UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA,
FÍSICA Y COMPUTACIÓN

IDEALES DE POLINOMIOS ASOCIADOS A ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS DE DIMENSIÓN FINITA

Autor: Emiliano Campagnolo
Director: Dr. Leandro Roberto Cagliero

Marzo del 2017

Resumen

Dado V un espacio vectorial de dimensión finita, sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica 0, podemos considerar el conjunto de todos los productos bilineales $\cdot : V \times V \longrightarrow V$, satisfaciendo ciertas propiedades adicionales como asociatividad o nilpotencia, convirtiendo a V en un tipo especial de álgebra.

Si fijamos una base B de V, estos productos bilineales son determinados por los coeficientes de estructura en la base B y las propiedades adicionales consideradas terminan expresadas como un conjunto F de ecuaciones polinomiales en los coeficientes de estructura. Por lo tanto, el conjunto de todas las álgebras de este tipo dado es la variedad algebraica asociada a F. Se observa que en general F es un conjunto muy grande de polinomios en un número muy grande de variables.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar I el ideal generado por el conjunto F asociado a diferentes tipos de álgebras. Estamos especialmente interesados en determinar si el ideal I es radical.

Este trabajo incluye:

(a) Una prueba completa del Teorema de la base de Hilbert.
(b) Una prueba completa del Teorema de los ceros de Hilbert.
(c) Una introducción a las bases de Gröbner.
(d) Una introducción a ciertos algoritmos para estudiar $\sqrt{I}$.
(e) El análisis de I para cierto tipo de álgebras asociativas de dimensión $n = 2, 3, 4$ y cierto tipo de álgebras de Lie de dimensión $3 \leq n \leq 7$.

Palabras claves: Álgebra conmutativa, Geometría Algebraica, Bases de Gröbner, Álgebra Computacional, Categorías algebraicas.

Clasificación: 14A10, 13A02, 16B50.

Abstract

Given a finite dimensional vector space V, over an algebraically closed field of characteristic 0, we can consider the set of all bilinear products $\cdot : V \times V \longrightarrow V$, satisfying certain additional properties, like associativity or nilpotency, turning V into an special type of algebra.

If we fix a basis B of V, these bilinear products are determined by the structure coefficients in the basis B and the additional properties considered end up expressed as a set F of polynomial equations in the structure coefficients. Thus, the set of all algebras of this given type is the algebraic variety associated to F. We point out that F is in general a very large set of polynomials in very large number of variables.

The main goal of this work is to study the ideal I generated by the set F associated to different type of special algebras. We are specially interested in determining whether I is a radical ideal.

This work include:

(a) A complete proof of the Hilbert's basis theorem.
(b) A complete proof of Hilbert's Nullstellensatz.
(c) An introduction to Gröbner bases.
(d) An introduction to certain algorithms to study $\sqrt{I}$.
(e) An analysis of I for certain type of associative algebras of dimensions $n = 2, 3, 4$ and certain type of Lie algebras of dimensions $3 \leq n \leq 7$.

Índice

Capítulo 1

1. Preliminares.

1.1. Categoría de anillos conmutativos con identidad.

El principal objetivo de esta sección es introducir los conceptos de anillo, ideal y radical de un ideal. Dado que más adelante usaremos la mayoría de los resultados de esta sección, daremos sus respectivas pruebas.

Definición 1.1.1: Un anillo conmutativo con identidad es una terna $(R, +, \cdot)$ tal que R es un conjunto no vacío, $(R, +)$ es un grupo abeliano, $(R, \cdot)$ es un monoide conmutativo cuya identidad es 1_R y que $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todos $a, b, c \in R$. A todo anillo $(R, +, \cdot)$ lo denotamos sencillamente por R y reemplazaremos $a \cdot b$ por ab. De ahora en más los anillos considerados en este trabajo son conmutativos con identidad.

Definición 1.1.2: Sean R y S dos anillos. Decimos que una función $f : R \to S$ es un homomorfismo de anillos si:
(a) $f(xy) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in R$.
(b) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in R$.
(c) $f(1_R) = 1_S$.
Definimos $\mathrm{Hom}(R, S) = \{f : R \to S : f$ es homomorfismo de anillos $\}$. De esto, resulta que los anillos constituyen una categoría con sus respectivos morfismos.

Notación: Denotaremos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números enteros positivos y también $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definición 1.1.3: Sea R un anillo. Decimos que $x \in R$ es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$.

Definición 1.1.4: Sea R un anillo. Decimos que $x \in R$ es unidad en R si x divide a 1_R, es decir, si existe $y \in R$ tal que $xy = 1_R$, en este caso y es único y lo denotamos x^{-1}. Definimos $U(R) = \{x \in R : x$ es unidad en $R\}$, así, $U(R)$ es un grupo abeliano.

Notar que si R es un anillo que satisface que todo sus elementos no nulos son unidades, entonces R es un cuerpo.

Notación: Si S es un subconjunto de un anillo R, denotaremos por (S) al ideal de R generado por S. En el caso que $S = \{x_1, ..., x_n\}$, denotaremos $(x_1, ..., x_n) = (\{x_1, ..., x_n\})$.

Proposición 1.1.5: Sea R es un anillo. Entonces $x \in R$ es unidad si, y solo si, $(x) = R$.

Demostración:
Si $x \in R$ es unidad, entonces $1 = x^{-1}x \in (x)$, luego $(x) = R$. Si $(x) = R$, entonces $1 \in (x)$, y así existe $y \in R$ tal que $xy = 1$. $\square$

Proposición 1.1.6: Sea R un anillo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(a) R es un cuerpo.
(b) Los ideales de R son (0) y R.
(c) Todo homomorfismo no nulo de R a otro anillo S es inyectivo.

Demostración:
(a)$\Rightarrow$(b) Sea $I \neq (0)$ un ideal de R. Como existe $x \in I \setminus \{0\}$ y x es unidad, entonces $R = (x) \subseteq I \subseteq R$ y así $I = R$.
(b)$\Rightarrow$(c) Sea $\phi : R \to S$ un homomorfismo de anillos, entonces $\text{Ker}\phi$ es ideal de R, como $\text{Ker}\phi \neq R$, entonces $\text{Ker}\phi = \{0\}$, luego ϕ es inyectiva.
(c)$\Rightarrow$(a) Sea $x \in R$ tal que x no es unidad, luego $(x) \neq R$. Sea $\phi : R \to R/(x)$ la proyección canónica al cociente, entonces ϕ es inyectiva, de donde $x = 0$. $\square$

Definición 1.1.7: Sea R un anillo. Un ideal p de R se dice primo si $p \neq R$ y si $xy \in p$, implica que $x \in p$ o $y \in p$. Definimos $\text{Spec}(R) = \{p \subseteq R : p \text{ es ideal primo de } R\}$.

Notación: Denotaremos por $\subset$ a la contención estricta, es decir, si A y B son dos conjuntos $A \subset B$ denota que A está contenido en B y además $A \neq B$.

Definición 1.1.8: Sea R un anillo. Un ideal m de R se dice maximal si $m \neq R$ y si no existe I ideal de R tal que $m \subset I \subset R$.

Teorema 1.1.9: Sea R un anillo. Si $I \neq R$ es un ideal de R, entonces I es primo si, y solo si, R/I es un dominio de integridad.

Demostración:
Supongamos que I es primo. Sean $x+I, y+I \in R/I$ tales que $xy+I = 0+I$, entonces $xy \in I$, luego $x \in I$ o $y \in I$ y así $x + I = 0 + I$ o $y + I = 0 + I$, luego R/I es dominio de integridad.
Supongamos que R/I es dominio de integridad. Sean $x, y \in R$ tales que $xy \in I$, luego $(x + I)(y + I) = xy + I = 0 + I$, luego $x + I = 0 + I$ o $y + I = 0 + I$, luego $x \in I$ o $y \in I$, así I es ideal primo. $\square$

Teorema 1.1.10: Sea R un anillo. Si $I \neq R$ es un ideal de R, entonces I es maximal si, y solo si, R/I es un cuerpo.

Demostración:
Supongamos que I es maximal. Si R/I no es cuerpo existe U ideal de R/I tal que $\{I\} \subset U \subset R/I$, luego existe J ideal de R tal que $U = J/I$, y así $I \subset J \subset R$, absurdo.
Supongamos que R/I es un cuerpo. Si I no es maximal, entonces existe J ideal de R tal que $I \subset J \subset R$, luego J/I es ideal de R/I y $\{I\} \subset J/I \subset R/I$, absurdo. $\square$

Corolario 1.1.11: Sea R un anillo. Si m es un ideal maximal de R entonces m es primo.

Demostración:
Resulta de 1.1.9 y 1.1.10. $\square$

Proposición 1.1.12: Sean R, S dos anillos y $f \in \text{Hom}(R, S)$. Si p es un ideal primo de S, entonces $f^{-1}(p)$ es un ideal primo de R

Demostración:
Sean $x, y \in R$ tales que $xy \in f^{-1}(p)$, entonces $f(xy) \in p$, luego $f(x)f(y) \in p$, luego $f(x) \in p$ o $f(y) \in p$, luego $x \in f^{-1}(p)$ o $y \in f^{-1}(p)$, así $f^{-1}(p)$ es primo. $\square$

Teorema 1.1.13: Sea R un anillo. Entonces R tiene al menos un ideal maximal.

Demostración:
Sea $\Sigma = \{I \subset R : I \text{ es ideal de } R\}$ ordenado parcialmente por la inclusión. Notemos que $(0) \in \Sigma$. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ cadena en Σ, y sea $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, tenemos que $1_R \notin X$, pues de lo contrario $1_R \in X_\alpha$ para algún $\alpha \in I$, luego $X \neq R$. Veamos que X es ideal. Sean $x \in X$ y $y \in R$, entonces existe $\beta \in I$ tal que $x \in X_\beta$, luego $xy \in X_\beta \subseteq X$, y así $X \in \Sigma$. Por el Lema de Zorn existe m elemento maximal de Σ que resulta ser ideal maximal de R. $\square$

Corolario 1.1.14: Sea R un anillo. Si $I \neq R$ es un ideal de R. Entonces existe J ideal maximal de R tal que $I \subseteq J$.

Demostración:
Por el teorema anterior, existe J ideal maximal de R tal que J/I es ideal maximal de R/I, así $J \neq R$ pues $J/I \neq R/I$. Si J no es ideal maximal de R, entonces existe $J \subset K \subset R$ ideal de R, entonces $J/I \subset K/I \subset R/I$ es ideal de R/I, absurdo. Así J es ideal maximal de R y $I \subseteq J$. $\square$

Corolario 1.1.15: Sea R un anillo. Si $x \in R \setminus U(R)$, entonces x pertenece a algún ideal maximal de R.

Demostración:

Es trivial, pues $(x) \neq R$. $\square$

Definición 1.1.16: Sea R un anillo. Decimos que R es local si tiene un único ideal maximal.

Proposición 1.1.17: Sea R un anillo y $m \neq R$ un ideal de R tal que $R \setminus m \subseteq U(R)$. Entonces R es un anillo local y m es maximal.

Demostración:
Si $I \neq R$ es un ideal, entonces $I \subseteq R \setminus U(R)$, luego $I \subseteq m$, así, m es el único ideal maximal de R. $\square$

Proposición 1.1.18: Sea R un anillo. Entonces el conjunto $N(R) = \{x \in R : x \in R \text{ es nilpotente}\}$ es ideal de R. Además $R/N(R)$ no tiene elementos nilpotentes no nulos.

Demostración:
Si $c \in R$ y $x \in N(R)$, es trivial que $cx \in N(R)$. Sean $x, y \in N(R)$ luego existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x^n = y^m = 0$. Tenemos que:

$$(x+y)^{2(n+m)} = \sum_{k=0}^{2(n+m)} \binom{2(n+m)}{k} x^k y^{2(n+m)-k} = 0,$$

así $x + y \in N(R)$ y así $N(R)$ es ideal de R. Sea $x + N(R) \in R/N(R)$ nilpotente, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in N(R)$, luego $x \in N(R)$ y así $x + N(R) = 0 + N(R)$. $\square$

Definición 1.1.19: Sea R un anillo. Al ideal $N(R)$ lo llamamos nilradical de R.

Proposición 1.1.20: Sea R un anillo. Entonces:

$$N(R) = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec}(R)} p.$$

Demostración:
Sea $R' = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec}(R)} p$. Si $x \in N(R)$ y $p \in \operatorname{Spec}(R)$, entonces $x^n = 0 \in p$ para algún $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in p$, y así $x \in R'$.

Ahora supongamos que $x \in R$ no es nilpotente. Sea $\Sigma = \{a \text{ ideal de } R : \text{ si } n \in \mathbb{N}, \text{ entonces } x^n \notin a\}$, entonces $\Sigma \neq \emptyset$ pues $\{0\} \in \Sigma$. Si consideramos a Σ parcialmente ordenado por la inclusión, por el Lema de Zorn Σ tiene elemento maximal p. Veamos que p es ideal primo de R. Sean $u, v \notin p$. Entonces los ideales $(u) + p$ y $(v) + p$ contienen estrictamente a p, luego, no pertenecen a Σ. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x^n \in (u) + p$ y $x^m \in (v) + p$. Entonces $x^{n+m} \in (uv) + p$, luego $(uv) + p \notin \Sigma$, así $uv \notin p$ y $p \in \operatorname{Spec}(R)$. Finalmente como $x \notin p$, entonces $x \notin R'$. $\square$

Definición 1.1.21: Sea R un anillo y a un ideal de R. Definimos el radical de a por $\sqrt{a} = \{x \in R : \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in a\}$.

Definición 1.1.22: Sea R un anillo. Decimos que a un ideal de R es radical si $\sqrt{a} = a$.

Proposición 1.1.23: Sea R un anillo y p un ideal primo de R. Entonces p es radical.

Demostración:
Es trivial que $p \subseteq \sqrt{p}$. Sea $x \in \sqrt{p}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x^m \in p$, como p es primo, $x \in p$, así $\sqrt{p} \subseteq p$. $\square$

Proposición 1.1.24: Sean R un anillo y a, b ideales de R. Entonces:
(a) $\sqrt{a}$ es un ideal.
(b) $a \subseteq \sqrt{a}$.
(c) $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.
(d) $\sqrt{ab} = \sqrt{a \cap b} = \sqrt{a} \cap \sqrt{b}$.
(e) $\sqrt{a} = R$ si, y solo si, $a = R$.
(f) $\sqrt{a+b} = \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.
(g) Si p es un ideal primo de R y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt{p^n} = p$.

Demostración:
(a) Sean $c \in R$ y $x \in \sqrt{a}$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in a$, entonces $(cx)^n = c^n x^n \in a$, luego $cx \in \sqrt{a}$. Ahora sean $x, y \in \sqrt{a}$ y $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x^n, y^m \in a$ entonces:

$$(x+y)^{2(n+m)} = \sum_{k=0}^{2(n+m)} \binom{2(n+m)}{k} x^k y^{2(n+m)-k} \in a,$$

así $x + y \in \sqrt{a}$.
(b) Es trivial.
(c) Ya sabemos que $\sqrt{a} \subseteq \sqrt{\sqrt{a}}$. Sea $x \in \sqrt{\sqrt{a}}$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \sqrt{a}$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(x^n)^m \in a$, luego $x^{nm} \in a$, así $x \in \sqrt{a}$.
(d) Si $x \in \sqrt{a \cap b}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in a \cap b$, luego $x^n \in a$ y $x^n \in b$, así $x \in \sqrt{a} \cap \sqrt{b}$, así $\sqrt{a \cap b} \subseteq \sqrt{a} \cap \sqrt{b}$. Sea $x \in \sqrt{a} \cap \sqrt{b}$, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x^n \in a$ y $x^m \in b$, luego $x^{n+m} \in a \cap b$, así, $x \in \sqrt{a \cap b}$ y $\sqrt{a} \cap \sqrt{b} \subseteq \sqrt{a \cap b}$. Con todo esto probamos que $\sqrt{a} \cap \sqrt{b} = \sqrt{a \cap b}$. Como $ab \subseteq a \cap b$, entonces $\sqrt{ab} \subseteq \sqrt{a \cap b}$. Sea $x \in \sqrt{a \cap b}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in a \cap b$, luego $x^{2n} = x^n x^n \in ab$, así $x \in \sqrt{ab}$ y $\sqrt{a \cap b} \subseteq \sqrt{ab}$. Finalmente $\sqrt{a \cap b} = \sqrt{ab}$.
(e) Si $a = R$, entonces $R = a \subseteq \sqrt{a} \subseteq R$, de donde $\sqrt{a} = R$. Supongamos ahora que $\sqrt{a} = R$, entonces $1 \in \sqrt{a}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 = 1^n \in a$, así $a = R$.
(f) Ya sabemos que $\sqrt{a+b} \subseteq \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. Sea $x \in \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Sean $x_1 \in \sqrt{a}$ y $x_2 \in \sqrt{b}$ tales

que $x^n = x_1 + x_2$ y sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $x_1^{n_1} \in a$ y $x_2^{n_2} \in b$ luego $(x_1 + x_2)^{n_1+n_2} \in a + b$, luego $x^{n(n_1+n_2)} \in a + b$, así $x \in \sqrt{a+b}$ y $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \subseteq \sqrt{a+b}$.
(g) Sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\sqrt{p^n} = \bigcap_{i=1}^{n} \sqrt{p} = \sqrt{p} = p$. □

Proposición 1.1.25: Sean R un anillo y a un ideal de R. Entonces $\sqrt{a}$ es la intersección de todos los ideales primos de R que contienen a a.

Demostración:
Notemos que $N(R/a) = \{x + a \in R/a : \exists n \in \mathbb{N} : x^n + a = a\} = \{x + a \in R/a : \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in a\} = \sqrt{a}/a$. Sea $\pi : R \longrightarrow R/a$ la proyección al cociente, entonces $\sqrt{a} = \pi^{-1}(N(R/a))$. Sean $\{p_i/a\}_{i\in I}$ todos los ideales primos de R/a, donde p_i es ideal de R (la existencia resulta del Teorema de Correspondencia), entonces $\sqrt{a} = \pi^{-1}(N(R/a)) = \pi^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} p_i/a\right) = \bigcap_{i\in I} p_i$. Como p_i/a es primo y $\pi \in \mathrm{Hom}(R, R/a)$, entonces $\pi^{-1}(p_i/a) = p_i \in \mathrm{Spec}(R)$ para todo $i \in I$. Sea ahora p un ideal primo que contiene a a y sean $x, y \in R$ tales que $xy + a \in p/a$, entonces existe $u \in p$ tal que $xy - u \in a \subseteq p$, luego $xy \in p$, entonces $x \in p$ o $y \in p$, entonces $x + a \in p/a$ o $y + a \in p/a$ y así p/a es primo. Entonces $\{p_i\}_{i\in I}$ son todos ideales primos de R que contienen a a y finalmente:

$$\sqrt{a} = \bigcap_{i\in I} p_i = \bigcap_{q\in \mathrm{Spec}(R):a\subseteq q} q$$

□

Proposición 1.1.26: Sean R un anillo y a, b ideales de R. Si $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$ son coprimos, entonces a y b son coprimos.

Demostración:

$\sqrt{a+b} = \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{R} = R$, entonces $a + b = R$. □

1.2. Las categorías de módulos y álgebras sobre un anillo.

En esta sección desarrollaremos algunos conceptos básicos de la categoría de módulos y álgebras sobre un anillo. Dado que más adelante solo usaremos los resultados básicos sobre estas categorías, no daremos mucho detalle. R es un anillo fijo.

Definición 1.2.1: Un R-módulo (unitario) es una terna $(M, +, \cdot)$ tal que M es un conjunto no vacío, $(M, +)$ es un grupo abeliano, y $\cdot : R \times M \longrightarrow M$ satisface:
(a) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ para todos $a \in R$, $x, y \in M$.
(b) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ para todos $a, b \in R$, $x \in M$.
(c) $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ para todos $a, b \in R$, $x \in M$.
(d) $1 \cdot x = x$ para todo $x \in M$.

A todo R-módulo $(M, +, \cdot)$ lo denotamos sencillamente por M y reemplazaremos $a \cdot x$ por ax.

Definición 1.2.2: Sean M y N dos R-módulos. Decimos que una función $f : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos si:
(a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todos $x, y \in M$.
(b) $f(ax) = af(x)$ para todos $a \in R$, $x \in M$.
Definimos:

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) = \{f : M \to N : f \text{ es homomorfismo de } R\text{-módulos } \}$$

De esto, resulta que los R-módulos (unitarios) constituyen una categoría con sus respectivos morfismos.

Definición 1.2.3: Sea M un R-módulo. Decimos que $N \subseteq M$ es un R-submódulo de M, si N es un subgrupo abeliano de M y N es un R-módulo con la acción heredada de M.

Definición 1.2.4: Sean $M_1, ..., M_n$ R-módulos y sea $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ una sucesión de homomorfismos de R-módulos. Decimos que esta sucesión es exacta si $\mathrm{Im} f_i = \mathrm{Ker} f_{i+1}$ para todo $1 \le i \le n - 1$.

Notación: Si S es un subconjunto de un R-módulo M, denotaremos por $\langle S \rangle_R$ al R-submódulo de M generado por S. En el caso que $S = \{x_1, ..., x_n\}$, denotaremos $\langle x_1, ..., x_n \rangle_R = \langle \{x_1, ..., x_n\} \rangle_R$.

Definición 1.2.5: Una R-álgebra es una dupla $(A, \cdot)$, donde A es un R-módulo y $\cdot : A \times A \to A$ es un producto bilineal de A. Toda R-álgebra $(A, \cdot)$ la denotamos sencillamente por A y reemplazaremos $a \cdot b$ por ab.

Notar que si el producto de una R-álgebra A es conmutativo, asociativo y con identidad, entonces A es un anillo olvidando la acción de R en A que le determina su estructura como R-módulo.

Definición 1.2.6: Sean A y B dos R-álgebras. Decimos que una función $T : A \to B$ es un homomorfismo de R-álgebras si:
(a) T es homomorfismo de R-módulos.
(b) $T(ab) = T(a)T(b)$ para todos $a, b \in A$.
Definimos:

$$\mathrm{Hom}_R(A, B) = \{T : A \to B : T \text{ es homomorfismo de } R\text{-álgebras } \}$$

De esto, las R-álgebras constituyen una categoría con sus respectivos morfismos.

Definición 1.2.7: Sea A una R-álgebra. Decimos que $B \subseteq A$ es una R-subálgebra de A, si B es un R-submódulo de A y B es una R-álgebra con el producto heredado de A.

Notación: Si S es un subconjunto de una R-álgebra A, denotaremos por $R[S]$ a la R-subálgebra de A generada por S. En el caso que $S = \{x_1, ..., x_n\}$, denotaremos $R[x_1, ..., x_n] = R[\{x_1, ..., x_n\}]$. Análogamente, denotaremos por

$R(S)$ a la R-subálgebra de división de A generada por S

1.3. Introducción a la Geometría Algebraica.

El objetivo de esta sección es introducir los conceptos básicos de la geometría algebraica. Principalmente nos interesa la relación entre los ideales radicales de un anillo de polinomios con objetos geométricos. Dado que posteriormente usaremos esta notación y los resultados de esta sección incluiremos todas las pruebas correspondientes. Para esta sección k es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Definición 1.3.1: Definimos el espacio afín sobre k de dimensión n por $A_k^n = k^n$.

Definición 1.3.2: Dado $f \in k[X_1, ..., X_n]$, definimos los ceros de f por $Z(f) = \{p \in A_k^n : f(p) = 0\}$. Dado $T \subseteq k[X_1, ..., X_n]$, definimos los ceros de T por $Z(T) = \{p \in A_k^n : f(p) = 0 \ \forall f \in T\}$.

Proposición 1.3.3: Sean $T_1, T_2 \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ tales que $T_1 \subseteq T_2$. Entonces $Z(T_2) \subseteq Z(T_1)$.

Demostración:
Sea $p \in Z(T_2)$, entonces $f(p) = 0$ para todo $f \in T_2$, en particular $f(p) = 0$ para todo $f \in T_1$, luego $p \in Z(T_1)$. Así $Z(T_2) \subseteq Z(T_1)$. $\square$

Definición 1.3.4: Decimos que $Y \subseteq A_k^n$ es algebraico si existe $T \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ tal que $Y = Z(T)$.

