Deformaciones de álgebras de Lie nilpotentes filiformes

Sonia Vanesa Vera

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctora en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Febrero de 2017

©FaMAF-UNC

Director: Dr. Paulo Tirao

Deformaciones de álgebras de Lie nilpotentes filiformes por Sonia Vanesa Vera se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 2.5 Argentina.

Esta tesis está dedicada a
mi mamá, mis hermanos,
mi sobrina Ahilen
y David.

Resumen

Michel Vergne inició el estudio de la geometría de la variedad algebraica de todas las álgebras o corchetes de Lie nilpotentes mostrando el rol distintivo de las álgebras de Lie nilpotentes filiformes, aquéllas de nilíndice máximo. Un concepto fundamental en este marco, es el de rigidez. Un álgebra de Lie μ se dice rígida si todas las álgebras de Lie en algún entorno de μ, son isomorfas a μ.

Esta tesis está motivada por el problema conocido como Conjetura de Vergne, abierto desde 1970, que afirma que ningún corchete de Lie nilpotente es rígido y sobre el que se sabe muy poco al día de hoy.

Una deformación lineal de un corchete de Lie μ es una familia de corchetes de Lie μ_t de la forma

$$\mu_t = \mu + t\varphi,$$

donde φ es un corchete de Lie que es un 2-cociclo de μ.

Si para todo t pequeño μ_t no es isomorfo a μ, entonces la deformación es no trivial y μ no es rígido.

En esta tesis abordamos el problema de rigidez de álgebras filiformes complejas. En primer lugar presentamos un método general para construir deformaciones lineales de álgebras de Lie, que se adapta muy bien y resulta efectivo en el caso de álgebras filiformes. Usando este método construimos deformaciones lineales para cualquier filiforme. Para dimensiones ≤ 11, en las que es posible describir las variedades de filiformes de manera accesible, mostramos que las deformaciones construidas son no triviales en un abierto denso, para luego deducir el resultado principal de la tesis:

Teorema. *No existen álgebras de Lie filiformes complejas rígidas en dimension* ≤ 11.

Para probar este resultado recurrimos a algunas herramientas de la geometría algebraica y en particular a la descomposición en componentes irreducibles de las variedades consideradas. Este punto es la principal dificultad para poder avanzar en dimensiones mayores y en el caso general.

Palabras claves: álgebras de Lie filiformes, deformaciones lineales, rigidez, componentes irreducibles, variedad.

2010 Mathematics subject Classification: 17B30, 17B56, 17B40.

Abstract

Michele Vergne started the study of the geometry of the algebraic variety of all nilpotente Lie algebras or brackets showing the distinctive role of the filiform nilpotent algebras, those of nilindice maximal. A fundamental concept in this frame is that of rigidity. A Lie algebra μ is said to be rigid if all other Lie algebra in a μ neighborhood are isomorphic to μ.

This thesis is motivated by the problem known as Vergne's Conjecture, open from 1970, about wich very little is know up to date, that states that no nilpotent Lie bracket is ever rigid.

A linear deformation of a Lie bracket μ is a family of Lie brackets μ_t, of the form

$$\mu_t = \mu + t\varphi$$

where φ is Lie bracket which is a 2-cocycle of μ.

If for all small t, μ_t is not isomorphic to μ, then the deformations is non trivial and μ is not rigid.

In this thesis we approached the problem of rigidity of complex filiform Lie algebras. First, we present a general method for constructing linear deformations of Lie algebras that adapt very well and result effective in the case of filiform algebras. Using this method we constructed linear deformations for any filiform. For dimension ≤ 11, in which it is possible to describe the variety of filiforms in an accessible manner, we showed that the deformations constructed are non trivial in a open dense, to deduce later the main result of the thesis:

Theorem. *There are not complex filiform Lie algebras of dimension* ≤ 11.

To prove this result we resorted to some tools of algebraic geometry and in particular to the decomposition in irreducible components of the considered varieties. This point is the main difficulty that we encountered to be able to advance in larger dimensions and in the general case.

Key words: filiforms Lie algebras, linear deformations, rigidity, irreductible components, va-tiety.

2010 Mathematics subject Classification: 17B30, 17B56, 17B40.

Agradecimientos

Realizar un trabajo tán arduo y lleno de dificultades como el desarrollo de una tesis doctoral hubiese sido imposible sin la participación de personas e instituciones que hán facilitado las cosas para que este trabajo llegue a un feliz término.
Por ello, es para mi un verdadero placer utilizar este espacio para expresar mis agradecimientos a cada uno de ellos.

Primero y antes que nada, quiero agradecer a *Dios* por haberme dado una segunda oportunidad de vida, por cuidarme, por estar conmigo en cada paso que doy, por iluminar mi mente y mi corazón y por haber puesto en mi camino personas maravillosa, muchas de las cuales han sido mi soporte en momentos de angustia y desesperación, como así también de festejos y alegrías y mi compañia durante todo el periodo de estudio.

Agradezco infinitamente a mi familia, que siempre estuvo presente en cada paso de mi vida. A mi mamá y mis hermanos por no soltar nunca mi mano, por el apoyo, el ánimo y la compañía. Gracias por darme la fortaleza necesaria para seguir adelante. A mi sobrina Ahilen, que a pesar de la distancia,con solo escuchar su voz alegra mis días. A mi padrino Jorge, mi madrina Ofélia y sus respectivas familias, por estar siempre presentes y por quererme como a una hija. A mis tíos Carlos y Mary, por acompañarme, ayudarme y brindarme todo su apoyo durante estos años en Córdoba. A mi tío Pedro que aunque no esté físicamente seguramente desde el cielo está festejando cada uno de mis logros y enviándome todas la fuerzas necesarias para mantenerme de pié.

A mi amor David, por ser la persona que ha compartido la mayor parte de este tiempo a mi lado, por hacer que todo lo malo se convierta en bueno, por quererme, amarme, cuidarme y por sobre todo comprenderme y caminar a mi lado.

De igual forma, agradezco de manera muy especial a Paulo, por aceptarme para realizar esta tesis bajo su dirección. Por su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar mis ideas que han sido un aporte invaluable, no solo en el desarrollo de mi tesis sino en mi formación como matemática. Le agradezco también el haberme facilitado los medios necesarios para llevar a cabo todas mis actividades durante estos años. MUCHAS GRACIAS PAULO!!!

A los profesores de FaMAF de quienes he aprendido mucho. A la UNSE y en especial a la FCEyT por confiar en mi para la realización de este doctorado, a los profesores de la misma por haberme brindado la base para esta nueva etápa. A CONICET, SeCyT y FONCyT por el apoyo económico. A Nancy y Claudia por su toda su ayuda y su buena predisposición.

Quiero expresar también mi más sincero agradecimiento a Gastón por la colaboración, paciencia, dedicación y apoyo brindado durante mi preparación para el exámen de doctorado. Al Dr. Oscar Bregas y la Dra. Isabel Dotti por brindarme su ayuda cuando lo necesitaba y por ser de esas personas con las cual se puede contar siempre.

A mis amigos de la facultad, a Ceci por ser como una hermana, a Mely por cuidarme, mimarme y aconsejarme, a Johanna por su buena onda y amistad, a los colombianos Javier, Augusto, Edwin, Iván y Sergio por ser excelentes personas, por haberme adoptado como una Colombiana más y por estar presentes cada vez que los necesito. Gracias Javier por haberme recibido en tu casa de Colombia, a Mily, Ely, Mari, Euge, Lucía, Gri, Rocío, Andru, Kari, Fiore, Marcos, Denis, Mauro, Diego por su amistad, por haberme acompañado siempre y por haber estado presente tanto en los buenos como en los malos momentos. A mis compañeros de oficina, por la buena onda, el compañerísmo y por hacer de todos los día un día de alegría. Gracias a todos por haberme hecho el aguante durante todo ese 2016 difícil para mi.

En general, quiero agradecer a todas las personas que han vivido conmigo la realización de esta tesis doctoral, les agradezco desde lo más profundo de mi corazón el haberme brindado todo el apoyo, colaboración, ánimo y por sobre todo cariño y amistad.

Índice general

Introducción

Este trabajo se inscribe en el estudio de la variedad algebraica $\mathfrak{L}^n$ de todas las álgebras de Lie complejas de dimensión n, esto es el conjunto de todos los productos o corchetes de Lie en un espacio vectorial fijo V de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Así $\mathfrak{L}^n$ es una subvariedad de la variedad afín $\mathrm{Hom}(V \times V, V)$, de mapas bilineales que son alternantes y satisfacen la identidad de Jacobi. Fijada una base de V, un corchete de Lie queda determinado por sus constantes de estructura.
Los conjuntos de corchetes de Lie nilpotentes $\mathfrak{N}^n$ y solubles $\mathfrak{S}^n$ son subvariedades algebraicas de interés propio.
Cabe destacar que la variedad $\mathfrak{L}^n$ posee la topología Zariski.
La acción natural de $GL(V)$ en V induce una acción en $\mathrm{Hom}(V \times V, V)$, dada por

$$g \bullet \mu(x, y) = g\mu(g^{-1}x, g^{-1}y)$$

para g en $GL(V)$, μ en $\mathrm{Hom}(V \times V, V)$ y x, y en V. Los espacios de corchetes de Lie $\mathfrak{L}^n$, $\mathfrak{N}^n$ y $\mathfrak{S}^n$ son invariantes por esta acción. La órbita de $\mathcal{O}(\mu)$, de un corchete μ, es exactamente la clase de isomorfismo de Lie de μ. La comprensión de estas variedades es de mucho interés en la actualidad, entre otras cosas, por su íntima relación con el problema de clasificación de álgebras de Lie.

Un álgebra de Lie $\mu \in \mathfrak{L}^n$ es *rígida* si su órbita $\mathcal{O}(\mu)$ es abierta en $\mathfrak{L}^n$, es decir si todas las álgebras de Lie en un entorno de μ son isomorfas a μ. Cabe mencionar que para cuerpos más generales la única topología presente es la de Zariski y entonces μ es rígida si su órbita $\mathcal{O}(\mu)$ es un abierto Zariski. Los primeros resultados de álgebras de Lie rígidas se deben a Gerstenhaber, Ninjenhuis y Richardson [NR], que transformaron los problemas topológicos relacionados con rigidez en problemas cohomológicos.

Un concepto relevante al de rigidez es el de deformación. En un sentido general, una deformación de un corchete de Lie es una modificación continua de sus constantes de estructura. Así se pueden considerar deformaciones de μ dadas como una curva μ_t en $\mathfrak{L}^n$, con $t \in \mathbb{C}$, que comienza en $\mu_0 = \mu$. Definiciones más generales de deformaciones fueron dadas por Gerstenhaber en el año 1964 y desarrolladas por Ninjenhuis y Richardson.

Una deformación μ_t de μ es trivial si μ_t es isomorfa a μ para todo t en un entorno de 0, caso contrario se dice que es no trivial. Así un álgebra de Lie con una deformación μ_t no trivial, no es rígida.

A lo largo de nuestro trabajo consideraremos deformaciones lineales para mostrar que ciertas familias de álgebras nilpotentes, no son rígidas. Una deformación lineal de $\mu \in \mathfrak{L}^n$ es una deformación μ_t tal que

$$\mu_t = \mu + t\varphi$$

donde φ es un corchete de Lie y un 2-cociclo de μ.

Esta tesis está motivada por un problema abierto por casi 50 años conocido como *Conjetura de Vergne*:

No existen álgebras de Lie nilpotentes rígidas en la variedad $\mathfrak{L}^n$.

Michel Vergne [VM1] inició el estudio de la variedad $\mathfrak{N}^n$ de álgebras de Lie nilpotentes, mostrando el rol distintivo que tienen aquellas de nilíndice máximo o filiformes. El espacio de filiformes $\mathfrak{F}^n$ es un abierto (Zariski) de la variedad $\mathfrak{N}^n$, luego una variedad en sí mismo, que es denso en todas las componentes irreducibles de $\mathfrak{N}^n$ a las que corta.

En 1984 Carles [CR1, CR2] probó esta conjetura para álgebras nilpotentes con un ideal de codimensión 1 de rango ≥ 1, es decir con un ideal que admite al menos una derivación semisimple. Este mismo resultado se sigue también del trabajo de Grunewald y O'Halloran [GO] en el que construyen explícitamente deformaciones lineales no triviales para esa misma familia de álgebras. Estas deformaciones son siempre solubles no nilpotentes.

Por un lado se sigue que todas las álgebras nilpotentes de dimensión ≤ 7 tienen deformaciones no triviales, pues todas las de dimensión ≤ 6 tienen derivaciones semisimples. Por otro lado, estos resultados no abarcan a todas las álgebras nilpotentes ya que existen álgebras nilpotentes sin derivaciones semisimples, denominadas característicamente nilpotentes. Más aún, hay álgebras nilpotentes con todos sus ideales de codimensión 1 sin derivaciones semisimples. Las álgebras característicamente nilpotentes fueron introducidas por Dixmier y Lister en el año 1957. En [DL] exhibieron un álgebra de Lie nilpotente de dimensión 8 sin derivaciones semisimples, mostrando que el recíproco del teorema de Jacobson: *"Toda álgebra de Lie (sobre un cuerpo de característica 0) con una derivación semisimple, es nilpotente"*, es falso.

El objetivo principal de esta tesis es la construcción sistemática de deformaciones no triviales de álgebras filiformes, para así avanzar en la demostración de la Conjetura de Vergne para esta clase distinguida de álgebras nilpotentes.

Álgebras filiformes

Un primer ejemplo de álgebra de Lie filiforme de dimensión n, llamada *filiforme estándar*, es el del álgebra $\mathfrak{f}$ presentada en una base $\{x_0, \dots, , x_{n-1}\}$ con corchete μ_0:

$$\mu_0(x_0, x_j) = x_{j+1}, \qquad j = 1, \dots, n-2.$$

Michel Vergne mostró que toda álgebra de Lie filiforme compleja μ, de dimensión n, se puede escribir en una base llamada *estándar* como

$$\mu = \mu_0 + \Psi,$$

donde Ψ es un 2-cociclo de la cohomologia de Chevalley de μ_0 de la forma

$$\Psi = \sum_{(k,s)\in\Delta} a_{k,s}\psi_{k,s}$$

para ciertos 2-cociclos $\psi_{k,s}$ específicos, $a_{k,s} \in \mathbb{C}$ y $\Delta = \{(k, s)/1 \leq k \leq [(n-2)/2], 2k+1 \leq s \leq n-1\}$.

A partir de esta descripción, la ecuación de Jacobi para μ se escribe como un sistema de ecuaciones polinomiales en los coeficientes $\{a_{k,s}\}$, resultando así una parametrización de la variedad de filiformes. Esta parametrización es accesible para dimensiones bajas y permite, por ejemplo, descomponer la variedad de filiformes en sus componentes irreducibles.

El problema de clasificación de las álgebras de Lie filiformes ha sido abordado por varios autores en muchos trabajos. Sin embargo está lejos de ser entendido y mucho menos completado. Esencialmente han sido clasificadas solamente para dimensiones bajas. Estas clasificaciones están disponibles como largas listas de álgebras presentadas exhibiendo explícitamente sus corchetes en alguna base.

En el año 1988, Ancochéa-Bermudez y Goze [AG1] clasificaron las álgebras de Lie filiformes de dimensión ≤ 8, sin embargo esta lista estaba incompleta y los mismos autores la rectifican en 1992 [AG3] al mismo tiempo en que lo hizo también Seely [S]. En el año 1991 Gómez y Echarte [GE] clasificaron las álgebras de Lie filiformes de dimensión 9, mientras que las de dimensión 10 fueron clasificadas en 1994 por Boza, Frediani y Nuñez [BEN]. En 1993, Gómez, Jiménez-Marchán y Khakimdjanov [GJK2] presentan una clasificación de todas las álgebras de Lie filiformes de dimensión ≤ 11. Las de dimensión 12 fueron clasificadas en el año 1997 por Boza, Fedriani y Nuñez [BFN2]. Cabe mencionar que ellos presentan una lista con 496 entradas, de las cuales 386 son familias, algunas con varios parámetros.

Un resultado más relevante a nuestro trabajo que las clasificaciones completas, es la descomposición de la variedad de filiformes $\mathfrak{F}^n$ en sus componentes irreducibles. Khakimdjanov las describe en [KY] para $4 \leq n \leq 11$. Debemos mencionar que en ese trabajo las componentes irreducibles están solamente presentadas. A pesar de haber intentando con insistencia no hemos encontrado en la literatura y ni a través de ningún autor una prueba completa. Por esto hemos incluido una prueba completa en el Capítulo 6, relegando al Apéndice alguna de las muchas cuentas necesarias.

Resultados principales y contenido de la tesis

El resultado principal de esta tesis es la construcción de deformaciones no triviales para álgebras filiformes de dimensiones bajas, del cual se puede deducir la no existencia de álgebras de Lie filiformes rígidas de dimensión ≤ 11, tal como lo asegura la Conjetura de Vergne. Vale la pena notar que, dado que las deformaciones construidas son filiformes (en dimensiones ≥ 7), se sigue que no hay filiformes rígidas en la subvariedad de filiformes, un resultado más fuerte que el anterior.

Para dimensiones muy bajas ≤ 6 la situación es especial, pues hay solo una cantidad finita de álgebras nilpotentes (salvo isomorfismo) y no hay ninguna rígida como mencionamos más arriba. Por lo tanto consideramos solamente filiformes de dimensión ≥ 7.

En todo el trabajo las álgebras filiformes se describen en una base estándar y las variedades de filiformes en las distintas dimensiones, entre 7 y 11 inclusive, se consideran con la parametrización descripta más arriba.

Como primer paso proponemos un método para construir deformaciones lineales $\mu_t = \mu + t\varphi_D$ de un álgebra de Lie filiforme μ a partir de su conmutador, un ideal de codimensión 2, y una derivación D de éste. Eligiendo una derivación nilpotente estándar del conmutador, obtenemos deformaciones lineales filiformes para cualquier filiforme dada. Una gran cantidad de experimentos muestran que éstas son siempre no triviales, sin embargo no podemos exhibir ningún invariante conocido que lo pruebe.

Para probar la no trivialidad de las deformaciones construidas, mostramos que no es posible la existencia de un isomorfismo entre la filiforme considerada y su deformación estudiando detalladamente las ecuaciones correspondientes. Primero observamos que un tal isomorfismo tendría una forma particular escrito en las bases estándar de las filiformes involucradas para luego probar que, para casi todo el espacio de parámetros, las ecuaciones de isomorfismo solo tienen solución para

$t = 0$. Más precisamente probamos que esto sucede en un abierto Zariski. Luego mostramos que este abierto corta a todas las componentes irreducibles de la variedad de filiformes, resultando así denso en toda la variedad, para finalmente deducir que no hay filiformes rígidas en la variedad de filiformes

Capítulos 1 y 2

El Capítulo 1 contiene los preliminares básicos sobre álgebras de Lie y una breve introducción al problema de clasificación. Se definen las clases de álgebras de Lie solubles y nilpotentes, y también nilpotentes filiformes con las que trabajaremos. También se presentan las herramientas básicas que utilizaremos en el resto de la tesis. Entre ellas derivaciones e isomorfismos y algo de cohomología, especialmente de grado 2 y con coeficientes en la representación adjunta.

En el Capítulo 2 incluimos los preliminares de geometría algebraica que necesitamos. Repasaremos las definiciones de variedades algebraicas, componentes irreducibles y bases de Groebner, incluyendo el algoritmo de Buchberger para calcular bases de Groebner y el enunciado del Teorema de Lasker-Noether de descomposición primaria de ideales.

Capítulo 3

En este capítulo presentamos la variedad algebraica de álgebras de Lie complejas de dimensión n, $\mathfrak{L}^n$, y las subvariedades de nilpotentes $\mathfrak{N}^n$ y filiformes $\mathfrak{F}^n$. Damos la definición de álgebra de Lie rígida e introducimos las deformaciones lineales y presentamos la construcción de Grunewald-O'Halloran mostrando como construir deformaciones lineales solubles no nilpotentes de ciertas álgebras nilpotentes.

En este capítulo introducimos un nuevo método bastante general para la costrucción de deformaciones lineales que se adapta muy bien a álgebras de Lie filiformes (Teorema 3.6).

Teorema. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete μ y sea $\mathfrak{K}$ ideal de $\mathfrak{g}$ de codimensión 2 tal que $\mu(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{K}$. Sea $\langle x_0, x_1\rangle$ complemento directo de $\mathfrak{K}$ con $\mathfrak{g} = \langle x_0, x_1\rangle \oplus \mathfrak{K}$.*

Si $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{K})$ es tal que $D \circ \mathrm{ad}_{x_0} = \mathrm{ad}_{x_0} \circ D$, entonces el mapa bilineal antisimétrico φ_D definido por,

$$\varphi_D(x_0, x_1) = 0, \quad \varphi_D(x_0, k) = 0, \quad \varphi_D(x_1, k) = D(k), \quad \varphi_D(k, k') = 0,$$

para todo $k, k' \in \mathfrak{K}$, es un corchete de Lie y un 2-cociclo de $\mathfrak{g}$. Por lo tanto $\mu_t = \mu + t\varphi_D$ es una deformación lineal de μ.

Capítulo 4

En este capítulo presentamos la variedad de álgebras de Lie filiformes, escribiendo varios de los resultados de M. Vergne dados en [VM1], entre ellos: descripción del álgebra de Lie filiforme estándar μ_0, definición de base estándar para una álgebra filiforme dada, y la descripción de cualquier filiforme en términos de μ_0 y un 2-cociclo especial de μ_0.

Presentamos también la parametrización de las variedades de filiformes de dimensión $7 \leq n \leq 11$ dadas en [GJK1] y las componentes irreducibles de estas variedades descriptas por Khakimdjanov en [KY].

Luego, dada una filiforme $\mathfrak{f}$ con corchete μ, consideramos el conmutador $\mathfrak{K} = \mu(\mathfrak{f},\mathfrak{f})$ y mostramos la existencia de una derivación estándar de $\mathfrak{K}$ en las condiciones del Teorema 3.6 del Capítulo 3.

Teorema. *Sea $\mathfrak{f}$ un álgebra de Lie filiforme con base estándar $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ y corchete μ, y sea $\mathfrak{K} = \mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = \langle x_2, \ldots, x_{n-1}\rangle$ el conmutador de $\mathfrak{f}$, ideal de codimensión 2. La transformción lineal D de $\mathfrak{K}$ definida por*

$$\begin{aligned} Dx_2 &= x_{n-3} \\ Dx_3 &= x_{n-2} \\ Dx_4 &= x_{n-1} \\ Dx_i &= 0, \quad 5 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

es una derivación de $\mathfrak{K}$ que satisface $D \circ \mathrm{ad}_{x_0} = \mathrm{ad}_{x_0} \circ D$. Luego $\mu_t = \mu + t\varphi_D$ es una deformación lineal de μ.

Capítulos 5, 6 y 7

Estos capítulos constituyen el núcleo de esta tesis. En ellos en conjunto se prueba el siguiente resultado:

Teorema. *No existen álgebras de Lie filiformes rígidas de dimensión $n \leq 11$ en la variedad de álgebras de Lie $\mathfrak{L}^n$. Más aún, no hay álgebras de Lie filiformes de dimensión $7 \leq n \leq 11$ que sean rígidas en la variedad de álgebras de Lie filiformes $\mathfrak{F}^n$.*

En el Capítulo 5 tratamos los casos de dimensión $n = 7, 8$ y 9; para $n = 7$ y $n = 9$ las variedades de filiformes $\mathfrak{F}^n$ son irreducibles y para $n = 8$ tiene 2 componentes irreducibles. En todos estos casos la descripición de las variedades o sus componentes es más o menos sencilla y accesible para trabajar. Estos resultados se muestran en los Teoremas 5.2, 5.3, 5.4 y Corolario 5.5. En el Capítulo 6 tratamos solamente el caso de dimensión $n = 10$ y en el Capítulo 7 el caso de dimensión $n = 11$. Cuyos resultados se muestran en los Teoremas 6.4, 7.1 y los Corolario 6.5 y 7.2.

En primer lugar mostramos que en un cierto abierto de los parámetros $\{a_{k,s}\}$, un isomorfismo entre la deformación lineal μ_t construida anteriormente y μ tiene una forma particular.

Lema. *Sean $n \geq 7$, g un isomorfismo dado entre μ_t y μ. Sea U el abierto de $\mathfrak{F}^n$ dado por $U = \{a_{1,4} \neq 0\}$. Entonces, en el abierto U y respecto de bases estándar de μ_t y μ respectivamente, g es de la forma*

$$g = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & m_{1,1}^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{1,1}^3 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{1,1}^4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{n,3} & m_{n,4} & \cdots & m_{1,1}^n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

En la subvariedad de $\mathfrak{F}^n$ dada por $a_{1,4} = 0$ consideremos, el abierto $U = \{a_{1,5} \neq 0\}$. Entonces, en el abierto U, y respecto de bases estándares de μ_t y μ respectivamente, g es de la forma

$$g = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & m_{1,1}^3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{1,1}^4 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{1,1}^5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{n,3} & m_{n,4} & \cdots & m_{1,1}^{n+1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Utilizando este resultado estudiamos en detalle las ecuaciones de isomorfismo para g:

$$g\mu_t(x_i, x_j) - \mu(gx_i, gx_j) = 0.$$

En todos los casos encontramos distintos abiertos Zariski U, de cada componente irreducible para los cuáles se sigue que g es isomorfismo si y solo si $t = 0$. Por ejemplo para $n = 7$ la variedad $\mathfrak{F}^7$ es irreducible y el abierto mencionado es $U = \{a_{1,4} \neq 0\}$. Para $n = 9$ también la variedad $\mathfrak{F}^9$ es irreducible y el abierto referido es $U = \{a_{1,4} \neq 0, a_{2,6} \neq 0, a_{1,5} \neq 0, a_{2,6} \neq 0, a_{3,8} \neq 0, 3a_{2,6}a_{1,5}(a_{1,4} - a_{2,6}) - 2a_{2,7}a_{1,4}^2 \neq 0\}$. Estos abiertos son densos Zariski y luego densos euclídeos en cada componente irreducible, de lo que se deduce el Teorema enunciado más arriba.

La dificultad para $n = 10$ y $n = 11$ crece enormemente, resultando difícil identificar abiertos U adecuados, lo que se ve reflejado en la descripción de los mismos. En el caso de $n = 10$, por ejemplo, encontramos un abierto U de $\mathfrak{F}^{10}$, que corta a sus 3 componentes irreducibles, mientras que para $n = 11$, encontramos un U_1 y un U_2 abiertos respectivamente de cada una de las 2 componentes irreducibles de $\mathfrak{F}^{11}$.

Debemos mencionar que el resultado para $n = 7$ y $n = 8$ fue probado por Felipe Herrera-Granada en su tesis, siguiendo una estrategia caso por caso, utilizando alguna de las clasificaciones disponibles para filiformes en esas dimensiones. Las demostraciones están contenidas en los trabajos [HT1, HT2].

Por último, en el Capítulo 6, Teorema 6.1 y Corolario 6.3, están descriptos los argumentos que muestran que las componentes irreducibles presentadas anteriormente para $\mathfrak{F}^{10}$, en efecto lo son. Algunas de las muchas cuentas necesarias fueron relegadas al Apéndice.

Capítulo 1

Preliminares de álgebras de Lie y el problema de clasificación.

> Las álgebras de Lie se originaron en la geometría y las ecuaciones diferenciales, estas últimas, modelan fenómenos físicos y sús métodos de resolución fueron estudiados por numerosos científicos, entre ellos el matemático Sophus Lie (1842 - 1899). Este matemático creó gran parte de la Teoría de simetría, manteniendo contacto con importantes matemáticos de la época (Klein, Poincaré, Killing, Cartan, entro otros).
>
> Lie tropezó con los trabajos de Évariste Galios (1811 - 1832), encontrando ciertas semejanzas entre la teoría de Galois sobre la resolución de ecuaciones y sus conclusiones de como resolver ecuaciones diferenciales. En esta técnica establecida por ambos matemáticos, los grupos juegan un rol importante.
>
> En Alemania, el matemático Killing (1847 - 1923) discípulo de Weierstrass, define el concepto de álgebras de Lie. Killing mantuvo contacto con Lie y Engel (1861 - 1944) los cuales animaron a Killing a acometer la clasificación de las álgebras de Lie simples de dimensión finita.
>
> En Francia, los trabajos de Sophus Lie tuvieron gran aceptación, fué allí donde Cartan (1869 - 1951) conoce los intentos de clasificación de Killing, ordena los trabajos realizados por Killing y Engel, obteniendo la clasificación completa de las álgebras de Lie simples complejas. Fué allí el punto de partida del estudio de las álgebras de Lie.

Debido a sus aplicaciones, los científicos de diferentes disciplinas han utilizado ejemplos específicos de álgebras de Lie en diferentes campos y en diferentes dimensiones, cada uno según sus necesidades. Sin embargo los matemáticos están más interesados en generalidades que en ejemplos. Por eso surgió un gran interés en la comunidad matemática por la aparente complejidad y la elegancia de esta nueva estructura algebraica.

Existen cientos de publicaciones sobre los intentos de clasificar estas álgebras, este objetivo se ha logrado en pocas familias de álgebras de Lie.

En 1963, Dozias [DJ] clasificó en su tesis de doctorado las álgebras de Lie solubles reales de dimensiones menores a seis. En el mismo año Mubarakzjanov también clasificó estas álgebras de Lie hasta la dimensión seis.

Graaf [GW] en 2005 ilustró algunas ideas para obtener una clasificación de álgebras de Lie solubles de dimensiones pequeñas y obtuvo la clasificación de tales álgebras de dimensión 3 y 4 sobre cuerpos de cualquier característica. Sin embargo las técnicas de Graaf no son aplicables para una completa clasificación en dimensión 5, y el problema de clasificar todas las álgebras de Lie solubles continúa en la actualidad sin resolver aunque existen muchos autores que continúan trabajando en tal clasificación.

Malcev, en 1945, redujo la clasificación de las álgebras de Lie solubles complejas a la clasificación de un subconjunto, las álgebras de Lie nilpotentes. La primera clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes fué dada por Umlauf, alumno de Engel, quien clasificó todas las álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión 6.

En 1957, Dixmier [DL] clasificó las álgebras de Lie nilpotentes sobre un cuerpo conmutativo hasta dimensión 5.

Vergne y Safiullina fueron quienes hicieron en la década de los sesenta los mayores esfuerzos en la búsqueda de la clasificación de estas álgebras nilpotentes, consiguiendo resultados notables. En 1964, Safiullina [SE] clasificó todas las álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión 7, aunque fue Vergne [VM2], en 1966, quien dio un gran impulso al estudio de estas álgebras en su tesis de doctorado. De hecho, Vergne no solo obtuvo la clasificación completa de las álgebras de Lie nilpotentes reales y complejas de dimensión inferior a siete sino que introdujo una nueva subclase de álgebras nilpotentes, las álgebras de Lie filiformes [VM1], las cuales constituyen la subclase más estructurada de las álgebras de Lie nilpotentes. Más aún, Vergne estudió la variedad de las álgebras nilpotentes y mostró que las álgebras de Lie filiformes forman una clase muy amplia por lo que no es fácil clasificarlas.

En la década de los setenta varios autores trabajaron en la clasificación de estas álgebras de Lie nilpotentes Favre, Gauger, Harpe, entre otros.

Magnin [ML] en el año 1986 estudió la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes reales de dimensión 7 y dos años después, Romdhani [RM] obtuvo la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes complejas de la misma dimensión. Para tal fín Romdhani utilizó técnicas elementales de álgebra lineal y descartó todas aquellas álgebras que se descomponen como suma directa de factores de menor dimensión.

En 1989 Ancochea y Goze [AG2], utilizando un nuevo invariante de álgebras de Lie filiformes, introducido por ellos, el de suceción característica, dieron una clasificación incompleta de las álgebras nilpotentes de dimensión 7. Cabe destacar que Seely también clasificó las álgebras de Lie nilpotentes complejas de dimensión 6 y 7, siguiendo la misma técnica usada por Grunewald y O'Halloran para clasificar las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5 y además utilizó la descomposición de Iwasawa para $GL(6, \mathbb{C})$. Algunos años más tarde, Goze y Remm corrigieron la clasificación dada anteriormente por Ancochea y Goze.

Carles [CR3] introduce en 1989 un nuevo invariante y comparando la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes dadas por Safiullina, Romdhani y Seely presentaban algunos errores. En 1993 basándose en su tesis y en estas observaciones de Carles, Seely publica su clasificación en el cuerpo de los números complejos.

Es importarte notar que todas las listas nombradas anteriormente de clasificación de álgebras de Lie nilpotentes se obtuvieron mediante el uso de diferentes invariantes.

Muchos matemáticos trabajaron en estas álgebras, pero hasta la actualidad no se conoce la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes reales y complejas de dimensión mayor e igual a 8, el cual es un problema abierto.

Por su parte existen varios trabajos que siguieron los pasos de Vergne [VM2] y clasificaron las álgebras de Lie filiformes sobre el cuerpo de los complejos, entre estos podemos citar; en 1988, Ancochea y Goze [AG1] alcanzaron la clasificación de las álgebras filiformes complejas de dimensión 8, sin embargo esta lista estaba incompleta y los autores la rectificaron en 1992, al mismo tiempo Seeley publicó también una clasificación de estas álgebras. En 1991, Gomez [GE] clasificó las de dimensión 9. En 1994, Boza, Echarte y Nuñez [EN] listan las álgebras filiformes de dimensión 10 y en 1996, Gómez, Jiménez y Khakimdjanov [GJK2] dieron la clasificación de estas álgebras en dimensión 11.

En 1998, Boza, Fedriani y Nuñez [BFN2] clasificaron las álgebras de Lie filiformes de dimensión 12 y mostró en 2001 una clasificación explícita de tales álgebras de dimensión 11 de una manera diferente a como la clasificó Gómez, Jiménez y Khakimdjanov. Aunque existe una método válido para encontrar estas álgebras en cada dimensión sobre el cuerpo de los complejos, los cálculos que implica son demasiado difíciles de hacer por lo que se considera un trabajo poco probable de lograr.

En esta tesis se trabajará sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

1.1. Álgebras de Lie

Los resultados de esta sección y de las dos siguientes se pueden encontrar en [HJ].

Definición 1.1. Un *álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, es un espacio vectorial junto a un producto bilineal $\mu : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, llamado *corchete* que satisface las siguiente propiedades,

- Antisimetría, $\mu(x,y) = -\mu(y,x)$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$.
- La identidad de Jacobi, $\circlearrowleft \mu(\mu(x,y),z) = \mu(\mu(x,y),z) + \mu(\mu(y,z),x) + \mu(\mu(z,x),y) = 0$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Definición 1.2.

1. Una *subálgebra* de Lie de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que,
$$\mu(x,y) \in \mathfrak{h}, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{h}$$
2. Un *ideal* I de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio I de $\mathfrak{g}$ tal que,
$$\mu(x,y) \in I, \qquad \forall x \in \mathfrak{g}, y \in I$$

La suma e intersección de ideales proporciona nuevos ideales. La intersección de subálgebras es una subálgebra.

Definición 1.3. Si $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son álgebras de Lie entonces diremos que la aplicación $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ es un *homomorfismo de álgebras de Lie*, si φ es lineal y
$$\varphi(\mu(x,y)) = \mu(\varphi(x), \varphi(y)) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}_1$$
Un homomorfismo de un álgebra de Lie en si misma se denomina *endomorfismo*. Un *isomorfismo* es un homomorfismo biyectivo.

La composición de tranformaciones lineales de un espacio vectorial V en si mismo, no es un corchete de Lie. Sin embargo el *conmutador*, si. El álgebra de Lie $\mathrm{gl}(V)$ es el espacio vectorial de endomorfismos de V con corchete dado por:
$$[T,S] = TS - ST.$$

1.1.1. Álgebras solubles y nilpotentes

Se definen dos sucesiones de ideales de $\mathfrak{g}$ denominadas *serie de derivada* y *serie central descendente* respectivamente,

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(1)} = \mu(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), \quad \mathfrak{g}^{(2)} = \mu(\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}) \quad \ldots \quad \mathfrak{g}^{(k)} = \mu(\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}) \quad \ldots$$

$$\mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{1} = \mu(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), \quad \mathfrak{g}^{2} = \mu(\mathfrak{g}^{1}, \mathfrak{g}) \quad \ldots \quad \mathfrak{g}^{k} = \mu(\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}) \quad \ldots$$

Definición 1.4.

1. Si $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para algún k, $\mathfrak{g}$ es denomina *álgebra de Lie soluble.*

2. Si $\mathfrak{g}^{k} = 0$ para algún k, $\mathfrak{g}$ se llama *álgebra de Lie nilpotente.*

Notemos $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k}$, por lo tanto todas las álgebras nilpotentes son solubles, pero soluble no implica nilpotente.

Enunciaremos algunas propiedades de las álgebras de Lie nilpotentes;

Proposición 1.5. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie*

i. Si $\mathfrak{h}$ es un ideal nilpotente de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente. En particular, si $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ es nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ también lo es.

ii. Si $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{K}$ son ideales nilpotentes de $\mathfrak{g}$, entonces también lo es $\mathfrak{h} + \mathfrak{K}$.

iii. $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y solo si $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ es nilpotente.

La condición para que $\mathfrak{g}$ sea nilpotente se puede reescribir de la siguiente manera: para algún número natural r y cualquier conjunto de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_r, y \in \mathfrak{g}$, tenemos

$$\operatorname{ad}_{x_1} \operatorname{ad}_{x_2} \cdots \operatorname{ad}_{x_r}(y) = 0$$

En particular, $(\operatorname{ad}_x)^r = 0$, es decir, si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ consiste de operadores nilpotentes.

Diremos que un elemento $x \in \mathfrak{g}$ es *ad-nilpotente* si ad_x es nilpotente.

Existen ciertos critérios que nos permiten darnos cuenta cuando un álgebra de Lie es nilpotente uno de los más importante es el dado por Engel.

Teorema 1.6 (Engel)**.** *Si todo elemento de $\mathfrak{g}$ es ad-nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.*

Para la demostración, necesitamos el siguiente lema.

Lema 1.7. *Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de $\mathrm{gl}(V)$, con V un espacio de dimensión finita. Si $\mathfrak{g}$ consiste de operadores nilpotentes y $V \neq 0$, entonces existe un vector no nulo $v \in V$ para el cual $\mathfrak{g}.v = 0$.*

Demostración. (Teorema de Engel) La subálgebra $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ de $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ consiste de operadores nilpotentes, y por el Lema 1.7 existe $x \neq 0$ en $\mathfrak{g}$ tal que $\mu(\mathfrak{g}, x) = 0$, es decir, $x \in Z(\mathfrak{g})$. Ahora, $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ consiste de elementos ad-nilpotentes y tiene dimensión menor que $\mathfrak{g}$. Por hipótesis inductiva, $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ es nilpotente y por la Proposición 1.5 esto implica que $\mathfrak{g}$ es nilpotente. $\square$

1.2. Derivaciones

Definición 1.8. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete μ. Una aplicación lineal $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es *derivación* si para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ se verifica;

$$D\mu(x, y) = \mu(Dx, y) + \mu(x, Dy)$$

El conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, es una subálgebra del álgebra de Lie $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$. En efecto,

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2]\mu(x, y) &= D_1D_2(\mu(x, y)) - D_2D_1(\mu(x, y)) \\
&= D_1(\mu(D_2x, y) + \mu(x, D_2y)) - D_2(\mu(D_1x, y) + \mu(x, D_1y)) \\
&= \mu(D_1D_2x, y) + \mu(D_2x, D_1y) + \mu(D_1x, D_2y) + \mu(x, D_1D_2y) \\
&\quad -\mu(D_2D_1x, y) - \mu(D_1x, D_2y) - \mu(D_2x, D_1y) - \mu(x, D_2D_1y) \\
&= \mu(D_1D_2x, y) + \mu(x, D_1D_2y) - \mu(D_2D_1x, y) - \mu(x, D_2D_1y) \\
&= \mu([D_1, D_2]x, y) + \mu(x, [D_1, D_2]y).
\end{aligned}$$

Definición 1.9. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se dice que una derivación D es *derivación interior* si existe un elemento $x \in \mathfrak{g}$ tal que

$$D(x) = \mu(x, y) \quad \forall y \in \mathfrak{g}.$$

En este caso denotaremos $D = \mathrm{ad}_x$.

Notamos que la identidad de Jacobi implica que ad_x es siempre una derivación.

El conjunto de derivaciones interiores de $\mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. En efecto, si D es una derivación y $x \in \mathfrak{g}$ entonces $\mu(D, \mathrm{ad}_x)$ es una derivación interior, pues

$$\begin{aligned}
\mu(D, \mathrm{ad}_x)(y) &= D\,\mathrm{ad}_x(y) - \mathrm{ad}_x(Dy) \\
&= D\mu(x, y) - \mu(x, Dy) \\
&= \mu(Dx, y) + \mu(x, Dy) - \mu(x, Dy) \\
&= \mathrm{ad}_{Dx}(y).
\end{aligned}$$

A partir de un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ dada con corchete μ y una derivación D de ella, es usual considerar la siguiente extensión $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{h}$, de dimensión igual a $\dim \mathfrak{h} + 1$, dada como sigue. Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{h}$ como espacio vectorial, sea x una base de $\mathbb{C}$, y sea el corchete μ' de $\mathfrak{g}$ dado por:

$$\mu'(x, h) = D(h), \quad \mu'(h_1, h_2) = \mu(h_1, h_2), \quad \text{para todo } h, h_1, h_2 \in \mathfrak{h}.$$

Si $\mathfrak{h}$ es nilpotente, es muy fácil verificar que $\mathfrak{g}$ es soluble. Más aún, $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si D es nilpotente como transformación lineal. Equivalentemente, si D es semisimple o tiene un autovalor no nulo, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble no nilpotente, de lo contrario $\mathfrak{g}$ es también nilpotente.

Una clase particular de álgebras de Lie respecto a sus derivaciones es la de álgebras característicamente nilpotentes.

Definición 1.10. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *característicamente nilpotente* si y sólo si $\dim(\mathfrak{g}) \geq 2$ y el álgebra de derivaciones $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ es nilpotente o equivalentemente, todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$ son nilpotentes como transformaciones lineales de $\mathfrak{g}$.

Dixmier y Lister [DL] fueron los primeros en estudiar este típo de álgebras de Lie, quienes dieron el primer ejemplo de un álgebra de Lie nilpotente con todas sus derivaciones nilpotentes, mostrando que el recíproco del teorema de Jacobson, el cual establece que *toda álgebra de Lie sobre un cuerpo de característica cero con una derivación no singular es nilpotente*, es falso.

1.3. Álgebras Filiformes

Esta sección está basada en la tesis de M. Vergne, se pueden encontrar en [VM1].

Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie nilpotente con corchete μ, definimos sobre $\mathfrak{g}$ una filtración canónica dada por la serie central descendente $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^i = \mu(\mathfrak{g}^{i-1}, \mathfrak{g})$ para $i \leq 1$ que verifíca $\mu(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j) \subset \mathfrak{g}^{i+j}$. Por lo tanto al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ le podemos asociar el *álgebra de Lie graduada* $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$. Se dice que $\mathfrak{g}$ es de típo $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ si $\dim \mathfrak{g}^i \diagup \mathfrak{g}^{i+1} = s_i$.

Si $\mathfrak{g}$ es de típo $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$, el álgebra de Lie $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ es del mismo típo.

Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, $\dim \mathfrak{g}^0 \diagup \mathfrak{g}^1 \geq 2$.

Definición 1.11. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *filiforme* si es de típo $\{2, 1, 1, \ldots, 1\}$.

Además si $\mathfrak{g}$ es filiforme entonces $\mathrm{gr}(\mathfrak{g})$ es filiforme graduada.

1.4. Cohomología de álgebras de Lie

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra dimensión finita, y sea (ρ, V) una representación de $\mathfrak{g}$. Para cada entero n se define el espacio vectorial $C^n(\mathfrak{g}, V)$ de n-cocadenas por;

$$C^n(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Hom}(\Lambda^n \mathfrak{g}, V)$$

donde $\mathrm{Hom}(\Lambda^n \mathfrak{g}, V)$ es el espacio de todas las aplicaciones n- multilineales alternantes;

$$\phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g} \to V$$

Definición 1.12. Definimos el *operador coborde* $\delta_n : C^n(\mathfrak{g}, V) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$, como

$$\begin{aligned}(\delta_n \phi)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = & \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(x_i)(\phi(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1})) + \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} \phi(\mu(x_i, x_j), x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{n+1}).\end{aligned}$$

Para $x \in \mathfrak{g}$ denotaremos por $\theta_n(x)$ la acción sobre $C^n(\mathfrak{g}, V)$;

$$\begin{array}{rcl}\theta_n \; : \; \mathfrak{g} \times C^n(\mathfrak{g}, V) & \to & C^n(\mathfrak{g}, V) \\ (x, \phi) & \mapsto & \theta_n(x)\phi\end{array}$$

donde;

$$(\theta_n(x)\phi)(x_1, \ldots, x_n) = \rho(x)(\phi(x_1, \ldots, x_n)) - \sum_{i=1}^{n} \phi(x_1, \ldots, \mu(x, x_i), \ldots, x_n).$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
(\theta_n(x)(\phi+\psi))(x_1,\dots,x_n) &= \rho(x)\big((\phi+\psi)(x_1,\dots,x_n)\big) - \sum_{i=1}^{n}(\phi+\psi)(x_1,\dots,\mu(x,x_i),\dots x_n)\\
&= \rho(x)\big(\phi(x_1,\dots,x_n)+\psi(x_1,\dots,x_n)\big) - \sum_{i=1}^{n}\big(\phi(x_1,\dots,x_n)+\psi(x_1,\dots,x_n)\big)\\
&= \Big(\rho(x)(\phi(x_1,\dots,x_n) - \sum_{i=1}^{n}\phi(x_1,\dots,x_n)\Big) + \Big(\psi(x_1,\dots,x_n) - \sum_{i=1}^{n}\psi(x_1,\dots,x_n)\Big)\\
&= (\theta_n(x)\phi)(x_1,\dots,x_n) + (\theta_n(x)\psi)(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\theta_n(\mu(x,y))\phi)(x_1,\dots,x_n) &= \rho(\mu(x,y))(\phi(x_1,\dots,x_n) - \sum_{i=1}^{n}\phi(x_1,\dots,\mu(\mu(x,y),x_i),\dots,x_n)\\
&= \big(\rho(x)\rho(y)-\rho(y)\rho(x)\big)(\phi(x_1,\dots,x_n) -\\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\phi(x_1,\dots,\mu(x,\mu(y,x_i)) - \mu(y,\mu(x,x_i)),\dots,x_n)\\
&= \big((\rho(x)\rho(y))(\phi(x_1,\dots,x_n) - (\rho(y)\rho(x))(\phi(x_1,\dots,x_n)\big) -\\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\big(\phi(x_1,\dots,\mu(x,\mu(y,x_i)),\dots,x_n) - \phi(x_1,\dots,\mu(y,\mu(x,x_i)),\dots,x_n)\big)\\
&= \Big((\rho(x)\rho(y))(\phi(x_1,\dots,x_n) - \sum_{i=1}^{n}\phi(x_1,\dots,\mu(x,\mu(y,x_i)),\dots,x_n)\Big) -\\
&\quad - \Big((\rho(y)\rho(x))(\phi(x_1,\dots,x_n) - \sum_{i=1}^{n}\phi(x_1,\dots,\mu(y,\mu(x,x_i)),\dots,x_n)\Big)\\
&= \theta_n(x)\big((\theta_n(y)\phi)(x_1,\dots,x_n)\big) - \theta_n(y)\big((\theta_n(x)\phi)(x_1,\dots,x_n)\big) =\\
&= \big(\big(\theta_n(x)\theta_n(y) - \theta_n(y)\theta_n(x)\big)\phi\big)(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}
$$

A $\theta_n(x)\phi$ la llamaremos la derivada de Lie de ϕ relativa a x.

