

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

APLICACIONES EN RELATIVIDAD GENERAL DEL MÉTODO DE EQUIVALENCIA DE CARTAN

LAUTARO AMADEI

DIRECTOR: GUSTAVO DOTTI

Marzo 2017



Aplicaciones del Método de Cartan en Relatividad General por Amadei, Lautaro se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución 2.5 Argentina.

Resumen

En este trabajo se estudia el Método de Equivalencia de Cartan y su aplicación a Relatividad General, el algoritmo de Cartan-Karlhede. A partir de los invariantes de Cartan se obtienen cantidades que se anulan sobre horizontes. En particular, se estudian los casos *no nulo tipo electromagnético* y *radiación pura*. Finalmente, se aplica lo obtenido para espaciotiempos de Vaidya.

Abstract

Cartan's Method of Equivalence and its application to 4-dimensional Lorentzian manifolds, the Cartan-Karlhede algorithm gives necessary and sufficient conditions for equivalence. From invariants that fully characterize a geometry we obtain further invariants that vanish on the black hole event horizon, in the stationary case, and on the apparent horizon in the dynamical case. In particular, we study *non-null electromagnetic* and *pure radiation* type spacetimes and consider Vaidya spacetimes as an example of the latter.

Palabras claves

Método de Cartan, Algoritmo de Karlhede, Agujeros negros, Horizonte aparente, Horizonte de eventos, Espaciotiempos tipo D

Clasificación

04.20.Gz Spacetime topology, causal structure, spinor structure

04.20.Jb Exact solutions

04.70.-s Physics of black holes

Agradecimientos

A mi familia, porque sin su apoyo esto no hubiera sido posible. A todos lo que me acompañaron y ayudaron de una forma u otra en este período. Especialmente a Gustavo, mi director, por su predisposición, paciencia y motivación hacia la física y el formalismo matemático.

Índice general

Agradecimientos	5
1. Introducción	9
2. Método de Equivalencia de Cartan	12
2.1. Equivalencia de marcos	13
2.2. Equivalencia de variedades semi-Riemannianas	15
3. Algoritmo de Cartan-Karlhede	21
3.1. Componentes independientes de la n-ésima derivada del espinor de curvatura de Riemann	23
3.2. Formas Canónicas	25
3.2.1. Formas canónicas para espinores simétricos	26
3.3. Ejemplo: Reissner-Nordström-de Sitter	33
4. Invariantes de Cartan como localizadores de horizontes	37
4.1. Derivada covariante del espinor de Weyl	38
4.2. Identidades de Bianchi	41
4.2.1. Vacío - Petrov tipo D	42
4.2.2. <i>No nulo tipo electromagnético</i> - Petrov tipo D	42
4.2.3. <i>Pure Radiation</i> - Petrov tipo D	43
4.3. Localizadores de horizontes	44
4.3.1. <i>No nulo tipo electromagnético</i>	44
4.3.2. <i>Pure Radiation</i>	45

4.3.3. Ejemplo: Espaciotiempos de Vaidya	46
A. Nociones sobre superficies atrapadas y horizontes cuasi-locales	49
Bibliografía	52

Capítulo 1

Introducción

Relatividad General es una teoría del espacio, el tiempo y la gravedad. El *espaciotiempo* es modelado a través de una variedad diferenciable de dimensión 4 y la gravedad es su curvatura. La relación entre la curvatura y la materia presente en el espaciotiempo está codificada en las *ecuaciones de campo de Einstein*:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.

Decidir cuando, dadas dos soluciones de (1.1), existe una transformación *local* de coordenadas que lleva de una a la otra, es central en Relatividad General. La invariancia frente a transformaciones arbitrarias de coordenadas da lugar a problemas prácticos, dado que a menudo es difícil distinguir entre efectos físicos y efectos de coordenadas. Nos encontramos entonces ante un *problema de equivalencia*: dadas dos soluciones de las ecuaciones de Einstein, ¿describen el mismo campo gravitacional?

La búsqueda de una solución a este problema tiene larga historia, empezando con Christoffel en 1869 [6] proponiendo comparar las componentes en un *marco* adaptado al tensor de curvatura y sus derivadas covariantes. Cartan [4] fue el primero en formular el problema de equivalencia en términos de *marcos móviles*, funciones de estructura e invariantes diferenciales. Cartan fue capaz de mostrar que las componentes necesarias eran las del tensor de curvatura y las de sus derivadas covariantes. Más aún, estimó un límite superior de derivadas covariantes necesarias para describir completamente una geometría en $q \leq \frac{1}{2}m(m+1)$, donde m es la dimensión de la

variedad.

El principal problema que uno encuentra en el método de Cartan es su implementación: el número de componentes necesarias para la caracterización de una geometría es a menudo prohibitivo.

Trabajos posteriores [3, 16] se centraron en optimizar la eficiencia del método a través de la reducción del número de derivadas covariantes necesarias para determinar equivalencia. Para esto es importante notar que las componentes en un marco del tensor de curvatura y de sus derivadas covariantes constituyen un conjunto de *invariantes* frente a cambios de coordenadas en el espaciotiempo, pero pueden cambiar frente a rotaciones del marco. Brans [3] propuso utilizar la libertad asociada a las rotaciones del marco ¹ para, mediante una rotación, llevar las componentes del tensor de curvatura y de sus derivadas covariantes a una *forma canónica* determinada por la estructura algebraica de los tensores involucrados.

Posteriormente, para variedades de dimensión $m = 4$, Karlhede [16] formalizó esta idea logrando reducir el número necesario de derivadas a calcular de 10 a 7, y en consecuencia, de alrededor de 27 962 020 componentes a 436 900.

El elemento clave en el desarrollo de Karlhede, y lo que permitió la reducción de derivadas y componentes a calcular, es el orden en el cual es llevado a cabo el procedimiento. El algoritmo desarrollado por Brans primero calcula el tensor de curvatura junto con sus derivadas covariantes y luego procede a determinar las formas canónicas empezando por la derivada de mayor orden. En cambio, el algoritmo de Karlhede muestra que es posible ir calculando las componentes del tensor de curvatura y sus derivadas empezando por la de menor orden y simultáneamente ir determinando las formas canónicas paso a paso. Esto es lo que lleva a una reducción en el número de derivadas covariantes a calcular.

El algoritmo de Cartan-Karlhede (CKA) reduce el límite superior de derivadas covariantes a calcular de 10 a 7 en el peor de los casos (Petrov tipo N y D no vacíos, vacío tipo N) y de 10 a 5 en el resto de los casos (vacío y no vacío Petrov tipo I,II y III, vacío Petrov tipo D). Más recientemente, Collins *et al* [7–9] mostraron que para vacío tipo D el límite superior es 3, mientras que para vacío tipo N y no vacío tipo D es 6.

¹En el caso de una variedad Lorentziana de 4 dimensiones, las rotaciones serán elementos del grupo $SL(2, \mathbb{C})$

Finalmente, un último avance teórico a la implementación del algoritmo fue logrado por MacCallum y Åman [21] utilizando relaciones algebraicas entre el tensor de curvatura y sus derivadas covariantes para así obtener un conjunto mínimo de componentes independientes que deben calcularse.

Capítulo 2

Método de Equivalencia de Cartan

En general, un *problema de equivalencia* consiste en determinar cuando dos objetos geométricos \mathcal{O} y $\bar{\mathcal{O}}$ pueden ser transformados uno en el otro mediante un adecuado difeomorfismo $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \bar{\mathcal{O}}$. Estos objetos pueden ser ecuaciones diferenciales, variedades, problemas variacionales, polinomios, entre otros [12–14]. En el caso $\mathcal{O} = \bar{\mathcal{O}}$ el problema de equivalencia consiste en encontrar las simetrías del objeto dado.

El problema de equivalencia entre dos variedades (semi)-Riemannianas se encuentra enunciado de la siguiente manera:

Sean M y \bar{M} dos variedades diferenciables de dimensión m , decimos que son *equivalentes* si existe un difeomorfismo *local* $\Phi : U \subset M \rightarrow \bar{U} \subset \bar{M}$ entre dos sistemas de coordenadas (x, U) y (\bar{x}, \bar{U}) , donde $\bar{x} = \Phi(x)$ tal que:

$$\bar{g}_{ab}(\bar{x}) = \frac{\partial x^c}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^d}{\partial \bar{x}^b} g_{cd}(x) \quad (2.1)$$

donde $g_{ab}(x)$ y $\bar{g}_{ab}(\bar{x})$ son las componentes de la métrica en los sistemas de coordenadas (x, U) y (\bar{x}, \bar{U}) respectivamente.

El problema de *equivalencia de marcos* es el más importante de los problemas de equivalencia ya que incluye a todos los otros problemas de equivalencia, entre ellos al problema de equivalencia de variedades: el método de equivalencia de Cartan nos provee de un algoritmo para reducir la mayoría de los problemas de equivalencia a un problema de equivalencia de marcos.

En la siguiente sección describimos las herramientas necesarias para resolver el

problema de equivalencia de marcos. La solución de Cartan nos dará condiciones necesarias y suficientes para que exista equivalencia.

2.1. Equivalencia de marcos

Definición 2.1.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y $U \subset M$ un abierto. Un marco es un conjunto ordenado, linealmente independiente de m 1-formas $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^m)$. Por lo tanto θ forma una base del espacio cotangente $T^*M|_x$ en cada $x \in U$.

Asociado al marco θ tenemos un conjunto único de vectores linealmente independientes $e = (e_1 \dots e_m)$ de tal manera que $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$.

Definición 2.1.2. Sean $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^m)$ y $\bar{\theta} = (\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^m)$ marcos definidos en abiertos U y \bar{U} pertenecientes a variedades diferenciables M y \bar{M} respectivamente. El **problema de equivalencia de marcos** consiste en determinar si existe un difeomorfismo $\Phi : U \rightarrow \bar{U}$ tal que:

$$\Phi^* \bar{\theta}^a = \theta^a \quad a = 1, \dots, m \quad (2.2)$$

La invariancia de la derivada exterior frente a mapas suaves permite escribir:

$$\Phi^* d\bar{\theta}^a = d\theta^a \quad a = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

Dado que θ constituye una base del espacio cotangente, tenemos que:

$$d\theta^a = T^a_{bc}(x) \theta^b \wedge \theta^c, \quad a, b, c = 1, \dots, m \quad b < c \quad (2.4)$$

A partir de (2.3) y (2.4) podemos ver que las *funciones de estructura* T^a_{bc} constituyen *invariantes* del problema:

$$d\theta^a = T^a_{bc}(x) \theta^b \wedge \theta^c = \Phi^* d\bar{\theta}^a = \bar{T}^a_{bc}(\bar{x}) \theta^b \wedge \theta^c, \quad a, b, c = 1, \dots, m \quad b < c \quad (2.5)$$

esto es, como los θ^b son 1-formas linealmente independientes, los coeficientes que acompañan a $\theta^b \wedge \theta^c$ deben coincidir:

$$T_{bc}^a(x) = \bar{T}_{bc}^a(\bar{x}), \quad a, b, c = 1, \dots, m \quad b < c \quad (2.6)$$

Por lo tanto, las *funciones de estructura* nos proveen de $\frac{1}{2}m^2(m-1)$ invariantes. Es posible encontrar más invariantes notando que, si $I(x) = \bar{I}(\bar{x}) = \bar{I}(\Phi(x))$, entonces sus diferenciales también deben coincidir, esto es, $\Phi^*d\bar{I} = dI$:

$$dI = \frac{\partial I}{\partial \theta^a}(x)\theta^a = \Phi^*d\bar{I}(\Phi(x)) = \frac{\partial \bar{I}}{\partial \theta^a}(\bar{x})\theta^a \quad (2.7)$$

Donde $\frac{\partial I}{\partial \theta^a}(x) := e_a(I)$ es la derivada del invariante I en la dirección del vector e_a asociado a θ^a . Por lo tanto:

$$\frac{\partial I}{\partial \theta^a}(x) = \frac{\partial \bar{I}}{\partial \theta^a}(\Phi(x)) \quad (2.8)$$

Diferenciando las funciones de estructura obtenemos los *invariantes diferenciales* ($T^a_{bc|m_1}, T^a_{bc|m_1m_2} \dots$) asociados al marco θ definidos por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} d\theta^a &= T^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c \\ dT^a_{bc} &= T^a_{bc|m_1}\theta^{m_1} \\ dT^a_{bc|m_1} &= T^a_{bc|m_1m_2}\theta^{m_2} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Donde $f_{|ab\dots c} := e_c(\dots e_b(e_a(f)))$.