Proposición 1.3.5: A_k^n y $\emptyset$ son algebraicos. Además, la unión de dos subconjuntos algebraicos es un subconjunto algebraico y la intersección de una familia de subconjuntos algebraicos es un subconjunto algebraico. Así, los subconjuntos algebraicos son los cerrados de una topología en A_k^n, que se denomina topología de Zariski. Más aún, si $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia en $k[X_1, ..., X_n]$, entonces $Z(\bigcup_{\alpha \in I} T_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} Z(T_\alpha)$.

Demostración:
Sean $Y_1, Y_2 \subseteq A_k^n$ algebraicos, y sean $T_1, T_2 \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ tales que $Y_1 = Z(T_1)$ y $Y_2 = Z(T_2)$. Veamos que $Z(T_1 \cdot T2) = Y_1 \cup Y_2$. Sea $p \in Y_1 \cup Y_2$, entonces $p \in Y_1$ y $p \in Y_2$. Dado $h \in T_1 \cdot T_2$, existen $f \in T_1$, $g \in T_2$ tales que $h = fg$, entonces $f(p) = 0$ o $g(p) = 0$, luego $(fg)(p) = 0$, así $p \in Z(T_1 \cdot T_2)$ y $Y_1 \cup Y_2 \subseteq Z(T_1 \cdot T_2)$. Sea $p \in Z(T_1 \cdot T_2)$, entonces para todos $f \in T_1$, $g \in T_2$, tenemos $(fg)(p) = 0$. Si existe $f \in T_1$ tal que $f(p) \neq 0$, como $(fg)(p) = 0$ para todo $g \in T_2$, luego $g(p) = 0$ para todo $g \in T_2$, así $p \in Z(T_1) = Y_1$, entonces $Z(T_1 \cdot T_2) \subseteq Z(T_1) \cup Z(T_2) = Y_1 \cup Y_2$. Así $Z(T_1 \cdot T_2) = Z(T_1) \cup Z(T_2) = Y_1 \cup Y_2$.

Sea $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq A_k^n$ familia de subconjuntos algebraicos, y sean $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ tales que $Y_\alpha = Z(T_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$. Tenemos que

$Z(\bigcup_{\alpha\in I} T_\alpha) = \{p \in A_k^n : f(p) = 0 \in \bigcup_{\alpha\in I} T_\alpha\} =$
$\bigcap_{\alpha\in I} \{p \in A_k^n : f(p) = 0 \forall f \in T_\alpha\} = \bigcap_{\alpha\in I} Z(T_\alpha)$. Por último $Z(1) = \emptyset$ y $Z(0) = A_k^n$. □

Proposición 1.3.6: Sean $T \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ y (T) el ideal de $k[X_1, ..., X_n]$ generado por T. Entonces $Z(T) = Z((T))$.

Demostración:
Ya sabemos que $Z((T)) \subseteq Z(T)$. Sea $p \in Z(T)$, dado $f \in (T)$ existen $f_1, ..., f_s \in T$, $g_1, ..., g_s \in k[X_1, ..., X_n]$ tales que $f = \sum_{i=1}^s g_i f_i$, luego $f(p) = \sum_{i=1}^s f_i(p) = 0$, luego $p \in Z((T))$. Así $Z(T) \subseteq Z((T))$. □

Definición: Sea X un espacio topológico. Decimos que $Y \subseteq X$ es reducible, si existen $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ cerrados en Y (con la topología relativa) tales que $Y = Y_1 \cup Y_2$,$Y \neq Y_1$ y $Y \neq Y_2$. Decimos que $Y \subseteq X$ es irreducible si $Y \neq \emptyset$ y si Y no es reducible.

El objeto de estudio de la geometría algebraica son las variedades algebraicas. Un tipo de estas variedades son las “variedades algebraicas afines” que se definen como los subconjuntos cerrados Zariski de A_k^n que son irreducibles. A nosotros solo nos interesarán los subconjuntos cerrados Zariski.

Definición 1.3.7: Sea $Y \subseteq A_k^n$, definimos $I(Y) = \{f \in k[X_1, ..., X_n] : f(y) = 0 \ \forall y \in Y\}$.

Proposición 1.3.8: Sea $Y \subseteq A_k^n$, entonces $I(Y)$ es ideal de $k[X_1, ..., X_n]$.

Demostración:
Es trivial que $I(Y)$ es un subanillo de $k[X_1, ..., X_n]$. Sean $f \in k[X_1, ..., X_n]$ y $g \in I(Y)$, entonces $(fg)(y) = f(y)g(y) = 0$ para todo $y \in Y$, luego $fg \in I(Y)$. □

Ya estamos en condiciones de enunciar uno de los teoremas más importantes de este trabajo, su prueba la daremos en la sección 2.3:

Teorema (Teorema de los ceros de Hilbert): Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado y a un ideal de $k[X_1, ..., X_n]$. Si $f \in k[X_1, .., X_n]$ es tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in Z(a)$, entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r \in a$.

Daremos por cierto a este teorema para el último resultado de la sección, el cual solo es ilustrativo para entender las relaciones entre ideales radicales y subconjuntos de A_k^n que son cerrados Zariski:

Proposición 1.3.9: Sean $X, Y \subseteq A_k^n$ y a un ideal de $k[X_1, ..., X_n]$.
(a) Si $X \subseteq Y$. Entonces $I(Y) \supseteq I(X)$.
(b) $I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y)$.
(c) $I(Z(a)) = \sqrt{a}$.
(d) $Z(I(Y)) = \overline{Y}$.

Demostración:
(a) Sea $f \in I(Y_2)$, entonces $f(p) = 0$ para todo $p \in Y_2$, entonces $f(p) = 0$ para todo $p \in Y_1$, entonces $f \in I(Y_1)$.
(b) $I(Y_1 \cup Y_2) = \{f \in k[X_1, ..., X_n] : f(p) = 0 \forall p \in Y_1 \cup Y_2\} = \{f \in k[X_1, ..., X_n] : f(p) = 0\ \forall p \in Y_1\} \cap \{f \in k[X_1, ..., X_n] : f(p) = 0\ \forall p \in Y_2\} = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.
(c) Sea $f \in \sqrt{a}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \in a$, entonces $f(p)^n = 0$ para todo $p \in Z(a)$, luego $f(p) = 0$ para todo $p \in Z(a)$ y finalmente $f \in I(Z(a))$. Así $\sqrt{a} \subseteq I(Z(a))$. La otra contención resulta del Teorema de los ceros de Hilbert.
(d) Como $Z(I(Y))$ es cerrado y $Y \subseteq Z(I(Y))$, entonces $\overline{Y} \subseteq Z(I(Y))$. Sea $W \subseteq A_k^n$ cerrado tal que $W = Z(a)$ y que $Y \subseteq W$, entonces $a \subseteq I(Y)$, luego $Z(I(Y)) \subseteq Z(a) = W$, así $Z(I(Y)) \subseteq \overline{Y}$. □

Corolario 1.3.10: Existe una biyección entre los subconjuntos cerrados Zariski de A_k^n con los ideales radicales de $k[X_1, ..., X_n]$ mediante a $a \mapsto Z(a)$ y $Y \mapsto I(Y)$.

Demostración:
Es inmediato de 1.3.9. □

Solo a modo de comentario, los mapas del Corolario 1.3.10 también establecen una biyección entre las variedades algebraicas afines en A_k^n con los ideales primos de $k[X_1, ..., X_n]$.

Capítulo 2

2. Los Teoremas de la base y de los ceros de Hilbert.

2.1. Módulos y anillos Noetherianos.

Proposición 2.1.1: Sea Σ un conjunto parcialmente ordenado, cuyo orden lo denotamos por $\leq$. Son equivalentes:
(a) Toda sucesión creciente $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ se estaciona (es decir existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_j = \alpha_m$ para todo $j > m$).
(b) Todo subconjunto no vacío de Σ tiene un elemento maximal.
En cualquiera de estos casos decimos que Σ satisface la condición de cadena ascendente.

Demostración:
(a)$\Rightarrow$(b) Supongamos que existe X un subconjunto no vacío de Σ, tal que X no admite elemento maximal. Si X fuese finito, es trivial que X admitiría elemento maximal, así X es infinito. Veamos que X contiene una sucesión creciente que no se estaciona. Sea $\alpha_1 \in X$ arbitrario, recursivamente, una vez elegido $\alpha_n \in X$, como X no admite elemento maximal, entonces existe α_{n+1} tal que $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ y así $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente que no se estaciona.
(b)$\Rightarrow$(a) Sea $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente en Σ. Sea $X = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, luego X admite un elemento maximal $c \in X$. Sea $J \in \mathbb{N}$ tal que $c = \alpha_J$. Como $c = \alpha_J$ es maximal en X, entonces $\alpha_N \leq \alpha_J$ para todo $J \geq N$ y por otro lado, como $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces $\alpha_N \geq \alpha_J$ para todo $J \geq N$; así $\alpha_N = \alpha_J$ para todo $J \geq N$. $\square$

Observación: Sea M un R-módulo, entonces $\Sigma = \{N : N \text{ es } R\text{-submódulo de } M\}$ es parcialmente ordenado por la inclusión.

Definición 2.1.2: Sea M un R-módulo. Decimos que M es Noetheriano si $\Sigma = \{N : N \text{ es } R\text{-submódulo de } M\}$ satisface la condición de cadena ascendente.

Proposición 2.1.3: Sea M un R-módulo. Entonces M es Noetheriano si, y solo si, todo R-submódulo de M es finitamente generado.

Demostración:

Supongamos que M es Noetheriano. Sea N un R-submódulo de M y sea $\Sigma = \{L : L \text{ es } R\text{-submódulo de } N \text{ y finitamente generado}\}$. Como $\{0\} \in \Sigma$, entonces $\Sigma \neq \emptyset$, luego Σ tiene un elemento maximal N_0. Supongamos que $N_0 \neq N$. Sea $x \in N \setminus N_0$ y consideremos $N_0 + Rx$, este es un R-módulo finitamente generado de N y contiene estrictamente N_0, absurdo (por la maximalidad de N_0). Por el absurdo tenemos $N = N_0$ y así N es finitamente generado.

Ahora supongamos que todo R-submódulo de M es finitamente generado. Sea $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$ una cadena ascendente de R-submódulos de M. Entonces $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ es un R-submódulo de M, luego, es finitamente generado. Sea $\{x_1, ..., x_r\} \subseteq N$ un sistema de generadores de N. Si $x_i \in M_i$ para todo $1 \leq i \leq r$, sea $n = \max_{i=1}^{r} n_i$, entonces $x_i \in M_n$ para todo $1 \leq i \leq r$ y así $M_n = N$. Por esto $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$ se estaciona.$\square$

Proposición 2.1.4: Sea $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de R-módulos. Entonces M es Noetheriano si, y solo si, M' y M'' son Noetherianos.

Demostración:

Supongamos que M es Noetheriano. Como toda cadena ascendente de R-submódulos de M' y de M'' induce una cadena ascendente de R-módulos de M, es inmediato que M' y M'' son Noetherianos.

Ahora supongamos que M' y M'' son Noetherianos. Sea $\{L_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una cadena ascendente de R-submódulos de M; entonces $\{\alpha^{-1}(L_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\beta(L_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son cadenas ascendentes de R-submódulos de M' y M'' respectivamente. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^{-1}(L_n) = \alpha^{-1}(L_m)$ y $\beta(L_n) = \beta(L_m)$ para todo $n \geq m$. Como $\beta(L_i) \cong L_i/\alpha(\alpha^{-1}(L_i))$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $L_n = L_m$ para todo $n \geq m$. $\square$

Corolario 2.1.5: Si $\{M_i\}_{1\leq i\leq n}$ son R-módulos Noetherianos, entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ es Noetheriano.

Demostración:

Resulta de aplicar inducción y 2.1.4 en la sucesión exacta $0 \to M_n \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \to 0$. $\square$

Observación: Sean R un anillo e I un ideal de R. Entonces I con la acción multiplicar a izquierda tiene estructura de R-módulo.

Definición 2.1.6: Un anillo R se dice Noetheriano si (con la acción natural) es un R-módulo Noetheriano.

Como los R-submódulos de R son sus ideales, entonces R es un anillo Noetheriano si, y solo si, satisface alguna de las siguientes afirmaciones:

(a) Todo conjunto no vacío de ideales de R tiene al menos un elemento maximal.
(b) Toda cadena ascendente de ideales de R se estaciona.

(c) Todo ideal de R es finitamente generado.

Proposición 2.1.7: Sean R un anillo Noetheriano y M un R-módulo finitamente generado. Entonces M es Noetheriano.

Demostración:
Sea $\{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto de generadores de M. Entonces M es isomorfo a algún cociente de R^n, supongamos $M \cong R^n/N$, entonces la sucesión $0 \to N \to R^n \to R^n/N \to 0$ es exacta. Por 2.1.5, R^n es Noetheriano, luego R^n/N es Noetheriano. □

Proposición 2.1.8: Sean R un anillo Noetheriano y a un ideal de R. Entonces R/a es un anillo Noetheriano.

Demostración:
Como la sucesión $0 \to a \to R \to R/a \to 0$ es exacta, entonces R/a es Noetheriano como R-módulo y por lo tanto es Noetheriano como R/a-módulo. □

2.2. Teorema de la base de Hilbert.

Proposición 2.2.1: Sean R y S dos anillos. Si R es un anillo Noetheriano y $\phi \in \mathrm{Hom}(R, S)$ es sobreyectivo, entonces S es un anillo Noetheriano.

Demostración:
Es inmediato de 2.1.8, pues $S \cong R/\mathrm{Ker}\phi$. □

Proposición 2.2.2: Sean R un anillo y S un subanillo de R. Si S es Noetheriano y R es un S-módulo finitamente generado, entonces R es Noetheriano.

Demostración:
Como S es finitamente generado como R-módulo, entonces es un R-módulo Noetheriano y por lo tanto es un S-módulo Noetheriano. □

Teorema 2.2.3 (Teorema de la Base de Hilbert): Si R es un anillo Noetheriano, entonces $R[X]$ es Noetheriano.

Demostración:
Sea a un ideal de $R[X]$. Es fácil ver que:

$$I = \{c \in R : c \text{ es coeficiente principal de un polinomio que pertenece a } a\}$$

es un ideal de R. Como R es Noetheriano, I es finitamente generado, luego existen $c_1, ..., c_n \in R$ tales que $I = (c_1, ..., c_n)$. Para cada $1 \leq j \leq n$ consideramos $f_j \in a$ tal que c_j es el coeficiente principal de f_j y sea $r_j = \deg f_j$. Sean $r = \mathrm{máx}_{1 \leq j \leq n} r_j$ y $(f_1, ..., f_n) = a' \subseteq a \subseteq R[X]$.

Sea $f = dX^m + \sum_{j=0}^{m-1} d_j X^j \in a$ cualquiera con $d \in I$. Si $m \geq r$ escribimos $d = \sum_{j=1}^{n} u_j c_j$ donde $u_j \in R$ para todo $1 \leq j \leq n$, entonces $f - \sum_{j=1}^{n} u_j f_j X^{m-r_j} \in a$ tiene grado menor a m.

Ahora, dado $h_1 \in R[X]$, con $m = \deg h_1 \geq r$, luego existe $p_1 \in a'$ tal que $\deg(h_1 - p_1) < \deg h_1$. Sea $h_2 = h_1 - p_1$. Recursivamente, si $\deg h_j \geq r$ existe $p_j \in a'$ tal que $\deg(h_j - p_j) < h_j$, y así definimos $h_{j+1} = h_j - p_j$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\deg(h_N) < r$, así $h_1 = h_N + \sum_{j=1}^{N-1} p_j$.

Sea $M = \langle 1, X, ..., X^{r-1} \rangle_R \subseteq R[X]$, entonces hemos probado que $a = (a \cap M) + a'$. Como M es finitamente generado como R-módulo, entonces es Noetheriano, luego $a \cap M$ es finitamente generado como R-módulo. Sean $g_1, ..., g_m \in a \cap M$ tales que $a \cap M = (g_1, .., g_m)$. Así $a = (a \cap M) + a' = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m)$ es finitamente generado, de donde $R[X]$ es Neotheriano. $\square$

Corolario 2.2.4: Sea R un anillo Noetheriano, entonces $R[X_1, ..., X_n]$ es Noetheriano.

Demostración:
Como $R[X_1, ..., X_r][X_{r+1}, ..., X_m] \cong R[X_1, ..., X_m]$ para todos $1 \leq r \leq m$, entonces el corolario resulta de realizar inducción en n y usar 2.2.3. $\square$

Corolario 2.2.5: Sean R un anillo Noetheriano y A una R-álgebra finitamente generada. Entonces A es Noetheriano.

Demostración:
Es inmediato de 2.2.4, pues A es algún cociente de $R[X_1, ..., X_n]$ para algún $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.3. Teorema de los ceros de Hilbert.

En esta sección toda R-álgebra (sobre un anillo R) será conmutativa, asociativa y con identidad, teniendo así estructura de anillo.

Proposición 2.3.1: Sean R, S y T tres anillos tales que $R \subseteq S \subseteq T$. Supongamos que R es Noetheriano, que T es finitamente generada como R-álgebra y finitamente generado como S-módulo. Entonces S es finitamente generada como R-álgebra.

Demostración:
Sean $\{x_1, ..., x_m\}$ un conjunto de generadores de T como R-álgebra y $\{y_1, ..., y_n\}$ un conjunto de generadores de T como S-módulo. Entonces existen $b_{i,j}, b_{i,j,k} \in S$ tales que:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} y_j$$

$$y_i y_j = \sum_{k=1}^{n} b_{i,j,k} y_k$$

Sea $S_0 = R[b_{i,j}, b_{k,l,t}]_{1\leq i\leq m, 1\leq j,k,l,t\leq n}$. Como R es Noetheriano, por 2.2.5 tenemos que S_0 también es Noetheriano, además $R \subseteq S_0 \subseteq S$. Usando las ecuaciones tenemos que que $T = R[x_1, ..., x_m] \subseteq S_0[y_1, ..., y_n]$, luego T es finitamente generado como S_0-módulo. Como S_0 es Noetheriano, y S es un S_0-submódulo de T, entonces S es finitamente generado como S_0-módulo. Finalmente, como S_0 es finitamente generado como R-álgebra, entonces S es finitamente generado como R-álgebra. □

Proposición 2.3.2: Sean k un cuerpo y E una k-álgebra finitamente generada. Si E es un cuerpo, entonces es una extensión finita de k.

Demostración:
Sea $E = k[x_1, .., x_n]$. Supongamos que E no es algebraico sobre k. Entonces se pueden reordenar $\{x_1, ..., x_n\}$ tales que $x_1, ..., x_r$ son algebraicamente independientes sobre k, donde $1 \leq r \leq n$ y que x_i es algebraico sobre $F = k(x_1, ..., x_r)$ para todo $r + 1 \leq i \leq n$. Así E es una extensión algebraica y finita sobre F, luego es finitamente generado como F-módulo (F-espacio vectorial). Aplicando 2.3.1 en $k \subseteq F \subseteq E$ obtenemos que F es una k-álgebra finitamente generada, luego, existen $y_1, ..., y_s \in F$ tales que $F = k[y_1, ..., y_s]$. Para todo $1 \leq i \leq s$, existen $f_i, g_i \in k[x_1, ..., x_r]$ tales que $y_i = \frac{f_i}{g_i}$. Sea h irreducible tal que $h | \prod_{j=1}^{s} g_j + 1$, así, h es coprimo con g_j para todo $1 \leq j \leq s$. Pero $h^{-1} \in F = k[y_1, ..., y_n]$, absurdo pues por como definimos a h tenemos que h^{-1} no puede ser un polinomio evaluado en $(y_1, ..., y_s)$. Así E debe ser algebraico sobre k. □

Corolario 2.3.3 (Teorema de los ceros de Hilbert forma débil): Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado y A una k-álgebra de dimensión finita. Sea m un ideal maximal de A. Entonces $A/m \cong k$ (como k-álgebras).

Demostración:
Como A/m es un cuerpo que tiene estructura de k-álgebra, existe $\phi : k \to A/m$ morfismo de k-álgebras inducido por la acción de k sobre A/m. En particular ϕ es morfismo de cuerpos y por lo tanto inyectivo, así $\phi(k)$ es algebraicamente cerrado. Por la proposición anterior A/m es una subextensión algebraica y finita de $\phi(k)$. Como $\phi(k)$ es algebraicamente cerrado, entonces $\phi(k) = A/m$, de donde $A/m \cong k$. □

Teorema 2.3.4 (Teorema de los ceros de Hilbert forma fuerte): Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado y a un ideal de $k[X_1, ..., X_n]$. Entonces $I(Z(a)) \subseteq \sqrt{a}$.

Demostración:
Denotamos $A = k[X_1, ..., X_n]$. Sea $f \notin \sqrt{a}$, entonces existe p ideal primo de A que contiene a a tal que $f \notin p$. Consideremos $\phi_1 : A \to A/p$ la proyección canónica y denotemos $B = A/p$.

Sea $\overline{f} = \phi_1(f)$, como B es dominio íntegro, admite un cuerpo de fracciones $\mathbb{F}$ y $\phi_2 : B \to \mathbb{F}$ morfismo de anillos inyectivo. Sea $C = B[1/\overline{f}]$ la B-álgebra generada por $\overline{f}^{-1}$ en $\mathbb{F}$, así, podemos considerar a ϕ_2 con imagen en C. Notemos que $\overline{f}$ es unidad en C.

Sea m un ideal maximal de C, entonces $\overline{f} \notin m$. Como C es una k-álgebra finitamente generada, por 2.3.3 tenemos que $C/m \cong k$. Sean $\phi_3 : C \to C/m$ la proyección canónica y $\phi_4 : C/m \to k$ un isomorfismo de k-álgebras. Como $\overline{f} \notin m$, entonces $\phi_3(\overline{f}) \neq 0$ y $\phi_4(\phi_3(\overline{f})) \neq 0$.

Sea $\psi = \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$. Como $\psi : A \to k$ que es morfismo de k-álgebras, entonces:

$$f(\psi(X_1), ..., \psi(X_n)) = \psi(f(X_1, ..., X_n)) = \psi(f) = (\phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1)(f) = (\phi_4 \circ \phi_3)(\overline{f}) \neq 0$$

Veamos que $(\psi(X_1), ..., \psi(X_n)) \in Z(a)$. Dado $g \in a \subseteq p$, luego $\phi_1(g) = 0$ y $\psi(g) = (\phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2)(\phi_1(g)) = 0$ de donde:

$$g(\psi(X_1), ..., \psi(X_n)) = \psi(g(X_1, ..., X_n)) = \psi(g) = 0$$

Así $(\psi(X_1), ..., \psi(X_n)) \in Z(a)$ y como $(\psi(X_1), ..., \psi(X_n)) \in Z(a)$, entonces
$f(\psi(X_1), ..., \psi(X_n)) \neq 0$. Finalmente $f \notin I(Z(a))$. $\square$

Capítulo 3

3. Introducción a las bases de Gröbner.

En este capítulo fijaremos un cuerpo k de característica 0 y $n \in \mathbb{N}$. Nuestros objetivos son:

1. Generalizar el algoritmo de la división de $k[X]$ en $k[X_1, ..., X_n]$.
2. Introducir las bases de Gröbner y entender sus propiedades más básicas.
3. Encontrar un algoritmo para calcular bases de Gröbner de un ideal de $k[X_1, ..., X_n]$.
4. Dados $f \in k[X_1, ...X_n]$ e I un ideal de $k[X_1, ..., X_n]$, encontrar un algoritmo para determinar si $f \in I$.
5. Dados $f \in k[X_1, ...X_n]$ e I un ideal de $k[X_1, ..., X_n]$, encontrar un algoritmo para determinar si $f \in \sqrt{I}$.

3.1. Órdenes Monomiales en $k[X_1, ..., X_n]$.

Uno de nuestros objetivos es generalizar el algoritmo de la división de $k[X]$ en $k[X_1, ..., X_n]$. Recordemos:

Teorema (Algoritmo de la división en $k[X]$): Dados $f, g \in k[X]$ con $g \neq 0$, entonces existen únicos $r, q \in k[X]$ tales que $f = gq + r$ y $\deg(r) < \deg(g)$ o bien $r = 0$.