Definición 1.13. El *operador producto interior*,

$$i_n(x) : C^n(\mathfrak{g},V) \longrightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g},V)$$

está definido por,

$$(i_n(x)\phi)(x_1,\dots,x_{n-1}) = \phi(x,x_1,\dots,x_n)$$

Mostraremos algunas propiedades importantes;

Lema 1.14. *Para cada $x \in \mathfrak{g}$ los operadores cobordes δ_n y δ_{n+1} satisfacen;*

$$\delta_n i_{n+1}(x) + i_{n+2}(x)\delta_{n+1} = \theta_{n+1}(x)$$

Demostración. Sean $\phi \in C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$, $x \in \mathfrak{g}$ entonces;

$$\begin{aligned}(\delta_n i_{n+1}(x)\phi)(x_1,\ldots,x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^n \rho(x_i)((i_{n+1}(x)\phi)(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{n+1}))\\ &+ \sum_{1\leq i\leq j\leq n+1} (-1)^{i+j}(i_{n+1}(x)\phi)(\mu(x_i,x_j),x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{n+1})\\ &= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\ \rho(x_i)(\phi(x,x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{n+1}))\\ &+ \sum_{1\leq i\leq j\leq n+1} (-1)^{i+j}(\phi(x,\mu(x_i,x_j),x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{n+1})\end{aligned}$$

Por otro lado;

$$\begin{aligned}(i_{n+2}(x)\delta_{n+1}\phi)(x_1,\ldots,x_n) &= (\delta_{n+1}\phi)(x,x_1,\ldots,x_{n+1})\\ &= \rho(x)(\phi(x_1,\ldots,x_{n+1})) - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1}\rho(x_i)(\phi(x,x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{n+1})\\ &- \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1}\phi(\mu(x,x_i),x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{n+1})\\ &+ \sum_{1\leq i\leq j\leq n+1} (-1)^{i+j}(\phi(x,\mu(x_i,x_j),x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{n+1})\\ &= \rho(x)(\phi(x_1,\ldots,x_{n+1})) - \sum_{i=1}^{n+1} \phi(x_1,\ldots,\mu(x,x_i),\ldots,x_{n+1})\\ &- \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1}\rho(x_i)(\phi(x,x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_{n+1}))\\ &- \sum_{1\leq i\leq j\leq n+1} (-1)^{i+j}\phi(x,\mu(x_i,x_j),x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{n+1})\end{aligned}$$

por lo tanto;

$$(\delta_n i_{n+1}(x)\phi)(x_1,\cdots,x_{n+1}) + (i_{n+2}(x)\delta_{n+1}\phi)(x_1,\cdots,x_{n+1}) = (\theta_{n+1}(x)\phi)(x_1,\cdots,x_{n+1}).$$

□

Lema 1.15. *Para $x, y \in \mathfrak{g}$ los operadores de Lie y producto interior satisfacen;*

$$\theta_n(x)i_{n+1}(y)\ -\ i_{n+1}(y)\theta_{n+1}(x) = i_{n+1}(\mu(x,y)).$$

Demostración. Si $\phi \in C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$, entonces;

$$\begin{aligned}(i_{n+1}(y)\theta_{n+1}(x))\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = &\ (\theta_{n+1}(x)\phi)(y, x_1, \ldots, x_n)\\ = &\ \rho(x)(\phi(y, x_1, \ldots, x_n)) - \phi(\mu(x, y), x_1, \ldots, x_n)\\ - &\ \sum_{i=1}^{n} \phi(y, x_1, \ldots, \mu(x, x_i), \ldots, x_n)\\ = &\ -\ (i_{n+1}(\mu(x, y))\phi(x_1, \ldots, x_n)\ +\ \rho(x)((i_{n+1}(y))\phi(x_1, \ldots, x_n)\\ - &\ \sum_{i=1}^{n}(i_{n+1}(y))\phi(x_1, \ldots, \mu(x, x_i), \ldots, x_n)\\ = &\ -\ (i_{n+1}(\mu(x, y))\phi(x_1, \ldots, x_n)\ +\ (\theta_n(x)i_{n+1}(y))\phi(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

de donde,

$$(i_{n+1}(\mu(x, y))\phi(x_1, \ldots, x_n) = (\theta(x)i_{n+1}(y))\phi(x_1, \ldots, x_n) - (i_{n+1}(y)\theta_{n+1}(x))\phi(x_1, \ldots, x_n).$$

y en consecuencia,

$$i_{n+1}(\mu(x, y)) = \theta_n(x)i_{n+1}(y) - i_{n+1}(y)\theta_{n+1}(x).$$

□

Lema 1.16. *Para todo $x \in \mathfrak{g}$, los operadores cobordes y derivada de Lie satisfacen;*

$$\delta_n\theta_n(x) = \theta_{n+1}(x)\delta_n$$

Demostración. Consideremos el operador $\mathfrak{V}_n = \delta_n\theta_n(x) - \theta_{n+1}\delta_n$. Usaremos un argumento inductivo para probar que $\mathfrak{V}_n\phi = 0$ para todo $\phi \in C^n(\mathfrak{g}, V)$, por lo tanto $\mathfrak{V}_n = 0$. Si $v \in C^0(\mathfrak{g}, V) = V$ tenemos,

$$(\delta_0\theta_0(x)v)(y) = \rho(y)(\theta_0(x)v)\ =\ \rho(y)(\rho(x)v)$$

Además,

$$(\theta_1(x)\delta_0 v)(y) = \rho(x)(\delta_0 v(y)) - \delta_0 v(\mu(x, y))\ =\ \rho(x)(\rho(y)v) - \rho(\mu(x, y))v$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{V}_0 v)(y) = &\ \rho(y)(\rho(x)v) - \rho(x)(\rho(y)v) + \rho(\mu(x, y))v\\ = &\ \mu(\rho(y), \rho(x))v\ +\ \rho(\mu(x, y))v\\ = &\ \rho(\mu(y, x))v\ +\ \rho(\mu(x, y))v \quad (\rho \text{ es morfismo de Lie})\\ = &\ 0\end{aligned}$$

para todo $y \in \mathfrak{g}$. Así $\mathfrak{V}_0 v = 0$ para toda $v \in C^0(\mathfrak{g}, V) = V$. Ahora,

$$\begin{aligned}i_{n+1}(y)\delta_n\theta_n(x) &= \theta_n(y)\theta_n(x) - \delta_{n-1}i_n(y)\theta_n(x) \quad \text{(Lema 1.14)}\\ &= \theta_n(y)\theta_n(x) - \delta_{n-1}\theta_{n-1}(x)i_n(y) - \delta_{n-1}i_n(\mu(x, y)) \quad \text{(Lema 1.15)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_{n+1}(y)\theta_{n+1}(x)\delta_n &= \theta_n(x)i_{n+1}(y)\delta - i_{n+1}(\mu(x,y))\delta_n \qquad \text{(Lema 1.15)}\\
&= \theta_n(x)\theta_n(y) - \theta_n(x)\delta_{n-1}i_n(y) + i_{n+1}(\mu(x,y))\delta_n \qquad \text{(Lema 1.14)}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
i_{n+1}(y)(\delta_n\theta_n(x) - \theta_{n+1}(x)\delta_n) &= (\delta_{n-1}\theta_{n-1}(x) - \theta_n(x)\delta_{n-1})\\
&+ \theta_n(y)\theta_n(x) - \theta_n(x)\theta_n(y)\\
&+ \delta_{n-1}i_n(\mu(x,y)) + i_{n+1}(\mu(x,y))\delta_n\\
&= -(\delta_{n-1}\theta_{n-1}(x) - \theta_n(x)\delta_{n-1})i_n(y)\\
&+ \mu(\theta_n(y),\theta_n(x)) + \theta_n(\mu(x,y)) \qquad \text{(Lema 1.15)}\\
&= -(\delta_{n-1}\theta_{n-1}(x) - \theta_n(x)\delta_{n-1})i_n(y)\\
&+ \theta_n(\mu(y,x)) + \theta_n(\mu(x,y)) \qquad (\rho \text{ es morfismo de Lie})\\
&= -(\delta_{n-1}\theta_{n-1}(x) - \theta_n(x)\delta_{n-1})i_n(y)
\end{aligned}$$

es decir, $i_{n+1}(y)\mathfrak{V}_n = -\mathfrak{V}_{n-1}i_n(y)$.

Sea $\phi \in C^1(\mathfrak{g},V)$ entonces $i_1(y)\phi \in C^0(\mathfrak{g},V) = V$, por lo tanto,

$$i_2(y)\mathfrak{V}_0\phi = -\mathfrak{V}_0 i_1(y)\phi = 0$$

Luego, se sigue que

$$(i_2(y)\mathfrak{V}_1\phi)(z) = 0 \quad \forall z \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \mathfrak{V}_1\phi(y,z) = 0 \quad \forall y,z \in \mathfrak{g}$$

Así $\mathfrak{V}_1\phi = 0$ para toda $\phi \in C^1(\mathfrak{g},V)$. Continuando de esta forma, obtenemos que $\mathfrak{V}_n\phi = 0$ para $\phi \in C^n(\mathfrak{g},V)$, con lo cual $\mathfrak{V}_n = 0$ y por lo tanto,

$$\delta_n\theta_n(x) = \theta_{n+1}(x)\delta_n.$$

□

Lema 1.17. *El operador coborde satisface;*

$$\delta_n \ o\ \delta_{n-1} = 0$$

Demostración. Sea $x \in \mathfrak{g}$, entonces por el Lema 1.14 tenemos que $\delta_{n-1}i_n(x) + i_{n+1}\delta_n = \theta_n(x)$, luego

$$\begin{aligned}
\delta_n\delta_{n-1}i_n(x) \ + \ \delta_n i_{n+1}(x)\delta_n &= \delta_n\theta_n(x)\\
&= \theta_{n+1}(x)\delta_n \qquad \text{(Lema 1.16)}\\
&= \delta_n i_{n+1}(x)\delta_n \ + \ i_{n+2}(x)\delta_{n+1}\delta_n \qquad \text{(Lema 1.14)}
\end{aligned}$$

lo cual implica,

$$\delta_n\delta_{n-1}i_n(x) = i_{n+2}(x)\delta_{n+1}\delta_n \qquad (*)$$

Para todo $x \in \mathfrak{g}$. Si $v \in C^0(\mathfrak{g},V)$ entonces,

$$\begin{aligned}
(\delta_1\delta_0 v)(x,y) &= \rho(x)(\delta_0 v(y)) \ - \ \rho(y)(\delta_0 v(x)) \ - \ \delta_0 v(\mu(x,y))\\
&= \rho(x)(\rho(y)v) \ - \ \rho(y)(\rho(x)v) \ - \ \rho(\mu(x,y))v\\
&= \mu(\rho(x),\rho(y))v \ - \ \rho(\mu(x,y))v \qquad (\rho \text{ es morfismo de Lie})\\
&= \rho(\mu(x,y))v \ - \ \rho(\mu(x,y))v\\
&= 0
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Así $\delta_1\delta_0\ v = 0$. Haciendo uso de (*) y de un argumento inductivo, se sigue que $\delta_n\ o\ \delta_{n-1} = 0$. □

Definición 1.18.

1. Sea $\phi \in C^n(\mathfrak{g}, V)$. Se dice que ϕ es un *n-cociclo* si $\delta_n\phi = 0$.

   El conjunto de cociclos es un subespacio vectorial del conjunto de cocadenas $C^n(\mathfrak{g}, V)$ y se define por
   $$Z^n(\mathfrak{g}, V) = Ker\ \delta_n$$

2. Sea $\phi \in C^n(\mathfrak{g}, V)$. Se dice que ϕ es un *n-coborde* si existe $\psi \in C^{n-1}(\mathfrak{g}, V)$ tal que $\phi = \delta_n\psi$.

   El conjunto de cobordes es también un subespacio vectorial del conjunto de cocadenas $C^n(\mathfrak{g}, V)$ y definido por
   $$B^n(\mathfrak{g}, V) = Im\ \delta_{n-1}$$

Como $\delta_n\ o\ \delta_{n-1}\ =\ 0$, entonces $B^n(\mathfrak{g}, V) \subset Z^n(\mathfrak{g}, V)$.

Podemos por lo tanto construír el siguiente cociente,

Definición 1.19. Se define el *n- ésimo espacio de cohomología* del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como el espacio cociente de n-cociclos y n-cobordes,

$$H^n(\mathfrak{g}, V)\ =\ \frac{Z^n(\mathfrak{g}, V)}{B^n(\mathfrak{g}, V)}$$

Veamos en los casos elementales como son los cociclos y los cobordes

Un cociclo de orden cero es un elemento del espacio V que verifica:

$$\rho(x)v = 0$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$, es decir, se trata de un elemento invariante de la acción del álgebra sobre el espacio V.

Hablar de cobordes de orden cero, no tiene sentido por lo tanto se tiene $H^0(\mathfrak{g}, V) = Z^0(\mathfrak{g}, V) = V^{\mathfrak{g}}$.

Un 1-cociclo es una aplicación lineal de $\mathfrak{g}$ en V que verifica;

$$\delta_1\phi = 0 \Rightarrow \phi(\mu(x, y)) = x.\phi(y) - y.\phi(x) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

En cuanto a los 1-cobordes, si $\phi \in B^1(\mathfrak{g}, V)$, existirá $v \in V$ tal que

$$\phi = \delta_1 v$$

luego, la acción de ϕ es:

$$\phi(x) = \delta_1 v(x) = \rho(x)v$$

En el caso de los 2-cociclo, si consideramos la acción trivial, estos son

$$(\delta_2\phi)(x, y, z) = \phi(\mu(x, y), z) + \phi(\mu(y, z), x) + \phi(\mu(z, x), y) = 0$$

Pero si $V = \mathfrak{g}$ y la acción considerada es la representación adjunta,

$$\begin{aligned}(\delta_2\phi)(x,y,z) &= \mu(\phi(x,y),z) + \mu(\phi(y,z),x) + \mu(\phi(z,x),y) + \phi(\mu(x,y),z) + \phi(\mu(z,x),y) + \phi(\mu(y,z),x) \\ &= (\mu \circ \phi + \phi \circ \mu)(x,y,z) \ = \ 0\end{aligned} \tag{1.1}$$

Por lo tanto, esta es la condición que toda aplicación bilineal antisimétrica de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$ debe cumplir para ser un 2-cociclo.

En este caso podemos deducir fácilmente que $Z^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ y $B^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}\, Inn(\mathfrak{g})$, donde $\mathrm{Der}\, Inn(\mathfrak{g})$ es el conjunto de derivadas interiores de $\mathfrak{g}$.

Capítulo 2

Preliminares de geometría algebraica

Este capítulo se basa en resultados extraídos de [HR] y [CLO].

2.1. Variedad Algebraica

Definición 2.1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Se define el n-espacio afín, denotado por $\mathcal{A}^n$, como el conjunto de todas las n-uplas de elementos de $\mathbb{K}$,

$$\mathcal{A}^n := \{(a_1, \dots, a_n)/a_i \in \mathbb{K}\}$$

Sea $A := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables sobre $\mathbb{K}$. Se pueden ver los elementos de A como funciones del n-espacio afín $\mathcal{A}^n$ en $\mathbb{K}$, es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^n &\to \mathbb{K} \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto f(a_1, \dots, a_n), \ para\ f \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $f \in A$ es un polinomio podemos hablar del conjunto de ceros de f, es decir

$$Z(f) := \{P \in \mathcal{A}^n : f(P) = 0\}.$$

En forma más general, si $\mathcal{T} \subset A$, se define el conjuntos de ceros de $\mathcal{T}$ como los ceros en común de todos los elementos de $\mathcal{T}$, es decir;

$$Z(\mathcal{T}) := \{P \in \mathcal{A}^n : f(P) = 0 \quad para\ f \in \mathcal{T}\}$$

Claramente, si a es un ideal de A generado por $\mathcal{T}$, entonces $Z(a) = Z(\mathcal{T})$.

Definición 2.2. Un subconjunto $\mathcal{Y} \subset \mathcal{A}^n$ es un conjunto algebraico, si existe un subconjunto $\mathcal{T} \subset A$ tal que $\mathcal{Y} = Z(\mathcal{T})$.

Ejemplo 2.3.

1. El n-espacio afín $\mathcal{A}^n = Z(0)$ es algebraico.

2. El conjunto vacío es algebraico, $\varnothing = Z(1)$.
3. Cualquier punto en $\mathcal{A}^n$ forman un conjunto algebraico de la siguiente manera; $(a_1, \cdots, a_n) := Z(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$

Proposición 2.4.

i. Sean $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ subconjuntos de A *tal que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, entonces $Z(\mathcal{T}_2) \subseteq Z(\mathcal{T}_1)$.*

ii. Si $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de A*, entonces;*

$$\cap_{i\in I} Z(\mathcal{T}_i) = Z\left(\cup_{i\in I}\mathcal{T}_i\right)$$

iii. Si $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ son subconjuntos de A *entonces $Z(\mathcal{T}_1) \cup Z(\mathcal{T}_2) = Z(\mathcal{T}_1.\mathcal{T}_2)$.*

Demostración.

i. Sea $P \in Z(\mathcal{T}_2)$, entonces $f(P) = 0$ para toda $f \in \mathcal{T}_2$, como $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ entonces $f(P) = 0$ para toda $f \in \mathcal{T}_1$, por lo tanto $P \in Z(\mathcal{T}_1)$.

ii. Es clara.

iii. Sea $P \in Z(\mathcal{T}_1) \cup Z(\mathcal{T}_2)$, entonces $f_1(P) = 0$ para toda $f_1 \in \mathcal{T}_1$ o $f_2(p) = 0$ para toda $f_2 \in \mathcal{T}_2$, así $(f_1 f_2)(P) = 0$ para toda $f_1 \in \mathcal{T}_1$ y $f_2 \in \mathcal{T}_2$; por lo tanto $f(P) = 0$ para $f \in \mathcal{T}_1.\mathcal{T}_2$. Luego $P \in Z(\mathcal{T}_1.\mathcal{T}_2)$.
Inversamente, si $P \in Z(\mathcal{T}_1.\mathcal{T}_2)$ y $P \notin Z(\mathcal{T}_1)$, entonces existe un $f_1 \in \mathcal{T}_1$ tal que $f_1(P) \neq 0$. Por lo tanto para algún $f_2 \in \mathcal{T}_2$ se tiene $(f_1 f_2)(P) = 0$, lo que implica que $f_2(P) = 0$ así $P \in Z(\mathcal{T}_2)$.

□

Definición 2.5. Se define la topología Zariski sobre $\mathcal{A}^n$, como la topología cuyos cerrados son los conjuntos algebraicos. Es claramente una topología, ya que la Proposición 2.4 nos muestra que la intersección de conjuntos cerrados es cerrada y que las uniones finitas de cerrados son cerrados, además en el Ejemplo 2.3 vimos que el conjunto vacío y $\mathcal{A}^n$ son cerrados.

Observación 2.6. Observemos que esta toplogía no es Hausdorff.

Definición 2.7. Un espacio topológico X se dice irreducible, si no puede escribirse como la unión $X = X_1 \cup X_2$ de dos subconjuntos propios cerrados de X. Caso contrario se llama reducible.
El conjunto vacío no se considera como un conjunto irreducible.

Ejemplo 2.8.

1. $\mathcal{A}^1$ es irreducible.
2. Todo subconjunto abierto no vacío de un espacio irreducible, es irreducible.
3. Si Y es un subconjunto irreducible de X, entonces su clausura $\overline{Y}$ en X es también irreducible.

Definición 2.9. Una variedad algebraica afín (o variedad afín) es un subconjunto cerrado e irreducible de $\mathcal{A}^n$.

Existe una relación entre ideales propios de A y subconjuntos cerrados de $\mathcal{A}^n$. Sea $\mathcal{Y} \subset \mathcal{A}^n$ se define el ideal de $\mathcal{Y}$ en A como;

$$I(\mathcal{Y}) = \{f \in A \mid f(P) = 0, \ \forall \ P \in \mathcal{Y}\}$$

El *radical* del ideal I se define por

$$r(I) = \{f \in A \mid f^s \in I \text{ para algún } s > 0\}$$

Enunciaremos una proposición que involucra el ideal I, cuya prueba no haremos ya que se realiza de manera similar a la demostración de la Proposición 2.4.

Proposición 2.10.

i. *Sean $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ subconjuntos de $\mathcal{A}^n$ tal que $\mathcal{Y}_1 \subseteq \mathcal{Y}_2$, entonces $I(\mathcal{Y}_2) \subseteq I(\mathcal{Y}_1)$.*

ii. *Si $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}_2$ son subconjuntos de $\mathcal{A}^n$, entonces $I(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2) = I(\mathcal{Y}_1) \cap I(\mathcal{Y}_2)$.*

iii. *Si $\mathcal{T}$ es un ideal de* A, *entonces $I(Z(\mathcal{T})) = r(\mathcal{T})$.*

En los siguiente lemas enunciaremos otras propiedades importentes del ideal I.

Lema 2.11. *Existe una correspondencia uno a uno entre subconjuntos algebraicos en $\mathcal{A}^n$ e ideales radicales en* A, *dada por $I \mapsto I(\mathcal{Y})$ y $\mathcal{T} \mapsto Z(\mathcal{T})$.*

Lema 2.12. *Un conjunto algebraico es irreducible, si y sólo si, su ideal es primo.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{Y}$ es irreducible, mostraremos que $I(\mathcal{Y})$ es primo. Sean $fg \in I(\mathcal{Y})$, entonces $\mathcal{Y} \subseteq Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$. Así, $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y} \cap Z(f)) \cup (\mathcal{Y} \cap Z(g))$, siendo ambos subconjuntos cerrados de $\mathcal{Y}$, pero $\mathcal{Y}$ es irreducible, por lo tanto $\mathcal{Y} = \mathcal{Y} \cap Z(f)$ o $\mathcal{Y} = \mathcal{Y} \cap Z(g)$ entonces $\mathcal{Y} \subseteq Z(f)$ o $\mathcal{Y} \subseteq Z(g)$. Luego, $f \in I(\mathcal{Y})$ o $g \in I(\mathcal{Y})$.
Inversamente, supongamos que p es un ideal primo, supongamos también $Z(p) = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$, así $p = r(p) = I(Z(p)) = I(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2) = I(\mathcal{Y}_1) \cap I(\mathcal{Y}_2)$ pero p es primo, por lo tanto $p = I(\mathcal{Y}_1)$ o $p = I(\mathcal{Y}_2)$, entonces $Z(p) = \mathcal{Y}_1$ o $Z(p) = \mathcal{Y}_2$. Luego $\mathcal{Y}$ es irreducible. □

2.2. Componentes irreducibles

Estudiaremos la topología en la variedad algebraica. Para ello introduciremos una clase importante de espacios topológicos que incluyen todas las variedades.

Definición 2.13. Un espacio topológico X se llama noetheriano si satisface la condición de cadena descendente de subconjuntos cerrados, esto es, para una secuencia $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \cdots$, de subconjuntos cerrados, existe un entero r tal que $Y_r = Y_{r+1} = Y_{r+2} = \cdots$.

Es fácil ver que $\mathcal{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano. En efecto, si $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \cdots$ es una cadena descendente de subconjuntos cerrados, entonces $I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq I(Y_3) \subseteq \cdots$ es una cadena ascendiente de ideales en $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Como A es anillo noetheriano, esta cadena es estacionaria. Por lo tanto, para cada i, $Y_i = Z(I(Y_i))$ entonces la cadena Y_i es también estacionaria.

Definición 2.14. En un espacio topológico noetheriano X todo subconjunto cerrado no vacío Y se puede escribir como unión $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_n$ de subconjuntos cerrados irreducibles Y_i unívocamente determinados tales que $Y_i \not\subseteq Y_j$ para $i \neq j$. Estos subconjuntos reciben el nombre de componentes irreducibles de Y.

Teorema 2.15. *Todo conjunto algebraico de $\mathcal{A}^n$ puede expresarse de manera única como unión de componentes irreducibles.*

Vimos que los conjuntos cerrados forman la base de la toplogía Zariski, los conjuntos abiertos Zariski (complemento de conjuntos cerrados) tiene una propiedad muy importante dentro de una variedad algebraica irreducible.

Teorema 2.16. *Todo conjunto abierto Zariski no vacío dentro de una variedad algebraica irreducible es denso.*

Demostración. Sea U un conjunto abierto Zariski. Supongamos que U no es denso, entonces existe otro abierto V de $\mathcal{A}^n$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$. Entonces el complemento de la intersección $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c = \mathcal{A}^n$, pero U^c y V^c son cerrados así probamos que $\mathcal{A}^n$ es unión de dos conjuntos cerrados, lo cual es absurdo ya que $\mathcal{A}^n$ es irreducible. Por lo tanto U es denso. □

Se sabe que un conjunto X es denso en la topología euclídea compleja es denso Zariski. Ahora nos preguntamos ¿ Todo conjunto denso Zariski es denso en la topología euclidea ? la respuesta es afirmativa.

Lema 2.17. *Sea $\mathcal{A}^n$ variedad algebraica sobre el cuerpo de los números complejos. $A \subset \mathcal{A}^n$ denso Zariski, entonces A es denso en la topología euclídea sobre $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $A = \{p \in \mathcal{A}^n \ / \ \forall f \in \mathcal{T} : \ f(p) = 0\}$, donde $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{C}[x_1, x_2 \ldots, x_n]$. Para toda $a \in A$ veamos que existen puntos muy cerca de a que no están en A. Sea $b \in \mathcal{A}^n$ pero $b \notin A$, entonces $f(b) \neq 0$ para toda $f \in \mathcal{T}$. Entonces el polinomio $g(a + (b - a)Y) \in \mathbb{C}[Y]$ no es el polinomio nulo. Por lo tanto su raíz en cero está aislada, así $g(h) \neq 0$ para toda h muy cerca de cero. Entonces $a + h(b - a) \notin A$ para tal h. Lo cuál prueba lo deseado. □

2.3. Bases de Groebner

En esta sección estudiaremos bases de Groebner las cuales son de gran importancia a la hora de trabajar con ideales de polinomios ya que nos permiten simplificar varias cuentas. Introduciremos algunas definiciones previas.

2.3.1. Orden monomial e ideal monomial

Definición 2.18. Un orden monomial sobre $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es una relación $>$ sobre $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, o equivalentemente, una relación sobre el conjunto de monomios x^a, $a \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, que satisface;

1. $>$ es un orden total sobre $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.
2. Si $a > b$ y $c \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, entonces $a + c > b + c$.

3. $>$ es bien ordenado sobra $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Esto es, que todo subconjunto de $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ tiene un menor elemento mediante $>$.

Definición 2.19 (Orden lexicográfico)**.** Sea $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Se dice que $a > b$ si, el vector diferencia $a - b \in \mathbb{Z}^n$ y la primer entrada de dicho vector, que sea distinta de cero, debe ser positiva. Dirémos que $x^a > x^b$ si $a > b$.

Ejemplo 2.20.

1. $(1, 2, 0) > (0, 3, 4)$, pues $a - b = (1, -1, -4)$.
2. Las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tienen orden lexicográfico, pues

$$(1, 0, 0, \ldots, 0) > (0, 1, 0, \ldots, 0) > \cdots > (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

así $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$.

No es difícil ver que el orden lexicográfico verifica la primera definición.

Proposición 2.21. *El orden lexicográfico sobre* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *es un orden monomial.*

A la hora de ordenar lexicográficamente los polinomios, debemos tener en cuenta lo siguiente.

Definición 2.22. Sea $f = \sum_a c_a x^a$ un polinomio en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ distinto del polinomio nulo, y sea $>$ un orden monomial.

1. El *grado* de f es,
$$MD(f) = max(a \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : c_a \neq 0)$$
(es máximo con respecto a $>$).
2. El *coeficiente principal* de f es,
$$CP(f) = c_{MD(f)} \in \mathbb{K}.$$
3. El *monomio principal* de f es,
$$MP(f) = x^{MD(f)}$$
(con coeficiente 1).
4. El *término principal* de f es,
$$TP(f) = CP(f).MP(f).$$

Ejemplo 2.23. Sean $f = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2$ y $>$ el órden lexicográfico. Entonces,

$$\begin{aligned} MD(f) &= (3, 0, 0), \\ CP(f) &= -5, \\ MP(f) &= x^3, \\ TP(f) &= -5x^3. \end{aligned}$$

Consideraremos a continuación un tipo especial de ideal de polinomio, el cual es de gran interés para nuestro trabajo y estudiaremos algunas de sus propiedades.

Definición 2.24. Un ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es un ideal monomial si existe un subconjunto $A \subset \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ tal que I está formado por polinomios de la forma $\sum_{a \in A} h_a x^a$, donde $h_a \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. En este caso, se dice $I = \langle x^a \ : \ a \in A \rangle$.

En primer lugar es necesario caracterizar todos los monomios que están en un ideal monomial.

Lema 2.25. *Sea I un ideal monomial, y sea $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Entonces son equivalentes:*

I. $f \in I$.

II. Todo término de f están en I.

III. f es una combinación $\mathbb{K}$ - lineal de monomios en I.

Teorema 2.26 (Lema de Dickson)**.** *Un ideal monomial $I = \langle x^a \ : \ a \in A \rangle \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, puede escribirse de la siguiente manera $I = \langle x^{a(1)}, x^{a(2)}, \ldots, x^{a(n)} \rangle$, donde $a(1), a(2), \ldots, a(n) \in A$. En particular, I tiene una base finita.*

2.3.2. Bases de Groebner

Cada $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tiene un único término principal $TP(f)$. Entonces para cada ideal I, se puede definir el ideal de términos principales como sigue

Definición 2.27. Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ideal distinto de $\{0\}$,

1. Se denota por $TP(I)$ el conjunto de términos principales de I,

$$TP(I) = \{cx^a \ : \ \exists f \in I; \ TP(f) = cx^a\}$$

2. Se denota por $\langle TP(I) \rangle$ el ideal generado por los elementos de $TP(I)$.

Mostraremos que el ideal $\langle TP(I) \rangle$ es un ideal monomial y que está generado por un número finito de elementos.

Proposición 2.28. *Sea $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ un ideal,*

i. $\langle TP(I) \rangle$ es un ideal monomial.

ii. Existen $g_1, g_2, \ldots, g_n \in I$ tal que $\langle TP(I) \rangle = \langle TP(g_1), TP(g_2), \ldots, TP(g_n) \rangle$.

Demostración. i. Los monomios principales $MP(g)$ de elementos $g \in I - \{0\}$ general el ideal monomial $\langle MP(g) : g \in I - \{0\} \rangle$. Como $MP(g)$ y $TP(g)$ difieren por una constante no nula, entonces $\langle TP(g) : g \in I - \{0\} \rangle = \langle TP(I) \rangle$. Entonces, $\langle TP(I) \rangle$ es un ideal monomial.

ii. Como $\langle TP(I) \rangle$ es generado por $MP(g)$ para $g \in I - \{0\}$, por el Lema de Dickson se tiene $\langle TP(I) \rangle = \langle MP(g_1), MP(g_2), \ldots, MP(g_n) \rangle$, para un número finito $g_1, g_2, \ldots, g_n \in I$. Pero $MP(g_i)$ difieren de $TP(g_i)$ por una constante no nula. Por lo tanto, $\langle TP(I) \rangle = \langle TP(g_1), TP(g_2), \ldots, TP(g_n) \rangle$.

□

Ahora estamos en condiciones de definir bases de Groebner.

Definición 2.29. Fijado un orden monomial. Un subconjunto finito $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ de un ideal I es una *base de Groebner* si,

$$\langle TP(g_1), TP(g_2), \ldots, TP(g_n)\rangle = \langle TP(I)\rangle.$$

Equivalentemente, un conjunto $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset I$ es una base de Groebner de I, si y sólo si, el término principal de algún elemento de I es divisible por uno de los $TP(g_i)$.

Enunciaremos el teorema de las bases de Hilbert el cual tiene una consecuencia muy importante: Todo ideal no nulo tiene una base de Groebner.

Teorema 2.30 (Teorema de las bases de Hilbert)**.** *Todo ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tiene un número finito de generadores. Esto es $I = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$ para algunos $g_1, g_2, \ldots, g_n \in I$.*

Corolario 2.31 (del teorema de las bases de Hilbert)**.** *Fijado un orden monomial. Todo ideal no nulo, $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tiene una base de Groebner. Además, una base de Groebner para un ideal I es una base de I.*

A continuación daremos algunas propiedades de las bases de Groebner y aprenderemos a detectar cuando una base determinada es base de Groebner.

Proposición 2.32. *Sea $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ una base de Groebner para un ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ y sea $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Entonces, existe un único $r \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ que cumple las siguientes propiedades;*

i. Ningún término de r es divisible por alguno de los $TP(g_1), TP(g_2), \ldots, TP(g_n)$.

ii. Existe $g \in I$ tal que $f = g + r$.

En particular, r es el resto de la división de f por G, sin importar el orden de los elementos de G al utilizar el algoritmo de la división en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

El siguiente corolario nos da un criterio para darnos cuenta cuando un polinomio pertenece a un ideal.

Corolario 2.33. *Sea $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ una base de Groebner para un ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ y sea $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Entonces $f \in I$, si y solo si, el resto de la división de f por G es cero.*

Demostración. Si el resto es 0, es claro que $f \in I$. Inversamente, dado $f \in I$, entonces $f = f + 0$, por la condición (ii) de la Proposición 2.30 se sigue que el resto de la división de f por G es 0. □

La propiedad dada en el Corolario 2.31 suele ser considerada como la definición de una base de Groebner, ya que es fácil darse cuenta que este es trivial si y solo si $\langle TP(g_1), TP(g_2), \ldots, TP(g_n)\rangle = \langle TP(I)\rangle$.

Daremos una notación para identificar los restos,

Definición 2.34. Se denota $\overline{f}^G$ al resto de la división de f por la n-upla ordenada $G = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Ejemplo 2.35. Sea $F = \langle f_1, f_2\rangle = \langle xy + 1, y^2 - 1\rangle \in \mathbb{K}[x, y]$ con el orden lexicográfico. Dividiremos $f = xy^2 - x$ por $G = (f_1, f_2)$.

Se observa que $TP(f_1) = xy$, $TP(f_2) = y^2$ y $TP(f) = xy^2$. Como f_1 es el primero de la lista, dividiremos xy^2 con xy obteniendo y, es decir $TP(f) = y.TP(f_1)$, así

$$(xy^2 - x) - (xy^2 + y) = -x - y$$

Ahora, $TP(-x-y) = -x$, claramente $TP(f_1) = xy$ no divide a $-x$ y tampoco lo hace $TP(f_2) = y^2$, así el resto de la división es $-x - y$, por el algoritmo de la división;

$$xy^2 - x = y.(xy + 1) + 0.(y^2 + 1) + (-x - y)$$

Por lo tanto, $\overline{xy^2 - x}^F = -x - y$.

Definición 2.36. Sean $f, g \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomios no nulos,

1. Si $MD(f) = a$ y $MD(g) = b$, sea $d = (d_1, \ldots, d_n)$ donde $d_i = max(a_i, b_i)$ para todo i. Se llama x^d al minimo común múltiplo de $MP(f)$ y $MP(g)$, se escribe $x^d = MCM(MP(f), MP(g))$.
2. El S- polinomio de f y g es la combinación,

$$S(f, g) = \frac{x^d}{TP(f)} \cdot f \ - \ \frac{x^d}{TP(g)} \cdot g$$

Ejemplo 2.37. Sean $f = x^3y^2 - x^2y^3 + x$ y $g = 3x^4y + y^2$ en $\mathbb{R}[x, y]$ con el órden lexicográfico. Entonces $d = (4, 2)$ y

$$\begin{aligned} S(f, g) &= \frac{x^4y^2}{x^3y^2} \cdot f \ - \ \frac{x^4y^2}{3x^4y} \cdot g \\ &= x \cdot f \ - \ \frac{1}{3}y \cdot g \\ &= -x^3y^3 + x^2 - \frac{1}{3}y^3. \end{aligned}$$

2.3.3. Algoritmo de Buchberger

Teorema 2.38. *Sea I un ideal polinomial. Una base $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ de I es una base de Groebner, si y solo si, para todo $i \neq j$, el resto de la división de $S(g_i, g_j)$ por G es cero.*

Muchas veces nos preguntamos si dado un ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ se le puede encontrar una base de Groebner. La respuesta es si y uno de los métodos para realizar este trabajo nos lo dá el siguiente algoritmo.

Teorema 2.39. *(Algoritmo de Buchberger) Sea I in ideal en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ y sea F un sistema de generadores de I. Entonces podemos contruir una base de Groebner de I a partir de F en un número finito de pasos, con el siguiente algoritmo. Sea $\tilde{G}$ el conjunto obtenido de forma inductiva a partir de F,*

1. *Para cada $g_i, g_j \in \tilde{G}$, define $S_{ij} = \overline{S(g_i, g_j)}^{\tilde{G}}$*
2. *Se define un nuevo $\tilde{\tilde{G}}$ como $\tilde{G} \cup \{S_{ij} \mid S_{ij} \neq 0\}$.*
3. *(a) Si en (2), $\tilde{G} = \tilde{\tilde{G}}$ se acaba el algoritmo y $G := \tilde{G}$ es una base de Groebner de I.*

(b) Si en (2) $\tilde{\tilde{G}}$ es estrictamente mayor que $\tilde{G}$, se comienza nuevamente desde (1) utilizando $\tilde{\tilde{G}}$.

El algoritmo de Buchberger puede producir bases de Groebner muy grandes (pues, siempre se le añade elementos a $\tilde{G}$) en el sentido de que algunos elementos sean irreducibles. Por eso conviene eliminar algunos generadores.

Lema 2.40. *Sea G una base de Groebner para un ideal de polinomios I. Sea $p \in G$ un polinomio tal que $TP(p) \in \langle TP(G) - \{p\}\rangle$. Entonces, $G - \{p\}$ es también una base de Groebner de I.*

Demostración. Sabemos que $\langle TP(G)\rangle = \langle TP(I)\rangle$. Si $TP(p) \in \langle (G-p)\rangle$, entonces $\langle TP(G-p)\rangle = \langle TP(G)\rangle$. Por definición se sigue que $G - p$ es base de Groebner para I. □

Haciendo los coeficientes principales igual a 1 y quitando algún p con $TP(p) \in \langle (G-p)\rangle$ para G, obtenemos una nueva base denominada base de Groebner minimal.

Definición 2.41. Una *base de Groebner minimal* de un ideal de polinomios I es una base de Groebner G de I tal que:

1. $CP(p) = 1$, para todo $p \in G$.
2. Para todo $p \in G$, $TP(p) \notin \langle TP(G - \{p\})\rangle$.

Al trabajar las constantes para obtener la base minimal, podemos tener muchas bases de Groebner minimales, pero se puede destacar una de estas bases minimal la cual es mejor que las otras. La definición de esta base es la siguiente.

Definición 2.42. Una base reducida de Groebner para un ideal polinomial I es una base de Groebner G de I tal que:

1. $CP(p) = 1$, para todo $p \in G$.
2. Para todo $p \in G$, no hay monomios de p en $\langle TP(G - \{p\})\rangle$.

Las bases de Groebner reducidas son importantes ya que son únicas.

Proposición 2.43. *Sea I un ideal de polinomios no nulo. Entonces, dado un orden monomial, I tiene una única base reducida de Groebner.*

Ejemplo 2.44. Sea $I = \langle f_1, f_2\rangle = \langle x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x\rangle \in \mathbb{K}[x, y]$ y consideremos el orden lexicográfico. En primer lugar observemos que $G = \{f_1, f_2\}$ no es una base de Groebner, en efecto

$$S(f_1, f_2) = y(x^3 - 2xy) - x(x^2y - 2y^2 + x) = -x^2 \neq 0,$$

además, $TP(S(f_1, f_2)) = -x^2 \notin \langle TP(f_1), TP(f_2)\rangle = \langle x^3, x^2y\rangle$. Por lo tanto, encontraremos una base de Groebner para I usando el algoritmo de Buchberger. Como

$$S(f_1, f_2) = -x^2 \neq 0 \quad y \quad \overline{S(f_1, f_2)}^{\tilde{G}} = -x^2 \neq 0,$$

consideraremos $f_3 = -x^2$ y así $\tilde{G} = \{f_1, f_2, f_3\}$. ¿ Es $\tilde{G}$ una base de Groebner para I?, calculamos

$$S(f_1, f_2) = -x^2 = f_3 \;\Rightarrow\; \overline{S(f_1, f_2)}^{\tilde{G}} = 0$$
$$S(f_1, f_3) = 1(x^3 - 2xy) - (-x)(-x^2) = -2xy \;\Rightarrow\; \overline{S(f_1, f_3)}^{\tilde{G}} = -2xy \neq 0$$

por lo tanto $\tilde{G}$ no es una base de Groebner de I, sea $f_4 = -2xy$ y $\tilde{\tilde{G}} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Veamos si $\tilde{\tilde{G}}$ es base de Groebner de I;

$$S(f_1, f_2) = -x^2 = f_3 \;\Rightarrow\; \overline{S(f_1, f_2)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$
$$S(f_1, f_3) = 1(x^3 - 2xy) - (-x)(-x^2) = -2xy = f_4 \;\Rightarrow\; \overline{S(f_1, f_3)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$
$$S(f_1, f_4) = y(x^3 - 2xy) - (-1/2)x^2(-2xy) = -2xy^2 = yf_4 \;\Rightarrow\; \overline{S(f_1, f_4)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$
$$S(f_2, f_3) = 1(x^2y - 2y^2 + x) - (-y)(-x^2) = -2y^2 + x \;\Rightarrow\; \overline{S(f_2, f_3)}^{\tilde{\tilde{G}}} = -2y^2 + x \neq 0$$

entonces, $\tilde{\tilde{G}}$ no es una base de Groebner. Consideremos $f_5 = -2y^2 + x$ y $\tilde{\tilde{G}} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$. Probaremos si $\tilde{\tilde{G}}$ es una base de Groebner de I;

$$\overline{S(f_1, f_2)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$
$$\overline{S(f_1, f_3)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$
$$\overline{S(f_1, f_4)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$
$$S(f_1, f_5) = 1(x^3 - 2xy) - x^2(-x^2) = -2xy + 2x^2y^2 = (1 + xy)f_4 \;\Rightarrow\; \overline{S(f_1, f_5)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$
$$S(f_2, f_3) = 1(x^2y - 2y^2 + x) - (-y)(-x^2) = -2y^2 + x = f_5 \;\Rightarrow\; \overline{S(f_2, f_3)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$
$$S(f_2, f_4) = 1(x^2y - 2y^2 + x) - (-1/2)x(-2xy) = -2y^2 + x = f_5 \;\Rightarrow\; \overline{S(f_2, f_4)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$
$$S(f_2, f_5) = 1(x^2y - 2y^2 + x) - xy(2y^2 + x) = -2y^2 + x - 2xy^3 = f_5 + y^2 f_4 \;\Rightarrow\; \overline{S(f_2, f_5)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$
$$S(f_3, f_4) = (-y)(-x^2) - (-1/2)x(-2xy) = 0 \;\Rightarrow\; \overline{S(f_3, f_4)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$
$$S(f_3, f_5) = (-1)(-x^2) - x(-2y^2 + x) = 2xy^2 = yf_4 \;\Rightarrow\; \overline{S(f_3, f_5)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$
$$S(f_4, f_5) = (-1/2)(-2xy) - y(-2y^2 + x) = 2y^3 - 2xy = -yf_5 + (-1/2)f_4 \;\Rightarrow\; \overline{S(f_4, f_5)}^{\tilde{\tilde{G}}} = 0$$

Por lo tanto $\tilde{\tilde{G}}$ es una base de Groebner de I. Por último convertiremos a $\tilde{\tilde{G}}$ en una base de Groebner minimal, claramente $TP(f_1) = x^3$ y $TP(f_3) = -x^2$, así $TP(f_1) = -x.TP(f_3)$, por Lema 2.24 podemos prescindir de f_1. Similarmente $TP(f_2) = x^2y$ y $TP(f_4) = -2xy$, entonces $TP(f_2) = (-1/2)x.TP(f_4)$, podemos así eliminar f_2. Como no existe otro caso donde el término principal de un generador divida al término principal de otro generador. Por lo tanto,

$$F_3 = x^2, \qquad F_4 = xy, \qquad F_5 = y^2 - (1/2)x$$

es una base de Groebner minimal de I.

2.4. Suma, intersección y cociente de ideales

Los ideales son objetos algebraicos, entonces podemos definir operaciones algebraicas entre ellos. En esta sección definiremos alguna operaciones binarias de ellos, suma, intersección y cociente.

Mostraremos que dados los generadores de un par de ideales podemos calcular los generadores de un nuevo ideal el cual resulta de aplicar estas operaciones, además veremos el significado geométrico de cada una de ellas.

2.4.1. Suma de ideales

Definición 2.45. Si I y J son ideales del anillo $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, entonces *la suma de I y J*, denotada por $I + J$, es el conjunto,

$$I + J = \{f + g : f \in I \wedge g \in J\}.$$

Proposición 2.46. *Si I y J son ideales in $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, entonces $I + J$ es también un ideal de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. En efecto, $I + J$ es el menor ideal que contiene a I y J. Además, si $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n\rangle$ y $J = \langle g_1, g_2, \ldots, g_m\rangle$, entonces $I + J = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n, g_1, g_2, \ldots, g_m\rangle$.*

2.4.2. Intersección de ideales

Definición 2.47. *La intersección $I \cap J$* de dos ideales I y J de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es un ideal de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ generado por elementos que pertenecen tanto a I como a J.

Un caso especial de la intersección de ideales es el siguiente,

Lema 2.48.

I. Si I es un ideal de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ generado por $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$, entonces $g(t)I$ es un ideal en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n, t]$ generado por $g(t)f_1(x), g(t)f_2(x), \ldots, g(t)f_m(x)$.

II. Si $g(x, t) \in f(x)I$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces $g(x, a) \in I$.

Teorema 2.49. *Sean I y J ideales de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ y $t \in \mathbb{K}$. Entonces,*

$$I \cap J = (tI + (1 - t)J) \cap \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

Demostración. En primer lugar notemos que por el Lema 2.48 y la Poposición 2.46, $(tI + (1 - t)J)$ es un ideal de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n, t]$. Para demostrar la igualdad probaremos una doble inclusión.