Cartan [4] mostró que los *marcos* son equivalentes si y sólo si el sistema de ecuaciones algebraicas dado por las funciones de estructura y sus derivadas es compatible, esto es, si existe un cambio de coordenadas $\bar{x} = \Phi(x)$ tal que:

$$\begin{aligned}
 T_{bc}^a(x) &= \bar{T}_{bc}^a(\bar{x}) \\
 T_{bc|m_1}^a(x) &= \bar{T}_{bc|m_1}^a(\bar{x}) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 T_{bc|m_1\dots m_p}^a(x) &= \bar{T}_{bc|m_1\dots m_p}^a(\bar{x})
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Donde p denota al menor número tal que las funciones $(T_{bc}^a, \dots, T_{bc|m_1\dots m_{p+1}}^a)$ son funcionalmente dependientes de las derivadas de menor orden. Con esto queremos decir que el rango ρ_{p+1} del Jacobiano del mapa $x \mapsto (T_{bc}^a(x), \dots, T_{bc|m_1\dots m_{p+1}}^a(x))$ es igual al rango ρ_p del Jacobiano del mapa $x \mapsto (T_{bc}^a(x), \dots, T_{bc|m_1\dots m_p}^a(x))$

Luego, como existen como máximo m funciones independientes en una variedad de dimensión m , y como cada derivada o bien nos da una nueva función independiente, o es la última que debemos considerar, encontramos el límite $(p + 1) \leq m$.

Ahora queremos aplicar este resultado al problema que nos interesa: equivalencia de variedades semi-Riemannianas.

2.2. Equivalencia de variedades semi-Riemannianas

Consideremos un problema de equivalencia más general: supongamos dados dos marcos $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^m)$ y $\bar{\theta} = (\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^m)$ definidos en variedades de dimensión m M y \bar{M} respectivamente, y que a diferencia del problema de equivalencia de marcos, las 1-formas no son mapeadas directamente una a la otra como en (2.2), sino que el pullback $\Phi^*\bar{\theta}$ de cada 1-forma en \bar{M} es combinación lineal de los elementos de θ en M .

Definición 2.2.1. Sea $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ un subgrupo del Grupo Lineal general y $\theta^a, \bar{\theta}^a$ dos marcos definidos en las variedades m -dimensionales M y \bar{M} , respectivamente. El ***G*-problema de equivalencia** para θ^a y $\bar{\theta}^a$ consiste en determinar la existencia de un difeomorfismo (local) $\Phi : M \rightarrow \bar{M}$ y una función g con valores en G , $g : M \rightarrow G$

tal que:

$$\Phi^*\bar{\theta} = g(x)\theta \quad (2.11)$$

Explícitamente, la ecuación (2.11) tiene la siguiente forma:

$$\Phi^*\bar{\theta}^a = g^a_b(x)\theta^b \quad (2.12)$$

Como θ^a y $\bar{\theta}$ son conjuntos linealmente independientes, $g(x)$ debe ser invertible y por lo tanto un elemento de $GL(n, \mathbb{R})$, de lo cual sigue inmediatamente (2.11).

Notemos que el problema de equivalencia de marcos está naturalmente contenido en la Definición 2.2.1: es un G-problema de equivalencia con grupo de estructura $G = \{e\}$, el subgrupo trivial de $GL(n, \mathbb{R})$.

Como vimos en (2.1) el problema de equivalencia de variedades semi-Riemannianas consiste en determinar cuando, dadas dos geometrías (M, g) y (\bar{M}, \bar{g}) existe un difeomorfismo local $\Phi : U \subset M \rightarrow \bar{U} \subset \bar{M}$ tal que :

$$\Phi^*\bar{g} = g \quad (2.13)$$

Para reducir este problema a un G-problema de equivalencia introducimos marcos $\{\theta^a\}$ en M y $\{\bar{\theta}^a\}$ en \bar{M} que diagonalizan la métrica punto a punto:

$$g = \eta_{ab}\theta^a \otimes \theta^b \quad \bar{g} = \eta_{ab}\bar{\theta}^a \otimes \bar{\theta}^b \quad (2.14)$$

Donde $\eta_{ab} = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_s, \underbrace{1, \dots, 1}_p)$ para una métrica de signatura (p, s) .

Notemos que si $\Lambda^a_b \in O(p, s)$ entonces $\eta_{ab} = \Lambda_a^c \eta_{cd} \Lambda_b^d$. Si $\tilde{\theta}^a = \Lambda^a_b \bar{\theta}^b$, tenemos que:

$$\tilde{g} = \eta_{ab} \tilde{\theta}^a \otimes \tilde{\theta}^b = \Lambda_c^a \eta_{ab} \Lambda_d^b \bar{\theta}^c \otimes \bar{\theta}^d = \eta_{cd} \bar{\theta}^c \otimes \bar{\theta}^d = g \quad (2.15)$$

Dos marcos son ortonormales si y sólo si están relacionados por $\Lambda \in O(p, s)$, por lo tanto g y \bar{g} son equivalentes si y sólo si los marcos satisfacen:

$$\Phi^*\bar{\theta}^a = \Lambda^a_b(x)\theta^b \quad (2.16)$$

Donde la matriz $m \times m$ $\Lambda(x) = \{\Lambda^a_b(x)\}$ toma valores en el grupo ortogonal $O(p, s)$.

Volvamos a la solución del G -problema de equivalencia: el contexto más apropiado para tratar este problema de acuerdo al Método de Cartan es una G -estructura [5], esto es, un subfibrado principal de $\mathcal{F}(M)$ con grupo de estructura $G \subset GL(n, \mathbb{R})$, donde $\mathcal{F}(M)$ es el fibrado de marcos.

Para reducir el G -problema de equivalencia a un problema del tipo (2.1) con grupo de estructura $G = \{e\}$ debemos extender nuestro problema a la G -estructura asociada. Localmente, la G -estructura es el producto de un abierto $U \subset M$ y el grupo de estructura G . Su dimensión es $m + r$, donde $r = \dim(G)$.

Proposición 2.2.1. Sean $U \subset M$ y $\bar{U} \subset \bar{M}$ dos abiertos. Un difeomorfismo local $\Phi : U \rightarrow \bar{U}$ satisficará $\Phi^*\bar{\theta}^a = g^a_b\theta^b$ si y sólo si existe un difeomorfismo $\Psi : U \times G \rightarrow \bar{U} \times G$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\Psi^*\bar{\Theta}^a = \Theta^a$

2. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U \times G & \xrightarrow{\Psi} & \bar{U} \times G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ U & \xrightarrow{\Phi} & \bar{U} \end{array}$$

3. $\Psi(x, gh) = g\Psi(x, h)$ para $x \in U$, $g, h \in G$

Donde Θ son las 1-formas definidas en $U \times G$ por $\Theta^a = g(x, \xi)^a_b\theta^b$, con $a, b = 1, \dots, m$ y hemos usado que en un fibrado principal G puede actuar por izquierda (y por derecha) sobre la fibra $g(x, h) = (x, gh)$ y análogamente en $\bar{U} \times G$. Notemos que el conjunto $\{\Theta^a\}$ **no** forma un marco en $U \times G$ ya que sólo contiene m elementos y $\dim(U \times G) = m + r$. Este conjunto se puede extender a una base agregando las formas de Maurer-Cartan del subgrupo G .

Prueba. Supongamos que $\Phi : U \rightarrow \bar{U}$ satisface $\Phi^*\bar{\theta} = g_0\theta$, donde $g_0 : U \rightarrow G$ es una función en M con valores en G . Definimos $\Psi : U \times G \rightarrow \bar{U} \times G$ como $\Psi(x, g) \equiv (\Phi(x), gg_0^{-1}(x)) \equiv (\bar{x}, \bar{g})$.

Entonces Ψ claramente satisface 2. y 3. Más aún

$$\Psi^* \bar{\Theta}^a = \Psi^*(\bar{g}^a{}_b \bar{\theta}^b{}_\mu d\bar{x}^\mu) = (gg_0^{-1})^a{}_b \underbrace{\bar{\theta}^b{}_\mu \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}}_{\Phi^* \bar{\theta} = g_0 \theta} dx^\alpha = (gg_0^{-1})^a{}_b (g_0)^b{}_c \theta^c = g^a{}_c \theta^c = \Theta^a \quad (2.17)$$

Ahora, supongamos que $\Psi : U \times G \rightarrow \bar{U} \times G$ satisface 1.-3.

Definimos $\Phi : U \rightarrow \bar{U}$ y $g_0 : U \rightarrow G$ como las funciones que satisfacen $\Psi(x, e) = (\Phi(x), g_0^{-1})$, donde e es la identidad en G .

Entonces $\Psi(x, g) = g\Psi(x, e) = (\Phi(x), gg_0^{-1})$ y 1. implica que $g\theta = \Psi^*(g\bar{\theta}) = (gg_0^{-1})\Phi^*\bar{\theta}$ y por lo tanto

$$\Phi^*\bar{\theta} = g_0\theta \quad (2.18)$$

■

Tomando la derivada exterior de Θ y usando que $d\theta^a = -w^a{}_b \wedge \theta^b$, donde $w^a{}_b = -T^a{}_{bc}\theta^c$, obtenemos:

$$d\Theta = dg \wedge \theta + gd\theta = dgg^{-1} \wedge \Theta - gwg^{-1} \wedge \Theta = -\Omega \wedge \Theta \quad (2.19)$$

donde Ω son 1-formas en $U \times G$ con valores en $\mathfrak{g} = Lie(G)$ definidas por:

$$\Omega^a{}_b = -[(dg)^a{}_c (g^{-1})^c{}_b - g^a{}_c w^c{}_d (g^{-1})^d{}_b] \quad (2.20)$$

Notemos que $\gamma = dg g^{-1}$ es la matriz de formas de Maurer-Cartan en G . Entonces, si restringimos $\Omega^a{}_b$ a la fibra, esto es, $dx^\mu = 0$, obtenemos los generadores del grupo de Lorentz.

Luego, $\{\Theta^a, \Omega^a{}_b\}$ es un conjunto de 1-formas que genera el espacio cotangente $T_u^*(U \times G)$ para cada $u \in U \times G$.

Por lo tanto, hemos encontrado el marco explícitamente invariante (2.2) que estábamos buscando: existe un difeomorfismo $\Phi : U \rightarrow \bar{U}$ que satisface (2.12) si y sólo si el $\{e\}$ -Problema de equivalencia definido por el difeomorfismo $\Psi : U \times G \rightarrow \bar{U} \times G$:

$$\begin{aligned}\Psi^*\bar{\Theta}^a &= \Theta^a \\ \Psi^*\bar{\Omega}^a_b &= \Omega^a_b\end{aligned}\tag{2.21}$$

tiene solución.

De esta manera hemos reducido el problema de equivalencia con grupo de estructura G a un problema de equivalencia de marcos como el descrito en la sección anterior (2.2).

En particular el problema de equivalencia de variedades semi-Riemannianas se reduce a aplicar los resultados de la sección anterior al conjunto de 1-formas $\{\Theta^a, \Omega^a_b\}$ junto con las correspondientes ecuaciones de estructura y con $G = O(p, s)$.

Tomando la derivada exterior de (2.20) obtenemos:

$$d\Omega^a_b = -\Omega^a_c \wedge \Omega^c_b + \mathfrak{R}^a_b = -\Omega^a_c \wedge \Omega^c_b + g^a_c R^c_d (g^{-1})^d_b\tag{2.22}$$

donde hemos introducido la 2-forma de curvatura $R^a_b = \frac{1}{2}R^a_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d$.

Recordemos que la 1-forma w^a_b y sus derivadas satisfacen las ecuaciones de estructura de Cartan:

$$\begin{aligned}d\theta^a &= -w^a_b \wedge \theta^b \\ dw^a_b &= -w^a_c \wedge w^c_b + R^a_b \\ dR_{abcd} &= R_{mbcd} w^m_a + R_{amcd} w^m_b + \dots + R_{abcd;m} \theta^m \\ dR_{abcd;m} &= R_{nbcd;m} w^n_a + \dots + R_{abcd;mn} \theta^n \\ dR_{abcd;mn} &= \dots\end{aligned}\tag{2.23}$$

donde las dos primeras igualdades son entre 2-formas y las siguientes son igualdades entre 1-formas. Recordemos que $R_{abdc} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} e^\alpha_a e^\beta_b e^\gamma_c e^\delta_d$, $R_{abdc;m} = \nabla_\nu R_{\alpha\beta\gamma\delta} e^\alpha_a e^\beta_b e^\gamma_c e^\delta_d e^\nu_m$, etc son las componentes del tensor de Riemann en un marco, esto es, son escalares.