A r se lo conoce como el resto de la división y se caracteriza por ser de alguna manera más pequeño que g. En este caso ser mas pequeño está vinculado con el grado del polinomio. Notemos que en $k[X]$ puede establecer un orden total "razonable" entre los monomios mónicos a través del grado. Esto no es posible en $k[X_1, ..., X_n]$, pues por ejemplo los monomios $X_1, ..., X_n$ tienen grado 1 y son distintos. Por este inconveniente recurrimos a los órdenes monomiales que introduciremos en esta sección.

Definición 3.1.1: Definimos $\mathbb{T}^n = \{X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n} \in k[X_1, ..., X_n] : \beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n\}$. Si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, denotamos $X^\alpha = \prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_i} \in \mathbb{T}^n$, así $\mathbb{T}^n = \{X^\beta : \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$.

Definición 3.1.2: Un orden monomial en $k[X_1, ..., X_n]$ es un orden total $<$

en $\mathbb{T}^n$ que satisface:
(a) $1 < X^\beta$ para todo $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $\beta \neq 0$.
(b) Si $X^\alpha < X^\beta$, entonces $X^\alpha X^\gamma < X^\beta X^\gamma$ para todo $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$.

Definición 3.1.3: Definimos el orden lexicográfico en $\mathbb{T}^n$ por $X_1 > X_2 > ... > X_n$ y si $\alpha \neq \beta$ en $\mathbb{N}_0^n$, entonces $X^\alpha < X^\beta$ si, y solo si, $\alpha_{r_0} < \beta_{r_0}$ donde $r_0 = \min\{j \in \{1, ..., n\} : \alpha_j \neq \beta_j\}$.

Proposición 3.1.4: El orden lexicográfico en $\mathbb{T}^n$ es un orden monomial en $k[X_1, ..., X_n]$.

Demostración:
Es trivial que $X^\alpha > 1$ para todo $\alpha \neq 0$. Ahora sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ tales que $X^\alpha < X^\beta$. Entonces $X^\alpha X^\gamma = X^{\alpha+\gamma}$ y $X^\beta X^\gamma = X^{\beta+\gamma}$. Sea $r_0 = \min\{j \in \{1, ..., n\} : \alpha_j \neq \beta_j\}$, tenemos que:

$$\begin{gathered}\min\{j \in \{1, ..., n\} : (\alpha+\gamma)_j \neq (\beta+\gamma)_j\} = \\ \min\{ \text{ j} \in \{1, ..., n\} : \alpha_j + \gamma_j \neq \beta_j + \gamma_j\} = \\ \min\{ \text{ j} \in \{1, ..., n\} : \alpha_j + \gamma_j \neq \beta_j + \gamma_j\} = \\ \min\{ \text{ j} \in \{1, ..., n\} : \alpha_j \neq \beta_j\} = r_0\end{gathered}$$

Por hipótesis $\alpha_{r_0} < \beta_{r_0}$, entonces $(\alpha+\gamma)_{r_0} < (\beta+\gamma)_{r_0}$ y finalmente $X^\alpha X^\gamma = X^{\alpha+\gamma} < X^{\beta+\gamma} = X^\beta X^\gamma$. $\square$

Proposición 3.1.5: Sea $>$ un orden monomial en $k[X_1, ..., X_n]$. Sean $X^\alpha, X^\beta \in \mathbb{T}^n$, si X^α divide a X^β, entonces $X^\alpha < X^\beta$.

Demostración:
Sea $X^\beta \in \mathbb{T}^n$ tal que $X^\beta = X^\gamma X^\alpha$. Como $X^\gamma \geq X^0 = 1$, entonces $X^\beta = X^\gamma X^\alpha \geq X^\alpha$. $\square$

Teorema 3.1.6: Todo orden monomial en $k[X_1, ..., X_n]$ es bien ordenado, esto es, para todo $A \subseteq \mathbb{T}^n$ existe $X^\alpha \in A$ tal que $X^\alpha \leq X^\beta$ para todo $X^\beta \in A$.

Demostración:
Procedamos por el absurdo, supongamos que existen A no vacío y $\{X^{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ en A tal que $X^{\alpha_1} > X^{\alpha_2} > X^{\alpha_3} > ...$, esto define una cadena de ideales $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq ...$ donde $I_i = (X^{\alpha_1}, X^{\alpha_2}, ..., X^{\alpha_i})$. Veamos que $I_i \subset I_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $I_j = I_{j+1}$, entonces existen $u_1, ..., u_j \in k[X_1, ..., X_n]$ tales que $X^{\alpha_{j+1}} = \sum_{i=1}^{j} u_i X^{\alpha_i}$, escribiendo a cada u_i como combinación lineal de elementos de $\mathbb{T}^n$, como el lado derecho es igual a la potencia $X^{\alpha_{j+1}}$, luego existe $1 \leq r \leq j$ tal que algún término de $u_r X^{\alpha_r}$ es un múltiplo escalar de $X^{\alpha_{j+1}}$, en particular $X^{\alpha j}$ divide a $X^{\alpha j+1}$, luego $X^{\alpha j+1} > X^{\alpha j}$ absurdo. Entonces tenemos la cadena de ideales $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset ...$, pero esto contradice el Teorema de la Base de Hilbert. Este absurdo proviene de la negación de la tesis. $\square$

3.2. Algoritmo de la división en $k[X_1, ..., X_n]$.

Consideremos $>$ un orden monomial fijo en $k[X_1, ..., X_n]$.

Definición 3.2.1: Sea $f \in k[X_1, ..., X_n]$ no nulo, entonces existen $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{N}_0^n$ distintos y $a_1, ..., a_r \in k$ no nulos tales que $f = \sum_{i=1}^{r} a_i X^{\alpha_i}$. Si $X^{\alpha_1} > X^{\alpha_2} > ... > X^{\alpha_r}$, definimos:
(a) $\mathrm{lp}(f) = X^{\alpha_1}$, la potencia principal de f.
(b) $\mathrm{lc}(f) = a_1$, el coeficiente principal de f.
(c) $\mathrm{lt}(f) = a_1 X^{\alpha_1}$, el término principal de f.

Definición 3.2.2: Sean $f, g, h \in k[X_1, ..., X_n]$, con $g \neq 0$. Decimos que f es reducido a h módulo g, y lo denotamos $f \xrightarrow{g} h$ si $\mathrm{lp}(g)$ divide un término no nulo T de f y $h = f - \frac{T}{\mathrm{lt}(g)} g$.

Definición 3.2.3: Sean $f, h, f_1, ..., f_s \in k[X_1, ..., X_n]$ con $f_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq s$ y $F = \{f_1, ..., f_s\}$. Decimos que f es reducido a h módulo F, y lo denotamos $f \xrightarrow{F}_+ h$ si existe una sucesión $h_1, ..., h_{t-1} \in k[X_1, ..., X_n]$ tal que $f \xrightarrow{f_{i_1}} h_1 \xrightarrow{f_{i_2}} h_2 \xrightarrow{f_{i_3}} \cdots \xrightarrow{f_{i_{t-1}}} h_{t-1} \xrightarrow{f_{i_t}} h$, donde $1 \leq i_1, ..., i_n \leq s$.

Definición 3.2.4: Sean $r, f_1, ..., f_s \in k[X_1, ..., X_n]$ con $f_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq s$ y $F = \{f_1, ..., f_s\}$. Decimos que r es reducido sobre F si $r = 0$ o ningún término de r es divisible por algún $\mathrm{lp}(f_i)$, $1 \leq i \leq s$. En otras palabras, r no puede ser reducido módulo F.

Definición 3.2.5: Sean $r, f_1, ..., f_s \in k[X_1, ..., X_n]$ con $f_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq s$ y $F = \{f_1, ..., f_s\}$. Si $f \xrightarrow{F}_+ r$ y r es reducido sobre F, decimos que r es un resto de f respecto de F.

Proposición 3.2.6: Sean $f, r, f_1, ..., f_s \in k[X_1, ..., X_n]$ con $f_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq s$ y $F = \{f_1, ..., f_s\}$. Si $f \xrightarrow{F}_+ r$, entonces existen $u_1, ..., u_s \in k[X_1, ..., X_n]$ tales que $f = \sum_{i=1}^{s} u_i f_i + r$.

Demostración:
Sean $h_1, ..., h_{t-1} \in k[X_1, ..., X_n]$ tales que $f \xrightarrow{f_{i_1}} h_1 \xrightarrow{f_{i_2}} h_2 \xrightarrow{f_{i_3}} \cdots \xrightarrow{f_{i_{t-1}}} h_{t-1} \xrightarrow{f_{i_t}} r$, entonces existen $v_1, ..., v_t \in k[X_1, ..., X_n]$ tales que $h_{j+1} = h_j - v_{j+1} f_{i_{j+1}}$ para todo $0 \leq j \leq t-1$, donde $h_0 = f$ y $h_t = r$, entonces $r = f - \sum_{j=1}^{t} v_j f_{i_j}$, luego $f = \sum_{j=1}^{t} v_j f_{i_j} + r$, reagrupando los v_j, obtenemos los u_j buscados.$\square$

Teorema 3.2.7 (Algoritmo de la división en $k[X_1, ..., X_n]$): Sean $f, f_1, ..., f_s \in k[X_1, ..., X_n]$ no nulos y $F = \{f_1, ..., f_s\}$. Definimos recursivamente:
(a) $h_0 = f$, $u_{i,0} = 0$ $(1 \leq i \leq s)$, $r_0 = 0$.
(b) Si $h_j = 0$, entonces $u_{i,j} = u_i$ $(1 \leq i \leq s)$, $r = r_j$.
(c) Si $h_j \neq 0$, en el caso que existe $1 \leq d \leq s$ tal que $\mathrm{lp}(f_d)$ divide a $\mathrm{lp}(h_j)$, entonces elegimos un d que satisfaga esto y definimos $u_{d,j+1} = u_{d,j} + \frac{\mathrm{lt}(h_j)}{\mathrm{lt}(f_d)}$,

$h_{j+1} = h_j - \frac{\mathrm{lt}(h_j)}{\mathrm{lt}(f_d)} f$, $r_{j+1} = r_j$ y $u_{i,j+1} = u_{i,j}$ $(1 \leq i \leq s,\ i \neq d)$, en el caso contrario, definimos $r_{j+1} = r_j + \mathrm{lt}(h_j)$, $h_{j+1} = h_j - \mathrm{lt}(h_j)$ y $u_{i,j+1} = u_{i,j}$ $(1 \leq i \leq s)$.

Entonces $r, u_1, ..., u_s$ satisfacen que $f = \sum_{i=1}^{s} u_i f_i + r$, r es reducido sobre F y $\mathrm{lp}(f) = \max\{\mathrm{lp}(r), \mathrm{lp}(u_1 f_1), ..., \mathrm{lp}(u_s f_s)\}$. En este caso, a r lo llamaremos resto de f en F.

Demostración:

Veamos primero que el algoritmo termina, es decir, veamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $h_N = 0$. Supongamos que no existe tal N. Notemos que el algoritmo implica inmediatamente que $\mathrm{lp}(h_j) > \mathrm{lp}(h_{j+1})$. Pero como $(\mathbb{T}^n, >)$ es bien ordenado, entonces $\{\mathrm{lp}(h_j) : j \in \mathbb{N}_0\}$ tiene un mínimo h_{N_0}. Si $h_{N_0+1} \neq 0$, entonces $\mathrm{lp}(h_{N_0}) > \mathrm{lp}(h_{N_0+1})$, lo que es imposible, luego $h_{N_0} = 0$, y así, $r, u_1, ..., u_s$ están definidos.

Inductivamente es fácil probar que $f = h_j + \sum_{i=1}^{s} u_{i,j} f_i + r_j$ separando en los casos correspondientes, entonces es inmediato que $f = \sum_{i=1}^{s} u_i f_i + r$. Del algoritmo obtenemos rápidamente que $r = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{lt}(h_{i_j})$ donde $h_{i_1}, ..., h_{i_l}$ son los h_i's que no tienen ningún termino divisible por algún f_i, así, r es reducido sobre F. Para la última parte, notar inductivamente que $\mathrm{lp}(h_j) \leq \mathrm{lp}(f)$ para todo j donde h_j está definido, entonces $\mathrm{lp}(r) \leq \mathrm{lp}(f)$ pues $r = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{lt}(h_{i_j})$. Sea $1 \leq i \leq s$, tenemos que $u_{i,0} = 0$, supongamos que $\mathrm{lp}(u_{i,j} f_j) \leq \mathrm{lp}(f)$, entonces en el peor de los casos:

$$\mathrm{lp}(u_{i,j+1} f_i) = \mathrm{lp}(u_{i,j+1})\mathrm{lp}(f_i) = \left(\max\left\{\mathrm{lp}(u_{i,j}), \frac{\mathrm{lp}(h_j)}{\mathrm{lp}(f_j)}\right\}\right)\mathrm{lp}(f_i) =$$
$$\max\left\{\mathrm{lp}(u_{i,j})\mathrm{lp}(f_i), \frac{\mathrm{lp}(h_j)}{\mathrm{lp}(f_i)}\mathrm{lp}(f_i)\right\} \leq \max\left\{\mathrm{lp}(u_{i,j})\mathrm{lp}(f_i), \mathrm{lp}(h_j)\right\} \leq \mathrm{lp}(f)$$

así $\mathrm{lp}(u_i f_i) \leq \mathrm{lp}(f)$. $\square$

3.3. Bases de Gröbner.

Consideremos $>$ un orden monomial fijo en $k[X_1, ..., X_n]$.

Definición 3.3.1: Sean I un ideal propio de $k[X_1, ..., X_n]$, $g_1, ..., g_t \in I$ no nulos y $G = \{g_1, ..., g_t\}$. Decimos que G es una base de Gröbner de I si para todo $f \in I$ no nulo, existe $1 \leq i \leq t$ tal que $\mathrm{lp}(g_i)$ divide a $\mathrm{lp}(f)$.

Definición 3.3.2: Sea $S \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ con $0 \notin S$, definimos el ideal $\mathrm{Lt}(S) = (\{\mathrm{lt}(s) : s \in S\})$.

Teorema 3.3.3: Sean I un ideal propio de $k[X_1, ..., X_n]$, $g_1, ..., g_t \in I$ no nulos y $G = \{g_1, ..., g_t\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(a) G es una base de Gröbner de I.
(b) $f \in I$ si, y solo si, $f \xrightarrow{G}_+ 0$.
(c) $f \in I$ si, y solo si, existen $h_1, ..., h_t \in k[X_1, ..., X_n]$ tales que $f = \sum_{i=1}^{t} h_i g_i$ y $\mathrm{lp}(f) = \max\{\mathrm{lp}(h_1)\mathrm{lp}(g_1), ..., \mathrm{lp}(h_n)\mathrm{lp}(g_n)\}$.

(d) $\mathrm{Lt}(G) = \mathrm{Lt}(I)$.

Demostración:
(a)$\Rightarrow$(b) Sea $f \in k[X_1, ..., X_n]$, entonces existe $r \in k[X_1, ..., X_n]$ reducido sobre G tal que $f \xrightarrow{G}_+ r$, entonces $f - r \in I$, luego $f \in I$ si, y solo si, $r \in I$. Si $r = 0$, claramente $f \in I$. Supongamos que $f \in I$, entonces $r \in I$, pero si $r \neq 0$, existe $1 \leq i \leq t$ tal que $\mathrm{lp}(g_i)$ divide a $\mathrm{lp}(r)$, absurdo, entonces $r = 0$.
(b)$\Rightarrow$(c) Resulta de 3.2.7.
(c)$\Rightarrow$(d) Es trivial que $\mathrm{Lt}(G) \subseteq \mathrm{Lt}(I)$. Para la otra inclusión es suficiente probar que para todo $f \in I$, se tiene que $\mathrm{lt}(f) \in \mathrm{Lt}(G)$. Por hipótesis existen $h_1, ..., h_t \in k[X_1, ..., X_n]$ tales que $f = \sum_{i=1}^{t} h_i g_i$ y que $\mathrm{lp}(f) = \max\{\mathrm{lp}(h_1)\mathrm{lp}(g_1), ..., \mathrm{lp}(h_t)\mathrm{lp}(g_t)\} \in \mathrm{Lt}(G)$. Sea $S = \{i \in \{1, ..., s\} : \mathrm{lp}(f) = \mathrm{lp}(h_i)\mathrm{lp}(g_i)\}$, entonces $\mathrm{lt}(f) = \sum_{i \in S} \mathrm{lt}(h_i)\mathrm{lt}(g_i) \in \mathrm{Lt}(G)$.
(d)$\Rightarrow$(a) Sea $f \in I$, entonces $\mathrm{lt}(f) \in \mathrm{Lt}(G)$, luego existen $h_1, ..., h_t \in k[X_1, ..., X_n]$ tales que $\mathrm{lt}(f) = \sum_{i=1}^{t} h_i \mathrm{lt}(g_i)$. Expandiendo el lado derecho de $\mathrm{lt}(f) = \sum_{i=1}^{t} h_i \mathrm{lt}(g_i)$, todos sus sumandos son divisibles por algún $\mathrm{lp}(g_i)$, entonces debe existir un $1 \leq j \leq t$ tal que $\mathrm{lp}(g_j)$ divide a $\mathrm{lp}(f)$. □

Corolario 3.3.4: Sean I un ideal propio de $k[X_1, ..., X_n]$ y $G = \{g_1, ..., g_t\}$ una base de Gröbner de I. Entonces $I = (g_1, ..., g_t)$.

Demostración:
Es inmediato de 3.3.3. □

Lema 3.3.5: Sean I un ideal propio de $k[X_1, ..., X_n]$ generado por $S \subseteq k[X_1, ..., X_n]$, donde S contiene solo monomios y $f \in k[X_1, ..., X_n]$. Entonces $f \in I$ si, y solo si, para todo X término de f existe $Y \in S$ tal que Y divide a X. Además existe S_0 subconjunto finito de S tal que $I = (S_0)$.

Demostración:
Si $f \in I$, entonces existen $h_1, ..., h_t \in k[X_1, ..., X_n]$, $f_1, ..., f_t \in S$ tales que $f = \sum_{i=1}^{t} h_i f_i$, expandiendo el lado derecho es inmediato que todo término de f es dividido por algún $f_j \in S$.

Ahora supongamos que para todo X término de f existe $Y \in S$ tal que Y divide a X. Pero entonces f es suma de monomios que son divididos por elementos de S, como $I = (S)$, entonces $f \in I$. La última parte se deduce del Teorema de la base de Hilbert. □

Corolario 3.3.6: Sea I un ideal propio de $k[X_1, ..., X_n]$ generado por $S \subseteq k[X_1, ..., X_n]$, donde S contiene solo monomios. Entonces existe G base de Gröbner de I.

Demostración:
Por 3.3.5, existen $g_1, ..., g_t \in I$ tales que $\mathrm{Lt}(I) = (\mathrm{lt}(g_1), ..., \mathrm{lt}(g_t))$, si $G = \{g_1, ..., g_t\}$, entonces $\mathrm{Lt}(I) = \mathrm{Lt}(G)$, así G es base de Gröbner de I. □

Definición 3.3.7: Decimos que $G = \{g_1, ..., g_t\} \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ es una base de Gröbner, si G es una base de Gröbner de $(G) = (g_1, ..., g_t)$.

Teorema 3.3.8: Sea $G = \{g_1, ..., g_t\} \subset k[X_1, ..., X_n]$ una base de Gröbner. Entonces para todo $f \in k[X_1, ..., X_n]$ el resto de f en la división por G es único.

Demostración:
Sea $f \in k[X_1, ..., X_n]$ fijo y sean $r_1, r_2 \in k[X_1, ..., X_n]$ tales que $f \xrightarrow{G}_+ r_1$, $f \xrightarrow{G}_+ r_2$ y que r_1 y r_2 son reducidos sobre G. Entonces $f - r_1, f - r_2 \in (G)$. Así $r_1 - r_2 \in (G)$, pero $r_1 - r_2$ son reducidos sobre G y esto solo es posible si $r_1 - r_2 = 0$ y finalmente $r_1 = r_2$. $\square$

Observación: La recíproca de 3.3.8 es cierta, pero su prueba es más complicada y escapa de los objetivos de este trabajo.

Sean $f \in k[X_1, ..., X_n]$ y I un ideal de $k[X_1, ..., X_n]$. Si ya conocemos una base de Gröbner G de I, 3.3.8 nos brinda un algoritmo para determinar si $f \in I$. En efecto, basta aplicar el algoritmo de la división de f sobre G y chequear si el resto es 0.

3.4. Algoritmo de Buchberger.

Consideremos $>$ un orden monomial fijo en $k[X_1, ..., X_n]$.

Definición 3.4.1: Sean $f, g \in k[X_1, ..., X_n]$ no nulos y $L = \text{mcm}(\text{lp}(f), \text{lp}(g))$. Definimos el S-polinomio de f y g por $S(f, g) = \frac{L}{\text{lt}(f)} f - \frac{L}{\text{lt}(g)} g$.

Lema 3.4.2: Sean $f_1, ..., f_s \in k[X_1, ..., X_n]$ no nulos tales que $\text{lp}(f_i) = X \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq s$. Sea f una combinación k-lineal de $\{f_1, ..., f_s\}$. Si $\text{lp}(f) < X$, entonces f es combinación k-lineal de $\{S(f_i, f_j) : 1 \leq i < j \leq s\}$.

Demostración:
Sean $g_1, ..., g_s \in k[X_1, ..., X_n]$ tales que $f_i = a_i X + g_i$ donde $a_i = \text{lc}(f_i)$ para todo $1 \leq i \leq s$, así $\text{lp}(g_i) < X$ para todo $1 \leq i \leq s$. Por hipótesis $\sum_{i=1}^{s} c_i a_i = 0$, pues $\text{lp}(f) < X$ y $f = \sum_{i=1}^{s} c_i f_i$. Notemos que $S(f_i, f_j) = \frac{1}{a_i} f_i - \frac{1}{a_j} f_j$ para todos $1 \leq i, j \leq s$. Entonces $f = \sum_{i=1}^{s} c_i f_i = \sum_{i=1}^{s} c_i a_i \left(\frac{1}{a_i} f_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{s-1} c_j a_j\right) \left(\frac{1}{a_i} f_i - \frac{1}{a_{i+1}} f_{i+1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{s} c_i a_i\right) \frac{1}{a_s} f_s = \sum_{i=i}^{s-1} \left(\sum_{j=1}^{i} c_j a_j\right) S(f_i, f_{i+1})$. $\square$

Teorema 3.4.3: Sea $G = \{g_1, ..., g_t\}$ un conjunto de polinomios no nulos en $k[X_1, ..., X_n]$. Entonces G es base de Gröbner si, y solo si, $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$ para todo $i \neq j$.

Demostración:

Supongamos que G es una base de Gröbner de $I = (g_1, ..., g_s)$. Entonces $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$ pues $S(g_i, g_j) \in I$ para todo $i \neq j$.