Supongamos $f \in I \cap J$, por lo tanto $f \in I$, entonces $tf \in tI$. Similarmente, como $f \in J$ implica que $(1-t)f \in (1-t)J$. Así $f = tf + (1 - t)f \in tI + (1 - t)J$. Como $I, J \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, se tiene que $f \in (tI + (1 - t)J) \cap \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Esto muestra que $I \cap J \subset (tI + (1 - t)J) \cap \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Sea ahora $f \in (tI + (1 - t)J) \cap \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, escribiremos $f(x) = g(x, t) + h(x, t)$, donde $g(x, t) \in tI$ y $h(x, t) \in (1 - t)J$. Consideremos primero $t = 0$. Sabemos que los elementos de tI son múltiplos de t, por ende $g(x, 0) = 0$. Entonces, $f(x) = h(x, 0)$, por Lema 2.48 $f(x) \in J$. Sea ahora $t = 1$, así $f(x) = g(x, 1) + h(x, 1)$. Pero todo elemento de $(1 - t)J$ es múltilpo de $1 - t$, por lo tanto $h(x, 1) = 0$. Entonces $f(x) = g(x, 1)$, por Lema 2.48 $f(x) \in I$. Luego $f(x) \in I \cap J$. Lo que implica $(tI + (1 - t)J) \cap \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \subset I \cap J$, así se completa la prueba. □

Ejemplo 2.50. Sean $I = \langle x^2y\rangle$ y $J = \langle xy^2\rangle$ ideales en $\mathbb{K}[x, y]$. Calcularemos $I \cap J$, por el Teorema 2.49

$$tI + (1 - t)J = \langle tx^2y, xy^2 - txy^2\rangle$$

Probaremos si $G = \langle f_1 = tx^2y, f_2 = xy^2 - txy^2\rangle$ es una base de Groebner, en caso de no serlo usaremos el algoritmo de Buchberger para encontrar una base. Consideremos el orden lexicográfico $t > x > y$.

$$S(f_1, f_2) = -y(tx^2y) - x(xy^2 - txy^2) = x^2y^2 \ \Rightarrow\ \overline{S(f_1, f_2)}^{G} = x^2y^2 \neq 0$$

Así G no es una base de Groebner de $tI + (1-t)J$. Sean $f_3 = x^2y^2$ y $\tilde{G} = \langle tx^2y, xy^2 - txy^2, x^2y^2\rangle$, veamos si $\tilde{G}$ es una base de Groebner;

$$\begin{aligned}
&S(f_1, f_2) = x^2y^2 = f_3 \ \Rightarrow\ \overline{S(f_1, f_2)}^{\tilde{G}} = 0\\
&S(f_1, f_3) = -y(tx^2y) - t(x^2y^2) = 0 \ \Rightarrow\ \overline{S(f_1, f_3)}^{\tilde{G}} = 0\\
&S(f_2, f_3) = -x(xy^2 - txy^2) - (-t)(x^2y^2) = -x^2y^2 = f_3 \ \Rightarrow\ \overline{S(f_2, f_3)}^{\tilde{G}} = 0
\end{aligned}$$

Entonces, $\tilde{G} = \langle tx^2y, xy^2 - txy^2, x^2y^2\rangle$ es una base de Groebner, más aún es una base de Groebner minimal de $tI + (1-t)J$. Así

$$(tI \ + \ (1 \ - \ t)J) \ \cap \ \mathbb{K}[x, y] \ = \ \{x^2y^2\}$$

Luego $I \cap J = \langle x^2y^2\rangle$.

2.4.3. Cociente de ideales en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$

Definición 2.51. Sean I y J ideales de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, el *cociente entre I y J*, denotado por $(I : J)$, definido por,

$$(I : J) \ = \ \{f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \ : \ fJ \subseteq I\}$$

es un ideal de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Enunciaremos algunas propiedades de los cocientes de ideales.

Proposición 2.52. *Sean I, J y L ideales en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Entonces:*

i. $(I : \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]) = I$.

ii. $IJ \subset L$ *si y solo si* $I \subset (L : J)$.

iii. $J \subset I$ *si y solo si* $(I : J) = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Si f es un polinomio e I un ideal, podemos calcular $(I : \langle f\rangle)$ de la siguiente manera:

$$(I : \langle f_1, f_2, \ldots, f_r\rangle) = \bigcap_{i=1}^{r} (I : f_i)$$

La cual es un caso especial de la Definición 2.51.

Veamos a continuación como calcular el ideal cociente $(I : J)$ dados los generadores de I y J.

Teorema 2.53. *Sea I un ideal y g un elemento de $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Si $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es una base de $I \cap \langle g\rangle$, entonces $\{f_1/g, f_2/g, \ldots, f_n/g\}$ es una base de $(I : \langle g\rangle)$.*

Demostración. Sea $h \in \langle g \rangle$, entonces $h = pg$ para algún polinomio p. Por lo tanto, si $f \in \langle f_1 \diagup g, f_2 \diagup g, \ldots, f_n \diagup g \rangle$;

$$hf = pgf \in \langle f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle = I \cap \langle g \rangle \subset I.$$

Así $hf \in I$, entonces $f \in (I : \langle g \rangle)$. Inversamente, supongamos $f \in (I : \langle g \rangle)$, entonces $fg \in I$, además $fg \in \langle g \rangle$. Por lo tanto $fg \in I \cap \langle g \rangle$. Si $I \cap \langle g \rangle = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle$; $fg = \sum p_i f_i$ para algunos polinomios p_i. Como cada $f_i \in \langle g \rangle$, cada $f_i \diagup g$ es un polinomio. Por lo tanto, $f = \sum p_i (f_i \diagup g)$, de donde $f \in \langle f_1 \diagup g, f_2 \diagup g, \ldots, f_n \diagup g \rangle$. □

Este teorema nos proporciona un algoritmo para calcular una base de un ideal cociente.

Dado $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_r \rangle$ y $J = \langle g_1, g_2, \ldots, g_s \rangle = \langle g_1 \rangle + \langle g_2 \rangle + \ldots + \langle g_s \rangle$, para calcular una base de $(I : J)$ seguiremos los siguientes pasos,

1. Calcular una base de $(I : \langle g_i \rangle)$ para cada i.
2. Calcular una base de $\langle f_1, f_2, \ldots, f_r \rangle \cap \langle g_i \rangle$ para cada i. Recordemos que en este paso obtenemos una base de Groebner usando el Teorema 2.53.
3. Usando el algoritmo de la división se divide cada uno de los elementos de la base obtenida en 2, por g_i obteniendo una base para $(I : \langle g_i \rangle)$.
4. Finalmente, se calcula una base para $(I : J)$ aplicando la intersección de este algoritmo $s - 1$ veces, calculando primero una base de $(I : \langle g_1, g_2 \rangle) = (I : \langle g_1 \rangle) \cap (I : \langle g_2 \rangle)$, luego una base para $(I : \langle g_1, g_2, g_3 \rangle) = (I : \langle g_1, g_2 \rangle) \cap (I :\rangle g_3 \rangle)$ y así sucesivamente.

2.5. Descomposición primaria de ideales

Definición 2.54. Un ideal I en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es *primario* si $fg \in I$ implica que $f \in I$ o para algún entero $m > 0$, $g^m \in I$.

Lema 2.55. *Si I es un ideal primario, entonces su ideal radical $\sqrt{I}$ es primo. Mas aún, es el menor ideal primo que contiene a I.*

De acuerdo al Lema 2.55 se obtiene la siguiente definición.

Definición 2.56. Si I es primario y $\sqrt{I} = p$, entonces se dice que I es *p-primario.*

La intersección de ideales p-primarios es p-primario.

Lema 2.57. *Si $q_i (1 \leq i \leq n)$ son p- primarios, entonces $q = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ es p - primario.*

Demostración. En efecto, $\sqrt{q} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} q_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \sqrt{q_i} = p$. Sea $xy \in q$, $y \notin q$, entonces para algún i se tiene $xy \in q_i$ e $y \notin q_i$, por lo tanto $x \in p$, ya que q_i es primario. □

Veamos que todo ideal de polinomios puede escribirse como intersección de ideales primarios.

Teorema 2.58. *Todo ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ se pueden escribir como una intersección finita de ideales primarios.*

Demostración. Diremos que un ideal I es irreducible, si $I = I_1 \cap I_2$ implica que $I = I_1$ o $I = I_2$. Es claro que todo ideal es intersección de ideales irreducibles. Por lo tanto, para probar este teorema, basta con probar que todo ideal irreducible es primario. Supongamos que I irreducible y que $fg \in I$ con $f \notin I$, probaremos que existe una potencia entera positiva de g que está en I. Consideremos el ideal $(I : g^n)$ para $n \geq 1$, es fácil ver que $(I : g^n) \subset (I : g^{n+1})$ para todo n. Por lo tanto, tenemos una cadena ascendiente de ideales

$$(I : g) \subset (I : g^2) \subset \cdots .$$

Por condición de cadenas ascendente, existe un entero $N \geq 1$ tal que $(I : g^N) = (I : g^{N+1}) = \cdots$. Además, $(I : \langle g^N \rangle) \cap (I : \langle f \rangle) = I$, pues $fg \in I$. Como I es irreducible, se sigue $I = (I : \langle g^N \rangle)$ o $I = (I : \langle f \rangle)$, este último caso no puede ocurrir ya que $f \notin I$, así $I = (I : \langle g^N \rangle)$. Lo cual prueba que $g^N \in I$, por lo tanto I es primario. $\square$

Como en el caso de las variedades, esta descomposición puede ser minimal.

Definición 2.59. Una *descomposición primaria* de un ideal I es una expresión de I como intersección de ideales primarios: $I = \bigcap_{i=1}^r q_i$. Esta descomposición se llama *minimal*, si $\sqrt{q_i}$ son todos distintos y $\bigcap_{i \neq j} q_j \not\subset q_i$.

Para poder demostrar la existencia de una descomposición minimal, se necesita el siguiente lema.

Lema 2.60. *Si I y J son primarios y $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, entonces $I \cap J$ es primaria.*

Teorema 2.61 (Lasker-Noether)**.** *Todo ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tiene una descomposición primaria minimal.*

Demostración. Por Teorema 2.58 sabemos que todo ideal I tiene una descomposición por ideales $I = \bigcap_{i=1}^n q_i$, más aún, esta descomposición es primaria. Supongamos que q_i y q_j tienen el mismo radical para algún $i \neq j$. Entonces, por el Lema 2.59, $q = q_i \cap q_j$ es primario. Reemplazando q_i y q_j por q en la descomposición de I, y continuando este procedimiento, todos los q_i's tendrán distinto radical y por lo tanto la intersección de ellos será primaria.

Ahora, supongamos $\bigcap_{i \neq j} q_j \subset q_i$. Entonces, omitirémos q_i y escribiremos a I como la intersección de q_j's con $j \neq i$. Con esta misma idea, tomaremos a $I = \bigcap_{j \neq i} q_i$. Continuando de esta manera, se puede reducir al caso $q_i \not\supset \bigcap_{j \neq i} q_i$ para toda i. $\square$

Capítulo 3

Deformaciones lineales en la variedad de álgebras de Lie

3.1. La variedad $\mathfrak{L}^n$

Llamaremos $\mathfrak{L}^n$ al conjunto de corchetes μ de $\mathbb{C}^n$. Si $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ es una base fija de $\mathbb{C}^n$, identificamos a $\mu \in \mathfrak{L}^n$ con sus constantes de estructura, los números complejos c_{ij}^k dados, para $0 \leq i, j \leq n-1$, por:

$$\mu(x_i, x_j) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{ij}^k x_k$$

éstos satisfacen las siguientes ecuaciones polinomiales, para $0 \leq i, j, k \leq n-1$:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \qquad \text{(Antisimetría)}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} c_{ji}^l c_{lk}^s + c_{jk}^l c_{li}^s + c_{ki}^l c_{jl}^s = 0 \qquad \text{(Identidad de Jacobi)}$$

Así resulta que el conjunto $\mathfrak{L}^n$ es una subvariedad algebraica de la variedad afín $\mathbb{C}^{n^3}$, que llamamos variedad algebraica de las álgebras de Lie complejas de dimensión n. Consideramos a $\mathfrak{L}^n$, en primer lugar, con la topología (relativa) euclídea; aunque también consideraremos de manera secundaria la topología Zariski.

El grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ actúa naturalmente en $\mathfrak{L}^n$ por cambio de base:

$$(g \bullet \mu)(x, y) = g\ \mu(g^{-1}x, g^{-1}y).$$

Luego la órbita de μ, $\mathcal{O}(\mu)$, es la clase de isomorfismo de μ.

Dada $\mu \in \mathfrak{L}^n$, si consideramos el subgrupo de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

$$G_\mu = \{f \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : f \bullet \mu = \mu\}$$

podemos identificar, como variedad diferenciable, a la órbita $\mathcal{O}(\mu)$ con el espacio homogéneo $\dfrac{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})}{G_\mu}$. Además, como el álgebra de Lie de G_μ es el álgebra de derivaciónes $\mathrm{Der}(\mu)$, se sigue que

$$\dim \mathcal{O}(\mu) = n^2 - \dim \mathrm{Der}(\mu).$$

3.2. Álgebras de Lie rígidas y deformaciones lineales

Definición 3.1. Un álgebra de Lie $\mu \in \mathfrak{L}^n$ es *rígida* si su órbita $\mathcal{O}(\mu)$ es abierta en $\mathfrak{L}^m$.

Un concepto relevante al de rigidez es el de deformación. En un sentido general, una deformación de un corchete de Lie es una modificación continua de sus constantes de estructura. Así se pueden considerar deformaciones de μ dadas como una curva μ_t en $\mathfrak{L}^n$, con $t \in \mathbb{C}$, que comienza en $\mu_0 = \mu$. Definiciones más generales de deformaciones fueron dadas por Gerstenhaber en el año 1964 y desarrolladas por Ninjenhuis y Richardson. Una deformación μ_t de μ es *trivial* si μ_t es isomorfa a μ para todo t en un entorno de 0, caso contrario se dice que es no trivial. Así un álgebra de Lie con una deformación μ_t no trivial, no es rígida.

Definición 3.2. Una deformación lineal de $\mu \in \mathfrak{L}^n$ es una deformación μ_t tal que

$$\mu_t = \mu + t\varphi$$

donde φ es una aplicación bilineal y alternante.

Dados dos mapas bilineales y alternantes μ y φ, denotamos $\mu \circ \varphi$ a la aplicación trilineal definida por:

$$\begin{aligned} \mu \circ \varphi(x, y, z) &= \circlearrowleft \mu(\varphi(x, y), z) \\ &= \mu(\varphi(x, y), z) + \mu(\varphi(y, z), x) + \mu(\varphi(z, x), y) \end{aligned}$$

Es inmediato que $\mu \circ \varphi$ es lineal en μ y en φ.

Observación 3.3. Notar que $\mu \circ \mu = 0$ es la identidad de Jacobi para μ y que fijada μ, $\mu \circ \varphi + \varphi \circ \mu = 0$ es la ecuación que define a los 2-cociclos de μ (ver (1.1)).

Proposición 3.4. *$\mu_t = \mu + t\ \varphi$ es una deformación lineal de μ si y sólo si φ es un corchete de Lie y un 2-cociclo de μ.*

Demostración. μ_t es corchete de Lie si y sólo si $\mu_t \circ \mu_t = 0$ para todo t. Ahora, como $\mu \circ \mu = 0$, pues μ es álgebra de Lie,

$$\mu_t \circ \mu_t = t(\mu \circ \varphi + \varphi \circ \mu) + t^2(\varphi \circ \varphi).$$

Se sigue entonces que si $\mu_t \circ \mu_t = 0$ para todo t, entonces $\mu \circ \varphi + \varphi \circ \mu = 0$ y $\varphi \circ \varphi = 0$. La reciproca es obvia. □

3.3. Construcción de Grunewald-O'Halloran

Presentamos a continuación la construcción de deformaciones lineales de Grunewald-O'Halloran, de la cual se sigue que cierta familia de álgebra nilpotentes no son rígidas.

Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete μ y $\mathfrak{h}$ un ideal de codimensión 1 de $\mathfrak{g}$. Sea D una derivación de $\mathfrak{h}$ y sea $x \notin \mathfrak{h}$, de manera que $\mathfrak{g} = \langle x \rangle \oplus \mathfrak{h}$. Entonces la aplicación bilineal φ_D definida por

$$\begin{aligned} \varphi_D(x, h) &= D(h) \qquad \text{para todo } h \in \mathfrak{h} \\ \varphi_D(h, h') &= 0 \qquad \text{para todo } h, h' \in \mathfrak{h}, \end{aligned}$$

es un corchete de Lie y un 2-cociclo de μ.

En efecto, por un lado

$$\begin{aligned}\varphi_D \circ \varphi_D(h_1,h_2,x) &= \varphi_D(\varphi_D(h_1,h_2),x)+\varphi_D(\varphi_D(h_2,x),h_1)+\varphi_D(\varphi_D(x,h_1),h_2)\\ &= \varphi_D(0,x)-\varphi_D(D(h_2),h_1)+\varphi_D(D(h_1),h_2)\\ &= 0;\end{aligned}$$

es decir, φ_D es álgebra de Lie. Por otro lado,

$$\begin{aligned}(\mu\circ\varphi_D+\varphi_D\circ\mu)(h_1,h_2,x) &= \mu(\varphi_D(h_1,h_2),x)+\mu(\varphi_D(h_2,x),h_1)+\mu(\varphi_D(x,h_1),h_2)\\ &\quad +\varphi_D(\mu(h_1,h_2),x)+\varphi_D(\mu(h_2,x),h_1)+\varphi_D(\mu(x,h_1),h_2)\\ &= \mu(0,x)-\mu(D(h_2),h_1)+\mu(D(h_1),h_2)-\varphi_D(x,\mu(h_1,h_2))\\ &= \mu(h_1,D(h_2))+\mu(D(h_1),h_2)-\varphi_D(x,\mu(h_1,h_2))\\ &= 0 \qquad \text{(pues } D \text{ es derivación)}\end{aligned}$$

para $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$; y como claramente $(\mu\circ\varphi_D+\varphi_D\circ\mu)(h_1,h_2,h_3)=0$ para $h_1,h_2,h_3 \in \mathfrak{h}$, resulta que φ_D es un 2-cociclo para μ.

Por lo tanto

$$\mu_t = \mu + t\varphi_D$$

es una deformación linea de μ.

Si el álgebra $\mathfrak{g}$ es nilpotente y la derivación D del ideal $\mathfrak{h}$ es semisimple no nula (basta que tenga un autovalor no nulo), en μ_t la transformación lineal ad_x, no es nilpotente. Por lo tanto μ_t no es un álgebra de Lie nilpotente (es soluble no nilpotente) y la deformación μ_t es no trivial. Notamos que tener una derivación con un autovalor no nulo es equivalente a tener una derivación semisimple no nula (la parte semisimple). Estos son los argumentos que prueban el siguiente teorema.

Teorema 3.5 (Grunewald-O'Halloran). *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente, $\mathfrak{h}$ un ideal de codimensión 1 de $\mathfrak{g}$ y D una derivación semisimple no nula de $\mathfrak{h}$, entonces $\mathfrak{g}$ tiene una deformación lineal no trivial.*

3.4. Una nueva clase de deformaciones lineales

En esta sección introducimos un nuevo método para construir deformaciones lineales de álgebras de Lie, el cual se adapta muy bien a las álgebras de Lie filiformes.

Teorema 3.6. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete μ y sea $\mathfrak{K}$ ideal de $\mathfrak{g}$ de codimensión 2 tal que $\mu(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{K}$. Sea $\langle x_0, x_1\rangle$ complemento directo de $\mathfrak{K}$ con $\mathfrak{g} = \langle x_0, x_1\rangle \oplus \mathfrak{K}$.*

Si $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{K})$ es tal que $D\circ \mathrm{ad}_{x_0} = \mathrm{ad}_{x_0}\circ D$, entonces el mapa bilineal antisimétrico φ_D definido por,

$$\varphi_D(x_0,x_1)=0, \quad \varphi_D(x_0,k)=0, \quad \varphi_D(x_1,k)=D(k), \quad \varphi_D(k,k')=0,$$

para todo $k, k' \in \mathfrak{K}$, es un corchete de Lie y un 2-cociclo de $\mathfrak{g}$. Por lo tanto $\mu_t = \mu + t\varphi_D$ es una deformación lineal de μ.

Demostración. Probaremos que $\varphi_D\circ\varphi_D = 0$ y $\mu\circ\varphi_D+\varphi_D\circ\mu = 0$.

Por un lado, si $k, k' \in \mathfrak{K}$ entonces

$$\begin{aligned}
\circlearrowleft \varphi_D(\varphi_D(x_0, x_1), k) &= \\
&= \varphi_D(\varphi_D(x_0, x_1), k) + \varphi_D(\varphi_D(x_1, k), x_0) + \varphi_D(\varphi_D(k, x_0), x_1) \\
&= \varphi_D(0, k) - \varphi_D(D(k), x_0) - \varphi_D(0, x_1) = 0; \\
\circlearrowleft \varphi_D(\varphi_D(x_0, k), k') &= \\
&= \varphi_D(\varphi_D(x_0, k), k') + \varphi_D(\varphi_D(k, k'), x_0) + \varphi_D(\varphi_D(k', x_0), k) \\
&= \varphi_D(0, k') + \varphi_D(0, x_0) + \varphi_D(0, k) = 0; \\
\circlearrowleft \varphi_D(\varphi_D(x_1, k), k') &= \\
&= \varphi_D(\varphi_D(x_1, k), k') + \varphi_D(\varphi_D(k, k'), x_1) + \varphi_D(\varphi_D(k', x_1), k) \\
&= \varphi_D(D(k), k') + \varphi_D(0, x_1) - \varphi_D(D(k'), k) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi_D \circ \varphi_D = 0$.

Por otro lado, si $k, k' \in \mathfrak{K}$ entonces

$$\begin{aligned}
\circlearrowleft \mu(\varphi_D(x_0, x_1), k) + \circlearrowleft \varphi_D(\mu(x_0, x_1), k) &= \\
&= \mu(\varphi_D(x_0, x_1), k) + \mu(\varphi_D(x_1, k), x_0) + \mu(\varphi_D(k, x_0), x_1) + \\
&\quad + \varphi_D(\mu(x_0, x_1), k) + \varphi_D(\mu(x_1, k), x_0) + \varphi_D(\mu(k, x_0), x_1) \\
&= \mu(0, k) + \mu(D(k), x_0) + \mu(0, x_1) + 0 + 0 - \varphi_D(x_1, \mu(k, x_0)) \\
&= -\mu(x_0, D(k)) + D(\mu(x_0, k) \\
&= 0; \\
\circlearrowleft \mu(\varphi_D(x_0, k), k') + \circlearrowleft \varphi_D(\mu(x_0, k), k') &= \\
&= \mu(\varphi_D(x_0, k), k') + \mu(\varphi_D(k, k'), x_0) + \mu(\varphi_D(k', x_0), k) + \\
&\quad + \varphi_D(\mu(x_0, k), k') + \varphi_D(\mu(k, k'), x_0) + \varphi_D(\mu(k', x_0), k) \\
&= \mu(0, k') + \mu(0, x_0) + \mu(0, k) + 0 + 0 + 0 \\
&= 0; \\
\circlearrowleft \mu(\varphi_D(x_1, k), k') + \circlearrowleft \varphi_D(\mu(x_1, k), k') &= \\
&= \mu(\varphi_D(x_1, k), k') + \mu(\varphi_D(k, k'), x_1) + \mu(\varphi_D(k', x_1), k) + \\
&\quad + \varphi_D(\mu(x_1, k), k') + \varphi_D(\mu(k, k'), x_1) + \varphi_D(\mu(k', x_1), k) \\
&= \mu(D(k), k') + \mu(0, x_1) - \mu(D(k'), k) + 0 - D(\mu(k, k')) + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu \circ \varphi_D + \varphi_D \circ \mu = 0$.

□

Observación 3.7. Esta construcción no solo se aplica a las álgebras de Lie nilpotentes. La hipótesis de nilpotencia se utilizó en la prueba solo para asegurar que $\mu(x_0, x_1) \in \mathfrak{K} \oplus \langle x_0 \rangle$.

Por ejemplo, la construcción se aplica al siguiente ejemplo. Sea $\mathfrak{g} = \langle x_0, x_1 \rangle \oplus \mathbb{C}^{n-2}$, con corchete μ, la suma directa del álgebra de Lie soluble de dimensión 2, $\mu(x_0, x_1) = x_0$ y el álgebra de Lie abeliana de dimensión $n - 2$. Elegimos $\mathfrak{K} = \mathbb{C}^{n-2}$ y sea D una derivación de $\mathfrak{K}$, es decir, un endomorfismo de $\mathfrak{K}$. Como $\mu(x_0, x_1) = x_0$, D conmuta con ad_{x_0} in $\mathfrak{K}$ siempre, entonces podemos elegir cualquier D. Por lo tanto, el φ_D dá lugar a una deformación lineal $\mu_t = \mu + t\varphi_D$ de μ dada por:

$$\mu_t(x_0, x_1) = x_0, \quad \mu_t(x_0, h) = 0, \quad \mu_t(x_1, h) = tD(h), \quad \mu_t(h, h') = 0.$$

Observación 3.8. Nuestra construcción está inspirada en la construcción de Grunewald-O'Halloran dada en [GO] y enunciada en la Sección 3.3.

Capítulo 4

La variedad algebraica de álgebras de Lie filiformes

En la década de los sesenta Michèle Vergne, en su tesis de doctorado, introdujo y prestó especial atención a las álgebras de Lie filiformes las cuales forman una subclase de las álgebras de Lie nilpotentes.

Demostró que la variedad de las álgebras de Lie nilpotente de dimensión n tienen una componente irreducible de dimensión mayor a n^2 constituida por álgebras filiformes, mostrando así la gran importancia de esta subclase de álgebras de Lie nilpotentes.

Además mostró que toda álgebra de Lie filiforme es isomorfa una filiforme *estándar* más un 2-cociclo especial de la representación adjunta de la cohomología de Chevalley.

Michèle Vergne fué quien puso mayor énfasis en la clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes y estudió con profundidad la variedad de las álgebras de Lie. Existe una conjetura abierta desde el año 1970, la cual lleva su nombre, que inspira nuestro trabajo.

Conjetura: No existen álgebras de Lie nilpotentes rígidas en la variedad $\mathfrak{L}^n$ de álgebras de Lie de dimensión n.

En las tres primeras secciones mencionaremos algunos resultados obtenidos por Michèle Vergne [VM1], fundamentales para esta tesis.

4.1. Teorema de Vergne

El primer resultado importante sobre la estructura de las filiformes, clasifica las filiformes naturalmente graduadas.

Teorema 4.1 (Vergne). *Sea $\mathfrak{f}$ un álgebra de Lie compleja filiforme naturalmente graduada de dimensión n con corchete μ; es decir $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 + \ldots + \mathfrak{f}_{n-1}$, con $\dim \mathfrak{f}_1 = 2$, $\dim \mathfrak{f}_i = 1$, $2 \leq i \leq n-1$ y $\mu(\mathfrak{f}_i, \mathfrak{f}_j) \subset \mathfrak{f}_{i+j}$. Entonces existe una base $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ de $\mathfrak{f}$, con $x_0, x_1 \in \mathfrak{f}_1$ y $x_i \in \mathfrak{f}_i$ para $i \geq 1$, tal que*

$$\mu(x_0, x_i) = x_{i+1}, \quad (1 \leq i \leq n-2)$$
$$\mu(x_0, x_{n-1}) = 0.$$

Más aún, μ también satisface que:

$$\mu(x_i, x_j) = 0, \quad si \;\; i, j \geq 1, \;\; y \;\; i + j \neq n - 1,$$
$$\mu(x_i, x_{n-i}) = (-1)^i \; \alpha \; x_{n-1}, \quad con \;\; \alpha = 0 \;\; si \;\; n \; es \; par.$$

Demostración. Sean $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ elementos no nulos de $\mathfrak{f}_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$, entonces si $f \in \mathfrak{f}_1$,

$$\mu(f, y_i) = \lambda_i(f) y_{i+1}$$

la aplicación $f \longmapsto \lambda_i(f)$ es lineal respecto a $\mathfrak{f}_1$, no idénticamente nula, pues $\mu(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_i) = \mathfrak{f}_{i+1}$. Así, existe un elemento x_0 tal que $\lambda_i(x_0) \neq 0$, para $1 \leq i \leq n-2$, por lo tanto, eligiendo los x_i como múltiplos de los y_i, los x_i forman una base adaptada de $\mathfrak{f}$.

Para la segunda parte usaremos recurrencia inductiva sobre la dimensión de $\mathfrak{f}$. Sea $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ una base adaptada de $\mathfrak{f}$, entonces $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}\}$ es una base adaptada de $\mathfrak{f} \diagup \mathbb{C}x_{n-1}$.

Supongamos n impar. Entonces

$$\mu(x_i, x_j) = 0, \;\; si \;\;\; i + j < n - 2$$

pero $\mu(x_i, x_{n-1-i}) = \alpha_i x_{n-1}$, usando Jacobi tenemos,

$$\begin{aligned} \mu(\mu(x_0, x_i), x_{n-2-i}) + \mu(\mu(x_i, x_{n-2-i}), x_0) + \mu(\mu(x_{n-2-i}, x_0), x_i) = \\ = \mu(x_{i+1}, x_{n-2-i}) - \mu(x_{n-1-i}, x_i) \;\; = \\ = \mu(x_{i+1}, x_{n-1-(i-1)}) + \mu(x_i, x_{n-1-i}) \;\; = \\ = \alpha_{i+1} x_{n-1} + \alpha_i x_{n-1} = (\alpha_i + \alpha_{i+1}) x_{n-1} \end{aligned}$$

por lo tanto, $\alpha_i = -\alpha_{i+1}$, entonces $\alpha_i = (-1)^i \alpha$.

Sea ahora n par. Entonces

$$\mu(x_i, x_{n-2-i}) = (-1)^i \alpha x_{n-2},$$
$$\mu(x_i, x_{n-i}) = \alpha_i x_n$$

Usando Jacobi, tenemos:

$$\begin{aligned} \mu(\mu(x_0, x_i), x_{n-2-i}) + \mu(\mu(x_i, x_{n-2-i}), x_0) + \mu(\mu(x_{n-2-i}, x_0), x_i) = \\ = \mu(x_{i+1}, x_{n-2-i}) + \mu((-1)^i \alpha x_{n-2}, x_0) + \mu(-x_{n-1-i}, x_i) = \\ = \alpha_{i+1} x_{n-1} - (-1)^i \alpha x_{n-1} + \alpha_i x_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(-1)^i \alpha = \alpha_i + \alpha_{i+1}$, es decir, $\alpha_i = (-1)^{i+1}(\alpha_1 + (i-1)\alpha)$, pero $\alpha_{n/2} = 0$, entonces;

$$\alpha_1 = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \alpha,$$
$$\alpha_i = (-1)^{i+1} \left(i - \frac{n}{2}\right) \alpha.$$

Aplicando nuevamente Jacobi,

$$\begin{aligned} \mu(\mu(x_0, x_{n/2-1}), x_{n/2}) + \mu(\mu(x_{n/2-1}, x_{n/2}), x_0) + \mu(\mu(x_{n/2}, x_0), x_{n/2-1}) = \\ = \mu(x_{n/2}, x_{n/2}) + \mu((-1)^i \alpha x_{n-1}, x_0) + \mu(x_{n/2+1}, x_{n/2-1}) = \\ = (-1)^i \alpha x_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha = 0$, en consecuencia, $\alpha_i = 0$. $\square$

La base $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ del Teorema 4.1 se denomina *base adaptada o estándar.*

Corolario 4.2. *Sea $\mathfrak{f}$ un álgebra de Lie filiforme naturalmente graduada de dimensión n con corchete μ y base adaptada $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.*

Si n es impar, entonces μ es igual a μ_0 o μ_0^1, donde:

$$\begin{aligned} \mu_0(x_0, x_i) &= x_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-2, \\ \mu_0(x_i, x_j) &= 0, \qquad i, j \le 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_0^1(x_0, x_i) &= x_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-2, \\ \mu_0^1(x_i, x_{n-i}) &= (-1)^i x_{n-1} \quad i \le n-2, \\ \mu_0^1(x_i, x_j) &= 0, \qquad i, j \le 1 \end{aligned}$$

Si n es par, entonce μ es igual a μ_0.

El álgebra de Lie filiforme $\mathfrak{f}$ con corchete μ_0 recibe el nombre de *filiforme estándar.*

Si $\mathfrak{f}$ es una álgebra de Lie filiforme arbitraria, con corchete μ, se sigue del Teorema 4.1, considerando el álgebra de Lie naturalmente graduada asociada a la filtración de la serie central descendente de $\mathfrak{f}$, que existe una base $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ tal que

$$\begin{aligned} \mu(x_0, x_i) &= x_{i+1} \quad (1 \le i \le n-2) \\ \mu(x_0, x_{n-1}) &= 0 \\ \mu(x_1, x_2) &\in \mathbb{C}x_4 + \mathbb{C}x_5 + \cdots + \mathbb{C}x_{n-1}. \end{aligned}$$

Una tal base de $\mathfrak{f}$ se llama *adaptada.*

4.2. Descripción de los corchetes filiformes

Teorema 4.3 (Vergne). *Sean $\mathfrak{f}$ álgebra de Lie filiforme con corchete μ de dimensión n y $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ una base adaptada de $\mathfrak{f}$. Entonces μ es isomorfo a una álgebra de la forma $\mu_0 + \Psi$ donde Ψ es una aplicación bilineal tal que*

$$\begin{aligned} &\Psi(x_0, x_i) = 0 \\ &\Psi(x_i, x_j) \in \mathbb{C}x_{i+j+1} + \cdots + \mathbb{C}x_{n-1} \quad si \quad i + j < n-1 \\ &\Psi(x_i, x_{n-i}) = (-1)^i \alpha x_{n-1} \quad o \quad \alpha = 0 \quad si \quad n \quad es \quad par \end{aligned}$$

Como $\mu_0 + \Psi$ es un corchete de Lie debe verificar $(\mu_0 + \Psi) \circ (\mu_0 + \Psi) = 0$ esto es equivalente a resolver

$$\mu \circ \Psi + \Psi \circ \mu = 0 \qquad y \qquad \Psi \circ \Psi = 0.$$

El conjunto $L(\mu_0)$ de 2-cociclos Ψ de μ_0 que verifican las condiciones del teorema y además satisfacen $\Psi \circ \Psi = 0$ es un conjunto algebraico de $Z^2(\mu_0, \mu_0)$.

El siguiente resultado explicita la descripición anterior. Se lo puede encontrar en [KY].

Teorema 4.4 (Kakimjanov). *Sea Δ un conjunto de pares enteros (k, s) tales que $1 \le k \le [(n-2)/2], 2k+1 \le s \le n-1$. Para cada par $(k, s) \in \Delta$, sea $\psi_{k,s} \in Z^2(\mu_0, \mu_0)$ definido por*

$$\psi_{k,s}(x_i, x_j) = (-1)^{k-i} \binom{j-k-1}{k-i} (ad_{x_0})^{i+j-2k-1} x_s$$

para $1 \leq i < k < j - 1 \leq n - 1$, $2k + 1 \leq s \leq n - 1$ *y* $\psi_{k,s}(x_i, x_j) = 0$ *en otros casos.*

Entonces para todo corchete de Lie filiforme μ *existe parámetros* $\{a_{k,s}\}$ *tales que* μ *es isomorfo a* $\mu_0 + \Psi$*, donde* μ_0 *es el corchete filiforme estándar y*

$$\Psi = \sum_{(k,s)\in\Delta} a_{k,s}\psi_{k,s}$$

4.3. Parametrización de álgebras filiformes de dimensiones bajas

Ya hemos visto que podemos describir a una filiforme cualquiera como $\mu + \Psi$, donde los posibles Ψ dependen de un conjunto de parámetros $\{a_{k,s}\}$. Como Ψ es un 2-cociclo de μ y μ es filiforme, se sigue que $\mu + \Psi$ es filiforme si y sólo si Ψ es álgebra de Lie, es decir si y sólo s $\Psi \circ \Psi = 0$. Esta última identidad es equivalente a un sistema de ecuaciones polinomiales en los prámetros $\{a_{k,s}\}$ y éstas describen a la variedad de filiformes.

A continuación presentamos los sistemas de ecuaciones que describen las correspondientes variedades de filiformes para dimensiones entre 7 y 11. Aunque para estas dimensiones no es difícil escribirlas, y dado que las cuentas no son relevantes, sólo las presentamos tal como en [GJK1].

Álgebras filiformes de dimensión 7

$\Psi = a_{1,4}\psi_{1,4} + a_{1,5}\psi_{1,5} + a_{1,6}\psi_{1,6} + a_{2,6}\psi_{2,6}$, sin restricciones en los parámetros.

Álgebras filiformes de dimensión 8

$\Psi = a_{1,4}\psi_{1,4} + a_{1,5}\psi_{1,5} + a_{1,6}\psi_{1,6} + a_{1,7}\psi_{1,7} + a_{2,6}\psi_{2,6} + a_{2,7}\psi_{2,7} + a_{3,7}\psi_{3,7}$, donde

$$a_{3,7}(2a_{1,4} + a_{2,6}) = 0$$

Álgebras filiformes de dimensión 9

$\Psi = a_{1,4}\psi_{1,4} + a_{1,5}\psi_{1,5} + a_{1,6}\psi_{1,6} + a_{1,7}\psi_{1,7} + a_{1,8}\psi_{1,8} + a_{2,6}\psi_{2,6} + a_{2,7}\psi_{2,7} + a_{2,8}\psi_{2,8} + a_{3,8}\psi_{3,8}$, donde

$$-3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,8} = 0$$

Álgebras filiformes de dimensión 10

$\Psi = a_{1,4}\psi_{1,4} + a_{1,5}\psi_{1,5} + a_{1,6}\psi_{1,6} + a_{1,7}\psi_{1,7} + a_{1,8}\psi_{1,8} + a_{1,9}\psi_{1,9} + a_{2,6}\psi_{2,6} + a_{2,7}\psi_{2,7} + a_{2,8}\psi_{2,8} + a_{2,9}\psi_{2,9} + a_{3,8}\psi_{3,8} + a_{3,9}\psi_{3,9} + a_{4,9}\psi_{4,9}$, donde

$$\begin{cases} -3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,8} = 0, \\ 2a_{1,4}a_{3,9} + 3a_{1,5}a_{3,8} - 7a_{2,6}a_{2,7} + a_{2,6}a_{3,9} + 3a_{2,7}a_{3,8} - a_{4,9}(a_{2,8} + 2a_{1,6}) = 0, \\ a_{4,9}(2a_{1,4} - a_{2,6} - a_{3,8}) = 0 \end{cases}$$

Álgebras filiformes de dimensión 11

$$\Psi = a_{1,4}\psi_{1,4} + a_{1,5}\psi_{1,5} + a_{1,6}\psi_{1,6} + a_{1,7}\psi_{1,7} + a_{1,8}\psi_{1,8} + a_{1,9}\psi_{1,9} + a_{1,10}\psi_{1,10} + a_{2,6}\psi_{2,6} + a_{2,7}\psi_{2,7} + a_{2,8}\psi_{2,8} + a_{2,9}\psi_{2,9} + a_{2,10}\psi_{2,10} + +a_{3,8}\psi_{3,8} + a_{3,9}\psi_{3,9} + a_{3,10}\psi_{3,10} + a_{4,10}\psi_{4,10}, \text{ donde}$$

$$\begin{cases} -3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,8} = 0 \\ -4a_{2,6}a_{3,8} + 6a_{3,8}^2 + 2a_{1,4}a_{4,10} - a_{3,8}a_{4,10} = 0 \\ -7a_{2,6}a_{2,7} + 3a_{1,5}a_{3,8} + 3a_{2,7}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,9} + a_{2,6}a_{3,9} = 0 \\ -4a_{2,7}^2 - 8a_{2,6}a_{2,8} + 4a_{1,6}a_{3,8} + 6a_{2,8}a_{3,8} + 3a_{1,5}a_{3,9} + 3a_{2,7}a_{3,9} + 2a_{1,4}a_{3,10} \\ +a_{2,6}a_{3,10} - 2a_{1,6}a_{4,10} - a_{2,8}a_{4,10} = 0 \end{cases}$$

4.4. Las componentes irreducibles de la variedades $\mathfrak{F}^n$

El resultado que se enuncia en esta sección está dado por Khakimdjanov, lo podemos encontrar en [KY]. Los mismos están solo enunciados por tal motivo en el capítulo 6, con la ayuda de singular y realizando cuentas manualmente se pudo encontrar las componentes irreducibles de $\mathfrak{F}^{10}$, en caso de dimensión 11 el trabajo es mucho más complejo por lo que no pudo demostrarse que las componentes dadas en [KY] son realmente las componentes irreducibles de $\mathfrak{F}^{11}$.

Teorema 4.5. *Las componentes irreducibles de $\mathfrak{F}^n$, $7 \leq n \leq 11$ son*

1. *$\mathfrak{F}^7$ es irreducible, es decir contiene solo una órbita abierta.*

2. *$\mathfrak{F}^8$ es la unión de dos componentes irreducibles;*

$$a_{3,7} = 0 \qquad 2a_{1,4} + a_{2,6} = 0$$

3. *$\mathfrak{F}^9$ es irreducible: $-3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,8} = 0$.*

4. *$\mathfrak{F}^{10}$ es la unión de tres componentes irreducibles;*

$$\begin{cases} a_{4,9} = 0, \\ 7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2 - 3a_{2,7}a_{3,8}^2 - 3a_{2,6}^2a_{3,9} = 0, \\ 7a_{2,6}a_{2,7} - 3a_{1,5}a_{3,8} - 3a_{2,7}a_{3,8} - 2a_{1,4}a_{3,9} - a_{2,6}a_{3,9} = 0, \\ 3a_{2,6}^2 - 2a_{1,4}a_{3,8} - a_{2,6}a_{3,8} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{2,6} - a_{3,8} = 0, \\ 3a_{1,5}a_{3,8} - 4a_{2,7}a_{3,8} + 3a_{3,8}a_{3,9} - 2a_{1,6}a_{4,9} - a_{2,8}a_{4,9} = 0, \\ a_{1,4} - a_{3,8} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_{2,6} - a_{3,8} = 0, \\ 9a_{1,5}a_{3,8} + 16a_{2,7}a_{3,8} + a_{3,8}a_{3,9} - 6a_{1,6}a_{4,9} - 3a_{2,8}a_{4,9} = 0, \\ 3a_{1,4} - a_{3,8} = 0. \end{cases}$$

5. *$\mathfrak{F}^{11}$ es la unión de dos componentes irreducibles;*

$$\begin{cases} a_{1,5} = 0 \\ a_{1,6} = 0 \\ a_{1,7} = 0 \\ a_{1,8} = 0 \\ a_{1,4} - 1 = 0 \\ a_{2,7} - 1 = 0 \\ 3a_{2,6}^2 - a_{2,6}a_{3,8} - 2a_{3,8} = 0 \\ 2(2a_{2,6} + 3a_{3,8})a_{3,8} - (2 - a_{2,6} - a_{3,8})a_{4,10} = 0 \\ 7a_{2,6} - (2 + a_{2,6})a_{3,9} - 3a_{3,8} = 0 \\ 4 + 2(4a_{2,6} - 3a_{3,8})a_{2,8} - 3a_{3,9} - (2 + a_{2,6})a_{3,10} + a_{2,8}a_{4,10} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{1,4} = 0 \\ a_{1,7} = 0 \\ a_{2,6} = 0 \\ a_{3,8} = 0 \\ a_{3,10} = 0 \\ a_{1,5} - 1 = 0 \\ 4a_{2,7}^2 - 3(a_{2,7} + 3)a_{2,9} + (2a_{1,6} + a_{2,8})a_{4,10} = 0 \\ a_{2,9} - a_{3,9} = 0 \end{cases}$$

4.5. Construcción de deformaciones lineales de álgebras filiformes

En esta sección adecuaremos el Teorema 3.6 a las álgebras de Lie filiformes.

Teorema 4.6. *Sea $\mathfrak{f}$ un álgebra de Lie filiforme con base estándar $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ y corchete μ, y sea $\mathfrak{K} = \mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = \langle x_2, \ldots, x_{n-1}\rangle$ el conmutador de $\mathfrak{f}$, ideal de codimensión 2. La transformción lineal D de $\mathfrak{K}$ definida por*

$$\begin{aligned} Dx_2 &= x_{n-3} \\ Dx_3 &= x_{n-2} \\ Dx_4 &= x_{n-1} \\ Dx_i &= 0, \quad 5 \le i \le n-1 \end{aligned}$$

es una derivación de $\mathfrak{K}$ que satisface $D \circ \mathrm{ad}_{x_0} = \mathrm{ad}_{x_0} \circ D$. Luego $\mu_t = \mu + t\varphi_D$ es una deformación lineal de μ.

Demostración. Sea $\mathfrak{K} = \mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = \langle x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}\rangle$ ideal de codimensión 2. En este caso μ se define por

$$\mu(x_i, x_j) = \sum_{k=1}^{n-i-j-1} c_{ij}^k x_{i+j+k} \quad 2 \le i < j \le n-1$$

D definida en el teorema es una derivación de $\mathfrak{K}$, pues

$$\begin{aligned} D(\mu(x_i, x_j)) &= D\left(\sum_{k=1}^{n-i-j-1} c_{ij}^k x_{i+j+k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-i-j-1} c_{ij}^k D(x_{i+j+k}) = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

por otro lado

$$\mu(D(x_i), x_j) = \begin{cases} \mu(x_{n-3}, x_j) & si \quad i = 2 \\ \mu(x_{n-2}, x_j) & si \quad i = 3 \\ \mu(x_{n-1}, x_j) & si \quad i = 4 \\ 0 & si \quad i \geq 5 \end{cases} = 0 \quad \forall j = 2, 3, \ldots, n-1 \tag{4.2}$$

y

$$\mu(x_i, D(x_j)) = \begin{cases} \mu(x_i, x_{n-2}) & si \quad j = 3 \\ \mu(x_i, x_{n-1}) & si \quad j = 4 \\ 0 & si \quad j \geq 5 \end{cases} = 0 \quad \forall i = 2, 3, \ldots, n-1 \tag{4.3}$$

Luego, de (4.1), (4.2) y (4.3) D es una derivación de $\mathfrak{K}$. Claramente es nilpotente, pues $D^2 = 0$. Veamos que efectivamente $D \circ \mathrm{ad}_{x_0} = \mathrm{ad}\, x_0 \circ D$. Sea $x_j \in \mathfrak{K}$ con $j = 2, 3 \ldots, x_{n-1}$

$$D\, \mathrm{ad}_{x_0}(x_j) = D(x_{j+1}) = \begin{cases} x_{n-2} & si \quad j = 2 \\ x_{n-1} & si \quad j = 3 \\ 0 & si \quad j \geq 4 \end{cases} \tag{4.4}$$

por otro lado

$$\mathrm{ad}_{x_0} D(x_j) = \begin{cases} \mathrm{ad}_{x_0}(x_{n-3}) & si \quad j = 2 \\ \mathrm{ad}_{x_0}(x_{n-2}) & si \quad j = 3 \\ \mathrm{ad}_{x_0}(x_{n-1}) & si \quad j = 4 \\ 0 & si \quad j \geq 5 \end{cases} = \begin{cases} x_{n-2} & si \quad j = 2 \\ x_{n-1} & si \quad j = 3 \\ 0 & si \quad j \geq 4 \end{cases} \tag{4.5}$$

Por lo tanto, de (4.4) y (4.5) se verifica lo solicitado.

Como D verifíca las condiciones del Teorema 3.6 entonces $\mu_t = \mu + t\varphi_D$ es una deformación de μ. $\square$

Observación 4.7. Los endomorfismos del ideal $\mathfrak{K}$,

$$Dx_2 = x_{n-2}, \qquad Dx_3 = x_{n-1}$$

y

$$Dx_2 = x_{n-1}$$

son derivaciones de $\mathfrak{K}$ y cumplen con todas las condiciones del Teorema 4.6, pero analizar la trivialidad de μ_t es muy dificultoso.

Capítulo 5

Deformaciones de álgebras de Lie filiformes de dimensión 7, 8 y 9

En este capítulo y los siguientes usaremos la deformación μ_t construida en 4.6 y probaremos que es no trivial para toda t no nulo, para luego concluir que no existen álgebras de Lie filiformes rígidas en la variedad $\mathfrak{L}^n$, más aún en $\mathfrak{F}^n$ para $7 \leq n \leq 11$.

Para probar la no trivialidad de μ_t se realizaron los siguientes pasos:

1. Suponemos $\mu_t \simeq \mu$, es decir, $\exists g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que $g\mu_t(x_i, x_j) - \mu(gx_i, gx_j) = 0$ para toda $i < j$.
2. Encontramos abiertos Zariski donde g es un isomorfismo solo para $t = 0$.
3. Probamos que tales abiertos cortan las componentes irreducibles de cada variedad filiforme.
4. En una variedad irreducible todo abierto es denso Zariski y por lo tanto es denso euclídeo.
5. Por lo tanto en cada componente irreducible tenemos abiertos densos euclídeos donde $\mu_t \not\simeq \mu$ para toda $t \neq 0$.