Tomando sucesivas derivadas exteriores de (2.22) y utilizando (2.23) podemos ver que las funciones invariantes que estamos buscando son las componentes del tensor de Riemann y de sus derivadas covariantes en un marco arbitrario.

Definimos el conjunto \mathcal{I}_q como:

$$\mathcal{I}_q := \{R_{abcd}, R_{abcd;m_1}, \dots, R_{abcd;m_1\dots m_q}\} \quad (2.24)$$

Por lo tanto \mathcal{I}_p^1 describe completamente la geometría local, donde p es el menor número tal que los elementos de \mathcal{I}_{p+1} son funcionalmente dependientes de los elementos de \mathcal{I}_p . Esto es, contiene la misma información que la métrica g_{ab} .

Entonces, si dos conjuntos \mathcal{I}_{p+1} y $\bar{\mathcal{I}}_{p+1}$ son obtenidos a partir de métricas g y \bar{g} respectivamente, existe un difeomorfismo que cumple (2.13) si el sistema:

$$\begin{aligned} R_{bcd}^a(x, \xi) &= \bar{R}_{bcd}^a(\bar{x}, \bar{\xi}) \\ R_{bcd;m_1}^a(x, \xi) &= \bar{R}_{bcd;m_1}^a(\bar{x}, \bar{\xi}) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ R_{bcd;m_1\dots m_{p+1}}^a(x, \xi) &= \bar{R}_{bcd;m_1\dots m_{p+1}}^a(\bar{x}, \bar{\xi}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

es compatible como sistema de ecuaciones en (x, ξ) y $(\bar{x}, \bar{\xi})$. Notemos que la dependencia en los parámetros de grupo (ξ) entra a través del marco en el cual se calculan las componentes.

El número de elementos *funcionalmente independientes* es menor o igual a la dimensión de la $O(p, s)$ -estructura sobre M , por lo tanto $q_{max} := p + 1 \leq \frac{1}{2}m(m + 1)$.

¹A los elementos de \mathcal{I}_p usualmente se los llama *invariantes de Cartan*.

Capítulo 3

Algoritmo de Cartan-Karlhede

En esta sección nos ocuparemos de la implementación del Método de Cartan a través del Algoritmo de Cartan-Karlhede (CKA).

A diferencia de los que hicimos en la sección anterior, esto es, considerar cantidades definidas en la G-estructura, trabajaremos con cantidades definidas en la variedad base M e iremos incorporando las libertades asociadas al grupo de estructura paso a paso.

Algoritmo 1. *Algoritmo de Cartan-Karlhede*

1. *Elegir una tetraeda en \mathcal{M}*
2. $q=0$
3. *Calcular \mathcal{I}_q ¹ (2.24)*
4. *Fijar la tetraeda todo lo que sea posible eligiendo una forma canónica para los elementos de \mathcal{I}_q (Ver sección 3.2)*
5. *Calcular el grupo de isometría H_q que deja invariante a los elementos de \mathcal{I}_q*
6. *Encontrar el número t_q de elementos funcionalmente independientes² del conjunto \mathcal{I}_q*

¹Notemos que, a diferencia de (2.24), en este caso los elementos de \mathcal{I}_q *no* dependen de los parámetros del grupo G , son las componentes del tensor de curvatura y sus derivadas en un marco definido en \mathcal{M} .

²Como funciones de x

7. Si $t_q \neq t_{q-1}$ o $\dim(H_q) \neq \dim(H_{q-1})$, entonces reemplazar $q \rightarrow q + 1$ y volver a 3.

8. De otro modo, $q = p + 1$ y parar.

A cada orden $q = 0, 1, 2, \dots, (p + 1)$ existen varias propiedades que pueden determinarse para ambas geometrías. Su comparación determina condiciones necesarias para la equivalencia. El algoritmo termina si una de estas condiciones no se satisface, indicando en este caso la no equivalencia.

Sólo cuando todas las condiciones necesarias se cumplen para $q = 0, 1, 2, \dots, (p + 1)$ es necesario verificar la consistencia del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 R_{bcd}^a(x) &= \bar{R}_{bcd}^a(\bar{x}) \\
 R^a_{bcd;m_1}(x) &= \bar{R}^a_{bcd;m_1}(\bar{x}) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 R^a_{bcd;m_1\dots m_{p+1}}(x) &= \bar{R}^a_{bcd;m_1\dots m_{p+1}}(\bar{x})
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde ahora $R_{abdc}(x), \dots, R^a_{bcd;m_1\dots m_{p+1}}(x)$ son componentes en la tetrada que resulta de fijar todo lo posible la tetrada inicial utilizada en el paso $q = 0$ a través de las formas canónicas, esto es, son las componentes en la tetrada que obtenemos al finalizar el algoritmo.

La gran ventaja del Algoritmo de Cartan-Karlhede es la posibilidad de descartar equivalencia antes de tener que resolver dicho sistema, dado que no existe un procedimiento formal que nos permita decidir cuando un sistema de ecuaciones algebraicas como (3.1) tiene solución o no.

En los dos primeros pasos del algoritmo, para trabajar con cantidades definidas en la variedad base M , tratamos por separado las coordenadas (x^μ) de M y las coordenadas del grupo (ξ^A) . Esto lo logramos calculando los invariantes de Cartan respecto a un marco *fijo* determinado por la forma canónica de \mathcal{I}_q . En los pasos 3 y 4 tratamos la reducción de la dimensión de la $O(p, s)$ -estructura. La reducción algebraica puede ser determinada a partir del grupo de isotropía H_q del conjunto \mathcal{I}_q

eligiendo una forma canónica para los invariantes de Cartan.

H_q será el subgrupo del grupo de Lorentz que deja invariantes los elementos de \mathcal{I}_q . Entonces, cuando dos métricas g y \bar{g} tienen los mismos grupos de isotropía, el número de funciones independientes de los parámetros (ξ^A) es el mismo. Claramente la dimensión de H_q es menor o igual a la dimensión de H_{q-1} . Entonces, como $H_q \subset H_{q-1}$ los parámetros del grupo de rotaciones que *no* pertenecen a H_q pueden ser utilizados para fijar aún más la forma canónica de \mathcal{I}_q .

La otra condición necesaria a chequear en cada paso es que los invariantes de Cartan tengan la misma dependencia en las coordenadas (x^μ) de M . Equivalencia local implica entonces que el número de funciones independientes t_q de las coordenadas (x^μ) en el conjunto \mathcal{I}_q sea el mismo para dos métricas equivalentes. Finalmente, el procedimiento continúa hasta $q = q_{max} = p + 1$ donde los elementos de \mathcal{I}_{p+1} son funcionalmente dependientes de los elementos de \mathcal{I}_p .

Debido a la simplicidad que toman las identidades tensoriales en términos de espinores (Ver, por ejemplo, Secciones 3.3 y 3.4 de [24]) en la implementación del algoritmo de Cartan-Karlhede es recomendable utilizar la representación espinorial del espinor de curvatura y sus derivadas covariantes.

En las siguientes secciones recopilamos las herramientas necesarias para llevar a cabo la implementación del algoritmo y presentamos como ejemplo la clasificación invariante de Reissner-Nordström-de Sitter.

3.1. Componentes independientes de la n-ésima derivada del espinor de curvatura de Riemann

Como vimos en el capítulo anterior, el problema de equivalencia de variedades semi-Riemannianas se reduce a estudiar el sistema de ecuaciones (3.1).

Para describir completamente una geometría debemos entonces calcular las componentes del espinor de curvatura y de sus derivadas covariantes en un marco arbitrario. ¿Es ésta la forma más eficiente?: el objetivo es especificar un conjunto mínimo de componentes de la n-ésima derivada covariante del espinor de curvatura, de tal manera que todas las derivadas de un dado orden m puedan expresarse mediante relaciones algebraicas en términos de estos conjuntos para $n \leq m$.

Las relaciones que nos permitirán evitar calcular *todas* las componentes de las n -ésimas derivadas son las identidades de Bianchi y de Ricci:

$$\begin{aligned}\nabla^A{}_{B'}\Psi_{ABCD} &= \nabla^{A'}{}_{(B}\Phi_{CD)A'B'} \\ \nabla^{CA'}\Phi_{CDA'B'} &= -3\nabla_{DB'}\Lambda\end{aligned}\tag{3.2}$$

En esta sección solamente enunciaremos el Teorema de MacCallum y Åman, para la prueba y más detalles ver [21].

Definimos $\nabla^n\mathcal{R}$ como el conjunto de n -ésimas derivadas que contiene:

I. La n -ésima derivada totalmente simétrica del espinor de Weyl Ψ_{ABCD}

$$\nabla_{(A}{}^{(A'}\nabla_B{}^{B'}\dots\nabla_C{}^{C')}\Psi_{XYWZ)}:\tag{3.3}$$

II. La n -ésima derivada totalmente simétrica del espinor de Ricci $\Phi_{ABA'B'}$:

$$\nabla_{(A}{}^{(A'}\nabla_B{}^{B'}\dots\nabla_C{}^{C'}\Phi_{XY)}{}^{X'Y')}\tag{3.4}$$

III. La n -ésima derivada totalmente simétrica del escalar de curvatura Λ :

$$\nabla_{(A}{}^{(A'}\nabla_B{}^{B'}\dots\nabla_C{}^{C')}\Lambda)\tag{3.5}$$

IV. Para $n \geq 1$, la $(n-1)$ -ésima derivada totalmente simétrica del espinor $\Xi_{A'DEF} := \nabla^C{}_{A'}\Psi_{CDEF}$:

$$\nabla_{(A}{}^{(A'}\nabla_B{}^{B'}\dots\nabla_C{}^{C'}\Xi^{D')}\!_{EFG)}\tag{3.6}$$

V. Para $n \geq 2$ el d'Alembertiano de todas las las cantidades en $\nabla^{n-2}\mathcal{R}$:

$$\square Q \quad \text{donde } Q \in \nabla^{n-2}\mathcal{R}\tag{3.7}$$

Tenemos entonces que:

Teorema 3.1.1. *Todas las n -ésimas derivadas del tensor de Riemann pueden expresarse algebraicamente en términos de los elementos de $\nabla^r\mathcal{R}$ para $0 \leq r \leq n$ y sus*

complejos conjugados y este es un conjunto mínimo de tales derivadas.

3.2. Formas Canónicas

El primer paso en el algoritmo de Cartan-Karlhede involucra el cálculo y reducción de los espinores de Weyl y Ricci a sus respectivas formas canónicas. Estos son procedimientos conocidos y extensamente estudiados: la clasificación de Petrov del espinor de Weyl y la clasificación de Segre del espinor de Ricci (Ver, por ejemplo, Capítulo 8 de [25]). En espaciotiempos algebraicamente especiales cada tipo de Petrov y Segre es invariante sólo ante determinados subgrupos de $SL(2, \mathbb{C})$. Por lo tanto, para los espinores que aparecen en el segundo y tercer orden del algoritmo, debemos especificar la forma canónica utilizando sólo elementos dentro de los correspondientes subgrupos.

Por ejemplo, supongamos que buscamos la clasificación invariante de una solución de vacío de las ecuaciones de campo de Einstein con tipo de Petrov D . Entonces, el espinor de Ricci es idénticamente nulo y, en la correspondiente forma canónica, todas las componentes del espinor de Weyl son nulas excepto $\Psi_2 \neq 0$. El subgrupo de isotropía asociado a $\mathcal{I}_0 = \{\Psi_2\}$ es:

$$H_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{array} \right) \mid \lambda, \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.8)$$

Notemos que en este paso la libertad asociada a rotaciones nulas ya se encuentra fijada por la forma canónica del espinor de Weyl, esto es, una rotación provocaría que otras componentes además de Ψ_2 fueran no nulas.