Recíprocamente, supongamos que $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$ para todo $i \neq j$, sea $f \in I$ arbitrario. Sean $h_1, ..., h_s \in k[X_1, ..., X_n]$ tales que $f = \sum_{i=1}^{s} h_i g_i$, denotamos $X = \text{máx}_{1 \leq i \leq t}\{\text{lp}(h_i)\text{lp}(g_i)\}$. Si $\text{lp}(f) = X$ no hay nada que probar. Como los ordenes monomiales son bien ordenados, podemos suponer que X es mínimo ante los posibles h_i, y supongamos que $\text{lp}(f) < X$. Sea $S = \{i : \text{lp}(h_i)\text{lp}(g_i) = X\}$ y para todo $i \in S$ definimos $X_i = \text{lp}(h_i)$ y $c_i = \text{lc}(h_i)$. Sea $g = \sum_{i \in S} c_i X_i g_i$, de esta forma tenemos $\text{lp}(X_i g_i) = X$ y $\text{lp}(g) < X$. Por 3.4.2 existen $d_{i,j} \in k$ $(i, j \in S, i \neq j)$ tales que $g = \sum_{i,j \in S, i \neq j} d_{i,j} S(X_i g_i, X_j g_j)$. Fijemos por el momento $i, j \in S, i \neq j$, tenemos que $X = \text{mcm}(\text{lp}(X_i g_i), \text{lp}(X_j g_j))$, entonces $S(X_i g_i, X_j g_j) = \frac{X}{\text{lt}(X_i g_i)} X_i g_i - \frac{X}{\text{lt}(X_j g_j)} X_j g_j = \frac{X}{\text{lt}(g_i)} g_i - \frac{X}{\text{lt}(g_j)} g_j = \frac{X}{X_{i,j}} S(g_i, g_j)$ donde $X_{i,j} = \text{mcm}(\text{lp}(g_i), \text{lp}(g_j))$. Por hipótesis $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$, entonces $S(X_i g_i, X_j g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$. Entonces existen $h_{i,j,v} \in k[X_1, ..., X_n]$ $(i, j \in S, i \neq j, 1 \leq v \leq t)$ tales que $S(X_i g_i, X_j g_j) = \sum_{v=1}^{t} h_{i,j,v} g_v$ para todo $i \neq j$. Por un teorema anterior $\text{máx}_{1 \leq v \leq t}\{\text{lp}(h_{i,j,v})\text{lp}(g_v)\} = \text{lp}(S(X_i g_i, X_j g_j)) < \text{máx}\{\text{lp}(X_i g_i, X_j g_j)\} = X$. Así:

$$g = \sum_{i,j \in S, i \neq j} d_{i,j} \left(\sum_{v=1}^{t} h_{i,j,v} g_v \right) = \sum_{v=1}^{t} \left(\sum_{i,j \in S, i \neq j} d_{i,j} h_{i,j,v} \right) g_v.$$

Sean $h_v = \sum_{i,j \in S, i \neq j} d_{i,j} h_{i,j,v}$, luego $g = \sum_{v=1}^{t} h_v g_v$ con $\text{lp}(h_v)\text{lp}(g_v) < X$ para todo $1 \leq v \leq t$. Finalmente $f = g + \sum_{v=1}^{t} (h_v - c_v X_v) g_v = \sum_{v=1}^{t} (h_v - c_v X_v + h_v) g_v$. Si definimos $h'_v = h_v - c_v X_v + h_v$, entonces $\text{lp}(h'_v)\text{lp}(g_v) < X$ para todo $1 \leq v \leq t$ y $f = \sum_{v=1}^{t} h'_v g_v$, lo que es un absurdo por la minimalidad de X. □

Corolario 3.4.4: Sea $G = \{g_1, ..., g_t\}$ un conjunto de polinomios no nulos en $k[X_1, ..., X_n]$. Entonces G es base de Gröbner si, y solo si, $S(g_i, g_j) = \sum_{v=1}^{t} h_{i,j,v} g_v$ donde $\text{lp}(S(g_i, g_j)) = \max_{1 \leq v \leq t}\{\text{lp}(h_i, j, v)\text{lp}(g_v)\}$ para todo $i \neq j$.

Demostración:

Es inmediato de 3.4.3. □

Teorema 3.4.5 (Algoritmo de Buchberger): Sea $F = \{f_1, ..., f_t\}$ un conjunto de polinomios no nulos en $k[X_1, ..., X_n]$. Definimos recursivamente:
(a) $G_0 = \{f_1, ..., f_t\}$ y $H_0 = \{\{f_i, f_j\} : f_i \neq f_j : f_i, f_j \in G_0\}$.
(b) Si $H_i = \emptyset$, entonces $G = G_i$.
(c) Si $H_i \neq \emptyset$, elegimos cualquier $\{f, g\} \in H_i$ y sea $h \in k[X_1, ..., X_n]$ tal que $S(f, g) \xrightarrow{G_i}_+ h$, si $h = 0$, entonces $G_{i+1} = G_i$ y $H_{i+1} = H_i \setminus \{\{f, g\}\}$, si $h \neq 0$, entonces $G_{i+1} = G_i \cup \{h\}$ y $H_{i+1} = H_i \cup \{\{h, p\} : p \in G_i\} \setminus \{\{f, g\}\}$.

Entonces G es una base de Gröbner del ideal $I = (f_1, ..., f_t)$.

Demostración:

Primero veamos que el algoritmo termina. Supongamos que no. Entonces tenemos la cadena ascendente $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \cdots$, luego $\mathrm{Lt}(G_1) \subset \mathrm{Lt}(G_2) \subset \mathrm{Lt}(G_3) \subset \cdots \subset I$ lo que contradice el Teorema de la base de Hilbert.

Como $I = (f_1, ..., , f_s) \subseteq (G) \subseteq I$, así $I = (G)$. Sean $f, g \in G$ distintos, consideremos $n \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $f, g \in G_n$, luego existe $h \in k[X_1, ..., X_n]$ tal que $S(f,g) \xrightarrow{G_m}_+ h$ y que $h \in G_{m+1}$ donde $m \geq n$. Pero $S(f,g) \xrightarrow{G_{m+1}}_+ 0$, y así $S(f,g) \xrightarrow{G}_+ 0$. $\square$

3.5. Bases de Gröbner minimales y reducidas.

Consideremos $>$ un orden monomial fijo en $k[X_1, ..., X_n]$.

Definición 3.5.1: Una base de Gröbner $G = \{g_1, ..., g_t\} \subseteq k[X_1, ..., X_n]$ es llamada minimal si $\mathrm{lc}(g_i) = 1$ para todo $1 \leq i \leq t$ y $\mathrm{lp}(g_i)$ no divide a $\mathrm{lp}(g_j)$ para todo $i \neq j$.

Lema 3.5.2: Sea $G = \{g_1, ..., g_t\}$ una base de Gröbner del ideal I. Si $\mathrm{lp}(g_2)$ divide a $\mathrm{lp}(g_1)$, entonces $\{g_2, ..., g_t\}$ es una base de Gröbner de I.

Demostración:
Sea $f \in I$, si $\mathrm{lp}(g_1)$ divide a $\mathrm{lp}(f)$, entonces $\mathrm{lp}(g_2)$ divide a $\mathrm{lp}(f)$. Luego por definición G es una base de Gröbner de I. $\square$

Corolario 3.5.3: Sea $G = \{g_1, ..., g_t\}$ una base de Gröbner del ideal I. Entonces se puede obtener una base de Gröbner minimal de I eliminando recursivamente los g_i tales que existe $j \neq i$ que satisface que $\mathrm{lp}(g_j)$ divide a $\mathrm{lp}(g_i)$ y g_j no fue eliminado en ese momento de la recursión y dividiendo cada g_i restante por $\mathrm{lc}(g_i)$.

Demostración:
Es trivial. $\square$

Proposición 3.5.4: Si $G = \{g_1, ..., g_t\}$ y $F = \{f_1, ..., f_s\}$ son bases de Gröbner minimales de un ideal I de $k[X_1, ..., X_n]$. Entonces $s = t$ y existe $\sigma \in \mathbb{S}_t$ tal que $\mathrm{lt}(g_i) = \mathrm{lt}(f_{\sigma(i)})$ para todo $1 \leq i \leq t$.

Demostración:
Como $g_u \in I$ y como F es base de Gröbner de I, entonces existe $1 \leq i \leq s$ tal que $\mathrm{lp}(f_i)$ divide a $\mathrm{lp}(g_u)$, además, como G es una base de Gröbner de I, existe $1 \leq j \leq t$ tal que $\mathrm{lp}(g_j)$ divide a $\mathrm{lp}(f_i)$. Así $\mathrm{lp}(g_j)$ divide a $\mathrm{lp}(g_u)$, pero como G es una base de Gröbner minimal, entonces $j = 1$ y $\mathrm{lp}(g_u) = \mathrm{lp}(f_i)$, definimos así $\sigma(u) = i$. Como $\mathrm{lp}(g_{u'})$ no divide a $\mathrm{lp}(g_u)$ para todo $u' \neq u$ y como $\mathrm{lp}(h_{i'})$ no divide a $\mathrm{lp}(h_i)$ para todo $i' \neq i$, entonces procediendo recursivamente. $\square$

Definición 3.5.5: Una base de Gröbner $G = \{g_1, ..., g_t\}$ se dice reducida si $\mathrm{lc}(g_i) = 1$ para todo $1 \leq i \leq t$ y si g_i es reducido respecto $G \setminus \{g_i\}$ para todo $1 \leq i \leq t$.

Corolario 3.5.6: Sea $G = \{g_1, ..., g_t\}$ una base de Gröbner minimal de un ideal I de $k[X_1, ..., X_n]$. Consideremos el siguiente algoritmo:

- $g_1 \xrightarrow{H_1}_+ h_1$ con h_1 reducido respecto a $H_1 = \{g_2, ..., g_t\}$.
- $g_2 \xrightarrow{H_2}_+ h_1$ con h_2 reducido respecto a $H_2 = \{h_1, g_3, ..., g_t\}$.

$\vdots$

- $g_t \xrightarrow{H_t}_+ h_t$ con h_t reducido respecto a $H_t = \{h_1, h_2, ..., h_{t-1}\}$.

Entonces $H = \{h_1, ..., h_t\}$ es una base de Gröbner reducida de I.

Demostración:

Notemos que es suficiente probar que $\mathrm{lp}(g_i) = \mathrm{lp}(h_i)$ para todo $1 \leq i \leq t$. Recursivamente, si $\mathrm{lp}(g_i) = \mathrm{lp}(h_i)$ para todo $1 \leq i \leq s$, entonces $\mathrm{lp}(g_{s+1})$ no puede ser cancelado por $h_1, ..., h_s, g_{s+2}, ..., g_t$, pues $\mathrm{lp}(h_1), ..., \mathrm{lp}(h_s), \mathrm{lp}(g_{s+2})$, $..., \mathrm{lp}(g_t)$ no dividen a $\mathrm{lp}(g_{s+1})$, como G es una base de Gröbner minimal, obtenemos así que $\mathrm{lp}(g_s) = \mathrm{lp}(h_s)$. $\square$

Teorema 3.5.7: Dado un orden monomial fijo en $k[X_1, ..., X_n]$, las bases de Gröbner reducidas son únicas en cualquier ideal de $k[X_1, ..., X_n]$.

Demostración:

Sean $G = \{g_1, ..., g_t\}$ y $H = \{h_1, ..., h_t\}$ dos bases reducidas de un ideal I de $k[X_1, ..., X_n]$. Por la última proposición podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathrm{lt}(g_i) = \mathrm{lt}(h_i)$ para todo $1 \leq i \leq t$. Fijemos $1 \leq i \leq t$. Supongamos que $h_i \neq g_i$, tenemos que $g_i - h_i \in I$, luego existe $1 \leq j \leq t$ tal que $\mathrm{lp}(h_j)$ divide a $\mathrm{lp}(g_i - h_i)$. Como $\mathrm{lp}(g_i - h_i) < \mathrm{lp}(h_i)$, entonces $i \neq j$. Así $\mathrm{lp}(g_j) = \mathrm{lp}(h_j)$ divide un término de h_i o de g_i. Esto es un absurdo, pues G y H son bases de Gröbner reducidas de I. Así $g_i = h_i$. $\square$

3.6. Un último algoritmo.

Sean $f \in k[X_1, ..., X_n]$ y I un ideal de $k[X_1, ..., X_n]$. Nos falta un algoritmo para determinar si $f \in \sqrt{I}$. En esta sección daremos un resultado que nos da este algoritmo. Dado que vamos a usar el Teorema de los ceros de Hilbert, impondremos la hipótesis de que k es algebraicamente cerrado. Además consideremos $>$ un orden monomial fijo en $k[X_1, ..., X_n]$.

Teorema 3.6.1: Sean $f \in k[X_1, ..., X_n]$, y I un ideal de $k[X_1, ..., X_n]$. Si $f_1, ..., f_s \in k[X_1, ..., X_n]$ son no nulos tales que $I = (f_1, ..., f_s)$, entonces $f \in \sqrt{I}$ si, y solo si, $1 \in (f_1, ..., f_s, 1 - \omega f) \subseteq k[X_1, ..., X_n, \omega]$; donde ω es otra variable polinómica.

Demostración:

Por el Teorema de los ceros de Hilbert, $I(Z(I)) = \sqrt{I}$, luego $f \in \sqrt{I}$ si, y solo si, $f(a_1, ..., a_n) = 0$ para todo $(a_1, ..., a_n) \in Z(I)$.

Supongamos que $f \in \sqrt{I}$. Si $(a_1, ..., a_n, b) \in Z((f_1, ..., f_s, 1 - \omega f))$, entonces $f_i(a_1, ..., a_n) = 0$ para todo $1 \leq i \leq s$ y $1 - bf(a_1, ..., a_n) = 0$. Pero entonces $(a_1, ..., a_n) \in Z(I)$, luego $f(a_1, ..., a_n) = 0$ y así $0 = 1 - bf(a_1, ..., a_n) = 1$, absurdo. De esta forma $Z((f_1, ..., f_s, 1 - \omega f)) = \emptyset$ y finalmente $1 \in k[X_1, ..., X_n] = (f_1, ..., f_s, 1 - \omega f)$.

Recíprocamente ahora supongamos que $1 \in (f_1, ..., f_s, 1 - \omega f)$. Entonces existen $h_1, ..., h_s, h \in k[X_1, ..., X_n, \omega]$ tales que $1 = \sum_{i=1}^{s} h_i f_i + h(1 - \omega f)$. Entonces, para todo $(a_1, ..., a_n) \in Z(I)$ tenemos que $1 = h(a_1, ..., a_n, \omega)(1 - \omega f(a_1, ..., a_n))$; notar que el lado derecho es un polinomio en ω. Si existe $(a_1, ..., a_n) \in Z(I)$ tal que $f(a_1, ..., a_n) \neq 0$, entonces evaluando $\omega = \frac{1}{f(a_1, ..., a_n)}$ obtenemos:

$$1 = h\left(a_1, ..., a_n, \frac{1}{f(a_1, ..., a_n)}\right)\left(1 - \frac{1}{f(a_1, ..., a_n)} f(a_1, ..., a_n)\right) = 0$$

absurdo. Así $f(a_1, ..., a_n) = 0$ para todo $(a_1, ..., a_n) \in Z(I)$ y finalmente $f \in \sqrt{I}$. $\square$

Capítulo 4

4. Ideales de polinomios asociados a estructuras algebraicas de dimensión finita.

En este capítulo k es un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica 0.

4.1. Introducción.

Sean V un k-espacio vectorial de dimensión n y $B = \{e_1, ..., e_n\}$ una base de V. Denotamos por $\mathbf{F}$ a la familia de todas las álgebras cuyo espacio vectorial subyacente es V. Toda álgebra en $\mathbf{F}$ está unívocamente determinada por sus coeficientes de estructura asociados a B, estos son $\{\mu_{i,j,r}\}_{1\leq i,j,r\leq n}$ que están en k y satisfacen:

$$e_i e_j = \sum_{r=1}^{n} \mu_{i,j,r} e_r$$

Sea $\mathbf{A}$ una subfamilia de álgebras de $\mathbf{F}$ que está caracterizada por satisfacer ciertos invariantes en la categoría de álgebras (por ejemplo $\mathbf{A}$ podría ser la subfamilia de álgebras de Lie 3 pasos nilpotente). Así podemos ver a $\mathbf{F}$ como $k^{n\times n\times n}$ (vía los coeficientes de estructura) y a $\mathbf{A}$ como un subconjunto de este. Supongamos además que para todo invariante inv que caracterize a $\mathbf{A}$ existen $\{p_u\}_{u\in I}$ en $k[X_{a,b,c}]_{1\leq a,b,c\leq n}$ tales que A en $\mathbf{F}$ satisface inv si, y solo si, los coeficientes de estructura $\{\mu_{i,j,r}\}_{1\leq i,j,r\leq n}$ cumplen $p_u(\mu_{i,j,r})_{1\leq i,j,r\leq n} = 0$ para todo $u \in I$. En este caso decimos $\{p_u\}_{u\in I}$ determina inv y denotamos $C_{\mathrm{inv},n} = \{p_u : u \in I\}$.

Ejemplo 4.1.1: Supongamos que uno de los invariantes que satisface $\mathbf{A}$ es la asociatividad. Por la bilinealidad del producto tenemos que $A \in \mathbf{F}$ es asociativa si, y solo si, $e_a(e_b e_c) = (e_a e_b)e_c$ para todos $1 \leq a, b, c \leq n$, lo cual vía los coeficientes de estructura se traduce a:

$$e_a \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_{b,c,i} e_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_{a,b,i} e_i \right) e_c,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{b,c,i}(e_a e_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{a,b,i}(e_i e_c),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{b,c,i} \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_{a,i,j} e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{a,b,i} \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_{i,c,j} e_j \right),$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_{b,c,i}\mu_{a,i,j} \right) e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_{a,b,i}\mu_{i,c,j} \right) e_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_{b,c,i}\mu_{a,i,j} - \mu_{a,b,i}\mu_{i,c,j} \right) e_j = 0,$$

y esto ocurre si, y solo si, $\sum_{i=1}^{n} \mu_{b,c,i}\mu_{a,i,j} - \mu_{a,b,i}\mu_{i,c,j} = 0$ para todos $1 \leq a, b, c, j \leq n$. De esta manera obtenemos que:

$$C_{\text{asoc},n} = \left\{ p_{a,b,c,d} = \sum_{i=1}^{n} X_{a,b,i}X_{i,c,d} - X_{a,i,d}X_{b,c,i} : 1 \leq a, b, c, d \leq n \right\},$$

Ejemplo 4.1.2: Si uno de los invariantes de **A** es la identidad de Jacobi (que en el fondo es otra forma de asociar distinta a la usual) de manera análoga al ejemplo anterior obtenemos:

$$C_{\text{Jac},n} = \left\{ p_{a,b,c,d} = \sum_{i=1}^{n} X_{b,c,i}X_{a,i,d} + X_{c,a,i}X_{b,i,d} + X_{a,b,i}X_{c,i,d} : 1 \leq a, b, c, d \leq n \right\}.$$

Definición 4.1.3: Si **A** está caracterizada por los invariantes inv1, inv2,..., inv$m$, definimos el ideal asociado a **A** por:

$$I_{\text{inv1,inv2,...,inv}m,n} = \left(\bigcup_{i=1}^{m} C_{\text{inv}i,n} \right).$$

Hasta ahora, nos dedicamos a convertir todas las "propiedades algebraicas comunes" de las álgebras en **A** en un ideal de polinomios vía los coeficientes de estructura. Pero este ideal que definimos, ¿contiene a todos los polinomios de $k[X_{i,j,r}]_{1\leq i,j,r\leq n}$ que anulan a los coeficientes de estructura de toda álgebra en $\mathbf{A}$?, primero definamos los polinomios de los que estamos hablando:

Definición 4.1.4: Decimos que un polinomio $p \in k[X_{i,j,r}]_{1\leq i,j,r\leq n}$ es una propiedad algebraica de $\mathbf{A}$ si $p(\mu_{i,j,r})_{1\leq i,j,r\leq n} = 0$ todos los coeficientes de estructura $\{\mu_{i,j,r}\}_{1\leq i,j,r\leq n}$ de todas las álgebras de $\mathbf{A}$. Está claro que $I_{\mathbf{A}} = \{p \in k[X_{i,j,r}]_{1\leq i,j,r\leq n} : p$ es una propiedad algebraica de $\mathbf{A}\}$ es un ideal de $k[X_{i,j,r}]_{1\leq i,j,r\leq n}$.

Así, $I_{\mathbf{A}}$ es el ideal que contiene todas las propiedades algebraicas de las álgebras de $\mathbf{A}$. Identifiquemos a $\mathbf{F}$ por $k^{n\times n\times n}$ y a $\mathbf{A}$ por el correspondiente subconjunto $S \subseteq k^{n\times n\times n}$. Notemos que la definición de $I_{\mathbf{A}}$ coincide con la definición de $I(S)$ (Definición 1.3.7), pero además $S = Z(J)$, donde J es el ideal asociado a $\mathbf{A}$. Por el Teorema de los ceros de Hilbert, $I_{\mathbf{A}} = I(Z(J)) = \sqrt{J}$, entonces la respuesta a nuestra pregunta se reduce a decidir si el ideal asociado a $\mathbf{A}$ es radical. Esto nos motiva a entender lo máximo posible el ideal $\sqrt{J}$.

Ejemplo 4.1.5: ¿Todas las álgebras asociativas de dimensión 7 y nilpotentes de índice 4 son conmutativas?. Una posible solución a esta pregunta es determinar si todos los polinomios asociados a la conmutatividad están en el radical del ideal asociado a esta familia.

En las siguientes secciones de este capítulo estudiaremos los ideales algunas estructuras algebraicas, para eso utilizaremos los algoritmos que fuimos desarrollando durante el trabajo implementados en SINGULAR. El algoritmo para calcular el radical un ideal que usaremos se lo puede ver en [7] y [8]. El orden monomial que usaremos es el lexicográfico en $k[X_{i,j,r}]_{1\leq i,j,r\leq n}$, donde $X_{a,b,c} > X_{d,e,f}$ si, y solo si, $a10^{2n} + b10^n + c < d10^{2n} + e10^n + f$.

4.2. Ejemplos de conjuntos de polinomios asociados a invariantes.

En esta sección presentaremos una lista de los conjuntos de polinomios asociados a los invariantes que vamos a estudiar.

- *Asociatividad:*

$$C_{\text{asoc},n} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_{a,b,i}X_{i,c,d} - X_{a,i,d}X_{b,c,i} : 1 \leq a,b,c,d \leq n \right\}$$

- *Identidad de Jacobi:*

$$C_{\text{Jac},n} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_{b,c,i}X_{a,i,d} + X_{c,a,i}X_{b,i,d} + X_{a,b,i}X_{c,i,d} : 1 \leq a,b,c,d \leq n \right\}$$

- *Conmutatividad:*

$$C_{\text{con},n} = \{X_{a,b,c} - X_{b,a,c} : 1 \leq a,b,c \leq n \text{ y } a \leq b\}$$

- *Anticonmutatividad:*

$$C_{\text{antcon},n} = \{X_{a,b,c} + X_{b,a,c} : 1 \leq a, b, c \leq n\}$$

- *e_1 es identidad:*

$$C_{\text{iden},n} = \{X_{1,a,b} : 1 \leq a, b, \leq n, a \neq b\} \cup \{X_{a,1,b} : 1 \leq a, b, \leq n, a \neq b\} \cup \{X_{1,a,a} - 1 : 1 \leq a \leq n\} \cup \{X_{a,1,a} - 1 : 1 \leq a \leq n\}$$

- *Nilpotente de índice a lo sumo* 3 *(una vez que ya es asociativa):*

$$C_{3\text{nil},n} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_{a,b,i} X_{i,c,d} : 1 \leq a, b, c, d \leq n \right\}$$

- *Nilpotente de índice a lo sumo* 4 *(una vez que ya es asociativa):*

$$C_{4\text{nil},n} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{a,b,i} X_{i,c,j} X_{j,d,e} = 0 : 1 \leq a, b, c, d, e \leq n \right\}$$

- *de Lie:*

$$C_{\text{Lie},n} = C_{\text{Jac},n} \cup C_{\text{antcon},n}$$

Para considerar el ideal de álgebras de Lie nilpotentes, vamos a usar el siguiente resultado que es corolario del Teorema de Engel:

Teorema: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces existe B_0, base de $\mathfrak{g}$ tal que la matriz de $\text{ad}(X)$ es triangular superior estricta para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Además tenemos que:

Teorema: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Si $\text{ad}(X)$ es nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

Juntando estos dos resultados:

Teorema: Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente, si, y solo si, existe B_0, base de $\mathfrak{g}$ tal que la matriz de $\text{ad}(X)$ es triangular superior estricta para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Entonces podemos considerar que nuestra base B (la habíamos fijado en 4.1) es una que satisface el teorema anterior. De esta manera obtenemos que para todos $1 \leq i, j \leq n$, $e_i \cdot e_j = \sum_{l=1}^{j-1} \mu_{i,j,l} e_l$ (en otras palabras, si $l \geq j$, entonces $\mu_{i,j,l} = 0$). De esta forma consideremos los siguientes conjuntos:

- *Nilpotente (una vez que ya es de Lie):*

$$C_{\mathrm{nil},n} = \{X_{i,j,l} : 1 \leq i, j, l \leq n \text{ y } j \leq l\}$$

- *A lo sumo 2 pasos nilpotente (una vez que ya es de Lie):*

$$C_{2\mathrm{pnil},n} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_{a,b,i} X_{i,c,d} : 1 \leq a, b, c, d \leq n \right\} \cup C_{\mathrm{nil},n}$$

- *A lo sumo 3 pasos nilpotente (una vez que ya es de Lie):*

$$C_{3\mathrm{pnil},n} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{a,b,i} X_{i,c,j} X_{j,d,e} : 1 \leq a, b, c, d, e \leq n \right\} \cup C_{\mathrm{nil},n}$$

- *A lo sumo m pasos nilpotente (una vez que ya es de Lie):*

$$C_{m\mathrm{pnil},n} = \Bigg\{ \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}=1}^{n} X_{a_1,a_2,j_1} \left(\prod_{u=1}^{m-2} X_{j_u, a_{u+2}, j_{u+1}} \right) X_{j_{m-1}, a_{m+1}, a_{m+2}} : \\ 1 \leq a_1, a_2, \ldots, a_{m+2} \leq n \Bigg\} \cup C_{\mathrm{nil},n}$$

4.3. Condiciones suficientes para que un ideal sea radical.

Como antes V es un k-espacio vectorial de dimensión n fija y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V. En esta sección probaremos algunos resultados que nos dicen que bajo ciertas circunstancias un ideal es radical.