A lo largo de este capítulo y los siguientes utilizaremos la siguiente notación,

$$E_{i,j} = g\mu_t(x_i, x_j) - \mu(gx_i, gx_j)$$

para toda $0 \leq i < j \leq n-1$. Y denotaremos con $E_{i,j}^{(k)}$ al coeficiente de x_k, esto es:

$$E_{i,j} = g\mu_t(x_i, x_j) - \mu(gx_i, gx_j) = \sum_k E_{i,j}^{(k)} x_k$$

para toda $0 \leq i < j \leq n-1$ y $0 \leq k \leq n-1$.
Si g es un isomorfismo entre μ_t y μ entonces $E_{i,j} = 0$ y por lo tanto $E_{i,j}^{(k)} = 0$ para $0 \leq i < j \leq n-1$ y $0 \leq k \leq n-1$.

En el siguiente lema mostraremos que en un abierto de los parámetros $\{a_{k,s}\}$, un isomorfismo entre la deformación lineal μ_t y μ tiene una forma particular.

Lema 5.1. *Sean $n \geq 7$, g un isomorfismo dado entre μ_t y μ. Sea U el abierto de $\mathfrak{F}^n$ dado por $U = \{a_{1,4} \neq 0\}$. Entonces, en el abierto U y respecto de bases estándar de μ_t y μ respectivamente, g es de la forma*

$$g = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & m_{1,1}^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{1,1}^3 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{1,1}^4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{n,3} & m_{n,4} & \cdots & m_{1,1}^n \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

En la subvariedad de $\mathfrak{F}^n$ dada por $a_{1,4} = 0$ consideremos, el abierto $U = \{a_{1,5} \neq 0\}$. Entonces, en el abierto U, y respecto de bases estándares de μ_t y μ respectivamente, g es de la forma

$$g = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & m_{1,1}^3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{1,1}^4 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{1,1}^5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{n,3} & m_{n,4} & \cdots & m_{1,1}^{n+1} \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Demostración. Sea $\{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ base adaptada de μ. Supongamos que existe $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ tal que $g \bullet \mu_t = \mu$.
μ y μ_t son álgebras de Lie filiformes, tienen la misma serie central ascendente;

$$\begin{aligned} C_1 &= \langle x_{n-1} \rangle, \\ C_2 &= \langle x_{n-1}, x_{n-2} \rangle, \\ C_3 &= \langle x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3} \rangle, \\ &\vdots \\ C_{n-2} &= \langle x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \cdots, x_5, x_4, x_3, x_2 \rangle, \\ C_{n-1} &= \langle x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \cdots, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0 \rangle \end{aligned}$$

Como g es un isomorfismo debe preservar la serie central por lo tanto g es de la forma,

$$g = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & m_{n,3} & m_{n,4} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Resolveremos las ecuaciones $E_{i,j} = g\mu_t(x_i, x_j) - \mu(gx_i, gx_j) = 0$ para algunos i, j, y consideraremos las coordenadas de la misma, $E_{i,j}^{(k)} = 0$ para ciertos i, j, k.

Considerando $E_{0,j}^{(j+1)} = 0$ obtenemos $m_{j+2,j+2} = m_{1,1}m_{j+1,j+1}$ (1) para todo $j = 1, 2, \ldots, n-2$. Por otro lado $E_{1,j}^{(j+1)} = 0 \Rightarrow m_{1,2}m_{j+1,j+1} = 0$ pero entonces $m_{1,2} = 0$ o $m_{j+1,j+1} = 0$ para $2 \leq j \leq n-3$, por lo tanto

a) Si $m_{j+1,j+1} = 0$ por (1) $m_{n,n} = 0$ y por lo tanto g no es isomorfismo.

b) Sea de ahora en adelante $m_{1,2} = 0$.

- Supongamos $a_{1,4} \neq 0$ y consideramos $E_{1,j}^{(j+2)} = 0$ para todo $j \geq 2$, entonces $a_{1,4}m_{j+3,j+3} = a_{1,4}m_{2,2}m_{j+1,j+1}$ para $2 \leq j \leq n-3$, como $a_{1,4} \neq 0$ tenemos $m_{j+3,j+3} = m_{2,2}m_{j+1,j+1}$, para $2 \leq j \leq n-3$ (2)

  Además por (1), $m_{4,4} = m_{1,1}m_{3,3}$ y $m_{3,3} = m_{1,1}m_{2,2}$ entonces $m_{4,4} = m_{1,1}^2 m_{2,2}$ (3), además $m_{5,5} = m_{1,1}m_{4,4}$ por lo tanto, $m_{5,5} = m_{1,1}^3 m_{2,2}(4)$. Continunado de esta forma, $m_{j,j} = m_{1,1}^{j-2}m_{2,2}$ para toda $j \geq 3$ (5).

  Luego, de (2) y (4), obtenemos

  $$m_{5,5} = m_{1,1}^2 m_{3,3} = m_{2,2}m_{3,3} \Rightarrow \ (m_{1,1}^2 - m_{2,2})m_{3,3} = 0 \ \Rightarrow \ m_{2,2} = m_{1,1}^2 \ o \ m_{3,3} = 0$$

  Por lo tanto,

  1. Si $m_{3,3} = 0$, el determinante de g es cero y por lo tanto g no es un isomorfismo.

  2. Si $m_{2,2} = m_{1,1}^2$, por (5) $m_{j,j} = m_{1,1}^j$, para todo $j \geq 2$, así el isomorfismo g es de la forma (5.1)

- Si $a_{1,4} = 0$ y $a_{1,5} \neq 0$ utilizando $E_{1,j}^{(j+3)} = 0$ obtenemos $a_{1,5}m_{j+4,j+4} = a_{1,5}m_{2,2}m_{j+1,j+1}$ $(3 \leq j \leq n-3)$ como $a_{1,5} \neq 0$ obtenemos $m_{j+4,j+4} = m_{2,2}m_{j+1,j+1}(6)$

  De (1) se sigue $m_{4,4} = m_{1,1}m_{3,3}$ y $m_{3,3} = m_{1,1}m_{2,2}$, entonces $m_{5,5} = m_{1,1}^3 m_{2,2}$ y por lo tanto $m_{6,6} = m_{1,1}^4 m_{2,2}$ (7).

  Continuando de esta forma obtenemos $m_{j,j} = m_{1,1}^{j-2}m_{2,2}$ para toda $j \geq 3$ (8).

  Luego de (6) y (7) se tiene

  $$m_{6,6} = m_{1,1}^3 m_{3,3} = m_{2,2}m_{3,3} \Rightarrow \ (m_{1,1}^3 - m_{2,2})m_{3,3} = 0$$

  entonces

  1. Si $m_{3,3} = 0$, el determinante de g es cero y por lo tanto g no es un isomorfismo.

  2. Si $m_{2,2} = m_{1,1}^3$, por (8) $m_{j,j} = m_{1,1}^{j+1}$ para todo $j \geq 2$, entonces el isomorfismo g es de la forma (5.2).

□

5.1. Deformaciones de álgebras filiformes de dimensión 7

En esta sección y en las que siguen utilizaremos la parametrización de Khakimdjanov enunciada en el Capítulo 3.

Teorema 5.2. *No existen álgebras de Lie filiformes rígidas en la variedad $\mathfrak{L}^7$. Más aún, no existen álgebras de Lie filiformes rígidas en $\mathfrak{F}^7$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{f}$ álgebra de Lie filiforme de dimensión 7 con base adaptada $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, en la Sección 4.4 vimos que los corchetes de $\mathfrak{f}$ son;

$$\begin{aligned}
&\mu(x_0, x_j) = x_{j+1}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, 5\\
&\mu(x_i, x_j) = a_{1,4}\psi_{1,4}(x_i, x_j) + a_{1,5}\psi_{1,5}(x_i, x_j) + a_{1,6}\psi_{1,6}(x_i, x_j) + a_{2,6}\psi_{2,6}(x_i, x_j)
\end{aligned}$$

es decir;

$$\begin{aligned}
\mu(x_0, x_j) &= x_{j+1}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, 5\\
\mu(x_1, x_2) &= a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 + a_{1,6}x_6\\
\mu(x_1, x_3) &= a_{1,4}x_5 + a_{1,5}x_6\\
\mu(x_1, x_4) &= (a_{1,4} - a_{2,6})x_6\\
\mu(x_2, x_3) &= a_{2,6}x_6\\
\mu(x_i, x_j) &= 0, \text{ para los demás } i, j
\end{aligned}$$

Sean $\mathfrak{K} = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\rangle$ y $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{K})$ definidos en el Teorema 4.6, donde

$$\begin{aligned}
Dx_2 &= x_4\\
Dx_3 &= x_5\\
Dx_4 &= x_6\\
Dx_i &= 0, \text{ para } i = 5, 6
\end{aligned}$$

Sea μ_t la deformación de μ definida por el Teorema 4.6. Es decir,

$$\begin{aligned}
\mu_t(x_0, x_j) &= x_{j+1}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, 5\\
\mu_t(x_1, x_2) &= a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 + a_{1,6}x_6 + tx_4\\
\mu_t(x_1, x_3) &= a_{1,4}x_5 + a_{1,5}x_6 + tx_5\\
\mu_t(x_1, x_4) &= (a_{1,4} - a_{2,6})x_6 + tx_6\\
\mu_t(x_2, x_3) &= a_{2,6}x_6\\
\mu_t(x_i, x_j) &= 0, \text{ para los demás } i, j.
\end{aligned}$$

Probaremos que μ_t es una deformación no trivial de μ para toda $t \neq 0$. Supongamos μ y μ_t isomorfas, es decir, $\exists g \in \mathrm{GL}(7, \mathbb{C})$ isomorfismo tal que $E_{i,j} = 0$ para toda $i, j = 0, 1, \ldots, 6$. Por el Lema 5.1, si $a_{1,4} \neq 0$, g tiene la forma;

$$g = \begin{pmatrix}
m_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
m_{2,1} & m_{1,1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
m_{3,1} & m_{3,2} & m_{1,1}^3 & 0 & 0 & 0 & 0\\
m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{1,1}^4 & 0 & 0 & 0\\
m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{1,1}^5 & 0 & 0\\
m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & m_{1,1}^6 & 0\\
m_{7,1} & m_{7,2} & m_{7,3} & m_{7,4} & m_{7,5} & m_{7,6} & m_{1,1}^7
\end{pmatrix}$$

Resolveremos algunas ecuaciónes $E_{i,j} = 0$ y consideraremos los coeficientes $E_{i,j}^{(k)} = 0$ para ciertos i, j, k.

Sea $E_{1,2}^{(4)} = 0$ entonces $a_{1,4}m_{1,1}^5 + tm_{1,1}^5 = a_{1,4}m_{1,1}^2m_{1,1}^3$, lo cual implica $tm_{1,1}^5 = 0$.

Así $m_{1,1}^5 = 0$ ó $t = 0$. Los cual no es posible ya que si $m_{1,1} = 0$ entonces g no es isomorfismo y si $t = 0$ debe ser $\mu_t = \mu$. Por lo tanto μ_t no es isomorfa a μ en el abierto $a_{1,4} \neq 0$.

En el Teorema 4.5 vimos que $\mathfrak{F}^7$ es irreducible. Además $a_{1,4} \neq 0$ es un abierto Zariski, por el Teorema 2.16 es denso Zariski en $\mathfrak{F}^7$, por lo tanto, por el Lema 2.17 es denso euclídeo.

Luego, tenemos una deformación no trivial μ_t de μ en un conjunto denso euclídeo de $\mathfrak{F}^7$. Por lo tanto, μ no es rígida en las variedades algebraicas $\mathfrak{L}^7$, $\mathfrak{N}^7$ y $\mathfrak{F}^7$.

□

5.2. Deformaciones de álgebras filiformes de dimensión 8

Al igual que en la sección anterior utilizaremos la parametrización dada en la Sección 4.4.

Teorema 5.3. *No existen álgebras de Lie rígidas en la variedad $\mathfrak{L}^8$. Más aún, no existen álgebras de Lie filiformes rígidas en $\mathfrak{F}^8$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{f}$ álgebra de Lie filiforme de dimensión 8 con base adaptada $\{x_0, x_1, \ldots, x_7\}$ y corchete μ definido por;

$$\begin{aligned}
\mu(x_0, x_j) &= x_{j+1}, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, 6 \\
\mu(x_i, x_j) &= a_{1,4}\psi_{1,4}(x_i, x_j) + a_{1,5}\psi_{1,5}(x_i, x_j) + a_{1,6}\psi_{1,6}(x_i, x_j) + a_{1,7}\psi_{1,7}(x_i, x_j) + a_{2,6}\psi_{2,6}(x_i, x_j) \\
&\quad + a_{2,7}\psi_{2,7}(x_i, x_j + a_{3,7}\psi_{3,7}(x_i, x_j)
\end{aligned}$$

es decir;

$$\begin{aligned}
\mu(x_0, x_j) &= x_{j+1}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, 6 \\
\mu(x_1, x_2) &= a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 + a_{1,6}x_6 + a_{1,7}x_7 \\
\mu(x_1, x_3) &= a_{1,4}x_5 + a_{1,5}x_6 + a_{1,6}x_7 \\
\mu(x_1, x_4) &= (2a_{1,4} - a_{2,6})x_6 + (2a_{1,5} - a_{2,7})x_7 \\
\mu(x_1, x_5) &= (a_{1,4} - 2a_{2,6})x_7 \\
\mu(x_1, x_6) &= -a_{3,7}x_7 \\
\mu(x_2, x_3) &= a_{2,6}x_6 + a_{2,7}x_7 \\
\mu(x_2, x_4) &= a_{2,6}x_7 \\
\mu(x_3, x_4) &= a_{3,7}x_7 \\
\mu(x_i, x_j) &= 0, \text{ para los demás } i, j
\end{aligned}$$

Sean $\mathfrak{K} = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \rangle$ ideal de codimensión 2 de $\mathfrak{f}$, $D \in Der(\mathfrak{K})$ y μ_t definidos como en el

Teorema 4.6. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mu_t(x_0, x_j) &= x_{j+1}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, 6 \\
\mu_t(x_1, x_2) &= a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 + a_{1,6}x_6 + a_{1,7}x_7 + tx_5 \\
\mu_t(x_1, x_3) &= a_{1,4}x_5 + a_{1,5}x_6 + a_{1,6}x_7 + tx_6 \\
\mu_t(x_1, x_4) &= (2a_{1,4} - a_{2,6})x_6 + (2a_{1,5} - a_{2,7})x_7 + tx_7 \\
\mu_t(x_1, x_5) &= (a_{1,4} - 2a_{2,6})x_7 \\
\mu_t(x_1, x_6) &= -a_{3,7}x_7 \\
\mu_t(x_2, x_3) &= a_{2,6}x_6 + a_{2,7}x_7 \\
\mu_t(x_2, x_4) &= a_{2,6}x_7 \\
\mu_t(x_3, x_4) &= a_{3,7}x_7 \\
\mu_t(x_i, x_j) &= 0, \text{ para los demás } i, j.
\end{aligned}$$

Probaremos que μ y μ_t no son isomorfos si $t \neq 0$. Supongamos que si lo son, es decir, $\exists g \in \mathrm{GL}(8, \mathbb{C})$ isomorfismo entre μ_t y μ, por lo tanto $E_{i,j} = 0$ para toda $i, j = 0, 1, \ldots, 7$. Por el Lema 5.1, si $a_{1,4} \neq 0$, g es de la forma;

$$g = \begin{pmatrix}
m_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{2,1} & m_{1,1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{3,1} & m_{3,2} & m_{1,1}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{1,1}^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{1,1}^5 & 0 & 0 & 0 \\
m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & m_{1,1}^6 & 0 & 0 \\
m_{7,1} & m_{7,2} & m_{7,3} & m_{7,4} & m_{7,5} & m_{7,6} & m_{1,1}^7 & 0 \\
m_{8,1} & m_{8,2} & m_{8,3} & m_{8,4} & m_{8,5} & m_{8,6} & m_{8,7} & m_{1,1}^8
\end{pmatrix}$$

Para la demostración del teorema utilizaremos la descomposición en componentes irreducibles vista en el Teorema 4.5 y trabajaremos en cada una de ellas.

a) Primera componente $a_{3,7} = 0$. El corchete μ en esta componente es de la forma,

$$\begin{aligned}
\mu(x_0, x_j) &= x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, 7 \\
\mu(x_1, x_2) &= a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 + a_{1,6}x_6 + a_{1,7}x_7 \\
\mu(x_1, x_3) &= a_{1,4}x_5 + a_{1,5}x_6 + a_{1,6}x_7 \\
\mu(x_1, x_4) &= (2a_{1,4} - a_{2,6})x_6 + (2a_{1,5} - a_{2,7})x_7 \\
\mu(x_1, x_5) &= (a_{1,4} - 2a_{2,6})x_7 \\
\mu(x_2, x_3) &= a_{2,6}x_6 + a_{2,7}x_7 \\
\mu(x_2, x_4) &= a_{2,6}x_7 \\
\mu_t(x_i, x_j) &= 0, \qquad \text{para los demás } i, j.
\end{aligned}$$

Redefinimos μ_t, resolveremos las ecuaciones $E_{i,j} = 0$ para algunos casos particulares de i, j y consideraremos algunos coeficientes $E^{(k)}_{i,j} = 0$.

1. $E^{(3)}_{0,1} = m_{4,3} - m_{1,1}m_{3,2} = 0$
2. $E^{(4)}_{0,2} = m_{5,4} - m_{1,1}m_{4,3} - a_{1,4}m^3_{1,1}m_{2,1} = 0$
3. $E^{(5)}_{0,3} = m_{6,5} - m_{1,1}m_{5,4} - a_{1,4}m^4_{1,1}m_{2,1} = 0$
4. $E^{(6)}_{0,4} = m_{7,6} - m_{1,1}m_{6,5} - (a_{1,4} - a_{2,6})m^5_{1,1}m_{2,1} = 0$
5. $E^{(7)}_{0,5} = m_{8,7} - m_{1,1}m_{7,6} - (a_{1,4} - 2a_{2,6})m^6_{1,1}m_{2,1} = 0$
6. $E^{(5)}_{1,2} = a_{1,4}m_{6,5} + a_{1,5}m^6_{1,1} + tm^6_{1,1} - a_{1,5}m^5_{1,1} - a_{1,4}m^2_{1,1}m_{4,3} = 0$
7. $E^{(6)}_{1,3} = a_{1,4}m_{7,6} + a_{1,5}m^7_{1,1} + tm^7_{1,1} - a_{1,5}m^6_{1,1} - (2a_{1,4} - a_{2,6})m^4_{1,1}m_{3,2} - a_{2,6}m^4_{1,1}m_{3,2} = 0$
8. $E^{(7)}_{1,4} = (2a_{1,4} - a_{2,6})m_{8,7} + (2a_{1,5} - a_{2,7})m^8_{1,1} + tm^8_{1,1} - (2a_{1,5} - a_{2,7})m^7_{1,1} - (a_{1,4} - 2a_{2,6})$ $m^2_{1,1}m_{6,5} - a_{2,6}m^5_{1,1}m_{3,2} = 0$
9. $E^{(7)}_{2,3} = a_{2,6}m_{8,7} + a_{2,7}m^8_{1,1} - a_{2,7}m^7_{1,1} - a_{2,6}m^3_{1,1}m_{5,4} = 0$

Mirando $E^{(7)}_{2,3} = 0$, realizando sustitución con las ecuaciones $E^{(4)}_{0,2} = 0$ y $E^{(3)}_{0,1} = 0$ obtenemos $a_{2,6}m_{8,7} = a_{2,7}m^7_{1,1} - a_{2,7}m^8_{1,1} + a_{2,6}m^5_{1,1}m_{4,3} + a_{1,4}a_{2,6}m^6_{1,1}m_{2,1}$ (E1).

Consideremos ahora $E^{(7)}_{0,5} = 0$, haciendo sustitución con las ecuaciones $E^{(6)}_{0,4} = 0, E^{(5)}_{0,3} = 0, E^{(4)}_{0,2} = 0$ y $E^{(3)}_{0,1} = 0$ llegamos al siguiente resultado $m_{8,7} = m^5_{1,1}m_{4,3} + (4a_{1,4} - 3a_{2,6})m^6_{1,1}m_{2,1}$ (E2).

Suponiendo $a_{2,6} \neq 0$, multiplico ambos miembros de (E2) por $a_{2,6}$ e igualandola a (E1) obtenemos $3a_{2,6}(a_{1,4} - a_{2,6})m_{2,1} = a_{2,7}m_{1,1}(1 - m_{1,1})$(EE).

Mirando $E^{(5)}_{1,2} = 0$ y despejando el término con t, obtenemos $tm^6_{1,1} = a_{1,5}m^5_{1,1} - a_{1,5}m^6_{1,1} - 2a^2_{1,4}m^4_{1,1}m_{2,1}$ (E3).

Trabajando con las ecuaciones $E^{(6)}_{1,3} = 0$, obtenemos $tm^7_{1,1} = a_{1,5}m^6_{1,1} - a_{1,5}m^7_{1,1} + a_{1,4}m^4_{1,1}m_{3,2} - a^2_{1,4}m^5_{1,1}m_{2,1}$ (E4), multiplicando (E3) por $m_{1,1}$ e igualando con (E4) obtenemos $m_{3,2} = -a^2_{1,4}m_{1,1}m_{2,1}$ (E5).

Utlizando $E^{(7)}_{1,4} = 0$, despejamos el término con t, haciendo sustitución con las ecuaciones obtenidas, tenemos $tm^8_{1,1} = (2a_{1,5} - a_{2,7})m^7_{1,1} - (2a_{1,5} - a_{2,7})m^6_{1,1} + (-5a^4_{1,4} + 6a_{1,4}a_{2,6} - 3a^2_{2,6})m^6_{1,1}m_{2,1}$ (E6). Multiplicamos (E4) por $m^2_{1,1}$ e igualamos con (E6), llegando a $3(a_{1,4} - a_{2,6})^2m_{2,1} = (a_{1,5} - a_{2,7})m_{1,1}(1 - m_{1,1})$ (E7).

Trabajando con (E7) y (EE) obtenemos, $3a_{1,4}(a_{1,4} - a_{2,6})m_{2,1} = a_{1,5}m_{1,1}(1 - m_{1,1})$ (E8).

De (E8), suponiendo $a_{1,5} \neq 0$ y como $a_{1,4} \neq 0$, $3(a_{1,4} - a_{2,6})m_{2,1} = \dfrac{a_{1,5}}{a_{1,4}}m_{1,1}(1 - m_{1,1})$ (E9) y de (EE) suponiendo $a_{2,7} \neq 0$ y $a_{2,6} \neq 0$ tenemos $3(a_{1,4} - a_{2,6})m_{2,1} = \dfrac{a_{2,7}}{a_{2,6}}m_{1,1}(1 - m_{1,1})$ (E10).

Igualando (E9) y (E10), suponiendo $a_{1,5}a_{2,6} - a_{1,4}a_{2,7} \neq 0$ debe ser $m_{1,1} = 0$ o $m_{1,1} = 1$, pero si $m_{1,1} = 0$, g no es un isomorfismo. Si $m_{1,1} = 1$ por (EE) y $a_{1,4} - a_{2,6} \neq 0$ entonces $m_{2,1} = 0$, luego por (E3), $t = 0$, lo cual es absurdo, pues $t \neq 0$.

Como estamos trabajando en una componente irreducible por el Teorema 2.16, el abierto $U = \{a_{1,4} \neq 0, a_{1,5} \neq 0, a_{2,6} \neq 0, a_{2,7} \neq 0, a_{1,5}a_{2,6} - a_{1,4}a_{2,7} \neq 0, a_{1,4} - a_{2,6} \neq 0\}$ es denso Zariski y por lo tanto, por el Lema 2.17 es denso euclídeo. Así μ_t es una deformación no trivial de μ en esta componente.

b) Segunda componente $2a_{1,4} + a_{2,6} = 0$. En este caso μ es de la forma,

$$\begin{aligned}
\mu(x_0, x_j) &= x_{j+1}, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, 6\\
\mu(x_1, x_2) &= a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 + a_{1,6}x_6 + a_{1,7}x_7\\
\mu(x_1, x_3) &= a_{1,4}x_5 + a_{1,5}x_6 + a_{1,6}x_7\\
\mu(x_1, x_4) &= 4a_{1,4}x_6 + (2a_{1,5} - a_{2,7})x_7\\
\mu(x_1, x_5) &= 4a_{1,4}x_7\\
\mu(x_1, x_6) &= -a_{3,7}x_7\\
\mu(x_2, x_3) &= -2a_{1,4}x_6 + a_{2,7}x_7\\
\mu(x_2, x_4) &= -2a_{1,4}x_7\\
\mu(x_2, x_5) &= -a_{3,7}x_7\\
\mu(x_3, x_4) &= a_{3,7}x_7\\
\mu(x_i, x_j) &= 0, \text{ para los demás } i, j.
\end{aligned}$$

Redefinimos μ_t utilizando la derivación dada por el Teorema 4.6, resolveremos las ecuaciones $E_{i,j} = 0$ para algunos casos particulares de i, j y consideraremos algunos coeficientes $E_{i,j}^{(k)} = 0$, con las cuales obtenemos las siguientes ecuaciones:

1. $E_{0,1}^{(3)} = m_{4,3} - m_{1,1}m_{3,2} = 0$
2. $E_{0,2}^{(4)} = m_{5,4} - m_{1,1}m_{4,3} - a_{1,4}m_{1,1}^3m_{2,1} = 0$
3. $E_{0,3}^{(5)} = m_{6,5} - m_{1,1}m_{5,4} - a_{1,4}m_{1,1}^4m_{2,1} = 0$
4. $E_{0,4}^{(6)} = m_{7,6} - m_{1,1}m_{6,5} - 3a_{1,4}m_{1,1}^5m_{2,1} = 0$
5. $E_{1,2}^{(5)} = a_{1,4}m_{6,5} + a_{1,5}m_{1,1}^6 + tm_{1,1}^6 - a_{1,5}m_{1,1}^5 - a_{1,4}m_{1,1}^2m_{4,3} = 0$
6. $E_{1,3}^{(6)} = a_{1,4}m_{7,6} + a_{1,5}m_{1,1}^7 + tm_{1,1}^7 - a_{1,5}m_{1,1}^6 - 3a_{1,4}m_{1,1}^4m_{3,2} + a_{1,4}m_{1,1}^4m_{3,2} = 0$
7. $E_{1,4}^{(7)} = 3a_{1,4}m_{8,7} + (2a_{1,5} - a_{2,7})m_{1,1}^8 + tm_{1,1}^8 - (2a_{1,5} - a_{2,7})m_{1,1}^7 - 3a_{1,4}m_{1,1}^2m_{6,5} + a_{3,7}m_{1,1}^2m_{7,5}$
   $+ a_{1,4}m_{1,1}^5m_{3,2} - a_{3,7}m_{1,1}^2m_{4,2} = 0$
8. $E_{1,6}^{(7)} = -a_{3,7}m_{1,1}^8 + a_{3,7}m_{1,1}^9 = 0$
9. $E_{2,4}^{(8)} = -a_{1,4}m_{1,1}^9 + a_{1,4}m_{1,1}^8 - m_{3,7}m_{1,1}^3m_{6,5} - a_{3,7}m_{1,1}^5m_{4,3} = 0$

Utilizando $E_{2,4}^{(8)} = 0$ y haciendo sustitución con $E_{0,3}^{(5)} = 0, E_{0,2}^{(4)} = 0, E_{0,1}^{(3)} = 0$, suponiendo además $a_{3,7} \neq 0$ concluímos que $m_{2,1} = 0$. Mirando $E_{1,6}^{(7)} = 0$ debe ser $m_{1,1} = 0$ o $m_{1,1} = 1$. Si $m_{1,1} = 0$ entonces g no es isomorfismo. Si $m_{1,1} = 1$, de $E_{1,4}^{(7)} = 0$ y haciendo sustitución con las ecuaciones anteriores obtenemos $t = 0$ lo cual es absurdo.

Por lo tanto, existe un abierto $V = \{a_{3,7} \neq 0, a_{1,4} \neq 0\}$ donde μ_t no es isomorfa a μ. Pero como estamos trabajando en la componente irreducible, por el Teorema 2.16, este abierto es densos Zariski y por lo tanto, por el Lema 2.17, denso euclídeos. Así para todo $\epsilon > 0$ existe un $|t| < \epsilon$ tal que μ_t es deformación no trivial de μ en la segunda componente.

Luego se puede concluír que no existen álgebras de Lie rígidas en las variedades algebraicas $\mathfrak{L}^8$, $\mathfrak{N}^8$ y $\mathfrak{F}^8$.

□

5.3. Deformaciones de álgebras filiformes de dimensión 9

Teorema 5.4. *La deformación μ_t construida en el Teorema 4.6 es no trivial en un conjunto de abiertos densos de $\mathfrak{L}^9$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{f}$ álgebra de Lie filiforme de dimensión 9 con base adaptada $\{x_0, x_1, \ldots, x_8\}$ y corchete μ definido por;

$$\begin{aligned}
\mu(x_0, x_j) &= x_{j+1}, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, 7\\
\mu(x_i, x_j) &= a_{1,4}\psi_{1,4}(x_i, x_j) + a_{1,5}\psi_{1,5}(x_i, x_j) + a_{1,6}\psi_{1,6}(x_i, x_j) + a_{1,7}\psi_{1,7}(x_i, x_j) + a_{1,8}\psi_{1,8}(x_i, x_j)\\
&\quad + a_{2,6}\psi_{2,6}(x_i, x_j) + a_{2,7}\psi_{2,7}(x_i, x_j) + a_{2,8}\psi_{2,8}(x_i, x_j) + a_{3,8}\psi_{3,8}(x_i, x_j)
\end{aligned}$$

es decir;

$$\begin{aligned}
\mu(x_0, x_j) &= x_{j+1}, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, 6\\
\mu(x_1, x_2) &= a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 + a_{1,6}x_6 + a_{1,7}x_7 + a_{1,8}x_8\\
\mu(x_1, x_3) &= a_{1,4}x_5 + a_{1,5}x_6 + a_{1,6}x_7 + a_{1,7}x_8\\
\mu(x_1, x_4) &= (a_{1,4} - a_{2,6})x_6 + (a_{1,5} - a_{2,7})x_7 + (a_{1,6} - a_{2,8})x_8\\
\mu(x_1, x_5) &= (a_{1,4} - 2a_{2,6})x_7 + (a_{1,5} - 2a_{2,7})x_8\\
\mu(x_1, x_6) &= (a_{1,4} - 3a_{2,6} + a_{3,8})x_8\\
\mu(x_2, x_3) &= a_{2,6}x_6 + a_{2,7}x_7 + a_{2,8}x_8\\
\mu(x_2, x_4) &= a_{2,6}x_7 + a_{2,7}x_8\\
\mu(x_2, x_5) &= (a_{2,6} - a_{3,8})x_8\\
\mu(x_3, x_4) &= a_{3,8}x_8\\
\mu(x_i, x_j) &= 0, \quad \text{para los demás } i, j.
\end{aligned}$$

Sean $\mathfrak{K} = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \rangle$ un ideal de codimensión 2 de μ, $D \in Der(\mathfrak{K})$ y μ_t definidos por el Teorema 4.6;

$$\begin{aligned}
\mu_t(x_0,x_j) &= x_{j+1}, \quad \text{para } j=1,2,\ldots,7\\
\mu_t(x_1,x_2) &= a_{1,4}x_4+a_{1,5}x_5+a_{1,6}x_6+a_{1,7}x_7+a_{1,8}x_8+tx_6\\
\mu_t(x_1,x_3) &= a_{1,4}x_5+a_{1,5}x_6+a_{1,6}x_7+a_{1,7}x_8+tx_7\\
\mu_t(x_1,x_4) &= (a_{1,4}-a_{2,6})x_6+(a_{1,5}-a_{2,7})x_7+(a_{1,6}-a_{2,8})x_8+tx_8\\
\mu_t(x_1,x_5) &= (a_{1,4}-2a_{2,6})x_7+(a_{1,5}-2a_{2,7})x_8\\
\mu_t(x_1,x_6) &= (a_{1,4}-3a_{2,6}+a_{3,8})x_8\\
\mu_t(x_2,x_3) &= a_{2,6}x_6+a_{2,7}x_7+a_{2,8}x_8\\
\mu_t(x_2,x_4) &= a_{2,6}x_7+a_{2,7}x_8\\
\mu_t(x_2,x_5) &= (a_{2,6}-a_{3,8})x_8\\
\mu_t(x_3,x_4) &= a_{3,8}x_8\\
\mu_t(x_i,x_j) &= 0, \quad \text{para los demás } i,j
\end{aligned}$$

Probaremos que μ y μ_t no son isomorfos si $t \neq 0$. Supongamos que si lo son, es decir que $\exists g \in GL(9,\mathbb{C})$ isomorfismo entre μ_t y μ por lo tanto $E_{i,j}=0$ para toda $i,j=0,1,\ldots,8$. Como la serie central descendente de μ y μ_t es la misma, por el Lema 5.1 si $a_{1,4}\neq 0$, g es de la forma;

$$g=\begin{pmatrix}
m_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
m_{2,1} & m_{1,1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
m_{3,1} & m_{3,2} & m_{1,1}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{1,1}^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{1,1}^5 & 0 & 0 & 0 & 0\\
m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & m_{1,1}^6 & 0 & 0 & 0\\
m_{7,1} & m_{7,2} & m_{7,3} & m_{7,4} & m_{7,5} & m_{7,6} & m_{1,1}^7 & 0 & 0\\
m_{8,1} & m_{8,2} & m_{8,3} & m_{8,4} & m_{8,5} & m_{8,6} & m_{8,7} & m_{1,1}^8 & 0\\
m_{9,1} & m_{9,2} & m_{9,3} & m_{9,4} & m_{9,5} & m_{9,6} & m_{9,7} & m_{9,8} & m_{1,1}^9
\end{pmatrix}$$

Resolveremos las ecuaciones $E_{i,j}=0$ para algunos casos particulares de i,j y consideraremos algunos coeficientes $E_{i,j}^{(k)}=0$, con los cuales obtenemos las siguientes ecuaciónes:

1. $E_{0,1}^{(3)} = m_{4,3}-m_{1,1}m_{3,2}=0$
2. $E_{0,1}^{(4)} = m_{5,3}-m_{1,1}m_{4,2}-a_{1,4}m_{2,1}m_{3,2}+a_{1,4}m_{1,1}^2m_{3,1}=0$
3. $E_{0,2}^{(4)} = m_{5,4}-m_{1,1}m_{4,3}-a_{1,4}m_{1,1}^3m_{2,1}=0$
4. $E_{0,2}^{(5)} = m_{6,4}-m_{1,1}m_{5,3}-a_{1,5}m_{1,1}^3m_{2,1}-a_{1,4}m_{2,1}m_{4,3}=0$
5. $E_{0,3}^{(5)} = m_{6,5}-m_{1,1}m_{5,4}-a_{1,4}m_{1,1}^4m_{2,1}=0$
6. $E_{0,3}^{(6)} = m_{7,5}-m_{1,1}m_{6,4}-a_{1,5}m_{1,1}^4m_{2,1}-(a_{1,4}-a_{2,6})m_{2,1}m_{5,4}-a_{2,6}m_{1,1}^4m_{3,1}=0$
7. $E_{0,4}^{(6)} = m_{7,6}-m_{1,1}m_{6,5}-(a_{1,4}-a_{2,6})m_{1,1}^5m_{2,1}=0$
8. $E_{0,4}^{(7)} = m_{8,6}-m_{1,1}m_{7,5}-(a_{1,5}-a_{2,7})m_{1,1}^5m_{2,1}-(a_{1,4}-2a_{2,6})m_{2,1}m_{6,5}-a_{2,6}m_{1,1}^5m_{3,1}=0$
9. $E_{0,5}^{(7)} = m_{8,7}-m_{1,1}m_{7,6}-(a_{1,4}-2a_{2,6})m_{1,1}^6m_{2,1}=0$

10. $E_{0,5}^{(8)} = m_{9,7} - m_{1,1}m_{8,6} - (a_{1,5} - 2a_{2,7})m_{1,1}^6 m_{2,1} - (a_{1,4} - 3a_{2,6} + a_{3,8})m_{2,1}m_{7,6} - (a_{2,6} - a_{3,8})$ $m_{1,1}^6 m_{3,1} = 0$

11. $E_{0,6}^{(8)} = m_{9,8} - m_{1,1}m_{8,7} - (a_{1,4} - 3a_{2,6} + a_{3,8})m_{1,1}^7 m_{2,1} = 0$

12. $E_{1,2}^{(6)} = tm_{1,1}^7 - a_{1,6}m_{1,1}^5 - a_{1,5}m_{1,1}^2 m_{4,3} - (a_{1,4} - a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{5,3} - a_{2,6}m_{3,2}m_{4,3} + a_{2,6}m_{1,1}^3 m_{4,2}$ $+ a_{1,5}m_{7,6} + a_{1,4}m_{7,5} + a_{1,6}m_{1,1}^7 = 0$

13. $E_{1,3}^{(6)} = a_{1,4}m_{7,6} - a_{1,5}m_{1,1}^6 - (a_{1,4} - a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{5,4} - a_{2,6}m_{1,1}^4 m_{3,2} + a_{1,5}m_{1,1}^7 = 0$

14. $E_{1,4}^{(7)} = (a_{1,4} - a_{2,6})m_{8,7} + (a_{1,5} - a_{2,7})m_{1,1}^8 - (a_{1,5} - a_{2,7})m_{1,1}^7 - (a_{1,4} - 2a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{6,5}$ $- a_{2,6}m_{1,1}^5 m_{3,2} = 0$

15. $E_{2,3}^{(8)} = a_{2,6}m_{9,7} + a_{2,7}m_{9,8} - a_{2,8}m_{1,1}^7 - (a_{2,6} - a_{3,8})m_{1,1}^3 m_{6,4} - a_{2,7}m_{1,1}^3 m_{5,4} + a_{2,8}m_{1,1}^9$ $- a_{3,8}m_{4,3}m_{5,4} + a_{3,8}m_{1,1}^4 m_{5,3} = 0$

Utilizando $E_{1,3}^{(6)} = 0$, haciendo sustitución con $E_{0,3}^{(5)} = 0, E_{0,4}^{(4)}, E_{0,1}^{(3)} = 0$, como $a_{1,4} \neq 0$ la igualamos a $a_{1,4}E_{0,4}^{(6)} = 0$ y obtenemos $2a_{1,4}^2 m_{2,1} = a_{1,5}m_{1,1}(1 - m_{1,1})$(E1).

Trabajando de igual forma con $E_{1,4}^{(7)} = 0$ y $E_{0,5}^{(7)} = 0$, suponiendo $a_{1,4} - a_{2,6} \neq 0$ tenemos $(-2a_{1,4}^2 + 3a_{1,4}a_{2,6} - 3a_{2,6}^2)m_{2,1} = (a_{1,5} - a_{2,7})m_{1,1}(1 - m_{1,1})$(E2).

Realizando la operación $-2a_{1,4}^2 + 3a_{1,4}a_{2,6} - 3a_{2,6}^2)m_{2,1}(E1) - 2a_{1,4}^2(E2)$ obtenemos $(3a_{2,6}a_{1,5}(a_{1,4} - a_{2,6}) - 2a_{2,7}a_{1,4}^2)m_{1,1}(1 - m_{1,1}) = 0$.

Luego, si $3a_{2,6}a_{1,5}(a_{1,4} - a_{2,6}) - 2a_{2,7}a_{1,4}^2 \neq 0$ debe ser $m_{1,1} = 1$.

Reemplazando este resultado en (E1) o (E2), $m_{2,1} = 0$.

De la ecuación $E_{1,2}^{(6)} = 0$ despejamos t, $t = a_{1,5}m_{4,3} + (a_{1,4} - a_{2,6})m_{5,3} + a_{2,6}m_{3,2}m_{4,3} - a_{2,6}m_{4,2} - a_{1,5}m_{7,6} - a_{1,4}m_{7,5}$(E5), realizando sustitución en los valores que correspondan con ecuaciones anteriores (E5) se reduce a $t = a_{2,6}m_{3,2}^2 - 2a_{2,6}m_{4,2}$(E7).

Ahora, usando $E_{2,3}^{(8)} = 0$, realizando las respectivas sustituciones y la condición de la variedad m^9 obtenemos que si $a_{3,8} \neq 0$ debe ser $m_{3,2}^2 - 2m_{4,2} = 0$(E8); por lo tanto, por (E7) si $a_{2,6} \neq 0$ debe ser $t = 0$, lo cual es absurdo.

Luego μ_t no es isomorfo a μ en el abierto $U = \{a_{1,4} \neq 0, a_{2,6} \neq 0, a_{1,5} \neq 0, a_{2,6} \neq 0, a_{3,8} \neq 0, 3a_{2,6}a_{1,5}(a_{1,4} - a_{2,6}) - 2a_{2,7}a_{1,4}^2 \neq 0\}$.

□

Corolario 5.5. *No existen álgebras de Lie rígidas en la variedad $\mathfrak{L}^9$. Más aún, no existen álgebras de Lie filiformes rígidas en $\mathfrak{F}^9$.*

Demostración. En el Teorema 4.5 vimos que $\mathfrak{F}^9$ es irreducible, es decir tiene una única componente irreducible C definida por la ecuación $-3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,8} = 0$ (A). Analizaremos distintos casos donde el abierto $U = \{a_{1,4} \neq 0, a_{2,6} \neq 0, a_{1,5} \neq 0, a_{2,6} \neq 0, a_{3,8} \neq 0, 3a_{2,6}a_{1,5}(a_{1,4} - a_{2,6}) - 2a_{2,7}a_{1,4}^2 \neq 0\}$ corta tal componente, es decir, encontraremos puntos pertenecientes a $U \cap C$.

(i) Veamos que siempre que $a_{1,4} \neq 0, a_{1,5} \neq 0$ y $a_{3,8} \neq 0$ existe $a_{2,6} \neq 0$.

Supongamos $a_{3,8} = \dfrac{\epsilon}{2a_{1,4}}$, la ecuación (A) se convierte a la forma; $-3a_{2,6}^2 + a_{2,6}\dfrac{\epsilon}{2a_{1,4}} + \epsilon = 0$ que es una ecuación de segundo grado en $a_{2,6}$, resolviéndola tenemos;

$$a_{2,6} = \frac{\frac{\epsilon}{2a_{1,4}} \pm \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4a_{1,4}^2} - 12\epsilon}}{6}$$

Claramente existe $a_{2,6} \neq 0$.

Por lo tanto, podemos concluír que el punto $\left(\omega, \omega, 0, 0, 0, \dfrac{\frac{\epsilon}{2\omega} \pm \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4\omega^2} - 12\epsilon}}{6}, \omega, 0, \dfrac{\epsilon}{2\omega}\right)$ pertenece a $U \cap C$.

(ii) Si $a_{1,4} \neq 0$ y $a_{2,6} \neq 0$ veamos que ocurre con $a_{3,8}$.

Supongamos $a_{2,6} = \epsilon$, reemplazando en la ecuación obtenemos,

$$a_{3,8} = \frac{3\epsilon^2}{\epsilon + 2a_{1,4}}$$

Por lo tanto si $a_{1,4} \neq 0$ y $a_{2,6} \neq 0$ existe $a_{3,8} \neq 0$ que verifican la ecuación (A), es decir existe un punto de la variedad que está también en el abierto U; por ejemplo el punto $(\epsilon, 1, 0, 0, 0, \epsilon, 1, 0, \epsilon)$ es un punto C, es decir, verifíca la ecuación (A) y a la vez pertenece al abierto U.

(iii) Si $a_{2,6} \neq 0$ y $a_{3,8} \neq 0$ probaremos que existe $a_{1,4} \neq 0$.

Supongamos $a_{2,6} \neq 0$ y $a_{3,8} = -3a_{2,6} + \epsilon$, veamos que existe $a_{1,4} \neq 0$.

Como estos puntos deben verificar la ecuación (A) tenemos; $2(-3a_{2,6}+\epsilon)a_{1,4}+a_{2,6}\epsilon-6a_{2,6}^2 = 0$, resolviendo

$$a_{1,4} = \frac{6a_{2,6}^2 - a_{2,6}\epsilon}{-6a_{2,6} + 2\epsilon},$$

entonces existe $a_{1,4} \neq 0$ que verifica (A), por lo tanto existe un punto en la variedad que está en el abierto U. Por ejemplo, el punto $\left(-\dfrac{5}{4}\epsilon, 1, 0, 0, 0, \epsilon, 1, 0, -2\epsilon\right) \in U \cap C$.

Además, por el Teorema 2.16, sabemos que todo abierto en una variedad irreducible es denso Zariski y por lo tanto, por el Lema 2.17, es denso euclídeo.
Así, el abierto U encontrado donde μ_t y μ son no trivial es densos euclídeo. Por lo tanto μ no es rígida en las variedades $\mathfrak{F}^9$, $\mathfrak{N}^9$ y $\mathfrak{L}^9$.

$\square$

Capítulo 6

Deformaciones de álgebras de Lie filiformes de dimensión 10

6.1. Las componentes irreducibles de $\mathfrak{F}^{10}$

En el capítulo 4 se estudió que todo corchete de Lie $\mu \in \mathfrak{F}^{10}$ es isomorfa a $\mu_0 + \Psi$, donde μ_0 es el corchete de Lie filiforme estándar y Ψ un 2-cociclo que es corchete de Lie si,

$$I = \begin{cases} -3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,8} = 0, \\ 2a_{1,4}a_{3,9} + 3a_{1,5}a_{3,8} - 7a_{2,6}a_{2,7} + a_{2,6}a_{3,9} + 3a_{2,7}a_{3,8} - a_{4,9}(a_{2,8} + 2a_{1,6}) = 0, \\ a_{4,9}(2a_{1,4} - a_{2,6} - a_{3,8}) = 0 \end{cases}$$

Además por Teorema 4.5 sabemos que $\mathfrak{F}^{10}$ tiene 3 componentes irreducibles.

En esta sección se demostrará el Teorema 4.5 para $\mathfrak{F}^{10}$, algunas cuentas se encontrarán en esta sección y otras en el apéndice.

En primer lugar encontraremos la descomposición primaria del ideal I generado por las condiciones dadas por $\Psi \circ \Psi$, para luego concluir que tal descomposición nos proporciona las componentes irreducibles de la variedad $\mathfrak{F}^{10}$.

Teorema 6.1. *$I = I_1 \cap I_2 \cap I_3$ es la descomposición primaria de I, donde*

$$I_1 = \begin{cases} f_1 = a_{4,9}, \\ f_2 = -3a_{2,6}^2 + 2a_{1,4}a_{3,8} + a_{2,6}a_{3,8}, \\ f_3 = -7a_{2,6}a_{2,7} + 3a_{1,5}a_{3,8} + 3a_{2,7}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,9} + a_{2,6}a_{3,9}, \\ f_4 = -7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 3a_{1,5}a_{3,8}^2 + 3a_{2,7}a_{3,8}^2 + 3a_{2,6}^2a_{3,9} \end{cases}$$

$$I_2 = \begin{cases} g_1 = a_{2,6} - a_{3,8}, \\ g_2 = 3a_{1,5}a_{3,8} - 4a_{2,7}a_{3,8} + 3a_{3,8}a_{3,9} - 2a_{1,6}a_{4,9} - a_{2,8}a_{4,9}, \\ g_3 = a_{1,4} - a_{3,8} \end{cases}$$

$$I_3 = \begin{cases} h_1 = 3a_{2,6} - a_{3,8}, \\ h_2 = 9a_{1,5}a_{3,8} + 16a_{2,7}a_{3,8} + a_{3,8}a_{3,9} - 6a_{1,6}a_{4,9} - 3a_{2,8}a_{4,9}, \\ h_3 = 3a_{1,4} - a_{3,8} \end{cases}$$

Demostración. Probaremos lo siguiente,

(1). $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3$, para ello se probarán los siguientes casos

(i). $I \subset I_1 \cap I_2 \cap I_3$,

(ii). $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \subset I$.

(2). Los ideales I_1, I_2, I_3 son primos.

