces entre las grillas, se puede encontrar una cota para la energía que garantiza la estabilidad del sistema semi-discreto, esto se conoce como método de la energía [16]. Finalmente se discretizan las derivadas temporales, si se elije un método de integración adecuado, se puede conseguir que la versión totalmente discreta del sistema sea estable. Para este caso se utilizó un algoritmo clásico de Runge-Kutta de cuarto orden.

0.5.2. Esquema de grillas.

Como el problema que estamos encarando es un problema tridimensional, la topología del dominio computacional es $S^2 \times \mathbb{R}^+$. Dado que no es posible cubrir la esfera mediante un único sistema de coordenadas que sea regular en todas partes, se utiliza un esquema de múltiples parches coordenados. Al usar múltiples parches, tiene que asegurarse una adecuada transferencia de información entre las diferentes grillas. Se usa en este código la técnica "*multi-block*"[17] aplica en casos donde solo los puntos de las fronteras de los parches son compartidos entre las diferentes grillas. La estructura de parches y el sistema de coordenadas utilizados en el código es aquel que se definido por las coordenadas "cubito": cada parche utiliza coordenadas $\{a, b, c\}$, que se describen en relación a las coordenadas cartesianas usuales $\{x, y, z\}$. En todos los parches se cumple $c = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

mientras que la a y b se definen de manera diferente en cada parche (para ver estas definiciones diríjase a [10]).

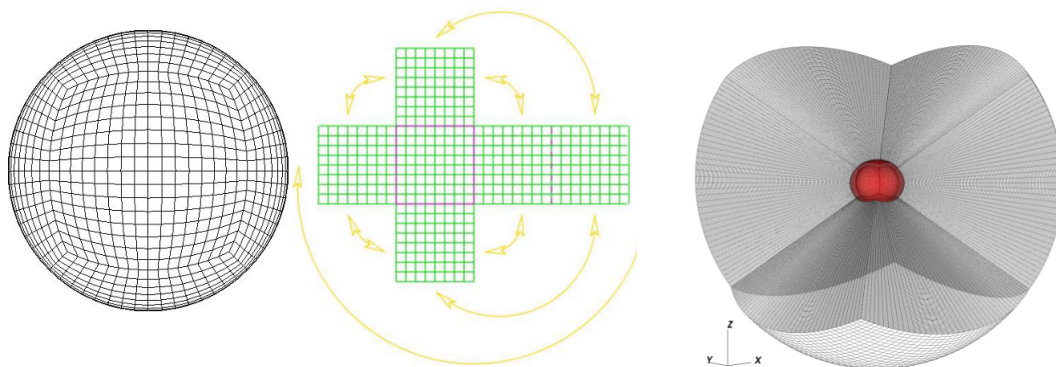


Figura 2: Coordenadas Cubito, 6 parches generan una superficie esférica, las flechas de la imagen indican como se identifican los bordes para formarla. A la derecha mitad de un dominio numérico típico.

la idea es que se extiende el dominio a tres dimensiones mediante la incorporación de la coordenada c , extendiendo cada una de las grillas bidimensionales anteriores a grillas cubicas uniformes, como se muestra en la figura Fig. 3. Entonces el espacio tridimensional queda foliado por cascarones esféricos concéntricos, tal como una cebolla, de ahí el nombre del código: *onion*. La gran ventaja de esta construcción en capas es que al ser capaces de determinar el radio interior del dominio esférico, uno es capaz de excluir la singularidad central del mismo, y a su vez resulta extremadamente conveniente para tratar las condiciones de contorno.

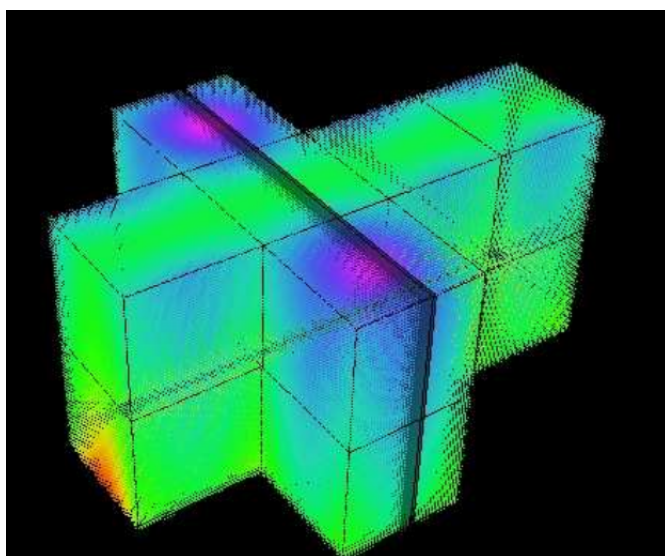


Figura 3: Con 12 grillas se representa la la topología tridimensional $S^2 \times \mathbb{R}^+$.

0.6. Implementación

En esta sección se detallaran aspectos importantes de la implementación numérica, tales como el control de vínculos, condiciones de contorno e iniciales y cantidades de monitoreo.

La métrica del espacio-tiempo utilizada es la de Kerr, la misma esta escrita en el la forma de Kerr-Schild (1), la cual es regular a través del horizonte de eventos, esto resulta muy conveniente ya que nos permite incluir en el dominio numérico parte de la región detrás del mismo, se entenderá mejor esta ventaja cuando se detallan las condiciones de contorno utilizadas. La idea es que se puede expresar la métrica en coordenadas cubito y de esta manera incorporarla al código. Los dominios considerados van desde el horizonte de eventos hasta radios entre 60 a 200 M , empleando para ello típicamente resoluciones de $41 \times 41 \times 101$ y $61 \times 61 \times 151$, cabe aclarar que la resolución en la coordenada c es igual al de las coordenadas a y b , pero hay un mayor número de puntos de grilla por capa en la coordenada c , porque típicamente, por motivos de recursos numéricos, es preferible tener mayor cantidad de puntos de grilla en la coordenada c con el fin de alcanzar con un número chico de capas un radio exterior alto. La idea es que apilando estas capas esféricas, cada una con 6 parches coordenados, podemos ir aumentando el radio del dominio para alcanzar así el radio deseado, también existe la posibilidad de ir modificando capa a capa la resolución multiplicando la distancia original entre los puntos de grilla en la coordenada c por un factor, con el argumento de que no es necesaria tanta definición en radios grandes, y de esta manera obtener con el mismo número de capas un mayor radio máximo. En nuestro caso usamos un factor de 1.3.

0.6.1. Datos iniciales

Aquí se comentaran las distintas condiciones iniciales implementadas, para hacer esto se cuenta con cierta libertad, ya que por como es el problema, la dinámica va a estar finalmente determinada por las condiciones de borde que se prescriban. De todas maneras es importante brindar un dato inicial que sea consistente con los vínculos a ser cumplidos y que represente en principio la situación física que queremos describir. Es por eso que se optó por utilizar dos tipos de datos iniciales diferentes, los cuales detallaremos a continuación:

Campo magnético uniforme boosteado

Al momento de poner esta condición inicial vamos a tener que tener en cuenta que estamos tratando el problema desde el referencial del agujero negro, y no el referencial del plasma. En este último el campo electromagnético es asintóticamente un campo magnético uniforme y el campo eléctrico es nulo, pero en el referencial del agujero negro, que tiene velocidad $\rightarrow v$ con respecto al plasma, estos campos lejanos son los representados por las transformaciones de Lorentz de los del referencial original. Vamos a tomar la notación en que las cantidades con tilde corresponden a cantidades en el referencial del agujero negro, mientras que las sin tilde corresponde al plasma. Entonces el campo asintóticamente uniforme en el plasma tiene la siguiente forma :

$$B^x = B^y = 0 \quad ; \quad B^z = \frac{1}{\sqrt{h'}} B_o \quad ; \quad \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad (48)$$

donde B_o es la intensidad del campo magnético. Aquí se han expresando los campos en coordenadas de Kerr-Schild, y h' representa el determinante de la métrica espacial en dichas coordenadas y se incluye con el fin de que el dato inicial respete el vínculo de la divergencia del campo magnético.

Entonces ahora para encontrar el valor de los campos en referencial del agujero negro vamos a usar la transformación de Lorentz de los campos:

$$\vec{\mathbf{E}} = \gamma(\vec{\mathbf{E}} + \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c} \times \vec{\mathbf{B}}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c} (\frac{\vec{\mathbf{v}}}{c} \cdot \vec{\mathbf{E}}) \quad (49)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \gamma(\vec{\mathbf{B}} - \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c} \times \vec{\mathbf{E}}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c} (\frac{\vec{\mathbf{v}}}{c} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \quad (50)$$

donde $\vec{\omega} = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{c}$, en nuestro caso tomaremos $\vec{\mathbf{v}}$ de la siguiente manera:

$$v^x = 0 \quad ; \quad v^y = v_o \cos(\chi) \quad ; \quad v^z = v_o \sin(\chi) \quad (51)$$

tomando χ como el ángulo que forma la velocidad con el eje y en el plano $(y-z)$ y $0 < v_o < c$.

Entonces el dato inicial que imponemos, en este caso, para todo el dominio es el que resulta de aplicar las transformaciones (49) y (50) a los campos (48). También esta incorporado al código un método para forzar el vínculo $\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$ para estos campos transformados. Este dato inicial fue el que se desarrolló y utilizó en [1].

Solución de Wald

Existe también la posibilidad de empezar con un dato inicial totalmente diferente, en este caso el dato inicial no contendrá nada de la información acerca del boosteo de los campos, y esta información se incorpora posteriormente mediante de las condiciones de contorno exteriores. El dato inicial que se prescribe es entonces el de la solución exacta que encontró Robert Wald en [18] para la configuración de campos electromagnéticos cuando un agujero negro axisimétrico y estacionario es colocado en un campo magnético uniforme de prueba de intensidad B_o . A continuación se presentan las componentes no nulas de este tensor electromagnético encontrado para el caso del agujero negro de Schwarzschild, ya que solo implementamos esta condición inicial en esa situación física,

$$F_{r\phi} = -F_{\phi r} = B_o r \sin^2(\theta) \quad ; \quad F_{\theta\phi} = -F_{\phi\theta} = B_o r^2 \quad (52)$$

Luego de transformando este tensor en coordenadas cubito se extraen las componentes de los campos E y B para prescribir las condiciones iniciales. Un detalle a mencionar es que esta solución para el caso no rotante presenta tanto dominación magnética, como $\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$ y es por lo tanto una solución estacionaria de *force-free*. El propósito de incorporar esta condición inicial (y su respectiva condición de contorno de la cual hablaremos en la próxima sección), tuvo su origen en tratar de llevar la evolución desde el dato inicial hasta la solución estacionaria de una manera más suave que con el dato inicial anterior, el cual, como veremos más adelante presenta un crecimiento abrupto de la energía apenas empieza la evolución. Si uno fuese colocar condiciones de contorno que mantengan el valor inicial de esta configuración para los modos entrantes en el borde exterior, entonces la solución se mantendría estacionaria, claramente este no es nuestro objetivo, nosotros colocaremos una condición que nos lleve al caso boosteado.

0.6.2. Condiciones de contorno

El tipo de condición de contorno que queremos imponer tiene que ser representativa de la situación física que estamos intentando reproducir, en el referencial del plasma es el de un disco de acreción lejano que proporciona un campo magnético uniforme y alineado con el eje z , o equivalentemente el eje de simetría cuando estemos tratando el problema con la métrica de Kerr. La presencia del agujero negro en el plasma afectará esta configuración en las cercanías del mismo, pero a medida que nos alejamos de él la solución tiene que acercarse a la configuración de un campo uniforme. Hay que recordar que en este trabajo se tratara el problema el caso del referencial del agujero negro lo que vamos a pensar es que este campo electromagnético lejano al agujero negro esta ahora representado por los campos que resultan de las transformaciones de Lorentz ((49) y (50)) del campo magnético asintótico.

Condición de contorno dinámicamente boosteada

Con el objetivo de obtener una evolución lo mas suave posible a partir del dato inicial, se aplicó en este trabajo, junto con el dato inicial de Wald discutido en la sección anterior, esta condición de contorno. Al colocar como dato inicial la solución de Wald no es para nada conveniente imponer como condición de contorno simplemente los campos asintóticos boosteados, ya que eso genera discontinuidades muy grandes entre el borde y el interior del dominio. Entonces para evitar estas discontinuidades lo que se implementó fue prescribir una condición de contorno que varíe en el tiempo, donde la dependencia temporal esta en la velocidad $\vec{\omega} = (\vec{V}/c)$ en las transformaciones de Lorentz ((49) y (50)) que se efectúan en cada paso temporal en el valor del campo electromagnético dado por la solución de Wald en el borde del dominio. Donde la expresión dependiente del tiempo es el módulo de v_o de \vec{V} y tiene la siguiente forma:

$$\frac{v_o}{c} = \frac{v_{max}}{2c} \left[1 + \cos \left(\pi \left(1 - \frac{t}{t_f} \right) \right) \right] \quad \text{si } t < t_f \quad ; \quad v_o = v_{max} \quad \text{si } t \geq t_f \quad (53)$$

donde v_{max} es la velocidad máxima que se quiere alcanzar y t_f es el tiempo en que se quiere llegar a esa velocidad. Como se puede observar en la expresión, la velocidad empieza con un valor inicial de cero y crece suavemente hasta el valor de saturación v_{max} . La desventaja que tiene esta configuración de condición inicial y condición de contorno es que tarda más tiempo en llegar al estado estacionario que con el otro dato inicial y condición de contorno.

Para poder lograr esta configuración en el borde numérico exterior, se aplica la infraestructura de penalizaciones, o *Penalties*, que posee el código, cuyo propósito es básicamente corregir las discrepancias entre los valores que tome la solución en el borde con respecto a la condición de campo uniforme que se impone. Coloquialmente se podría decir que lo que hace esta infraestructura es al calcular la diferencia entre los campos interiores y exteriores, modifica las ecuaciones en los bordes de modo tal que se agrega un término que funciona como un atractor a la solución deseada. Es importante aclarar que esta condición de borde no influye a los modos salientes, sino que solo influye en los modos físicos que ingresan al sistema.

La condición de contorno sobre el borde interior del dominio tiene un tratamiento mucho mas simple, y esto es producto de que podamos incluir en el dominio regiones que estén detrás del horizonte de eventos, con lo cual se asegura automáticamente que todos los modos serán salientes, y es entonces innecesario prescribir nada sobre dicha superficie. En el caso del agujero negro de Kerr se coloca el borde numérico entre los dos horizontes de eventos de Kerr, como se puede ver en Fig. 4.

Control de vínculos

Estas condiciones de contorno están relacionadas con la restricción del ingreso a posibles violaciones de los vínculos. Esto va a aplicar a los vínculos de la divergencia del campo magnético y al del vínculo algebraico $G = 0$.

Para el primero lo que se implementa en el código es lo propuesto en [15], donde la idea es estudiar un sistema subsidiario que describe la dinámica del vínculo, e imponer la condición “no entrante” sobre esos modos, que se traduce en una corrección en las ecuaciones de evolución de los puntos del borde. Puede verse con detalle en [10]

Para el vínculo algebraico ($G = 0$) en el borde exterior, lo que se hace es primero identificar los modos característicos asociados y modificar las ecuaciones de manera tal que se remuevan a las ecuaciones en los bordes la componente en el subespacio asociado con dicho modo característico. Es, sin embargo, importante recordar que debido a la extensión que se hizo del sistema fuera de la variedad $G = 0$, para controlar este vínculo en el interior, entonces lo que en realidad propaga este modo es $G + \sigma F$. Es por eso que el “no ingreso” de violaciones al vínculo algebraico se cumplirá siempre y cuando este vínculo (y por lo tanto σ) se mantenga controlado en el interior del dominio.

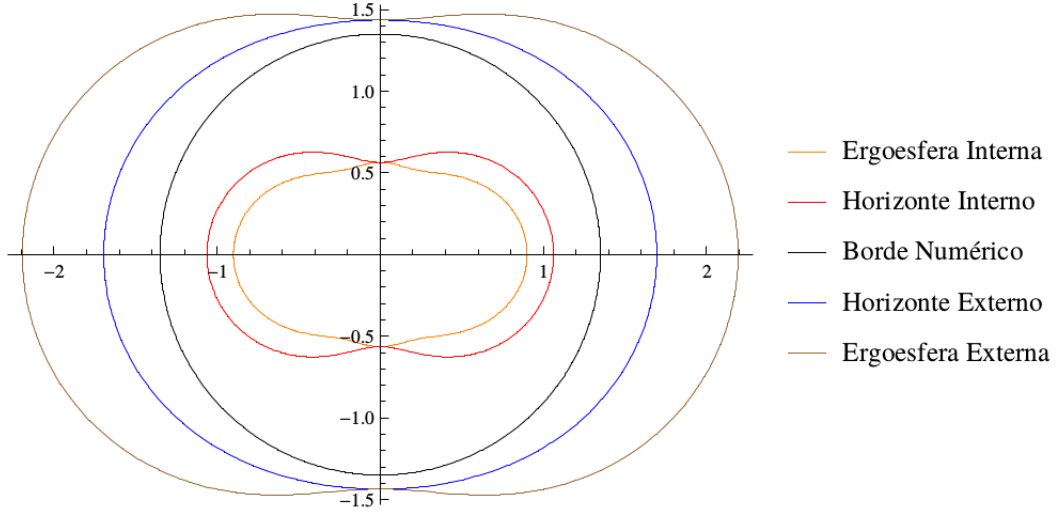


Figura 4: Distintas superficies relevantes para un espacio-tiempo de Kerr (plano $y=0$).

0.6.3. Dominación magnética y hoja de corriente

Todavía no hablamos de como se asegura la dominación magnética (i.e. $F > 0$), esta, a diferencia de la condición $G = 0$, no se preserva con la evolución. Es sabido que la dinámica *force-free* desarrolla genéricamente regiones en las cuales deja de cumplirse la dominación magnética y por lo tanto se rompe la aproximación. En nuestro caso particular la hoja de corriente se establece en el plano $z = 0$ en una región lobular detrás del agujero negro. Este modelo surge como un límite de una teoría más general que es la magnetohidrodinámica resistiva, esta ruptura del modelo nos indica el fin de la validez de este límite. Sin embargo, Komissarov [13] propuso un tratamiento para lidiar con este conflicto, argumentando sobre bases físicas, que en estas hojas de corriente esta presente una resistividad finita que disipa campo electromagnético y mantiene entonces las magnitudes E^i y B^i muy próximas, con lo cual $F \approx 0$. Con esto Komissarov propuso un tratamiento físicamente consistente para resolver las regiones de la hoja de corriente dentro de la aproximación de *force-free*, el mismo consiste de introducir una resistividad finita artificial cuyo labor es reducir el campo eléctrico siempre que su magnitud se acerque a la del campo magnético. En la tesis Doctoral de el Dr. Carrasco [10] y en [2] se implementó esta idea recortando de manera suave el campo eléctrico cada vez que supera un umbral respecto del campo magnético, la manera de implementarlo fue implementar en cada paso temporal:

$$E^i \rightarrow f\left(\frac{|E|}{|B|}\right) E^i \quad (54)$$

donde $f(x)$ es una función suave construida a tramos, que vale uno para $x \leq 1 - 2\epsilon$ con (ϵ un parámetro pequeño); esta dada por un polinomio en x (quinto orden) para el tramo intermedio $1 - 2\epsilon < x < 1 - \epsilon$; y finalmente, $f \approx \frac{1}{x}$ para valores mayores.