Definición 4.3.1: Decimos que un invariante inv es de grado m si $m = \max\{\deg(f) : f \in C_{\mathrm{inv},n}\}$.

Teorema 4.3.2: Sean inv1, inv2,..., inv$s$ invariantes de grado 1, consideremos $J = I_{\mathrm{inv1},\ldots,\mathrm{inv}s,n}$. Entonces J es radical.

En realidad el resultado lo podemos probar más en general:

Teorema 4.3.3: Sea J un ideal propio de $k[X_1, \ldots, X_l]$. Si J admite un sistema de generadores finito, donde cada uno es de grado menor o igual a 1, entonces J es radical.

Demostración:
Sean $g_1, \ldots, g_t \in k[X_1, \ldots, X_l]$ todos de grado 1 tales que $J = (g_1, \ldots, g_t)$. Como $g_1, \ldots, g_t$ son ecuaciones lineales usando la eliminación Gaussiana obtenemos fácilmente $f_1, \ldots, f_s \in k[X_1, \ldots, X_l]$ no nulos ($s \leq t$) tales que $\{f_1, \ldots, f_s\}$ es una base de Gröbner de J . Basta probar que probar que $\sqrt{J} \subseteq$

J. Sean $g \in \sqrt{J}$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m \in J$. Consideremos $F = \{f_1, ..., f_s\}$, entonces existe $r \in k[X_1, ..., X_l]$ reducido sobre F tal que $g \xrightarrow{F}_+ r$. Supongamos que $r \neq 0$. Sean $u_1, ..., u_s \in k[X_1, ..., X_l]$ tales que $g = \sum_{i=1}^{s} u_i f_i + r$, notar que $g^m = (\sum_{i=1}^{s} u_i f_i + r)^m$, entonces existen $v_1, ..., v_n \in k[X_1, ..., X_n]$ tales que $g^m = \sum_{i=1}^{s} v_i f_i + r^m$, luego $r^m \in J$. Como $r^m \in J$ existe $1 \leq j \leq s$ tal que $\mathrm{lp}(f_j)$ divide a $\mathrm{lp}(r^m)$, pero $\mathrm{lp}(r^m) = \mathrm{lp}(r)^m$ y $\mathrm{lp}(f_j)$ es un monomio de grado 1, entonces $\mathrm{lp}(f_j)$ divide a $\mathrm{lp}(r)$, pero esto contadice que r sea reducido sobre F. Así $r = 0$ y $g \in J$. $\square$

Adaptando esto a los invariantes que estamos estudiando podemos decir:

Corolario 4.3.4: Los ideales $I_{\text{con},n}$,$I_{\text{antcon},n}$, $I_{\text{iden},n}$, $I_{\text{con,iden},n}$ son radicales.

Demostración:
Es inmediato de 4.3.2. $\square$

La idea de la prueba de 4.3.3 se puede generalizar con una condición en la base de Gröbner del ideal:

Teorema 4.3.5: Sea J un ideal propio de $k[X_1, ..., X_l]$. Si J admite una base de Gröbner G, tal que $\mathrm{lp}(f)$ es libre de cuadrados para todo $f \in G$, entonces J es radical.

Demostración:
Queremos probar que probar que $\sqrt{J} \subseteq J$. Sean $g \in \sqrt{J}$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $g^m \in J$. Sea r reducido sobre G tal que $g \xrightarrow{G}_+ r$. Supongamos que $r \neq 0$. Sean $\{u_f\}_{f \in G}$ en $k[X_1, ..., X_l]$ tales que $g = \sum_{f \in G} u_f f + r$, notar que $g^m = \left(\sum_{f \in G} u_f f + r\right)^m$, entonces existen $\{v_f\}_{f \in G}$ en $k[X_1, ..., X_l]$ tales que $g^m = \sum_{f \in G} v_f f + r^m$, luego $r^m \in J$. Como $r^m \in J$ existe $f \in G$ tal que $\mathrm{lp}(f)$ divide a $\mathrm{lp}(r^m)$, pero $\mathrm{lp}(r^m) = \mathrm{lp}(r)^m$, así $\mathrm{lp}(f)$ divide a $\mathrm{lp}(r)^m$ pero esto último es imposible, pues $\mathrm{lp}(f)$ es libre de cuadrados y r es reducido sobre G.$\square$

Observación 1: Un resultado parecido se puede ver en [9].

Observación 2: Es necesaria que la condición sea sobre una base de Gröbner y no sobre un conjunto de generadores arbitrario. Fijemos el orden lexicográfico en $k[X, Y]$ con $Y > X$. Sean $f_1 = XY$, $f_2 = X - Y$, $F = \{f_1, f_2\}$ y $I = (F)$. Así $\mathrm{lp}(f_1) = XY$ y $\mathrm{lp}(f_2) = Y$ son libre de cuadrados. Notemos que $X \in \sqrt{I}$, pues $X^2 = X(X-Y)+XY$. Además $X \notin I$ y X^2 es reducido sobre F. Si hacemos la reducción correspondiente, obtenemos $F' = \{X^2, X - Y\}$ que es base de Gröbner de I y X^2 no es reducido sobre F'.

4.4. Algunos resultados a través de los ideales.

En esta sección mostraremos unos resultados obtenidos observando contenciones de algunos ideales. Si bien los resultados ya son conocidos, el objetivo es mostrar qué clase de resultados se puede obtener a través de este método.

Teorema 4.4.1: Toda álgebra de Lie nilpotente de dimensión n es a lo sumo $n-1$ pasos nilpotente.

Demostración:
Sean:

$$p_{a_1,\dots,a_{n+1}} = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_{n-2}=1}^{n} X_{a_1,a_2,j_1} \left(\prod_{u=1}^{n-1} X_{j_u,a_{u+2},j_{u+1}} \right) X_{j_{n-2},a_n,a_{n+1}}$$

para todos $1 \leq a_1, \dots, a_{n+1} \leq n$. Notemos que $C_{n-1\text{pnil},n} = \{p_{a_1,\dots,a_{n+1}} : 1 \leq a_1, \dots, a_{n+1} \leq n\}$. Como $C_{\text{antcon},n}$ y $\{X_{i,j,l} : 1 \leq j \leq l \leq n\}$ están contenidos en $I = I_{\text{Lie,nil},n}$, entonces $\{X_{i,j,l} : 1 \leq i \leq l \leq n\}$ está contenido en I.

Supongamos que un término $X_{a_1,a_2,j_1} \left(\prod_{u=1}^{n-1} X_{j_u,a_{u+2},j_{u+1}} \right) X_{j_{n-2},a_n,a_{n+1}}$ de $p_{a_1,\dots,a_{n+1}} \in C_{m\text{pnil},n}$ no está en I, entonces ninguno de sus factores pertenecen a $\{X_{i,j,l} : 1 \leq j \leq l \leq n\} \cup \{X_{i,j,l} : 1 \leq i \leq l \leq n\}$, así obtenemos las siguientes desigualdades:

- $a_{n+1} < j_{n-2}, a_n$.
- $j_{u+1} < j_u, a_{u+2}$ para todo $1 \leq u \leq n+1$.
- $j_1 < a_1, a_2$.

De esta forma $1 \leq a_{n+1} < j_{n-2} < j_{n-1} < \dots < j_1 < a_1, a_2 \leq n$, entonces $a_{n+1} = 1$, $j_u = n+1-u$ y $a_1 = a_2 = n$, pero $X_{a_1,a_2,j_1} \in C_{\text{antcon},n}$, luego $X_{a_1,a_2,j_1} \left(\prod_{u=1}^{n-1} X_{j_u,a_{u+2},j_{u+1}} \right) X_{j_{n-2},a_n,a_{n+1}} \in I$, absurdo. Finalmente, todos los términos de los polinomios en $C_{n-1\text{pnil},n}$ están en I, entonces $C_{n-1\text{pnil},n} \subseteq I$. □

Observación: Lo obtenido en 4.4.1 es muy conocido y se prueba fácilmente sin la necesidad de recurrir al uso de ideales. Se dice que $n-1$ es el índice de nilpotencia máximo de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión n.

Teorema 4.4.2: Toda álgebra de Lie nilpotente de dimensión 5 es a lo sumo 2 pasos soluble.

Demostración:
El conjunto de polinomios asociado a la propiedad "a lo sumo 2 pasos soluble" en dimensión n es:

$$C_{2\text{psol},n} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{a,b,i} X_{c,d,j} X_{i,j,e} : 1 \leq a,b,c,d,e \leq n \right\}$$

Aplicando el algoritmo correspondiente obtenemos que $C_{2\text{psol},5} \subseteq I_{\text{Lie,nil},5}$.$\square$

Observación: Este resultado ya es conocido, pues las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 5 están clasificadas. Se puede ver la clasificación en [5].

Teorema 4.4.3: Toda álgebra asociativa y anticonmutativa de dimensión 3 es nilpotente de índice a lo sumo 4.

Demostración:
Aplicando el algoritmo correspondiente obtenemos que $C_{\text{nil}4,3} \subseteq I_{\text{asoc,antcon},3}$. $\square$

Observación: Este resultado ya es conocido, pues las álgebras asociativas de dimensión 3 están clasificadas. Se puede ver la clasificación en [6].

4.5. Ideales de álgebras asociativas.

En esta sección estudiaremos ideales asociados a estructuras algebraicas que tengan el invariante de la asociatividad. En la mayoría de los casos calcularemos las bases de Gröbner que correspondan y las incluiremos en el anexo.

Teorema 4.5.1: $I_{\text{asoc},2}$, $I_{\text{asoc,con2}}$ y $I_{\text{asoc,con,iden},2}$ son radicales.

Demostración:
Aplicando los algoritmos correspondientes en los 3 casos obtenemos que las bases de Gröbner reducidas de los ideales y de sus respectivos radicales coinciden. $\square$

Teorema 4.5.2: $I_{\text{asoc,antcon},2}$ no es radical. Más aún $Q_3 = X_{2,1,2}$ no pertenece al ideal pero si a su radical.

Demostración:
Aplicando los algoritmos correspondientes obtenemos las bases de Gröbner reducidas del ideal y de su radical, y resulta que estas no coinciden. $\square$

Observación: SINGULAR no termina de procesar el algoritmo para calcular una base de Gröbner reducida de $I_{\text{asoc},3}$ y tampoco termina de procesar el algoritmo para calcular el radical de $I_{\text{asoc,con},3}$, incluso realizando eliminación de variables vía $C_{\text{con},3}$.

A pesar del inconveniente de la observación tenemos:

Teorema 4.5.3: $I_{\text{asoc,con},3}$ es radical.

Demostración:
Aplicando el algoritmo correspondiente obtenemos la base Gröbner reducida del ideal. Además notamos que satisface las hipótesis de 4.3.5, entonces $I_{\text{asoc,con},3}$ es radical. □

Teorema 4.5.4: $I_{\text{asoc,antcon},3}$ no es radical. Más aún $Q_7 = X_{3,1,1} + X_{3,2,2}$ no pertenece al ideal pero si a su radical.

Demostración:
Aplicando los algoritmos correspondientes obtenemos las bases de Gröbner reducidas del ideal y de su radical, y resulta que estas no coinciden. □

Teorema 4.5.5: $I_{\text{asoc,iden},3}$ y $I_{\text{asoc,con,iden},3}$ son radicales.

Demostración:
Aplicando los algoritmos correspondientes en los 2 casos obtenemos que las bases de Gröbner reducidas de los ideales y de sus respectivos radicales coinciden. □

Observación: SINGULAR no termina de procesar el algoritmo para calcular una base de Gröbner reducida de $I_{\text{asoc,con},4}$ incluso realizando eliminación de variables vía $C_{\text{con},4}$ y tampoco termina de procesar el algoritmo para calcular el radical de $I_{\text{asoc,nil},4}$.

Teorema 4.5.6: $I_{\text{asoc,con,iden},4}$ es radical.

Demostración:
Aplicando los algoritmo correspondientes obtenemos que $I = I_{\text{asoc,con,iden},4}$ y $\sqrt{I}$ tienen por base de Gröbner a la unión entre $C_{\text{con},4}$, $C_{\text{iden},4}$ y 69 elementos más. Luego, I es radical. □

Teorema 4.5.7: $I_{\text{asoc,nil4},3}$ tiene una base de Gröbner reducida de 4872 elementos.

Demostración:
Resulta de aplicar el algoritmo correspondiente. □

4.6. Ideales de álgebras de Lie.

En esta sección estudiaremos ideales asociados a estructuras algebraicas que satisfagan la identidad de Jacobi y el invariante de la anticonmutatividad. En la mayoría de los casos calcularemos las bases de Gröbner que correspondan y las incluiremos en el anexo.

Teorema 4.6.1: $I_{\text{Lie},3}$ es radical.

Demostración:
Aplicando los algoritmos correspondientes obtenemos que las bases de Gröbner reducidas del ideal y de su radical coinciden. $\square$

Observación: SINGULAR no termina de procesar el algoritmo para calcular una base de Gröbner de $I_{\text{Lie},4}$ incluso realizando eliminación de variables vía $C_{\text{antcon},4}$.

Teorema 4.6.2: $I_{\text{Lie,nil},3}$, $I_{\text{Lie,2pnil},4}$ y $I_{\text{Lie,nil},4}$ son radicales.

Demostración:
En el primer caso se puede ver fácilmente que $C_{\text{antcon},3} \cup C_{\text{nil},3}$ es un sistema de generadores de $I = I_{\text{Lie,nil},3}$. Luego por 4.3.2, I es radical.

En el segundo caso se puede ver fácilmente que $C_{\text{antcon},3} \cup C_{\text{nil},3} \cup \{X_{2,4,1}X_{3,4,2}, X_{2,3,1}X_{3,4,2}\}$ es una base Gröbner de $I = I_{\text{Lie,2pnil},4}$. Luego por 4.3.5, I es radical.

En el tercer caso se puede ver fácilmente que $C_{\text{antcon},4} \cup C_{\text{nil},4}$ es un sistema de generadores de $I = I_{\text{Lie,nil},4}$, luego por 4.3.2, I es radical. $\square$

Teorema 4.6.3: $I_{\text{Lie,2pnil},5}$, $I_{\text{Lie,3pnil},5}$, $I_{\text{Lie,nil},5}$, $I_{\text{Lie,2pnil},6}$ y $I_{\text{Lie,nil},6}$ son radicales.

Demostración:
Aplicando los algoritmos correspondiente en los 5 casos obtenemos un conjunto de generadores de cada ideal que también genera su respectivo radical. $\square$

Teorema 4.6.4: $I_{\text{Lie,3pnil},6}$ no es radical. Más aún $Q_6 = X_{3,5,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4}$ no pertenece al ideal pero si a su radical.

Demostración:
Aplicando los algoritmos correspondientes obtenemos un conjunto de generadores para $I = I_{\text{Lie,3pnil},6}$ y otro para $\sqrt{I}$ (ver anexo). Observando que $Q_6 \notin I$, obtenemos que I no es radical. $\square$

Teorema 4.6.5: $I_{\text{Lie,4pnil},6}$ no es radical. Más aún $Q_6 = X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$ no pertenece al ideal pero si a su radical.

Demostración:
Aplicando los algoritmos correspondientes obtenemos un conjunto de generadores para $I = I_{\text{Lie,4pnil},6}$ y otro para $\sqrt{I}$ (ver anexo). Observando que $Q_6 \notin I$, obtenemos que I no es radical. $\square$

Teorema 4.6.6: $I_{\text{Lie,2pnil,7}}$ no es radical. Más aún $P = X_{3,4,1}X_{5,6,3}X_{5,7,4} - X_{3,4,1}X_{5,6,4}X_{5,7,3}$ no pertenece al ideal pero si a su radical.

Demostración:
Aplicando los algoritmos correspondiente obtenemos que
$P = X_{3,4,1}X_{5,6,3}X_{5,7,4} - X_{3,4,1}X_{5,6,4}X_{5,7,3}$ satisface $P \notin I = I_{\text{Lie,2pnil,7}}$ y $P \in \sqrt{I}$. □

Observación: A SINGULAR le tomó bastante tiempo calcular el radical de $I_{\text{Lie,2pnil,7}}$ con la eliminación de variables correspondiente. Además no termina de procesar el algoritmo para calcular una base de Gröbner de $I_{\text{Lie,3pnil,7}}$ y $I_{\text{Lie,4pnil,7}}$ ni el de calcular los radicales de $I_{\text{Lie,5pnil,7}}$ y $I_{\text{Lie,nil,7}}$ incluso realizando eliminación de variables vía $C_{\text{antcon},4}$ y $C_{\text{nil},4}$.

Teorema 4.6.7: $I_{\text{Lie,5pnil,7}}$ tiene una base de Gröbner compuesta por $C_{\text{antcon},7} \cup C_{\text{nil},7}$ y 781 elementos más.

Demostración:
Resulta de realizar una eliminación de variables vía $C_{\text{antcon},7} \cup C_{\text{nil},7}$ y aplicar el algoritmo correspondiente. □

Teorema 4.6.8: $I_{\text{Lie,nil,7}}$ tiene una base de Gröbner compuesta por $C_{\text{antcon},7} \cup C_{\text{nil},7}$ y 509 elementos más.

Demostración:
Resulta de realizar una eliminación de variables vía $C_{\text{antcon},7} \cup C_{\text{nil},7}$ y aplicar el algoritmo correspondiente. □

4.7. Resumen de resultados.

En esta sección presentaremos dos tablas que contienen la información de los resultados de 4.5 y 4.6. En las casillas superiores se indicará si el ideal es radical o no. En las casillas inferiores se indicará que algoritmos terminaron de ejecutarse, la casilla izquierda inferior al algoritmo para calcular bases de Gröbner reducidas y la casilla derecha inferior el algoritmo para calcular radicales. En las casillas inferiores “B” representará que el algoritmo se ejecutó correctamente y “x” representará el caso contrario. Los guiones “-” indicarán que dicho ideal no fue estudiado o que no tiene sentido su estudio, por ejemplo el ideal de las álgebras de Lie a lo sumo 5 pasos nilpotentes de dimensión 3.

Asoc	dim 2		dim 3		dim 4	
	Radical		?		?	
	B	B	x	x	x	x
	Radical		Radical		?	
iden	B	B	B	B	x	x
	Radical		Radical		?	
con	B	B	B	x	x	x
	Radical		Radical		Radical	
con, iden	B	B	B	B	B	B
	-		?		?	
nil4	-	-	B	X	x	x
	No radical		No radical		?	
antcon	B	B	B	B	x	x

Lie	dim 3		dim 4		dim 5		dim 6		dim 7	
	Radical		?		?		?		?	
	B	B	B	x	x	x	x	x	x	x
	Radical		Radical		Radical		Radical		No radical	
2pnil	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
	-		Radical		Radical		No radical		?	
3pnil	-	-	B	B	B	B	B	B	x	x
	-		-		Radical		No radical		?	
4pnil	-	-	-	-	B	B	B	B	x	x
	-		-		-		Radical		?	
5pnil	-	-	-	-	-	-	B	B	B	x
	Radical		Radical		Radical		Radical		?	
nil	B	B	B	B	B	B	B	B	B	x

4.8. Conclusión.

En las secciones 4.5 y 4.6 pudimos estudiar ideales hasta dimensión 4 en el caso de la asociatividad y hasta dimensión 6 cuando son de Lie. Esto se debe a que SINGULAR no termino'de procesar los algoritmos en dimensiones más altas. Probablemente el programa tuvo dificultad en la gran cantidad de variables polinómicas que aparecen los ideales que son del orden n^3 en dimensión n, dado que los algoritmos usan constantemente comparaciones con los órdenes monomiales y esto resulta más costoso mientras mas variables haya.

Para las álgebras asociativas el programa ya tenía dificultad para implementar los algoritmos en dimensión 3. En el caso de las álgebras de Lie, la dificultad empezó en dimensión 4; en dimensión 3 no tuvo problemas dado que la anticonmutatividad escencialmente "elimina" la mitad de las variables. En dimensión 3, agregando el invariante de la anticonmutatividad en las álgebras asociativas el algoritmo respondió rápidamente, sin embargo no fue así con la conmutatividad y fue necesario agregar un invariante extra como la existencia de identidad (que escencialmente también "elimina" variables) para que terminara de correr el algoritmo.

Después de detectar estos inconvenientes computacionales, cuando aparecen invariantes como anticonmutatividad, conmutatividad, existencia de identidad o nilpotencia cuando es de Lie, realizamos manualmente la eliminación de variables polinómicas a los polinomios no lineales, trabajando así con ellos y luego adjuntando nuevamente los que usamos para realizar la substitución. De esta forma conseguimos un par de dimensiones más en algunas familias de álgebras para determinar si su ideal es radical o no. Por ejemplo para las álgebras de Lie m pasos nilpotentes de dimensión $4 \leq n \leq 6$ $(2 \leq m \leq n-3)$, reemplazabamos las variables en $C_{\mathrm{Jac},n}$ y los polinomios no lineales de $C_{m\mathrm{pnil},n}$ de la siguiente manera:

(1) Primero cambiamos $X_{a,a,c}$ por 0 gracias a $C_{\mathrm{antcon},n}$.
(2) Luego cambiamos $X_{a,b,c}$ con $a > b$ por $X_{b,a,c}$ gracias a $C_{\mathrm{antcon},n}$.
(3) Y por último cambiamos $X_{a,b,c}$ con $c \geq a$ por 0 gracias a $C_{\mathrm{nil},n}$.

Respecto a los resultados obtenidos, de la asociatividad no podemos decir mucho más que la anticonmutatividad no parece ser la conveniente para que su ideal sea radical y todo lo contrario respecto a los invariantes de conmutatividad y existencia de identidad juntos. De las álgebras de Lie a pesar de que pudimos estudiar los ideales en dimensiones más altas, solo detectamos que $I_{\mathrm{Lie},\mathrm{nil},n}$ es radical para todo $3 \leq n \leq 6$, pero no tenemos evidencia alguna que $I_{\mathrm{Lie},\mathrm{nil},7}$ también lo sea. Los invariantes de índice de nilpotencia (asociativa) o pasos de nilpotencia (de Lie) no parecen ser los más indicados para tener asociado un ideal radical; cuando generan polinomios de grado mayor que 2, en el caso de las álgebras de Lie, a partir de cierta cantidad de pasos de nilpotencia los polinomios al aumentar de grado empiezan a simplificarse (pero esto se debe principalmente por la cantidad de variables polinómicas que anula $C_{\mathrm{nil},n}$).

Claramente, optimizando los algoritmos empleados en función de algún ideal en particular que se quiera estudiar, se podrían obtener más resultados y conclusiones más contundentes.

Anexo

En este anexo adjuntaremos alguna de las listas de polinomios que calculamos en algunas de las pruebas de las secciones 4.5 y 4.6.