En efecto;

(1)(i). $I \subset I_1$, pues

$$\begin{aligned}
&-3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,8} = f_2,\\
&2a_{1,4}a_{3,9} + 3a_{1,5}a_{3,8} - 7a_{2,6}a_{2,7} + a_{2,6}a_{3,9} + 3a_{2,7}a_{3,8} - a_{4,9}(a_{2,8} + 2a_{1,6})\\
&\qquad\qquad = a_{3,9}f_2 - f_4 - (a_{2,8} + 2a_{1,6})f_1,\\
&a_{4,9}(2a_{1,4} - a_{2,6} - a_{3,8}) = (2a_{1,4} - a_{2,6} - a_{3,8})f_1.
\end{aligned}$$

$I \subset I_2$, pues

$$\begin{aligned}
&-3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,8} = -3g_1^2 - a_{2,6}a_{3,8}g_1 + 2a_{3,8}g_3,\\
&2a_{1,4}a_{3,9} + 3a_{1,5}a_{3,8} - 7a_{2,6}a_{2,7} + a_{2,6}a_{3,9} + 3a_{2,7}a_{3,8} - a_{4,9}(a_{2,8} + 2a_{1,6})\\
&\qquad\qquad = g_2 - 7a_{2,7}g_1 + 2a_{3,9}g_3 + a_{3,9}g_1,\\
&a_{4,9}(2a_{1,4} - a_{2,6} - a_{3,8}) = (-g_1 + 2g_3)a_{4,9}.
\end{aligned}$$

$I \subset I_3$, pues

$$\begin{aligned}
&-3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,8} = (-3h_1^2 - a_{3,8}h_1 + 2a_{3,8}h_3),\\
&2a_{1,4}a_{3,9} + 3a_{1,5}a_{3,8} - 7a_{2,6}a_{2,7} + a_{2,6}a_{3,9} + 3a_{2,7}a_{3,8} - a_{4,9}(a_{2,8} + 2a_{1,6})\\
&\qquad\qquad = \frac{1}{3}(a_{3,9}h_1 + 2a_{3,9}h_3 - 7a_{2,7}h_1),\\
&a_{4,9}(2a_{1,4} - a_{2,6} - a_{3,8}) = \frac{1}{3}a_{4,9}(ah_3 + 4h_3 - 2h_1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrado (1)(i).

(1)(ii). $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \subset I$, utilizando el Teorema 2.49 mostraremos los puntos (a) y (b) cuyas demostraciones están en el apéndice.
(a) $J = I_1 \cap I_2 = (tI_1 + (1-t)I_2) \ \cap \ R$
(b) $J \cap I_3 = (tJ + (1-t)I_3) \ \cap \ R$
donde $R = \mathbb{C}[a_{1,4}, a_{1,5}, a_{1,6}, a_{1,7}, a_{1,8}, a_{1,9}, a_{2,6}, a_{2,7}, a_{2,8}, a_{2,9}, a_{3,8}, a_{3,9}, a_{4,9}]$.

(a) La prueba de esta intersecčíon está dada en el apéndice, Teorema 8.1. Se utilizó el Algoritmo de Buchberger y se obtuvo la siguiente base de Groebner,
$\{a_{2,6}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}, a_{1,4}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}, ta_{4,9}, 7a_{2,6}a_{2,7} - 3a_{1,5}a_{3,8} - 3a_{2,7}a_{3,8} - 2a_{1,4}a_{3,9} - a_{2,6}a_{3,9}$
$+ 2a_{1,6}a_{4,9} + a_{2,8}a_{4,9}, 3a_{2,6}^2 - 2a_{1,4}a_{3,8} - a_{2,6}a_{3,8}, ta_{2,6} - ta_{3,8} - a_{2,6} + a_{3,8}, ta_{1,4} - ta_{3,8} - a_{1,4} + a_{3,8},$
$3a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} - 4a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 2a_{1,6}a_{4,9}^2 - a_{2,8}a_{4,9}^2, 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 98a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 6a_{1,5}a_{3,8}^2$

$+ 6a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 46a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 23a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}, 3ta_{1,5}a_{3,8} - 4ta_{2,7}a_{3,8} + 3ta_{3,8}a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8} + 4a_{2,7}a_{3,8} - 3a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,6}a_{4,9} + a_{2,8}a_{4,9}, 98a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8} - 27a_{1,5}^2 a_{3,8}^2 - 33a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 6a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 36a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} - 50a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} - 12a_{1,4}^2a_{3,9}^2 + 70a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 35a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 10a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9} a_{4,9} - 5a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 12a_{1,6}^2a_{4,9}^2 + 12a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 3a_{2,8}^2a_{4,9}^2\}$

Por el Teorema 2.49 se eliminaron los polinomios que contienen términos con t y obtuvimos,
$J = I_1 \cap I_2 = \langle a_{2,6}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}, a_{1,4}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}, 3a_{2,6}^2 - 2a_{1,4}a_{3,8} - a_{2,6}a_{3,8}, 3a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} - 4a_{2,7} a_{3,8}a_{4,9} + 3a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 2a_{1,6}a_{4,9}^2 - a_{2,8}a_{4,9}^2, 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 98a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 6a_{1,5}a_{3,8}^2 + 6a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42 a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 46a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 23a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}, 98a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8} - 27a_{1,5}^2a_{3,8}^2 - 33a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 6a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 36a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} - 50a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3 a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} - 12a_{1,4}^2a_{3,9}^2 + 70a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 35a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 10a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 12a_{1,6}^2a_{4,9}^2 + 12a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 3a_{2,8}^2a_{4,9}^2\rangle$

(b) La base para esta intersección también está probada en el apéndice, teorema 8.2.
Sea $tJ+(1-t)I_3 = \langle ta_{2,6}a_{4,9}-ta_{3,8}a_{4,9}, ta_{1,4}a_{4,9}-ta_{3,8}a_{4,9}, 3ta_{2,6}^2-2ta_{1,4}a_{3,8}-ta_{2,6}a_{3,8}, 3ta_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} - 4ta_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3ta_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 2ta_{1,6}a_{4,9}^2 - ta_{2,8}a_{4,9}^2, 63ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 98ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 6ta_{1,5}a_{3,8}^2 + 6ta_{2,7}a_{3,8}^2 + 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 46ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 23ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}, 98t a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8} - 27ta_{1,5}^2a_{3,8}^2 - 33ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 6ta_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 36ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} - 50ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 3ta_{1,5} a_{3,8}^2a_{3,9} - 3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} - 12ta_{1,4}^2a_{3,9}^2 + 70ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 35ta_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 10t a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 12ta_{1,6}^2a_{4,9}^2 + 12ta_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 3ta_{2,8}^2a_{4,9}^2, 3a_{2,6} - a_{3,8} - 3ta_{2,6} + ta_{3,8}, 9a_{1,5}a_{3,8} + 16a_{2,6}a_{3,8} + a_{3,8}a_{3,9} - 6a_{1,6}a_{4,9} - 3a_{2,8}a_{4,9} - 9ta_{1,5}a_{3,8} - 16ta_{2,6}a_{3,8} - ta_{3,8}a_{3,9} + 6ta_{1,6}a_{4,9} + 3ta_{2,8}a_{4,9}, 3a_{1,4} - a_{3,8} - 3ta_{1,4} + ta_{3,8}\rangle$

Utilizando el Algoritmo de Buchberger se obtiene la siguiente base de Groebner,
$\{2a_{1,4}a_{4,9} - a_{2,6}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}, 7a_{2,6}a_{2,7} - 3a_{1,5}a_{3,8} - 3a_{2,7}a_{3,8} - 2a_{1,4}a_{3,9} - a_{2,6}a_{3,9} + 2a_{1,6}a_{4,9}a_{2,8}a_{4,9}, 3a_{2,6}^2 - 2a_{1,4}a_{3,8} - a_{2,6}a_{3,8}, 3ta_{2,6} + ta_{3,8} - 3a_{2,6} - a_{3,8}, 3ta_{1,4} - ta_{3,8} - 3a_{1,4} + a_{3,8}, 4ta_{3,8}a_{4,9} - 3a_{2,6}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}, 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 98a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 6a_{1,5}a_{3,8}^2 + 6a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9a_{2,6} a_{3,8}a_{3,9} - 42a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} - 21a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} - 4a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}, 9ta_{1,5}a_{3,8} + 16ta_{2,7}a_{3,8} + ta_{3,8}a_{3,9} - 6ta_{1,6}a_{4,9} - 3ta_{2,8}a_{4,9} - 9a_{1,5}a_{3,8} - 16a_{2,7}a_{3,8} + 6a_{1,6}a_{4,9} + 3a_{2,8}a_{4,9}, 56ta_{1,6}a_{4,9}^2 + 28ta_{2,8}a_{4,9}^2 - 63a_{1,5}a_{2,6}a_{4,9} + 64a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - -39a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - 9a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 24a_{1,6}a_{4,9}^2 - 12a_{2,8}a_{4,9}^2, 98a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8} - 27a_{1,5}^2a_{3,8}^2 - 33a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 6a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 36a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} - -50a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3a_{2,7} a_{3,8}^2a_{3,9} - 12a_{1,4}^2a_{3,9}^2 + 36a_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} + 22a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 18a_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 11a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 12 a_{1,6}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} + 6a_{2,6}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9} + 14a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 7a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 12a_{1,6}^2a_{4,9}^2 - 12a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 - 3a_{2,8}^2a_{4,9}^2\}$

Por el Teorema 2.49, eliminando los polinomios que contengan términos con t se obtiene la siguiente base,
$\{2a_{1,4}a_{4,9} - a_{2,6}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}, 7a_{2,6}a_{2,7} - 3a_{1,5}a_{3,8} - 3a_{2,7}a_{3,8} - 2a_{1,4}a_{3,9} - a_{2,6}a_{3,9} + 2a_{1,6}a_{4,9}a_{2,8}a_{4,9}, 3a_{2,6}^2 - 2a_{1,4}a_{3,8} - a_{2,6}a_{3,8}, 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 98a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 6a_{1,5}a_{3,8}^2 + 6a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42 a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 42a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} - 21a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} - 4a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}, 98a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8} - 27a_{1,5}^2a_{3,8}^2 - 33a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 6a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 36a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} - 50a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} - 12a_{1,4}^2a_{3,9}^2 + 36a_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} + 22a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 18a_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 11a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 12a_{1,6}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} + 6a_{2,6}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9} + 14a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 7a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 12a_{1,6}^2a_{4,9}^2 - 12a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2$

$- 3a_{2,8}^2a_{4,9}^2\}$

Se puede observar que los 3 primeros polinomios son los que generan I, así $I \subset I_1 \cap I_2 \cap I_3$ por lo tanto de (1)i) y ii) $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3$.

(2). Veamos que I_1, I_2, I_3 son primos y por lo tanto irreducible.

En cada caso probaremos que R/I_j para $j = 1, 2, 3$ es dominio integro entonces I_j es primo y por lo tanto irreducible.
Sea

$$R/I_2 = R/\langle g_1, g_2, g_3\rangle$$

donde $g_1 = a_{2,6} - a_{3,8}, g_2 = 3a_{1,5}a_{3,8} - 4a_{2,7}a_{3,8} + 3a_{3,8}a_{3,9} - 2a_{1,6}a_{4,9} - a_{2,8}a_{4,9}, g_3 = a_{1,4} - a_{3,8}$.
Haciendo cambio de variables, sean

$$\begin{aligned} s &= a_{2,6} - a_{3,8}, \\ p &= a_{1,4} - a_{3,8}, \\ za_{3,8} - ya_{4,9} &= (3a_{1,5} - 4a_{2,7} + 3a_{3,9})a_{3,8} - (2a_{1,6} + a_{2,8})a_{4,9} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} R/I_2 &= \mathbb{C}[z, y, s, p, a_{3,8}, a_{4,9}]/\langle s, za_{3,8} - ya_{4,9}, p\rangle \\ &\cong \mathbb{C}[z, y, a_{3,8}, a_{4,9}]/\langle za_{3,8} - ya_{4,9}\rangle \end{aligned}$$

así basta con probar que $\mathbb{C}[z, y, a_{3,8}, a_{4,9}]/\langle za_{3,8} - ya_{4,9}\rangle$ es dominio integro y por lo tanto R/I_2 es dominio íntegro, para ello demostraremos que $\langle za_{3,8} - ya_{4,9}\rangle$ es primo.

Supongamos que $za_{3,8} - ya_{4,9}$ no es primo, es decir que se puede escribir como producto de polinomios de grado 1 y 2,

$$\begin{aligned} za_{3,8} - ya_{4,9} &= (b_1z + c_1y + d_1a_{3,8} + e_1a_{4,9})(b_2z + c_2y + d_2a_{3,8} + e_2a_{4,9}) \\ &= b_1b_2z^2 + c_1c_2y^2 + d_1d_2a_{3,8}^2 + e_1e_2a_{4,9}^2 + (b_1c_2 + c_1b_2)zy + (b_1d_2 + b_2d_1)za_{3,8} \\ &+ (b_1e_2 + e_1b_2)za_{4,9} + (c_1d_2 + d_1c_2)ya_{3,8} + (c_1e_2 + e_1c_2)ya_{4,9} + (d_1e_2 + e_1d_2)a_{3,8}a_{4,9} \end{aligned}$$

luego, $b_1d_2+d_1b_2 \neq 0$, $c_1e_2+e_1c_2 \neq 0$ y $b_1b_2 = c_1c_2 = d_1d_2 = e_1e_2 = b_1c_2+c_1b_2 = b_1e_2+e_1b_2 = c_1d_2 + d_1c_2 = d_1e_2 + e_1d_2 = 0$.
Trabajando estas condiciones se puede ver claramente que es imposible que esto ocurra. Así $\langle za_{3,8} - ya_{4,9}\rangle$ es primo entonces $\mathbb{C}[z, y, a_{3,8}, a_{4,9}]/\langle za_{3,8} - ya_{4,9}\rangle$ es dominio integro, por lo tanto R/I_2 es dominio integro, así I_2 es primo y por lo tanto irreducible.
Sea ahora,

$$R/I_3 = R/\langle h_1, h_2, h_3\rangle$$

donde $h_1 = 3a_{2,6} - a_{3,8}, h_2 = 9a_{1,5}a_{3,8} + 16a_{2,6}a_{3,8} + a_{3,8}a_{3,9} - 6a_{1,6}a_{4,9} - 3a_{2,8}a_{4,9}, h_3 = 3a_{1,4} - a_{3,8}$.

I_3 se trabaja de manera similar a I_2. Haremos un cambio de variables,

$$\begin{aligned} x &= 3a_{2,6} - a_{3,8}, \\ y &= 3a_{1,4} - a_{3,8}, \\ pa_{3,8} - 3ra_{4,9} &= (9a_{1,5} + 16a_{2,6} + a_{3,9})a_{3,8} - 3(2a_{1,6} + a_{2,8})a_{4,9} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} R/I_3 &= \mathbb{C}[x, y, p, r, a_{3,8}, a_{4,9}] \big/ \langle x, pa_{3,8} - 3ra_{4,9}, y\rangle \\ &\cong \mathbb{C}[p, r, a_{3,8}, a_{4,9}] \big/ \langle pa_{3,8} - 3ra_{4,9}\rangle \end{aligned}$$

Probaremos que $\mathbb{C}[p, r, a_{3,8}, a_{4,9}]/\langle pa_{3,8} - 3ra_{4,9}\rangle$ es dominio integro, para ello basta con probar que $\langle pa_{3,8} - 3ra_{4,9}\rangle$ es primo. Supongamos que no lo es, es decir que se puede escribir como producto de polinomios de grado 1 y 2,

$$\begin{aligned} pa_{3,8} - 3ra_{4,9} &= (b_1p + c_1r + d_1a_{3,8} + e_1a_{4,9})(b_2p + c_2r + d_2a_{3,8} + e_2a_{4,9}) \\ &= b_1b_2p^2 + c_1c_2r^2 + d_1d_2a_{3,8}^2 + e_1e_2a_{4,9}^2 + (b_1c_2 + c_1b_2)pr + (b_1d_2 + b_2d_1)pa_{3,8} \\ &+ (b_1e_2 + e_1b_2)pa_{4,9} + (c_1d_2 + d_1c_2)ra_{3,8} + (c_1e_2 + e_1c_2)ra_{4,9} + (d_1e_2 + e_1d_2)a_{3,8}a_{4,9} \end{aligned}$$

luego, $b_1d_2+d_1b_2 \neq 0$, $c_1e_2+e_1c_2 \neq 0$ y $b_1b_2 = c_1c_2 = d_1d_2 = e_1e_2 = b_1c_2+c_1b_2 = b_1e_2+e_1b_2 = c_1d_2 + d_1c_2 = d_1e_2 + e_1d_2 = 0$.
Trabajando con estas condiciones se puede ver al igual que en el caso anterior que es imposible que esto ocurra. Por lo tanto, $\langle pa_{3,8} - 3ra_{4,9}\rangle$ es primo. Así $\mathbb{C}[p, r, a_{3,8}, a_{4,9}]/\langle pa_{3,8} - 3ra_{4,9}\rangle$ es dominio integro entonces R/I_3 es dominio integro, por lo tanto I_3 es primo y por ende irreducible.

Por último, trabajaremos con I_1,

$$R/I_1 = R/\langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle$$

donde $f_1 = a_{4,9}$, $f_2 = -7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}+3a_{1,5}a_{3,8}^2+3a_{2,7}a_{3,8}^2+3a_{2,6}^2a_{3,9}$, $f_3 = -7a_{2,6}a_{2,7}+3a_{1,5}a_{3,8}+3a_{2,7}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,9} + a_{2,6}a_{3,9}$, $f_4 = -3a_{2,6}^2 + 2a_{1,4}a_{3,8} + a_{2,6}a_{3,8}$. Claramente $f_2 = a_{3,8}f_3 - a_{3,9}f_4$, por lo cual podemos no considerar a f_2, así

$$R/I_1 = R/\langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle \cong R/\langle f_1, f_3, f_4\rangle$$

Haciendo cambio de variables como en los casos anteriores,

$$\begin{aligned} -7a_{2,6}a_{2,7} + xa_{3,8} + ya_{3,9} &= -7a_{2,6}a_{2,7} + (3a_{1,5} + 3a_{2,7})a_{3,8} + (2a_{1,4} + a_{2,6})a_{3,9} \\ -3a_{2,6}^2 + ya_{3,8} &= -3a_{2,6}^2 + (2a_{1,4} + a_{2,6})a_{3,8} \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} R/I_1 &\cong \mathbb{C}[x, y, a_{2,6}, a_{2,7}, a_{3,8}, a_{3,9}, a_{4,9}]/\langle a_{4,9}, -7a_{2,6}a_{2,7} + xa_{3,8} + ya_{3,9}, -3a_{2,6}^2 + ya_{3,8}\rangle \\ &\cong \mathbb{C}[x, y, a_{2,6}, a_{2,7}, a_{3,8}, a_{3,9}]/\langle -7a_{2,6}a_{2,7} + xa_{3,8} + ya_{3,9}, -3a_{2,6}^2 + ya_{3,8}\rangle \end{aligned}$$

Denotaremos $\tilde{I}_1 = \{-7a_{2,6}a_{2,7} + xa_{3,8} + ya_{3,9}, -3a_{2,6}^2 + ya_{3,8}\}$ y $A = \mathbb{C}[x, y, a_{2,6}, a_{2,7}, a_{3,8}, a_{3,9}]$.

Se puede observar que en este caso no es posible trabajar como en I_2 e I_3. En primer lugar notemos que $x \in A$ no es divisor de cero. Para ello, supongamos que $xf \in \tilde{I}_1$ para algún $f \in A$, entonces $f \in (\tilde{I}_1 : (x))$. Probaremos entonces que $f \in \tilde{I}_1$, para ello basta ver que $(\tilde{I}_1 : (x)) = \tilde{I}_1$. Para ello usaremos bases de Groebner y el teorema 2.53. Como A es dominio integro,

$$(\tilde{I}_1 : (x)) = \frac{1}{x}(I_1 \cap (x)) = \frac{1}{x}\left((t\tilde{I}_1 + (1-t)(x)) \cap \mathbb{C}[x, y, a_{2,6}, a_{2,7}, a_{3,8}, a_{3,9}]\right)$$

Utilizando el Algoritmo de Buchberger se encuentra una base de Groebner para $t\tilde{I}_1 + (1-t)(x)$, $\{tx-x, 7xa_{2,6}a_{2,7}-x^2a_{3,8}-xya_{3,9}, 7ta_{2,6}a_{2,7}-tya_{3,9}-xa_{3,8}, 3xa_{2,6}^2-xya_{3,8}, 3ta_{2,6}^2-tya_{3,8}, 7tya_{2,7}a_{3,8} - 3tya_{2,6}a_{3,9} - 3xa_{2,6}a_{3,8}, 3x^2a_{2,6}a_{3,8} - 7xya_{2,7}a_{3,8} + 3xya_{2,6}a_{3,9}, 49xya_{2,7}^2a_{3,8} - 3x^3a_{3,8}^2 - 6x^2ya_{3,8} a_{3,9} - 3xy^2a_{3,9}^2\}$

Por el Teorema 2.49, eliminaremos los polinomios que contengan términos con t, $\{7xa_{2,6}a_{2,7}-x^2a_{3,8}-xya_{3,9}, 3xa_{2,6}^2-xya_{3,8}, 3x^2a_{2,6}a_{3,8}-7xya_{2,7}a_{3,8}+3xya_{2,6}a_{3,9}, 49xya_{2,7}^2a_{3,8}-3x^3 a_{3,8}^2 - 6x^2ya_{3,8}a_{3,9} - 3xy^2a_{3,9}^2\}$

Luego dividimos la base anterior por x y obtenemos que una base para $(\tilde{I}_1, (x))$ es, $\{7a_{2,6}a_{2,7} - xa_{3,8} - ya_{3,9}, 3a_{2,6}^2 - ya_{3,8}, 3xa_{2,6}a_{3,8} - 7ya_{2,7}a_{3,8} + 3ya_{2,6}a_{3,9}, 49ya_{2,7}^2a_{3,8} - 3x^2a_{3,8}^2 - 6xya_{3,8}a_{3,9} - 3y^2a_{3,9}^2\}$

Lema 6.2. *Una base de Groebner para $\tilde{I}_1$ es,*
$\{7a_{2,6}a_{2,7} - xa_{3,8} - ya_{3,9}, 3a_{2,6}^2 - ya_{3,8}, 3xa_{2,6}a_{3,8} - 7ya_{2,7}a_{3,8} + 3ya_{2,6}a_{3,9}, 49ya_{2,7}^2a_{3,8} - 3x^2a_{3,8}^2 - 6xya_{3,8}a_{3,9} - 3y^2a_{3,9}^2\}$

Por el lema, claramente $(\tilde{I}_1, (x)) = \tilde{I}_1$ por lo tanto, x no es divisor de cero de A. Consideremos $S = \{x^0, x^1, x^2, \ldots\}$. Recordemos que A es dominio integro, si y solo si, A_S es dominio integro. Con el fin de eliminar variables, probaremos ahora que y no es divisor de cero en A, para ello usaremos la misma técnica usada para probar que x no es divisor de cero, es decir probaremos que $(\tilde{I}_1 : (y)) = \tilde{I}_1$, en efecto
$(\tilde{I}_1 : (y)) = \langle 7a_{2,6}a_{2,7} - xa_{3,8} - ya_{3,9}, 3a_{2,6}^2 - ya_{3,8}, 3xa_{2,6}a_{3,8} - 7ya_{2,7}a_{3,8} + 3ya_{2,6}a_{3,9}, 49ya_{2,7}^2a_{3,8} - 3x^2a_{3,8}^2 - 6xya_{3,8}a_{3,9} - 3y^2a_{3,9}^2\rangle = \tilde{I}_1$
Supongamos ahora, $yf = 0 \in A_S$, multiplicando ambos miembros por x^k, se tiene $(fx^k)y = 0$ en A, como y no es divisor de cero en A, debe ser $fx^k = 0$, pero x tampoco es divisor de cero, así $f = 0$. Por lo tanto y no es divisor de cero en A_S. Consideramos ahora $S_1 = \{y^0, y^1, y^2, \ldots\}$.
Notemos que A_S es dominio integro, si y solo si, $\tilde{A} = (A_S)_{S_1} \cong A_{SS_1}$. Como x, y son invertibles en $\tilde{A}$, llamaremos $A_{3,8} = -3a_{2,6}^2y^{-1} + a_{3,8}$, así

$$\tilde{A} = \mathbb{C}[x, y, a_{2,6}, a_{2,7}, a_{3,8}, a_{3,9}, a_{4,9}]_{SS_1}/I_{SS_1} \cong (\mathbb{C}[x, y])_{SS_1}[a_{2,6}, a_{2,7}, A_{3,8}, a_{3,9}]/I_{SS_1}$$

de esta forma eliminando variables, tenemos;

$$\begin{aligned} I_{SS_1} &= \langle -7a_{2,6}a_{2,7} - x(A_{3,8} + 3a_{2,6}^2y^{-1}) - ya_{3,9}, -3a_{2,6}^2 + y(A_{3,8} + 3a_{2,6}^2y^{-1})\rangle \\ &= \langle -7a_{2,6}a_{2,7} - xA_{3,8} - 3xa_{2,6}^2y^{-1} + ya_{3,9}, -3a_{2,6}^2 + yA_{3,8} + 3ya_{2,6}^2y^{-1}\rangle \\ &= \langle -7a_{2,6}a_{2,7} - 3xa_{2,6}^2y^{-1} - ya_{3,9}, yA_{3,8}\rangle \\ &= \langle -7ya_{2,6}a_{2,7} - 3xa_{2,6}^2 - y^2a_{3,9}, A_{3,8}\rangle \end{aligned}$$

Haciendo el cociente,

$$\begin{aligned}\tilde{A} &\cong (\mathbb{C}[x,y])_{SS_1}[a_{2,6},a_{2,7},a_{3,9}]/\langle -7ya_{2,6}a_{2,7}-3xa_{2,6}^2-y^2a_{3,9},A_{3,8}\rangle\\ &\cong (\mathbb{C}[x,y,a_{2,6},a_{2,7},a_{3,9}]/\langle -7ya_{2,6}a_{2,7}-3xa_{2,6}^2-y^2a_{3,9},A_{3,8}\rangle)_{SS_1}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tilde{A}$ es dominio integro, si y solo si, $\mathbb{C}[x,y,a_{2,6},a_{2,7},a_{3,9}]/\langle -7ya_{2,6}a_{2,7}-3xa_{2,6}^2-y^2a_{3,9}\rangle$ es dominio integro. Para ello basta con probar que $-7ya_{2,6}a_{2,7}-3xa_{2,6}^2-y^2a_{3,9}$ es primo. Como $\mathbb{C}$ es cuerpo, entonces $\mathbb{C}[x,y,a_{2,6},a_{2,7},a_{3,9}]$ es dominio de factorización única. Por lo tanto, veamos que $-7ya_{2,6}a_{2,7}-3xa_{2,6}^2-y^2a_{3,9}$ es irreducible. Supongamos que no lo es, es decir, que se puede escribir como producto de polinomios de grado 1 y 2.

$$\begin{aligned}-7ya_{2,6}a_{2,7}-3xa_{2,6}^2-y^2a_{3,9} =&(a_1x+a_2y+a_3a_{2,6}+a_4a_{2,7}+a_5a_{3,9})(b_1x^2+b_2y+b_3a_{2,6}^2+b_4a_{2,7}^2\\ &+b_5a_{3,9}^2+b_6xy+b_7xa_{2,6}+b_8xa_{2,7}+b_9xa_{3,9}+b_{10}ya_{2,6}+b_{11}ya_{2,7}\\ &+b_{12}ya_{3,9}+b_{13}a_{2,6}a_{2,7}+b_{14}a_{2,6}a_{3,9}+b_{15}a_{2,7}a_{3,9})\end{aligned}$$

Realizando el producto, $a_2b_{13}+a_3b_{11}+a_4b_{10}\neq 0, a_1b_3+a_3b_7\neq 0, a_2b_{12}+a_5b_2\neq 0$ y $a_1b_1=a_2b_2 = a_3b_3=a_4b_4=a_5b_5=0, a_1b_2+a_2b_6=0, a_2b_3+a_3b_{10}=0, a_1b_4+a_4b_8=0, a_1b_5+a_5b_9=0, a_1b_6 + a_2b_1=0, a_1b_7+a_3b_1=0, a_1b_8+a_4b_1=0, a_1b_9+a_5b_1=0, a_1b_{10}+a_4b_6+a_2b_7=0, a_1b_{11}+a_5b_7+ a_2b_8=0, a_1b_{12}+a_5b_6+a_2b_9=0, a_1b_{13}+a_4b_7+a_3b_8=0, a_1b_{14}+a_5b_7+a_3b_9=0, a_1b_{15}+a_4b_9+a_5b_8 =0, a_2b_4+a_4b_{11}=0, a_2b_5+a_5b_{12}=0, a_2b_{10}+a_3b_2=0, a_2b_{11}+a_4b_3=0, a_2b_4+a_4b_{11}=0, a_3b_{13} + a_4b_3=0, a_3b_{14}+a_5b_3=0, a_4b_5+a_5b_{15}=0, a_4b_{13}+a_3b_4=0, a_4b_{15}+a_5b_4=0, a_3b_5+a_5b_{14}=0, a_2b_{14}+a_3b_{12}+a_5b_{10}=0, a_2b_{15}+a_4b_{12}+a_5b_{14}=0, a_3b_{15}+a_4b_{14}+a_5b_{13}=0$

es fácilmente ver que esto es una contradicción. Luego $-7ya_{2,6}a_{2,7}-3xa_{2,6}^2-y^2a_{3,9}$ es irreducible y por lo tanto primo. Entonces, $\mathbb{C}[x,y,a_{2,6},a_{2,7},a_{3,9}]/\langle -7ya_{2,6}a_{2,7}-3xa_{2,6}^2-y^2a_{3,9},A_{3,8}\rangle$ es dominio integro, así $(\mathbb{C}[x,y,a_{2,6},a_{2,7},a_{3,9}]/\langle -7ya_{2,6}a_{2,7}-3xa_{2,6}^2-y^2a_{3,9},A_{3,8}\rangle)_{SS_1}$ es dominio integro, por lo tanto $\tilde{A}$ es dominio integro, luego R/I_1 es dominio integro. Entonces I_1 es primo y por ende es irreducible.

□

Corolario 6.3. *$Z(I_1), Z(I_2), Z(I_3)$ son las componentes irreducibles de $\mathfrak{F}^{10}$, donde*

$$Z(I_1)=\begin{cases} a_{4,9}=0,\\ -3a_{2,6}^2+2a_{1,4}a_{3,8}+a_{2,6}a_{3,8}=0,\\ -7a_{2,6}a_{2,7}+3a_{1,5}a_{3,8}+3a_{2,7}a_{3,8}+2a_{1,4}a_{3,9}+a_{2,6}a_{3,9}=0,\\ -7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}+3a_{1,5}a_{3,8}^2+3a_{2,7}a_{3,8}^2+3a_{2,6}^2a_{3,9}=0\end{cases}$$

$$Z(I_2)=\begin{cases} a_{2,6}-a_{3,8}=0,\\ 3a_{1,5}a_{3,8}-4a_{2,7}a_{3,8}+3a_{3,8}a_{3,9}-2a_{1,6}a_{4,9}-a_{2,8}a_{4,9}=0,\\ a_{1,4}-a_{3,8}=0\end{cases}$$

$$Z(I_3)=\begin{cases} 3a_{2,6}-a_{3,8}=0,\\ 9a_{1,5}a_{3,8}+16a_{2,7}a_{3,8}+a_{3,8}a_{3,9}-6a_{1,6}a_{4,9}-3a_{2,8}a_{4,9}=0,\\ 3a_{1,4}-a_{3,8}=0\end{cases}$$

Demostración. Por el teorema $I=I_1\cap I_2\cap I_3$, por la Proposición 2.4, $Z(I)=Z(I_1\cap I_2\cap I_3) = Z(I_1)\cup Z(I_2)\cup Z(I_3)$. Además por el Lema 2.12, sabemos que como I_1, I_2, I_3 son primos, entonces $Z(I_1), Z(I_2), Z(I_3)$ son irreducibles, por lo tanto se prueba lo deseado. □

6.2. Deformaciones de álgebras filiformes de dimensión 10

Teorema 6.4. *La deformación μ_t construida en 4.6 es no trivial en un conjunto de abiertos densos de $\mathfrak{L}^{10}$.*

Consideraremos la clasificación de Khakimdjanov enunciada en 4.3 donde vimos que μ está definida por

$$
\begin{aligned}
\mu(x_0, x_j) &= x_{j+1} \\
\mu(x_i, x_j) &= a_{1,4}\psi_{1,4}(x_i, x_j) + a_{1,5}\psi_{1,5}(x_i, x_j) + a_{1,6}\psi_{1,6}(x_i, x_j) + a_{1,7}\psi_{1,7}(x_i, x_j) + a_{1,8}\psi_{1,8}(x_i, x_j) \\
&\quad + a_{1,9}\psi_{1,9}(x_i, x_j) + a_{2,6}\psi_{2,6}(x_i, x_j) + a_{2,7}\psi_{2,7}(x_i, x_j) + a_{2,8}\psi_{2,8}(x_i, x_j) + a_{2,9}\psi_{2,9}(x_i, x_j) \\
&\quad + a_{2,9}\psi_{2,9}(x_i, x_j) + a_{3,8}\psi_{3,8}(x_i, x_j) + a_{3,9}\psi_{3,9}(x_i, x_j) + a_{4,9}\psi_{4,9}(x_i, x_j),
\end{aligned}
$$

es decir;

$$
\begin{aligned}
\mu(x_0, x_j) &= x_{j+1} \text{ para } j = 1, 2, \dots, 8 \\
\mu(x_1, x_2) &= a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 + a_{1,6}x_6 + a_{1,7}x_7 + a_{1,8}x_8 + a_{1,9}x_9 \\
\mu(x_1, x_3) &= a_{1,4}x_5 + a_{1,5}x_6 + a_{1,6}x_7 + a_{1,7}x_8 + a_{1,8}x_9 \\
\mu(x_1, x_4) &= (a_{1,4} - a_{2,6})x_6 + (a_{1,5} - a_{2,7})x_7 + (a_{1,6} - a_{2,8})x_8 + (a_{1,7} - a_{2,9})x_9 \\
\mu(x_1, x_5) &= (a_{1,4} - 2a_{2,6})x_7 + (a_{1,5} - 2a_{2,7})x_8 + (a_{1,6} - 2a_{2,8})x_9 \\
\mu(x_1, x_6) &= (a_{1,4} - 3a_{2,6} + a_{3,8})x_8 + (a_{1,5} - 3a_{2,7} + a_{3,9})x_9 \\
\mu(x_1, x_7) &= (a_{1,4} - 4a_{2,6} + 3a_{3,8})x_9 \\
\mu(x_1, x_8) &= -a_{4,9}x_9 \\
\mu(x_2, x_3) &= a_{2,6}x_6 + a_{2,7}x_7 + a_{2,8}x_8 + +a_{2,9}x_9 \\
\mu(x_2, x_4) &= a_{2,6}x_7 + a_{2,7}x_8 + +a_{2,8}x_9 \\
\mu(x_2, x_5) &= (a_{2,6} - a_{3,8})x_8 + (a_{2,7} - a_{3,9})x_9 \\
\mu(x_2, x_6) &= (a_{2,6} - 2a_{3,8})x_9 \\
\mu(x_2, x_7) &= a_{4,9}x_9 \\
\mu(x_3, x_4) &= a_{3,8}x_8 + a_{3,9}x_9 \\
\mu(x_3, x_5) &= a_{3,8}x_9 \\
\mu(x_3, x_6) &= -a_{4,9}x_9 \\
\mu(x_4, x_5) &= a_{4,9}x_9 \\
\mu(x_i, x_j) &= 0 \text{ para los demás } i, j
\end{aligned}
$$

cuyas parámetros $\{a_{k,s}\}$ deben cumplir las ecuaciónes del ideal I. Consideraremos el ideal de codimensión 2, $\mathfrak{K} = \mu(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \rangle$ y la derivación definida en el Teorema 4.6 definida por;

$$
\begin{aligned}
Dx_2 &= x_7, \\
Dx_3 &= x_8, \\
Dx_4 &= x_9, \\
Dx_j &= 0, \quad \text{para } 5 \le j \le 9
\end{aligned}
$$

además $\mu_t = \mu + tD$ es una deformación de μ donde;

$$\begin{aligned}
&\mu_t(x_0, x_j) = x_{j+1} \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, 8\\
&\mu_t(x_1, x_2) = a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 + a_{1,6}x_6 + a_{1,7}x_7 + a_{1,8}x_8 + a_{1,9}x_9 + tx_7\\
&\mu_t(x_1, x_3) = a_{1,4}x_5 + a_{1,5}x_6 + a_{1,6}x_7 + a_{1,7}x_8 + a_{1,8}x_9 + tx_8\\
&\mu_t(x_1, x_4) = (a_{1,4} - a_{2,6})x_6 + (a_{1,5} - a_{2,7})x_7 + (a_{1,6} - a_{2,8})x_8 + (a_{1,7} - a_{2,9})x_9 + tx_9\\
&\mu_t(x_1, x_5) = (a_{1,4} - 2a_{2,6})x_7 + (a_{1,5} - 2a_{2,7})x_8 + (a_{1,6} - 2a_{2,8})x_9\\
&\mu_t(x_1, x_6) = (a_{1,4} - 3a_{2,6} + a_{3,8})x_8 + (a_{1,5} - 3a_{2,7} + a_{3,9})x_9\\
&\mu_t(x_1, x_7) = (a_{1,4} - 4a_{2,6} + 3a_{3,8})x_9\\
&\mu_t(x_1, x_8) = -a_{4,9}x_9\\
&\mu_t(x_2, x_3) = a_{2,6}x_6 + a_{2,7}x_7 + a_{2,8}x_8 + +a_{2,9}x_9\\
&\mu_t(x_2, x_4) = a_{2,6}x_7 + a_{2,7}x_8 + +a_{2,8}x_9\\
&\mu_t(x_2, x_5) = (a_{2,6} - a_{3,8})x_8 + (a_{2,7} - a_{3,9})x_9\\
&\mu_t(x_2, x_6) = (a_{2,6} - 2a_{3,8})x_9\\
&\mu_t(x_2, x_7) = a_{4,9}x_9\\
&\mu_t(x_3, x_4) = a_{3,8}x_8 + a_{3,9}x_9\\
&\mu_t(x_3, x_5) = a_{3,8}x_9\\
&\mu_t(x_3, x_6) = -a_{4,9}x_9\\
&\mu_t(x_4, x_5) = a_{4,9}x_9\\
&\mu_t(x_i, x_j) = 0 \text{ para los demás } i, j
\end{aligned}$$

Demostración. (del teorema)
La prueba del teorema consiste en probar que μ y μ_t no son isomorfas. Para ello supondremos que si lo son, es decir que existe $g \in \mathrm{GL}(10, \mathbb{C})$ isomorfismo tal que $E_{i,j} = 0$ para toda $i, j = 0, 1, \ldots, 9$. Por el Lema 5.1 sabemos que si $a_{1,4} \neq 0$ el isomorfismo g es de la forma;

$$g = \begin{pmatrix}
m_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
m_{2,1} & m_{1,1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
m_{3,1} & m_{3,2} & m_{1,1}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{1,1}^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & m_{1,1}^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
m_{6,1} & m_{6,2} & m_{6,3} & m_{6,4} & m_{6,5} & m_{1,1}^6 & 0 & 0 & 0 & \\
m_{7,1} & m_{7,2} & m_{7,3} & m_{7,4} & m_{7,5} & m_{7,6} & m_{1,1}^7 & 0 & 0 & \\
m_{8,1} & m_{8,2} & m_{8,3} & m_{8,4} & m_{8,5} & m_{8,6} & m_{8,7} & m_{1,1}^8 & 0 & \\
m_{9,1} & m_{9,2} & m_{9,3} & m_{9,4} & m_{9,5} & m_{9,6} & m_{9,7} & m_{9,8} & m_{1,1}^9 & 0\\
m_{10,1} & m_{10,2} & m_{10,3} & m_{10,4} & m_{10,5} & m_{10,6} & m_{10,7} & m_{10,8} & m_{10,9} & m_{1,1}^{10}
\end{pmatrix}$$

Utilizaremos algunos coeficientes $E_{i,j}^{(k)} = 0$ para ciertos i, j, k y obtenemos las siguientes ecuaciónes,

1. $E_{0,1}^{(3)} = m_{4,3} - m_{1,1}m_{3,2} = 0$

2. $E_{0,1}^{(4)} = m_{5,3} - m_{1,1}m_{4,2} - a_{1,4}m_{2,1}m_{3,2} + a_{1,4}m_{1,1}^2m_{3,1} = 0$

3. $E_{0,2}^{(4)} = m_{5,4} - m_{1,1}m_{4,3} - a_{1,4}m_{1,1}^3m_{2,1} = 0$

4. $E_{0,2}^{(5)} = m_{6,4} - m_{1,1}m_{5,3} - a_{1,5}m_{1,1}^3m_{2,1} - a_{1,4}m_{2,1}m_{4,3} = 0$

5. $E_{0,3}^{(5)} = m_{6,5} - m_{1,1}m_{5,4} - a_{1,4}m_{1,1}^4 m_{2,1} = 0$

6. $E_{0,3}^{(6)} = m_{7,5} - m_{1,1}m_{6,4} - a_{1,5}m_{1,1}^4 m_{2,1} - (a_{1,4} - a_{2,6})m_{2,1}m_{5,4} - a_{2,6}m_{1,1}^4 m_{3,1} = 0$

7. $E_{0,4}^{(6)} = m_{7,6} - m_{1,1}m_{6,5} - (a_{1,4} - a_{2,6})m_{1,1}^5 m_{2,1} = 0$

8. $E_{0,4}^{(7)} = m_{8,6} - m_{1,1}m_{7,5} - (a_{1,5} - a_{2,7})m_{1,1}^5 m_{2,1} - (a_{1,4} - 2a_{2,6})m_{2,1}m_{6,5} - a_{2,6}m_{1,1}^5 m_{3,1} = 0$

9. $E_{0,5}^{(7)} = m_{8,7} - m_{1,1}m_{7,6} - (a_{1,4} - 2a_{2,6})m_{1,1}^6 m_{2,1} = 0$

10. $E_{0,5}^{(8)} = m_{9,7} - m_{1,1}m_{8,6} - (a_{1,5} - 2a_{2,7})m_{1,1}^6 m_{2,1} - (a_{1,4} - 3a_{2,6} + a_{3,8})m_{2,1}m_{7,6} + (a_{2,6} - a_{3,8})m_{1,1}^6$
$m_{3,1} = 0$

11. $E_{0,6}^{(8)} = m_{9,8} - m_{1,1}m_{8,7} - (a_{1,4} - 2a_{2,6} + a_{3,8})m_{1,1}^7 m_{2,1} = 0$

12. $E_{1,2}^{(5)} = a_{1,4}m_{6,5} + a_{1,5}m_{1,1}^6 - a_{1,5}m_{1,1}^5 - a_{1,4}m_{1,1}^2 m_{4,3} = 0$

13. $E_{1,2}^{(6)} = a_{1,4}m_{7,5} + a_{1,5}m_{7,6} + a_{1,6}m_{1,1}^7 - a_{1,6}m_{1,1}^5 - a_{1,5}m_{1,1}^2 m_{4,3} - (a_{1,4} - a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{5,3} - a_{2,6}$
$m_{3,2}m_{4,3} + a_{2,6}m_{1,1}^3 m_{4,2} = 0$

14. $E_{1,2}^{(7)} = a_{1,4}m_{8,5} + a_{1,5}m_{8,6} + a_{1,7}m_{1,1}^8 + tm_{1,1}^8 - a_{1,7}m_{1,1}^5 - a_{1,6}m_{1,1}^2 m_{4,3} - (a_{1,5} - a_{2,7})m_{1,1}^2 m_{5,3}$
$-(a_{1,4} - 2a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{6,3} - a_{2,7}m_{3,2}m_{4,3} - a_{2,6}m_{3,2}m_{5,3} + a_{2,6}m_{1,1}^3 m_{5,2} + a_{2,7}m_{1,1}^3 m_{4,2} = 0$

15. $E_{1,3}^{(6)} = a_{1,4}m_{7,6} + a_{1,5}m_{1,1}^7 - a_{1,5}m_{1,1}^6 - (a_{1,4} - a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{5,4} - a_{2,6}m_{1,1}^4 m_{3,2} = 0$

16. $E_{1,3}^{(8)} = a_{1,4}m_{9,6} + a_{1,5}m_{9,7} + a_{1,6}m_{9,8} + a_{1,7}m_{1,1}^9 + tm_{1,1}^9 - a_{1,7}m_{1,1}^6 - (a_{1,6} - a_{2,8})m_{1,1}^2 m_{5,4}$
$- (a_{1,5} - 2a_{2,7})m_{1,1}^2 m_{6,4} - (a_{1,4} - 3a_{2,6} + a_{3,8})m_{1,1}^2 m_{7,4} - a_{2,8}m_{1,1}^4 m_{3,2} - a_{2,7}m_{3,2}m_{5,4}$
$- (a_{2,6} - a_{3,8})m_{3,2}m_{6,4} - a_{3,8}m_{4,2}m_{5,2} + a_{3,8}m_{1,1}^4 m_{5,2} = 0$

17. $E_{1,4}^{(7)} = (a_{1,4} - a_{2,6})m_{8,7} + (a_{1,5} - a_{2,7})m_{1,1}^8 - (a_{1,5} - a_{2,7})m_{1,1}^7 - (a_{1,4} - 2a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{6,5} -$
$a_{2,6}m_{1,1}^5 m_{3,2} = 0$

18. $E_{2,3}^{(8)} = a_{2,6}m_{9,7} + a_{2,7}m_{9,8} + a_{2,8}m_{1,1}^9 - a_{2,8}m_{1,1}^7 - a_{2,7}m_{1,1}^3 m_{5,4} - (a_{2,6} - a_{3,8})m_{1,1}^3 m_{6,4} - a_{3,8}m_{4,3}$
$m_{5,4} + a_{3,8}m_{1,1}^4 m_{5,3} = 0$

19. $E_{2,4}^{(9)} = a_{2,6}m_{10,8} + a_{2,7}m_{10,9} + a_{2,8}m_{1,1}^{10} - a_{2,8}m_{1,1}^8 - (a_{2,7} - a_{3,9})m_{1,1}^3 m_{6,5} - (a_{2,6} - 2a_{3,8})m_{1,1}^3 m_{7,5}$
$-a_{4,9}m_{1,1}^3 m_{8,5} - a_{3,9}m_{1,1}^5 m_{4,3} - a_{3,8}m_{4,3}m_{6,5} + a_{4,9}m_{4,3}m_{7,5} - a_{4,9}m_{5,3}m_{6,5} + a_{4,9}m_{1,1}^5 m_{6,3}$
$= 0$

Mirando $E_{1,3}^{(6)} = 0$ y haciendo sustitución con $E_{0,3}^{(5)} = 0, E_{0,4}^{(4)}, E_{0,1}^{(3)} = 0$, como $a_{1,4} \neq 0$ la igualamos a $a_{1,4}E_{0,4}^{(6)} = 0$ obtenemos $2a_{1,4}^2 m_{2,1} = a_{1,5}m_{1,1}(1 - m_{1,1})$(E1).

Trabajando de igual forma con $E_{1,4}^{(7)} = 0$ y $E_{0,5}^{(7)} = 0$, suponiendo $a_{1,4} - a_{2,6} \neq 0$ tenemos $(-2a_{1,4}^2 + 3a_{1,4}a_{2,6} - 3a_{2,6}^2)m_{2,1} = (a_{1,5} - a_{2,7})m_{1,1}(1 - m_{1,1})$(E2).