El siguiente paso consiste en el cálculo de la derivada covariante (totalmente simetrizada) del espinor de Weyl. En esta instancia podemos encontrarnos ante 3 casos distintos:

- $H_1 = H_0$

En este caso, dependiendo del número de elementos funcionalmente independientes, o debemos pasar a $q = 2$ o el algoritmo finaliza en este paso. Si $t_1 = t_0$ entonces el algoritmo finaliza en $q = 1$ y hemos fijado la tetraada todo lo posible. Si $t_1 \neq t_0$ debemos calcular $q = 2$.

- $H_1 \subset H_0$, $\dim(H_1) = 1$

Supongamos que $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Fijamos el valor del parámetro θ definido en (3.8) pidiendo que ciertas componentes de \mathcal{I}_1 sean reales y de esta manera reducimos los grados de libertad de la tetraada, quedando solamente los *boosts* por ser considerados. En el caso donde H_1 corresponde a las transformaciones de espín, fijamos λ pidiendo que ciertos elementos de \mathcal{I}_1 tengan igual magnitud.

- $H_1 = \{e\}$

En este caso podemos determinar totalmente la tetraada fijando λ y θ como describimos en los casos anteriores.

Una vez determinados los tipos de Petrov y Segre debemos establecer formas canónicas para los elementos de \mathcal{I}_q ($q > 0$) de manera de determinar si puede fijarse aún más la tetraada.

Por lo tanto debemos establecer un método para obtener, a partir de un espinor simétrico arbitrario de valencia (m, n) , su grupo de isotropía y su forma canónica.

3.2.1. Formas canónicas para espinores simétricos

El procedimiento general comienza determinando las componentes del espinor que permanecen invariantes frente a un subgrupo dado. Una vez conocidas, se procede a ver las componentes que cambian y sobre una de ellas se pide una condición algebraica. La tetraada es transformada de tal manera que esa condición se satisfaga, reduciendo el número de parámetros de grupo libres. En las siguientes secciones consideramos uno a uno los distintos subgrupos de $SL(2, \mathbb{C})$, mostramos como determinar invariancia y dado un espinor no invariante como determinar una forma canónica para el espinor utilizando el subgrupo considerado. Para un análisis mas detallado ver [27–29].

Intercambio $o^A \leftrightarrow \iota^A$

Dado un espinor ζ de valencia (m, n) esta transformación (discreta) tiene el efecto de intercambiar las componentes $\zeta_{ab'}$ con $\zeta_{(m-a)(n-b)'}$. El test de invariancia consiste

en comprobar todos los pares, empezando por $[(0, 0); (m, n)]$. Una vez encontrado un par donde una de las componentes es cero y la otra distinta de cero, se elige la configuración $\{o^A, \iota^A\}$ para la cual la componente con índice más grande es distinta de cero.

Por ejemplo, supongamos que tenemos un espinor $\Psi_{ab'}$ de valencia $(5, 1)$, como es el caso de la derivada covariante simetrizada del espinor de Weyl. Empezamos revisando el par $[\zeta_{0,0'}; \zeta_{5,1'}]$, luego $[\zeta_{1,0'}; \zeta_{4,1'}]$, etc., hasta que el test de invariancia falla o todos los elementos son invariantes. Si, por ejemplo, la componente $\zeta_{2,0'}$ es no nula mientras que $\zeta_{3,1'} = 0$ realizamos el intercambio $o^A \leftrightarrow \iota^A$ de tal manera que en la nueva base $\tilde{\zeta}_{2,0'} = 0$ y $\tilde{\zeta}_{3,1'} \neq 0$.

En el caso donde ambas componentes son no nulas esta forma de especificar una forma canónica se torna ambigua, por lo cual las componentes se dejan como están, teniendo en cuenta para los siguientes pasos del algoritmo que todavía no hemos fijado esta libertad.

Boosts

Los boosts son un subgrupo monoparamétrico de $SL(2, \mathbb{C})$ definido por:

$$\begin{pmatrix} o^A \\ \iota^A \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o^A \\ \iota^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda o^A \\ \lambda^{-1} \iota^A \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Las componentes de un espinor totalmente simétrico de valencia (m, n) transforman bajo (3.9) como:

$$\begin{aligned} \zeta_{ab'} &= \zeta_{A_1 \dots A_m B'_1 \dots B'_n} \iota^{A_1} \dots \iota^{A_a} o^{A_{a+1}} \dots o^{A_m} \bar{\iota}^{B'_1} \dots \bar{\iota}^{B'_b} \bar{o}^{B'_{b+1}} \dots \bar{o}^{B'_n} \\ &\mapsto \zeta_{A_1 \dots A_m B'_1 \dots B'_n} (\lambda^{-a} \iota^{A_1} \dots \iota^{A_a}) (\lambda^{(m-a)} o^{A_{a+1}} \dots o^{A_m}) (\lambda^{-b} \bar{\iota}^{B'_1} \dots \bar{\iota}^{B'_b}) (\lambda^{(n-b)} \bar{o}^{B'_{b+1}} \dots \bar{o}^{B'_n}) \\ &= \lambda^{-[a-(m-a)+b-(n-b)]} \zeta_{ab'} \end{aligned} \quad (3.10)$$

A partir de (3.10) vemos que las componentes invariantes están determinadas por:

$$a - (m - a) + b + (n - b) = 0 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}(m + n) \quad (3.11)$$

De (3.11) vemos que si $m + n$ es impar, todas las componentes del espinor serán transformadas bajo la acción de un boost, esto es, no hay ninguna componente invariante.

La forma canónica asociada a esta transformación la obtendremos inspeccionando los pares de componentes $[\zeta_{ab'}; \zeta_{(m-a)(n-b)'}]$. Estas componentes se encuentran en diagonales paralelas a la *diagonal invariante* definida por (3.11) (ver Fig 3.1). A medida que nos alejamos de la diagonal invariante, el valor del exponente de λ crece, hasta alcanzar su valor máximo $\lambda^{\pm(m+n)}$ en el par $[(m, n); (0, 0)]$.

Para fijar el valor de λ empezaremos considerando las componentes situadas en las dos diagonales más cercanas a la diagonal invariante, ya que sobre estas diagonales $\lambda^{\pm 2}$, el menor valor distinto de cero (esto es, el menor valor que asume el exponente en una componente no invariante). De haber empezado por el par $[(m, n); (0, 0)]$ la solución para λ involucraría el cálculo de un radical de orden $\pm(m + n)$.

La forma canónica se fija eligiendo un par $[\zeta_{ab'}; \zeta_{(m-a)(n-b)'}]$: si ambas componentes son no nulas se pide que tengan igual magnitud o, si una de las componentes es nula y la otra no se pide que la componente no nula tenga magnitud 1. Comenzamos por el par $[(\frac{1}{2}(m+n) - 1, 0); (\frac{1}{2}(m+n), 1)]$, luego $[(\frac{1}{2}(m+n) - 2, 1); (\frac{1}{2}(m+n) + 1, 0)]$, etc., hasta encontrar una componente no nula. Si todas las componentes son cero, pasamos al siguiente par de diagonales y así sucesivamente hasta encontrar una componente no nula.

Si la magnitud del par de componentes es igual entonces el espinor ya se encuentra en su forma canónica y $\lambda = 1$. Caso contrario, podemos resolver para λ :

$$\lambda^{4(a+b)-2(m+n)} = \frac{|\zeta_{ab'}|}{|\zeta_{(m-a)(n-b)'}} \quad (3.12)$$

Consideremos nuevamente como ejemplo el espinor $\Psi_{ab'}$ de valencia (5, 1). Comenzamos inspeccionando el par $[(2, 0); (3, 1)]$, luego $[(1, 1); (4, 0)]$, etc. Supongamos que $[\zeta_{2,0'}; \zeta_{3,1'}]$ son ambas no nulas. Fijamos el parámetro λ pidiendo que ambas componentes tengan igual magnitud:

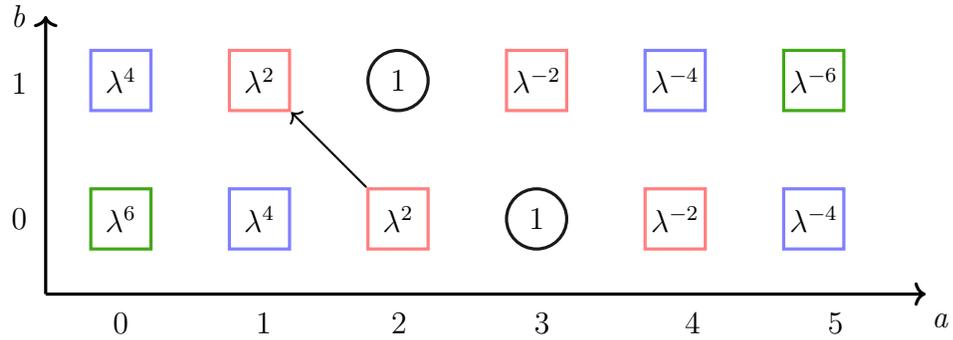


Figura 3.1: Componentes de un espínor simétrico de valencia $(5, 1)$. Los círculos de color negro corresponden a la diagonal invariante. En rojo las diagonales en las cuales la magnitud del exponente es 2. El procedimiento comienza en el par $[\zeta_{20}; \zeta_{31}]$ y su par correspondiente y, de ser ambas componentes nulas, continúa siguiendo el sentido de la flecha. Si todas las componentes sobre las dos diagonales rojas son nulas, se pasa a las componentes sobre las diagonales azules, donde la magnitud del exponente es 4.

$$\lambda^4 = \frac{|\zeta_{31}|}{|\zeta_{20}|} \quad (3.13)$$

Transformaciones de espín

Las transformaciones de espín son un subgrupo monoparamétrico de $SL(2, \mathbb{C})$ definido por:

$$\begin{pmatrix} o^A \\ \iota^A \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o^A \\ \iota^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} o^A \\ e^{-i\theta} \iota^A \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Mediante un cálculo similar a (3.10) podemos ver que las componentes de un espínor de valencia (m, n) adquieren una fase:

$$\zeta_{ab'} \mapsto e^{-i(a-(m-a)-b+(n-b))\theta} \zeta_{ab'} \quad (3.15)$$

Las componentes invariantes serán aquellas tales que:

$$a - (m - a) - b + (n - b) = 0 \Rightarrow a - b = \frac{1}{2}(m - n) \quad (3.16)$$

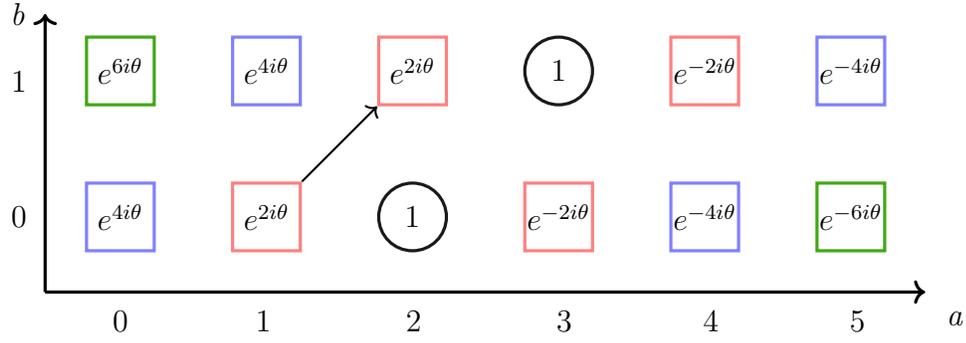


Figura 3.2: Componentes de un espensor simétrico de valencia (5, 1). Los círculos de color negro corresponden a la diagonal invariante. En rojo las diagonales en las cuales las componentes adquieren una fase $e^{2i\theta}$. El procedimiento comienza en el par $[\zeta_{10'}; \zeta_{41'}]$, de ser ambas componentes nulas continúa siguiendo el sentido de la flecha. Si todas las componentes sobre las dos diagonales rojas son nulas, se pasa a las componentes sobre las diagonales azules, donde las componentes adquieren una fase $e^{4i\theta}$.

La libertad de espín puede fijarse especificando la fase de alguna componente no nula. Para ser consistentes con el caso anterior, nuevamente consideramos pares de componentes $[\zeta_{ab'}; \zeta_{(m-a)(n-b)'}]$ empezando por los pares en las diagonales más cercanas a la diagonal invariante. Una vez encontrado un par con al menos una componente no nula, si ambas componentes son distintas de cero requerimos que ambas tengan la misma fase. Si una de las componentes es cero requerimos que la componente no nula sea real.