Este tipo de implementación, a pesar de tener buenos argumentos físicos y buenos resultados, resulta no tan atractiva desde un punto de vista matemático, al hacer un recorte de esta manera, uno se aleja de la teoría de ecuaciones y entra a terreno desconocido. Es posible encarar este problema de una manera en la cual uno permanezca en esta teoría, la misma involucraría la modificación de las ecuaciones de evolución del campo eléctrico mediante la adición de un término extra que se encargue

de disipar el campo eléctrico cuando su magnitud sea próxima al del magnético. El problema de este tipo de implementación es que ese término extra será un término que se comportaría como tipo *stiff*, lo cual involucraría la necesidad de implementar esquemas tipo “IMEX” [19], como se hace en [5] para la integración temporal, cuya implementación es un tanto más trabajosa.

0.6.4. Utilización de derivadas de menor orden

En el código, como se explicó anteriormente, se discretizan las derivadas espaciales con operadores de diferencias finitas, usualmente se usan operadores de sexto orden en todo el dominio numérico, pero en nuestra situación tuvimos que implementar poder elegir el orden de la derivada a usar según la región del dominio en la que nos encontramos. En un comienzo se noto que si se utilizaba esta derivada de sexto orden en todo el dominio, cerca del agujero negro, donde se forma la hoja de corriente, las líneas de campo magnético presentaban un comportamiento muy turbulento, lo cual no era para nada satisfactorio. Este fenómeno podría tener 2 orígenes: uno físico y uno numérico, la opción más fácil de comprobar y de hecho la más probable era que se tratase de problemas numéricos. La solución que se encontró fue usar derivadas de menor orden en la región cercana a la hoja de corriente, que esto haya funcionado puede explicarse con el siguiente argumento: cerca de la hoja de corriente los campos magnéticos presentan abruptas discontinuidades, y los operadores de diferencia finita de orden alto son mucho más susceptibles a fallar en dichas condiciones que los de orden más bajo, es por eso que usando operadores de menor orden se consiguió un mejor comportamiento de las líneas de campo magnético. Trabajar con operadores de menor orden trae también sus desventajas, por ejemplo el control de los vínculos deja de ser igual de efectivo.

En Fig. 5 puede observarse un ejemplo de la mejora en el comportamiento de las líneas de campo magnético para el caso particular de $v = 0,8$.

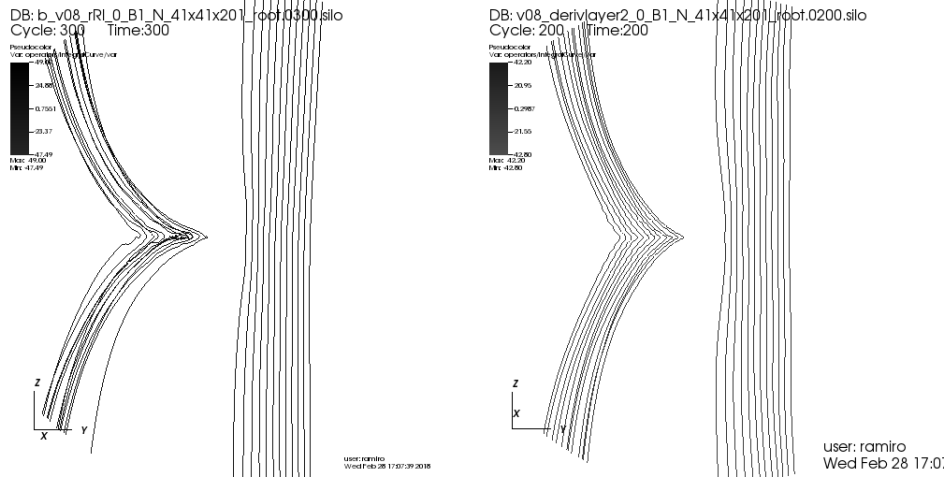


Figura 5: Lado derecho: líneas de campo hasta $R=30M$ obtenidas aplicando derivadas de orden dos para los radios menores a aproximadamente $20M$ (o equivalentemente la primera y segunda capa esférica). Lado izquierdo: derivadas de orden seis en todo el dominio. Ambas para $v = 0,8$.

0.6.5. Cálculo del flujo electromagnético

Si se tiene un tensor energía momento conservado T^{ab} (i.e. $\nabla_a T^{ab} = 0$), y un campo vectorial de Killing ζ^a (i.e. $\nabla_{(a}\zeta_{b)} = 0$), se puede construir una corriente conservada j^a (i.e. $\nabla_a j^a = 0$) como

$j^a := T^{ab}\zeta_b$. Luego aplicando el teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S (\nabla_a j^a) \sqrt{-g} d^4x = \int_{\partial S} j^a dS_a \\ &= \int_{\Sigma_t} j^a dS_a - \int_{\Sigma_o} j^a dS_a + \int_{r_{ext}} j^a d\hat{S}_a - \int_{r_{int}} j^a d\hat{S}_a \end{aligned} \quad (55)$$

puede interpretarse de esto último que existe una cantidad definida en las hipersuperficies Σ_t que resulta preservada a menos de un flujo que abandona o ingresa al dominio (tercer y cuarto término). La figura Fig. 6 ayuda a la comprensión de este concepto.

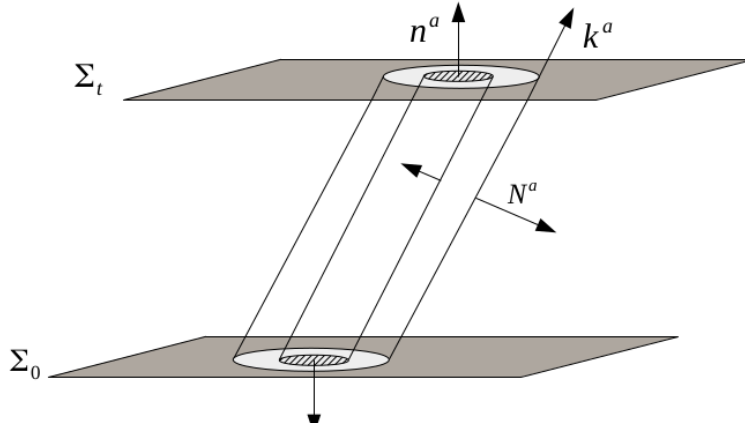


Figura 6: Pueden observarse aquí las superficies Σ_t y Σ_o , junto con las hipersuperficies temporales por donde el flujo abandona o ingresa al dominio.

Si consideramos los bordes de las dos últimas integrales en (55) como superficies esféricas $r = cte$, los elementos normales son:

$$\begin{aligned} dS_a &= n_a \sqrt{h} d^3x = -(dt)_a \sqrt{-g} d^3x \\ d\hat{S}_a &= (dr)_a \sqrt{-g} dt d^2x \end{aligned} \quad (56)$$

Recordando que la condición de *force-free* supone que el tensor energía momento electromagnético es conservado (17), y la existencia del vector de Killing asociado a la estacionariedad k^a , podemos construir el cuadri-momento,

$$p^a := -T^{ab} k_b \quad (57)$$

donde el vector de Killing k_b concuerda en la descomposición 3+1 con el campo t^a , entonces $k^a = \alpha n^a + \beta^a$.

Partiendo del Tensor energía-momento escrito en función de los campos E y B ,

$$T^{ab} := (E^2 + B^2) \left[\frac{1}{2} g^{ab} + n^a n^b \right] - (E^a E^b + B^a B^b) - 2n^{(a} S^{b)} \quad (58)$$

al contraer esta última expresión con el vector de Killing se llega fácilmente al cuadri-momento,

$$p^a = -\frac{1}{2} (E^2 + B^2) k^a + [\alpha (E^2 + B^2) + S_\beta] n^a + (E_\beta E^a + B_\beta B^a) - \alpha S^a \quad (59)$$

donde se denotaron a las contracciones $A_\beta \equiv \beta_i A^i$. Se define entonces la energía como:

$$E(t) := \int_{\Sigma_t} \mathcal{E} \sqrt{h} d^3x \quad (60)$$

con $\mathcal{E} := -p^a n_a = \frac{\alpha}{2}(E^2 + B^2) + S_\beta$, representando la densidad de energía.

Entonces por (55) tenemos que la diferencia de energía en un intervalo de tiempo esta dado por el flujo neto a través de las superficies interna y externa:

$$\Delta E \equiv E(t) - E(t_0) = \int_{r_{ext}} \Phi_{\mathcal{E}} dt d^2x - \int_{r_{int}} \Phi_{\mathcal{E}} dt d^2x \quad (61)$$

donde $\Phi_{\mathcal{E}} := \sqrt{-g} p^r$ se lo identifica usualmente como el “flujo de Poynting”. Este es un flujo conservado, esto implica que no importa el radio exterior que elijamos, el valor de la integral del flujo de Poynting sobre estas superficies va a siempre ser el mismo. Su expresión explícita es :

$$\Phi_{\mathcal{E}} = \sqrt{-g}(E_\beta E^r + B_\beta B^r - \left(E^2 + B^2 + \frac{S_\beta}{\alpha}\right) \beta^r - \alpha S^r) \quad (62)$$

Esta es la cantidad que usada en [10] y [2] para medir la potencia de los *jets* producidos por un agujero negro de Kerr en un campo magnético asintóticamente uniforme.

En este trabajo no vamos a poder darle la misma utilidad debido a que, como se menciona en la sección (0.1.2), la extracción de energía de un agujero negro boosteado es un proceso observador-dependiente, y para el observador en el cual nosotros estamos interesados calcular la potencia del *jet*, es el observador solidario al plasma. Es necesario obtener una medida de la potencia de los *jets* generados para un observador solidario al plasma por diferentes motivos, el principal es que es dicho referencial es más similar al referencial donde se podría observar este evento astrofísico y el segundo es que los trabajos numéricos existentes obtienen sus resultados en ese referencial con lo cual si queremos realizar comparaciones tendremos que obtener resultados para este.

Entonces tenemos que intentar encontrar una cantidad que sea representativa de el flujo electromagnético para un observador que sea solidario al plasma. Lo que vamos a querer determinar en definitiva es si dicho observador mide energía electromagnética saliente en forma de un haz colimado, en particular nos interesa conocer como es este flujo de energía es los sectores lejanos al agujero negro.

Este observador es básicamente uno que se mueve a velocidad $= v'^a = -v^a$ con respecto al agujero negro, vamos entonces a tratar de encontrar como es un análogo a $\Phi_{\mathcal{E}}$ para este observador, para ello podemos proceder de la siguiente manera:

Así como en el espacio-tiempo plano se pueden describir a un observador t'^a que se mueve a velocidad v'^a con respecto a un observador t^a como,

$$t'^a = \gamma(t^a + v'^a) \quad (63)$$

y el cuadri-momento que ve dicho observador es $p'^a := -T^{ab} t'_b$. Vamos a pensar en el cuadri-momento para un observador solidario al plasma como $p'^a := -T^{ab} k'_b$ donde vamos a tomar,

$$k'^a = \gamma(k^a + v'^a) \quad (64)$$

De esta manera para $\vec{\nabla} \rightarrow 0$ se recupera el vector de Killing, y por lo tanto el cuadri-momento, que teníamos antes. Es de altísima importancia destacar que ahora el vector k' no es un vector de Killing, por lo tanto el flujo que vayamos a obtener con el no será un flujo conservado. Otra cosa importante a destacar es que la fórmula 63 esta bien definida para vectores t^a que tengan norma $t^a t_a = -1$, de ello resulta que $t'^a t'_a = -1$. Pero $k^a k_a = (-\alpha^2 + \beta^2) \neq -1$ lo cual lleva a que $k'^a k'_a = \gamma^2((-\alpha^2 + \beta^2) + v'^2) + 2\gamma^2(v^i \beta_i)$, en el límite de cero curvatura (e.i. $\alpha \rightarrow 1$ y $\beta \rightarrow 0$) esta

norma tiende a -1 y que por lo tanto este observador y su cuadrimomento estarán bien definidos solo lejos del agujero negro.

Ahora el siguiente paso es encontrar el vector que determina la superficie de integración, así como antes era el vector normal $N^a = \hat{r}$. Para el observador solidario al plasma no se puede usar este vector N^a ya que el mismo no es perteneciente a las hipersuperficies espaciales Σ'_t de tiempo constante de este observador. Entonces, tomando como inspiración que N^a es un un vector de norma 1 y que $k^a N_a = 0$ (ver la figura Fig. 6) para encontrar este nuevo vector N'^a vamos a pedir las siguientes condiciones:

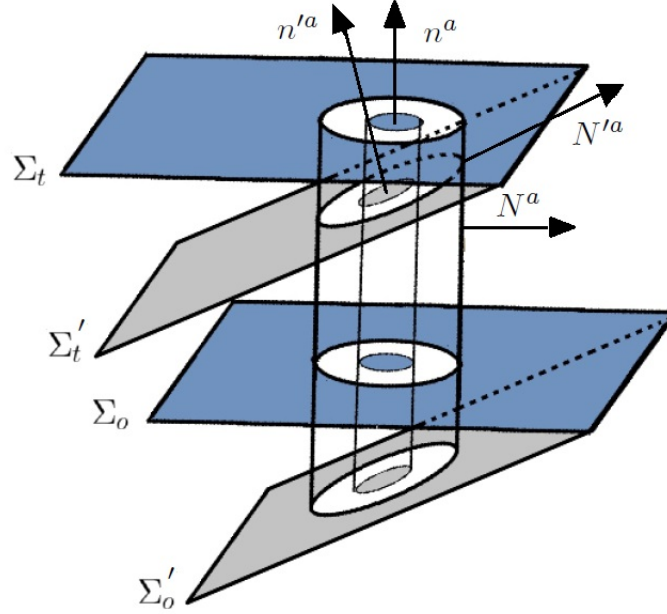


Figura 7: Pueden observarse aquí las superficies Σ_t , Σ_{t_o} , Σ'_t y Σ'_{t_o} , junto con los vectores n^a y n'^a determinados por ellas, y los vectores N^a y N'^a pertenecientes a cada uno a su hipersuperficie.

$$k'^a N'_a = 0 \quad (65)$$

$$N'^a N'_a = 1 \quad (66)$$

Y vamos a proponer el siguiente *ansatz* para el vector N'^a como:

$$N'^a = N^a + ak^a + bv'^a \quad (67)$$

donde a y b son constantes a determinar a través de las ecuaciones (65) y (66). El cálculo de a y b resultó ser una cuenta bastante engorrosa pero se llega al siguiente resultado:

$$a = -\frac{bv'_\beta + bv'^2 + v'^r}{(-\alpha^2 + \beta^2) + v'_\beta} \quad (68)$$

$$b = \frac{v'^r q(2v'_\beta + q + v'^2) - \sqrt{v'^{r2} q(v'_\beta + q)^2 (2v'_\beta + q + v'^2)}}{2v'^3_\beta + v'^2_\beta (q + v'^2) - 2v'_\beta q v'^2 - q v'^2 (q + v'^2)} \quad (69)$$

donde $q = (-\alpha^2 + \beta^2)$ y $v'_\beta = v'^i \beta_i$.

Las expresiones obtenidas devuelven el resultado esperado en los dos límites de interés, que son: para el espacio tiempo plano y (e.i. $\alpha = 1$ y $\beta = 0$) se obtiene a N'^a como el boosteo del vector N^a y para el límite de $v' \rightarrow 0$ se obtiene $N'^a = N^a$.

Podemos entonces ahora con estos dos vectores encontrar la cantidad a la que llamaremos *Flujo de Poynting boosteado* de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{E}boost(k)} &:= -T^{ab}k'_a N'_b \\ \Phi_{\mathcal{E}boost(k)} &= -\gamma[(\beta^r/\alpha + a\alpha)(\alpha(E^2 + B^2) + S_\beta + (S \cdot v')) - (E^r + b(E \cdot v') + aE_\beta)((E \cdot v') + E_\beta) \\ &\quad - (B^r + b(B \cdot v') + aB_\beta)((B \cdot v') + B_\beta) + \alpha(S^r + b(S \cdot v') + aS_\beta)] \end{aligned} \quad (70)$$

Es muy fácil ver en esta última expresión que si se toma el límite para $v' \rightarrow 0$ se recupera $\Phi_{\mathcal{E}boost} = \Phi_{\mathcal{E}}$, que es (62). Lo cual es un buen indicador de este tratamiento es el adecuado para encontrar esta cantidad. Como se mencionó antes, nos interesa sobre todo esta cantidad lejos del agujero negro, dicha región es donde el espacio-tiempo tiende al espacio-tiempo plano con lo cual el vector que llamamos k'^a tiende a un boost del verdadero vector de Killing k^a , resulta que en el espacio tiempo plano k'^a también es un vector de Killing y por lo tanto se recupera la noción que de energía conservada salvo por la energía electromagnética que ingresa o abandona el dominio que se presento en (61).

Esa cantidad que acabamos de calcular esta inspirada en una energía global bien definida (cosa que no sucede en este caso excepto asintóticamente), pero también se puede pensar en obtener una cantidad similar que esté inspirada en una cantidad local bien definida, sin tener en cuenta la noción de una energía global. Para hacer esto podemos pensar en que localmente tenemos un observador con cuadri-velocidad $n'^a = \gamma(n^a + v'^a)$ la cual es de norma -1, por lo tanto puede pensarse que esta cuadri-velocidad representa a un observador que se mueve a velocidad v'^a con respecto al agujero negro. Puede definirse entonces también el cuadrimomento de este observador como $p'^a = T^{ab}n'_b$. Con esto podemos entonces tomar al igual que hacíamos antes un vector N'^a que cumpla las relaciones (65) y (66) con n'^a , y definir entonces $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)} = p'^a N'_a$.