Realizando la operación $-2a_{1,4}^2 + 3a_{1,4}a_{2,6} - 3a_{2,6}^2)m_{2,1}(E1) - 2a_{1,4}^2(E2)$ obtenemos $(3a_{2,6}a_{1,5}(a_{1,4} - a_{2,6}) - 2a_{2,7}a_{1,4}^2)m_{1,1}(1 - m_{1,1}) = 0$.

Luego, si $3a_{2,6}a_{1,5}(a_{1,4}-a_{2,6})-2a_{2,7}a_{1,4}^2 \neq 0$ debe ser $m_{1,1}=1$.

Reemplazando este resultado en (E1) o (E2), $m_{2,1}=0$.

Utilizando $E_{1,2}^{(6)}=0$, se tiene $a_{1,4}m_{7,5}=a_{1,5}m_{4,3}+(a_{1,4}-a_{2,6})m_{5,3}+a_{2,6}m_{3,2}m_{4,3}-a_{2,6}m_{4,2}-a_{1,5}m_{7,6}$ realizando en el mismo las respectivas sustitución con las ecuaciones $E_{0,1}^{(3)}=0, E_{0,2}^{(4)}=0, E_{0,3}^{(5)}=0$ obtenemos $2m_{4,2}=m_{3,2}^2$ (E3) siempre que $a_{2,6}\neq 0$.

De $E_{2,3}^{(8)}=0$, obtenemos $-a_{2,6}m_{9,7}+a_{2,7}m_{5,4}+(a_{2,6}-a_{3,8})m_{6,4}+a_{3,8}m_{4,3}m_{5,4}-a_{3,8}m_{5,3}-a_{2,7}m_{9,8}=0$, de la cual trabajándola algebraicamente, sumandole $a_{2,6}E_{0,5}^{(}8)=0$ y haciendo sustitución con ecuaciones anteriores se obtiene que si $a_{3,8}\neq 0$ debe ser $m_{3,1}=0$. Así por $E_{0,3}^{(6)}=0$ y $E_{1,2}^{(6)}=0$ usando también el hecho que $a_{1,4}\neq 0, a_{2,6}\neq 0$ se llega a $m_{3,2}=0$ y por lo tanto por (E3) debe ser $m_{4,2}=0$.

De las ecuaciónes $E_{1,2}^{(7)}=0$ y $E_{1,3}^{(8)}=0$ se despeja t e igualamos y obtenemos $m_{4,1}=0$. Ahora, usando $E_{2,4}^{(9)}=0$, realizando sustitución con las ecuaciones anteriores, obtenemos $m_{5,2}=0$ de donde es fácil deducir usando $E_{1,2}^{(7)}=0$ o $E_{1,3}^{(8)}=0$ que $t=0$ lo cual es absurdo.

De esta forma obtenemos el siguientes abierto donde μ_t es una deformación no trivial de μ; $U=\{a_{1,4}\neq 0, a_{1,5}\neq 0, a_{2,6}\neq 0, a_{3,8}\neq 0, 3a_{2,6}a_{1,5}(a_{1,4}-a_{2,6})-2a_{2,7}a_{1,4}^2\neq 0\}$. □

Corolario 6.5. *No existen álgebras de Lie rígidas en la variedad $\mathfrak{L}^{10}$. Más aún, no existen álgebras de Lie filiformes rígidas en $\mathfrak{F}^{10}$.*

Demostración. Probaremos que el abierto encontrado en el teorema corta cada componente irreducible, es decir, mostraremos que en cada componente que existen puntos del abierto U.
Luego, utilizando el Teorema 2.16 el cual nos dice que en una variedad irreducible todo abierto es denso Zariski y el Lema 2.17 que nos afirma que es denso euclídeo, podremos concluír lo deseado.

Primer componente,

$$C1=\begin{cases} f_1 &= a_{4,9}=0,\\ f_2 &= -3a_{2,6}^2+2a_{1,4}a_{3,8}+a_{2,6}a_{3,8}=0,\\ f_3 &= -7a_{2,6}a_{2,7}+3a_{1,5}a_{3,8}+3a_{2,7}a_{3,8}+2a_{1,4}a_{3,9}+a_{2,6}a_{3,9}=0,\\ f_4 &= -7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}+3a_{1,5}a_{3,8}^2+3a_{2,7}a_{3,8}^2+3a_{2,6}^2a_{3,9}=0,\end{cases} \tag{6.1}$$

se tiene los siguientes casos,

(i). Sea $a_{3,8}=\dfrac{\epsilon}{2a_{1,4}}$, reemplazando en f_2, obtenemos

$$a_{2,6}=\frac{\epsilon\mp\sqrt{\epsilon^2+48a_{1,4}^2\epsilon}}{12a_{1,4}}$$

luego, reemplazo en f_3,

$$a_{1,5}=\frac{11a_{1,4}a_{2,7}\epsilon\pm 7a_{1,4}a_{2,7}\sqrt{\epsilon^2+48a_{1,4}^2\epsilon}-24a_{1,4}^3a_{3,9}-a_{1,4}a_{3,9}\epsilon\pm a_{1,4}a_{3,9}\sqrt{\epsilon^2+48a_{1,4}^2\epsilon}}{18\epsilon}$$

Por lo tanto el punto,

$$\left(\epsilon, \frac{11a_{2,7} \pm 7a_{2,7}\sqrt{1+48\epsilon} - 24\epsilon a_{3,9} - a_{3,9} \pm a_{3,9}\sqrt{1+48\epsilon}}{18}, 0,0,0,0, \frac{1 \mp \sqrt{1+48\epsilon}}{12}, a_{2,7}, 0, 0, \frac{1}{2}, a_{3,9}, 0\right)$$

es un punto del abierto U y verifícan las ecuaciones de la componente $C1$.

(ii). Si $a_{2,6} = \epsilon$ y veremos que ocurre con las demás constantes, para ello encontraremos un valor de $a_{3,8}$ y $a_{3,9}$ distintos de cero. Usando f_2 tenemos,

$$a_{3,8} = \frac{3\epsilon^2}{2a_{1,4} + \epsilon}$$

de f_3 y con los resultados anteriores,

$$a_{3,9} = \frac{14a_{1,4}a_{2,7}\epsilon - 9a_{1,5}\epsilon - 2a_{2,7}\epsilon^2}{82a_{1,4} + \epsilon)^2}$$

Usando f_4;

$$a_{1,5} = -27\epsilon^4 a_{2,7} - 84\epsilon^2 a_{1,4}^2 a_{2,7} - 27\epsilon^4$$

los cuales claramente pertenecen al abierto U y verifican los polinomios que forman $C1$.

(iii). Si $a_{1,5} = \dfrac{\epsilon}{3a_{3,8}}$ y $a_{2,6} = \delta$, entonces

$$a_{3,8} = \frac{-3a_{2,7} \pm \sqrt{9a_{2,7} - 12\delta^2 a_{3,9}(-7a_{2,7}\delta + \epsilon)}}{-14a_{2,7}\delta + 2\epsilon}$$

y

$$a_{1,4} = \frac{-7a_{2,7}\delta(-14a_{2,7}\delta + 2\epsilon) + \epsilon(-14a_{2,7}\delta + 2\epsilon) - 9a_{2,7}^2 \mp 3a_{2,7}\sqrt{9a_{2,7} - 12\delta^2 a_{3,9}(-7a_{2,7}\delta + \epsilon)}}{-28a_{2,7}a_{3,9}\delta + 4a_{3,9}\epsilon}$$

(iv). Si $a_{3,8} = 3a_{2,6} + \epsilon$, entonces;

$$a_{1,4} = \frac{\epsilon}{6a_{2,6} + 2\epsilon}$$

y

$$a_{1,5} = \frac{-3a_{2,7}(a_{2,6} + 3\epsilon)(3a_{2,6} + \epsilon) - 2a_{3,9}\epsilon - a_{2,6}a_{3,9}}{9a_{2,6} + 3\epsilon}$$

En estos últimos dos casos también obtenemos un punto de $C1$ que están en U.

Segunda componente,

$$C2 = \begin{cases} g_1 = a_{2,6} - a_{3,8}, \\ g_2 = 3a_{1,5}a_{3,8} - 4a_{2,7}a_{3,8} + 3a_{3,8}a_{3,9} - 2a_{1,6}a_{4,9} - a_{2,8}a_{4,9}, \\ g_3 = a_{1,4} - a_{3,8}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Trabajaremos de igual forma que en $C1$.

(i). Si $a_{1,4} = \epsilon$, entonces $a_{3,8} = \epsilon$, $a_{2,6} = \epsilon$ y $a_{1,5} = \dfrac{4a_{2,7}\epsilon - 3a_{3,9}\epsilon - (6a_{1,6} - a_{2,8})a_{4,9}}{3\epsilon}$ Claramente se obtiene el punto $(\epsilon, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, , \epsilon, 1, 0, 0, \epsilon, 1, 1) \in U \cap C_1$.

(ii). Si $a_{1,4} = a_{2,6} = a_{3,8} = \dfrac{(2a_{1,6} + a_{2,8})a_{4,9}}{-4a_{2,7} + 3a_{3,9}} + \epsilon$, entonces

$$a_{1,5} = \frac{-(9a_{3,9}^2 + 16a_{2,7}^2 - 24a_{2,7}a_{3,9})\epsilon}{3(2a_{1,6} + a_{2,8})a_{4,9} + 3(-4a_{2,7} + a_{3,9})\epsilon}$$

Por lo tanto, el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{8\epsilon}{3(1-2\epsilon}, 1, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, 1, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0, 1\right) \in U \cap C_2$.

Tercera componente;

$$C3 = \begin{cases} h_1 = 3a_{2,6} - a_{3,8}, \\ h_2 = 9a_{1,5}a_{3,8} + 16a_{2,7}a_{3,8} + a_{3,8}a_{3,9} - 6a_{1,6}a_{4,9} - 3a_{2,8}a_{4,9}, \\ h_3 = 3a_{1,4} - a_{3,8}. \end{cases} \tag{6.3}$$

trabajando como en las otras componentes obtenemos,

(i). Si $a_{1,4} = \epsilon$, entonces $a_{3,8} = 3\epsilon$, $a_{2,6} = \epsilon$ y $a_{1,5} = \dfrac{-16a_{2,7}\epsilon - a_{3,9}\epsilon + 2a_{1,6}a_{4,9} + a_{2,8}a_{4,9}}{9\epsilon}$ Por lo tanto, el punto $\left(\epsilon, -\frac{16}{9}, 0, 0, 0, 0, \epsilon, 1, 0, 0, 3\epsilon, 0, 0\right) \in U \cap C_3$.

(ii). Si $a_{1,4} = a_{2,6} = \dfrac{(6a_{1,6} - 3a_{2,8})a_{4,9}}{16a_{2,7} - a_{3,9}} + \epsilon$ y $a_{3,8} = 3\left(\dfrac{(6a_{1,6} - 3a_{2,8})a_{4,9}}{16a_{2,7} - a_{3,9}} + \epsilon\right)$ entonces

$$a_{1,5} = \frac{-((4a_{1,6} + 2a_{2,8})a_{4,9} + (16a_{2,7} + a_{3,9})\epsilon)(16a_{2,7} + a_{3,9})}{9(6a_{1,6} - 3a_{2,8})a_{4,9} + 9(16a_{2,7} + a_{3,9})\epsilon}$$

Por lo tanto existe un punto $\left(\frac{3}{8} + \epsilon, -\frac{16(1+4\epsilon)}{9(3+8\epsilon)}, 1, 0, 0, 0, \frac{3}{6} + \epsilon, 1, 0, 0, \frac{9}{8} + 3\epsilon, 0, 1\right) \in U \cap C_3$.

Luego μ no es rígida en C_1, C_2 y C_3 y por lo tanto no es rígida en las variedades $\mathfrak{L}^{10}$, $\mathfrak{N}^{10}$ y $\mathfrak{F}^{10}$. $\square$

Capítulo 7

Deformaciones de álgebras Filiformes de dimensión 11

7.1. Deformaciones de álgebras filiformes de dimensión 11

De acuerdo a la clasificación dada por Khakimdjanov dada en la Sección 4.3, todo corchete $\mu \in \mathfrak{F}^{11}$ es isomorfo a $\mu_0 + \Psi$, donde Ψ es corchete de Lie si

$$\begin{aligned}
-3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,8} &= 0\\
-2(2a_{2,6} + 3a_{3,8})a_{3,8} + (2a_{1,4} - a_{2,6} - a_{3,8})a_{4,10} &= 0\\
-7a_{2,6}a_{2,7} + (2a_{1,4} + a_{2,6})a_{3,9} + 3(a_{1,5} + a_{2,7})a_{3,8} - (a_{2,8} + 2a_{1,6})a_{4,9} &= 0\\
-4a_{2,7}^2 - 2(4a_{2,6} - 3a_{3,8})a_{2,8} + 4a_{1,6}a_{3,8} + 3(a_{1,5} + a_{2,7})a_{3,9}&\\
+(2a_{1,4} + a_{2,6})a_{3,10} - (2a_{1,6} + a_{2,8})a_{4,10} &= 0
\end{aligned}$$

Además estudiamos en el Teorema 4.5 que $\mathfrak{F}^{11}$ tiene dos componentes irreducibles;

$$C1 = \begin{cases}
a_{1,5} = 0\\
a_{1,6} = 0\\
a_{1,7} = 0\\
a_{1,8} = 0\\
a_{1,4} - 1 = 0\\
a_{2,7} - 1 = 0\\
-3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{3,8} = 0\\
-2(2a_{2,6} + 3a_{3,8})a_{3,8} + (2 - a_{2,6} - a_{3,8})a_{4,10} = 0\\
-7a_{2,6} + (2 + a_{2,6})a_{3,9} + 3a_{3,8} = 0\\
-4 - 2(4a_{2,6} - 3a_{3,8})a_{2,8} + 3a_{3,9} + (2 + a_{2,6})a_{3,10} - a_{2,8}a_{4,10} = 0
\end{cases}$$

y

$$C2 = \begin{cases} a_{1,4} = 0 \\ a_{1,7} = 0 \\ a_{2,6} = 0 \\ a_{3,8} = 0 \\ a_{3,10} = 0 \\ a_{1,5} - 1 = 0 \\ -4a_{2,7}^2 + 3(a_{2,7} + 3)a_{2,9} - (2a_{1,6} + a_{2,8})a_{4,10} = 0 \\ a_{2,9} - a_{3,9} = 0 \end{cases}$$

Usando estos resultados, probaremos el siguiente teorema;

Teorema 7.1. *No existen álgebras de Lie rígidas en $\mathfrak{L}^{11}$. Más aún, no existen álgebras de Lie filiformes rígidas en $\mathfrak{F}^{11}$.*

Demostración. Los corchetes de $\mathfrak{F}^{11}$ se definen por;

$$\begin{aligned} \mu(x_0, x_j) &= x_{j+1}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, 9 \\ \mu(x_i, x_j) &= a_{1,4}\psi_{1,4}(x_i, x_j) + a_{1,5}\psi_{1,5}(x_i, x_j) + a_{1,6}\psi_{1,6}(x_i, x_j) + a_{1,7}\psi_{1,7}(x_i, x_j) + a_{1,8}\psi_{1,8}(x_i, x_j) \\ &\quad + a_{1,9}\psi_{1,9}(x_i, x_j) + a_{1,10}\psi_{1,10}(x_i, x_j) + a_{2,6}\psi_{2,6}(x_i, x_j) + a_{2,7}\psi_{2,7}(x_i, x_j) + a_{2,8}\psi_{2,8}(x_i, x_j) \\ &\quad + a_{2,9}\psi_{2,9}(x_i, x_j) + a_{2,10}\psi_{2,10}(x_i, x_j) + a_{3,8}\psi_{3,8}(x_i, x_j) + a_{3,9}\psi_{3,9}(x_i, x_j) + a_{3,10}\psi_{3,10}(x_i, x_j) \\ &\quad + a_{4,10}\psi_{4,10}(x_i, x_j) \end{aligned}$$

para $1 \leq j < j \leq 10$. Es decir;

$$\begin{aligned} &\mu(x_0, x_j) = x_{j+1}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, 9, \\ &\mu(x_1, x_2) = a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 + a_{1,6}x_6 + a_{1,7}x_7 + a_{1,8}x_8 + a_{1,9}x_9 + a_{1,10}x_{10}, \\ &\mu(x_1, x_3) = a_{1,4}x_5 + a_{1,5}x_6 + a_{1,6}x_7 + a_{1,7}x_8 + a_{1,8}x_9 + +a_{1,9}x_{10}, \\ &\mu(x_1, x_4) = (a_{1,4} - a_{2,6})x_6 + (a_{1,5} - a_{2,7})x_7 + (a_{1,6} - a_{2,8})x_8 + (a_{1,7} - a_{2,9})x_9 + +(a_{1,8} - a_{2,10})x_{10}, \\ &\mu(x_1, x_5) = (a_{1,4} - 2a_{2,6})x_7 + (a_{1,5} - 2a_{2,7})x_8 + (a_{1,6} - 2a_{2,8})x_9 + (a_{1,7} - 2a_{2,9})x_{10}, \\ &\mu(x_1, x_6) = (a_{1,4} - 3a_{2,6} + a_{3,8})x_8 + (a_{1,5} - 3a_{2,7} + a_{3,9})x_9 + (a_{1,6} - 3a_{2,8} + a_{3,10})x_{10}, \\ &\mu(x_1, x_7) = (a_{1,4} - 4a_{2,6} + 3a_{3,8})x_9 + (a_{1,5} - 4a_{2,7} + 3a_{3,9})x_{10}, \\ &\mu(x_1, x_8) = (a_{1,4} - 5a_{2,6} + 6a_{3,8} - a_{4,10})x_{10}, \\ &\mu(x_2, x_3) = a_{2,6}x_6 + a_{2,7}x_7 + a_{2,8}x_8 + a_{2,9}x_9 + a_{2,10}x_{10}, \\ &\mu(x_2, x_4) = a_{2,6}x_7 + a_{2,7}x_8 + a_{2,8}x_9 + a_{2,9}x_{10}, \\ &\mu(x_2, x_5) = (a_{2,6} - a_{3,8})x_8 + (a_{2,7} - a_{3,9})x_9 + (a_{2,8} - a_{3,10})x_{10}, \\ &\mu(x_2, x_6) = (a_{2,6} - 2a_{3,8})x_9 + (a_{2,7} - 2a_{3,9})x_{10}, \\ &\mu(x_2, x_7) = (a_{2,6} - 2a_{3,8} + a_{4,10})x_{10}, \\ &\mu(x_3, x_4) = a_{3,8}x_8 + a_{3,9}x_9 + a_{3,10}x_{10}, \\ &\mu(x_3, x_5) = a_{3,8}x_9 + a_{3,9}x_{10}, \\ &\mu(x_3, x_6) = (a_{3,8} - a_{4,10})x_{10}, \\ &\mu(x_4, x_5) = a_{4,10}x_{10}, \\ &\mu(x_i, x_j) = 0 \text{ para los demás } i, j \end{aligned}$$

donde los parámetreos $\{a_{k,s}\}$ deben cumplir las ecuaciónes del siguiente ideal;

$$\begin{cases} -3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,8} = 0, \\ -4a_{2,6}a_{3,8} + 6a_{3,8}^2 + 2a_{1,4}a_{4,10} - a_{3,8}a_{4,10} = 0 \\ -7a_{2,6}a_{2,7} + 3a_{1,5}a_{3,8} + 3a_{2,7}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,9} + a_{2,6}a_{3,9} = 0 \\ -4a_{2,7}^2 - 8a_{2,6}a_{2,8} + 4a_{1,6}a_{3,8} + 6a_{2,8}a_{3,8} + 3a_{1,5}a_{3,9} + 3a_{2,7}a_{3,9} + 2a_{1,4}a_{3,10} \\ +a_{2,6}a_{3,10} - 2a_{1,6}a_{4,10} - a_{2,8}a_{4,10} = 0 \end{cases}$$

Consideraremos el ideal de codimensión 2, $\mathfrak{K} = \mu(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = \langle x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \rangle$ y la derivación definida en el Teorema 4.6,

$$\begin{aligned} Dx_2 &= x_8, \\ Dx_3 &= x_9, \\ Dx_4 &= x_{10}, \\ Dx_j &= 0, \quad \text{para } j \geq 5 \end{aligned}$$

entonces $\mu_t = \mu + tD$ es una deformación de μ dada por;

$$\begin{aligned}
\mu_t(x_0, x_j) &= x_{j+1}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, 9, \\
\mu_t(x_1, x_2) &= a_{1,4}x_4 + a_{1,5}x_5 + a_{1,6}x_6 + a_{1,7}x_7 + a_{1,8}x_8 + a_{1,9}x_9 + a_{1,10}x_{10} + tx_8, \\
\mu_t(x_1, x_3) &= a_{1,4}x_5 + a_{1,5}x_6 + a_{1,6}x_7 + a_{1,7}x_8 + a_{1,8}x_9 + +a_{1,9}x_{10} + tx_9, \\
\mu_t(x_1, x_4) &= (a_{1,4} - a_{2,6})x_6 + (a_{1,5} - a_{2,7})x_7 + (a_{1,6} - a_{2,8})x_8 + (a_{1,7} - a_{2,9})x_9 + (a_{1,8} - a_{2,10})x_{10} \\
&\quad + tx_{10}, \\
\mu_t(x_1, x_5) &= (a_{1,4} - 2a_{2,6})x_7 + (a_{1,5} - 2a_{2,7})x_8 + (a_{1,6} - 2a_{2,8})x_9 + (a_{1,7} - 2a_{2,9})x_{10}, \\
\mu_t(x_1, x_6) &= (a_{1,4} - 3a_{2,6} + a_{3,8})x_8 + (a_{1,5} - 3a_{2,7} + a_{3,9})x_9 + (a_{1,6} - 3a_{2,8} + a_{3,10})x_{10}, \\
\mu_t(x_1, x_7) &= (a_{1,4} - 4a_{2,6} + 3a_{3,8})x_9 + (a_{1,5} - 4a_{2,7} + 3a_{3,9})x_{10}, \\
\mu_t(x_1, x_8) &= (a_{1,4} - 5a_{2,6} + 6a_{3,8} - a_{4,10})x_{10}, \\
\mu_t(x_2, x_3) &= a_{2,6}x_6 + a_{2,7}x_7 + a_{2,8}x_8 + a_{2,9}x_9 + a_{2,10}x_{10}, \\
\mu_t(x_2, x_4) &= a_{2,6}x_7 + a_{2,7}x_8 + a_{2,8}x_9 + a_{2,9}x_{10}, \\
\mu_t(x_2, x_5) &= (a_{2,6} - a_{3,8})x_8 + (a_{2,7} - a_{3,9})x_9 + (a_{2,8} - a_{3,10})x_{10}, \\
\mu_t(x_2, x_6) &= (a_{2,6} - 2a_{3,8})x_9 + (a_{2,7} - 2a_{3,9})x_{10}, \\
\mu_t(x_2, x_7) &= (a_{2,6} - 2a_{3,8} + a_{4,10})x_{10}, \\
\mu_t(x_3, x_4) &= a_{3,8}x_8 + a_{3,9}x_9 + a_{3,10}x_{10}, \\
\mu_t(x_3, x_5) &= a_{3,8}x_9 + a_{3,9}x_{10}, \\
\mu_t(x_3, x_6) &= (a_{3,8} - a_{4,10})x_{10}, \\
\mu_t(x_4, x_5) &= a_{4,10}x_{10}, \\
\mu_t(x_i, x_j) &= 0 \text{ para los demás } i, j
\end{aligned}$$

La prueba del teorema consiste en probar que μ y μ_t no son isomorfa. Trabajaremos en cada componente irreducible.

1.- Primera componente $C1$. El corchete en esta componente es de la forma,

$$\begin{aligned}
&\mu(x_0,x_j)=x_{j+1}, \quad \text{para } j=1,2,\ldots,9,\\
&\mu(x_1,x_2)=x_4+a_{1,9}x_9+a_{1,10}x_{10},\\
&\mu(x_1,x_3)=x_5+a_{1,9}x_{10},\\
&\mu(x_1,x_4)=(1-a_{2,6})x_6-x_7-a_{2,8}x_8-a_{2,9}x_9-a_{2,10}x_{10},\\
&\mu(x_1,x_5)=(1-2a_{2,6})x_7-2x_8-2a_{2,8}x_9-2a_{2,9}x_{10},\\
&\mu(x_1,x_6)=(1-3a_{2,6}+a_{3,8})x_8+(-3+a_{3,9})x_9+(-3a_{2,8}+a_{3,10})x_{10},\\
&\mu(x_1,x_7)=(1-4a_{2,6}+3a_{3,8})x_9+(-4+3a_{3,9})x_{10},\\
&\mu(x_1,x_8)=(1-5a_{2,6}+6a_{3,8}-a_{4,10})x_{10},\\
&\mu(x_2,x_3)=a_{2,6}x_6+x_7+a_{2,8}x_8+a_{2,9}x_9+a_{2,10}x_{10},\\
&\mu(x_2,x_4)=a_{2,6}x_7+x_8+a_{2,8}x_9+a_{2,9}x_{10},\\
&\mu(x_2,x_5)=(a_{2,6}-a_{3,8})x_8+(1-a_{3,9})x_9+(a_{2,8}-a_{3,10})x_{10},\\
&\mu(x_2,x_6)=(a_{2,6}-2a_{3,8})x_9+(1-2a_{3,9})x_{10},\\
&\mu(x_2,x_7)=(a_{2,6}-2a_{3,8}+a_{4,10})x_{10},\\
&\mu(x_3,x_4)=a_{3,8}x_8+a_{3,9}x_9+a_{3,10}x_{10},\\
&\mu(x_3,x_5)=a_{3,8}x_9+a_{3,9}x_{10},\\
&\mu(x_3,x_6)=(a_{3,8}-a_{4,10})x_{10},\\
&\mu(x_4,x_5)=a_{4,10}x_{10},\\
&\mu(x_i,x_j)=0 \text{ para los demás } i,j
\end{aligned}$$

Suponemos que $\mu_t \simeq \mu$, es decir $\exists g \in \mathrm{GL}(11,\mathbb{C})$ tal que $E_{i,j}=0$ para $0\leq i<j\leq 10$ y por lo tanto $E_{i,j}^{(k)}=0$ para $0\leq i<j\leq 10$ y $1\leq k\leq 10$.

Como $a_{1,4}=1$ consideraremos al isomorfismo g del Lema 5.1.

Daremos a continuación algunos coeficientes $E_{i,j}^{(k)}=0$. Con los mismao formaremos ciertas ecuaciones con las cuales trabajaremos algebraicamente y así probaremos el teorema.

1. $E_{0,1}^{(3)}=m_{4,3}-m_{1,1}m_{3,2}=0$
2. $E_{0,1}^{(4)}=m_{5,3}-m_{1,1}m_{4,2}+m_{2,1}m_{3,2}+m_{1,1}^2m_{3,1}=0$
3. $E_{0,1}^{(5)}=m_{6,3}-m_{1,1}m_{5,2}-m_{2,1}m_{4,2}+m_{1,1}^2m_{4,1}=0$
4. $E_{0,2}^{(4)}=m_{5,4}-m_{1,1}m_{4,3}-m_{1,1}^3m_{2,1}=0$
5. $E_{0,2}^{(5)}=m_{6,4}-m_{1,1}m_{5,3}-m_{2,1}m_{4,3}=0$
6. $E_{0,2}^{(6)}=m_{7,4}-m_{1,1}m_{6,3}-(1-a_{2,6})m_{2,1}m_{5,3}-a_{2,6}m_{3,1}m_{4,3}+a_{2,6}m_{1,1}^3m_{4,1}=0$
7. $E_{0,3}^{5}=m_{6,5}-m_{1,1}m_{5,4}-m_{1,1}^4m_{2,1}=0$
8. $E_{0,3}^{(6)}=m_{7,5}-m_{1,1}m_{6,4}-(1-a_{2,6})m_{2,1}m_{5,4}-a_{2,6}m_{1,1}^4m_{3,1}=0$
9. $E_{0,3}^{(7)}=m_{8,5}-m_{1,1}m_{7,4}+m_{2,1}m_{5,4}-(1-2a_{2,6})m_{2,1}m_{6,4}-m_{1,1}^4m_{3,1}-a_{2,6}m_{3,1}m_{5,4}=0$
10. $E_{0,4}^{(6)}=m_{7,6}-m_{1,1}m_{6,5}-(1-a_{2,6})m_{1,1}^5m_{2,1}=0$
11. $E_{0,4}^{(7)}=m_{8,6}-m_{1,1}m_{7,5}+m_{1,1}^5m_{2,1}-(1-2a_{2,6})m_{2,1}m_{6,5}-a_{2,6}m_{1,1}^5m_{3,1}=0$

12. $E_{0,4}^{(8)} = m_{9,6} - m_{1,1}m_{8,5} + a_{2,8}m_{1,1}^5 m_{2,1} - 2m_{2,1}m_{6,5} - (1-3a_{2,6}+a_{3,8})m_{2,1}m_{7,5} - m_{1,1}^5 m_{3,1}$
$- (a_{2,6} - a_{3,8})m_{3,1}m_{6,5} - a_{3,8}m_{1,1}^5 m_{4,1} = 0$
13. $E_{0,5}^{(7)} = m_{8,7} - m_{1,1}m_{7,6} - (1-2a_{2,6})m_{1,1}^6 m_{2,1} = 0$
14. $E_{0,5}^{(8)} = m_{9,7} - m_{1,1}m_{8,6} - 2m_{1,1}^6 m_{2,1} - (1-3a_{2,6}+a_{3,8})m_{2,1}m_{7,6} - (a_{2,6}-a_{3,8})m_{1,1}^6 m_{3,1} = 0$
15. $E_{0,6}^{(8)} = m_{9,8} - m_{1,1}m_{8,7} - (1-3a_{2,6}+a_{3,8})m_{1,1}^7 m_{2,1} = 0$
16. $E_{0,6}^{(9)} = m_{10,8} - m_{1,1}m_{9,7} - (-3+a_{3,9})m_{1,1}^7 m_{2,1} - (1-4a_{2,6}+3a_{3,8})m_{2,1}m_{8,7}$
$- (a_{2,6} - 2a_{3,8})m_{1,1}^7 m_{3,1} = 0$
17. $E_{0,7}^{(9)} = m_{10,9} - m_{1,1}m_{9,8} - (1-4a_{2,6}+3a_{3,8})m_{1,1}^8 m_{2,1} = 0$
18. $E_{0,7}^{(10)} = m_{11,9} - m_{1,1}m_{10,8} - (-4+3a_{3,9})m_{1,1}^8 m_{2,1} - (1-5a_{2,6}+6a_{3,8}-a_{4,10})m_{2,1}m_{9,8}$
$- (a_{2,6} - 3a_{3,8} + a_{4,10})m_{1,1}^8 m_{3,1} = 0$
19. $E_{1,2}^{(5)} = m_{6,5} - m_{1,1}^2 m_{4,3} = 0$
20. $E_{1,2}^{(6)} = m_{7,5} - (1-a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{5,3} - a_{2,6}m_{3,2}m_{4,3} + a_{2,6}m_{1,1}^3 m_{4,2} = 0$
21. $E_{1,2}^{(7)} = m_{8,5} + m_{1,1}^2 m_{5,3} - (1-2a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{6,3} - m_{3,2}m_{4,3} - a_{2,6}m_{3,2}m_{5,3} + a_{2,6}m_{1,1}^3 m_{5,2}$
$+ m_{1,1}^3 m_{4,2} = 0$
22. $E_{1,2}^{(8)} = m_{9,5} + tm_{1,1}^9 + a_{2,8}m_{1,1}^2 m_{5,3} + 2m_{1,1}^2 m_{6,3} - (1-3a_{2,6}+a_{3,8})m_{1,1}^2 m_{7,3} - a_{2,8}m_{3,2}m_{4,3}$
$-m_{3,2}m_{5,3} - (a_{2,6}-a_{3,8})m_{3,2}m_{6,3} + a_{3,8}m_{4,2}m_{5,3} + a_{3,8}m_{5,2}m_{4,3} + (a_{2,6}-a_{3,8})m_{1,1}^3 m_{6,2}$
$+ m_{1,1}^3 m_{5,2} + a_{2,8}m_{1,1}^3 m_{4,2} = 0$
23. $E_{1,3}^{(6)} = m_{7,6} - (1-a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{5,4} - a_{2,6}m_{1,1}^4 m_{3,2} = 0$
24. $E_{1,3}^{(7)} = m_{8,6} + m_{1,1}^2 m_{5,4} - (1-2a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{6,4} - m_{1,1}^4 m_{3,2} - a_{2,6}m_{3,2}m_{5,4} = 0$
25. $E_{1,3}^{(8)} = m_{9,6} + a_{2,8}m_{1,1}^2 m_{5,4} + 2m_{1,1}^2 m_{6,4} - (1-3a_{2,6}+a_{3,8})m_{1,1}^2 m_{7,4} - a_{2,8}m_{1,1}^4 m_{3,2} - m_{3,2}$
$m_{5,4} - (a_{2,6} - a_{3,8})m_{3,2}m_{6,4} - a_{3,8}m_{4,2}m_{5,4} + a_{3,8}m_{1,1}^4 m_{5,2} = 0$
26. $E_{1,4}^{(7)} = (1-a_{2,6})m_{8,7} - m_{1,1}^8 + m_{1,1}^7 - (1-2a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{6,5} - a_{2,6}m_{1,1}^5 m_{3,2} = 0$
27. $E_{3,4}^{(10)} = a_{3,8}m_{11,9} + a_{3,9}m_{11,10} + a_{3,10}m_{1,1}^{11} - a_{3,10}m_{1,1}^9 + a_{3,9}m_{1,1}^4 m_{6,5} - (a_{3,8}-a_{4,10})m_{1,1}^4 m_{7,5}$
$- a_{4,10}m_{5,4}m_{6,5} + a_{4,10}m_{1,1}^5 m_{6,5} = 0$

Usando $m_{6,5}$ obtenidos en $E_{0,3}^5 = 0$ y $E_{1,2}^{(5)} = 0$ igualándolos y trabajando algebraicamente obtenemos $m_{1,1}^4 m_{2,1} = 0$ entonces, $m_{1,1} = 0$ o $m_{1,2} = 0$, si $m_{1,1} = 0$ entonces g no es isomorfismo, supongamos a partir de ahora $m_{1,2} = 0$.

Consideremos $E_{1,4}^{(7)} = 0$, utilizando $E_{0,5}^{(7)} = 0, E_{0,4}^{(6)} = 0, E_{0,3}^5 = 0, E_{0,2}^{(4)} = 0, E_{0,1}^{(3)} = 0$ y realizando sustitución se llega a $m_{1,1}^8 - m_{1,1}^7 = 0 \Rightarrow m_{1,1}^7(m_{1,1} - 1) = 0$,

I. Si $m_{1,1} = 0$, entonces g no es isomorfismo,

II. Supongamos ahora, $m_{1,1} = 1$

Sea $m_{7,5} = (1 - a_{2,6})m_{1,1}^2 m_{5,3} + a_{2,6}m_{3,2}m_{4,3} - a_{2,6}m_{1,1}^3 m_{4,2}$ obtenida en $E_{1,2}^{(6)} = 0$, trabajando algebraicamente, haciendo sustitución, llegamos a que si $a_{2,6} \neq 0$, $m_{3,2}^2 = 2m_{4,2}$.

Igualando $m_{8,6}$ obtenido en $E_{1,3}^{(7)} = 0$ y $E_{0,4}^{(7)} = 0$, tenemos $m_{3,1} = 0$ si $a_{2,6} \neq 0$. Realizando el mismo trabajo con $m_{8,5}$ obtenido en $E_{1,2} = 0$ y $E_{0,3} = 0$, y suponiendo $a_{2,6} \neq 0$ y $a_{2,6} \neq 2$ debe ser $2m_{4,1} = \dfrac{a_{2,6}}{2 - a_{2,6}} m_{3,2}^2$.

Utilizando nuevamente $m_{8,5}$ despejada de $E_{1,2}^{(7)} = 0$ y $E_{0,3}^{(7)} = 0$ y los resultados obtenidos, debe ser $m_{5,2} = 0$.

Luego de $E_{0,7}^{(10)} = 0$, $E_{3,4}^{(19)} = 0$ y suponiendo $a_{3,8} \neq 0$ debe ser $m_{3,2} = 0$, pero entonces $m_{4,2} = m_{4,1} = 0$. Así utilizando $E_{1,2}^{(8)} = 0$ se llega a $t = 0$, lo cual es absurdo.

Por lo tanto existe un abierto $U_1 = \{a_{2,6} \neq 0, a_{2,6} \neq 2, a_{3,8} \neq 0\}$ donde $\mu_t \not\cong \mu$.

Veamos que el abierto encontrado corta las ecuaciones $-3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{3,8} = 0$ (1), $-2(2a_{2,6} + 3a_{3,8})a_{3,8} + (2 - a_{2,6} - a_{3,8})a_{4,10} = 0$ (2), $-7a_{2,6} + (2 + a_{2,6})a_{3,9} + 3a_{3,8} = 0$ (3), $-4 - 2(4a_{2,6} - 3a_{3,8})a_{2,8} + 3a_{3,9} + (2 + a_{2,6})a_{3,10} - a_{2,8}a_{4,10} = 0$ (4). En efecto,

(i) Si $a_{2,6} = \epsilon$. Reemplazando en cada una de las ecuaciones obtenemos,

$$
\begin{aligned}
a_{3,8} &= \frac{3\epsilon^2}{2+\epsilon} \\
a_{4,10} &= \frac{-6\epsilon^2(1+2\epsilon)}{(1-\epsilon^2)(2+\epsilon)} \\
a_{3,9} &= \frac{-2\epsilon(\epsilon-7)}{(2+\epsilon)^2} \\
a_{3,10} &= \frac{-16 - (16 - 4a_{2,8})\epsilon + (54 + 30a_{2,8})\epsilon^2 + (10 + 6a_{2,8})\epsilon^3 + (6 + 8a_{2,8})\epsilon^5 + 44a_{2,8}\epsilon^4}{(1-\epsilon^2)(2+\epsilon)^3}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, existe un punto:

$$\left(1,0,0,0,0,0,0,\epsilon,1,0,0,0,\tfrac{3\epsilon^2}{2+\epsilon}, frac{-}2\epsilon(\epsilon-7)(2+\epsilon)^2, \tfrac{-16-16\epsilon+54\epsilon^2+10\epsilon^3+6\epsilon^5}{(1-\epsilon^2)(2+\epsilon)^3}, \tfrac{-6\epsilon^2(1+2\epsilon)}{(1-\epsilon^2)(2+\epsilon)}\right)$$

que pertenece a $U_1 \cap C1$.

(ii) Si $a_{3,8} = \epsilon$. Resolviendo cada ecuación obtenemos,

$$
\begin{aligned}
a_{2,6} &= \frac{\epsilon \pm \sqrt{9+24\epsilon}}{6} \\
a_{4,10} &= \frac{36\epsilon^2 - 4\epsilon \pm \epsilon\sqrt{9+24\epsilon}}{12 - 7\epsilon \pm \sqrt{9+24\epsilon}} \\
a_{3,9} &= \frac{-25\epsilon \pm \sqrt{9+24\epsilon}}{12 + \epsilon \pm \sqrt{9+24\epsilon}} \\
a_{3,10} &= \frac{288 + (495 - 168a_{2,8})\epsilon + 178a_{2,8}\epsilon^2 \pm (42 + 53a_{2,8}\epsilon + 96a_{2,8})\sqrt{9+24\epsilon}}{(12 + \epsilon + \sqrt{9+24\epsilon})^2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el punto:

$$\left(1,0,0,0,0,0,0,\tfrac{\epsilon\pm\sqrt{9+24\epsilon}}{6},1,0,0,0,\epsilon,\tfrac{-25\epsilon\pm\sqrt{9+24\epsilon}}{12+\epsilon\pm\sqrt{9+24\epsilon}},\tfrac{288+495\epsilon\pm42\sqrt{9+24\epsilon}}{(12+\epsilon+\sqrt{9+24\epsilon})^2},\tfrac{36\epsilon^2-4\epsilon\pm\epsilon\sqrt{9+24\epsilon}}{12-7\epsilon\pm\sqrt{9+24\epsilon}}\right)$$

está en $U_1 \cap C1$.

Por lo tanto, el abierto U_1 encontrado corta la componente $C1$.

2.- Segunda componente $C2$. El corchete en esta componente es de la forma,

$$
\begin{aligned}
&\mu(x_0, x_j) = x_{j+1}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, 9,\\
&\mu(x_1, x_2) = x_5 + a_{1,6}x_6 + a_{1,8}x_8 + a_{1,9}x_9 + a_{1,10}x_{10},\\
&\mu(x_1, x_3) = x_6 + a_{1,6}x_7 + a_{1,8}x_9 + a_{1,9}x_{10},\\
&\mu(x_1, x_4) = (1 - a_{2,7})x_7 + (a_{1,6} - a_{2,8})x_8 - a_{2,9}x_9 + +(a_{1,8} - a_{2,10})x_{10},\\
&\mu(x_1, x_5) = (1 - 2a_{2,7})x_8 + (a_{1,6} - 2a_{2,8})x_9 - 2a_{2,9}x_{10},\\
&\mu(x_1, x_6) = (1 - 3a_{2,7} + a_{2,9})x_9 + (a_{1,6} - 3a_{2,8})x_{10},\\
&\mu(x_1, x_7) = (1 - 4a_{2,7} + 3a_{2,9})x_{10},\\
&\mu(x_1, x_8) = -a_{4,10}x_{10},\\
&\mu(x_2, x_3) = a_{2,7}x_7 + a_{2,8}x_8 + a_{2,9}x_9 + a_{2,10}x_{10},\\
&\mu(x_2, x_4) = a_{2,7}x_8 + a_{2,8}x_9 + a_{2,9}x_{10},\\
&\mu(x_2, x_5) = (a_{2,7} - a_{2,9})x_9 + a_{2,8}x_{10},\\
&\mu(x_2, x_6) = (a_{2,7} - 2a_{2,9})x_{10},\\
&\mu(x_2, x_7) = a_{4,10}x_{10},\\
&\mu(x_3, x_4) = a_{2,9}x_9,\\
&\mu(x_3, x_5) = a_{2,9}x_{10},\\
&\mu(x_3, x_6) = -a_{4,10}x_{10},\\
&\mu(x_4, x_5) = a_{4,10}x_{10},\\
&\mu(x_i, x_j) = 0 \text{ para los demás } i, j
\end{aligned}
$$

Suponemos que $\mu_t \simeq \mu$, es decir $\exists g \in \mathrm{GL}(11, \mathbb{C})$ tal que $E_{i,j} = 0$ para $0 \le i < j \le 10$ y por lo tanto $E^{(k)}_{i,j} = 0$ para $0 \le i < j \le 10$ y $1 \le k \le 10$.

Se puede observar que $a_{1,4} = 0$, pero $a_{1,5} \neq 0$, por lo tanto usaremos el segundo isomorfismo g del Lema 5.1.

Describiremos a continuación algunas coordenadas $E^{(k)}_{i,j} = 0$ con las cuales trabajaremos de manera algebraica.

1. $E^{(3)}_{0,1} = m_{4,3} - m_{1,1}m_{3,2} = 0$
2. $E^{(4)}_{0,1} = m_{5,3} - m_{1,1}m_{4,2} = 0$
3. $E^{(5)}_{0,1} = m_{6,3} - m_{1,1}m_{5,2} - m_{2,1}m_{3,2} + m^3_{1,1}m_{3,1} = 0$
4. $E^{(4)}_{0,2} = m_{5,4} - m_{1,1}m_{4,3} = 0$
5. $E^{(5)}_{0,2} = m_{6,4} - m_{1,1}m_{5,3} - m^4_{1,1}m_{2,1} = 0$
6. $E^{(6)}_{0,2} = m_{7,4} - m_{1,1}m_{6,3} - a_{1,6}m^4_{1,1}m_{2,1} - m_{2,1}m_{4,3} = 0$
7. $E^{(5)}_{0,3} = m_{6,5} - m_{1,1}m_{5,4} = 0$
8. $E^{(6)}_{0,3} = m_{7,5} - m_{1,1}m_{6,4} - m^5_{1,1}m_{2,1} = 0$
9. $E^{(7)}_{0,3} = m_{8,5} - m_{1,1}m_{7,4} - a_{1,6}m^5_{1,1}m_{2,1} - (1 - a_{2,7})m_{2,1}m_{5,4} - a_{2,7}m^5_{1,1}m_{3,1} = 0$

10. $E_{0,4}^{(6)} = m_{7,6} - m_{1,1}m_{6,5} = 0$
11. $E_{0,4}^{(7)} = m_{8,6} - m_{1,1}m_{7,5} - (1 - a_{2,7})m_{1,1}^6 m_{2,1} = 0$
12. $E_{0,4}^{(8)} = m_{9,6} - m_{1,1}m_{8,5} - (a_{1,6} - a_{2,8})m_{1,1}^6 m_{2,1} - (1 - 2a_{2,7})m_{2,1}m_{6,5} - a_{2,7}m_{1,1}^6 m_{3,1} = 0$
13. $E_{0,5}^{(7)} = m_{8,7} - m_{1,1}m_{7,6} = 0$
14. $E_{0,5}^{(8)} = m_{9,7} - m_{1,1}m_{8,6} - (1 - 2a_{2,7})m_{1,1}^7 m_{2,1} = 0$
15. $E_{0,6}^{(8)} = m_{9,8} - m_{1,1}m_{8,7} = 0$
16. $E_{0,6}^{(9)} = m_{10,8} - m_{1,1}m_{9,7} - (1 - 3a_{2,7} + a_{2,9})m_{1,1}^8 m_{2,1} = 0$
17. $E_{0,7}^{(9)} = m_{10,9} - m_{1,1}m_{9,8} = 0$
18. $E_{0,7}^{(10)} = m_{11,9} - m_{1,1}m_{10,8} - (1 - 4a_{2,7} + 3a_{2,9})m_{1,1}^9 m_{2,1} + a_{4,10}m_{2,1}m_{9,8} - a_{4,10}m_{1,1}^9 m_{3,1} = 0$
19. $E_{0,8}^{(10)} = m_{11,10} - m_{1,1}m_{10,9} + a_{4,10}m_{1,1}^{10} m_{2,1} = 0$
20. $E_{1,2}^{(6)} = m_{7,6} + a_{1,6}m_{1,1}^8 - a_{1,6}m_{1,1}^7 - m_{1,1}^3 m_{4,3} = 0$
21. $E_{1,2}^{(7)} = m_{8,6} + a_{1,6}m_{8,7} - a_{1,6}m_{1,1}^3 m_{4,3} - (1 - a_{2,7})m_{1,1}^3 m_{5,3} - a_{2,7}m_{3,2}m_{4,3} + a_{2,7}m_{1,1}^4 m_{4,2} = 0$
22. $E_{1,2}^{(8)} = m_{9,6} + a_{1,6}m_{9,7} + a_{1,8}m_{1,1}^{10} + tm_{1,1}^{10} - a_{1,8}m_{1,1}^7 - (a_{1,6} - a_{2,8})m_{1,1}^3 m_{5,3} - (1 - 2a_{2,7})$ $m_{1,1}^3 m_{6,3} - a_{2,8}m_{3,2}m_{4,3} - a_{2,7}m_{3,2}m_{5,3} + a_{2,7}m_{1,1}^4 m_{5,2} + a_{2,8}m_{1,1}^4 m_{4,2} = 0$
23. $E_{1,3}^{(7)} = m_{8,7} + a_{1,6}m_{1,1}^9 - a_{1,6}m_{1,1}^8 - (1 - a_{2,7})m_{1,1}^3 m_{5,4} - a_{2,7}m_{1,1}^5 m_{3,2} = 0$
24. $E_{1,3}^{(8)} = m_{9,7} + a_{1,6}m_{9,8} - (a_{1,6} - a_{2,8})m_{1,1}^3 m_{5,4} - (1 - 2a_{2,7})m_{1,1}^3 m_{6,4} - a_{2,8}m_{1,1}^5 m_{3,2} - a_{2,7}$ $m_{3,2}m_{5,4} = 0$
25. $E_{1,6}^{(10)} = (1 - 3a_{2,7} + a_{2,9})m_{11,10} + (a_{1,6} - 3a_{2,8})m_{1,1}^{12} - (a_{1,6} - 3a_{2,8})m_{1,1}^{11} - (1 - 4a_{2,7} + 3a_{2,9})$ $m_{1,1}^3 m_{8,7} + a_{4,10}m_{1,1}^3 m_{9,7} - (a_{2,7} - a_{2,9})m_{1,1}^8 m_{3,2} - a_{4,10}m_{3,2}m_{8,7} + a_{4,10}m_{1,1}^8 m_{4,2} = 0$
26. $E_{2,3}^{(9)} = a_{2,7}m_{10,8} + a_{2,8}m_{10,9} + a_{2,9}m_{1,1}^{11} - a_{2,9}m_{1,1}^9 - a_{2,8}m_{1,1}^4 m_{5,4} - (a_{2,7} - a_{2,9})m_{1,1}^4 m_{6,4} - a_{2,9}$ $m_{4,3}m_{5,4} + a_{2,9}m_{1,1}^5 m_{5,3} = 0$

Igualando $m_{7,6}$ obtenida en $E_{1,2}^{(6)} = 0$ y $E_{0,4}^{(6)} = 0$, realizando sustitución con $E_{0,4}^{(6)} = 0, E_{0,3}^{(5)} = 0, E_{0,2}^{(4)} = 0, E_{0,1}^{(3)} = 0$ y suponiendo $a_{1,6} \neq 0$ se llega a $m_{1,1}^7(m_{1,1} - 1) = 0$, entonces

I.- $m_{1,1} = 0$ por lo tanto g no es isomorfismo.