Álgebras asociativas

Dimensión 2:

Base de Gröbner reducida de $I_{\mathbf{asoc},2}$ y de su radical:

$P_1 = X_{1,2,2}X_{2,2,1} - X_{2,1,2}X_{2,2,1}$,
$P_2 = X_{1,2,2}X_{2,1,1}X_{2,1,2} - X_{2,1,1}X_{212}^2$,
$P_3 = X_{1,2,2}X_{2,1,1}^2 - X_{1,2,2}X_{2,1,1}X_{2,2,2} - X_{2,1,1}^2X_{2,1,2} + X_{2,1,1}X_{2,1,2}X_{2,2,2}$,
$P_4 = X_{1,2,2}^2X_{2,1,2} - X_{1,2,2}X_{2,1,2}^2$,
$P_5 = X_{1,2,2}^2X_{2,1,1} - X_{1,2,2}^2X_{2,2,2} + X_{1,2,2}X_{2,1,2}X_{2,2,2} - X_{2,1,1}X_{2,1,2}^2$,
$P_6 = X_{1,2,1}X_{2,2,1} - X_{2,1,1}X_{2,2,1}$,
$P_7 = X_{1,2,1}X_{2,1,2} - X_{1,2,2}X_{2,1,1} + X_{1,2,2}X_{2,2,2} - X_{2,1,2}X_{2,2,2}$,
$P_8 = X_{1,2,1}X_{2,1,1}^2 - X_{1,2,1}X_{2,1,1}X_{2,2,2} + X_{1,2,1}X_{2,1,2}X_{2,2,1} - X_{2,1,1}^3 + X_{2,1,1}^2X_{2,2,2} - X_{2,1,1}X_{2,1,2}X_{2,2,1}$,
$P_9 = X_{1,2,1}X_{1,2,2} - X_{2,1,1}X_{2,1,2}$,
$P_{10} = X_{1,2,1}^2 - X_{1,2,1}X_{2,2,2} - X_{2,1,1}^2 + X_{2,1,1}X_{2,2,2}$,
$P_{11} = X_{1,1,2}X_{2,2,1} - X_{1,2,1}X_{1,2,2}$
$P_{12} = X_{1,1,2}X_{1,2,2} - X_{1,1,2}X_{2,1,2}$,
$P_{13} = X_{1,1,2}X_{1,2,1} - X_{1,1,2}X_{2,1,1}$,
$P_{14} = X_{1,1,1}X_{2,2,1} - X_{1,2,1}^2 + X_{1,2,1}X_{2,2,2} - X_{2,1,2}X_{2,2,1}$,
$P_{15} = X_{1,1,1}X_{2,1,2} - X_{1,1,2}X_{1,2,1} + X_{1,1,2}X_{2,2,2} - X_{2,1,2}^2$,
$P_{16} = X_{1,1,1}X_{1,2,2} - X_{1,1,1}X_{2,1,2} - X_{1,2,2}^2 + X_{2,1,2}^2$,
$P_{17} = X_{1,1,1}X_{1,2,1} - X_{1,1,1}X_{2,1,1} + X_{1,2,2}X_{2,2,2} - X_{2,1,2}X_{2,2,2}$

Base de Gröbner reducida de $I_{\mathbf{asoc,con}2}$ y de su radical:

$P_1 = X_{1,2,2} - X_{2,1,2}$,
$P_2 = X_{1,2,1} - X_{2,1,1}$,
$P_3 = X_{1,1,2}X_{2,2,1} - X_{2,1,1}X_{2,1,2}$,
$P_4 = X_{1,1,1}X_{2,2,1} - X_{2,1,1}^2 + X_{2,1,1}X_{2,2,2} - X_{2,1,2}X_{2,2,1}$,
$P_5 = X_{1,1,1}X_{2,1,2} - X_{1,1,2}X_{2,1,1} + X_{112}X_{2,2,2} - X_{2,1,2}^2$

Base de Gröbner reducida de $I_{\mathbf{asoc,con,iden},2}$ y de su radical:

$P_1 = X_{2,1,2} - 1,$
$P_2 = X_{2,1,1},$
$P_3 = X_{1,2,2} - 1,$
$P_4 = X_{1,2,1},$
$P_5 = X_{1,1,2},$
$P_6 = X_{1,1,1} - 1$

Base de Gröbner reducida de $I_{\mathbf{asoc,antcon},2}$:

$P_1 = X_{2,2,2},$
$P_2 = X_{2,2,1},$
$P_3 = X_{2,1,2}^2,$
$P_4 = X_{2,1,1}X_{2,1,2},$
$P_5 = X_{2,1,1}^2 - X_{2,1,1}X_{2,2,2} + X_{2,1,2}X_{2,2,1},$
$P_6 = X_{1,2,2} + X_{2,1,2},$
$P_7 = X_{1,2,1} + X_{2,1,1},$
$P_8 = X_{1,1,2},$
$P_9 = X_{1,1,1}$

Base de Gröbner reducida de su radical:

$Q_1 = X_{2,2,2},$
$Q_2 = X_{2,2,1},$
$Q_3 = X_{2,1,2},$
$Q_4 = X_{2,1,1},$
$Q_5 = X_{1,2,2},$
$Q_6 = X_{1,2,1},$
$Q_7 = X_{1,1,2},$
$Q_8 = X_{1,1,1}$

Dimensión 3:

Base de Gröbner reducida de $I_{\mathbf{asoc,con},3}$ y de su radical:

$P_1 = X_{2,3,3} - X_{3,2,3},$
$P_2 = X_{2,3,2} - X_{3,2,2},$
$P_3 = X_{2,3,1} - X_{3,2,1},$
$P_4 = X_{2,2,3}X_{3,1,1}X_{3,3,1}X_{3,3,2} - X_{2,2,3}X_{3,1,2}X_{3,3,1}^2 + X_{2,2,3}X_{3,2,1}X_{3,3,2}^2-$
$X_{2,2,3}X_{3,2,2}X_{3,3,1}X_{3,3,2} - X_{3,1,1}X_{3,2,2}X_{3,2,3}X_{3,3,1}+$
$X_{3,1,2}X_{3,2,1}X_{3,2,3}X_{3,3,1} - X_{3,1,3}X_{3,2,1}^2X_{3,3,2} + X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,2}X_{3,3,1}-$
$X_{3,2,1}X_{3,2,2}X_{3,2,3}X_{3,3,2} + X_{3,2,2}^2X_{3,2,3}X_{3,3,1},$
$P_5 = X_{2,2,2}X_{3,1,2}X_{3,2,3}X_{3,3,1} - X_{2,2,2}X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,3,2}+$
$X_{2,2,3}X_{3,1,2}X_{3,2,1}X_{3,3,2} - X_{2,2,3}X_{3,1,2}X_{3,2,2}X_{3,3,1}+$
$X_{2,2,3}X_{3,1,2}X_{3,3,1}X_{3,3,3} - X_{2,2,3}X_{3,1,3}X_{3,3,1}X_{3,3,2}-$
$X_{3,1,2}X_{3,2,1}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{3,1,2}X_{3,2,3}^2X_{3,3,1} + X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,2}^2-$
$X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,2}X_{3,3,3} + X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,3}X_{3,3,2}+$
$X_{3,1,3}X_{3,2,2}X_{3,2,3}X_{3,3,1},$
$P_6 = X_{2,2,2}X_{3,1,1}X_{3,3,1}X_{3,3,2} - X_{2,2,2}X_{3,1,2}X_{3,3,1}^2 + X_{2,2,2}X_{3,2,1}X_{3,3,2}^2-$

$X_{2,2,2}X_{3,2,2}X_{3,3,1}X_{3,3,2} - X_{3,1,1}X_{3,2,2}^2X_{3,3,1}+$
$X_{3,1,1}X_{3,2,2}X_{3,3,1}X_{3,3,3} - X_{3,1,1}X_{3,2,3}X_{3,3,1}X_{3,3,2}-$
$X_{3,1,2}X_{3,2,1}^2X_{3,3,2} + 2X_{3,1,2}X_{3,2,1}X_{3,2,2}X_{3,3,1}-$
$X_{3,1,2}X_{3,2,1}X_{3,3,1}X_{3,3,3} + X_{3,1,2}X_{3,2,3}X_{3,3,1}^2+$
$X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,3,1}X_{3,3,2} - X_{3,1,3}X_{3,2,2}X_{3,3,1}^2 - X_{3,2,1}X_{3,2,2}^2X_{3,3,2}+$
$X_{3,2,1}X_{3,2,2}X_{3,3,2}X_{3,3,3} - X_{3,2,1}X_{3,2,3}X_{3,3,2}^2 + X_{3,2,2}^3X_{3,3,1}-$
$X_{3,2,2}^2X_{3,3,1}X_{3,3,3} + X_{3,2,2}X_{3,2,3}X_{3,3,1}X_{3,3,2},$
$P_7 = X_{2,2,2}X_{3,1,1}X_{3,2,3}X_{3,3,1} - X_{2,2,2}X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,3,1}+$
$X_{2,2,2}X_{3,2,1}X_{3,2,3}X_{3,3,2} - X_{2,2,2}X_{3,2,2}X_{3,2,3}X_{3,3,1}-$
$X_{2,2,3}X_{3,1,1}X_{3,2,2}X_{3,3,1} + X_{2,2,3}X_{3,1,1}X_{3,3,1}X_{3,3,3}+$
$X_{2,2,3}X_{3,1,2}X_{3,2,1}X_{3,3,1} - X_{2,2,3}X_{3,1,3}X_{3,3,1}^2-$
$X_{2,2,3}X_{3,2,1}X_{3,2,2}X_{3,3,2} + X_{2,2,3}X_{3,2,1}X_{3,3,2}X_{3,3,3} + X_{2,2,3}X_{3,2,2}^2X_{3,3,1}-$
$X_{2,2,3}X_{3,2,2}X_{3,3,1}X_{3,3,3} - X_{3,1,1}X_{3,2,3}^2X_{3,3,1} - X_{3,1,2}X_{3,2,1}^2X_{3,2,3}+$
$X_{3,1,3}X_{3,2,1}^2X_{3,2,2} - X_{3,1,3}X_{3,2,1}^2X_{3,3,3} + 2X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,3}X_{3,3,1}-$
$X_{3,2,1}X_{3,2,3}^2X_{3,3,2} + X_{3,2,2}X_{3,2,3}^2X_{3,3,1},$
$P_8 = X_{2,2,2}X_{3,1,1}X_{3,1,3}X_{3,3,2} - X_{2,2,2}X_{3,1,2}X_{3,1,3}X_{3,3,1}+$
$X_{2,2,2}X_{3,1,2}X_{3,2,3}X_{3,3,2} - X_{2,2,2}X_{3,1,3}X_{3,2,2}X_{3,3,2}-$
$X_{2,2,3}X_{3,1,1}X_{3,1,2}X_{3,3,2} + X_{2,2,3}X_{3,1,2}^2X_{3,3,1} + X_{2,2,3}X_{3,1,2}X_{3,3,2}X_{3,3,3}-$
$X_{2,2,3}X_{3,1,3}X_{3,3,2}^2 + X_{3,1,1}X_{3,1,2}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{3,1,1}X_{3,1,3}X_{3,2,2}^2+$
$X_{3,1,1}X_{3,1,3}X_{3,2,2}X_{3,3,3} - X_{3,1,1}X_{3,1,3}X_{3,2,3}X_{3,3,2} - X_{3,1,2}^2X_{3,2,1}X_{3,2,3}+$
$X_{3,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,2} - X_{3,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,3,3}+$
$X_{3,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,3}X_{3,3,1} - X_{3,1,2}X_{3,2,2}^2X_{3,2,3} - X_{3,1,2}X_{3,2,3}^2X_{3,3,2}+$
$X_{3,1,3}^2X_{3,2,1}X_{3,3,2} - X_{3,1,3}^2X_{3,2,2}X_{3,3,1} + X_{3,1,3}X_{3,2,2}^3-$
$X_{3,1,3}X_{3,2,2}^2X_{3,3,3} + 2X_{3,1,3}X_{3,2,2}X_{3,2,3}X_{3,3,2},$
$P_9 = X_{2,2,1}X_{3,1,3}X_{3,3,2} + X_{2,2,2}X_{3,2,3}X_{3,3,2} - X_{2,2,3}X_{3,1,1}X_{3,3,2}+$
$X_{2,2,3}X_{3,1,2}X_{3,3,1} + X_{2,2,3}X_{3,3,2}X_{3,3,3} + X_{3,1,1}X_{3,2,2}X_{3,2,3}-$
$X_{3,1,2}X_{3,2,1}X_{3,2,3} - X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,2} - X_{3,2,2}^2X_{3,2,3} - X_{3,2,3}^2X_{3,3,2},$
$P_{10} = X_{2,2,1}X_{3,1,3}X_{3,3,1} + X_{2,2,2}X_{3,2,3}X_{3,3,1} + X_{2,2,3}X_{3,2,1}X_{3,3,2}-$
$X_{2,2,3}X_{3,2,2}X_{3,3,1} + X_{2,2,3}X_{3,3,1}X_{3,3,3} - X_{3,1,3}X_{3,2,1}^2-$
$X_{3,2,1}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{3,2,3}^2X_{3,3,1},$
$P_{11} = X_{2,2,1}X_{3,1,2}X_{3,3,2} - X_{2,2,2}X_{3,1,1}X_{3,3,2} + X_{2,2,2}X_{3,1,2}X_{3,3,1}+$
$X_{2,2,2}X_{3,2,2}X_{3,3,2} + X_{2,2,3}X_{3,3,2}^2 + X_{3,1,1}X_{3,2,2}^2-$
$X_{3,1,1}X_{3,2,2}X_{3,3,3} + X_{3,1,1}X_{3,2,3}X_{3,3,2} - 2X_{3,1,2}X_{3,2,1}X_{3,2,2}+$
$X_{3,1,2}X_{3,2,1}X_{3,3,3} - X_{3,1,2}X_{3,2,3}X_{3,3,1} - X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,3,2}+$
$X_{3,1,3}X_{3,2,2}X_{3,3,1} - X_{3,2,2}^3 + X_{3,2,2}^2X_{3,3,3} - 2X_{3,2,2}X_{3,2,3}X_{3,3,2},$
$P_{12} = X_{2,2,1}X_{3,1,2}X_{3,3,1} + X_{2,2,2}X_{3,2,1}X_{3,3,2} + X_{2,2,3}X_{3,3,1}X_{3,3,2}-$
$X_{3,1,2}X_{3,2,1}^2 - X_{3,2,1}X_{3,2,2}^2 + X_{3,2,1}X_{3,2,2}X_{3,3,3} - X_{3,2,1}X_{3,2,3}X_{3,3,2}-$
$X_{3,2,2}X_{3,2,3}X_{3,3,1},$
$P_{13} = X_{2,2,1}X_{3,1,2}X_{3,2,3} - X_{2,2,1}X_{3,1,3}X_{3,2,2} + X_{2,2,1}X_{3,1,3}X_{3,3,3}-$
$X_{2,2,2}X_{3,1,1}X_{3,2,3} + X_{2,2,2}X_{3,1,3}X_{3,2,1} + X_{2,2,2}X_{3,2,3}X_{3,3,3}+$
$X_{2,2,3}X_{3,1,1}X_{3,2,2} - X_{2,2,3}X_{3,1,1}X_{3,3,3} - X_{2,2,3}X_{3,1,2}X_{3,2,1}+$
$X_{2,2,3}X_{3,1,3}X_{3,3,1} - X_{2,2,3}X_{3,2,2}X_{3,3,3} + X_{2,2,3}X_{3,2,3}X_{3,3,2}+$
$X_{2,2,3}X_{3,3,3}^2 + X_{3,1,1}X_{3,2,3}^2 - 2X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,3} - X_{3,2,2}X_{3,2,3}^2-$
$X_{3,2,3}^2X_{3,3,3},$
$P_{14} = X_{2,2,1}X_{3,1,1}X_{3,3,1} + X_{2,2,1}X_{3,2,1}X_{3,3,2} - X_{2,2,1}X_{3,2,2}X_{3,3,1}+$
$X_{2,2,2}X_{3,2,1}X_{3,3,1} + X_{2,2,3}X_{3,3,1}^2 - X_{3,1,1}X_{3,2,1}^2 - X_{3,2,1}^2X_{3,2,2}+$

$X_{3,2,1}^2 X_{3,3,3} - 2X_{3,2,1}X_{3,2,3}X_{3,3,1},$
$P_{15} = X_{2,1,3}X_{3,3,1} + X_{2,2,3}X_{3,3,2} - X_{3,1,3}X_{3,2,1} - X_{3,2,2}X_{3,2,3},$
$P_{16} = X_{2,1,3}X_{3,2,1} - X_{2,2,1}X_{3,1,3} - X_{2,2,2}X_{3,2,3} + X_{2,2,3}X_{3,2,2} -$
$X_{2,2,3}X_{3,3,3} + X_{3,2,3}^2,$
$P_{17} = X_{2,1,2}X_{3,3,1} + X_{2,2,2}X_{3,3,2} - X_{3,1,2}X_{3,2,1} - X_{3,2,2}^2 + X_{3,2,2}X_{3,3,3} -$
$X_{3,2,3}X_{3,3,2},$
$P_{18} = X_{2,1,2}X_{3,2,1} - X_{2,2,1}X_{3,1,2} - X_{2,2,3}X_{3,3,2} + X_{3,2,2}X_{3,2,3},$
$P_{19} = X_{2,1,2}X_{3,1,1}X_{3,1,3} + X_{2,1,2}X_{3,1,2}X_{3,2,3} - X_{2,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,2} -$
$X_{2,1,3}X_{3,1,1}X_{3,1,2} + X_{2,1,3}X_{3,1,2}X_{3,3,3} - X_{2,1,3}X_{3,1,3}X_{3,3,2} +$
$X_{2,2,2}X_{3,1,2}X_{3,1,3} - X_{2,2,3}X_{3,1,2}^2 - X_{3,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,3} + X_{3,1,3}^2 X_{3,2,2},$
$P_{20} = X_{2,1,2}X_{2,2,3}X_{3,3,2} - X_{2,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,1} - X_{2,1,2}X_{3,2,2}X_{3,2,3} -$
$X_{2,1,3}X_{2,2,2}X_{3,3,2} + X_{2,1,3}X_{3,1,2}X_{3,2,1} + X_{2,1,3}X_{3,2,2}^2 -$
$X_{2,1,3}X_{3,2,2}X_{3,3,3} + X_{2,1,3}X_{3,2,3}X_{3,3,2},$
$P_{21} = X_{2,1,2}X_{2,2,1}X_{3,1,3} + X_{2,1,2}X_{2,2,2}X_{3,2,3} - X_{2,1,2}X_{2,2,3}X_{3,2,2} +$
$X_{2,1,2}X_{2,2,3}X_{3,3,3} - X_{2,1,2}X_{3,2,3}^2 - X_{2,1,3}X_{2,2,1}X_{3,1,2} - X_{2,1,3}X_{2,2,3}X_{3,3,2} +$
$X_{2,1,3}X_{3,2,2}X_{3,2,3},$
$P_{22} = X_{2,1,1}X_{3,3,1} + X_{2,2,1}X_{3,3,2} - X_{3,1,1}X_{3,2,1} - X_{3,2,1}X_{3,2,2} + X_{3,2,1}X_{3,3,3} -$
$X_{3,2,3}X_{3,3,1},$
$P_{23} = X_{2,1,1}X_{3,2,1} - X_{2,2,1}X_{3,1,1} + X_{2,2,1}X_{3,2,2} - X_{2,2,2}X_{3,2,1} - X_{2,2,3}X_{3,3,1} +$
$X_{3,2,1}X_{3,2,3},$
$P_{24} = X_{2,1,1}X_{3,1,3} + X_{2,1,2}X_{3,2,3} - X_{2,1,3}X_{3,1,1} + X_{2,1,3}X_{3,3,3} - X_{2,2,3}X_{3,1,2} -$
$X_{3,1,3}X_{3,2,3},$
$P_{25} = X_{2,1,1}X_{3,1,2} - X_{2,1,2}X_{3,1,1} + X_{2,1,2}X_{3,2,2} + X_{2,1,3}X_{3,3,2} - X_{2,2,2}X_{3,1,2} -$
$X_{3,1,3}X_{3,2,2},$
$P_{26} = X_{2,1,1}X_{2,2,3}X_{3,3,2} - X_{2,1,1}X_{3,1,3}X_{3,2,1} - X_{2,1,1}X_{3,2,2}X_{3,2,3} -$
$X_{2,1,3}X_{2,2,1}X_{3,3,2} + X_{2,1,3}X_{3,1,1}X_{3,2,1} + X_{2,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,2} - X_{2,1,3}X_{3,2,1}X_{3,3,3} +$
$X_{2,1,3}X_{3,2,3}X_{3,3,1},$
$P_{27} = X_{2,1,1}X_{2,2,2}X_{3,3,2} - X_{2,1,1}X_{3,1,2}X_{3,2,1} - X_{2,1,1}X_{3,2,2}^2 + X_{2,1,1}X_{3,2,2}X_{3,3,3} -$
$X_{2,1,1}X_{3,2,3}X_{3,3,2} - X_{2,1,2}X_{2,2,1}X_{3,3,2} + X_{2,1,2}X_{3,1,1}X_{3,2,1} + X_{2,1,2}X_{3,2,1}X_{3,2,2} -$
$X_{2,1,2}X_{3,2,1}X_{3,3,3} + X_{2,1,2}X_{3,2,3}X_{3,3,1},$
$P_{28} = X_{2,1,1}X_{2,2,2}X_{3,2,3} - X_{2,1,1}X_{2,2,3}X_{3,2,2} + X_{2,1,1}X_{2,2,3}X_{3,3,3} - X_{2,1,1}X_{3,2,3}^2 -$
$X_{2,1,2}X_{2,2,1}X_{3,2,3} + X_{2,1,3}X_{2,2,1}X_{3,2,2} - X_{2,1,3}X_{2,2,1}X_{3,3,3} - X_{2,1,3}X_{2,2,2}X_{3,2,1} -$
$X_{2,1,3}X_{2,2,3}X_{3,3,1} + X_{2,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,3} + X_{2,2,1}X_{2,2,3}X_{3,1,2} + X_{2,2,1}X_{3,1,3}X_{3,2,3},$
$P_{29} = X_{1,3,3} - X_{3,1,3},$
$P_{30} = X_{1,3,2} - X_{3,1,2},$
$P_{31} = X_{1,3,1} - X_{3,1,1},$
$P_{32} = X_{1,2,3} - X_{2,1,3},$
$P_{33} = X_{1,2,2} - X_{2,1,2},$
$P_{34} = X_{1,2,1} - X_{2,1,1},$
$P_{35} = X_{1,1,3}X_{3,3,1} + X_{2,1,3}X_{3,3,2} - X_{3,1,1}X_{3,1,3} - X_{3,1,2}X_{3,2,3},$
$P_{36} = X_{1,1,3}X_{3,2,1} - X_{2,1,3}X_{3,1,1} + X_{2,1,3}X_{3,2,2} - X_{2,2,3}X_{3,1,2},$
$P_{37} = X_{1,1,3}X_{2,2,3}X_{3,3,2} - X_{1,1,3}X_{3,1,3}X_{3,2,1} - X_{1,1,3}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{2,1,3}^2 X_{3,3,2} +$
$X_{2,1,3}X_{3,1,1}X_{3,1,3} + X_{2,1,3}X_{3,1,2}X_{3,2,3},$
$P_{38} = X_{1,1,3}X_{2,2,2}X_{3,3,2} - X_{1,1,3}X_{3,1,2}X_{3,2,1} - X_{1,1,3}X_{3,2,2}^2 + X_{1,1,3}X_{3,2,2}X_{3,3,3} -$
$X_{1,1,3}X_{3,2,3}X_{3,3,2} - X_{2,1,2}X_{2,1,3}X_{3,3,2} + X_{2,1,2}X_{3,1,1}X_{3,1,3} + X_{2,1,2}X_{3,1,2}X_{3,2,3},$
$P_{39} = X_{1,1,3}X_{2,2,2}X_{3,2,3} - X_{1,1,3}X_{2,2,3}X_{3,2,2} + X_{1,1,3}X_{2,2,3}X_{3,3,3} - X_{1,1,3}X_{3,2,3}^2 +$
$X_{2,1,1}X_{2,1,3}X_{3,1,3} + X_{2,1,2}X_{2,2,3}X_{3,1,3} - X_{2,1,3}^2 X_{3,1,1} + X_{2,1,3^2}X_{3,2,2} -$
$X_{2,1,3}X_{2,2,2}X_{3,1,3} - X_{2,1,3}X_{2,2,3}X_{3,1,2} + X_{2,1,3}X_{3,1,3}X_{3,2,3} - X_{2,2,3}X_{3,1,3}^2,$