Haciendo eso obtenemos $N'^a = (N^a + ak^a + bv'^a)$ con :

$$\begin{aligned} a &= -\frac{N_\beta}{\alpha} + v'^r + bv'^2\alpha - v'_\beta \\ b &= \frac{\sqrt{\alpha^2(\alpha - v'_\beta)(v'^r\alpha^4 + v'^r\alpha^2v'^2q - 2v'^r\beta^r\alpha^2v'_\beta - \beta^{r2}v'^2q + \beta^{r2}v'^2_\beta)}}{\alpha^2 + v'^2q - v'^2_\beta} \\ &\quad \frac{-v'^r\alpha^4 + v'^r\alpha^3v'_\beta - v'^r\alpha^2v'^2q + \beta^r\alpha^2v'_\beta + \beta^r\alpha v'^2q - \beta^r\alpha v'^2_\beta}{\alpha^2 + v'^2q - v'^2_\beta} \end{aligned} \quad (72)$$

y con esto obtenemos el flujo electromagnético haciendo:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{E}boost(n)} &:= -T^{ab}n'_a N'_b \\ \Phi_{\mathcal{E}boost(n)} &= -\gamma[(\beta^r/\alpha + a\alpha)((E^2 + B^2) + (S \cdot v')) - (E^r + aE_\beta + b(E \cdot v'))(E \cdot v') \\ &\quad - (B^r + aB_\beta + b(B \cdot v'))(B \cdot v') + S^r + aS_\beta + b(S \cdot v')] \end{aligned} \quad (73)$$

Es inmediato ver que en el límite de cero curvatura (lejos del agujero negro) la última expresión coincide con (70) y si además se toma el límite de $v' \rightarrow 0$ entonces también coincide con (62). El primer límite nos indica que lejos del agujero negro, que es donde nos interesa medir el poder de la radiación electromagnética, las dos cantidades encontradas para $\Phi_{\mathcal{E}boost}$ son equivalentes, en cambio

cerca del horizonte de eventos mostraran comportamientos diferentes. Lo más importante para destacar es que de todas formas, estas dos cantidades recobran el sentido de flujo electromagnético conservado lejos del agujero negro, es por eso que vamos a medir esta cantidad para radios grandes en nuestro dominio numérico. Es importante notar que el hecho de que no podamos definir un flujo electromagnético conservado en todo el dominio numérico para un observador solidario al plasma no es consecuencia del enfoque que con el que estamos encarando el problema, es decir utilizar como sistema de referencia uno solidario al agujero negro. En trabajos como [4] [5], en que se mide el flujo electromagnético desde el referencial del plasma, tampoco se tiene una cantidad bien definida en todo el dominio, ya que en ese referencial la métrica del espacio tiempo es una en la cual el agujero negro se mueve, dicha métrica no proporciona un vector de Killing que se pueda usar para definir el flujo, por lo cual se opta por utilizar otras cantidades que solo recobran el sentido de flujo electromagnético lejos del agujero negro. Con esto vemos que no perdemos nada al optar por usar el referencial que usamos, pero si ganamos mucho, porque nos permite hacer simulaciones con velocidades mucho mas altas.

El problema con las dos cantidades encontradas para $\Phi_{\mathcal{E}boost}$, es tratar de integrarlas para obtener el flujo total en una superficie, para el caso de $\Phi_{\mathcal{E}}$ es relativamente simple porque la superficie definida por el vector normal con el que se construye es simplemente una esfera de radio r , pero para $\Phi_{\mathcal{E}boost}$ la superficie generada por el vector normal N^{ta} no es una simple esfera, sino que es una superficie que ni quiera pertenece a la hipersuperficie Σ_t , y se la puede pensar asintóticamente como la superficie de una esfera boosteada. Como la solución alcanza la estacionariedad entonces puede pensarse que esta integral podría efectuarse en la proyección de esta superficie boosteada en Σ_t , sin embargo, una superficie de integración como esa complica, numéricamente, las cosas. Una integral en una esfera es relativamente fácil debido a como es el grillado del dominio, pero en la superficie boosteada, la cual se asemeja a un elipsoide, esta tarea es bastante más difícil de hacer en el código, por lo cual tuvimos que optar por realizarlas en un Software de visualización y procesamiento de datos (VisIt).

Eliminación de los campos de Background

Vimos en 0.6.5 que el flujo de Poynting provee una medida de la potencia de la radiación electromagnética. Nuestro interés es conocer cual es la energía emitida por los *jets* producidos por el agujero negro al entregarle energía al campo electromagnético, pero hay que ser cuidadosos ya que el sistema que estamos tratado no es un sistema aislado, recordemos que existe un campo magnético uniforme de fondo, y la presencia del mismo afecta al flujo de Poynting. Un ejemplo de esto puede verse fácilmente en el caso particular del espacio-tiempo plano:

Consideremos que nuestra solución consiste de un campo magnético uniforme de fondo $\vec{\mathbf{B}}_o = B_o \hat{k}$ y un sobre él los campos $\vec{\mathbf{E}}'$ y $\vec{\mathbf{B}}'$. Con lo cual el campo electromagnético total resulta,

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}' \quad (74)$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_o \hat{k} + \vec{\mathbf{B}}' \quad (75)$$

Entonces si calculamos el vector de Poynting $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ obtenemos,

$$\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{E}}' \times B_o \hat{k} + \vec{\mathbf{E}}' \times \vec{\mathbf{B}}' \quad (76)$$

con lo que podemos ver que, si bien el vector de Poynting del campo de fondo es $\vec{\mathbf{S}}_o = 0$, al calcular el vector de Poynting total, el mismo se ve contaminado con un término proporcional al campo de fondo.

Con ese simple ejemplo puede ilustrarse como el no tratar con un sistema asilado puede modificar el resultado en cuanto a los flujos de energía, es por eso que en este trabajo antes de calcular

el flujo $\Phi_{\mathcal{E}boost}$ se restarán los campos de fondo, que son aquí particularmente los que imponemos como el dato inicial. Un proceso similar es implementado en [4] [6] [5], pero debido a que utilizan otra cantidad para medir el flujo electromagnético este tratamiento está hecho de manera distinta.

Un procedimiento de este tipo estaría totalmente respaldado teóricamente si los campos que componen el campo electromagnético total, fuesen individualmente soluciones, (e.i. $\vec{\mathbf{B}}_o$ y $(\vec{\mathbf{B}}', \vec{\mathbf{E}}')$ sean soluciones estacionarias individualmente), con lo cual podríamos aplicar la linealidad de la teoría. Si bien sabemos que este no es el caso en el problema que nosotros estamos tratando, esta sustracción de los campos de fondo sí es bien justificada en las lejanías del agujero negro, donde el campo de fondo utilizado, sí es una solución estacionaria. He aquí, entonces, otra razón por la cual vamos a interesarnos particularmente en obtener la potencia de los *jets* en regiones lejanas al agujero negro.

Resultados

En este capítulo se presentaran los resultados obtenidos para los distintos escenarios en que hacemos nuestras simulaciones, para todas ellas luego de un transición dinámica alcanza estados estacionarios que exhiben flujos colimados de energía, es decir, los *jets*, es importante notar que también se obtiene flujo electromagnético no colimado el cual a la hora de hacer la integración no es despreciable. Los tres escenarios físicos que tratamos son: (i) Un agujero negro de Schwarzschild con velocidades ortogonales al campo magnético asintóticamente uniforme, (ii) Un agujero negro de Schwarzschild con velocidades no ortogonales al campo magnético asintóticamente uniforme, y (iii) Un agujero negro de Kerr en las configuraciones de (i) y también se modifica la inclinación del eje de rotación del agujero negro con respecto a la dirección del campo magnético asintóticamente uniforme.

0.7. Agujero Negro de Schwarzschild con velocidad ortogonal al campo magnético asintóticamente uniforme

Se exhibirán a continuación los resultados obtenidos para las simulaciones para el caso del agujero negro de Schwarzschild con velocidades ortogonales al campo magnético, se hizo un barrido en el módulo de la velocidad de boost del agujero negro desde 0,1 hasta 0,8. Se obtuvieron las magnitudes del flujo electromagnético usando las cantidades $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, para las cuales se calculó el flujo neto integrado en todo el elipsoide que define las superficies en las cuales calculamos los flujos, y también se hicieron integraciones sobre las porciones de estos elipsoides que contienen la parte colimada de la energía electromagnética. Estas cantidades arrojan valores positivos, lo cual se interpreta como que se extrae la energía traslacional del agujero negro al campo electromagnético.

Se puede observar en las figuras (Fig. 8 - Fig. 11) para la cantidad $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, como al aumentar la velocidad del boost el flujo electromagnético colimado aumenta su intensidad, y como también el ángulo comprendido entre los *jets* y el eje z (la dirección del campo magnético asintóticamente uniforme) aumenta también. Es notable que también existe flujo electromagnético no colimado cuya intensidad es despreciable con respecto a la de los *jets*, pero al aumentar la velocidad también se ve el aumento de las mismas. Otra característica interesante de estas imágenes es que se presentan regiones de flujo electromagnético negativas, fenómeno que ya había sido registrado en [1], las cuales no habían sido registradas en otros $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ trabajos numéricos como [4][5], creemos que esto es producto de que la cantidad que estos trabajos usan para calcular el flujo de Poynting es estrictamente positiva, en cambio la nuestra no. Puede observarse también los gráficos obtenidos para la cantidad $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ (Fig. 36 - Fig. 39) el crecimiento de una región de color marrón de forma lobular detrás del agujero negro, esa región corresponde exactamente con la ergoesfera de la métrica de Schwarzschild boosteada 1, esta región aparece en nuestro gráfico como una región donde la cantidad $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ no esta bien definida, esto es algo que esperábamos ya que el vector k' (64) que utilizamos para calcular esta expresión deja de ser un vector temporal exactamente en la región descrita por esa ergoesfera, no nos preocupamos por esto ya que como mencionamos

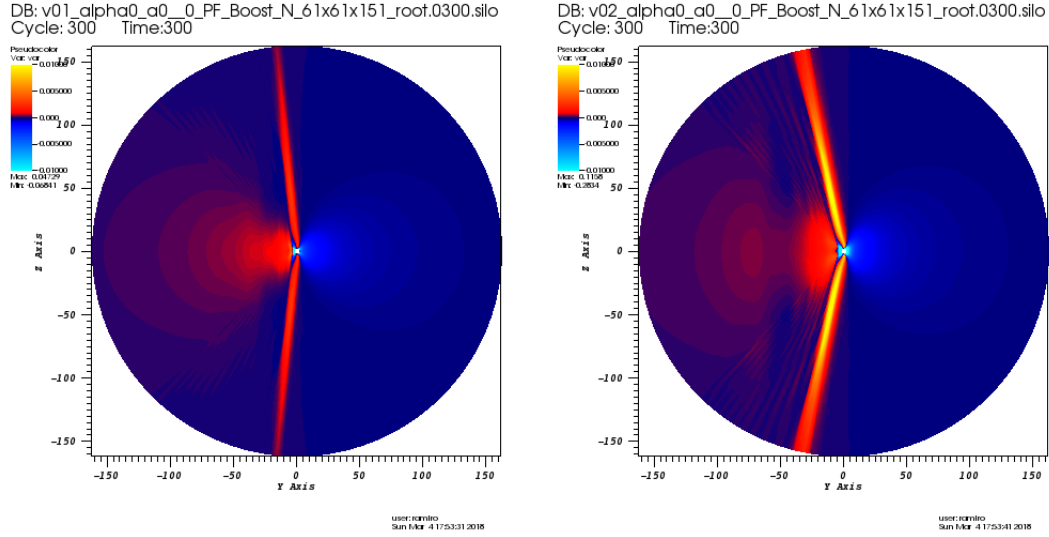


Figura 8: Flujo $\Phi_{\mathcal{E}boost}(n)$ en el plano (y-z), para $t = 300M$, para un agujero negro con velocidad $v = 0,1$ (izquierda) y $v = 0,2$ (derecha).

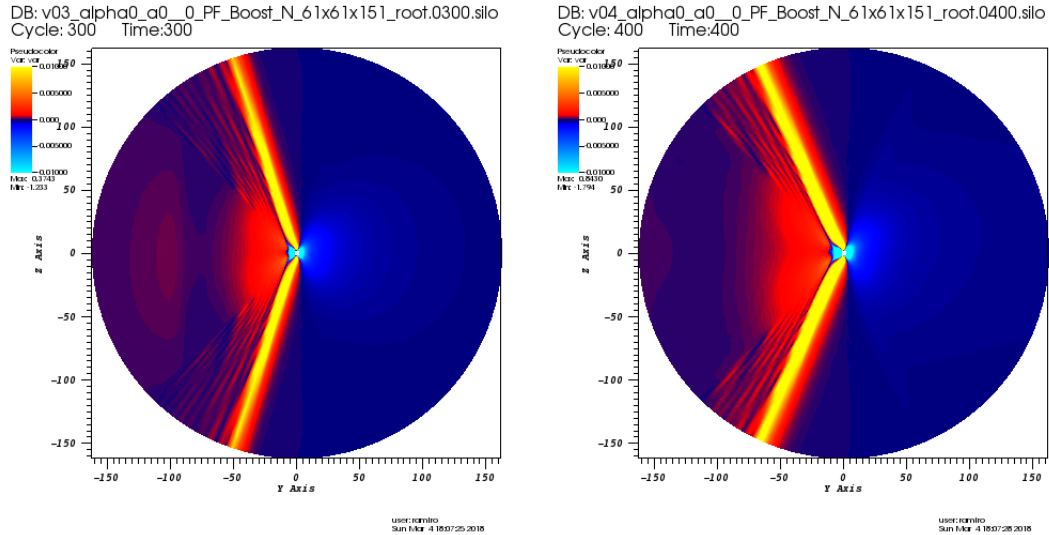


Figura 9: Flujo $\Phi_{\mathcal{E}boost}(n)$ en el plano (y-z), para $t = 300M$ en el plano (y-z) (izquierda) $t=400$ (derecha), para un agujero negro con velocidad $v = 0,3$ (izquierda) y $v = 0,3$ (derecha).

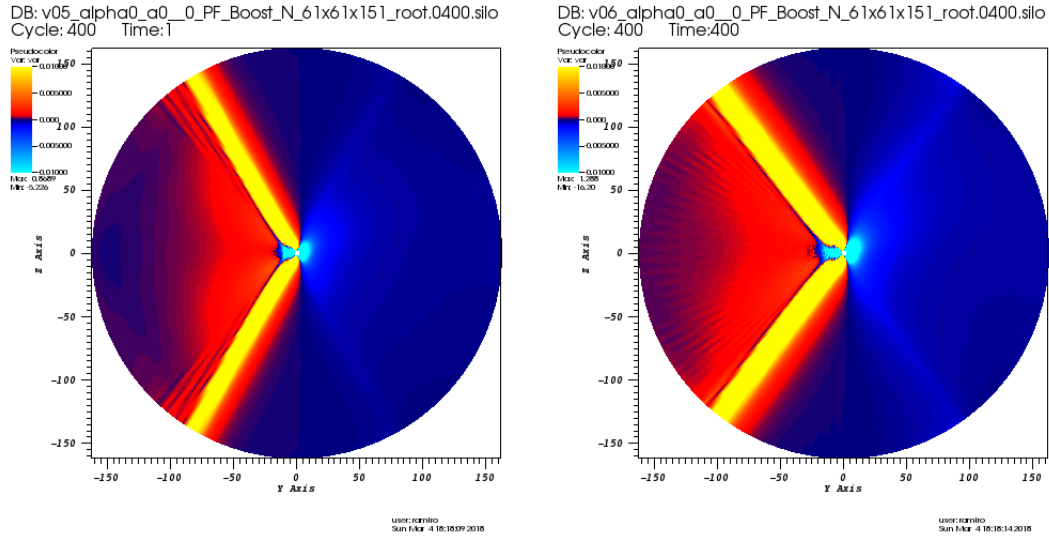


Figura 10: Flujo $\Phi_{\mathcal{E}boost}(n)$ en el plano (y-z), para $t = 400M$, para un agujero negro con velocidad $v = 0,5$ (izquierda) y $v = 0,6$ (derecha).

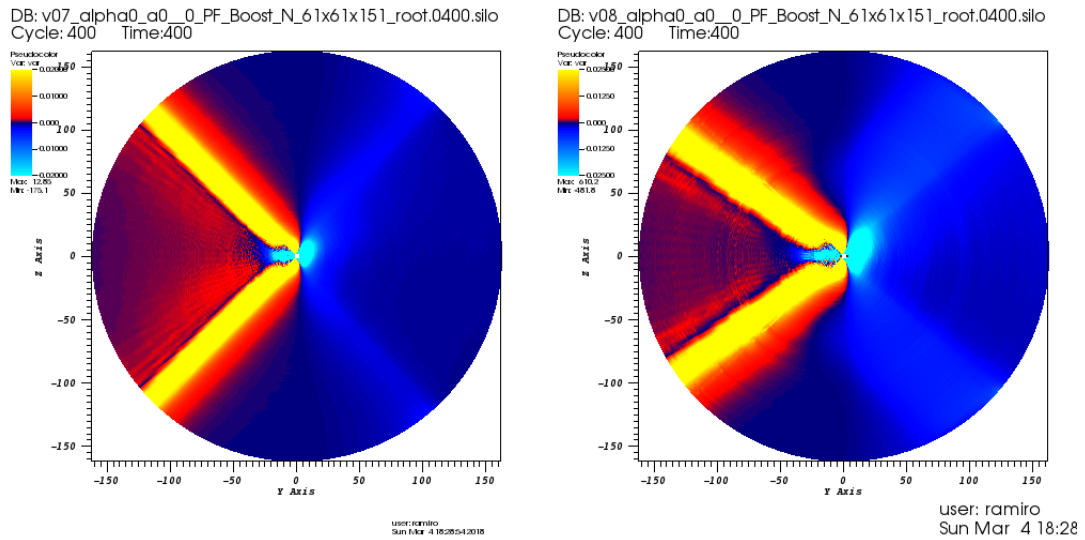


Figura 11: Flujo $\Phi_{\mathcal{E}boost}(n)$ en el plano (y-z), para $t = 400M$, para un agujero negro con velocidad $v = 0,7$ (izquierda) y $v = 0,8$ (derecha).

antes, lo que verdaderamente nos interesa es el flujo electromagnético lejos de agujero negro, y esta región es chica para las velocidades que tratamos nosotros. Esta característica no esta presente en los resultados obtenidos para la cantidad $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ ya que la misma esta bien definida en todo el dominio, de todas maneras al alejarse lo suficiente del agujero negro los resultados arrojados por estas dos cantidades son muy similares.