Rotaciones nulas

Consideremos una rotación nula alrededor de o^A :

$$\begin{pmatrix} o^A \\ \iota^A \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o^A \\ \iota^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o^A \\ \iota^A + \alpha o^A \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Antes de presentar la transformación de una componente arbitraria $\zeta_{ab'}$ veamos un ejemplo: Sea Ψ un espensor de valencia (5, 1). La componente $\Psi_{30'}$ está dada por:

$$\Psi_{30'} = \Psi_{ABCDEA'} \iota^A \iota^B \iota^C o^D o^E \bar{o}^{A'} \quad (3.18)$$

Bajo (3.17) esta componente transforma como:

$$\begin{aligned}\Psi_{30'} &\mapsto \Psi_{ABCDEA'}(\iota^A + \alpha o^A)(\iota^B + \alpha o^B)(\iota^C + \alpha o^C)o^D o^E \bar{o}^{A'} \\ &= \Psi_{30'} + 3\alpha\Psi_{20'} + 3\alpha^2\Psi_{10'} + \alpha^3\Psi_{00'}\end{aligned}\quad (3.19)$$

Si ζ es un espinor totalmente simétrico de valencia (m, n) entonces:

$$\zeta_{ab'} = \sum_{r=0}^a \sum_{s=0}^b \binom{a}{r} \binom{b}{s} \alpha^r \bar{\alpha}^s \zeta_{(a-r)(b-s)'} \quad (3.20)$$

Para una rotación alrededor de ι^A se encuentra una fórmula análoga reemplazando $a \mapsto (m - a)$ y $b \mapsto (n - b)$.

Antes de proponer una forma canónica debemos saber que componentes permanecen invariantes bajo (3.17). Consideremos primero la componente $\zeta_{mn'}$:

$$\zeta_{mn'} \mapsto \zeta_{mn'} + \alpha \zeta_{(m-1)n'} + \bar{\alpha} \zeta_{m(n-1)'} + \alpha^2 \zeta_{(m-2)n'} + \alpha \bar{\alpha} \zeta_{(m-1)(n-1)'} + \bar{\alpha}^2 \zeta_{m(n-2)'} + \dots \quad (3.21)$$

Como (3.21) es un polinomio en todas las componentes de ζ es claro que sólo será invariante si todas las componentes de ζ distintas a $\zeta_{mn'}$ son nulas. En este caso el espinor ζ también será invariante.

Existen otras situaciones en las cuales el espinor será invariante frente a un subgrupo monoparamétrico de las rotaciones nulas. Por ejemplo, si $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos ver que un espinor ζ de valencia (m, n) será invariante si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\zeta_{(m-1)(n-1)'} &= -\frac{n-1}{m} \zeta_{m(n-2)'} = -\frac{m-1}{n} \zeta_{(m-2)n'} \\ m\zeta_{(m-1)n'} &= -n\zeta_{m(n-1)'} \\ \zeta_{ab'} &= 0 \quad \text{si } a \neq m, (m-1), (m-2) \quad b \neq n, (n-1), (n-2)\end{aligned}\quad (3.22)$$

Condiciones similares pueden deducirse para cualquier otro subgrupo monoparamétrico de (3.17).

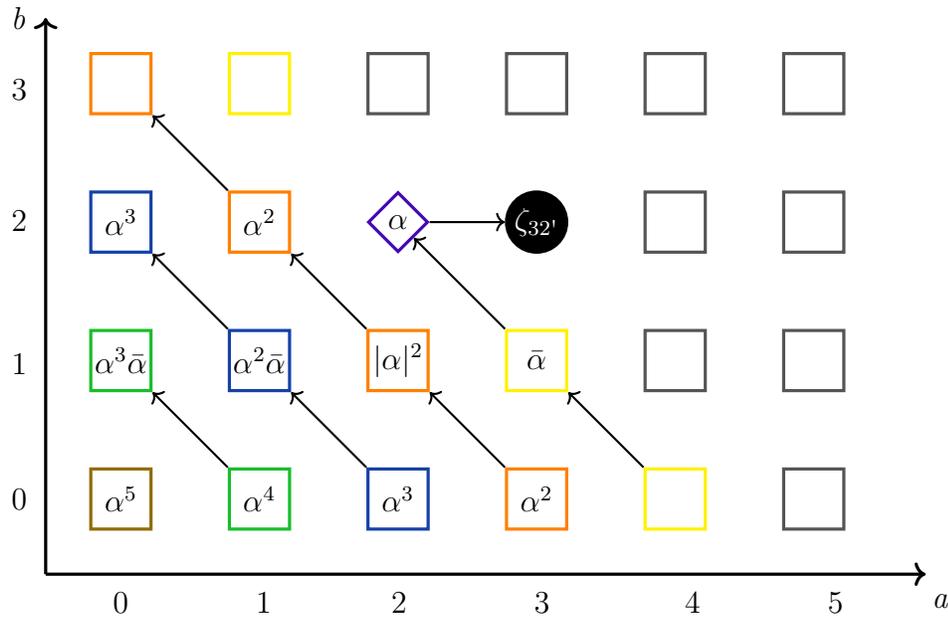


Figura 3.3: Componentes de un espinor simétrico de valencia $(5, 3)$. Para encontrar la primera componente no invariante y establecer la forma canónica empezamos por la componente $\zeta_{00'}$ y seguimos a lo largo de las diagonales. El diamante corresponde a la primera componente no nula: $\zeta_{22'}$. La forma canónica la fijamos pidiendo que $\zeta_{32'} = 0$ (Círculo negro). Los valores dentro de los rectángulos muestran como depende la transformación de $\zeta_{32'}$ con el parámetro de la rotación α . La transformación de $\zeta_{32'}$ frente a una rotación nula alrededor de ι^A depende solamente de las componentes “abajo y a la izquierda”.

Una vez encontradas las componentes no invariantes, debemos imponer alguna condición sobre ellas para obtener la forma canónica.

En el caso de rotaciones nulas con parámetro $\alpha \in \mathbb{C}$ una posibilidad consiste en usar una rotación nula para obtener $\zeta_{mn'} = 0$, y en el caso unidimensional, eliminar la parte real o imaginaria de $\zeta_{mn'}$. Notemos que en el caso que el espinor no se encuentre en su forma canónica deberemos resolver para α :

$$\zeta_{mn'} + \alpha \zeta_{(m-1)n'} + \bar{\alpha} \zeta_{m(n-1)'} + \alpha^2 \zeta_{(m-2)n'} + \alpha\bar{\alpha} \zeta_{(m-1)(n-1)'} + \bar{\alpha}^2 \zeta_{m(n-2)'} + \dots = 0 \tag{3.23}$$

lo que a menudo resulta imposible. Por lo tanto en estos casos es razonable considerar

una forma canónica alternativa.

Para esto, notemos que cada término en la transformación de la componente ζ_{ab} corresponde a componentes “abajo y a la izquierda“. Empezamos por la componente $(0;0)$ y seguimos a lo largo de diagonales como en la Figura 3.3 hasta encontrar una componente no nula. La diagonal en la que se encuentra esta componente es invariante, ya que todas las componentes “abajo y a la izquierda“ son nulas. La siguiente diagonal es la primera no invariante: a partir de (3.20) vemos que la transformación de las componentes de esta diagonal dependerá linealmente del parámetro α . Luego elegimos una componente en esta diagonal (usualmente la componente en la misma fila que la primera componente no nula) y realizamos una rotación para llevar su valor a cero. Nuevamente, en el caso que dicha componente sea invariante frente a rotaciones reales o imaginarias, utilizamos una rotación para eliminar la parte imaginaria o real respectivamente.

3.3. Ejemplo: Reissner-Nordström-de Sitter

El elemento de línea:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2 \quad (3.24)$$

es solución de las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica λ correspondiente a un cuerpo con simetría esférica de masa M , no rotante, cargado con carga Q y donde $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda r^2}{3} + \frac{Q^2}{r^2}$.

Una tetraada nula está dada por:

$$\begin{aligned} l_a &= f(r)(dt)_a + (dr)_a \\ n_a &= \frac{1}{2}[(dt)_a - f(r)^{-1}(dr)_a] \\ m_a &= -\frac{r}{\sqrt{2}}[(d\theta)_a + i \sin(\theta)(d\phi)_a] \\ \bar{m}_a &= -\frac{r}{\sqrt{2}}[(d\theta)_a - i \sin(\theta)(d\phi)_a] \end{aligned} \quad (3.25)$$

q=0

Las componentes no nulas de \mathcal{I}_0 son:

$$\begin{aligned}\Psi_2 &= -\frac{Mr - Q^2}{r^4} \\ \Phi_{11'} &= \frac{Q^2}{2r^4} \\ \Lambda &= -4\lambda\end{aligned}\tag{3.26}$$

Tanto el espinor de Weyl como el espinor de Ricci se encuentran en sus correspondientes formas canónicas: el espaciotiempo es Petrov tipo D y el espinor de Ricci es *no nulo de tipo electromagnético* en la clasificación de Segre. (Ver Tablas 1 y 3 de [27]).

Ambos espinores son invariantes frente a transformaciones de espín, boosts e intercambio $o^A \leftrightarrow \iota^A$.

Para el primer paso del algoritmo $q = 0$ tenemos que:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{I}_0 &= \{\Psi_2, \Phi_{11'}, \Lambda\} \\ H_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \lambda, \theta \in \mathbb{R} \right\} \\ t_0 &= 1\end{aligned}\tag{3.27}$$

Las rotaciones nulas ya se encuentran fijadas por las formas canónicas. Para saber si podemos fijar aún más la tetrad, debemos investigar el grupo de isotropía asociado a \mathcal{I}_q con $q \geq 1$.

q=1

En este paso debemos calcular $(D\Psi), (D\Phi), \Xi$. Las únicas componentes no nulas son:

$$\begin{aligned}
(D\Psi)_{20'} &= \frac{3}{5r^5} f(r)(6e^2 - 5Mr) \\
(D\Psi)_{31'} &= -\frac{3}{10} \frac{6e^2 - 5Mr}{r^5} \\
(D\Phi)_{11'} &= \frac{4}{3} \frac{e^2}{r^5} f(r) \\
(D\Phi)_{22'} &= -\frac{2}{3} \frac{e^2}{r^5} \\
\Xi_{10'} &= \frac{e^2}{r^5} f(r) \\
\Xi_{21'} &= \frac{e^2}{2r^5}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Los tres espinores son invariantes frente a transformaciones de espín, por lo tanto podemos fijar aún más la tetraeda utilizando un boost para llevar a (3.28) a su forma canónica. Notemos que no podemos llevar a $(D\Psi)$ y $(D\Phi)$ simultáneamente a sus formas canónicas por lo cual debemos elegir uno de ellos.

Las componentes involucradas transforman como:

$$\begin{aligned}
(D\Psi)_{20'} &\mapsto \lambda^2 (D\Psi)_{20'} \\
(D\Psi)_{31'} &\mapsto \lambda^{-2} (D\Psi)_{31'}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Entonces, realizamos un boost con parámetro λ dado por:

$$\lambda^4 = \frac{|(D\Psi)_{31'}|}{|(D\Psi)_{20'}|} = 2f(r) \tag{3.30}$$

En la nueva tetraeda obtenemos:

$$\begin{aligned}
 (D\Psi)_{20'} &= (D\Psi)_{31'} = \frac{3\sqrt{2}}{10r^5}(6Q^2 - 5Mr)\sqrt{f(r)} \\
 (D\Phi)_{11'} &= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}e^2}{r^5}[f(r)]^{3/2} \\
 (D\Phi)_{22'} &= -\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{e^2}{r^5}[f(r)]^{-1/2} \\
 \Xi_{10'} &= \sqrt{2}\frac{e^2}{r^5}[f(r)]^{3/2} \\
 \Xi_{21'} &= \frac{e^2}{2\sqrt{2}}\frac{[f(r)]^{-1/2}}{r^5}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ya fijada la libertad asociada a los boosts mediante la forma canónica (3.31) sólo nos queda considerar las transformaciones de espín. Para esto debemos estudiar el grupo de isotropía del siguiente paso, $q = 2$.