$P_{40} = X_{1,1,3}X_{2,2,1} - X_{2,1,1}X_{2,1,3} - X_{2,1,2}X_{2,2,3} + X_{2,1,3}X_{2,2,2} - X_{2,1,3}X_{3,2,3} + X_{2,2,3}X_{3,1,3}$,
$P_{41} = X_{1,1,2}X_{3,3,1} + X_{2,1,2}X_{3,3,2} - X_{3,1,1}X_{3,1,2} - X_{3,1,2}X_{3,2,2} + X_{3,1,2}X_{3,3,3} - X_{3,1,3}X_{3,3,2}$,
$P_{42} = X_{1,1,2}X_{3,2,1} - X_{2,1,1}X_{3,1,2} - X_{2,1,3}X_{3,3,2} + X_{3,1,2}X_{3,2,3}$,
$P_{43} = X_{1,1,2}X_{3,1,1}X_{3,1,3} + X_{1,1,2}X_{3,1,2}X_{3,2,3} - X_{1,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,2} - X_{1,1,3}X_{3,1,1}X_{3,1,2} + X_{1,1,3}X_{3,1,2}X_{3,3,3} - X_{1,1,3}X_{3,1,3}X_{3,3,2} + X_{2,1,2}X_{3,1,2}X_{3,1,3} - X_{2,1,3}X_{3,1,2}^2$,
$P_{44} = X_{1,1,2}X_{2,2,3}X_{3,3,2} - X_{1,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,1} - X_{1,1,2}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{2,1,2}X_{2,1,3}X_{3,3,2} + X_{2,1,3}X_{3,1,1}X_{3,1,2} + X_{2,1,3}X_{3,1,2}X_{3,2,2} - X_{2,1,3}X_{3,1,2}X_{3,3,3} + X_{2,1,3}X_{3,1,3}X_{3,3,2}$,
$P_{45} = X_{1,1,2}X_{2,2,2}X_{3,3,2} - X_{1,1,2}X_{3,1,2}X_{3,2,1} - X_{1,1,2}X_{3,2,2}^2 + X_{1,1,2}X_{3,2,2}X_{3,3,3} - X_{1,1,2}X_{3,2,3}X_{3,3,2} - X_{2,1,2}^2X_{3,3,2} + X_{2,1,2}X_{3,1,1}X_{3,1,2} + X_{2,1,2}X_{3,1,2}X_{3,2,2} - X_{2,1,2}X_{3,1,2}X_{3,3,3} + X_{2,1,2}X_{3,1,3}X_{3,3,2}$,
$P_{46} = X_{1,1,2}X_{2,2,2}X_{3,2,3} - X_{1,1,2}X_{2,2,3}X_{3,2,2} + X_{1,1,2}X_{2,2,3}X_{3,3,3} - X_{1,1,2}X_{3,2,3}^2 + X_{2,1,1}X_{2,1,2}X_{3,1,3} - X_{2,1,1}X_{2,1,3}X_{3,1,2} - X_{2,1,3}^2X_{3,3,2} + X_{2,1,3}X_{3,1,2}X_{3,2,3} + X_{2,1,3}X_{3,1,3}X_{3,2,2} - X_{2,2,3}X_{3,1,2}X_{3,1,3}$,
$P_{47} = X_{1,1,2}X_{2,2,1} - X_{2,1,1}X_{2,1,2} - X_{2,1,3}X_{3,2,2} + X_{2,2,3}X_{3,1,2}$,
$P_{48} = X_{1,1,2}X_{2,1,3}X_{3,3,2} - X_{1,1,2}X_{3,1,1}X_{3,1,3} - X_{1,1,2}X_{3,1,2}X_{3,2,3} - X_{1,1,3}X_{2,1,2}X_{3,3,2} + X_{1,1,3}X_{3,1,1}X_{3,1,2} + X_{1,1,3}X_{3,1,2}X_{3,2,2} - X_{1,1,3}X_{3,1,2}X_{3,3,3} + X_{1,1,3}X_{3,1,3}X_{3,3,2}$,
$P_{49} = X_{1,1,2}X_{2,1,3}X_{3,2,3} - X_{1,1,2}X_{2,2,3}X_{3,1,3} + X_{1,1,3}X_{2,1,1}X_{3,1,3} - X_{1,1,3}X_{2,1,3}X_{3,1,1} + X_{1,1,3}X_{2,1,3}X_{3,3,3} - X_{1,1,3}X_{3,1,3}X_{3,2,3} + X_{2,1,2}X_{2,1,3}X_{3,1,3} - X_{2,1,3}^2X_{3,1,2}$,
$P_{50} = X_{1,1,2}X_{2,1,3}X_{3,2,2} - X_{1,1,2}X_{2,1,3}X_{3,3,3} - X_{1,1,2}X_{2,2,2}X_{3,1,3} + X_{1,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,3} + X_{1,1,3}X_{2,1,1}X_{3,1,2} - X_{1,1,3}X_{2,1,2}X_{3,1,1} + X_{1,1,3}X_{2,1,2}X_{3,3,3} + X_{1,1,3}X_{2,1,3}X_{3,3,2} - X_{1,1,3}X_{3,1,2}X_{3,2,3} - X_{1,1,3}X_{3,1,3}X_{3,2,2} + X_{2,1,2}^2X_{3,1,3} - X_{2,1,2}X_{2,1,3}X_{3,1,2} - X_{2,1,2}X_{3,1,3}^2 + X_{2,1,3}X_{3,1,2}X_{3,1,3}$,
$P_{51} = X_{1,1,2}X_{2,1,3}X_{3,1,1} - X_{1,1,2}X_{2,1,3}X_{3,2,2} + X_{1,1,2}X_{2,2,3}X_{3,1,2} - X_{1,1,3}X_{2,1,1}X_{3,1,2} - X_{1,1,3}X_{2,1,3}X_{3,3,2} + X_{1,1,3}X_{3,1,2}X_{3,2,3}$,
$P_{52} = X_{1,1,2}X_{2,1,1}X_{2,1,3} + X_{1,1,2}X_{2,1,2}X_{2,2,3} - X_{1,1,2}X_{2,1,3}X_{2,2,2} - X_{1,1,3}X_{2,1,1}X_{2,1,2} + X_{1,1,3}X_{2,1,2}X_{3,2,3} - X_{1,1,3}X_{2,1,3}X_{3,2,2} - X_{2,1,2}X_{2,1,3}X_{3,1,3} + X_{2,1,3}^2X_{3,1,2}$,
$P_{53} = X_{1,1,1}X_{3,3,1} + X_{2,1,1}X_{3,3,2} - X_{2,1,2}X_{3,3,1} - X_{2,2,2}X_{3,3,2} - X_{3,1,1}^2 + X_{3,1,1}X_{3,3,3} - X_{3,1,3}X_{3,3,1} + X_{3,2,2}^2 - X_{3,2,2}X_{3,3,3} + X_{3,2,3}X_{3,3,2}$,
$P_{54} = X_{1,1,1}X_{3,2,1} - X_{2,1,1}X_{3,1,1} + X_{2,1,1}X_{3,2,2} - X_{2,1,2}X_{3,2,1} - X_{2,1,3}X_{3,3,1} + X_{3,1,1}X_{3,2,3}$,
$P_{55} = X_{1,1,1}X_{3,1,3} + X_{1,1,2}X_{3,2,3} - X_{1,1,3}X_{3,1,1} + X_{1,1,3}X_{3,3,3} - X_{2,1,3}X_{3,1,2} - X_{3,1,3}^2$,
$P_{56} = X_{1,1,1}X_{3,1,2} - X_{1,1,2}X_{3,1,1} + X_{1,1,2}X_{3,2,2} + X_{1,1,3}X_{3,3,2} - X_{2,1,2}X_{3,1,2} - X_{3,1,2}X_{3,1,3}$,
$P_{57} = X_{1,1,1}X_{2,2,3}X_{3,3,2} - X_{1,1,1}X_{3,1,3}X_{3,2,1} - X_{1,1,1}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{1,1,2}X_{2,2,3}X_{3,3,1} + X_{1,1,3}X_{2,1,1}X_{3,3,1} - X_{1,1,3}X_{3,2,3}X_{3,3,1} + X_{2,1,2}X_{2,1,3}X_{3,3,1} + X_{2,1,3}X_{3,1,3}X_{3,3,1}$,
$P_{58} = X_{1,1,1}X_{2,2,2}X_{3,3,2} - X_{1,1,1}X_{3,1,2}X_{3,2,1} - X_{1,1,1}X_{3,2,2}^2 + X_{1,1,1}X_{3,2,2}X_{3,3,3} - X_{1,1,1}X_{3,2,3}X_{3,3,2} + X_{1,1,2}X_{2,1,1}X_{3,3,1} - X_{1,1,2}X_{2,2,2}X_{3,3,1} - X_{1,1,3}X_{3,2,2}X_{3,3,1} + X_{2,1,2}^2X_{3,3,1} + X_{2,1,3}X_{3,1,2}X_{3,3,1}$,

$P_{59} = X_{1,1,1}X_{2,2,2}X_{3,2,3} - X_{1,1,1}X_{2,2,3}X_{3,2,2} + X_{1,1,1}X_{2,2,3}X_{3,3,3} - X_{1,1,1}X_{3,2,3}^2 - X_{1,1,2}X_{2,2,1}X_{3,2,3} + X_{1,1,3}X_{2,2,1}X_{3,1,1} - X_{1,1,3}X_{2,2,1}X_{3,3,3} - X_{2,1,1}X_{2,1,3}X_{3,1,1} + X_{2,1,1}X_{2,1,3}X_{3,2,2} - X_{2,1,2}X_{2,1,3}X_{3,2,1} - X_{2,1,3}^2X_{3,3,1} + X_{2,1,3}X_{2,2,1}X_{3,1,2} + X_{2,1,3}X_{3,1,1}X_{3,2,3} + X_{2,2,1}X_{3,1,3}^2$,
$P_{60} = X_{1,1,1}X_{2,2,1} - X_{2,1,1}^2 + X_{2,1,1}X_{2,2,2} - X_{2,1,2}X_{2,2,1} - X_{2,1,3}X_{3,2,1} + X_{2,2,3}X_{3,1,1}$,
$P_{61} = X_{1,1,1}X_{2,1,3} + X_{1,1,2}X_{2,2,3} - X_{1,1,3}X_{2,1,1} + X_{1,1,3}X_{3,2,3} - X_{2,1,2}X_{2,1,3} - X_{2,1,3}X_{3,1,3}$,
$P_{62} = X_{1,1,1}X_{2,1,2} - X_{1,1,2}X_{2,1,1} + X_{1,1,2}X_{2,2,2} + X_{1,1,3}X_{3,2,2} - X_{2,1,2}^2 - X_{2,1,3}X_{3,1,2}$

Base de Gröbner reducida de $I_{\mathbf{asoc,antcon},3}$:

$P_1 = X_{3,3,3}$,
$P_2 = X_{3,3,2}$,
$P_3 = X_{3,3,1}$,
$P_4 = X_{3,1,3}X_{3,2,1} + X_{3,2,2}X_{3,2,3}$,
$P_5 = X_{3,1,2}X_{3,2,3}^2 + X_{3,1,3}^2X_{3,2,1}$,
$P_6 = X_{3,1,2}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{3,1,3}X_{3,2,2}^2$,
$P_7 = X_{3,1,2}X_{3,2,1} + X_{3,2,2}^2$,
$P_8 = X_{3,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,3} - X_{3,1,3}^2X_{3,2,2}$,
$P_9 = X_{3,1,2}^2X_{3,2,3} - X_{3,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,2}$,
$P_{10} = X_{3,1,1}X_{3,2,3}^2 - X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,3}$,
$P_{11} = X_{3,1,1}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{3,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,2}$,
$P_{12} = X_{3,1,1}X_{3,2,2}^2 - X_{3,1,2}X_{3,2,1}X_{3,2,2}$,
$P_{13} = X_{3,1,1}X_{3,2,1} + X_{3,2,1}X_{3,2,2}$,
$P_{14} = X_{3,1,1}X_{3,1,3} + X_{3,1,2}X_{3,2,3}$,
$P_{15} = X_{3,1,1}X_{3,1,2} + X_{3,1,2}X_{3,2,2}$,
$P_{16} = X_{3,1,1}^2 - X_{3,2,2}^2$,
$P_{17} = X_{2,3,3} + X_{3,2,3}$,
$P_{18} = X_{2,3,2} + X_{3,2,2}$,
$P_{19} = X_{2,3,1} + X_{3,2,1}$,
$P_{20} = X_{2,2,3}$,
$P_{21} = X_{2,2,2}$,
$P_{22} = X_{2,2,1}$,
$P_{23} = X_{2,1,3}X_{3,2,2} + X_{3,1,3}X_{3,2,3}$,
$P_{24} = X_{2,1,3}X_{3,2,1} - X_{3,2,3}^2$,
$P_{25} = X_{2,1,3}X_{3,1,2} + X_{3,1,3}^2$,
$P_{26} = X_{2,1,3}X_{3,1,1} - X_{3,1,3}X_{3,2,3}$,
$P_{27} = X_{2,1,2}X_{3,2,3}^2 - X_{2,1,3}X_{3,2,2}X_{3,2,3}$,
$P_{28} = X_{2,1,2}X_{3,2,2} + X_{3,1,2}X_{3,2,3}$,
$P_{29} = X_{2,1,2}X_{3,2,1} - X_{3,2,2}X_{3,2,3}$,
$P_{30} = X_{2,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,3} - X_{2,1,3}X_{3,1,3}X_{3,2,2}$,
$P_{31} = X_{2,1,2}X_{3,1,3}^2 - X_{2,1,3}X_{3,1,2}X_{3,1,3}$,
$P_{32} = X_{2,1,2}X_{3,1,2} + X_{3,1,2}X_{3,1,3}$,
$P_{33} = X_{2,1,2}X_{3,1,1} - X_{3,1,3}X_{3,2,2}$,
$P_{34} = X_{2,1,2}X_{2,1,3} + X_{2,1,3}X_{3,1,3}$,

$P_{35} = X_{2,1,2}^2 - X_{3,1,3}^2,$
$P_{36} = X_{2,1,1}X_{3,2,3}^2 - X_{2,1,3}X_{3,2,1}X_{3,2,3},$
$P_{37} = X_{2,1,1}X_{3,2,2} + X_{3,1,1}X_{3,2,3},$
$P_{38} = X_{2,1,1}X_{3,2,1} - X_{3,2,1}X_{3,2,3},$
$P_{39} = X_{2,1,1}X_{3,1,3} + X_{2,1,2}X_{3,2,3},$
$P_{40} = X_{2,1,1}X_{3,1,2} - X_{3,1,2}X_{3,2,3},$
$P_{41} = X_{2,1,1}X_{3,1,1} + X_{3,2,2}X_{3,2,3},$
$P_{42} = X_{2,1,1}X_{2,1,3} - X_{2,1,3}X_{3,2,3},$
$P_{43} = X_{2,1,1}X_{2,1,2} + X_{3,1,3}X_{3,2,3},$
$P_{44} = X_{2,1,1}^2 - X_{3,2,3}^2,$
$P_{45} = X_{1,3,3} + X_{3,1,3},$
$P_{46} = X_{1,3,2} + X_{3,1,2},$
$P_{47} = X_{1,3,1} + X_{3,1,1},$
$P_{48} = X_{1,2,3} + X_{2,1,3},$
$P_{49} = X_{1,2,2} + X_{2,1,2},$
$P_{50} = X_{1,2,1} + X_{2,1,1},$
$P_{51} = X_{1,1,3},$
$P_{52} = X_{1,1,2},$
$P_{53} = X_{1,1,1}$

Base de Gröbner reducida de su radical:

$Q_1 = X_{3,3,3},$
$Q_2 = X_{3,3,2},$
$Q_3 = X_{3,3,1},$
$Q_4 = X_{3,1,3}X_{3,2,1} + X_{3,2,2}X_{3,2,3},$
$Q_5 = X_{3,1,2}X_{3,2,3} - X_{3,1,3}X_{3,2,2},$
$Q_6 = X_{3,1,2}X_{3,2,1} + X_{3,2,2}^2,$
$Q_7 = X_{3,1,1} + X_{3,2,2},$
$Q_8 = X_{2,3,3} + X_{3,2,3},$
$Q_9 = X_{2,3,2} + X_{3,2,2},$
$Q_{10} = X_{2,3,1} + X_{3,2,1},$
$Q_{11} = X_{2,2,3},$
$Q_{12} = X_{2,2,2},$
$Q_{13} = X_{2,2,1},$
$Q_{14} = X_{2,1,3}X_{3,2,2} + X_{3,1,3}X_{3,2,3},$
$Q_{15} = X_{2,1,3}X_{3,2,1} - X_{3,2,3}^2,$
$Q_{16} = X_{2,1,3}X_{3,1,2} + X_{3,1,3}^2,$
$Q_{17} = X_{2,1,2} + X_{3,1,3},$
$Q_{18} = X_{2,1,1} - X_{3,2,3},$
$Q_{19} = X_{1,3,3} + X_{3,1,3},$
$Q_{20} = X_{1,3,2} + X_{3,1,2},$
$Q_{21} = X_{1,3,1} + X_{3,1,1},$
$Q_{22} = X_{1,2,3} + X_{2,1,3},$
$Q_{23} = X_{1,2,2} + X_{2,1,2},$
$Q_{24} = X_{1,2,1} + X_{2,1,1},$
$Q_{25} = X_{1,1,3},$
$Q_{26} = X_{1,1,2},$

$Q_{27} = X_{1,1,1}$

Base de Gröbner reducida de $I_{\mathbf{asoc,iden},3}$ y de su radical:

$P_1 = X_{3,1,3} - 1,$
$P_2 = X_{3,1,2},$
$P_3 = X_{3,1,1},$
$P_4 = X_{2,3,3}X_{3,3,2} - X_{3,2,3}X_{3,3,2},$
$P_5 = X_{2,3,3}X_{3,2,2}^2 - X_{2,3,3}X_{3,2,2}X_{3,3,3} - X_{2,3,3}X_{3,3,1} - X_{3,2,2}^2X_{3,2,3}+$
$X_{3,2,2}X_{3,2,3}X_{3,3,3} + X_{3,2,3}X_{3,3,1},$
$P_6 = X_{2,3,3}X_{3,2,1} + X_{2,3,3}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{3,2,1}X_{3,2,3} - X_{3,2,2}X_{3,2,3}^2,$
$P_7 = X_{2,3,2}X_{3,3,2} - X_{3,2,2}X_{3,3,2},$
$P_8 = X_{2,3,2}X_{3,2,2}^2 - X_{2,3,2}X_{3,2,2}X_{3,3,3} + X_{2,3,2}X_{3,2,3}X_{3,3,2} - X_{2,3,2}X_{3,3,1}-$
$X_{2,3,3}X_{3,2,2}X_{3,3,2} - X_{3,2,2}^3 + X_{3,2,2}^2X_{3,3,3} + X_{3,2,2}X_{3,3,1},$
$P_9 = X_{2,3,2}X_{3,2,1} + X_{2,3,2}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{3,2,1}X_{3,2,2} - X_{3,2,2}^2X_{3,2,3},$
$P_{10} = X_{2,3,2}X_{2,3,3} - X_{2,3,2}X_{3,2,3} + X_{2,3,3}X_{3,2,2} - X_{2,3,3}X_{3,3,3} - X_{3,2,2}X_{3,2,3}+$
$X_{3,2,3}X_{3,3,3},$
$P_{11} = X_{2,3,2}^2 - X_{2,3,2}X_{3,3,3} - X_{3,2,2}^2 + X_{3,2,2}X_{3,3,3},$
$P_{12} = X_{2,3,1} + X_{2,3,2}X_{3,2,3} - X_{2,3,3}X_{3,2,2} + X_{2,3,3}X_{3,3,3} - X_{3,2,1} - X_{3,2,3}X_{3,3,3},$
$P_{13} = X_{2,2,3}X_{3,3,2} - X_{2,3,2}X_{2,3,3} + X_{2,3,2}X_{3,2,3} - X_{2,3,3}X_{3,2,2} + X_{2,3,3}X_{3,3,3}-$
$X_{3,2,1} - X_{3,2,3}X_{3,3,3},$
$P_{14} = X_{2,2,3}X_{2,3,3} - X_{2,2,3}X_{3,2,3},$
$P_{15} = X_{2,2,3}X_{2,3,2} - X_{2,2,3}X_{3,2,2},$
$P_{16} = X_{2,2,2}X_{3,3,2} - X_{2,3,2}^2 + X_{2,3,2}X_{3,3,3} - X_{2,3,3}X_{3,3,2} + X_{3,3,1},$
$P_{17} = X_{2,2,2}X_{3,2,1} + X_{2,2,2}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{2,2,3}X_{2,3,2}^2 + X_{2,2,3}X_{2,3,2}X_{3,3,3}-$
$X_{2,2,3}X_{2,3,3}X_{3,3,2} + X_{2,2,3}X_{3,3,1} + X_{2,3,2}X_{2,3,3}^2 - X_{2,3,2}X_{3,2,3}^2+$
$X_{2,3,3}^2X_{3,2,2} - X_{2,3,3}^2X_{3,3,3} - X_{3,2,2}X_{3,2,3}^2 + X_{3,2,3}^2X_{3,3,3},$
$P_{18} = X_{2,2,2}X_{2,3,3} - X_{2,2,2}X_{3,2,3} - X_{2,3,3}^2 + X_{3,2,3}^2,$
$P_{19} = X_{2,2,2}X_{2,3,2} - X_{2,2,2}X_{3,2,2} - 2X_{2,3,2}X_{3,2,3} + 2X_{2,3,3}X_{3,2,2} - X_{2,3,3}X_{3,3,3}+$
$X_{3,2,3}X_{3,3,3},$
$P_{20} = X_{2,2,1} + X_{2,2,2}X_{2,3,3} - X_{2,2,3}X_{2,3,2} + X_{2,2,3}X_{3,3,3} - X_{2,3,3}^2,$
$P_{21} = X_{2,1,3},$
$P_{22} = X_{2,1,2} - 1,$
$P_{23} = X_{2,1,1},$
$P_{24} = X_{1,3,3} - 1,$
$P_{25} = X_{1,3,2},$
$P_{26} = X_{1,3,1},$
$P_{27} = X_{1,2,3},$
$P_{28} = X_{1,2,2} - 1,$
$P_{29} = X_{1,2,1},$
$P_{30} = X_{1,1,3},$
$P_{31} = X_{1,1,2},$
$P_{32} = X_{1,1,1} - 1$

Base de Gröbner reducida de $I_{\mathbf{asoc,con,iden},3}$ y de su radical:

$P_1 = X_{3,1,3} - 1,$
$P_2 = X_{3,1,2},$

$P_3 = X_{3,1,1}$,
$P_4 = X_{2,3,3} - X_{3,2,3}$,
$P_5 = X_{2,3,2} - X_{3,2,2}$,
$P_6 = X_{2,3,1} - X_{3,2,1}$,
$P_7 = X_{2,2,3}X_{3,3,2} - X_{3,2,1} - X_{3,2,2}X_{3,2,3}$,
$P_8 = X_{2,2,2}X_{3,3,2} - X_{3,2,2}^2 + X_{3,2,2}X_{3,3,3} - X_{3,2,3}X_{3,3,2} + X_{3,3,1}$,
$P_9 = X_{2,2,2}X_{3,2,1} + X_{2,2,2}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{2,2,3}X_{3,2,2}^2 + X_{2,2,3}X_{3,2,2}X_{3,3,3} - X_{2,2,3}X_{3,2,3}X_{3,3,2} + X_{2,2,3}X_{3,3,1}$,
$P_{10} = X_{2,2,1} + X_{2,2,2}X_{3,2,3} - X_{2,2,3}X_{3,2,2} + X_{2,2,3}X_{3,3,3} - X_{3,2,3}^2$,
$P_{11} = X_{2,1,3}$,
$P_{12} = X_{2,1,2} - 1$,
$P_{13} = X_{2,1,1}$,
$P_{14} = X_{1,3,3} - 1$,
$P_{15} = X_{1,3,2}$,
$P_{16} = X_{1,3,1}$,
$P_{17} = X_{1,2,3}$,
$P_{18} = X_{1,2,2} - 1$,
$P_{19} = X_{1,2,1}$,
$P_{20} = X_{1,1,3}$,
$P_{21} = X_{1,1,2}$,
$P_{22} = X_{1,1,1} - 1$