Para realizar la integrales de los flujos electromagnéticos se tuvo que ser cuidadosos, como ya habíamos mencionado en la sección anterior las integrales a realizar están definidas en superficies que son asintóticamente elipsoides, que representan la superficie de una esfera luego de hacer una transformación de Lorentz. Como el código solo cuenta, debido a la estructura de grillas, con la infraestructura necesaria para realizar integrales sobre superficies esféricas, se tuvo que usar un software (VisIt) para poder realizar estas integrales. Las integrales realizadas fueron hechas sobre superficies que representan esferas de radio igual a 90M para un observador solidario al plasma, es decir elipsoides de distintas formas según el valor de la velocidad, como puede verse en la figura Fig. 12 . Se realizaron integrales sobre todo el elipsoide y también separadamente se realizaron integrales que solo consideran la parte colimada del flujo electromagnético, como puede verse en la figura Fig. 13.

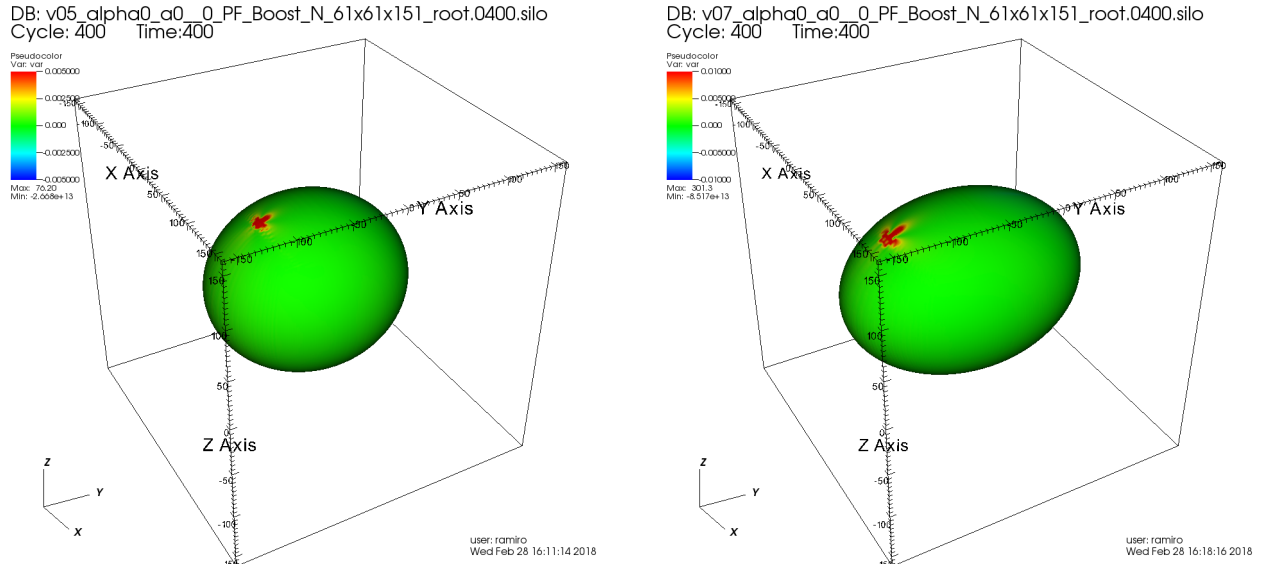


Figura 12: Superficies de integración utilizadas para calcular el flujo electromagnético total, para $v=0,5$ (izquierda) y $v=0,7$ (derecha), estos dos elipsoides corresponden a esferas de radio 90 M en el referencial solidario al plasma.

Se puede ver en la figura Fig. 14 el flujo electromagnético total integrado sobre las regiones que presentan *jets*, presenta un comportamiento cuadrático con la velocidad como lo indican los resultados de [4][3][7], pero ahora pudimos mostrar que este comportamiento sigue presente para velocidades altas.

Si bien lo que esperábamos es que estando lejos del agujero negro estas cantidades integradas sean iguales para $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, puede verse que el flujo integrado para $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ presenta una pendiente más grande que $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$. En la figura Fig. 15, se puede ver como la diferencia relativa entre estas dos cantidades crece para velocidades altas, alcanzando hasta una diferencia del 17%. En la figura Fig. 16 se puede ver como la diferencia entre $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, es

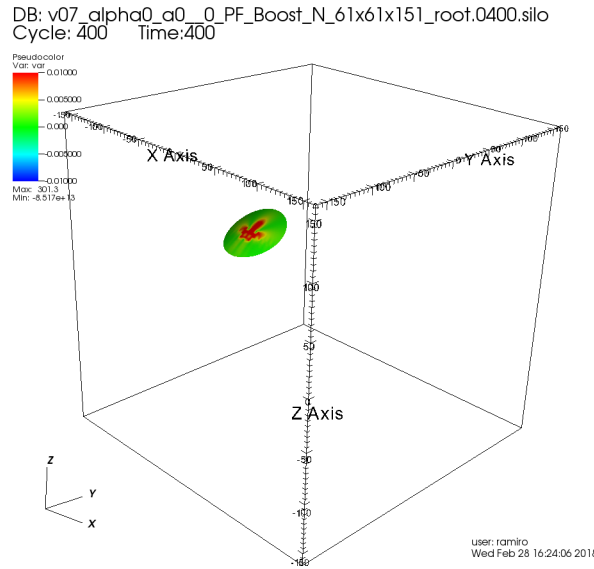


Figura 13: Superficie de integración utilizada para calcular el flujo electromagnético colimado para $v=0,7$, este cascaron corresponde a la intersección del elipsoide que define la superficie total de integración, con un cilindro hueco de radio 30 M cuyo centro pasa por el punto de mayor intensidad del *jet*. Para obtener el flujo colimado total es necesario integrar también sobre el casquete que contiene al otro *jet*

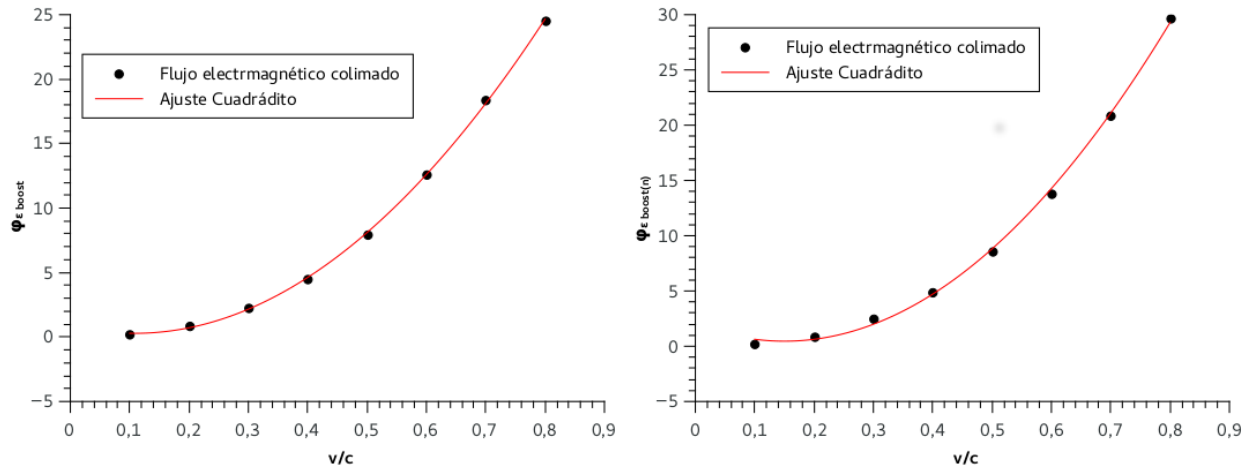


Figura 14: Flujo $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ (izquierda) y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ (derecha) integrados en las zonas de la elipsoide (correspondiente al boosteo de Lorentz de una esfera de radio 90M) que presentan flujo electromagnético colimado . Se realizó ajustes cuadráticos de la forma $y = ax^2 + bx + c$ obteniendo como parámetros para el ajuste los valores $a = (5, 1 \pm 0, 1) \times 10^1$, $b = (-2, 1 \pm 0, 3) \times 10^1$, $c = (9 \pm 2) \times 10^{-1}$ y un $R^2 = 0,999717873553755$. (izquierda) y $a = (6, 8 \pm 0, 3) \times 10^1$, $b = (-1, 1 \pm 0, 1) \times 10^1$, $c = (9 \pm 2) \times 10^{-1}$ y un $R^2 = 0,998894579218815$ (derecha).

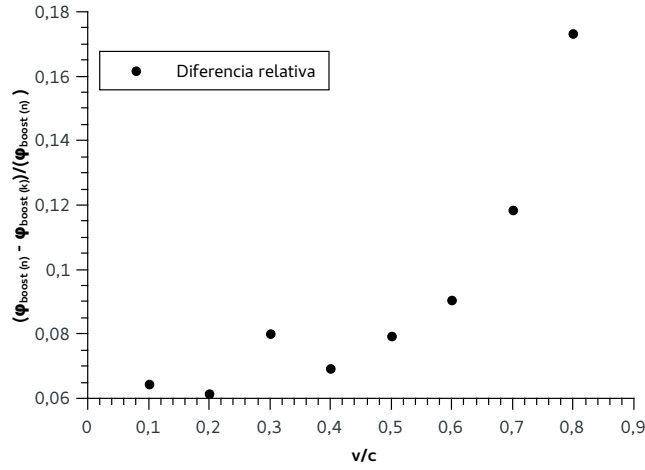


Figura 15: Diferencia relativa $\frac{\Phi_{\mathcal{E}boost(n)} - \Phi_{\mathcal{E}boost(k)}}{\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}}$ entre las dos cantidades que utilizamos para obtener el flujo electromagnético integrado vs. velocidad del boost.

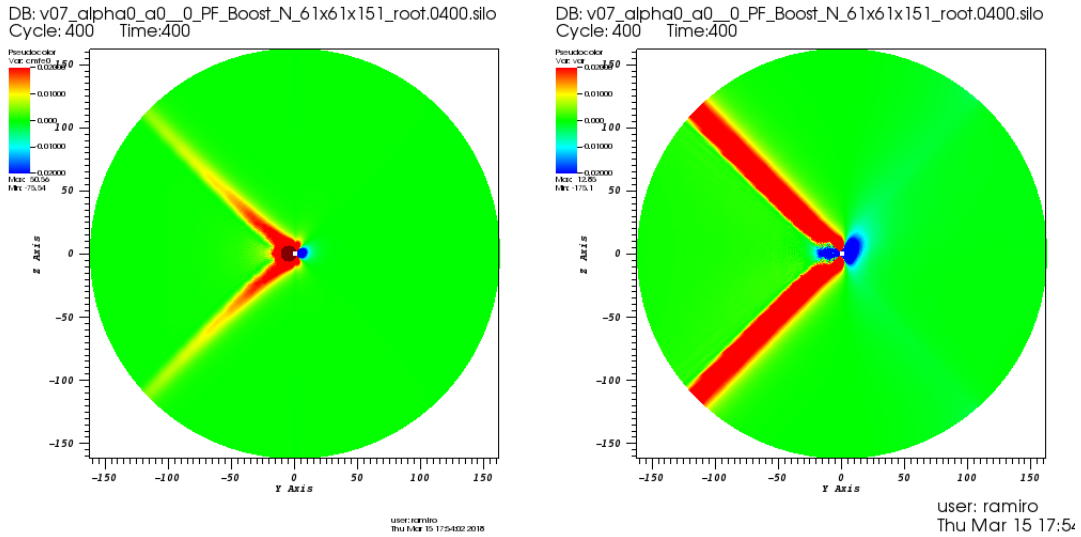


Figura 16: Izquierda: $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)} - \Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y Derecha: $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, en el plano (y-z), para $t = 400M$, para un agujero negro con velocidad $v = 0,7$.

grande cerca del agujero negro, también puede verse como al alejarse de él esta diferencia empieza a disminuir, se puede ver que para $r \approx 90M$ esta diferencia no es todavía insignificante. Si bien lo esperado era que para estas distancias esta diferencia fuese insignificante, observamos lo contrario, nuestra primera hipótesis para explicar esta diferencia fue que el vector k' no tiene norma exactamente -1, pero al realizar los cálculos para un radio de $r \approx 90M$ esta norma resulta ser ≈ -1 sin importar la velocidad del boost. Todavía desconocemos el porque de la discrepancia entre estas dos cantidades, pero intuimos que se debe a que en las definiciones de los flujos electromagnéticos hay un término cuyo comportamiento sea tal que para $r = 90M$ la contribución de la curvatura sea todavía significativa, y que probablemente este término este multiplicado por un factor proporcional a la velocidad elevada a alguna potencia, y por eso esta discrepancia entre los flujos es más notable para velocidades altas. Es posible entonces que para obtener una buena medida del flujo de campo electromagnético sea necesario realizar simulaciones en dominios numéricos más grandes, donde podamos calcular el flujo electromagnético más lejos del agujero negro.

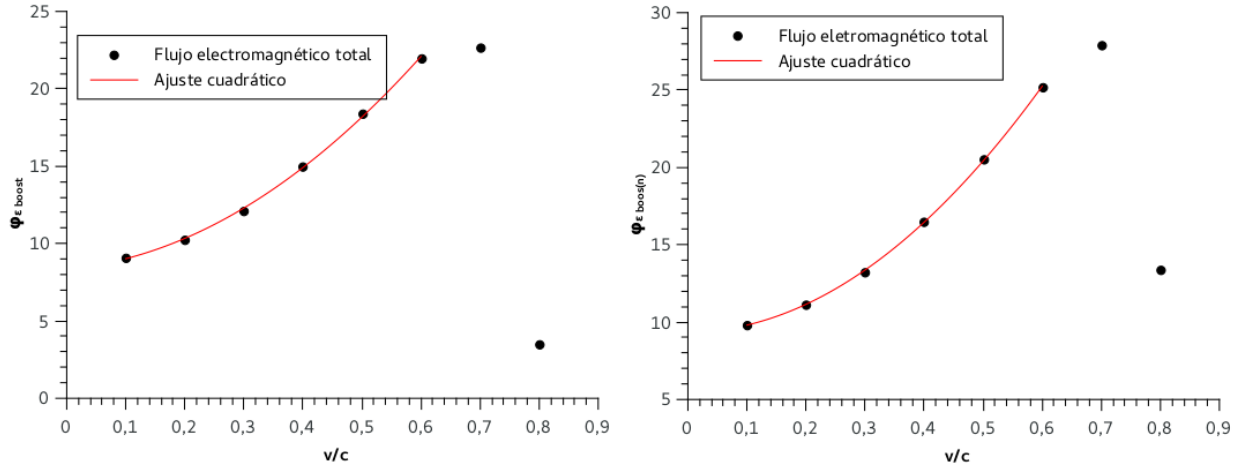


Figura 17: Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ (izquierda) y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ (derecha) integrado en todo el elipsoide (correspondiente al boosteo de Lorentz de una esfera de radio $90M$). Se realizó un ajuste cuadrático, para valores hasta $v=0,6$, de la forma $y = ax^2 + bx + c$ obteniendo como parámetros para el ajuste los valores $a = (3,2 \pm 0,3) \times 10^1$, $b = (3,4 \pm 0,2)$, $c = (8,4 \pm 0,4)$ y un $R^2 = 0,997670829960073$ (izquierda) y $a = (4,4 \pm 0,2) \times 10^1$, $b = (0 \pm 1)$, $c = (9,3,4 \pm 0,2)$ y un $R^2 = 0,999760843991069$ (derecha).

Puede claramente notarse en la figura Fig. 17 que tanto $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$, como para $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ los puntos correspondientes a las velocidades $v = 0,7$ y $v = 0,8$ no arrojan resultados satisfactorios, por eso es que no se los incluyó en el ajuste cuadrático realizado. Creemos que la explicación de que estos puntos se comporten de manera incorrecta es producto de que para hacer esas integrales, cada una se realizó en elipsoides que corresponden a esferas de radio $90M$ boosteadas, cuyo factor de dilatación en la dirección y para estos elipsoides son $\gamma_{0,7} = 1,40028$ y $\gamma_{0,8} = 1,66666$ y llevan entonces el borde de estos elipsoides hasta distancias de aproximadamente $126 M$ y $150 M$ respectivamente. Esto genera que estemos integrando muy cerca del borde numérico exterior, que es aproximadamente $160 M$, y es por ello probable que estén entrando en juego efectos de borde generando así estos resultados poco satisfactorios. De todas maneras el comportamiento del flujo electromagnético para velocidades hasta $v = 0,6$ es cuadrático como se esperaba. Este problema es fácilmente salvable pero involucra realizar simulaciones numéricas con dominios mas grandes.

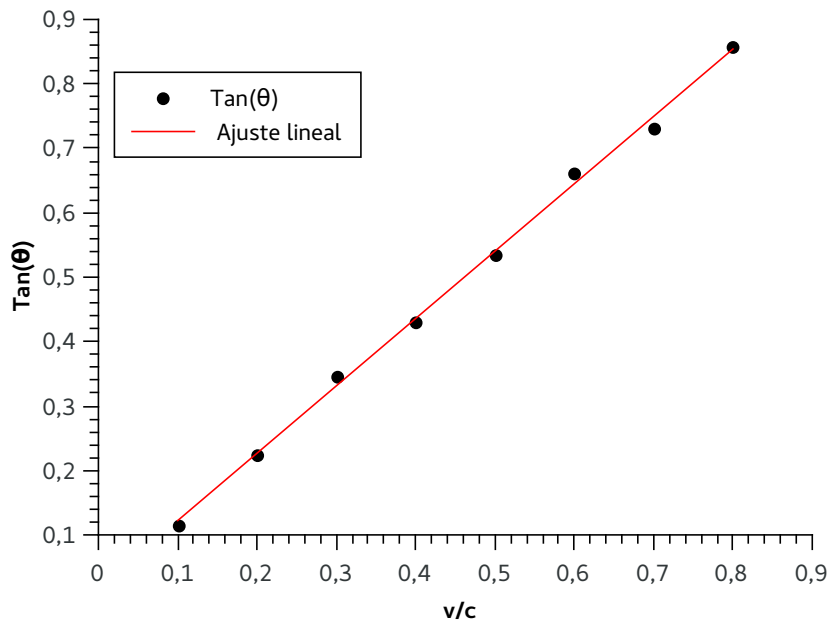


Figura 18: Esta figura presenta la tangente del ángulo θ que forman los *jets* con el eje z vs. la velocidad de boost. Estos ángulos están medidos desde el referencial del plasma. Se realizó un ajuste lineal del tipo $y = ax + b$ el cual arrojó los siguientes parámetros de ajuste, $a = (1,05 \pm 0,02)$, $b = 0,02 \pm 0,01$ y un $R^2 = 0,99714931026012$.