II.- $m_{1,1} = 1$, de ahora en adelante supondremos este caso.

Entonces de $E_{1,2}^{(7)} = 0$, trabajando algebraicamente, realizando las sustituciones correspondiente y suponiendo $a_{2,7} \neq 0$ se tiene $(3 - a_{2,7})m_{2,1} + 2m_{4,2} - m_{3,2}^2 = 0$ (E1).

Y $E_{1,6}^{(10)} = 0$ trabajando algebraicamente de igual forma que en el caso anterior y suponiendo $a_{4,10} \neq 0$, debe ser $(4 - 3a_{2,7})m_{2,1} + 2m_{4,2} - m_{3,2}^2 = 0$ (E2).
Igualando (E1) y (E2) $m_{2,1} = 0$ si $1 - 2a_{2,7} \neq 0$ y por lo tanto $m_{3,2}^2 = 2m_{4,2}$.

Por último utilizaremos $E_{1,2}^{(8)} = 0$, de la cual despejaremos t, haciendo los reemplazos necesarios con las ecuaciones anteriores y los resultados que fuimos obteniendo, trabajando algebraicamente se llega a $t = 0$, lo cual es absurdo.

Por lo tanto se concluye que en el abierto $U_2 = \{a_{1,6} \neq 0, a_{2,7} \neq \frac{1}{2}, a_{4,10} \neq 0\}$, μ_t y μ no son isomorfas.

Veamos que el abierto encontrado corta las ecuaciones $-4a_{2,7}^2 + 3(a_{2,7} + a_{2,9}) - (2a_{1,6} + a_{2,8})$ $a_{4,10} = 0, a_{2,9} - a_{3,9} = 0$

En efecto,

(i) ¿ Qué ocurre en las ecuaciones deseadas si $a_{1,6} = 0$? Debería ser

$$a_{2,7} = \frac{-3a_{2,9} \pm \sqrt{9a_{2,9}^2 + 144a_{2,9} - 32a_{2,8}a_{4,10}}}{8}$$

Como $a_{1,6}$ debe ser distinto de cero. Supongamos,

$$a_{2,7} = \frac{-3a_{2,9} \pm \sqrt{9a_{2,9}^2 + 144a_{2,9} - 32a_{2,8}a_{4,10}} + 8\epsilon}{8}$$

y veamos si existe un valor para $a_{1,6} \neq 0$. En efecto,

$$a_{1,6} = \frac{2(-3a_{2,9}+8\epsilon)^2+18a_{2,9}^2+179a_{2,9}-24\epsilon-63a_{2,8}a_{4,10}\pm(3-12a_{2,9}+32\epsilon)\sqrt{9a_{2,9}^2+144a_{2,9}-32a_{2,8}a_{4,10}}}{16a_{4,10}}$$

Considerando $a_{4,10} = 1$ y $a_{2,8} = -1$, tenemos el punto:

$$\left(0, 1, \frac{128\epsilon^2 - 24\epsilon - 63 \pm (3 + 32\epsilon)\sqrt{32}}{16}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{32}}{8}, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1\right) \in U_2 \cap C2.$$

(ii) Ahora nos preguntamos; ¿qué pasa si $a_{2,7} = 0$? Entonces $a_{1,6} = \dfrac{9a_{2,9} - a_{2,8}a_{4,10}}{2a_{4,10}}$.

Como $a_{2,7}$ no debe ser cero. Supongamos,

$$a_{1,6} = \frac{9a_{2,9} - a_{2,8}a_{4,10} + 2a_{4,10}\epsilon}{2a_{4,10}}$$

probaremos que existe un valor de $a_{2,7} \neq 0$ que verifica las ecuaciones deseadas. Así,

$$a_{2,7} = \frac{3a_{2,9} \pm \sqrt{9a_{2,9}^2 + 32a_{4,10}\epsilon}}{8}$$

En este caso también existen puntos,

$$\left(0, 1, \epsilon, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{32}}{8}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1\right) \in U_2 \cap C2.$$

(iii) ¿ Y si $a_{4,10} = 0$? Entonces $a_{2,7} = \dfrac{3a_{2,9} \pm 3\sqrt{a_{2,9}(a_{2,9} + 16)}}{8}$

Como $a_{4,10}$ debe ser distinto de cero. Sea ϵ muy próximo a cero y supongamos,

$$a_{2,7} = \frac{3a_{2,9} \pm 3\sqrt{a_{2,9}(a_{2,9} + 16)} + 8\epsilon}{8} \quad \text{y} \quad a_{1,6} \neq 0$$

veamos que existe $a_{4,10} \neq 0$. En efecto,

$$a_{4,10} = \frac{36a_{2,9} - 18a_{2,9}^2 + 64\epsilon^2 \pm 48\epsilon\sqrt{a_{2,9}(a_{2,9}+6)}}{2(2a_{1,6} + a_{2,8})}$$

Por lo tanto, $\big(0,1,1,0,0,0,0,0,0,\epsilon,0,0,0,16\epsilon^2\big) \in U_2 \cap C2$.

(iv) ¿Qué ocurre si $a_{2,7} = \frac{1}{2}$? Entonces,

$$a_{1,6} = \frac{21a_{2,9} - 2 - 2a_{2,8}a_{4,10}}{4a_{4,10}} \quad \text{(A)}$$

ó

$$a_{4,10} = \frac{21a_{2,9} - 2}{2(2a_{1,6} + a_{2,8})} \quad \text{(B)}$$

.

Como $a_{1,6}$ y $a_{4,10}$ no deben ser cero. Veamos que ocurre con $a_{2,7}$. Si en (A)

$$a_{1,6} = \frac{21a_{2,9} - 2 - 2a_{2,8}a_{4,10} + 4a_{4,10}\epsilon}{4a_{4,10}} \qquad \text{con } \epsilon \neq 0$$

entonces

$$a_{2,7} = \frac{6a_{2,9} \pm \sqrt{36a_{2,9}^2 - 32(3a_{2,9} - 2 - 2a_{4,10}\epsilon)}}{16}$$

En el caso (B) supongamos,

$$a_{4,10} = \frac{21a_{2,9} - 2 + 2\epsilon(2a_{1,6} + a_{2,8})}{2(2a_{1,6} + a_{2,8})} \qquad \text{con } \epsilon \neq 0$$

así

$$a_{2,7} = \frac{6a_{2,9} \pm \sqrt{36a_{2,9}^2 - 96a_{2,9} + 64 - 64\epsilon(2a_{1,6} + a_{2,8})}}{16}$$

En ambos casos existe un punto en $U_2 \cap C2$.

Por lo tanto se puede concluír que en cada componente irreducible, existen abiertos densos euclídeos donde μ_t es una deformación no trivial para todo t pequeño y no nulo, entonces, podemos concluír que μ no rígida en la variedad $\mathfrak{L}^{11}$.

Además podemos observar que μ_t es también filiforme, por lo que en sentido más general se concluye que μ no en rígida en la variedad $\mathfrak{F}^{11}$. $\square$

Capítulo 8

Apéndice

En este capítulo mostraremos las cuentas realizadas para encontrar bases de groebner utilizadas en el Capítulo 6 para mostrar que el ideal $I = \langle -3a_{2,6}^2 + a_{2,6}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,8}, 2a_{1,4}a_{3,9} + 3a_{1,5}a_{3,8} - 7a_{2,6}a_{2,7} + a_{2,6}a_{3,9} + 3a_{2,7}a_{3,8} - a_{4,9}(a_{2,8} + 2a_{1,6}), a_{4,9}(2a_{1,4} - a_{2,6} - a_{3,8})\rangle$ está contenido en la intersección de los ideales $I_1 = a_{4,9}, -7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 3a_{1,5}a_{3,8}^2 + 3a_{2,7}a_{3,8}^2 + 3a_{2,6}^2a_{3,9}, -7a_{2,6}a_{2,7} + 3a_{1,5}a_{3,8} + 3a_{2,7}a_{3,8} + 2a_{1,4}a_{3,9} + a_{2,6}a_{3,9}, -3a_{2,6}^2 + 2a_{1,4}a_{3,8} + a_{2,6}a_{3,8}\rangle$, $I_2 = \langle a_{2,6} - a_{3,8}, 3a_{1,5}a_{3,8} - 4a_{2,7}a_{3,8} + 3a_{3,8}a_{3,9} - 2a_{1,6}a_{4,9} - a_{2,8}a_{4,9}, a_{1,4} - a_{3,8}\rangle$, $I_3 = 3a_{2,6} - a_{3,8}, 9a_{1,5}a_{3,8} + 16a_{2,7}a_{3,8} + a_{3,8}a_{3,9} - 6a_{1,6}a_{4,9} - 3a_{2,8}a_{4,9}, 3a_{1,4} - a_{3,8}\rangle$.

Cabe destacar que dichas cuentas pueden hacerse de manera sencilla en el software Singular, el mismo consta de un paquete que permite calcular bases de Groebner.

Teorema 8.1. *La base de Groebner para $I_1 \cap I_2 = tI_1 + (1-t)I_2$ es*
$J = I_1 \cap I_2 = \langle a_{2,6}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}, a_{1,4}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}, 3a_{2,6}^2 - 2a_{1,4}a_{3,8} - a_{2,6}a_{3,8}, 3a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} - 4a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 2a_{1,6}a_{4,9}^2 - a_{2,8}a_{4,9}^2, 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 98a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 6a_{1,5}a_{3,8}^2 + 6a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 46a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 23a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}, 98a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8} - 27a_{1,5}^2a_{3,8}^2 - 33a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 6a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 36a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} - 50a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} - 12a_{1,4}^2a_{3,9}^2 + 70a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 35a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 10a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 12a_{1,6}^2a_{4,9}^2 + 12a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 3a_{2,8}^2a_{4,9}^2\rangle$

Demostración. Para calcular esta base se utilizó los S- polinomios y el algoritmo de Buchberger.

Consideremos el siguiente orden lexicogáfico $t > a_{1,4} > a_{1,5} > a_{1,6} > a_{2,6} > a_{2,7} > a_{2,8} > a_{3,8} > a_{3,9} > a_{4,9}$

Así

$tI_1 + (1-t)I_2 = \langle ta_{4,9}, -7ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 3ta_{1,5}a_{3,8}^2 + 3ta_{2,7}a_{3,8}^2 + 3ta_{2,6}^2a_{3,9}), -7ta_{2,6}a_{2,7} + 3ta_{1,5}a_{3,8} + 3ta_{2,7}a_{3,8} + 2ta_{1,4}a_{3,9} + ta_{2,6}a_{3,9}, -3ta_{2,6}^2 + 2ta_{1,4}a_{3,8} + ta_{2,6}a_{3,8}, a_{2,6} - a_{3,8} - ta_{2,6} + ta_{3,8}, 3a_{1,5}a_{3,8} - 4a_{2,7}a_{3,8} + 3a_{3,8}a_{3,9} - 2a_{1,6}a_{4,9} - a_{2,8}a_{4,9} - 3ta_{1,5}a_{3,8} + t4a_{2,7}a_{3,8} - 3ta_{3,8}a_{3,9} + 2ta_{1,6}a_{4,9} + ta_{2,8}a_{4,9}, a_{1,4} - a_{3,8} - ta_{1,4} + ta_{3,8}\rangle$

Sea $B = \{f_1 = ta_{4,9}, f_2 = -7ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 3ta_{1,5}a_{3,8}^2 + 3ta_{2,7}a_{3,8}^2 + 3ta_{2,6}^2a_{3,9}, f_3 = -7ta_{2,6}a_{2,7} + 3ta_{1,5}a_{3,8} + 3ta_{2,7}a_{3,8} + 2ta_{1,4}a_{3,9} + ta_{2,6}a_{3,9}, f_4 = -3ta_{2,6}^2 + 2ta_{1,4}a_{3,8} + ta_{2,6}a_{3,8}, f_5 = a_{2,6} - a_{3,8} - ta_{2,6} + ta_{3,8}, f_6 = 3a_{1,5}a_{3,8} - 4a_{2,7}a_{3,8} + 3a_{3,8}a_{3,9} - 2a_{1,6}a_{4,9} - a_{2,8}a_{4,9} - 3ta_{1,5}a_{3,8} + t4a_{2,7}a_{3,8} -$

$3ta_{3,8}a_{3,9} + 2ta_{1,6}a_{4,9} + ta_{2,8}a_{4,9}, f_7 = a_{1,4} - a_{3,8} - ta_{1,4} + ta_{3,8}\}$

tenemos,

$S(f_1, f_2) = \frac{-3}{7}(-ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} + a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} + a_{2,6}^2a_{3,9}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_1, f_2)}^B = 0.$

$S(f_1, f_3) = -3ta_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} - 3ta_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 2ta_{1,4}a_{3,9}a_{4,9} - ta_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_1, f_3)}^B = 0.$

$S(f_1, f_4) = -ta_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} - ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_1, f_4)}^B = 0.$

$S(f_1, f_5) = a_{2,6}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9} + ta_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_1, f_5)}^B = a_{2,6}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}.$

Por lo tanto $f_8 = a_{2,6}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}$ está en la Base de Groebner de $tI_1 + (1-t)I_2$

$S(f_1, f_6) = -a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 4a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 3a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 2a_{1,6}a_{4,9}^2 + a_{2,8}a_{4,9}^2 - 4ta_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3ta_{3,8}$
$a_{3,9}a_{4,9} - 2ta_{1,6}a_{4,9}^2 - ta_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_1, f_6)}^B = 3a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 4a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 3a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}$
$+ 2a_{1,6}a_{4,9}^2 + a_{2,8}a_{4,9}^2$

Entonces, $f_9 = 3a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 4a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 3a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 2a_{1,6}a_{4,9}^2 + a_{2,8}a_{4,9}^2$ pertenece a la base de Groebner de $tI_1 + (1-t)I_2$.

$S(f_1, f_7) = a_{1,4}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9} + ta_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_1, f_7)}^B = a_{1,4}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}.$

Entonces, $f_{10} = a_{1,4}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}$ está en la Base de Groebner de $tI_1 + (1-t)I_2$.

$S(f_2, f_3) = 3ta_{2,6}^2a_{3,9} - 2ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} - ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} \Rightarrow \overline{S(f_2, f_3)}^B = 0.$

$S(f_2, f_4) = 9ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 + 2ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2 + 9ta_{2,6}^3a_{3,9} - 14a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2 \Rightarrow \overline{S(f_2, f_4)}^B = 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}$
$- 98a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 6a_{1,5}a_{3,8}^2 + 6a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}$
$- 46a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 23a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}$

Entonces $f_{11} = 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 98a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 6a_{1,5}a_{3,8}^2 + 6a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 46a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 23a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}$ está en la base de Groebner de $tI_1 + (1-t)I_2$.

$S(f_2, f_5) = -7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 7a_{2,7}a_{3,8}^2 + 3ta_{1,5}a_{3,8}^2 + 3ta_{2,6}^2a_{3,9} - 4ta_{2,7}a_{3,8}^2 \Rightarrow \overline{S(f_2, f_5)}^B = 7a_{2,6}a_{2,7} - 3t$
$a_{1,5}a_{3,8} - 3ta_{2,7}a_{3,8} - 2a_{1,4}a_{3,9} - a_{2,6}a_{3,9} + 2a_{1,6}a_{4,9} + a_{2,8}a_{4,9}$

Entonces, $f_{12} = 7a_{2,6}a_{2,7} - 3a_{1,5}a_{3,8} - 3a_{2,7}a_{3,8} - 2a_{1,4}a_{3,9} - a_{2,6}a_{3,9} + 2a_{1,6}a_{4,9} + a_{2,8}a_{4,9}$ esta en la Base de Groebner de $tI_1 + (1-t)I_2$.

$S(f_2, f_6) = -21a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 28a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8} - 21a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} + 14a_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9} + 7a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9}$
$+ 9ta_{1,5}^2a_{3,8}^2 + 9ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 + 9ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,9} - 28ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8} + 21ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 14ta_{1,6}$
$a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9} - 7ta_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_2, f_6)}^B = 0.$

$S(f_2,f_7) = -7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 7a_{2,7}a_{3,8}^2 + 3ta_{1,5}a_{3,8}^2 - 4ta_{2,7}a_{3,8}^2 + 3ta_{2,6}^2a_{3,9} \Rightarrow \overline{S(f_2,f_7)}^B = 0$

$S(f_3,f_4) = 9ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} + 2ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 6ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 2ta_{2,6}^2a_{3,9} - 14ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(f_3,f_4)}^B = 0$

$S(f_3,f_5) = -7a_{2,6}a_{2,7} + 7a_{2,7}a_{3,8} + 3a_{1,5}a_{3,8} + 2ta_{1,4}a_{3,9} + ta_{2,6}a_{3,9} - 4ta_{2,7}a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(f_3,f_5)}^B = 0$

$$\begin{aligned} S(f_3,f_6) = {} & -21a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 28a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8} - 21a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 14a_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9} - 7a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8} \\ & a_{4,9} + 9ta_{1,5}^2a_{3,8}^2 + 9ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 + 6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} + 3ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 28ta_{2,6} \\ & a_{2,7}^2a_{3,8} + 21ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} + 14ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9} + 7ta_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_3,f_6)}^B = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f_3,f_7) = {} & -7a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7} + 7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 3ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8} + 3ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 2ta_{1,4}^2a_{3,9} + ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} \\ & - 7ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(f_3,f_7)}^B = 0 \end{aligned}$$

$S(f_4,f_5) = -3a_{2,6}^2 + 3a_{2,6}a_{3,8} + 2ta_{1,4}a_{3,8} - 2ta_{2,6}a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(f_4,f_5)}^B = 3a_{2,6}^2 - a_{2,6}a_{3,8} - 2a_{1,4}a_{3,8}$

Por lo tanto $f_{13} = 3a_{2,6}^2 - a_{2,6}a_{3,8} - 2a_{1,4}a_{3,8}$ está en la Base de Groebner de $tI_1 + (1-t)I_2$

$$\begin{aligned} S(f_4,f_6) = {} & -3a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8} + 4a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8} - 3a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} + 2a_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9} + a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9} + 2ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2 \\ & + ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 + 3ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} - 2ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9} - ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_4,f_6)}^B = 0 \end{aligned}$$

$S(f_4,f_7) = -3a_{1,4}a_{2,6}^2 + 3a_{2,6}^2a_{3,8} + 2ta_{1,4}^2a_{3,8} + ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8} - 3ta_{2,6}^2a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(f_4,f_7)}^B = 0$

$$\begin{aligned} S(f_5,f_6) = {} & -3a_{1,5}a_{3,8}^2 + 4a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} - 3a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} + 2a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} + a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} + 3ta_{1,5}a_{3,8}^2 \\ & - 4ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 3ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 2ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} - ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_5,f_6)}^B = 0 \end{aligned}$$

$S(f_5f_7) = -a_{1,4}a_{3,8} + a_{2,6}a_{3,8} + ta_{1,4}a_{3,8} - ta_{2,6}a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(f_5,f_7)}^B = 0$

$$\begin{aligned} S(f_6,f_7) = {} & 3a_{1,5}a_{3,8}^2 - 4a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 3a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} - 2a_{1,4}a_{1,6}a_{4,9} - a_{1,4}a_{2,8}a_{4,9} + 4ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} \\ & - 3ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 2ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9} + ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9} - 3ta_{1,5}a_{3,8}^2 \Rightarrow \overline{S(f_6,f_7)}^B = 0 \end{aligned}$$

$S(f_8,f_1) = -ta_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_8,f_1)}^B = 0$

$S(f_8,f_2) = 4ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_8,f_2)}^B = 0$

$S(f_8,f_3) = -4ta_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3ta_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 2ta_{1,4}a_{3,9}a_{4,9} + ta_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_8,f_3)}^B = 0$

$S(f_8,f_4) = 2ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - 2ta_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_8,f_4)}^B = 0$

$S(f_8,f_5) = a_{2,6}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_8,f_5)}^B = 0$

$S(f_8,f_6) = -3a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + 4a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 3a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 2a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2 + a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2$

$$+\,3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}-4ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+3ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-2ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2-ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_8,f_6)}^B=0$$

$$S(f_8,f_7)=-a_{1,4}a_{2,6}a_{4,9}+a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}+ta_{1,4}a_{3,8}a_{4,9}-t\,a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_8,f_7)}^B=-a_{1,4}a_{2,6}a_{4,9}+a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}=0$$

$$S(f_9,f_1)=-4ta_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+3ta_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-2ta_{1,6}a_{4,9}^2-2ta_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_9,f_1)}^B=0$$

$$S(f_9,f_2)=9ta_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{4,9}+9ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}+9ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,9}a_{4,9}+12ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{4,9}-21ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+6ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9}+7ta_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_9,f_2)}^B=0$$

$$S(f_9,f_3)=9ta_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{4,9}+9ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}+6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+3ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-21ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+28ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{4,9}+14ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9}^2+7ta_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_9,f_3)}^B=0$$

$$S(f_9,f_4)=2ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}+ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9}+4ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-3ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+2ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9}^2+ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_9,f_4)}^B=0$$

$$S(f_9,f_5)=3a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}+4ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-3ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+2ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2+ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_9,f_4)}^B=0$$

$$S(f_9,f_6)=3a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9}-4a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+3a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-2a_{1,6}a_{4,9}^2-a_{2,8}a_{4,9}^2+8ta_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-6t\,a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+4ta_{1,6}a_{4,9}^2+2ta_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_9,f_6)}^B=0$$

$$S(f_9,f_7)=3a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9}-3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}-3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}+4ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-3ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-2ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2-ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^4 \Rightarrow \overline{S(f_9,f_7)}^B=0$$

$$S(f_9,f_8)=-3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}-4a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+3a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-2a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2-a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_9,f_8)}^B=0$$

$$S(f_{10},f_1)=-ta_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_9,f_1)}^B=0$$

$$S(f_{10},f_2)=7ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-3ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}-3ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-3ta_{1,4}a_{2,6}^2a_{3,9}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_9,f_2)}^B=0$$

$$S(f_{10},f_3)=7ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-3ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9}-3ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-2ta_{1,4}^2a_{3,9}a_{4,9}-ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_9,f_2)}^B=0$$

$$S(f_{10},f_4)=3ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9}+3ta_{1,4}a_{2,6}^2a_{4,9}-ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_9,f_4)}^B=0$$

$$S(f_{10},f_5)=a_{1,4}a_{2,6}a_{4,9}-a_{1,4}a_{3,8}a_{4,9}-ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}+ta_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_9,f_5)}^B=0$$

$S(f_{10},f_6) = -3a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 4a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 3a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 2a_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2 + a_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2 - 4t$ $a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 2ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2 - ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_9,f_6)}^B = -3a_{1,4}a_{1,5}$ $a_{3,8}a_{4,9} + 4a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 3a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 2a_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2 + a_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2$

$S(f_{10},f_7) = -a_{1,4}a_{4,9} + a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_9,f_7)}^B = 0$

$S(f_{10},f_8) = -a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + a_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_9,f_8)}^B = 0$

$S(f_{11},f_1) = -98ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 6ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} + 6ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} + 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} + 18ta_{1,4}a_{3,8}$ $a_{3,9}a_{4,9} + 9ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 46ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 23ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_{10},f_1)}^B = 0.$

$S(f_{11},f_2) = -98ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8} + 6ta_{2,7}^2a_{3,8}^2 + 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,9} + 18ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} + 9ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}$ $-46ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 23ta_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 27ta_{1,5}^2a_{3,8}^2 + 33ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 + 27ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,9} \Rightarrow$

$\overline{S(f_{10},f_2)}^B = 0$

$S(f_{11},f_3) = -98ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8} + 33ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 + 6ta_{2,7}^2a_{3,8}^2 + 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,9} + 18ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}$ $+ 9ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 46ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 23ta_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 27ta_{1,5}^2a_{3,8}^2 + 18ta_{1,4}a_{1,5}$ $a_{3,8}a_{3,9} + 9ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} \Rightarrow \overline{S(f_{10},f_3)}^B = 98a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8} - 27a_{1,5}^2a_{3,8}^2 - 33a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2$ $-6a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 36a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} - 50a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3a_{2,7}a_{3,8}^2$ $a_{3,9} - 12a_{1,4}^2a_{3,9}^2 + 70a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 35a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 10a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}$ $a_{4,9} - 5a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 12a_{1,6}^2a_{4,9}^2 + 12a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 3a_{2,8}^2a_{4,9}^2$

Entonces $f_{14} = 98a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8} - 27a_{1,5}^2a_{3,8}^2 - 33a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 6a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 36a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} - 50a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} - 12a_{1,4}^2a_{3,9}^2 + 70a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 35a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 10a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 12a_{1,6}^2a_{4,9}^2 + 12a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 3a_{2,8}^2a_{4,9}^2$ está en la base de Groebner de $tI_1 + (1-t)I_2$.

$S(f_{11},f_4) = -98ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 27ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 + 6ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42ta_{1,4}a_{2,6}^2a_{3,9} + 18ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}$ $+9ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} - 46ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - 23ta_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 42ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2 \Rightarrow \overline{S(f_{10},f_4)}^B = 0$

$S(f_{11},f_5) = 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 63a_{1,5}a_{3,8}^2 - 98ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} - 6ta_{2,7}a_{3,8}^2 - 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}$ $+ 9ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 46ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 23ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 57ta_{1,5}a_{3,8}^3 \Rightarrow \overline{S(f_{10},f_5)}^B = 0$

$S(f_{11},f_6) = 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 84a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 63a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 42a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} - 21a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} - 98t$ $a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 6ta_{1,5}a_{3,8}^2 + 6ta_{2,7}a_{3,8}^2 + 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} - 42ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}$ $- 23ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 54ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} + 84ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 42ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} + 21ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow$ $\overline{S(f_{10},f_6)}^B = 0$

$S(f_{11},f_7) = 63a_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 - 98ta_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8} + 6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2 + 6ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42t$ $a_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9} + 18ta_{1,4}^2a_{3,8}a_{3,9} + 9ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 46ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2 - 23ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9} + 63ta_{1,5}$

$a_{2,6}a_{3,8}^2 \Rightarrow \overline{S(f_{11},f_7)}^B = 0$

$S(f_{11},f_8) = -98a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 6a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} + 42a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} + 18a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 9a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}$
$a_{4,9} - 46a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 23a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 69a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{10},f_8)}^B = 0$

$S(f_{11},f_{10}) = -98a_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 6a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} + 6a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} + 42a_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} + 18a_{1,4}^2a_{3,8}$
$a_{3,9}a_{4,9} + 9a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 46a_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 23a_{1,4}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 63a_{1,5}a_{2,6}$
$a_{3,8}^2a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{11},f_{10}}^B = 0$

$S(f_{12},f_1) = 3ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 3ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 2ta_{1,4}^2a_{3,9}a_{4,9} + ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} - 2ta_{1,4}a_{1,6}$
$a_{4,9}^2 - a_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_{12},f_1)}^B = 0$

$S(f_{12},f_2) = 3ta_{2,6}^2a_{3,9} - 2ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} - ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} + 2ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} + ta_{2,8}a_{3,9}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{12},f_2)}^B = 0$

$S(f_{12},f_3) = 2ta_{1,6}a_{4,9} + ta_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{12},f_3)}^B = 0$

$S(f_{12},f_4) = 14ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} - 9ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 2ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} - 6ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} - 3ta_{2,6}^2a_{3,9} + 6ta_{1,6}a_{2,6}$
$a_{4,9} + 3ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{12},f_4)}^B = 0$

$S(f_{12},f_5) = 7a_{2,6}a_{2,7} - 7a_{2,7}a_{3,8} + 4ta_{2,7}a_{3,8} - 3ta_{1,5}a_{3,8} - 2ta_{1,4}a_{3,9} - ta_{2,6}a_{3,9} + 2ta_{1,6}a_{4,9} + t$
$a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{12},f_5)}^B = 0$

$S(f_{12},f_6) = -21a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 9a_{1,5}^2a_{3,8}^2 + 9a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 + 6a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} + 3a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 6$
$a_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 3a_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 9ta_{1,5}^2a_{3,8}^2 - 9ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} - 3t$
$a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} + 6ta_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} + 3ta_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 28ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8} - 21ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}$
$a_{3,9} + 14ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9} + 7ta_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{12},f_6)}^B = 0$

$S(f_{12},f_7) = 7ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7} - 3ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8} - 3ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} - 2ta_{1,4}^2a_{3,9} - ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 2ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}$
$+ ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{12},f_7)}^B = 0$

$S(f_{12},f_8) = -4a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 2a_{1,4}a_{3,9}a_{4,9} + a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} - 2a_{1,6}a_{4,9}^2 - a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow$
$\overline{S(f_{12},f_8)}^B = 0$

$S(f_{12},f_9) = 28a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{4,9} - 21a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 14a_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9}^2 + 7a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 9$
$a_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{4,9} + 9a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} + 6a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 3a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 6a_{1,5}$
$a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 3a_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_{12},f_9)}^B = 0$

$S(f_{12},f_{10}) = -7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 3a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 2a_{1,4}^2a_{3,9}a_{4,9} + a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}$
$a_{4,9} - 2a_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2 - a_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_{12},f_{10})}^B = 0$

$$S(f_{12},f_{11}) = -98a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}+6a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2+6a_{2,7}^2a_{3,8}^2+42a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,9}+18a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}-46a_{1,6} a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-23a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}+27a_{1,5}^2a_{3,8}^2+27a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2+18a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}+9a_{1,5}a_{2,6} a_{3,8}a_{3,9}-18a_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}+9a_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{12},f_{11})}^B = 0$$

$$S(f_{13},f_1) = -2ta_{1,4}a_{3,8} - ta_{2,6}a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(f_{13},f_1)}^B = 0$$

$$S(f_{13},f_2) = -9ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 - 2ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 9ta_{2,6}^3a_{3,9} + 14a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2 \Rightarrow \overline{f_{13},f_2)}^B = 0$$

$$S(f_{13},f_3) = 9ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}+2ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}+6ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}+2ta_{2,6}^2a_{3,9}-14ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(f_{13},f_3)}^B = 0$$

$$S(f_{13},f_4) = 0 \Rightarrow \overline{S(f_{13},f_4)}^B = 0$$

$$S(f_{13},f_5) = 3a_{2,6}^2 - 3a_{2,6}a_{3,8} - 2ta_{1,4}a_{3,8} + 2ta_{2,6}a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(f_{13},f_5)}^B = 0$$

$$S(f_{13},f_6) = 3a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8} - 4a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8} + 3a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} - 2a_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9} - a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9} - 2ta_{1,4}a_{1,5} a_{3,8}^2 - ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 - 3ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} + 2ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9} + ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{13},f_6)}^B = 0$$

$$S(f_{13},f_7) = 3a_{1,4}a_{2,6}^2 + 3a_{2,6}^2a_{3,8} - 2ta_{1,4}^2a_{3,8} - ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8} + 3ta_{2,6}^2a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(f_{13},f_7)}^B = 0$$

$$S(f_{13},f_8) = 2a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - 2a_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{13},f_8)}^B = 0$$

$$S(f_{13},f_9) = 2a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} + a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9} + 4a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 3a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 2a_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9}^2 + a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(f_{13},f_9)}^B = 0$$

$$S(f_{13},f_{10}) = 3a_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9} + 3a_{1,4}a_{2,6}^2a_{4,9} - a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{13},f_{10})}^B = 0$$

$$S(f_{13},f_{11}) = -98a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 27a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 + 6a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42a_{1,4}a_{2,6}^2a_{3,9} + 18a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} + 9a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} - 46a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - 23a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 42a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2 \Rightarrow \overline{S(f_{13},f_{11})}^B = 0$$

$$S(f_{13},f_{12}) = 14a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} - 9a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 2a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} - 6a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} - 3a_{2,6}^2a_{3,9} + 6a_{1,6}a_{2,6} a_{4,9} + 3a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(f_{13},f_{12})}^B = 0$$

$$S(f_{14},f_1) = -t27a_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{4,9}-33ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-6ta_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9}-36ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-50ta_{1,4}a_{2,7} a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9} - 3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9} - 3ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9} - 12ta_{1,4}^2a_{3,9}^2a_{4,9} +70ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2+35ta_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2-10ta_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-5ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-5ta_{2,8} a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2 + 12ta_{1,6}^2a_{4,9}^3 + 12ta_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^3 + 3ta_{2,8}^2a_{4,9}^3 \Rightarrow \overline{S(f_{14},f_1)}^B = 0$$

$$S(f_{14},f_2) = -t27a_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2-33ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2-6ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2-36ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}-50ta_{1,4}a_{2,6} a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 3ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3ta_{2,7}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9} - 12ta_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}^2 +70ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+35ta_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-10ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-5ta_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}$$

$$a_{3,9}a_{4,9}-5ta_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+12ta_{1,6}^2a_{2,6}a_{4,9}^2+12ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2+3ta_{2,6}a_{2,8}^2a_{4,9}^2-42t$$
$$a_{1,4}a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2-42ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}^2-42ta_{1,4}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,9}\Rightarrow \overline{S(f_{14},f_2)}^B=0$$

$$S(f_{14},f_3)=-t27a_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2-33ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2-6ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2-36ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}-64ta_{1,4}$$
$$a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}-3ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}-3ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}-3ta_{2,7}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}-12ta_{1,4}^2a_{2,6}$$
$$a_{3,9}^2+70ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+35ta_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-10ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-5ta_{2,6}$$
$$a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-5ta_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+12ta_{1,6}^2a_{2,6}a_{4,9}^2+12ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2+3ta_{2,6}$$
$$a_{2,8}^2a_{4,9}^2-42ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2-42ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}^2-28ta_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}\Rightarrow \overline{S(f_{14},f_3)}^B=0$$

$$S(f_{14},f_4)=-t81a_{1,5}^2a_{2,6}^2a_{3,8}^2-99ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}^2-18ta_{2,6}^2a_{2,7}^2a_{3,8}^2-108ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}$$
$$-192ta_{1,4}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}-9ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}^2a_{3,9}-9ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}^2a_{3,9}-9ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}-36$$
$$ta_{1,4}^2a_{2,6}^2a_{3,9}^2+210ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+105ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-30ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}$$
$$-15ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-15ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+36ta_{1,6}^2a_{2,6}^2a_{4,9}^2+36ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2$$
$$+9ta_{2,6}^2a_{2,8}^2a_{4,9}^2+196ta_{1,4}^2a_{2,7}^2a_{3,8}+98ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}\Rightarrow \overline{S(f_{13},f_4)}^B=0$$

$$S(f_{14},f_5)=98a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}-98a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}^2+98ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}^2-t27a_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2-33ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2$$
$$-6ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2-36ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}-64ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}-3ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}-3t$$
$$a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}-3ta_{2,7}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}-12ta_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}^2+70ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+35ta_{2,6}$$
$$a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-10ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-5ta_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-5ta_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}$$
$$a_{4,9}+12ta_{1,6}^2a_{2,6}a_{4,9}^2+12ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2+3ta_{2,6}a_{2,8}^2a_{4,9}^2\Rightarrow \overline{S(f_{14},f_5)}^B=0$$

$$S(f_{14},f_6)=294a_{1,4}a_{1,5}a_{2,7}^2a_{3,8}-392a_{1,4}a_{2,7}^3a_{3,8}+294a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{3,9}-196a_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}^2a_{4,9}-98a_{1,4}a_{2,7}^2$$
$$a_{2,8}a_{4,9}+392ta_{1,4}a_{2,7}^3a_{3,8}-294ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{3,9}+196ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}^2a_{4,9}+98ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{2,8}a_{4,9}$$
$$-t81a_{1,5}^3a_{3,8}^2-99ta_{1,5}^2a_{2,7}a_{3,8}^2-18ta_{1,5}a_{2,7}^2a_{3,8}^2-108ta_{1,4}a_{1,5}^2a_{3,8}a_{3,9}-192ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}$$
$$a_{3,9}-9ta_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{3,9}-9ta_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{3,9}-9ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}-36ta_{1,4}^2a_{1,5}a_{3,9}^2+210ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,7}$$
$$a_{3,8}a_{4,9}+105ta_{1,5}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-30ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-15ta_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-15ta_{1,5}$$
$$a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+36ta_{1,5}a_{1,6}^2a_{4,9}^2+36ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2+9ta_{1,5}a_{2,8}^2a_{4,9}^2\Rightarrow \overline{S(f_{14},f_6)}^B=0$$

$$S(f_{14},f_7)=98a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}-98a_{2,7}^2a_{3,8}^2+98ta_{2,7}^2a_{3,8}^2-t27a_{1,5}^2a_{3,8}^2-33ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2-6ta_{2,7}^2a_{3,8}^2-36t$$
$$a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}-64ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}-3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}-3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}-3ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}-12t$$
$$a_{1,4}^2a_{3,9}^2+70ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+35ta_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-10ta_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-5ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}$$
$$-5ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+12ta_{1,6}^2a_{4,9}^2+12ta_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2+3ta_{2,8}^2a_{4,9}^2\Rightarrow \overline{S(f_{14},f_7)}^B=0$$

$$S(f_{14},f_8)=-27a_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9}-33a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-6a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9}-36a_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}$$
$$-64a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-3a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}-3a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}-3a_{2,7}a_{2,6}a_{3,8}^2$$
$$a_{3,9}a_{4,9}-12a_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}^2a_{4,9}+70a_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2+35a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2-10a_{1,6}a_{2,6}$$
$$a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-5a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-5a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2+12a_{1,6}^2a_{2,6}a_{4,9}^3+12a_{1,6}a_{2,6}$$
$$a_{2,8}a_{4,9}^3+3a_{2,6}a_{2,8}^2a_{4,9}^3+98a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9}\Rightarrow \overline{S(f_{14},f_8)}^B=0$$

$$S(f_{14},f_9)=-81a_{1,5}^3a_{3,8}^2a_{4,9}-99a_{1,5}^2a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-18a_{1,5}a_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9}-108a_{1,4}a_{1,5}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-192a_{1,4}$$
$$a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-9a_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}-9a_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}-9a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}-36a_{1,4}^2$$

$a_{1,5}a_{3,9}^2a_{4,9}+210a_{1,5}a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2+105a_{1,5}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2-30a_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-15$ $a_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-15a_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2+36a_{1,5}a_{1,6}^2a_{4,9}^3+36a_{1,5}a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^3+9a_{1,5}a_{2,8}^2$ $a_{4,9}^3-392a_{1,4}a_{2,7}^3a_{3,8}a_{4,9}+294a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-196a_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}^2a_{4,9}^2-98a_{1,4}a_{2,7}^2a_{2,8}a_{4,9}^2$ $\Rightarrow \overline{S(f_{14},f_9)}^B=0$

$S(f_{14},f_{10})=-27a_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{4,9}-33a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-6a_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9}-36a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-64a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}$ $a_{3,9}a_{4,9}-3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}-3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}-3a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}-12a_{1,4}^2a_{3,9}^2a_{4,9}+70a_{1,6}$ $a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2+35a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2-10a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-5a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-5a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2$ $+12a_{1,6}^2a_{4,9}^3+12a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^3+3a_{2,8}^2a_{4,9}^3+98a_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9}\Rightarrow \overline{S(f_{14},f_{11})}^B=0$

$S(f_{14},f_{11})=-81a_{1,5}^3a_{2,6}a_{3,8}^3-99a_{1,5}^2a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^3-18a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^3-108a_{1,4}a_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}-192a_{1,4}$ $a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}-9a_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^3a_{3,9}-9a_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^3a_{3,9}-9a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^3a_{3,9}-36a_{1,4}^2$ $a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}^2+210a_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}+105a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}^2a_{4,9}-30a_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}^2$ $a_{3,9}a_{4,9}-15a_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}-15a_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}+36a_{1,5}a_{1,6}^2a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}^2+$ $36a_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2+9a_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}^2a_{3,8}a_{4,9}^2-98a_{1,4}^2a_{2,7}^3a_{3,8}+6a_{1,4}a_{1,5}a_{2,7}^2a_{3,8}^2+6$ $a_{1,4}a_{2,7}^3a_{3,8}^2+42a_{1,4}^2a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,9}+18a_{1,4}^2a_{2,7}^2a_{3,8}a_{3,9}+9a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{3,9}-46a_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}^2$ $a_{3,8}a_{4,9}-23a_{1,4}a_{2,7}^2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}\Rightarrow \overline{S(f_{14},f_{11})}^B=0$

$S(f_{14},f_{12})=-27a_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2-33a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2-6a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2-36a_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}-64a_{1,4}a_{2,6}$ $a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}-3a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}-3a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}-3a_{2,7}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}-12a_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}^2+70$ $a_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+35a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-10a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-5a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}$ $-5a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+12a_{1,6}^2a_{2,6}a_{4,9}^2+12a_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2+3a_{2,6}a_{2,8}^2a_{4,9}^2-42a_{1,4}a_{1,5}$ $a_{2,7}a_{3,8}^2-42a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}^2-28a_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}\Rightarrow \overline{S(f_{14},f_{12})}^B=0$

$S(f_{14},f_{13})^B=-81a_{1,5}^2a_{2,6}^2a_{3,8}^2-99a_{1,5}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}^2-18a_{2,6}^2a_{2,7}^2a_{3,8}^2-108a_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}-192a_{1,4}a_{2,6}^2$ $a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}-9a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}^2a_{3,9}-9a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}^2a_{3,9}-9a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}-36a_{1,4}^2a_{2,6}^2a_{3,9}^2+210$ $a_{1,6}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+105a_{2,6}^2a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-30a_{1,6}a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-15a_{2,6}^2a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}$ $-15a_{2,6}^2a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+36a_{1,6}^2a_{2,6}^2a_{4,9}^2+36a_{1,6}a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2+9a_{2,6}^2a_{2,8}^2a_{4,9}^2+196a_{1,4}^2a_{2,7}^2a_{3,8}$ $+98a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}\Rightarrow \overline{S(f_{14},f_{13})}^B=0$

Luego $\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8,f_9,f_{10},f_{11},f_{12},f_{13}\}$ forman una base de Groebner para $tI_1+(1-t)I_2$, intersectando este resultado con $\mathbb{C}[a_{1,4},a_{1,5},\ldots,a_{2,6},\ldots,a_{3,8},a_{3,9},a_{4,9}]$ obtenemos la base de Groebner deseada para $I_1\cap I_2$

□

Teorema 8.2. *Una base de Groebner de* $(I_1\cap I_2)\cap I_3$ *es*
$\{2a_{1,4}a_{4,9}-a_{2,6}a_{4,9}-a_{3,8}a_{4,9},7a_{2,6}a_{2,7}-3a_{1,5}a_{3,8}-3a_{2,7}a_{3,8}-2a_{1,4}a_{3,9}-a_{2,6}a_{3,9}$
$+2a_{1,6}a_{4,9}a_{2,8}a_{4,9},3a_{2,6}^2-2a_{1,4}a_{3,8}-a_{2,6}a_{3,8},63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}-98a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}+6a_{1,5}a_{3,8}^2+6a_{2,7}a_{3,8}^2+42$
$a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}+18a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}+9a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}-42a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}-21a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}-4a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}-2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9},$
$98a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}-27a_{1,5}^2a_{3,8}^2-33a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2-6a_{2,7}^2a_{3,8}^2-36a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}-50a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}-3a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}$
$-3a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}-12a_{1,4}^2a_{3,9}^2+36a_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}+22a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+18a_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}+11a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}$

$+12a_{1,6}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9}+6a_{2,6}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9}+14a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+7a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-12a_{1,6}^2a_{4,9}^2-12a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2$
$-3a_{2,8}^2a_{4,9}^2\}$

Demostración. Como en el teorema anterior utilizamos el algorítmo 2.39 y el teorema 2.49 para encontrar las bases de Groebner de $I_1 \cap I_2 \cap I_3$.

Sea $(I_1 \cap I_2) \cap I_3 = t(I_1 \cap I_2) \cap (1-t)I_3 = \langle g_1 = ta_{2,6}a_{4,9} - ta_{3,8}a_{4,9}, g_2 = ta_{1,4}a_{4,9} - ta_{3,8}a_{4,9}, g_3 = 7ta_{2,6}a_{2,7} - 3ta_{1,5}a_{3,8} - 3ta_{2,7}a_{3,8} - 2ta_{1,4}a_{3,9} - ta_{2,6}a_{3,9} + 2ta_{1,6}a_{4,9} + ta_{2,8}a_{4,9}, g_4 = 3ta_{2,6}^2 - 2ta_{1,4}a_{3,8} - ta_{2,6}a_{3,8}, g_5 = 3ta_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} - 4ta_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3ta_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 2ta_{1,6}a_{4,9}^2 - ta_{2,8}a_{4,9}^2, g_6 = 63ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 98ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 6ta_{1,5}a_{3,8}^2 + 6ta_{2,7}a_{3,8}^2 + 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 46ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 23ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}, g_7 = 98ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8} - 27ta_{1,5}^2a_{3,8}^2 - 33ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 6ta_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 36ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} - 50ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} - 12ta_{1,4}^2a_{3,9}^2 + 70ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 35ta_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 10ta_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 12ta_{1,6}^2a_{4,9}^2 + 12ta_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 3ta_{2,8}^2a_{4,9}^2, g_8 = 3a_{2,6} - a_{3,8} - 3ta_{2,6} + ta_{3,8}, g_9 = 9a_{1,5}a_{3,8} + 16a_{2,6}a_{3,8} + a_{3,8}a_{3,9} - 6a_{1,6}a_{4,9} - 3a_{2,8}a_{4,9} - 9ta_{1,5}a_{3,8} - 16ta_{2,6}a_{3,8} - ta_{3,8}a_{3,9} + 6ta_{1,6}a_{4,9} + 3ta_{2,8}a_{4,9}, g_{10} = 3a_{1,4} - a_{3,8} - 3ta_{1,4} + ta_{3,8}\rangle$. Entonces,

$S(g_1, g_2) = -ta_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} + ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_1, g_2)}^B = 0$

$S(g_1, g_3) = -4ta_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3ta_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 2ta_{1,4}a_{3,9}a_{4,9} - 2ta_{1,6}a_{4,9}^2 - ta_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_1, g_3)}^B = 0$

$S(g_1, g_4) = -2ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + 2ta_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_1, g_4)}^B = 0$

$$S(g_1, g_5) = -3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} + 4ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 3ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 2ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2 - ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_1, g_5)}^B = 0$$

$$S(g_1, g_6) = -69ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} + 98ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 6ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} - 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} - 18ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 9ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 46ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 23ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_1, g_6)}^B = 0$$

$$S(g_1, g_7) = -98ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9} + 27ta_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9} + +33ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} + 6ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9} + 36ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + 50ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 3ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9} + 3ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 35ta_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 10ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2 + 5ta_{2,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2 - 12ta_{1,6}^2a_{2,6}a_{4,9}^3 - 12ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^3 - 3ta_{2,6}a_{2,8}^2a_{4,9}^3 \Rightarrow \overline{S(g_1, g_7)}^B = 0$$

$S(g_1, g_8) = -3a_{2,6}a_{4,9} + a_{3,8}a_{4,9} - 4ta_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_1, g_8)}^B = -3a_{2,6}a_{4,9} + a_{3,8}a_{4,9} - 4ta_{3,8}a_{4,9}$

Por lo tanto, $g_{11} = -3a_{2,6}a_{4,9} + a_{3,8}a_{4,9} - 4ta_{3,8}a_{4,9}$ está en la base de Groebner de $(I_1 \cap I_2) \cap I_3$.

$$S(g_1, g_9) = 9a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + 16a_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9} + a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 6a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2 - 3a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 - 9t\,a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9} - 16ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9} - ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 6ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2 + 3ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_1, g_9)}^B = 0$$

$S(g_1, g_{10}) = 3a_{1,4}a_{2,6}a_{4,9} - a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - 3ta_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} + ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_1, g_{10})}^B = 2a_{1,4}a_{4,9} - a_{2,6}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}$

Por lo tanto $g_{12} = 2a_{1,4}a_{4,9} - a_{2,6}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9}$ está en la base de Groebner de $(I_1 \cap I_2) \cap I_3$.