En resumen, para el segundo paso $q = 1$ del algoritmo de Cartan-Karlhede tenemos que:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \mathcal{I}_1 &= \mathcal{I}_0 \cup \{(D\Psi)_{20'}, (D\Psi)_{31'}, (D\Phi)_{11'}, (D\Phi)_{22'}, \Xi_{10'}, \Xi_{21'}\} \\
 H_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \\
 t_1 &= 1
 \end{aligned}
 } \tag{3.32}$$

q=2

Las componentes no nulas de $\nabla^2\mathcal{R}$ son: $(D^2\Psi)_{20'}, (D^2\Psi)_{31'}, (D^2\Psi)_{42'}, (D^2\Phi)_{11'}, (D\Phi)_{22'}, (D\Phi)_{33'}, (\square\Psi)_{20'}, (\square\Phi)_{11'}, (D\Xi)_{10'}, (D\Xi)_{32'}$.

Podemos ver que $H_1 = H_2$, $t_1 = t_2$ y por lo tanto el algoritmo termina en este paso y la geometría está totalmente determinada por los invariantes en \mathcal{I}_1 .

Capítulo 4

Invariantes de Cartan como localizadores de horizontes

¿Para qué podemos utilizar los invariantes de Cartan (e invariantes en general) en el contexto de Relatividad General? El uso de invariantes en Relatividad General es extenso: ya hemos visto como es posible clasificar geometrías a partir de los invariantes de Cartan obtenidos a partir del algoritmo de Cartan-Karlhede.

Por ejemplo, Karlhede y MacCallum [15] mostraron que es posible, mediante el método de Cartan-Karlhede, determinar el grupo de isometría asociado a un espaciotiempo.

Otra de las aplicaciones importantes de los invariantes de Cartan consiste en la generación de nuevas soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein: en [30] se utilizan los invariantes de Cartan para encontrar todos los espaciotiempos con invariantes polinomiales nulos (*VSI spacetimes*).

Otra manera de encontrar nuevas soluciones es a través de límites de familias de espaciotiempos: si tenemos una familia de soluciones dependientes de un parámetro λ podemos estudiar el límite $\lambda \rightarrow 0$ [11, 23]. Los invariantes de curvatura permiten calcular este límite en una manera independiente de coordenadas.

En este capítulo, estudiaremos el uso de los invariantes de curvatura como localizadores de horizontes de agujeros negros

En [18] Karlhede *et al* notaron que el invariante polinomial $\nabla_a R_{bcde} \nabla^a R^{bcde}$ se anula en el horizonte de eventos de Schwarzschild.

Recientemente, Abdelqader y Lake [1] introducen dos invariantes adimensionales en Kerr, construidos a partir de invariantes polinomiales, que se anulan sobre el horizonte de eventos y sobre la ergoesfera.

En este capítulo escribiremos la derivada totalmente simetrizada del espinor del Weyl en términos de los coeficientes de espín en el formalismo de Newman-Penrose y explicaremos por qué ciertas componentes se anulan sobre el horizonte de eventos, en el caso que el espaciotiempo sea estacionario, o sobre *superficies marginalmente atrapadas*, en el caso de espaciotiempos dinámicos.

4.1. Derivada covariante del espinor de Weyl

Sea $\{o^A, \iota^A\}$ una base espinorial no normalizada $o^A \iota_A = \chi$ asociada a la tetrada espaciotemporal a través de las relaciones:

$$l^a \mapsto o^A \bar{o}^{A'} \quad m^a \mapsto o^A \bar{\iota}^{A'} \quad \bar{m}^a \mapsto \iota^A \bar{o}^{A'} \quad n^a \mapsto \iota^A \bar{\iota}^{A'} \quad (4.1)$$

Podemos ver a partir de (4.1) que $l^a n_a = |\chi|^2$ y la signatura de \mathcal{M} es $(+, -, -, -)$. Las derivadas a lo largo de los vectores de la tetrada están definidos como:

$$\begin{aligned} D &:= \nabla_{00'} = o^A \bar{o}^{A'} \nabla_{AA'} = l^a \nabla_a \\ \delta &:= \nabla_{01'} = o^A \bar{\iota}^{A'} \nabla_{AA'} = m^a \nabla_a \\ \delta' &:= \nabla_{10'} = \iota^A \bar{o}^{A'} \nabla_{AA'} = \bar{m}^a \nabla_a \\ D' = \Delta &:= \nabla_{11'} = \iota^A \bar{\iota}^{A'} \nabla_{AA'} = n^a \nabla_a \end{aligned} \quad (4.2)$$

El significado de las cantidades primadas en el lado izquierdo de (4.2) es que, bajo la transformación dada por:

$$o^A \mapsto i\iota^A, \quad \iota^A \mapsto io^A, \quad \bar{o}^{A'} \mapsto -i\bar{\iota}^{A'}, \quad \bar{\iota}^{A'} \mapsto -i\bar{o}^{A'} \quad (4.3)$$

las cantidades primadas se intercambian con las no primadas.

Los elementos de la tetrada, bajo la acción de (4.3), transforman como:

$$(l^a)' = n^a, \quad (m^a)' = \bar{m}^a, \quad (\bar{m}^a)' = m^a, \quad (n^a)' = l^a \quad (4.4)$$

mientras que las componentes del espinor de Weyl y del espinor de Ricci:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\leftrightarrow \Psi_4, & \Psi_1 &\leftrightarrow \Psi_3, & \Psi_2 &\leftrightarrow \Psi_2 \\ \Phi_{00'} &\leftrightarrow \Phi_{22'}, & \Phi_{11'} &\leftrightarrow \Phi_{11'}, & \Phi_{01'} &\leftrightarrow \Phi_{21'}, & \Phi_{20'} &\leftrightarrow \Phi_{02'}, & \Phi_{10'} &\leftrightarrow \Phi_{12'} \end{aligned} \quad (4.5)$$

La derivada covariante (totalmente simetrizada) del espinor de Weyl está dada por:

$$(D\Psi)_{ACBDE}{}^{A'} := \nabla_{(A}{}^{A'}\Psi_{BCDE)} \quad (4.6)$$

En el caso de vacío, a partir de las identidades de Bianchi (3.2), podemos ver que la derivada covariante del espinor de Weyl es inmediatamente simétrica, esto es, el simetrizador en (4.6) es redundante. En la presencia de fuentes esto deja de ser cierto.

Teniendo en cuenta que el espinor de Weyl es totalmente simétrico podemos escribir:

$$(D\Psi)_{ABCDEA'} = \frac{1}{5}(\Psi_{BCDE;AA'} + \Psi_{ACDE;BA'} + \Psi_{BADE;CA'} + \Psi_{BCAE;DA'} + \Psi_{BCDA;EA'}) \quad (4.7)$$

Calculemos, a modo de ejemplo, la componente $(D\Psi)_{40'}$:

$$\begin{aligned} (D\Psi)_{40'} &= \frac{1}{5}(\Psi_{BCDE;AA'} + \Psi_{ACDE;BA'} + \Psi_{BADE;CA'} + \Psi_{BCAE;DA'} \\ &\quad + \Psi_{BCDA;EA'})\iota^A \iota^B \iota^C \iota^D \bar{o}^E \bar{o}^{A'} \\ &= \frac{1}{5}(4\Psi_{1110;10'} + \Psi_{1111;00'}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Recordando que la derivada covariante $\nabla_{AA'}$ satisface la regla de Leibniz podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{1110;10'} &= \nabla_{EF'}(\Psi_{ABCD}\iota^A\iota^B\iota^C o^D)\iota^E\bar{o}^{F'} - \Psi_{ABCD}\nabla_{EF'}(\iota^A\iota^B\iota^C o^D)\iota^E o^{\bar{o}^{F'}} \\
 &= \delta'\Psi_3 - 3\Psi_{ABCD}(\delta'\iota^A)\iota^B\iota^C o^D - \Psi_{ABCD}\iota^A\iota^B\iota^C(\delta' o^D) \\
 &= \delta'\Psi_3 + 3\sigma'\Psi_2 - (\alpha + \beta')\Psi_3 - 2\beta'\Psi_3 + \rho\Psi_4
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Del mismo modo, podemos ver que:

$$\Psi_{1111;00'} = D\Psi_4 + 4\tau'\Psi_3 - 4\gamma'\Psi_4 \tag{4.10}$$

Los coeficientes de espín están definidos por las relaciones:

$$\begin{aligned}
 \chi\kappa &= o^A D o_A & \chi\rho &= o^A \delta' o_A & \chi\sigma &= o^A \delta o_A & \chi\tau &= o^A \Delta o_A \\
 \chi\epsilon &= \iota^A D o_A & \chi\alpha &= \iota^A \delta' o_A & \chi\beta &= \iota^A \delta o_A & \chi\gamma &= \iota^A \Delta o_A \\
 \chi\gamma' &= -o^A D \iota_A & \chi\beta' &= -o^A \delta' \iota_A & \chi\alpha' &= -o^A \delta \iota_A & \chi\epsilon' &= -o^A \Delta \iota_A \\
 \chi\tau' &= -\iota^A D \iota_A & \chi\sigma' &= -\iota^A \delta' \iota_A & \chi\rho' &= -\iota^A \delta \iota_A & \chi\kappa' &= -\iota^A \Delta \iota_A
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

En el caso que la base espinorial se encuentre normalizada, esto es $\chi = 1$, tenemos que $\alpha' = -\beta$, $\beta' = -\alpha$, $\epsilon = -\gamma'$, $\epsilon' = -\gamma$. Es también usual encontrar la notación $\rho' = -\mu$, $\kappa' = -\nu$, $\sigma' = -\lambda$, $\tau' = -\pi$.

Por lo tanto:

$$(D\Psi)_{40'} = \frac{1}{5} [4(\delta'\Psi_3 + \rho\Psi_3 - (\alpha + \beta')\Psi_3 - 2\beta'\Psi_3 + 3\sigma'\Psi_2) + D\Psi_4 + 4\tau'\Psi_3 - 4\gamma'\Psi_4] \tag{4.12}$$

De manera similar podemos calcular las componentes restantes, obteniendo:

$$\begin{aligned}
 (D\Psi)_{00'} &= D\Psi_0 - 4\epsilon\Psi_0 + 4\kappa\Psi_1 \\
 (D\Psi)_{01'} &= \delta\Psi_0 - 4\beta\Psi_0 + 4\sigma\Psi_1 \\
 (D\Psi)_{10'} &= \frac{1}{5} [\delta'\Psi_0 - 4\alpha\Psi_0 + 4\rho\Psi_1 + 4(D\Psi_1 + \tau'\Psi_0 - (\gamma' + \epsilon)\Psi_1 + 3\kappa\Psi_2)] \\
 (D\Psi)_{11'} &= \frac{1}{5} [\Delta\Psi_0 - 4\gamma\Psi_0 + 4\tau\Psi_1 + 4(\delta\Psi_1 + \rho'\Psi_0 - (\alpha' + \beta)\Psi_1 - 2\beta\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2)] \\
 (D\Psi)_{20'} &= \frac{2}{5} [\delta'\Psi_1 - \beta'\Psi_1 + \sigma'\Psi_0 - 3\alpha\Psi_1 + 3\rho\Psi_2] + \frac{3}{5} [D\Psi_2 + 2\tau'\Psi_1 - 2(\gamma' + \epsilon)\Psi_2 + 2\kappa\Psi_3] \\
 (D\Psi)_{21'} &= \frac{2}{5} [\Delta\Psi_1 - \epsilon\Psi_1 + \kappa'\Psi_0 - 3\gamma\Psi_1 + 3\tau\Psi_2] + \frac{3}{5} [\delta\Psi_2 - 2(\beta + \alpha')\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3 + 2\rho'\Psi_1]
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

junto con sus versiones primadas.

Para un espaciotiempo con tipo de Petrov D tenemos que:

$$\begin{aligned}
 (D\Psi)_{00'} &= (D\Psi)_{01'} = 0 \\
 (D\Psi)_{10'} &= \frac{12}{5}\kappa\Psi_2 \\
 (D\Psi)_{11'} &= \frac{12}{5}\sigma\Psi_2 \\
 (D\Psi)_{20'} &= \frac{6}{5}\rho\Psi_2 + \frac{3}{5}D\Psi_2 \\
 (D\Psi)_{21'} &= \frac{6}{5}\tau\Psi_2 + \frac{3}{5}\delta\Psi_2
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

junto a sus correspondientes versiones primadas.