Se puede ver en Fig. 18 que el comportamiento de los ángulos formados entre los *jets* y el eje z es del tipo $\tan(\theta) = v/c$, este es comportamiento $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ obtenido en [20] para el estudio de un conductor moviéndose en un plasma magnetizado. Es importante notar que medimos estos ángulos para el referencial solidario al plasma, ya que estos son diferentes en cada en cada referencial, para hacer esto localizamos el centro del *jet* buscando el punto de mayor intensidad del mismo sobre un cascaron esférico de radio 90 M.

0.7.1. Hoja de corriente

Presentamos a continuación los resultados para la cantidad $B^2 - E^2$, esta cantidad nos da la noción de la dominancia magnética en el sistema, como se mencionó antes en 0.6.3 la aproximación de *force-free* se viola normalmente a lo largo de la evolución, por lo cual es necesario realizar recortes al campo eléctrico. Como se vera en las imágenes (Fig. 19 Y Fig. 20) la zona donde se observa que el módulo del campo eléctrico compite con el del magnético en una región lobular en el plano (x-y) detrás del agujero negro y aumenta su tamaño junto con la velocidad de boost. Claramente en estas figuras no observaremos una región donde el campo eléctrico se el dominante ya que durante la evolución nos encargamos de recortarlo cuando esto este por pasar, lo que si se puede observar es una región donde $B^2 - E^2 \approx 0$.

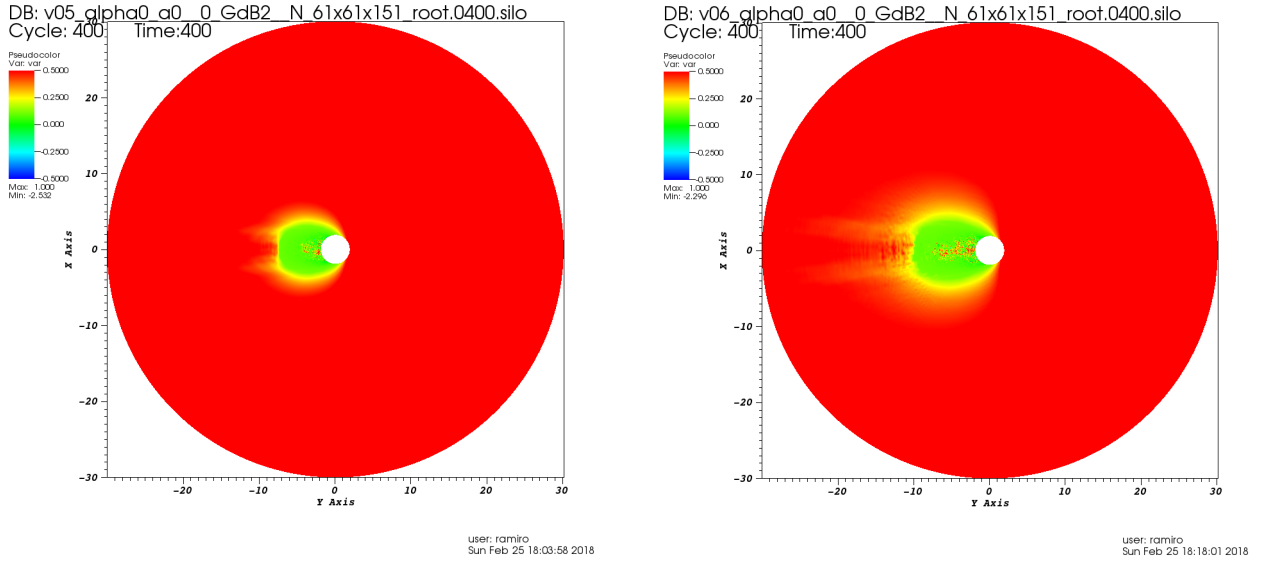


Figura 19: La cantidad $B^2 - E^2$ hasta $r = 30M$ para el plano (x-y) para velocidades $v = 05$ (izquierda) y $v = 06$ (derecha), para $t = 400 M$. Puede verse que la región donde se genera la hoja de corriente es una región de forma lobular que puede verse de un color verdoso, mientras que el resto del dominio presenta una fuerte dominación magnética (color rojo).

0.7.2. Energía

Mostraremos aquí el comportamiento de la energía total del sistema para las distintas velocidades de boost, mostrando que las mismas pasan por un periodo inicial de transición donde la energía crece hasta que alcanza un valor máximo y luego alcanza un valor constante. Encontramos que el valor final de la energía es cuadrático con la velocidad del agujero negro. También vamos a

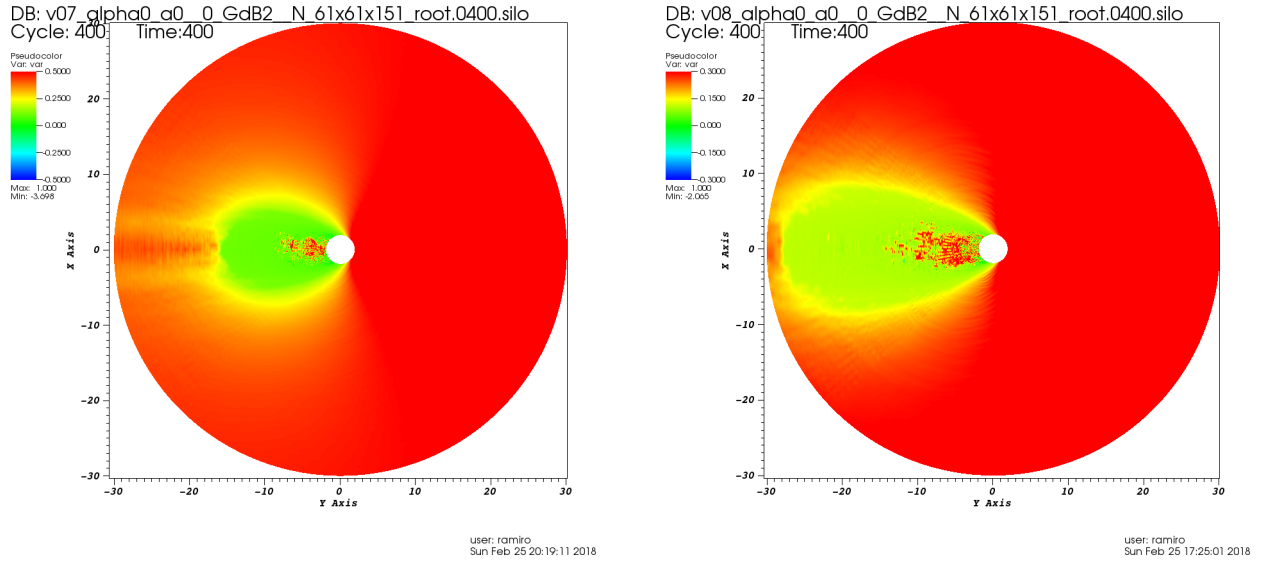


Figura 20: La cantidad $B^2 - E^2$ hasta $r = 30M$ para el plano (x-y) para velocidades $v = 07$ (izquierda) y $v = 08$ (derecha), para $t = 400 M$.

comparar el comportamiento de la energía según los dos distintos datos iniciales que especificamos en 0.6.1 con sus respectivas condiciones de contorno.

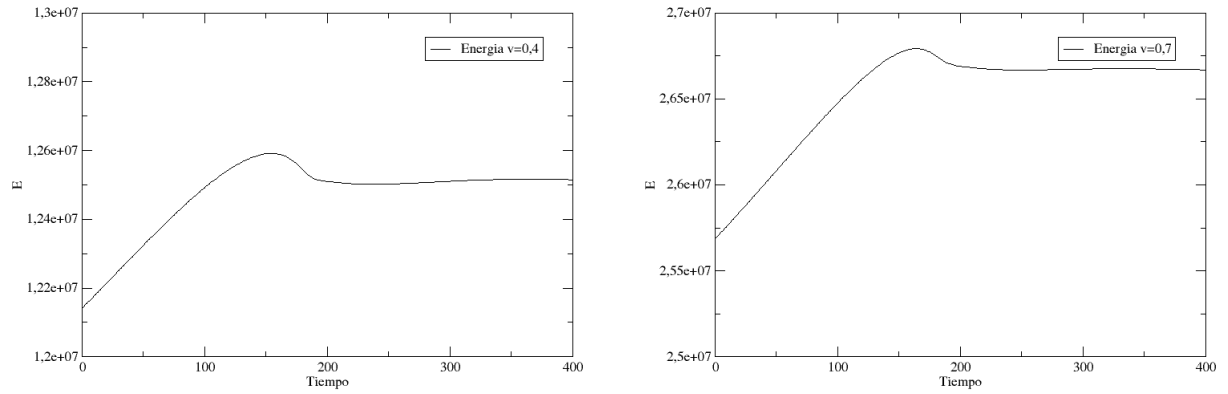


Figura 21: Energía en función del tiempo para velocidades $v = 0,4$ (izquierda) y $v = 0,7$ (derecha). Para simulaciones con una resolución de $61 \times 61 \times 151$ y un radio exterior de $\approx 160M$. Puede verse como después de $t \approx 200M$ la energía es constante, con lo cual decimos que llegamos a soluciones verdaderamente estacionarias

Como se discutió en 0.6.1 optamos por probar dos datos iniciales distintos, los cuales requieren cada uno de condiciones de borde diferentes, los resultados para la configuración de los campos

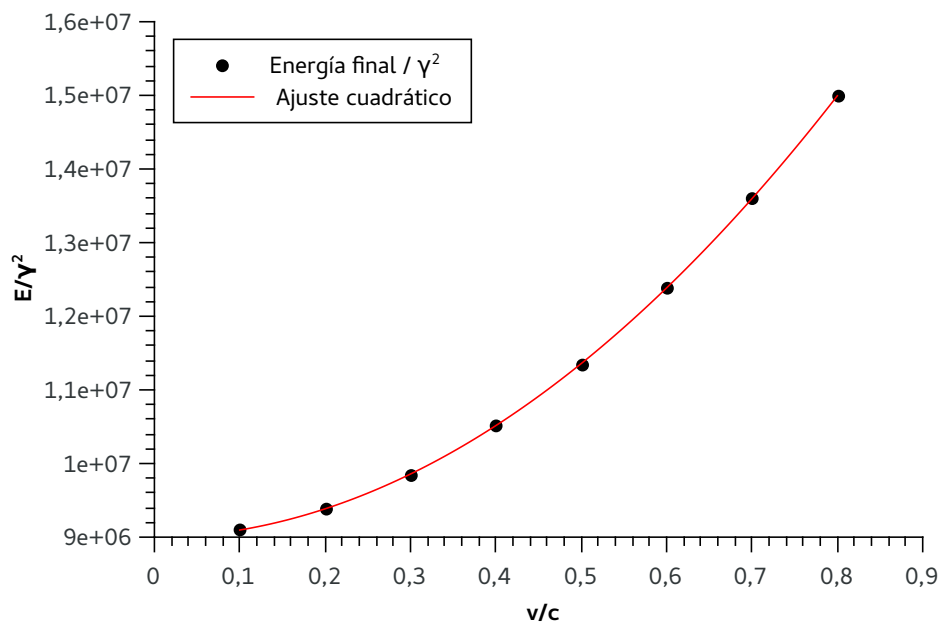


Figura 22: Energía final del sistema dividida por $\gamma^2(v)$ en función de la velocidad del agujero negro para un radio exterior de $\approx 160M$ y una resolución de $61 \times 61 \times 151$. Se realizó un ajuste cuadrático del tipo $y = c + bx + ax^2$ que arrojó los siguientes parámetros de ajuste $a = (9,24 \pm 0,02) \times 10^6$, $b = (1,1 \pm 0,2) \times 10^5$, $c = (8,994 \pm 0,005) \times 10^6$ y $R^2 = 0,99999803246787$

finales y el flujo electromagnético resultan los mismos para estos dos, la diferencia es como se llega a esta configuración final. Con el dato inicial de campo magnético uniforme boosteado se parte de un dato que no es solución a las ecuaciones de *force-free* por lo cual el dato inicial comienza a evolucionar abruptamente para llegar a la configuración final, en cambio al tener dato inicial la solución de Wald para un agujero negro de Schwarzschild en un campo magnético asintóticamente uniforme, que si es solución de *force-free*, la evolución inicial será mínima, en este caso la evolución se da por los modos entrantes en el borde numérico exterior que traen información del boosteo de los campos en el borde, y debido a que este boosteo se realiza de manera suave, entonces la evolución también será de dicha manera. Al ver la figura Fig. 23 puede verse claramente este comportamiento para estos dos datos iniciales, también puede observarse como la solución para dato inicial de Wald llega más tarde al estado estacionario, siendo este alrededor de $t = 200M$ mientras que otro dato inicial lo consigue en aproximadamente $t = 100M$, esto era esperable ya que en el primer caso el dato inicial no tiene información alguna del boosteo de los campos, entonces hasta que esta información llegue desde los bordes y llegue a estabilizarse tarda más tiempo. Debido a esta diferencia para los tiempos en que se alcanza el mismo estado estacionario, optamos por realizar todas las simulaciones presentadas en este trabajo con el dato inicial de campo magnético uniforme boosteado, sin embargo la implementación del otro dato inicial y su respectiva condición de contorno podría ser de gran utilidad para escenarios físicos donde una evolución lo más suave posible sea necesaria.

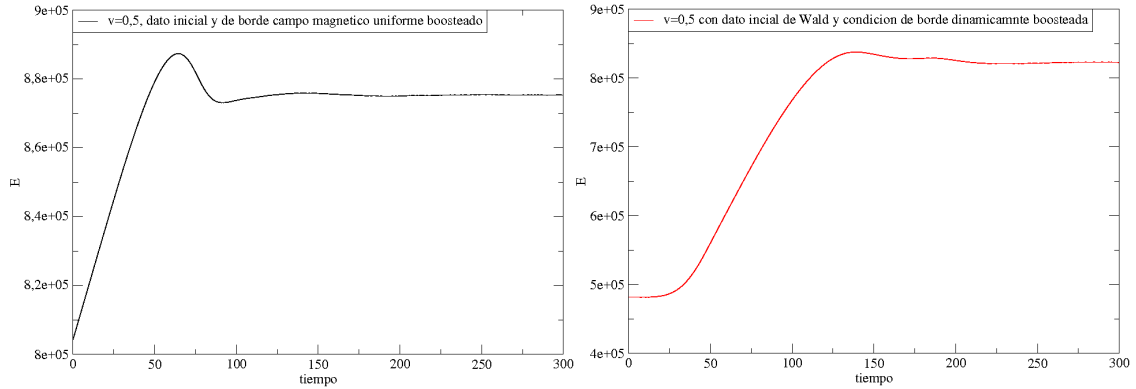


Figura 23: La energía del sistema para un agujero negro con velocidad $v = 0,5$ con dato inicial de campo magnético uniforme boosteado (izquierda) y dato inicial de Wald (derecha) para un dominio numérico de tamaño $\approx 60M$ y resolución $41 \times 41 \times 101$.

0.8. Agujero Negro de Schwarzschild con velocidad no ortogonal al campo magnético asintóticamente uniforme

Se exhibirán a continuación los resultados obtenidos para las simulaciones para el caso del agujero negro de Schwarzschild con velocidades no ortogonales al campo magnético, se hizo un barrido en el ángulo χ formado entre la velocidad del agujero negro y el eje y desde $-\frac{\pi}{4}$ hasta $\frac{\pi}{4}$ para una velocidad de boost $v = 0,5$. Se obtuvieron las magnitudes del flujo electromagnético neto integrado en todo el elipsoide que define las superficies en las cuales calculamos los flujos, y también se hicieron integraciones sobre las porciones de estos elipsoides que contiene la parte colimada del flujo electromagnético, mostrando que las mismas son dependientes del ángulo χ . Lo que puede verse en estos resultados, es que al romper la simetría, ahora la intensidad de cada uno de los dos *jets* es diferente a la del otro y es dependiente del ángulo χ .

0.8. AGUJERO NEGRO DE SCHWARZSCHILD CON VELOCIDAD NO ORTOGONAL XLIX

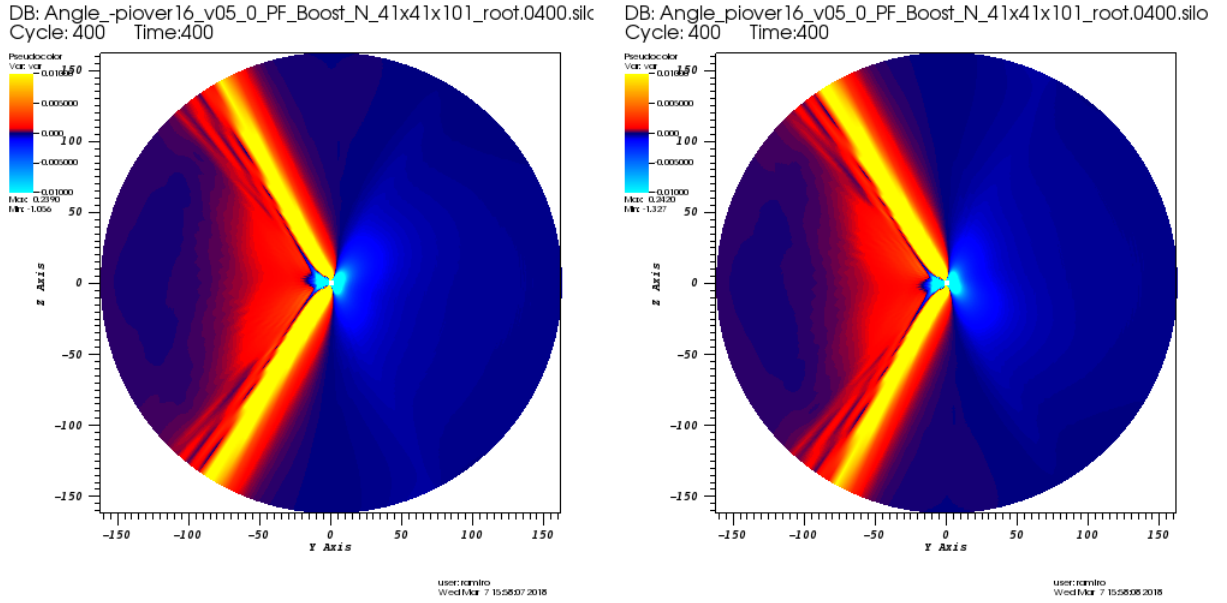


Figura 24: Flujo electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ en el plano (y-z), para $t = 400M$ en el plano (y-z) para un agujero negro con velocidad $v = 0,5$ que forma un ángulo $\chi = \frac{-\pi}{16}$ (izquierda) y $\chi = \frac{\pi}{16}$ (derecha) con el campo magnético asintóticamente uniforme.