$S(g_2, g_3) = -7ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 3ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 2ta_{1,4}^2a_{3,9}a_{4,9} - 2ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2 - ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_2, g_3)}^B = 0$

$S(g_2, g_4) = -3ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9} + 2ta_{1,4}^2a_{3,8}a_{4,9} + ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_2, g_4)}^B = 0$

$S(g_2, g_5) = -3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} + 4ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 3ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 2ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2 + ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_2, g_5)}^B = 0$

$S(g_2, g_6) = -63ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9} + 98ta_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} - 6ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} - 42t\, a_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} - 18ta_{1,4}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 9ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 46ta_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 23t\, a_{1,4}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_2, g_6)}^B = 0$

$S(g_2, g_7) = 92ta_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9} - 27ta_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{4,9} - 33ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} - 36ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 50ta_{1,4}a_{2,7}\, a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9} - 3ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9} - 12ta_{1,4}^2a_{3,9}^2a_{4,9} + 70ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 35ta_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 10ta_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2 - 5ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2 + 12ta_{1,6}^2a_{3,9}^3 + 12ta_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^3 + 3ta_{2,8}^2a_{4,9}^3 \Rightarrow \overline{S(g_2, g_7)}^B = 0$

$S(g_2, g_8) = 3a_{1,4}a_{2,6}a_{4,9} - a_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} - 3ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + ta_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_2, g_8)}^B = 0$

$S(g_2, g_9) = 9a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} + 16a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 6a_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2 - 3a_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2 - 9ta_{1,5}\, a_{3,8}^2a_{4,9} - 16ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 6ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2 + 3ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_2, g_9)}^B = 0$

$S(g_2, g_{10}) = 3a_{1,4}a_{4,9} - a_{3,8}a_{4,9} - 2ta_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_2, g_{10})}^B = 0$

$S(g_3, g_4) = -9ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 2ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} - 6ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 6ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} + 3ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} + 14t\, a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(g_3, g_4)}^B = 0$

$S(g_3, g_5) = -9ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} - 9ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} - 6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 6ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 3ta_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 28ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 14ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9}^2 + 7ta_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_3, g_5)}^B = 56ta_{1,6}\, a_{4,9}^2 + 56ta_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 28ta_{2,8}a_{4,9}^2 - 63a_{1,5}a_{2,6}a_{4,9} + 64a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 39a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - 9\, a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 24a_{1,6}a_{4,9}^2 - 24a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9} - 12a_{2,8}a_{4,9}^2$

Por lo tanto $g_{13} = 56ta_{1,6}a_{4,9}^2 + 56ta_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 28ta_{2,8}a_{4,9}^2 - 63a_{1,5}a_{2,6}a_{4,9} + 64a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 39a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - 9a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 24a_{1,6}a_{4,9}^2 - 24a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9} - 12a_{2,8}a_{4,9}^2$ está en la base de Groebner de $(I_1 \cap I_2) \cap I_3$.

$$S(g_3,g_6) = -27ta_{1,5}^2a_{3,8}^2 - 33ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 18ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} + 18ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} + 9ta_{1,5}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9}^2 + 98ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8} - 6ta_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 42ta_{1,4}a_{2,6}a2,7a_{3,9} - 18ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 9ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} + 46ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 23ta_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_3,g_6)}^B = 0$$

$$S(g_3,g_7) = -42ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 42ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 28ta_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} + 28ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 14t\,a_{1,4}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 27ta_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2 + 33ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2 + 6ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2 + 36ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}\,a_{3,8}a_{3,9} + 50ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} + 3ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9} - 3ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} + 12ta_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}^2 - 70ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 35ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 10ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 5ta_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}\,a_{4,9} - 12ta_{1,6}^2a_{2,6}a_{4,9}^2 - 12ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 - 6ta_{2,6}a_{2,8}^2a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_3,g_7)}^B = 0$$

$$S(g_3,g_8) = 21a_{2,6}a_{2,7} - 7a_{2,7}a_{3,8} - 9ta_{1,5}a_{3,8} - 2ta_{2,7}a_{3,8} - 6ta_{1,4}a_{3,9} + 6ta_{1,6}a_{4,9} + 3ta_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_3,g_8)}^B = 2a_{1,4}a_{3,9} + 3a_{1,5}a_{3,8} - 7a_{2,6}a_{2,7} + a_{2,6}a_{3,9} + 3a_{2,7}a_{3,8} - a_{4,9}a_{2,8} - 2a_{1,6}a_{4,9}$$

Por lo tanto $g_{14} = 2a_{1,4}a_{3,9} + 3a_{1,5}a_{3,8} - 7a_{2,6}a_{2,7} + a_{2,6}a_{3,9} + 3a_{2,7}a_{3,8} - a_{4,9}a_{2,8} - 2a_{1,6}a_{4,9}$ está en la base de Groebner de $(I_1 \cap I_2) \cap I_3$.

$$S(g_3,g_9) = 63a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 112a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8} + 7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 42a_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9} - 21a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9} - 112ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8} - 7ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} + 42ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9} + 21ta_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9} - 27ta_{1,5}^2\,a_{3,8}^2 - 27ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 18ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9} + 18ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} + 9ta_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_3,g_9)}^B = 0$$

$$S(g_3,g_{10}) = 21a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7} - 7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} + 7ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} - 9ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8} - 9ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} - 6ta_{1,4}^2a_{3,9} + 6ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9} + 3ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_3,g_{10})}^B = 0$$

$$S(g_4,g_5) = -2ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}^2 - ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9} + 4ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 3ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 2ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9}^2 + ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_4,g_5)}^B = 0$$

$$S(g_4,g_6) = -42ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2 - 27ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 + 98ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} - 6ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 42ta_{1,4}a_{2,6}^2a_{3,9} - 18t\,a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 9ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} + 46ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + 23ta_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_4,g_6)}^B = 0$$

$$S(g_4,g_7) = 196ta_{1,4}^2a_{2,7}^2a_{3,8}^2 + 98ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 81ta_{1,5}^2a_{2,6}^2a_{3,8}^2 - 99ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}^2 - 18ta_{2,6}^2a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 108ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} - 150ta_{1,4}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} + 9ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}^2a_{3,9} - 9ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}^2\,a_{3,9} - 36ta_{1,4}^2a_{2,6}^2a_{3,9}^2 + 210ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 105ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 30ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{3,8}\,a_{3,9}a_{4,9} - 15ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 36ta_{1,6}^2a_{2,6}^2a_{4,9}^2 + 36ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2 + 9ta_{2,6}^2a_{2,8}^2a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_4,g_7)}^B = 0.$$

$$S(g_4,g_8) = 3a_{2,6}^2 - a_{2,6}a_{3,8} - 2ta_{1,4}a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(g_4,g_8)}^B = 3a_{2,6}^2 - 2a_{1,4}a_{3,8} - a_{2,6}a_{3,8}$$

Por lo tanto $g_{15} = 3a_{2,6}^2 - 2a_{1,4}a_{3,8} - a_{2,6}a_{3,8}$ está en la base Groebner de $(I_1 \cap I_2) \cap I_3$.

$$S(g_4,g_9) = 9a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8} + 16a_{2,6}^3a_{3,8} + a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} - 6a_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9} - 3a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9} - 6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2 - 3t\, a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 - 16ta_{2,6}^3a_{3,8} - ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} + 6ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9} + 3ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_4,g_9)}^B = 0$$

$$S(g_4,g_{10}) = 3a_{1,4}a_{2,6}^2 - a_{2,6}^2a_{3,8} - 2ta_{1,4}^2a_{3,8} - ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8} + ta_{2,6}^2a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(g_4,g_{10})}^B = 0$$

$$S(g_5,g_6) = -84ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 54ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 42ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2 - 21ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 98ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 6ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} - 6ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} - 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} - 18ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 46ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 23ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_5,g_6)}^B = 0$$

$$S(g_5,g_7) = 392ta_{1,4}a_{2,7}^3a_{3,8}a_{4,9} - 294ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 196ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}^2a_{4,9}^2 + 98ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{2,8}a_{4,9}^2 - 81ta_{1,5}^3a_{3,8}^2a_{4,9} - 99ta_{1,5}^2a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} - 18ta_{1,5}a_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9} - 108ta_{1,4}a_{1,5}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 150ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 9ta_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9} - 9ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9} - 36ta_{1,4}^2a_{1,5}a_{3,9}^2\, a_{4,9} + 210ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 105ta_{1,5}a_{2,7}a_{2,8\_}3,8a_{4,9}^2 - 30ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2 - 15ta_{1,5}\, a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2 + 36ta_{1,5}a_{1,6}^2a_{4,9}^3 + 36ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^3 + 9ta_{1,5}a_{2,8}^2a_{4,9}^3 \Rightarrow \overline{S(g_5,g_7)}^B = 0$$

$$S(g_5,g_8) = 3a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} - 4ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 2ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2 - ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_5,g_8)}^B = 0$$

$$S(g_5,g_9) = 9a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 16a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 6a_{1,6}a_{4,9}^2 - 3a_{2,8}a_{4,9}^2 - 12ta_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 8\, a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 16ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_5,g_9)}^B = 0$$

$$S(g_5,g_{10}) = 3a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} - a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} - 4ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 3ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 2ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2 - ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2 + ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_5,g_{10})}^B = 0$$

$$S(g_6,g_7) = 1372ta_{1,4}^2a_{2,7}^3a_{3,8} - 84ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 84ta_{1,4}a_{2,7}^3a_{3,8}^2 - 588ta_{1,4}^2a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,9} - 252ta_{1,4}^2a_{2,7}^2\, a_{3,8}a_{3,9} - 126ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{3,9} + 644ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{4,9} + 322ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9} - 297ta_{1,5}^2a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 198ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 324ta_{1,4}a_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 450ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}\, a_{3,9} - 27ta_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9} - 27ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} - 108ta_{1,4}^2a_{1,5}a_{2,6}a_{3,9}^2 + 630ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}\, a_{3,8}a_{4,9} + 315ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 90ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 45ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 108ta_{1,5}a_{1,6}^2a_{2,6}a_{4,9}^2 + 108ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 27ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}^2a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_6,g_7)}^B = 0$$

$$S(g_6,g_8) = 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 21a_{1,5}a_{3,8}^2 - 98ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 27ta_{1,5}a_{3,8}^2 + 6ta_{2,7}a_{3,8}^2 + 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18t\, a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 46ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 23ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_6,g_8)}^B = 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 98a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 6a_{1,5}a_{3,8}^2 + 6a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 42\, a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} - 21a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} - 4a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}$$

Por lo tanto $g_{16} = 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 98a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 6a_{1,5}a_{3,8}^2 + 6a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 42a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} - 21a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} - 4a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}$ está en la base de Groebner de $(I_1 \cap I_2) \cap I_3$.

$$S(g_6,g_9) = 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} + 112a_{2,6}^2a_{3,8} + 7a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 42a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} - 21a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} - 98ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}$$

$+ 6ta_{1,5}a_{3,8}^2 + 6ta_{2,7}a_{3,8}^2 + 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8} + 18ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 2ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 46ta_{1,6}a_{3,8} a_{4,9} - 23ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 112ta_{2,6}^2a_{3,8} + 42ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} + 21ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_6,g_9)}^B = 0$

$S(g_6,g_{10}) = 63a_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 21a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}^2 - 98ta_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8} + 6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^4 + 6ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42t a_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9} + 18ta_{1,4}^2a_{3,8}a_{3,9} + 9ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 46ta_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 23ta_{1,4}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 21ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 \Rightarrow \overline{S(g_6,g_{10})}^B = 0$

$S(g_7,g_8) = 294a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8} - 98a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 81ta_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2 - 99ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 18ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 108ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 150ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 9ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9} - 9ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} - 36ta_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}^2 + 210ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 105ta_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 30ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} a_{4,9} - 15ta_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 36ta_{1,6}^2a_{2,6}a_{4,9}^2 + 36ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 9ta_{2,6}a_{2,8}^2a_{4,9}^2 + 98ta_{1,4} a_{2,7}^2a_{3,8}^2 \Rightarrow \overline{S(g_7,g_8)}^B = 0$

$S(g_7,g_9) = 144a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8} + 9a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{3,9} - 54a_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}^2a_{4,9} - 27a_{1,4}a_{2,7}^2a_{2,8}a_{4,9} - 243ta_{1,5}^2a_{2,7}a_{3,8}^2 - 54ta_{1,5}a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 324ta_{1,4}a_{1,5}^2a_{3,8}a_{3,9} - 450ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 27ta_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{3,9} - 27t a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} - 108ta_{1,4}^2a_{1,5}a_{3,9}^2 + 630ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 45ta_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 108t a_{1,5}a_{1,6}^2a_{4,9}^2 + 108ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 27ta_{1,5}a_{2,8}^2a_{4,9}^2 - 144ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} - 9ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8} a_{3,9} + 54ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}^2a_{4,9} + 27ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_7,g_9)}^B = 0$

$S(g_8,g_9) = -3a_{1,5}a_{3,8}^2 - 16a_{2,6}^2a_{3,8} - a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} + 6a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} + 3a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} + 3ta_{1,5}a_{3,8}^2 + 16t a_{2,6}^2a_{3,8} + ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 6ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} - 3ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_8,g_9)}^B = 0$

$S(g_8,g_{10}) = a_{2,6}a_{3,8} - a_{1,4}a_{3,8} + ta_{1,4}a_{3,8} - ta_{2,6}a_{3,8} \Rightarrow \overline{S(g_8,g_{10})}^B = 0$

$S(g_9,g_{10}) = 16a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8} + a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} - 6a_{1,4}a_{1,6}a_{4,9} - 3a_{1,4}a_{2,8}a_{4,9} + 3a_{1,5}a_{3,8}^2 - 16ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8} - ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 6ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9} + 3ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_9,g_{10})}^B = 0$

$S(g_{11},g_1) = -3a_{2,6}^2a_{4,9} + a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - 4ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{11},g_1)}^B = 0$

$S(g_{11},g_2) = -3a_{1,4}a_{2,6}a_{4,9} + a_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} + 4ta_{3,8}^2a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{11},g_2)}^B = 0$

$S(g_{11},g_3) = -21a_{2,6}^2a_{2,7}a_{4,9} + 7a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 12ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} + 12ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} + 8ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 4ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 8ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 + ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{11},g_3)}^B = 0$

$S(g_{11},g_4) = -9a_{2,6}^3a_{4,9} + 3a_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9} + 8ta_{1,4}a_{3,8}^2a_{4,9} + 4ta_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{11},g_4)}^B = 0$

$S(g_{11},g_5) = -9a_{1,5}a_{2,6}a_{4,9} + 3a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9} + 16ta_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 12ta_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 8ta_{1,6}a_{4,9}^2 + 4ta_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{11},g_5)}^B = 0$

$S(g_{11},g_6) = -189a_{1,5}a_{2,6}^2a_{4,9} + 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - 392ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 24ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} + 24ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} + 168ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} - 72ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 36ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 184ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 92ta_{2,8}$

$a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{11},g_6)}^B = 0$

$S(g_{11},g_7) = -147a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{4,9}+49a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{4,9}-54ta_{1,5}^2a_{3,8}^2-33ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-12ta_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9} - 72ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-100ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-6ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}-6ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9} - 6ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}-24ta_{1,4}^2a_{3,9}^2a_{4,9}+140ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2+70ta_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2-20ta_{1,6} a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-10ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-10ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2+24ta_{1,6}^2a_{4,9}^3+24ta_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^3+ 12ta_{2,8}^2a_{4,9}^3 \Rightarrow \overline{S(g_{11},g_7)}^B = 56ta_{1,6}a_{4,9}^2+28ta_{2,8}a_{4,9}^2-63a_{1,5}a_{2,6}a_{4,9}+64a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}- 39a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-9a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-24a_{1,6}a_{4,9}^2-12a_{2,8}a_{4,9}^2$

$S(g_{11},g_8) = 9a_{2,6}^2a_{4,9}-3a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}+12a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-4a_{3,8}^2a_{4,9}+ta_{3,8}^2a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{11},g_8)}^B = 0$

$S(g_{11},g_9) = -27a_{1,5}a_{2,6}a_{4,9}+45a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9}+64a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}+4a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-24a_{1,6}a_{4,9}^2-18a_{2,8}a_{4,9}^2-64 ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-4ta_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+24ta_{1,6}a_{4,9}^2+12ta_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{11},g_9)}^B = 0$

$S(g_{11},g_{10}) = 9a_{1,4}a_{2,6}a_{4,9}-a_{3,8}^2a_{4,9}+ta_{3,8}^2a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{11},g_{10})}^B = 0$

$S(g_{12},g_1) = 2ta_{1,4}a_{3,8}a_{4,9}-ta_{2,6}^2a_{4,9}-ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{12},g_1)}^B = 0$

$S(g_{12},g_2) = -t\_a2,6a_{4,9}+ta_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{12},g_2)}^B = 0$

$S(g_{12},g_3) = -7ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{4,9}-7ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9}+6ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+2ta_{1,4}^2a_{3,9}a_{4,9} + 2ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9}-4ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2-2ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{12},g_3)}^B = 0$

$S(g_{12},g_4) = -3ta_{2,6}^3a_{4,9}-3ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9}+4ta_{1,4}^2a_{3,8}a_{4,9}+2ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{12},g_4)}^B = 0$

$S(g_{12},g_5) = -3ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}+8ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-12ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+8ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2 + 2ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{12},g_5)}^B = 0$

$S(g_{12},g_6) = -63ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-63ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9}+196ta_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-24ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}- 24ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-84ta_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9}-36ta_{1,4}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-36ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+ 92ta_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2+46ta_{1,4}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{12},g_6)}^B = 0$

$S(g_{12},g_7) = -49ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{4,9}-43ta_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9}+27ta_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{4,9}+33ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}+36ta_{1,4}a_{1,5} a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+50ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}+3ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}+3ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} a_{4,9}+12ta_{1,4}^2a_{3,9}^2a_{4,9}-70ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2-35ta_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2+10ta_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2+5ta_{2,8} a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2+5ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-12ta_{1,6}^2a_{4,9}^3+12ta_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^3+3ta_{2,8}^2a_{4,9}^3 \Rightarrow \overline{S(g_{12},g_7)}^B = 0$

$S(g_{12},g_8) = 6a_{1,4}a_{2,6}a_{4,9}-2a_{1,4}a_{3,9}a_{4,9}+3ta_{2,6}^2a_{4,9}-3ta_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}+2a_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{12},g_8)}^B = 0$

$S(g_{12},g_9) = 18a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9}+32a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}+2a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-12a_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2-6a_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2-32 ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-2ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+12ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2+6ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2-9ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}$

$$- 9ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{12},g_9)}^B = 0$$

$$S(g_{12},g_{10}) = 6a_{1,4}a_{4,9} - 2a_{3,8}a_{4,9} - ta_{3,8}a_{4,9} - 3t\_a2,6a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{12},g_{10})}^B = 0$$

$$S(g_{12},g_{11}) = -3a_{1,4}a_{2,6}a_{4,9} + a_{1,4}a_{3,8}a_{4,9} - 2t\_a2,6a_{3,8}a_{4,9} - 2ta_{3,8}^2a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{12},g_{11})}^B = 0$$

$$S(g_{13},g_1) = -63a_{1,5}a_{2,6}^2a_{4,9} + 64a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 39a_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9} - 9a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 24a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2$$
$$24a_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} - 12a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 56ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 28ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 56ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2$$
$$\Rightarrow \overline{S(g_{12},g_1)}^B = 0$$

$$S(g_{13},g_2) = -63a_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{4,9}+64a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-39a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-9a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-24a_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2$$
$$-24a_{1,4}a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}-12a_{1,4}a_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2+56ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2+28ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2+56ta_{1,6}a_{3,8}$$
$$a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{13},g_2)}^B = 0$$

$$S(g_{13},g_3) = -63a_{1,5}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{4,9}+64a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{4,9}-39a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-9a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-24a_{1,6}$$
$$a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9}^2-24a_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9}-12a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9}^2+56ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{4,9}^2+28ta_{2,6}a_{2,7}$$
$$a_{2,8}a_{4,9}^2 + 24ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 24ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 12ta_{1,6}a_{1,4}a_{3,9}a_{4,9}^2 + 8ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,9}$$
$$a_{4,9}^2 - 16ta_{1,6}a_{1,6}a_{4,9}^3 - 8ta_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^3 \Rightarrow \overline{S(g_{13},g_3)}^B = 0$$

$$S(g_{13},g_4) = -189a_{1,5}a_{2,6}^3a_{4,9}+576a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-156a_{2,6}^3a_{3,8}a_{4,9}-27a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-72a_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9}^2$$
$$-72a_{1,6}a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}-36a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2+168ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2+84ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2+112ta_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}$$
$$a_{4,9}^2 + 56ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{13},g_4)}^B = 0$$

$$S(g_{13},g_5) = -189a_{1,5}^2a_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9} + 576a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} - 156a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9} - 27a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}$$
$$-72a_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 72a_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 36a_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 168ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}$$
$$a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 84ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 224ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 168ta_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2 + 112$$
$$ta_{1,6}^2a_{4,9}^3 + 56ta_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^3 \Rightarrow \overline{S(g_{13},g_5)}^B = 0$$

$$S(g_{13},g_6) = -567a_{1,5}^2a_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9} + 567a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} - 156a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}^2a_{4,9} - 81a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}$$
$$-216a_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}^2-216a_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-108a_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2+5504ta_{1,5}a_{1,6}$$
$$a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2+252ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2+784ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2-48ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}^2a_{4,9}^2-$$
$$48ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}^2+42ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9}^2-144ta_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-72ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2$$
$$+ 276ta_{1,6}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^3 + 207ta_{1,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^3 \Rightarrow \overline{S(g_{13},g_6)}^B = 0$$

$$S(g_{13},g_7) = -63a_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{4,9}+64a_{1,4}a_{2,7}^3a_{3,8}^2a_{4,9}-39a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9}-9a_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}$$
$$-24a_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{4,9}^2-24a_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}^2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-12a_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}^2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2+56ta_{1,4}a_{1,6}$$
$$a_{2,7}^2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 28ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 27ta_{1,5}^2a_{1,6}a_{3,8}^2a_{4,9}^2 - 33ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}^2 -$$
$$6ta_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{4,9}^2-36ta_{1,4}a_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-50ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-3ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}^2a_{3,9}$$
$$a_{4,9}^2 - 3ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}^2 - 3ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}^2 - 12ta_{1,4}^2a_{1,6}a_{3,9}^2a_{4,9}^2 + 70ta_{1,6}^2a_{2,7}a_{3,8}$$
$$a_{4,9}^3 + 35ta_{1,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^4 - 10ta_{1,6}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^3 - 5ta_{1,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^3 - 5ta_{1,6}a_{2,8}a_{3,8}$$
$$a_{3,9}a_{4,9}^3 + 12ta_{1,6}^3a_{4,9}^4 + 12ta_{1,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^4 + 3ta_{1,6}a_{2,8}^2a_{4,9}^4 \Rightarrow \overline{S(g_{13},g_7)}^B = 0$$

$$S(g_{13},g_8)=-189a_{1,5}a_{2,6}a_{4,9}+576a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-156a_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9}-27a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-72a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2 - 72a_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}-36a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2-56ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2+56a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2+168ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,8} a_{4,9}^2+84ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2-56ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{13},g_8)}^B=0$$

$$S(g_{13},g_9)=-567a_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}+567a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-156a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9}-81a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}- 216a_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2-216a_{1,5}a_{1,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-108a_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2+5504ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,8}a_{3,8} a_{4,9}^2+252ta_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2+504a_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}+144a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}+56a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} -54a_{1,6}^2a_{4,9}^2-27a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2-16ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-56ta_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+54ta_{1,6}^2a_{4,9}^2 +27ta_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{13},g_9)}^B=0$$

$$S(g_{13},g_{10})=-189a_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{4,9}+192a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-117a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-27a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-72 a_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}^2-72a_{1,4}a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}-132a_{1,4}a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2-56a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2+168ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,8} a_{4,9}^2+84ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2+56ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{13},g_{10})}^B=0$$

$$S(g_{13},g_{11})=-63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}+64a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-39a_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9}-9a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9}-24a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 -24a_{1,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-12a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2-3a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2+a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2+56ta_{1,6}a_{2,8}a_{3,8} a_{4,9}^2+28ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{13},g_{11})}^B=0$$

$$S(g_{13},g_{12})=-63a_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{4,9}+64a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-39a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-9a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-24a_{1,4}a_{1,6} a_{4,9}^2-24a_{1,4}a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}-12a_{1,4}a_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2+56ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,8}a_{4,9}^2+28ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}^2+a_{1,6}a_{2,6} a_{4,9}^2+a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{13},g_{12})}^B=0$$

$$S(g_{14},g_1)=2ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+3ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-7ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{4,9}+ta_{2,6}^2a_{3,9}a_{4,9}+3ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} -ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2-2ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{14},g_1)}^B=0$$

$$S(g_{14},g_2)=3ta_{1,5}a_{3,8}a_{4,9}-7ta_{2,6}a_{2,7}a_{4,9}+ta_{2,6}a_{3,9}a_{4,9}+3ta_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+2ta_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-ta_{2,8}a_{4,9}^2 -2ta_{1,6}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{14},g_2)}^B=0$$

$$S(g_{14},g_3)=21ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}-49ta_{2,6}^2a_{2,7}^2+7ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,9}+21ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}-7ta_{2,8}a_{4,9}-14t a_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9}+6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}+6ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}+4ta_{1,4}^2a_{3,9}^2-2ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}^2-4 ta_{1,4}a_{1,6}a_{3,9}a_{4,9}+2ta_{1,4}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{14},g_3)}^B=0$$

$$S(g_{14},g_4)=4ta_{1,4}^2a_{3,8}a_{3,9}-2ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}+9ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}-21ta_{2,6}^3a_{2,7}+3ta_{2,6}^3a_{3,9}+9ta_{2,6}^2a_{2,7} a_{3,8}-3ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}-6ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{14},g_4)}^B=0$$

$$S(g_{14},g_5)=9a_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{4,9}^2-21a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+3a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+9a_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-3 a_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2-6a_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2-8ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-2ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}^2a_{4,9}+4ta_{1,4} a_{1,6}a_{3,9}a_{4,9}^2+2ta_{1,4}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{14},g_5)}^B=0$$

$$S(g_{14},g_6)=189ta_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2-441ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}+63ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}+189ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2-63ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-126ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}+196ta_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}-12ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}-12ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}-84ta_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}^2-36ta_{1,4}^2a_{3,8}a_{3,9}^2-18ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}^2+92ta_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+46ta_{1,4}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}\Rightarrow\overline{S(g_{14},g_6)}^B=0$$

$$S(g_{14},g_7)=294ta_{1,5}a_{2,7}^2a_{3,8}^2-686ta_{2,6}a_{2,7}^3a_{3,8}+98ta_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{3,9}+294ta_{2,7}^3a_{3,8}^2-98a_{2,7}^2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-196a_{1,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{4,9}+54ta_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{3,9}-66ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}+12ta_{2,7}^2a_{3,8}^2a_{3,9}+72ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}^2-100ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}^2+6ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}^2+6ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9}^2+6ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9}^2+24ta_{1,4}^2a_{3,9}^3-140ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-70ta_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+20ta_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}^2a_{4,9}+10ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}^2a_{4,9}+10ta_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}^2a_{4,9}-24ta_{1,6}^2a_{3,9}a_{4,9}^2-24ta_{1,6}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-6ta_{2,8}^2a_{3,9}a_{4,9}^2\Rightarrow\overline{S(g_{14},g_7)}^B=0$$

$$S(g_{14},g_8)=6a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}+2a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}-2ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}+9ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}-21ta_{2,6}^2a_{2,7}+3ta_{2,6}^2a_{3,9}+9ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}-3ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}-6ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}\Rightarrow\overline{S(g_{14},g_8)}^B=0$$

$$S(g_{14},g_9)=18a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}+32a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}+2a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}^2-12a_{1,4}a_{1,6}a_{3,9}a_{4,9}-6a_{1,4}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9}+27ta_{1,5}^2a_{3,8}^2a_{3,9}-63ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}+9ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}+27ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2-7ta_{1,5}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-14ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}-32ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}-2ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}^2+12ta_{1,4}a_{1,6}a_{3,9}a_{4,9}+6ta_{1,4}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9}\Rightarrow\overline{S(g_{14},g_9)}^B=0$$

$$S(g_{14},g_{10})=6a_{1,4}^2a_{3,9}-2a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}+2ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}+9ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}-21ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}+3a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}+9ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}-3ta_{1,4}a_{2,8}a_{4,9}-6ta_{1,4}a_{1,6}a_{4,9}\Rightarrow\overline{S(g_{14},g_{10})}^B=0$$

$$S(g_{14},g_{11})=-6a_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9}+2a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+6ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}-14ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+2ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+6ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-2ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2-4ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2\Rightarrow\overline{S(g_{14},g_{10})}^B=0$$

$$S(g_{14},g_{12})=3a_{1,5}a_{3,8}a_{4,9}-7a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9}+2a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9}+3a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-a_{2,8}a_{4,9}^2-2a_{1,6}a_{4,9}^2\Rightarrow\overline{S(g_{14},g_{12})}^B=0$$

$$S(g_{14},g_{13})=56ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9}^2+28ta_{1,4}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9}^2-84ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2+196ta_{1,6}a_{2,6}a_{2,7}a_{4,9}^2-28ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9}^2-84ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2+28a_{2,8}a_{4,9}^3+56ta_{1,6}^2a_{4,9}^3-63a_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9}+64a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-39a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-9a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}^2a_{4,9}-24a_{1,4}a_{1,6}a_{3,9}a_{4,9}^2-24a_{1,4}a_{1,6}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9}-12a_{1,4}a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9}^2\Rightarrow\overline{S(g_{14},g_{13})}^B=0$$

$$S(g_{15},g_1)=3ta_{2,6}^2ta_{3,8}a_{4,9}-2ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}-ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9}\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_1)}^B=0$$

$$S(g_{15},g_2)=3ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9}-2ta_{1,4}^2a_{3,8}a_{4,9}-ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_2)}^B=0$$

$$S(g_{15},g_3)=9ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}+2ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}+6ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}-6ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}-3ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}-14ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_3)}^B=0$$

$S(g_{15},g_4)=0\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_4)}^B=0$

$S(g_{15},g_5)=-2ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}^2-ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9}+4ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-3ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+2ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9}^2$
$+ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_5)}^B=0$

$S(g_{15},g_6)=-42ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2-27ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2+98ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}-6ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2-42ta_{1,4}a_{2,6}^2a_{3,9}-18t$
$a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}-9ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}+46ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}+23ta_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_6)}^B=0$

$S(g_{15},g_7)=196ta_{1,4}^2a_{2,7}^2a_{3,8}^2+98ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2-81ta_{1,5}^2a_{2,6}^2a_{3,8}^2-99ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}^2-18ta_{2,6}^2a_{2,7}^2a_{3,8}^2$
$-108ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}-150ta_{1,4}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9}+9ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}^2a_{3,9}-9ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}^2$
$a_{3,9}-36ta_{1,4}^2a_{2,6}^2a_{3,9}^2+210ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}+105ta_{2,6}^2a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}-30ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{3,8}$
$a_{3,9}a_{4,9}-15ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+36ta_{1,6}^2a_{2,6}^2a_{4,9}^2+36ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2+9ta_{2,6}^2a_{2,8}^2a_{4,9}^2$
$\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_7)}^B=0.$

$S(g_{15},g_8)=3a_{2,6}^2-a_{2,6}a_{3,8}-2ta_{1,4}a_{3,8}\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_8)}^B=0$

$S(g_{15},g_9)=9a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}+16a_{2,6}^3a_{3,8}+a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}-6a_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9}-3a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}-6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2-3t$
$a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2-16ta_{2,6}^3a_{3,8}-ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}+6ta_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9}+3ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_9)}^B=0$

$S(g_{15},g_{10})=3a_{1,4}a_{2,6}^2-a_{2,6}^2a_{3,8}-2ta_{1,4}^2a_{3,8}-ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}+ta_{2,6}^2a_{3,8}\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_{10})}^B=0$

$S(g_{15},g_{11})=9a_{2,6}^3a_{4,9}-3a_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9}-8ta_{1,4}a_{3,8}^2a_{4,9}-4ta_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9}\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_{11})}^B=0$

$S(g_{15},g_{12})=3a_{2,6}^3a_{4,9}+3a_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9}-4a_{1,4}^2a_{3,8}a_{4,9}-2a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_{12})}^B=0$

$S(g_{15},g_{13})=112a_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2+56a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}^2-189a_{1,5}a_{2,6}^3a_{4,9}+576a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-156a_{2,6}^3$
$a_{3,8}a_{4,9}+27a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-72a_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9}^2+72a_{1,6}a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}+36a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2-168ta_{1,6}$
$a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2-84ta_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}^2\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_{13})}^B=0$

$S(g_{15},g_{14})=4a_{1,4}^2a_{3,8}a_{3,9}-2a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}-9a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}+21a_{2,6}^3a_{2,7}-3a_{2,6}^3a_{3,9}-9a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8}+$
$3a_{2,6}^2a_{2,8}a_{4,9}+6a_{1,6}a_{2,6}^2a_{4,9}\Rightarrow\overline{S(g_{15},g_{14})}^B=0$

$S(g_{16},g_1)=-69ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}+98ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-6ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9}-18ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}$
$a_{4,9}-9ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+42ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}^2+21ta_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2+4ta_{1,6}a_{3,8}^2a_{4,9}^2+2ta_{2,8}$
$a_{3,8}^2a_{4,9}^2\Rightarrow\overline{S(g_{16},g_1)}^B=0$

$S(g_{16},g_2)=-63ta_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9}+98ta_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}-6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}-6ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}-42t$
$a_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9}-18ta_{1,4}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}-9ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}+42ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}^2+23t$
$a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2+4a_{1,6}a_{3,8}^2a_{4,9}^2-2a_{2,8}a_{3,8}^2a_{4,9}^2\Rightarrow\overline{S(g_2,g_6)}^B=0$

$S(g_{16},g_3)=-27ta_{1,5}^2a_{3,8}^2-33ta_{1,5}a_{2,7}a_{3,8}^2-18ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}a_{3,9}+18ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}+9ta_{1,5}a_{2,8}$

$a_{3,9}a_{4,9}^2 + 98ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{3,8} - 6ta_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 42ta_{1,4}a_{2,6}a2,7a_{3,9} - 18ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 9t$
$a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} + 42ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 21ta_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 4a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 2a_{2,7}$
$a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{16}, g_3)}^B = 0$

$S(g_{16}, g_4) = -42ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2 - 27ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 + 98ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} - 6ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 42ta_{1,4}a_{2,6}^2$
$a_{3,9} - 18ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 9ta_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} + 42ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + 21ta_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 4$
$a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + 2a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{16}, g_4)}^B = 0$

$S(g_{16}, g_5) = -84ta_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 54ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 42ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9}^2 - 21ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 98ta_{1,4}$
$a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 6ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} - 6ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} - 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} - 18ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}$
$- 42ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 21ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 4a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^4 \Rightarrow \overline{S(g_5, g_6)}^B = 0$

$S(g_{16}, g_6) = 4a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} + 2a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{16}, g_6)}^B = 0$

$S(g_{16}, g_7) = 1372ta_{1,4}^2a_{2,7}^3a_{3,8} - 84ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 84ta_{1,4}a_{2,7}^3a_{3,8}^2 - 588ta_{1,4}^2a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,9} - 252ta_{1,4}^2a_{2,7}^2$
$a_{3,8}a_{3,9} - 126ta_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{3,9} + 644ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}^2a_{3,8}a_{4,9} + 322ta_{1,4}a_{2,7}^2a_{2,8}a_{3,9}a_{4,9} -$
$297ta_{1,5}^2a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 198ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}^2a_{3,8}^2 - 324ta_{1,4}a_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 450ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}$
$a_{3,8}a_{3,9} - 27ta_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9} - 27ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} - 108ta_{1,4}^2a_{1,5}a_{2,6}a_{3,9}^2 + 630ta_{1,5}a_{1,6}$
$a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 315ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 90ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 45ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}$
$a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 108ta_{1,5}a_{1,6}^2a_{2,6}a_{4,9}^2 + 108ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9}^2 + 27ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}^2a_{4,9}^2 \Rightarrow$
$\overline{S(g_{16}, g_7)}^B = 0$

$S(g_{16}, g_8) = 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 21a_{1,5}a_{3,8}^2 - 98ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8} + 27ta_{1,5}a_{3,8}^2 + 6ta_{2,7}a_{3,8}^2 + 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9} + 18t$
$a_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 9ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 42ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 21ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{16}, g_8)}^B = 0$

$S(g_{16}, g_9) = 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} + 112a_{2,6}^2a_{3,8} + 7a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 42a_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} - 21a_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} - 98ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}$
$+ 6ta_{1,5}a_{3,8}^2 + 6ta_{2,7}a_{3,8}^2 + 42ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8} + 18ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9} + 2ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 46ta_{1,6}a_{3,8}$
$a_{4,9} - 23ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 112ta_{2,6}^2a_{3,8} + 42ta_{1,6}a_{2,6}a_{4,9} + 21ta_{2,6}a_{2,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{16}, g_9)}^B = 0$

$S(g_{16}, g_{10}) = 63a_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8} - 21a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}^2 - 98ta_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8} + 6ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^4 + 6ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2 + 42t$
$a_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9} + 18ta_{1,4}^2a_{3,8}a_{3,9} + 9ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 42ta_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9} - 22ta_{1,4}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} +$
$21ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{16}, g_{10})}^B = 0$

$S(g_{16}, g_{11}) = -189a_{1,5}a_{2,6}^2a_{4,9} + 63a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - 392ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} + 24ta_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9} + 24ta_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}$
$+ 168ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} - 72ta_{1,4}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 36ta_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 184ta_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 92$
$ta_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 \Rightarrow \overline{S(g_{16}, g_{11})}^B = 0$

$S(g_{16}, g_{12}) = 63ta_{1,4}a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} - 63ta_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{4,9} + 196ta_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9} - 24ta_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2a_{4,9}$
$- 24ta_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} - 84ta_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9} - 36ta_{1,4}^2a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} - 36ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}$
$+ 92ta_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 46ta_{1,4}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{16}, g_{12})}^B = 0$

$$S(g_{16},g_{13}) = 567a_{1,5}^2a_{2,6}^2a_{3,8}a_{4,9} - 567a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9} + 156a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}^2a_{4,9} + 81a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2a_{3,9}a_{4,9} +216a_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 216a_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} + 108a_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 5504ta_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 252ta_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^2 - 784ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}a_{4,9}^2 + 48ta_{1,5}a_{1,6}a_{3,8}^2a_{4,9}^2 + 48ta_{1,6}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{4,9}^2 - 42ta_{1,4}a_{1,6}a_{2,6}a_{3,9}a_{4,9}^2 + 144ta_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2 + 72ta_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9}^2 - 276ta_{1,6}a_{1,6}a_{3,8}a_{4,9}^3 - 207ta_{1,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9}^3 \Rightarrow \overline{S(g_{16},g_{13})}^B = 0$$

$$S(g_{16},g_{14}) = 189a_{1,5}^2a_{2,6}a_{3,8}^2 - 441a_{1,5}a_{2,6}^2a_{2,7}a_{3,8} + 63a_{1,5}a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} + 189a_{1,5}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 63a_{1,5}a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} - 126a_{1,5}a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + 196a_{1,4}^2a_{2,7}a_{3,8}a_{3,9} - 12a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2a_{3,9} - 12a_{1,4}a_{2,7}a_{3,8}^2a_{3,9} - 84a_{1,4}^2a_{2,6}a_{3,9}^2 - 36a_{1,4}^2a_{3,8}a_{3,9}^2 - 18a_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9}^2 + 92a_{1,4}a_{1,6}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} + 46a_{1,4}a_{2,8}a_{3,8}a_{3,9}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{16},g_{14})}^B = 0$$

$$S(g_{16},g_{15}) = -42a_{1,4}a_{1,5}a_{3,8}^2 - 27a_{1,5}a_{2,6}a_{3,8}^2 + 98a_{1,4}a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8} - 6a_{2,6}a_{2,7}a_{3,8}^2 - 42a_{1,4}a_{2,6}^2a_{3,9} - 18ta_{1,4}a_{2,6}a_{3,8}a_{3,9} - 9a_{2,6}^2a_{3,8}a_{3,9} + 46a_{1,6}a_{2,6}a_{3,8}a_{4,9} + 23a_{2,6}a_{2,8}a_{3,8}a_{4,9} \Rightarrow \overline{S(g_{16},g_{15})}^B = 0$$

Luego, $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15}, g_{16}\}$ es base de Groebner de $t(I_1 \cap I_2) \cap I_3$, utilizando el lema 4.46 haciendo la intersección con el anillo $\mathbb{C}[a_{1,4}, a_{1,5}, \ldots, a_{2,6}, \ldots, a_{3,8}, a_{3,9}, a_{4,9}]$ obtenemos la base de Groebner deseada para $I_1 \cap I_2 \cap I_3$.

$\square$

Observación 8.3. los elementos $g_{12}, g_{1,4}, g_{15}$ de la base de $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ son los que general el ideal I del capítulo 6.

Bibliografía

[AC] ANCOCHEA, JOSE M, CAMPOAMOR RUTWIG, Characteristically nilpotent Lie algebras: A survey, *Extracta Math.* (16) **2** (2001), 153-210.

[AGVG] ANCOCHEA-BERMUDEZ, J.M., GÓMEZ- MARTIN, J. R., VALEIRAS, G. AND GOZE, M., Sur les composantes irrèductibles de la varietè des lois d'algèbres de Lie nilpotentes, *Jurnal of Pure and Applied Algebra* **106** (1996), 11-22.

[AG1] ANCOCHEA - BERMUDEZ, J . M., GOZE, M., Clasification of filiform Lie algebras in dimension 8, *Extracta math.* (1) **3** (1988), 133-135.

[AG2] ANCOCHEA - BERMUDEZ, J . M., GOZE, M., Clasification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7, *Archiv. Math.***52** (1989), 175-185.

[AG3] ANCOCHEA-BERMUDEZ, J. M., GOZE, M., On the varieties of nilpotent Lie algebras of dimension 7 and 8, *of Pure and Appl. Algebra* **77** (1992), 131 - 140.

[BEN] BOZA, L., ECHARTE J., NUÑEZ, Classification of complex filiform Lie algebras of dimension 10, *Algebra Groups Geom.* **11**(3) (1994), 253-276.

[BFN1] BOZA, L., FEDRIANI, E., NUÑEZ, J., TENORIO, A., A historical review of the classification of Lie algebras, *Unión de Mat. Arg.* (2)**54** (2013), 75-99.

[BFN2] BOZA, L., FEDRIANI, E., NUÑEZ, J., Classification of complex filiform Lie algebras of dimension 12, *Dpto. Alg., Comp., geo. y topo. Universidad de Sevilla* (1997).

[BN] BOZA, L., FREDIANI, E., NUÑEZ, Complex filiform Lie algebras of dimension 11, *Applied Math. and Comp.* **141** (2003), 611-630.

[CR1] CARLES, R., Sur la structure des algébras de lie rigides, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* (33) **3** (1984), 65-82.

[CR2] CARLES, R., Sur certaines classes d'algèbres de Lie rigides, *Math. Ann* **272** (1985), 477-488.

[CR3] CARLES, R., Weights system for nilpotent Lie algebras of dimension ≤ 7 over complex field, *Dep. Math. Université de Poitiers*(1989).

[CN] CASTRO - JIMENEZ F. J., NUÑEZ - VALDÉS J., On characteristically nilpotent filiform Lie algebras of dimension 9, *Communications in Algebra* (23) **8** (1995), 3059- 3071.

[CLO] Cox, D., Little, J., O'Shea, D. , Ideals, varieties, and algorithms, *Springer* **segunda edición** (1998).

[D] Dixmier, J., Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes, *Acta Sci. Math. Szeged* (16) **1** (1955), 246 - 250.

[DL] Dixmier, J. Lister, W. G., Derivations of nilpotent Lie algebras, *American Math. Society* (8) **1** (1957), 155-158.

[DJ] Dozias, J., Sur les algèbres de Lie Résolubles réelles de dimension inférieure ou égale á 5, *Thèse de 3 cycle, Faculté des Sciences de Paris* (1963).

[EN] Echarte, F. J., Nuñez, J., Classification of complex filiform Lie algebras of dimension 10, *Algebras, Groups and Geometries* (11) **3** (1994), 253-276.

[GE] Gomez, J. R., Echarte F. J., Classification of complex filiform nilpotent Lie algebras of dimension 9, *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **61**(1) (1991), 21-29.

[GJK1] Gomez, J. R., Jimenez - Merchan, A., Khakimdjanov, Y., Low-dimensional filiform Lie algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **30** (1998), 133-158.

[GJK2] Gomez, J. R., Jimenez - Merchan, A., Khakimdjanov, Y.,On the variety of nilpotent Lie algebra laws of dimension 11, *Rendiconti Cagliari* **66** (1996), 137 - 142.

[GM1] Goze, M., On the varieties of nilpotent Lie algebras of dimension 7 and 8, *Journal of pure and applied alg.* **77** (1992), 131-140.

[GM2] Goze, M., Lie algebras: Classification. Deformations and Rigidity, *Lessons given during the Cinquiéme Ecole de Géométrie Différentielle et Systémes Dynamiques , ENSET ORAN (Algeria)* (2006).

[GW] Graaf, W., Classification of solvable Lie algebras, *Experimental Mathematics* (2005), 15-25.

[GO] Grunewald, F., O'Halloran, J., Deformations of Lie algebras, *J. Algebra*(162) (1993), 210-224.

[HR] Hartshorne, Robin, Algebraic Geometry, *Springer, Editorial Board* (1997).

[HT1] Herrera - Granada, J. F., Tirao, P., The Grunewald-O'Holloran conjeture for nilpotent lie algebras of rank ≥ 1, arxiv: 1306.1541v1(Math. RA).

[HT2] Herrera - Granada, J. F., Tirao, P., Filiform Lie algebras of dimension 8 as degenerations, *Journal of Algebra and its Applications* (2013).

[HS] Hochschild, G., Serre, J. S., Cohomology of Lie Algebras, *Ann.of Math.*(2) **57** (1953), 591-603.

[HJ] Humphreys, James E., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory *Springer - Verlag* (1980).

[KY] Khakimdjanov, Yu. B., Varieties of Lie algebras laws, *Handbook of algebras, Vol. 2* (200), 509-541, Edited by M. Hazwinkel.

[KAG] KHAKIMDJANOV, Y., ANCOCHEA - BERMUDEZ J. M., GOZE, M., Sur la rèductibilitè de la variètè des algèbres de Lie nilpotentes complexes , *C.R. Aced. Sci. Paris, 313, serie I*(1991), 59-62.

[ML] MAGNIN, L., Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension ≤ 7, *Geom. Phys.***3** (1986), 119 - 144.

[NR] NIJENHUIS, A. RICHARDSON, R. W., Deformations of Lie algebra structures, *J. Math.* **17** (1967), 89-105.

[RM] ROMDHANI, M., Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7, *Linear and Multilinear Alg.***24** (1989), 167 - 189.

[SE] SAFIULLINA, E., Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7, *Math. Mech. Phys* (1964), 66 - 69. Univ. Kazan.

[S] SEELEY, T., Some nilpotent Lie algebras of even dimensions, *Bull. Austral. Math. Soc.* **45** (1992), 71 - 77.

[VM1] VERGNE, M., Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes, *Application a l'etude de la variete des algebres de Lie nilpotentes, Bull. Soc. Math. France 98* **28** (1970), 81-116.

[VM2] VERGNE, M., Reductibilite de la variete des algebres de Lie nilpotentes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 263* **28** (1966), A4-A6.