4.2. Identidades de Bianchi

Ahora, queremos expresar el lado derecho de las ecuaciones (4.13) íntegramente en términos de los coeficientes de espín (4.11) para encontrar una relación entre las componentes de $(D\Psi)$ y las expansiones (A.3). Esto lo lograremos a través de las identidades de Bianchi (ver Apéndice E de [10] o Sección 4.12 de [24]). El resultado dependerá de la estructura algebraica del espinor de Weyl y del espinor de Ricci.

Los tres casos que consideraremos son vacío, *no nulo tipo electromagnético* y *pure radiation* con tipo de Petrov D y donde siempre podemos considerar el primero como caso especial de alguno de los siguientes. Hemos elegido estos tres casos por ser representativos de distintas situaciones importantes en Relatividad General: vacío y *no nulo tipo electromagnético* con tipo de Petrov D contienen a la familia de soluciones de Kerr y Kerr-Newman, respectivamente, mientras que las soluciones, no estacionarias, de Vaidya son *pure radiation* con tipo de Petrov D.

Los otros casos donde el espinor de Ricci tiene distinto tipo algebraico pueden tratarse de manera similar.

4.2.1. Vacío - Petrov tipo D

En este caso el espinor de Ricci es idénticamente nulo y la única componente no nula del espinor de Weyl es Ψ_2 .

Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} 3\kappa\Psi_2 = 0 = 3\sigma\Psi_2 \\ D\Psi_2 = 3\rho\Psi_2 \\ \delta\Psi_2 = 3\tau\Psi_2 \end{aligned} \tag{4.15}$$

junto con sus correspondientes versiones primadas.

De (4.15) se obtiene $\kappa = \kappa' = 0$. Esto no es otra cosa que el teorema de Golberg-Sachs. También puede verse que $\sigma = \sigma' = 0$, que nos dice que el shear de ambas congruencias nulas es cero. A partir de (4.15) y (4.14) podemos ver que:

$$\begin{aligned} (D\Psi)_{20'} = 3\rho\Psi_2 \\ (D\Psi)_{21'} = 3\tau\Psi_2 \\ (D\Psi)_{31'} = -3\mu\Psi_2 \\ (D\Psi)_{30'} = -3\pi\Psi_2 \end{aligned} \tag{4.16}$$

4.2.2. No nulo tipo electromagnético - Petrov tipo D

En este caso la única componente no nula del espinor de Ricci está dada por Φ_{11} . Entonces las identidades de Bianchi se reducen a:

$$\begin{aligned}
 \kappa\zeta_- &= 0 \\
 \sigma\zeta_+ &= 0 \\
 D\Psi_2 &= \rho\zeta_+ - 2D\Lambda \\
 \delta\Psi_2 &= \tau\zeta_- - 2\delta\Lambda \\
 D\Phi_{11'} &= 2(\rho + \bar{\rho})\Phi_{11'} - 3D\Lambda \\
 \delta\Phi_{11'} &= -2(\bar{\pi} - \tau)\Phi_{11'} + 3\delta\Lambda
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

junto a sus respectivas versiones primadas y donde $\zeta_{\pm} = 3\Psi_2 \pm 2\Phi_{11'}$.

A partir de (4.17) y (4.14) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 (D\Psi)_{20'} &= \rho \left(\frac{6}{5}\Psi_2 + \frac{3}{5}\zeta_+ \right) - \frac{6}{5}D\Lambda \\
 (D\Psi)_{21'} &= \tau \left(\frac{6}{5}\Psi_2 + \frac{3}{5}\zeta_- \right) - \frac{6}{5}\delta\Lambda \\
 (D\Psi)_{31'} &= -\mu \left(\frac{6}{5}\Psi_2 + \frac{3}{5}\zeta_+ \right) - \frac{6}{5}\Delta\Lambda \\
 (D\Psi)_{30'} &= -\pi \left(\frac{6}{5}\Psi_2 + \frac{3}{5}\zeta_- \right) - \frac{6}{5}\delta'\Lambda
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.2.3. *Pure Radiation* - Petrov tipo D

Por último, consideremos el caso donde la única componente no nula del espinor de Ricci es $\Phi_{22'}$, cuyo ejemplo más conocido es el espaciotiempo de Vaidya. Las identidades de Bianchi:

$$\begin{aligned}
 3\kappa\Psi_2 = 3\sigma\Psi_2 = 0 &\Rightarrow \kappa = \sigma = 0 \\
 3\lambda\Psi_2 &= 0 \\
 \delta'\Psi_2 - 3\nu\Psi_2 &= (\bar{\tau} - 2(\bar{\beta} - \alpha))\Phi_{22'} \\
 D\Psi_2 &= 3\rho\Psi_2 \\
 \Delta\Psi_2 &= -(3\mu\Psi_2 + \rho\Phi_{22'}) \\
 \delta'\Psi_2 &= -3\pi\Psi_2 \\
 \delta\Psi_2 &= 3\tau\Psi_2 \\
 D\Lambda = \delta\Lambda &= 0
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Por lo tanto, a partir de (4.19) y (4.14) podemos ver que:

$$\begin{aligned}
 (D\Psi)_{20'} &= 3\rho\Psi_2 \\
 (D\Psi)_{21'} &= 3\tau\Psi_2 \\
 (D\Psi)_{30'} &= -3\pi\Psi_2 \\
 (D\Psi)_{31'} &= -3\mu\Psi_2 - \frac{3}{5}\rho\Phi_{22'}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

4.3. Localizadores de horizontes

Volvamos a nuestro problema: queremos encontrar invariantes obtenidos a partir del algoritmo de Cartan-Karlhede que nos ayuden a localizar horizontes. En espaciotiempos estacionarios localizar horizontes aparentes equivaldrá a localizar el horizonte de eventos (Ver [20, 31]).

4.3.1. *No nulo tipo electromagnético*

A partir de (4.16) y (4.18) definimos los invariantes:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}_1 &= 2 \frac{[5(D\Psi)_{31'} + 6\Delta\Lambda]}{[6\Psi_2 + 3\zeta_+]} = -2\mu \\
 \mathfrak{I}_2 &= 2 \frac{[5(D\Psi)_{20'} + 6D\Lambda]}{[6\Psi_2 + 3\zeta_+]} = 2\rho
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Luego a partir de (A.3) vemos que:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R}(\mathfrak{I}_1) &= \Theta_{(n)} \\
 \mathfrak{R}(\mathfrak{I}_2) &= \Theta_{(l)}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

donde Θ_n y Θ_l son las expansiones nulas asociadas a n^a y l^a , respectivamente.

Es importante notar que, a menos que $\zeta_- \neq 0$, no podemos asegurar que los vectores l^a y n^a definan geodésicas. Si tenemos que $\zeta_{\pm} \neq 0$ entonces, de las dos primeras ecuaciones en (4.17) vemos que $\kappa = \nu = \sigma = \lambda = 0$. Por lo tanto l^a y n^a definen geodésicas y tienen *shear* nulo.

A partir de (4.22) vemos que la condición $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}_1) = 0$ define *superficies marginalmente atrapadas* (Ver Apéndice A). Más aún, a partir de los signos de $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}_1)$ y $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}_2)$ podremos decidir si nos encontramos en la región atrapada \mathcal{T} .

Entonces, si $\zeta_- \neq 0$, l^a y n^a son geodésicas y \mathfrak{I}_1 se anula sobre el horizonte aparente. Si el espaciotiempo es estacionario, \mathfrak{I}_1 se anula sobre el horizonte de eventos.

Notemos que \mathfrak{I}_1 y \mathfrak{I}_2 son explícitamente invariantes: están construídos íntegramente a partir de elementos de $\nabla^1\mathcal{R}$.

4.3.2. *Pure Radiation*

Primero, vemos de (4.19) que l^a y n^a son geodésicas y con *shear* nulo. A partir de (4.20) definimos:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}_1 &= 2 \frac{(D\Psi)_{31'}}{\Psi_2} + \frac{2}{5} \frac{(D\Psi)_{20'}}{\Psi_2^2} \Phi_{22'} = -2\mu \\
 \mathfrak{I}_2 &= \frac{2}{3} \frac{(D\Psi)_{20'}}{\Psi_2} = 2\rho
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Igual que en el caso anterior, de (4.23) vemos que siempre podemos elegir una tetraeda donde la parte real de \mathfrak{J}_1 se anule sobre el horizonte aparente.

4.3.3. Ejemplo: Espaciotiempos de Vaidya

Los spaciotiempos de Vaidya están caracterizados por el elemento de línea:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m(v)}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \quad (4.24)$$

donde $m(v)$ es una función no decreciente de v ¹

La métrica (4.24) es solución de las ecuaciones de campo de Einstein con tensor de energía momento dado por:

$$T_{ab} = \frac{\dot{m}(v)}{4\pi r^2} l_a l_b \quad (4.25)$$

donde $l_a = -\nabla_a v$.

Para aplicar el método de Cartan- Karlhede consideramos la tetraeda definida por:

$$\begin{aligned} l_a &= -(dv)_a \\ n_a &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m(v)}{r} \right) (dv)_a + (dr)_a \\ m_a &= -\frac{r}{\sqrt{2}} [(d\theta)_a + i \sin(\theta)(d\phi)_a] \\ \bar{m}_a &= -\frac{r}{\sqrt{2}} [(d\theta)_a - i \sin(\theta)(d\phi)_a] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Los invariantes necesarios en el paso $q = 0$ son:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= -\frac{m(v)}{r^3} \\ \Phi_{22'} &= \frac{\dot{m}(v)}{r^2} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Notemos que el spaciotiempo es de tipo de Petrov D y *pure radiation*. La li-

¹Esto asegura que el tensor de energía-momento satisfaga la condición de energía dominante.

bertad asociada a las rotaciones nulas ya se encuentra fijada por la forma canónica del espinor de Weyl, mientras que la forma canónica correspondiente al espinor de Ricci es $\Phi_{22'} = \pm 1$. En este paso decidimos no fijar la libertad asociada a los boosts mediante la forma canónica al espinor de Ricci. Notemos que para establecer equivalencia no es indispensable fijar las formas canónicas inmediatamente (por ejemplo, Brans [3] espera hasta el último paso para fijar las formas canónicas), si bien el ir fijando sistemáticamente las formas canónicas lleva a una reducción del número de pasos q que es necesario realizar para finalizar el algoritmo. Si al establecer equivalencia se es consistente en cuándo y cómo se fijan las formas canónicas, se puede realizar cuando sea más conveniente

En este caso, como nuestro objetivo es obtener los invariantes \mathfrak{I}_1 y \mathfrak{I}_2 decidimos no fijar la libertad asociada a los boost en el paso $q = 1$. Esto nos permite seguir trabajando con la tetraeda (4.26) que es más simple que la tetraeda que obtendríamos luego de realizar un boost para llevar a $\Phi_{22'}$ a su forma canónica ².

Por lo tanto, los elementos no nulos del paso $q = 1$ son:

$$\begin{aligned} (D\Psi)_{20'} &= \frac{3m(v)}{r^4} \\ (D\Psi)_{31'} &= \frac{3}{10} \left(\frac{2\dot{m}(v)r^2 - 5m(v)r + 10m^2(v)}{r^5} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Finalmente, obtenemos los invariantes (4.23):

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= \frac{3}{2} \left(\frac{r - 2m(v)}{r^2} \right) \\ \mathfrak{I}_2 &= -\frac{1}{r} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Y vemos que, a partir de (4.29) podemos encontrar las *superficies marginalmente atrapadas futuras* $r = 2m(v)$ que forman el horizonte aparente del agujero negro de

²Que consideramos “simple” está asociado a la plataforma donde realizamos los cálculos. En nuestro caso hemos utilizado GRTensorII que corre sobre Maple. Debido a que a Maple le cuesta simplificar ecuaciones que involucran radicales, a menos que sea necesario es recomendable evitar ese tipo de expresiones. El boost necesario para llevar a Φ_{22} a su forma canónica involucra un radical de orden 4.

Vaidya.

Resumiendo, hemos encontrado invariantes \mathfrak{I}_1 y \mathfrak{I}_2 que surgen en el segundo paso $q = 1$ del Algoritmo de Cartan-Karlhede y su anulan sobre distintos tipos de horizontes de agujeros negros. Para obtenerlos es clave que el espinor de Weyl se encuentre en su forma canónica. ¿Cuál es la ventaja de trabajar con los invariantes de Cartan frente a los invariantes polinomiales escalares (s.p)?