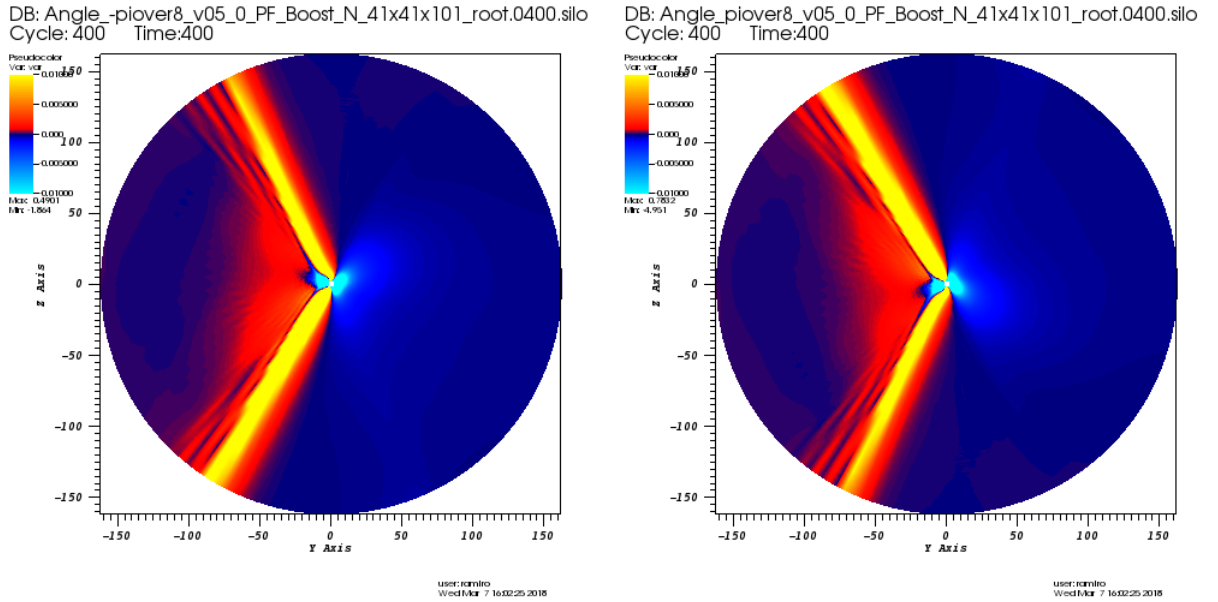


Figura 25: Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost}$ en el plano (y-z), para $t = 400M$ en el plano (y-z) para un agujero negro con velocidad $v = 0,5$ que forma un ángulo $\chi = \frac{-\pi}{8}$ (izquierda) y $\chi = \frac{\pi}{8}$ (derecha) con el campo magnético asintóticamente uniforme.

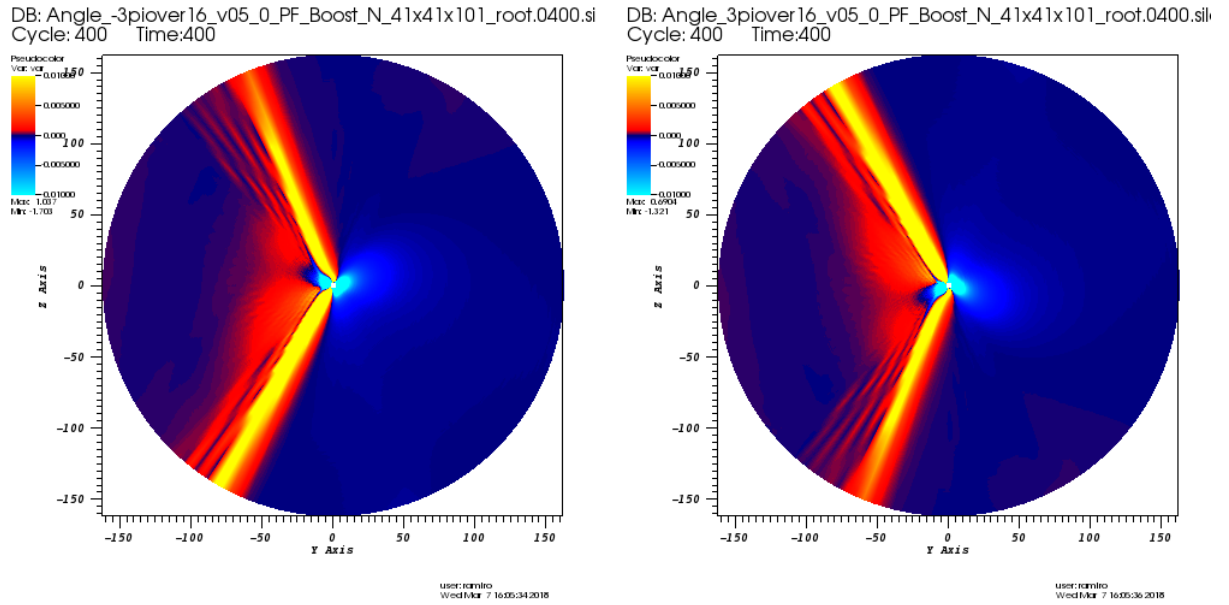


Figura 26: Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}_{boost}}$ en el plano (y-z), para $t = 400M$ en el plano (y-z) para un agujero negro con velocidad $v = 0,5$ que forma un ángulo $\chi = -\frac{3\pi}{16}$ (izquierda) y $\chi = \frac{3\pi}{16}$ (derecha) con el campo magnético asintóticamente uniforme.

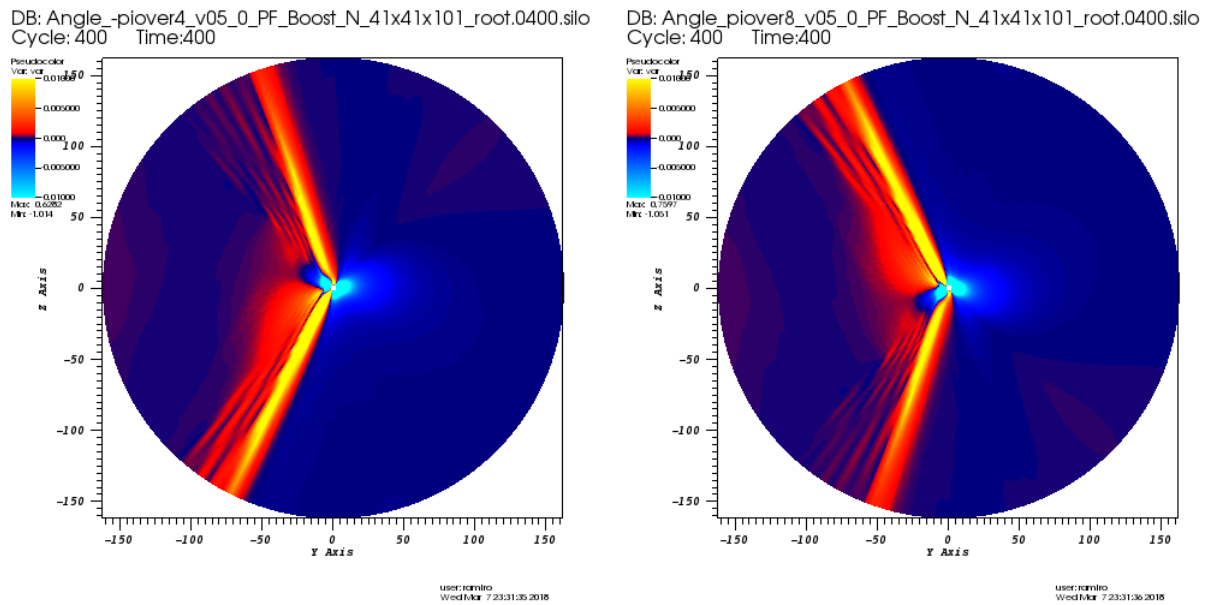


Figura 27: Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}_{boost}}$ en el plano (y-z), para $t = 400M$ en el plano (y-z) para un agujero negro con velocidad $v = 0,5$ que forma un ángulo $\chi = \frac{\pi}{4}$ (izquierda) y $\chi = \frac{\pi}{4}$ (derecha) con el campo magnético asintóticamente uniforme.

Puede verse en (Fig. 24-Fig. 27) como la intensidad de los *jets* individuales depende del ángulo χ , es decir ya la intensidad del *jet* no es simétrica con respecto al plano $z = 0$. También puede observarse como medida que que la velocidad se hace más paralela al campo magético uniforme la intensidad del flujo electromagnético en los *jets* disminuye, si se continúa inclinando la velocidad hasta que esta sea paralela al campo magnético, el flujo electromagnético colimado desaparece.

Puede verse luego en Fig. 28 como variá la intensidad del flujo electromagnético integrando para el par de *jets*, a los cuales llamaremos superior e inferior, puede observarse como puede entonces la intensidad de un *jet* ser mayor a la del otro e inclusive mayor a la intensidad que tiene en el caso ortogonal. Al ver las líneas de campo para los campos magnéticos que se obtienen en la solución estacionaria puede notarse que en la región donde esta presente el *jet* más poderoso del par, estas líneas esta más comprimidas y es por eso que se observa un flujo mayor. Puede notarse también en esta figura y en (Fig. 24-Fig. 27) , la simetría entre los flujos para los *jets* superior e inferior, simetría que nos muestra que la intensidad del *jet* superior para una velocidad con ángulo χ es la misma que la que tiene el *jet* inferior para el ángulo $-\chi$. Si bien esta simetría no es inmediata de ver, ya que el campo magnético asintótico tiene la dirección preferencial $+\hat{z}$, podemos argumentar la presencia de esta simetría al mirar el último termino de 50, el cual agrega al campo magnético boosteado un término proporcional a la proyección de la velocidad en el campo magnético. Como este término está multiplicado por la velocidad, entonces la contribución de este término es independiente del signo de χ , generando así esta simetría.

Vemos también en Fig. 29 la dependencia del flujo electromagnético que resulta de la suma de los flujos electromagnéticos colimados en función del ángulo χ , se ve entonces que el mayor flujo electromagnético colimado se da entonces para el caso de velocidades ortogonales al campo asintóticamente uniforme. Este gráfico presenta también la simetría que mencionamos anteriormente.

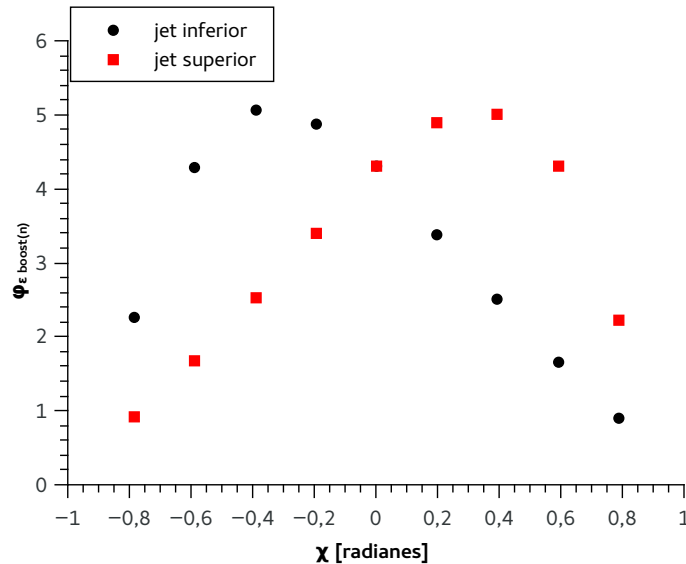


Figura 28: Integral del flujo electromagnético para el *jet* superior (rojo) y el inferior (negro), para distintos ángulos χ comprendidos entre la velocidad del agujero negro y el eje y para $v = 0.5$.

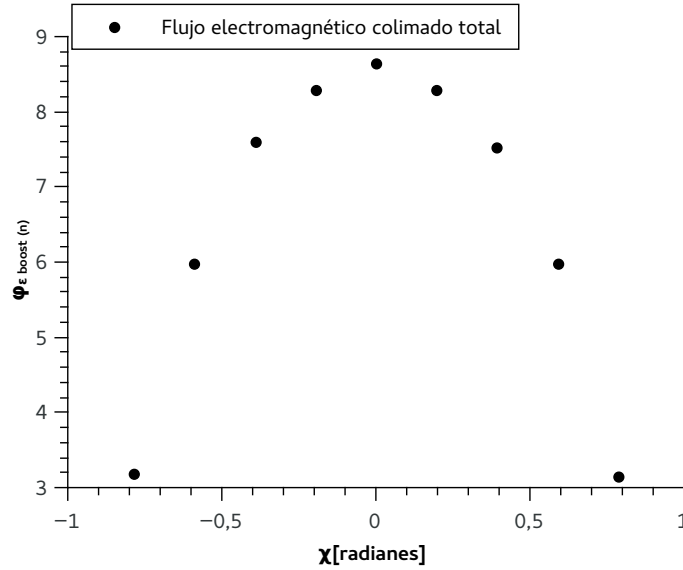


Figura 29: Integral del flujo electromagnético que resulta de la suma de las integrales de los *jets* inferior y superior en función del ángulo χ para $v = 0,5$

0.9. Agujero Negro de Kerr, efectos de la rotación sobre el flujo electromagnético

En esta sección se mostraran los resultados obtenidos para las simulaciones numéricas efectuadas con una métrica de fondo de Kerr, en particular se mostraran los efectos de la rotación del agujero negro al flujo electromagnético de energía. Todas las simulaciones hechas en este escenario tienen un parámetro adimensional de espín del agujero negro $a=0,9$ para poder ver los efectos de la rotación de manera más fácil. En [7] se llegan a soluciones analíticas aproximadas para la configuración de los campos electromagnéticos en la vecindad de agujeros negros que rotan y se trasladan, usando estas soluciones muestran que el efecto de la rotación del agujero negro es un efecto subdominante ante el de la traslación cuando se calcula la luminosidad electromagnética. Es por eso que optamos en esta sección tomar un espín alto $a = 0,9$, y velocidades solo hasta $v = 0,5$ para el agujero negro. En [4] se trató el problema del agujero negro de Kerr, y se detectó un crecimiento el flujo electromagnético colimado debido a la rotación del agujero negro. Nosotros estudiamos esto pero para un rango de velocidades más altas y encontramos cualidades diferentes.

Para velocidades bajas, lo que encontramos fue que el flujo electromagnético colimado aumentaba para el caso del agujero negro de Kerr con respecto a los valores obtenidos para el agujero negro de Schwarzschild, se puede ver como cambia sutilmente la forma de los *jets* en ambos casos en las figuras Fig. 30 y Fig. 31.

Las diferencias para velocidades mayores de boost son cada vez más sutiles, pueden verse de todas formas sutiles diferencias en los gráficos Fig. 32 y Fig. 33 de las superficies de nivel para un agujero negro de Schwarzschild y uno de Kerr ($a = 0,9$) ambos moviéndose a velocidades de $v = 0,5$. Puede verse en Fig. 33 como al incorporar la rotación del agujero negro, se perdió la simetría de reflexión con respecto al plano ($y-z$) que si esta presente en Fig. 32.

Lo que nos encontramos tanto para $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ como para $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ es que al tomar velocidades de boost más altas es que el efecto del crecimiento de los *jets* ya no se manifiesta para el agujero

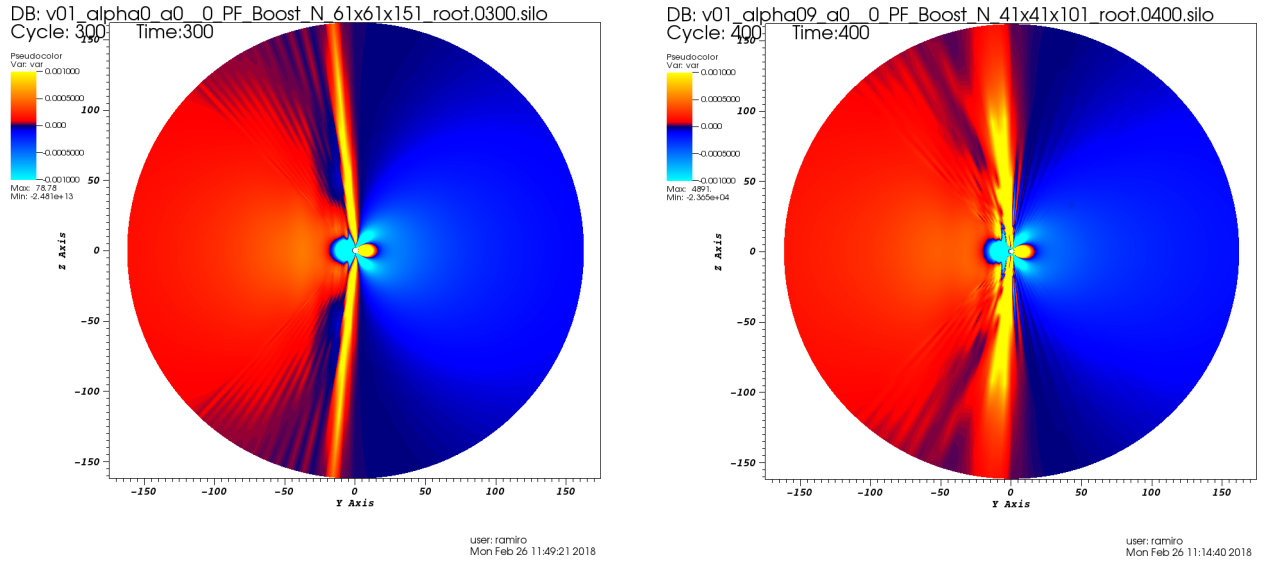


Figura 30: Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, para $t = 300M$ en el plano (y-z) para un agujero negro de Schwarzschild (izquierda) y un agujero negro de Kerr con $a = 0,9$ (derecha), Ambos con velocidad $v = 0,1$

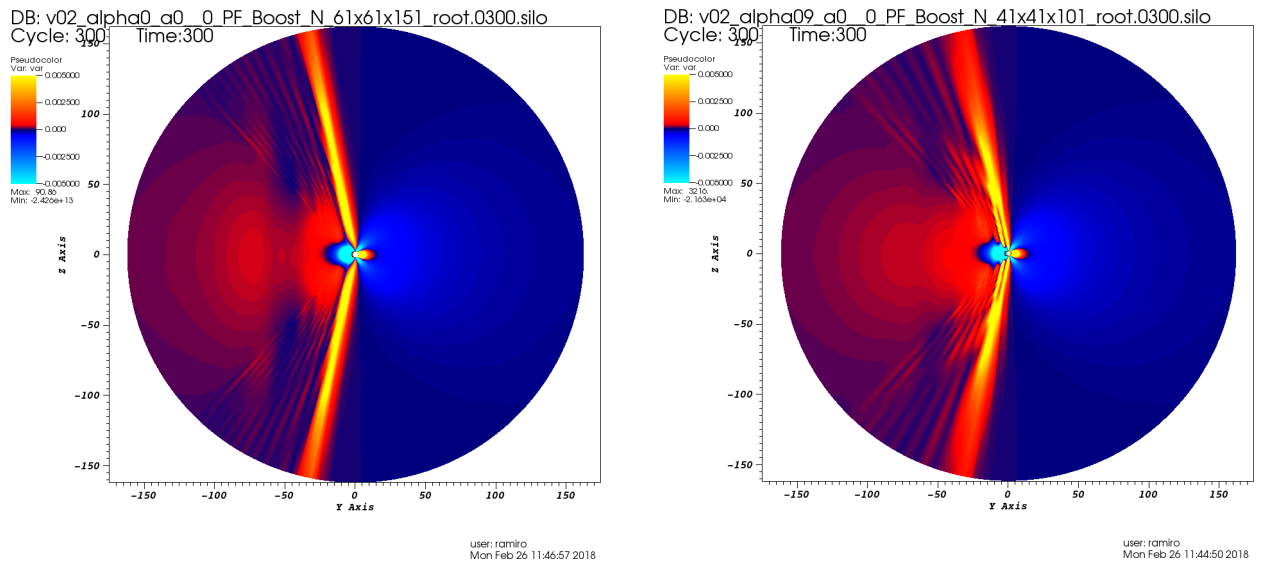


Figura 31: Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, para $t = 300M$ en el plano (y-z) para un agujero negro de Schwarzschild (izquierda) y un agujero negro de Kerr con $a = 0,9$ (derecha), Ambos con velocidad $v = 0,2$

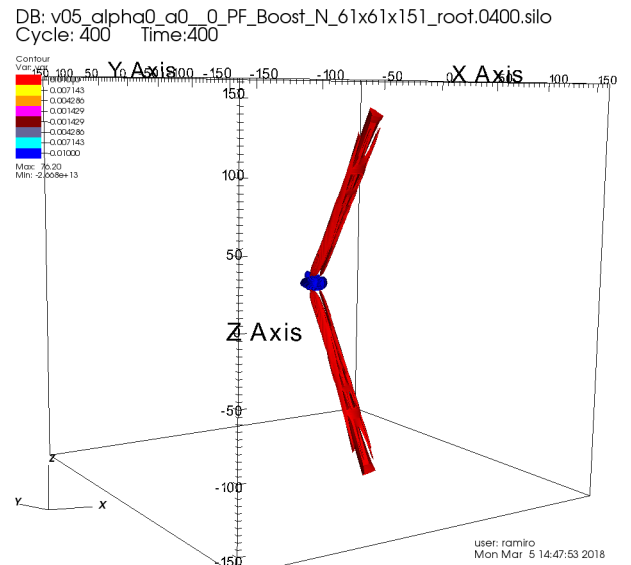
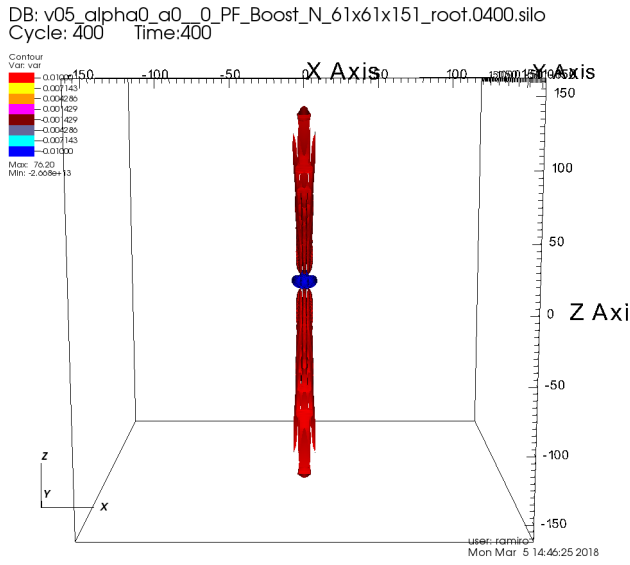


Figura 32: Superficies de nivel para el flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, para $t= 400M$ a un agujero negro de Schwarzschild con velocidad $v = 0,5$, donde el las superficies de nivel son $0,01$ (rojo) y $-0,01$ (azul).

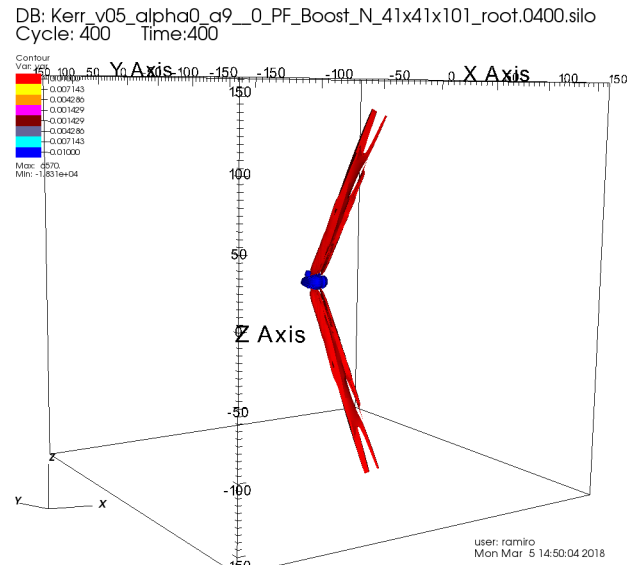
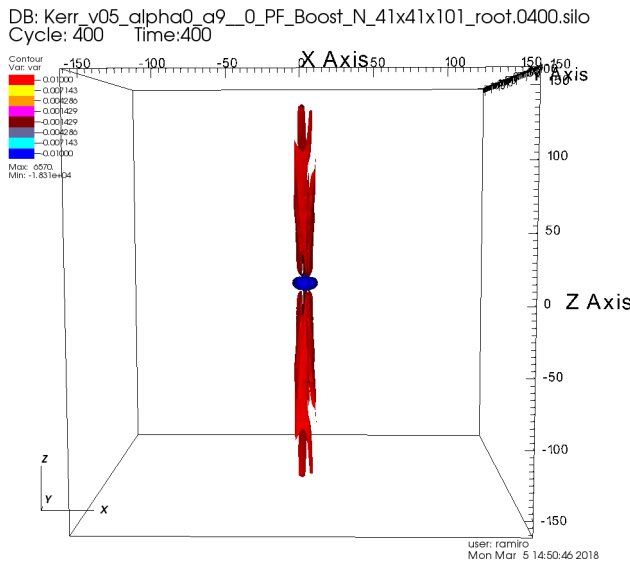


Figura 33: Superficies de nivel para el flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, para $t= 400M$ a un agujero negro de Kerr ($a = 0,9$) con velocidad $v = 0,5$, donde el las superficies de nivel son $0,01$ (rojo) y $-0,01$ (azul).

negro de Kerr, sino que el poder del *jet* se mantenía similar o inclusive menor que en el caso de Schwarzschild, como se puede ver en la figura Fig. 34

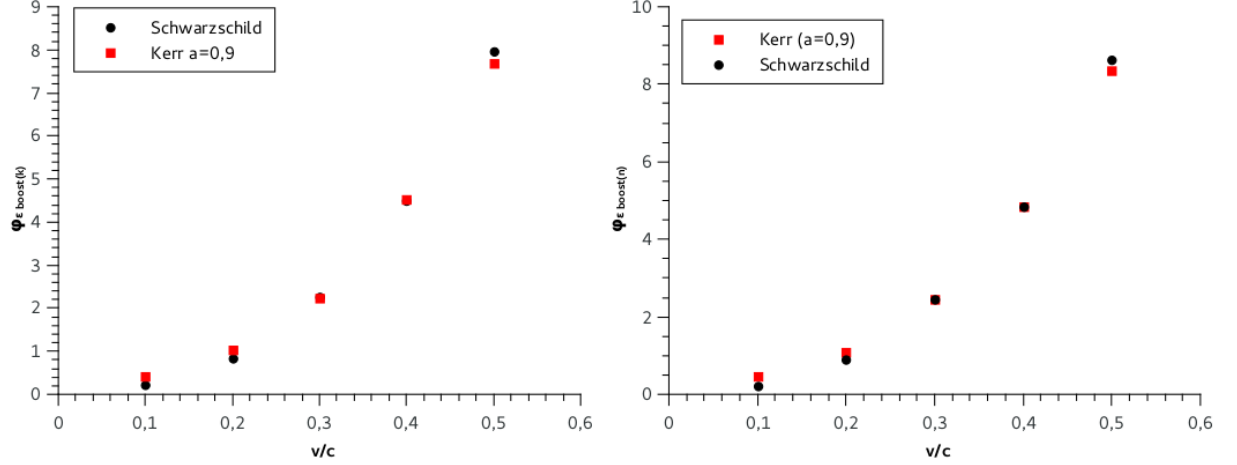


Figura 34: Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ (izquierda) y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ (derecha) integrado en las zonas de la elipsoide (correspondiente al boosteo de Lorentz de una esfera de radio 90M) que presentan flujo electromagnético colimado, para un agujero negro de Schwarzschild y un agujero negro de Kerr con $a = 0,9$, en función de la velocidad de boost.

Nos llamó en un principio la atención este efecto, ya que lo que esperábamos era que la rotación del agujero negro incrementara, aunque sea de manera débil, el flujo electromagnético emitido, para velocidades bajas este fue el caso, pero a medida que aumentamos la velocidad este efecto se ve disminuido e inclusive se debilitan los *jets*.

Lo que pensamos que sucede es lo siguiente, para las velocidades bajas, el ángulo formado por los *jets* con el eje \hat{z} (que coincide con el eje de rotación del agujero negro) es chico, es decir los *jets* están muy alineados con el eje de rotación. Al aumentar la velocidad del agujero negro, estos ángulos crecen y los *jets* se encuentran entonces desalineados con respecto a este eje. Para comprobar esta hipótesis hicimos simulaciones numéricas donde alineamos el eje de rotación con el *jet* superior (ya que no se pueden alinear los dos simultáneamente) y calculamos el flujo electromagnético para este *jet* y lo comparamos con el caso de Schwarzschild y con el de Kerr. En la figura Fig. 35 puede verse como el crecimiento del poder del *jet* superior se mantiene para velocidades altas para el caso de Kerr alineado, mientras que para el caso de Kerr no alineado el crecimiento del *jet* superior desaparece e inclusive empieza a decrecer. Este comportamiento es presente en las dos medidas que tenemos para el flujo electromagnético $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$.

Podemos ver entonces que el incremento en la potencia del flujo electromagnético registrado por [4] solo se mantiene para velocidades bajas, y que a medida que aumentamos la velocidad y por consiguiente la inclinación de los *jets*, este efecto se atenúa e inclusive la potencia de los *jets* comienza a disminuir. Si se quiere mantener el efecto de incremento del flujo electromagnético es posible hacerlo solo para un *jet* del par y es para esto necesario alinear el eje de rotación del agujero negro con este.

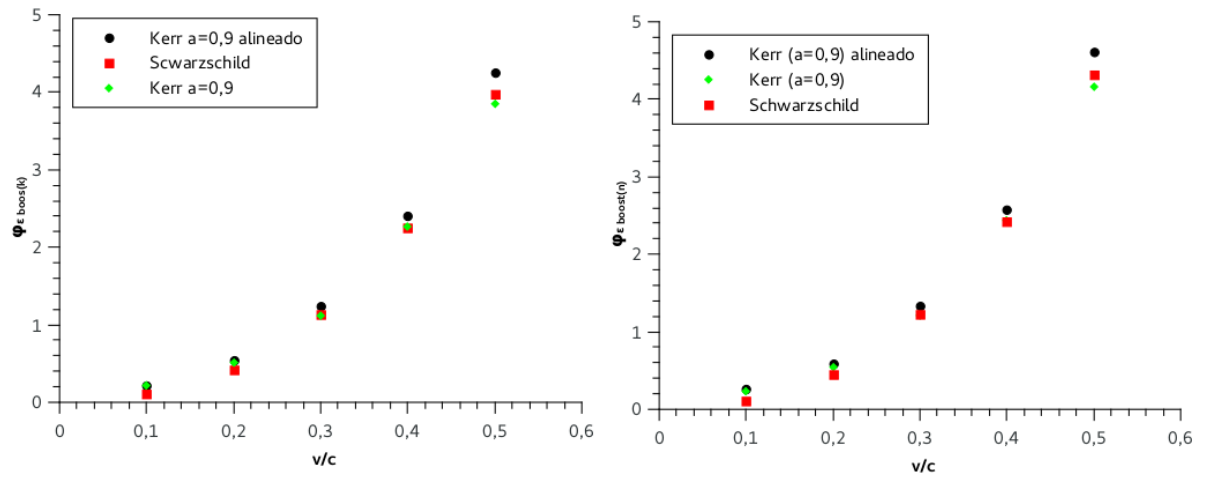


Figura 35: Flujo de electromagnético $\Phi_{\mathcal{E} boost(k)}$ (izquierda) y $\Phi_{\mathcal{E} boost(n)}$ (derecha) integrado para el *jet* superior, para un agujero negro de Schwarzschild, un agujero negro de Kerr ($a = 0,9$) y un agujero negro de Kerr ($a = 0,9$) donde el eje de rotación coincide con la dirección del *jet* superior, en función de la velocidad de boost.

Conclusiones

Como conclusiones podemos mencionar principalmente, que al igual que en [1], al utilizar la estructura numérica de [2] adaptada para el problema del agujero negro boosteado se pudieron obtener soluciones estacionarias para los campos electromagnéticos, que presentan flujos colimados de energía electromagnética.

Para poder obtener estas soluciones utilizamos los datos iniciales y de contorno desarrollados en [1], pero también pudimos obtener resultados similares utilizando nuevos datos iniciales y de contorno desarrollados en nuestro trabajo, cuya implementación no era totalmente necesaria en este caso, pero su utilización podría ser necesaria para un problema donde se necesite una evolución lo más suave posible, por ejemplo para el caso de una esfera conductora viajando a altas velocidades a través de un campo magnético uniforme, condiciones de contorno muy delicadas son necesarias sobre la superficie de la esfera, y creemos que para este caso una evolución que comience de manera suave va a ser necesaria.

Se pudo mejorar notablemente el comportamiento de las líneas de campo magnético registradas en [1] para la solución estacionaria, allí las líneas de campo presentaban un comportamiento turbulento el cual resultaba poco satisfactorio. Pudimos resolver este conflicto mediante la implementación de operadores de diferencia finita de menor orden en las regiones cercanas a la hoja de corriente. Esta hoja de corriente se presenta como una región de forma lobular detrás del agujero negro en el plano $z = 0$ y su tamaño aumenta con la velocidad, región donde el código se encarga de recortar el campo eléctrico con el fin de preservar la dominancia magnética.

Para calcular el flujo electromagnético en el referencial solidario al plasma encontramos las dos cantidades $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, ambas presentan *jets* que presentan una mejor colimación que los encontrados en [1]. Para poder obtener a partir de estas cantidades flujo electromagnético colimado positivo fue necesario restar los campos de fondo (determinados por el dato inicial) que contaminaban el flujo final, así como se hace en los trabajos [4][5].

Las integrales de los flujos $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ fueron realizadas en superficies elipsoidales que representan la superficie de una esfera de radio 90M en el referencial solidario al plasma, se realizaron integrales de el flujo electromagnético total y del flujo electromagnético colimado. Las cantidades $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ presentan un comportamiento muy similar, pero existe entre ellas un factor de proporcionalidad dependiente de la velocidad cuyo origen todavía no podemos identificar. El comportamiento del flujo electromagnético integrado para el caso del agujero negro de Schwarzschild viajando con velocidades ortogonales al campo magnético asintóticamente uniforme es cuadrático en la velocidad de boost, este comportamiento ya había sido registrado por [4] pero solo hasta velocidades de 0,2, mientras que nosotros llegamos a comprobarlo para velocidades de hasta 0,8.

Al estudiar el comportamiento del flujo electromagnético para situaciones en que el ángulo χ formado entre la velocidad del agujero negro y el eje y en el plano (y,z) , se detectó que al inclinar esta velocidad se genera una redistribución en la potencia de los *jets*, donde ahora la potencia del *jet* superior es diferente a la del *jet* inferior. El poder de estos *jets* presenta la simetría de que el flujo para el *jet* superior para un ángulo χ , es igual al flujo para el *jet* inferior para un ángulo de $-\chi$. Por lo tanto el flujo colimado total es simétrico con respecto a χ y decreciente con el módulo de

χ .

Al estudiar los efectos de la rotación del agujero negro al implementar la métrica de Kerr con un parámetro adimensional de espín $a = 0,9$, se corroboró el comportamiento subdominante ante la traslación predicho por [7], y se llegó a la conclusión de que el incremento del flujo electromagnético colimado registrado por [4] para agujeros negros con velocidades ortogonales al campo magnético uniforme, se mantiene solamente para velocidades bajas ($\approx 0,2$) y que para poder preservar este incremento es necesario alinear alguno de los *jets* con el eje de rotación del agujero negro. Este último resultado es interesante ya que no había sido observado en estudios anteriores y su carácter predictivo puede llegar ser importante en el aspecto observacional.

0.9.1. Perspectivas futuras

Tenemos como perspectivas futuras en principio 3 tareas por realizar:

- Entender la discrepancia entre las cantidades $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, creemos que el entender esto también podría ayudar a entender cual de estas dos cantidades es mejor como medida del flujo electromagnético, y si es posible tratar de ver cual de estas dos cantidades da una mejor descripción para regiones no tan lejanas al agujero negro.
- Tenemos como un objetivo a corto plazo tratar con este esquema numérico el problema de una esfera conductora viajando a altas velocidades en un campo magnético uniforme, para este escenario utilizaríamos las condiciones de contorno que están siendo desarrolladas por otro miembro del grupo para realizar simulaciones numéricas de una estrella de neutrones. Es también, en principio, posible tratar el problema de la estrella de neutrones en la situación física que estudiamos en este trabajo, debido a que el tratamiento de este problema es más delicado, primero empezaremos por el caso de la esfera conductora.
- Uno de los objetivos que habíamos planteado para este trabajo fue el de la implementación de un método Runge-Kuta IMEX para lidiar con el conflicto de la violación de la dominancia magnética de una manera un poco más prolija que al recortar el campo eléctrico, desgraciadamente el tiempo no fue suficiente para implementar este método en el marco de este trabajo final. Queda pendiente entonces la implementación de este método y un estudio más profundo que compare los distintos métodos para asegurar la dominancia magnética.