Sabemos que hay situaciones donde los invariantes s.p no son adecuados: por ejemplo, *pp-waves* y espaciotiempos planos tienen ambos invariantes s.p nulos [30], por lo cual no podemos utilizarlos para determinar equivalencia. Por otro lado, las contracciones involucradas en el cálculo de invariantes como $*C_{abcd}C^{abdc}, \nabla_a R_{bcde} \nabla^a R^{bcde}$ involucran un gran número de términos, a diferencia de los cálculos necesarios para obtener los invariantes de Cartan, donde además no debemos multiplicar entre sí componentes de tensores de curvatura y sus derivadas. Sin embargo, como adelantamos en el ejemplo, los invariantes de Cartan serán simples de calcular siempre y cuando la tetraeda utilizada sea lo suficientemente simple, y donde “simple” está muchas veces condicionado por las características de la plataforma utilizada para calcular los invariantes.

Apéndice A

Nociones sobre superficies atrapadas y horizontes cuasi-locales

Repasemos brevemente los conceptos, definiciones y resultados relacionados a la definición de agujero negro y sus horizontes. Primero, y para resaltar el carácter local de las superficies atrapadas y los horizontes aparentes, definimos la noción de *horizonte de eventos*. Seguiremos el material presentado en [20, 31].

Para esto debemos considerar la estructura asintótica del espaciotiempo: Sean \mathcal{I}^\pm el futuro y pasado infinito nulo, respectivamente. El pasado causal de \mathcal{I}^+ es la región \mathcal{R} de donde una señal puede “escapar” al infinito nulo y representa la región exterior al agujero negro. Dado que debemos construir \mathcal{I}^+ completo más su pasado global en esta definición, es claro que es una noción fuertemente global: ¡Podría estar formándose ahora un horizonte de eventos cerca nuestro por eventos que suceden en el futuro! Más aún, formalmente no podemos definir una noción de horizonte de eventos para espaciotiempos que no sean asintóticamente planos.

Esto nos motiva a considerar definiciones locales, que de alguna manera representen la idea de agujero negro como una región donde no se puede “escapar” al infinito.

Antes, debemos recordar las propiedades de una congruencia nula: Sea \mathcal{S} una subvariedad no degenerada de (\mathcal{M}, g_{ab}) , una variedad semi-Riemanniana de signatura

$(+, -, -, -)$. El caso más importante para nosotros será cuando \mathcal{S} es una variedad 2-dimensional espacial. En este caso, la métrica inducida q_{ab} será Riemanianna y podemos hacer la descomposición $T_p M = T_p \mathcal{S} \oplus T_p^\perp \mathcal{S}$. En este caso, $T_p^\perp \mathcal{S}$ tendrá dimesnsión $1+1$ y es generado por dos vectores nulos futuros l^a y n^a tal que $l^a n_a = 1$.

Si $\xi^a \in T_p^\perp \mathcal{S}$ entonces la *expansión* de la congruencia definida por ξ^a está dada por:

$$\Theta_{(\xi)} = q^{ab} \nabla_a \xi_b \tag{A.1}$$

Esto es, la traza de $\nabla_a \xi_b$ corresponde a la expansión, mientras que la parte simétrica sin traza y la antisimétrica corresponden al *shear* y *twist* respectivamente:

$$\sigma_{ab} = (\nabla_{(a} \xi_{b)})^\parallel - \frac{1}{2} \Theta_{(\xi)} q_{ab}, \quad w_{ab} = (\nabla_{[a} \xi_{b]})^\parallel \tag{A.2}$$

donde $(\dots)^\parallel$ representa proyección a $T_p \mathcal{S}$.

Ahora estamos en condiciones de definir *superficies atrapadas*. Los distintos tipos de superficies atrapadas dependen de las propiedades de las expansiones (A.1) asociadas a las congruencias definidas por l^a y n^a , donde consideramos l^a entrante futuro y n^a saliente futuro.

Algunas definiciones útiles y que usaremos:

- *Superficie atrapada futura*: $\Theta_{(l)} < 0$, $\Theta_{(n)} < 0$
- *Superficie marginalmente atrapada futura*: $\Theta_{(n)} = 0$, $\Theta_{(l)} < 0$
- *Superficie exterior marginalmente atrapada* (MOTS ¹): $\Theta_{(n)} = 0$
- *Superficie exterior atrapada* : $\Theta_{(n)} < 0$

Para la caracterización de agujeros negros, es importante que las superficies consideradas sean *cerradas*. Por ejemplo, si no imponemos esta condición podemos encontrar superficies (abiertas) atrapadas en espaciotiempos planos.

El conjunto de superficies cerradas atrapadas futuras forma la *región atrapada* del espaciotiempo. Más precisamente, la región atrapada \mathcal{T} consiste en todos los puntos

¹Marginally outer trapped surface

que pertenecen a una superficie (cerrada) atrapada futura. Denotamos la frontera de \mathcal{T} por \mathcal{B} .

Sea Σ una hipersuperficie espacial (típicamente se toma una superficie de Cauchy en un problema de datos iniciales). La región atrapada \mathcal{T}^Σ en Σ está definida como el conjunto de puntos de Σ que pertenecen a una superficie cerrada atrapada futura que se encuentra completamente en Σ . Denotamos la frontera de \mathcal{T}^Σ por \mathcal{B}^Σ y cada componente conexa de \mathcal{B}^Σ se denomina *horizonte aparente* si es la más externa de tales superficies. Es claro que, como esta definición excluye superficies atrapadas que no están totalmente contenidas en Σ , $\mathcal{B}^\Sigma \subset \mathcal{B} \cup \Sigma$.

Es posible ver que [2, 19] pidiendo ciertas condiciones de regularidad, cada componente conexa del horizonte aparente \mathcal{B}^Σ es una superficie (cerrada) marginalmente atrapada.

Ahora, supongamos que tenemos una tetraada nula $\{l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a\}$, con $l^a n_a = 1$, $\bar{m}^a m_a = -1$. Podemos ver que:

$$\begin{aligned} \Theta_{(l)} &= 2\Re(\rho), & m^{[a} \bar{m}^{b]} \nabla_a l_b &= -\Im(\rho), & m^a \bar{m}^b \nabla_a l_b &= \sigma \\ \Theta_{(n)} &= 2\Re(\rho') = -2\Re(\mu), & m^{[a} \bar{m}^{b]} \nabla_a n_b &= \Im(\mu), & m^a \bar{m}^b \nabla_a n_b &= -\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Veamos explícitamente como obtener $\Theta_{(l)}$ en términos de ρ . Podemos escribir $q^{ab} = 2m^{(a} \bar{m}^{b)}$ y por lo tanto tenemos que:

$$\Theta_{(l)} = q^{ab} \nabla_a l_b = \bar{m}^b \delta l_b + m^b \delta' l_b = \bar{\rho} + \rho = 2\Re(\rho) \quad (\text{A.4})$$

donde en la segunda igualdad hemos usado (4.2) y en la tercera igualdad hemos usado que $\delta l_a = (\beta + \bar{\alpha})l_a - \bar{\rho}m_a - \sigma\bar{m}_a$ y $\delta' l_a = (\alpha + \bar{\beta})l_a - \bar{\sigma}m_a - \rho\bar{m}_a$. (Ver, por ejemplo, (4.5.28) en [24].)

Bibliografía

- [1] Majd Abdelqader y Kayll Lake. Invariant characterization of the Kerr space-time: Locating the horizon and measuring the mass and spin of rotating black holes using curvature invariants. *Physical Review D*, 91(8):084017, 2015.
- [2] Lars Andersson y Jan Metzger. The area of horizons and the trapped region. *Communications in Mathematical Physics*, 290(3):941–972, 2009.
- [3] Carl H Brans. Invariant approach to the geometry of spaces in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 6(1):94–102, 1965.
- [4] É Cartan. Lecons sur la géométrie des espaces de Riemann 2nd edn (Paris: Gauthier-Villars). 1946.
- [5] Shiing-Shen Chern. The geometry of G-structures. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 72(2):167–219, 1966.
- [6] EB Christoffel. *J. Reine Angew. Math.(Crelle)*, 70:46, 1869.
- [7] JM Collins. The Karlhede classification of type N vacuum spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 8(10):1859, 1991.
- [8] JM Collins y RA d'Inverno. The Karlhede classification of type-D nonvacuum spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 10(2):343, 1993.
- [9] JM Collins, RA d'Inverno, y JA Vickers. The Karlhede classification of type D vacuum spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 7(11):2005, 1990.
- [10] Valeri Frolov y Igor Novikov. *Black hole physics: basic concepts and new developments*, tomo 96. Springer Science & Business Media, 2012.

-
- [11] Robert Geroch. Limits of spacetimes. *Communications in Mathematical Physics*, 13(3):180–193, 1969.
- [12] Charles Grissom, Gerard Thompson, y George Wilkens. Linearization of second order ordinary differential equations via Cartan’s equivalence method. *Journal of differential equations*, 77(1):1–15, 1989.
- [13] L Hsu y N Kamran. Symmetries of second-order ordinary differential equations and Elie Cartan’s method of equivalence. *Letters in mathematical physics*, 15(2):91–99, 1988.
- [14] Niky Kamran y Peter J Olver. Equivalence problems for first order Lagrangians on the line. *Journal of differential equations*, 80(1):32–78, 1989.
- [15] A Karlhede y MAH MacCallum. On determining the isometry group of a Riemannian space. *General Relativity and Gravitation*, 14(7):673–682, 1982.
- [16] Anders Karlhede. A review of the geometrical equivalence of metrics in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 12(9):693–707, 1980.
- [17] Anders Karlhede. Classification of Euclidean metrics. *Classical and Quantum Gravity*, 3(1):L1, 1986.
- [18] Anders Karlhede, Ulf Lindström, y Jan E Åman. A note on a local effect at the Schwarzschild sphere. *General Relativity and Gravitation*, 14(6):569–571, 1982.
- [19] Marcus Kriele y Sean A Hayward. Outer trapped surfaces and their apparent horizon. *Journal of Mathematical Physics*, 38(3):1593–1604, 1997.
- [20] Badri Krishnan. Quasi-local black hole horizons. En *Springer Handbook of Spacetime*, págs. 527–555. Springer, 2014.
- [21] MAH MacCallum y JE Åman. Algebraically independent n th derivatives of the Riemannian curvature spinor in a general spacetime. *Classical and quantum gravity*, 3(6):1133, 1986.
- [22] Peter J Olver. *Equivalence, invariants and symmetry*. Cambridge University Press, 1995.

-
- [23] FM Paiva, MJ Rebouças, y MAH McCullaum. On limits of spacetimes-a coordinate-free approach. *Classical and Quantum Gravity*, 10(6):1165, 1993.
- [24] R. Penrose y W. Rindler. *Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1987.
- [25] Roger Penrose, Wolfgang Rindler, y Joshua N Goldberg. *Spinors and Space-Time, Volume 2: Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry*. AIP, 1986.
- [26] Eric Poisson. *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press, 2004.
- [27] D Pollney, JEF Skea, y RA d'Inverno. Classifying geometries in general relativity: I. Standard forms for symmetric spinors. *Classical and Quantum Gravity*, 17(3):643, 2000.
- [28] D Pollney, JEF Skea, y RA d'Inverno. Classifying geometries in general relativity: II. Spinor tools. *Classical and Quantum Gravity*, 17(11):2267, 2000.
- [29] D Pollney, JEF Skea, y RA d'Inverno. Classifying geometries in general relativity: III. Classification in practice. *Classical and Quantum Gravity*, 17(15):2885, 2000.
- [30] V Pravda, A Pravdová, A Coley, y R Milson. All spacetimes with vanishing curvature invariants. *Classical and Quantum Gravity*, 19(23):6213, 2002.
- [31] José MM Senovilla. Trapped surfaces, horizons and exact solutions in higher dimensions. *Classical and Quantum Gravity*, 19(12):L113, 2002.
- [32] FC Sousa, JB Fonseca, y C Romero. Equivalence of three-dimensional spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 25(3):035007, 2008.
- [33] Hans Stephani, Dietrich Kramer, Malcolm MacCallum, Cornelius Hoenselaers, y Eduard Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge University Press, 2009.