Tablas

v/c	Flujo colimado $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$	Flujo colimado $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$	Flujo total $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$	Flujo total $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$
0,1	0,2149	0,2297	9,0981	9,8367
0,2	0,8364	0,8912	10,2857	11,1665
0,3	2,2569	2,4531	12,1217	13,2428
0,4	4,5065	4,8415	14,9657	16,4866
0,5	7,9534	8,6393	18,4102	20,5508
0,6	12,5993	13,8543	21,9558	25,1718
0,7	18,3902	20,8596	22,6493	27,8974
0,8	24,5239	29,6693	3,4640	13,4091

Cuadro 1: Tabla de flujos $\Phi_{\mathcal{E}boost(k)}$ y $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$ colimados y totales, integrados sobre la superficie de un elipsoide que corresponde a una esfera de radio 90M en el referencial solidario al plasma.

Ángulo (radianes)	Flujo <i>jet</i> superior	Flujo <i>jet</i> inferior	Flujo colimado total	Flujo total
-0,1963	3,4008	4,8907	8,2915	20,5475
-0,3927	2,5372	5,0698	7,6070	20,1382
-0,5890	1,6859	4,2978	5,9837	18,8762
-0,7854	0,9269	2,2628	3,1898	16,2406
0	4,3186	4,3207	8,6393	20,5508
0,1963	4,8959	3,3909	8,2868	20,5569
0,3927	5,0070	2,5264	7,5334	20,1282
0,5890	4,3193	1,6648	4,1912	18,9045
0,7854	2,2377	0,9095	3,1472	16,2192

Cuadro 2: Tabla de flujos $\Phi_{\mathcal{E}boost(n)}$, integrados sobre la superficie de un elipsoide que corresponde a una esfera de radio 90M en el referencial solidario al plasma, para un agujero negro de Schwarzschild que viaja con una velocidad de módulo $v = 0,5$ y que forma un ángulo χ con el eje y en el plano (y-z).

v/c	Flujo colimado $\Phi_{\mathcal{E}_{boost(k)}$ Schwarzschild	Flujo colimado $\Phi_{\mathcal{E}_{boost(k)}$ Kerr ($a = 0, 9$)
0,1	0,2149	0,4276
0,2	0,8364	1,0341
0,3	2,2569	2,2453
0,4	4,5065	4,5350
0,5	7,9534	7,6904

Cuadro 3: Tabla de flujos $\Phi_{\mathcal{E}_{boost(k)}}$ colimados y totales, integrados sobre la superficie de un elipsoide que corresponde a una esfera de radio 90M en el referencial solidario al plasma, para un agujero negro de Schwarzschild y uno de Kerr ($a = 0, 9$), en función de la velocidad del boost.

v/c	Flujo colimado $\Phi_{\mathcal{E}_{boost(n)}$ Schwarzschild	Flujo colimado $\Phi_{\mathcal{E}_{boost(n)}$ Kerr ($a = 0, 9$)
0,1	0,2297	0,4611
0,2	0,8912	1,0970
0,3	2,4531	2,4384
0,4	4,8414	4,8600
0,5	8,6393	8,3402

Cuadro 4: Tabla de flujos $\Phi_{\mathcal{E}_{boost(n)}}$ colimados y totales, integrados sobre la superficie de un elipsoide que corresponde a una esfera de radio 90M en el referencial solidario al plasma, para un agujero negro de Schwarzschild y uno de Kerr ($a = 0, 9$), en función de la velocidad del boost.

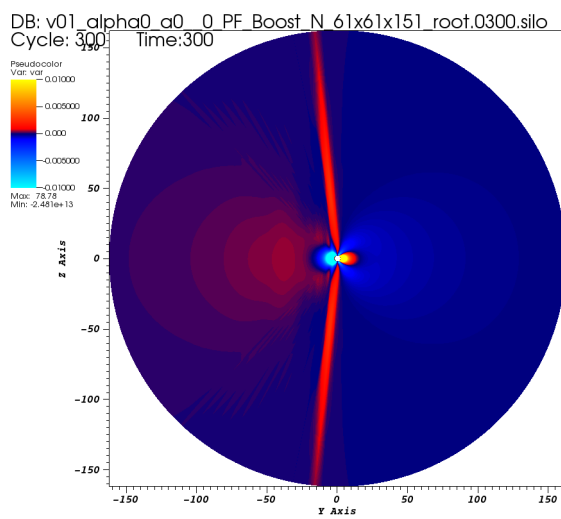
v/c	Flujo <i>jet</i> superior Schwarzschild	Flujo <i>jet</i> superior Kerr	Flujo <i>jet</i> superior Kerr alineado
0,1	0,1073	0,2137	0,2285
0,2	0,4172	0,5167	0,5476
0,3	1,1272	1,1218	1,2401
0,4	2,2528	2,2633	2,4034
0,5	3,9771	3,8440	4,2547

Cuadro 5: Tabla de flujos $\Phi_{\mathcal{E}_{boost(k)}}$, integrados en la región correspondiente al *jet* superior, para un agujero negro de Schwarzschild, uno de Kerr ($a = 0, 9$) uno de Kerr ($a = 0, 9$) para el cual el eje de simetría esta alineado con la dirección *jet* superior.

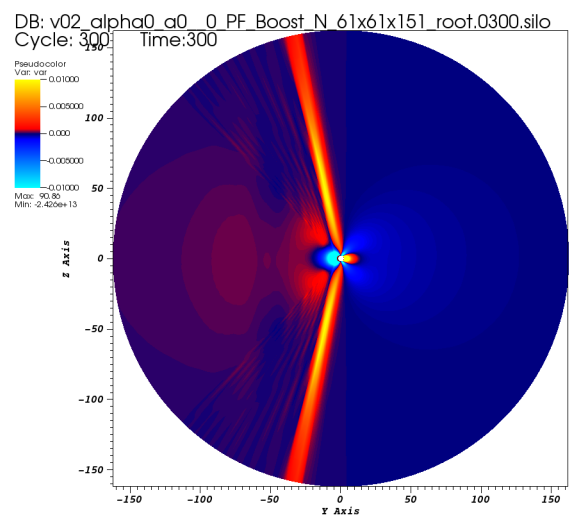
v/c	Flujo <i>jet</i> superior Schwarzschild	Flujo <i>jet</i> superior Kerr	Flujo <i>jet</i> superior Kerr alineado
0,1	0,1148	0,2304	0,2592
0,2	0,4445	0,54818	0,5833
0,3	1,2249	1,2182	1,3428
0,4	2,4199	2,4329	2,5810
0,5	4,3186	4,1677	4,6137

Cuadro 6: Tabla de flujos $\Phi_{\mathcal{E}_{boost(n)}}$, integrados en la región correspondiente al *jet* superior, para un agujero negro de Schwarzschild, uno de Kerr ($a = 0, 9$) uno de Kerr ($a = 0, 9$) para el cual el eje de simetría esta alineado con la dirección *jet* superior.

Gráficos de $\Phi_{\mathcal{E}boost}(k)$

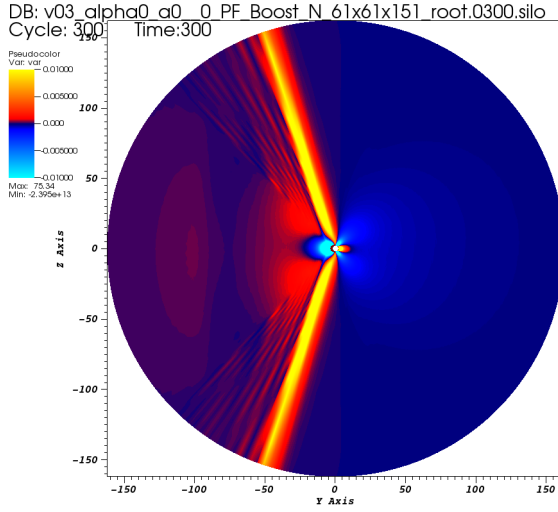


user: ramiro
 Mon Feb 26 01:31:38 2018

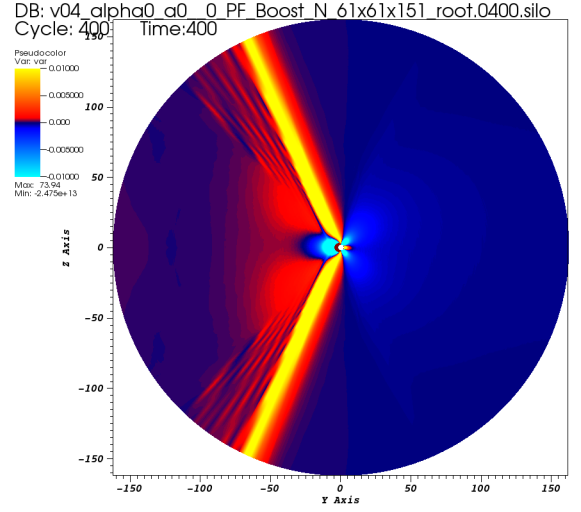


user: ramiro
 Mon Feb 26 01:10:59 2018

Figura 36: Flujo de Poynting $\Phi_{\mathcal{E}boost}(k)$ en el plano (y-z), para $t= 300M$, para un agujero negro con velocidad $v = 0,1$ (izquierda) y $v = 0,2$ (derecha).

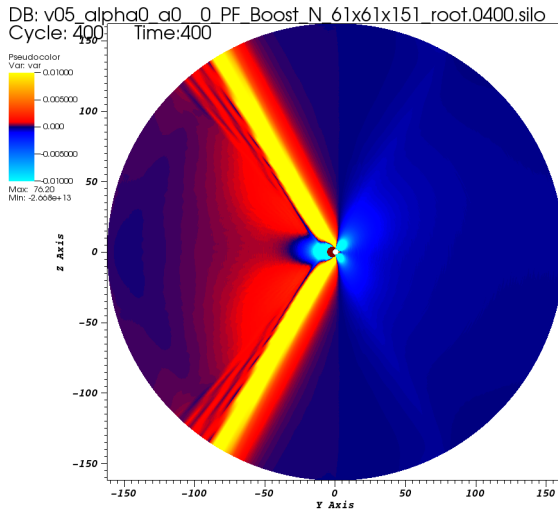


user: ramiro
Tue Feb 20 14:27:45 2018

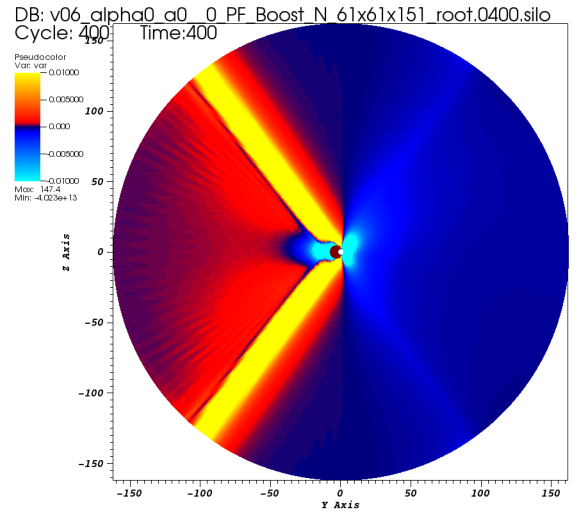


user: ramiro
Tue Feb 20 14:32:24 2018

Figura 37: Flujo de Poynting $\Phi_{\mathcal{E}boost}(k)$ en el plano (y-z), para $t=300M$ en el plano (y-z) (izquierda) $t=400$ (derecha), para un agujero negro con velocidad $v=0,3$ (izquierda) y $v=0,3$ (derecha).

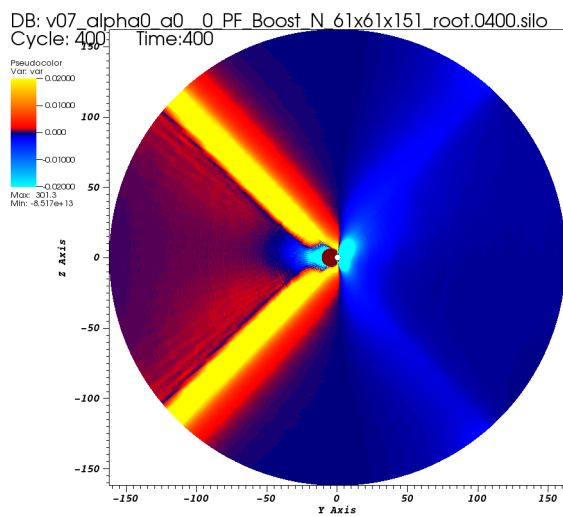


user: ramiro
Tue Feb 20 14:35:46 2018

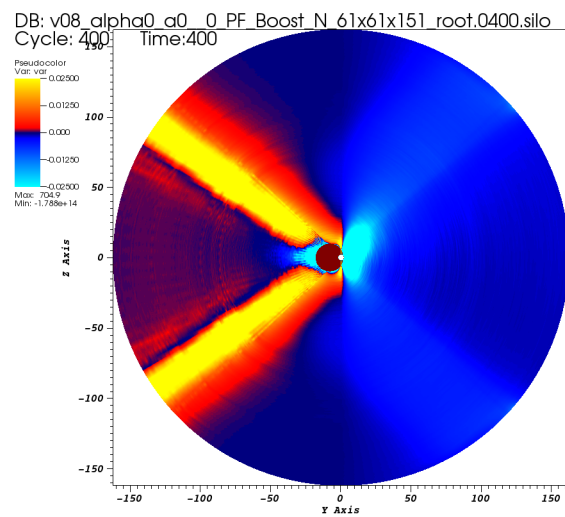


user: ramiro
Tue Feb 20 14:39:24 2018

Figura 38: Flujo de Poynting $\Phi_{\mathcal{E}boost}(k)$ en el plano (y-z), para $t=400M$, para un agujero negro con velocidad $v=0,5$ (izquierda) y $v=0,6$ (derecha).



user: ramiro
 Tue Feb 20 14:45:01 2018



user: ramiro
 Tue Feb 20 14:49:48 2018

Figura 39: Flujo de Poynting $\Phi_{\mathcal{E}_{boost}}(k)$ en el plano (y-z), para $t=400M$, para un agujero negro con velocidad $v=0,7$ (izquierda) y $v=0,8$ (derecha).

Bibliografía

- [1] B. Sbarato, “Formación de jets por agujeros negros de schwarzschild moviéndose a altas velocidades con respecto a un campo magnético,” *Trabajo especial de licenciatura en física, dirigida por el Dr. Oscar Reula*, Córdoba, Argentina, 2017.
- [2] F. L. Carrasco and O. A. Reula, “Novel scheme for simulating the force-free equations: Boundary conditions and the evolution of solutions towards stationarity,” *Phys. Rev. D*, vol. 96, p. 063006, Sep 2017.
- [3] R. F. Penna, “Energy extraction from boosted black holes: Penrose process, jets, and the membrane at infinity,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, p. 084044, Apr 2015.
- [4] D. Neilsen, L. Lehner, C. Palenzuela, E. W. Hirschmann, S. L. Liebling, P. M. Motl, and T. Garrett, “Boosting jet power in black hole spacetimes,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 108, no. 31, pp. 12641–12646, 2011.
- [5] D. Alic, P. Moesta, L. Rezzolla, O. Zanotti, and J. L. Jaramillo, “Accurate simulations of binary black hole mergers in force-free electrodynamics,” *The Astrophysical Journal*, vol. 754, no. 1, p. 36, 2012.
- [6] C. Palenzuela, L. Lehner, and S. L. Liebling, “Dual jets from binary black holes,” *Science*, vol. 329, no. 5994, pp. 927–930, 2010.
- [7] V. S. Morozova, L. Rezzolla, and B. J. Ahmedov, “Nonsingular electrodynamics of a rotating black hole moving in an asymptotically uniform magnetic test field,” *Phys. Rev. D*, vol. 89, p. 104030, May 2014.
- [8] M. Lyutikov, “Schwarzschild black holes as unipolar inductors: Expected electromagnetic power of a merger,” *Phys. Rev. D*, vol. 83, p. 064001, Mar 2011.
- [9] R. D. Blandford and R. L. Znajek, “Electromagnetic extraction of energy from kerr black holes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 179, no. 3, pp. 433–456, 1977.
- [10] F. CARRASCO, “Aplicaciones analíticas y numéricas de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales a ciertos problemas de evolución sobre espacios curvos,” *DFis196, Tesis doctoral en física, dirigida por el Dr. Oscar Reula*, Córdoba, Argentina, 2016.
- [11] S. S. Komissarov, “Time-dependent, force-free, degenerate electrodynamics,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 336, no. 3, pp. 759–766, 2002.
- [12] C. Palenzuela, T. Garrett, L. Lehner, and S. L. Liebling, “Magnetospheres of black hole systems in force-free plasma,” *Phys. Rev. D*, vol. 82, p. 044045, Aug 2010.
- [13] S. S. Komissarov, “Electrodynamics of black hole magnetospheres,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 350, no. 2, pp. 427–448, 2004.

- [14] A. Dedner, F. Kemm, D. Kröner, C.-D. Munz, T. Schnitzer, and M. Wesenberg, “Hyperbolic Divergence Cleaning for the MHD Equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 175, pp. 645–673, Jan. 2002.
- [15] M. Cécere, L. Lehner, and O. Reula, “Constraint preserving boundary conditions for the ideal newtonian mhd equations,” vol. 179, pp. 545–554, 10 2008.
- [16] G. Calabrese, L. Lehner, O. Reula, O. Sarbach, and M. Tiglio, “Summation by parts and dissipation for domains with excised regions,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 21, no. 24, p. 5735, 2004.
- [17] L. Lehner, O. Reula, and M. Tiglio, “Multi-block simulations in general relativity: high-order discretizations, numerical stability and applications,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 22, no. 24, p. 5283, 2005.
- [18] R. M. Wald, “Black hole in a uniform magnetic field,” *Phys. Rev. D*, vol. 10, pp. 1680–1685, Sep 1974.
- [19] C. Palenzuela, L. Lehner, O. Reula, and L. Rezzolla, “Beyond ideal mhd: towards a more realistic modelling of relativistic astrophysical plasmas,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 394, no. 4, pp. 1727–1740, 2009.
- [20] H. M. F. S. D. Drell and M. A. Ruderman *Journal of Geophysical Research*, vol. 70, no. 3131, 1965.