Álgebras de Lie

Dimensión 3:

Base de Gröbner reducida de $I_{\mathbf{Lie},3}$ y de su radical:

$P_1 = X_{3,3,3}$,
$P_2 = X_{3,3,2}$,
$P_3 = X_{3,3,1}$,
$P_4 = X_{2,3,3} + X_{3,2,3}$,
$P_5 = X_{2,3,2} + X_{3,2,2}$,
$P_6 = X_{2,3,1} + X_{3,2,1}$,
$P_7 = X_{2,2,3}$,
$P_8 = X_{2,2,2}$,
$P_9 = X_{2,2,1}$,
$P_{10} = X_{2,1,3}X_{3,1,1}^2X_{3,2,2} - X_{2,1,3}X_{3,1,1}X_{3,1,2}X_{3,2,1} + X_{2,1,3}X_{3,1,1}X_{3,2,2}^2 - X_{2,1,3}X_{3,1,2}X_{3,2,1}X_{3,2,2} + X_{3,1,1}^2X_{3,1,3}X_{3,2,3} + X_{3,1,1}X_{3,1,2}X_{3,2,3}^2 - X_{3,1,1}X_{3,1,3}^2X_{3,2,1} + X_{3,1,2}X_{3,2,2}X_{3,2,3}^2 - X_{3,1,3}^2X_{3,2,1}X_{3,2,2} - X_{3,1,3}X_{3,2,2}^2X_{3,2,3}$,
$P_{11} = X_{2,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,1} + X_{2,1,2}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{2,1,3}X_{3,1,1}X_{3,2,2} - X_{2,1,3}X_{3,2,2}^2 - X_{3,1,1}X_{3,1,3}X_{3,2,3} + X_{3,1,3}^2X_{3,2,1}$,
$P_{12} = X_{2,1,2}X_{3,1,1}X_{3,2,2} - X_{2,1,2}X_{3,1,2}X_{3,2,1} + X_{3,1,1}X_{3,1,2}X_{3,2,3} - X_{3,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,1} + X_{3,1,2}X_{3,2,2}X_{3,2,3} - X_{3,1,3}X_{3,2,2}^2$,
$P_{13} = X_{2,1,2}X_{3,1,1}X_{3,1,3} + X_{2,1,2}X_{3,1,2}X_{3,2,3} - X_{2,1,3}X_{3,1,1}X_{3,1,2} - X_{2,1,3}X_{3,1,2}X_{3,2,2} + X_{3,1,2}X_{3,1,3}X_{3,2,3} - X_{3,1,3}^2X_{3,2,2}$,
$P_{14} = X_{2,1,1}X_{3,2,2} - X_{2,1,2}X_{3,2,1} + X_{3,1,1}X_{3,2,3} - X_{3,1,3}X_{3,2,1}$,
$P_{15} = X_{2,1,1}X_{3,1,3} + X_{2,1,2}X_{3,2,3} - X_{2,1,3}X_{3,1,1} - X_{2,1,3}X_{3,2,2}$,

$P_{16} = X_{2,1,1}X_{3,1,2} - X_{2,1,2}X_{3,1,1} - X_{3,1,2}X_{3,2,3} + X_{3,1,3}X_{3,2,2},$
$P_{17} = X_{1,3,3} + X_{3,1,3},$
$P_{18} = X_{1,3,2} + X_{3,1,2},$
$P_{19} = X_{1,3,1} + X_{3,1,1},$
$P_{20} = X_{1,2,3} + X_{2,1,3},$
$P_{21} = X_{1,2,2} + X_{2,1,2},$
$P_{22} = X_{1,2,1} + X_{2,1,1},$
$P_{23} = X_{1,1,3},$
$P_{24} = X_{1,1,2},$
$P_{25} = X_{1,1,1}$

Dimensión 5:

Sistema de generadores de $I_{\mathbf{Lie,2pnil},5}$ y de su radical:

Resulta de la unión entre $C_{\text{antcon},5}$, $C_{\text{nil},5}$ y el conjunto formado por los elementos:

$P_1 = X_{3,5,2}X_{4,5,3},$
$P_2 = X_{3,4,2}X_{4,5,3},$
$P_3 = X_{2,5,1}X_{4,5,2} + X_{3,5,1}X_{4,5,3},$
$P_4 = X_{2,5,1}X_{3,5,2},$
$P_5 = X_{2,5,1}X_{3,4,2},$
$P_6 = X_{2,4,1}X_{4,5,2} + X_{3,4,1}X_{4,5,3},$
$P_7 = X_{2,4,1}X_{3,5,2},$
$P_8 = X_{2,4,1}X_{3,5,1}X_{4,5,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,1}X_{4,5,3},$
$P_9 = X_{2,4,1}X_{3,4,2},$
$P_{10} = X_{2,3,1}X_{4,5,3},$
$P_{11} = X_{2,3,1}X_{4,5,2},$
$P_{12} = X_{2,3,1}X_{3,5,2},$
$P_{13} = X_{2,3,1}X_{3,4,2}$

Sistema de generadores de $I_{\mathbf{Lie,3pnil},5}$ y de su radical:

Resulta de la unión entre $C_{\text{antcon},5}$, $C_{\text{nil},5}$ y el conjunto formado por los elementos:

$P_1 = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3},$
$P_2 = X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3},$
$P_3 = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3},$
$P_4 = X_{2,4,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3},$
$P_5 = X_{2,3,1}X_{4,5,3},$
$P_6 = X_{2,3,1}X_{4,5,2} - X_{2,4,1}X_{3,5,2} + X_{2,5,1}X_{3,4,2}$

Sistema de generadores de $I_{\mathbf{Lie,nil},5}$ y de su radical:

Resulta de la unión entre $C_{\text{antcon},5}$, $C_{\text{nil},5}$ y el conjunto formado por los elementos:

$P_1 = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$P_2 = X_{2,3,1}X_{4,5,3}$,
$P_3 = X_{2,3,1}X_{4,5,2} - X_{2,4,1}X_{3,5,2} + X_{2,5,1}X_{3,4,2}$

Dimensión 6:

Sistema de generadores de $I_{\mathbf{Lie,2pnil,6}}$ y de su radical:

Resulta de la unión entre $C_{\text{antcon},6}$, $C_{\text{nil},6}$ y el conjunto formado por los elementos:

$P_1 = X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$P_2 = X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_3 = X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{4,6,2}X_{5,6,4}$,
$P_4 = X_{3,6,2}X_{4,6,3}$,
$P_5 = X_{3,6,2}X_{4,5,3}$,
$P_6 = X_{3,6,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{3,6,2}X_{4,6,1}X_{5,6,4}$,
$P_7 = X_{3,6,1}X_{4,6,2}X_{5,6,3} - X_{3,6,1}X_{4,6,3}X_{5,6,2} + X_{4,6,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4}$,
$P_8 = X_{3,6,1}X_{4,5,2}X_{5,6,3} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,2} + X_{4,5,2}X_{4,6,1}X_{5,6,4}$,
$P_9 = X_{3,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}$,
$P_{10} = X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{4,5,2}X_{5,6,4}$,
$P_{11} = X_{3,5,2}X_{4,6,3}$,
$P_{12} = X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4}$,
$P_{13} = X_{3,5,2}X_{4,6,1}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4}$,
$P_{14} = X_{3,5,2}X_{4,5,3}$,
$P_{15} = X_{3,5,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{3,6,2}X_{4,5,1}X_{5,6,4}$,
$P_{16} = X_{3,5,1}X_{4,6,2}X_{5,6,3} - X_{3,5,1}X_{4,6,3}X_{5,6,2} + X_{4,5,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4}$,
$P_{17} = X_{3,5,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,2}X_{4,5,1}X_{5,6,4}$,
$P_{18} = X_{3,5,1}X_{4,5,2}X_{5,6,3} - X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{5,6,2} + X_{4,5,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4}$,
$P_{19} = X_{3,5,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3} - X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}$,
$P_{20} = X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,1}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,1}X_{5,6,4}$,
$P_{21} = X_{3,4,2}X_{5,6,4}$,
$P_{22} = X_{3,4,2}X_{5,6,3}$,
$P_{23} = X_{3,4,2}X_{4,6,3}$,
$P_{24} = X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$P_{25} = X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4}$,
$P_{26} = X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,3} - X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,2}$,
$P_{27} = X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4}$,
$P_{28} = X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,3} - X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,2}$,
$P_{29} = X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3} - X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}$,
$P_{30} = X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,4}$,
$P_{31} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,4}$,
$P_{32} = X_{2,6,1}X_{5,6,2} + X_{3,6,1}X_{5,6,3} + X_{4,6,1}X_{5,6,4}$,
$P_{33} = X_{2,6,1}X_{4,6,2} + X_{3,6,1}X_{4,6,3}$,
$P_{34} = X_{2,6,1}X_{4,5,2} + X_{3,6,1}X_{4,5,3}$,
$P_{35} = X_{2,6,1}X_{3,6,2}$,
$P_{36} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}$,

$P_{37} = X_{2,6,1}X_{3,4,2}$,
$P_{38} = X_{2,5,1}X_{5,6,2} + X_{3,5,1}X_{5,6,3} + X_{4,5,1}X_{5,6,4}$,
$P_{39} = X_{2,5,1}X_{4,6,2} + X_{3,5,1}X_{4,6,3}$,
$P_{40} = X_{2,5,1}X_{4,5,2} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}$,
$P_{41} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}$,
$P_{42} = X_{2,5,1}X_{3,6,1}X_{5,6,3} + X_{2,5,1}X_{4,6,1}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,5,1}X_{5,6,3} -$
$X_{2,6,1}X_{4,5,1}X_{5,6,4}$,
$P_{43} = X_{2,5,1}X_{3,6,1}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,1}X_{4,6,3}$,
$P_{44} = X_{2,5,1}X_{3,6,1}X_{4,5,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,1}X_{4,5,3}$,
$P_{45} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}$,
$P_{46} = X_{2,5,1}X_{3,4,2}$,
$P_{47} = X_{2,4,1}X_{5,6,2} + X_{3,4,1}X_{5,6,3}$,
$P_{48} = X_{2,4,1}X_{4,6,2} + X_{3,4,1}X_{4,6,3}$,
$P_{49} = X_{2,4,1}X_{4,5,2} + X_{3,4,1}X_{4,5,3}$,
$P_{50} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}$,
$P_{51} = X_{2,4,1}X_{3,6,1}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{4,6,1}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,4,1}X_{5,6,3}$,
$P_{52} = X_{2,4,1}X_{3,6,1}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,1}X_{4,6,3}$,
$P_{53} = X_{2,4,1}X_{3,6,1}X_{4,5,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,1}X_{4,5,3}$,
$P_{54} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}$,
$P_{55} = X_{2,4,1}X_{3,5,1}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{4,5,1}X_{5,6,4} - X_{2,5,1}X_{3,4,1}X_{5,6,3}$,
$P_{56} = X_{2,4,1}X_{3,5,1}X_{4,6,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,1}X_{4,6,3}$,
$P_{57} = X_{2,4,1}X_{3,5,1}X_{4,6,1}X_{5,6,4} - X_{2,4,1}X_{3,6,1}X_{4,5,1}X_{5,6,4} -$
$X_{2,5,1}X_{3,4,1}X_{4,6,1}X_{5,6,4} + X_{2,6,1}X_{3,4,1}X_{4,5,1}X_{5,6,4}$,
$P_{58} = X_{2,4,1}X_{3,5,1}X_{4,5,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,1}X_{4,5,3}$,
$P_{59} = X_{2,4,1}X_{3,4,2}$,
$P_{60} = X_{2,3,1}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{5,6,4}$,
$P_{61} = X_{2,3,1}X_{5,6,2} - X_{3,4,1}X_{5,6,4}$,
$P_{62} = X_{2,3,1}X_{4,6,3}$,
$P_{63} = X_{2,3,1}X_{4,6,2}$,
$P_{64} = X_{2,3,1}X_{4,6,1}X_{5,6,4} - X_{2,4,1}X_{3,6,1}X_{5,6,4} + X_{2,6,1}X_{3,4,1}X_{5,6,4}$,
$P_{65} = X_{2,3,1}X_{4,5,3}$,
$P_{66} = X_{2,3,1}X_{4,5,2}$,
$P_{67} = X_{2,3,1}X_{4,5,1}X_{5,6,4} - X_{2,4,1}X_{3,5,1}X_{5,6,4} + X_{2,5,1}X_{3,4,1}X_{5,6,4}$,
$P_{68} = X_{2,3,1}X_{3,6,2}$,
$P_{69} = X_{2,3,1}X_{3,5,2}$,
$P_{70} = X_{2,3,1}X_{3,4,2}$

Sistema de generadores de $I_{\mathbf{Lie,3pnil},6}$:

Resulta de la unión entre $C_{\mathrm{antcon},6}$, $C_{\mathrm{nil},6}$ y el conjunto formado por los elementos:

$P_1 = X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$P_2 = X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_3 = X_{3,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4}^2 - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4}^2$,
$P_4 = X_{3,6,1}X_{4,5,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}^2X_{4,6,2}X_{5,6,4}$,
$P_5 = X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_6 = X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,

$P_7 = X_{3,5,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4}^2 - X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4}^2,$
$P_8 = X_{3,5,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}^2X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$P_9 = X_{3,5,1}X_{4,5,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{4,5,3}^2X_{4,6,2}X_{5,6,4},$
$P_{10} = X_{3,4,2}X_{5,6,4},$
$P_{11} = X_{3,4,2}X_{5,6,3} - X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,6,2}X_{4,5,3},$
$P_{12} = X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$P_{13} = X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{14} = X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4}^2 - X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$P_{15} = X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3}^2 + X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,3} + X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,3} - X_{3,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4},$
$P_{16} = X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3} + X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}^2,$
$P_{17} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4}^2 - X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{18} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3}^2 + X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,3} - X_{3,5,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4} + X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,3},$
$P_{19} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}^2 + X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3},$
$P_{20} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4}^2 - X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4}^2 - X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{3,6,2}^2X_{4,5,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,2}^2X_{3,6,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{21} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,3} - X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3} + X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}^2,$
$P_{22} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3} - X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}^2 - X_{3,4,2}X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3} + X_{3,4,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}^2,$
$P_{23} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}^2X_{4,6,3}^2 - X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3} - X_{3,4,2}X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}^2 + X_{3,4,2}X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3},$
$P_{24} = X_{2,6,1}X_{4,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4}^2 + X_{3,6,1}X_{4,6,3}^2X_{5,6,4}^2,$
$P_{25} = X_{2,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4} + X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$P_{26} = X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$P_{27} = X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} + X_{3,6,1}X_{4,5,3}^2X_{5,6,4},$
$P_{28} = X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{2,6,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} + X_{3,6,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$P_{29} = X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3},$
$P_{30} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} + X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{31} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3},$
$P_{32} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4} + X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{33} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3},$
$P_{34} = X_{2,6,1}X_{3,5,1}X_{4,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{2,6,1}X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{2,6,1}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{3,6,1}X_{4,6,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{3,6,1}X_{4,6,3}^2X_{5,6,4},$
$P_{35} = X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{5,6,2} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2} + X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} + X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3},$
$P_{36} = X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3},$
$P_{37} = X_{2,5,1}X_{4,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,6,3}^2X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$P_{38} = X_{2,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} -$

$X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}^2X_{5,6,4}$,
$P_{39} = X_{2,5,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,3} -$
$X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$P_{40} = X_{2,5,1}X_{4,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}^2X_{5,6,4}$,
$P_{41} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{2,5,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} -$
$X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_{42} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$P_{43} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_{44} = X_{2,5,1}X_{3,6,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{2,6,1}^2X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,6,1}^2X_{4,5,2}X_{5,6,4} -$
$X_{2,6,1}X_{3,5,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{2,6,1}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_{45} = X_{2,5,1}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_{46} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,5,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_{47} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} - X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}$,
$P_{48} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}^2X_{5,6,3} -$
$X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} -$
$X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_{49} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}$,
$P_{50} = X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} + X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2} +$
$X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}$,
$P_{51} = X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$P_{52} = X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$P_{53} = X_{2,4,1}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{4,6,2} + X_{2,6,1}X_{4,5,2} + X_{3,4,1}X_{5,6,3} - X_{3,5,1}X_{4,6,3} +$
$X_{3,6,1}X_{4,5,3}$,
$P_{54} = X_{2,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$P_{55} = X_{2,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_{56} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{5,6,3}$,
$P_{57} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,6,3}$,
$P_{58} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$P_{59} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{5,6,3}$,
$P_{60} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,6,3}$,
$P_{61} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} - X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,6,2} +$
$X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,2}$,
$P_{62} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$P_{63} = X_{2,4,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$P_{64} = X_{2,3,1}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{5,6,4}$,
$P_{65} = X_{2,3,1}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{3,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,5,2} - X_{3,4,1}X_{5,6,4}$,
$P_{66} = X_{2,3,1}X_{4,6,3}$,
$P_{67} = X_{2,3,1}X_{4,6,2} - X_{2,4,1}X_{3,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,4,2}$,
$P_{68} = X_{2,3,1}X_{4,5,3}$,
$P_{69} = X_{2,3,1}X_{4,5,2} - X_{2,4,1}X_{3,5,2} + X_{2,5,1}X_{3,4,2}$,

Sistema de generadores de su radical:

Resulta de la unión entre $C_{\text{antcon},6}$, $C_{\text{nil},6}$ y el conjunto formado por los elementos:

$Q_1 = X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_2 = X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,

$Q_3 = X_{3,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4}$,
$Q_4 = X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_5 = X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_6 = X_{3,5,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4}$,
$Q_7 = X_{3,4,2}X_{5,6,4}$,
$Q_8 = X_{3,4,2}X_{5,6,3} - X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,6,2}X_{4,5,3}$,
$Q_9 = X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{10} = X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{11} = X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4}^2 -$
$X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{12} = X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3}^2 + X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} -$
$X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,3} + X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,3} -$
$X_{3,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4}$,
$Q_{13} = X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} -$
$X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3} + X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}^2$,
$Q_{14} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} +$
$X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}$,
$Q_{15} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4}$,
$Q_{16} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3} - X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}^2 -$
$X_{3,4,2}X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3} + X_{3,4,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}^2$,
$Q_{17} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}^2X_{4,6,3} - X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{3,6,2}X_{4,5,3} -$
$X_{3,4,2}X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,4,2}X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}$,
$Q_{18} = X_{2,6,1}X_{4,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,6,1}X_{4,6,3}^2X_{5,6,4}$,
$Q_{19} = X_{2,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4} + X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} +$
$X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{20} = X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} +$
$X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{21} = X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} + X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} +$
$X_{3,6,1}X_{4,5,3}^2X_{5,6,4}$,
$Q_{22} = X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{2,6,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} + X_{3,6,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{23} = X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3} - X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{24} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} + X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{25} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} - X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{26} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4} +$
$X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{27} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} - X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{28} = X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{5,6,2} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2} +$
$X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} +$
$X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}$,
$Q_{29} = X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$Q_{30} = X_{2,5,1}X_{4,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} -$
$X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,6,3}^2X_{5,6,4} -$
$X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{31} = X_{2,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} -$
$X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4} -$
$X_{3,6,1}X_{4,5,3}^2X_{5,6,4}$,
$Q_{32} = X_{2,5,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{33} = X_{2,5,1}X_{4,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}^2X_{5,6,4}$,

$Q_{34} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{2,5,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} -$
$X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{35} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{36} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{37} = X_{2,5,1}X_{3,6,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{2,6,1}^2X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,6,1}^2X_{4,5,2}X_{5,6,4} -$
$X_{2,6,1}X_{3,5,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{2,6,1}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{38} = X_{2,5,1}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{39} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,5,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{40} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}$,
$Q_{41} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}^2X_{5,6,3} -$
$X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} -$
$X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{42} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}$,
$Q_{43} = X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} + X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2} +$
$X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} +$
$X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}$,
$Q_{44} = X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,6,3}$,
$Q_{45} = X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$Q_{46} = X_{2,4,1}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{4,6,2} + X_{2,6,1}X_{4,5,2} + X_{3,4,1}X_{5,6,3} -$
$X_{3,5,1}X_{4,6,3} + X_{3,6,1}X_{4,5,3}$,
$Q_{47} = X_{2,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{48} = X_{2,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{49} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{5,6,3}$,
$Q_{50} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,6,3}$,
$Q_{51} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$Q_{52} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{5,6,3}$,
$Q_{53} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,6,3}$,
$Q_{54} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} - X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,6,2} +$
$X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,2}$,
$Q_{55} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$Q_{56} = X_{2,4,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$Q_{57} = X_{2,3,1}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{5,6,4}$,
$Q_{58} = X_{2,3,1}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{3,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,5,2} - X_{3,4,1}X_{5,6,4}$,
$Q_{59} = X_{2,3,1}X_{4,6,3}$,
$Q_{60} = X_{2,3,1}X_{4,6,2} - X_{2,4,1}X_{3,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,4,2}$,
$Q_{61} = X_{2,3,1}X_{4,5,3}$,
$Q_{62} = X_{2,3,1}X_{4,5,2} - X_{2,4,1}X_{3,5,2} + X_{2,5,1}X_{3,4,2}$,

Sistema de generadores de $I_{\mathbf{Lie,4pnil},6}$:

Resulta de la unión entre $C_{\text{antcon},6}$, $C_{\text{nil},6}$ y el conjunto formado por los elementos:

$P_1 = X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_2 = X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}^2X_{5,6,4}^2 - X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4}^2$,
$P_3 = X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4}^2 - X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}^2X_{5,6,4}^2$,
$P_4 = X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}^2X_{5,6,4}^2 - X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}^2X_{5,6,4}^2$,
$P_5 = X_{3,4,2}X_{5,6,4}$,

$P_6 = X_{3,4,2}X_{5,6,3} - X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,6,2}X_{4,5,3},$
$P_7 = X_{3,4,1}X_{4,6,3}X^2_{5,6,4},$
$P_8 = X_{3,4,1}X_{4,5,3}X^2_{5,6,4},$
$P_9 = X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,6,2}X^2_{4,6,3}X_{5,6,4} +$
$X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$P_{10} = X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X^2_{5,6,4} -$
$X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,6,1}X_{3,6,2}X^2_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{11} = X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{4,5,3}X^2_{5,6,4} -$
$X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,2}X_{3,6,1}X^2_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{12} = X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$P_{13} = X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{4,6,3}X^2_{5,6,4},$
$P_{14} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4} -$
$X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{4,6,2}X^2_{5,6,4} +$
$X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{15} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,2}$
$-X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,3} +$
$X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,2} - X_{3,4,1}X_{3,6,2}X^2_{5,6,3} - X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} +$
$X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,3} - X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,3},$
$P_{16} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{4,5,3}X^2_{5,6,4},$
$P_{17} = X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{5,6,2} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2} +$
$X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} +$
$X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3},$
$P_{18} = X_{2,5,1}X_{4,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} -$
$X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X^2_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$P_{19} = X_{2,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} -$
$X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X^2_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{20} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{2,5,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} -$
$X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{21} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$P_{22} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{23} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4} -$
$X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{4,5,2}X^2_{5,6,4} +$
$X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{24} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,3} - X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,2}$
$-X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,2} -$
$X_{3,4,1}X_{3,5,2}X^2_{5,6,3} - X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} +$
$X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,3} - X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,3},$
$P_{25} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{26} = X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} + X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2} +$
$X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} +$
$X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3},$
$P_{27} = X_{2,4,1}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{4,6,2} + X_{2,6,1}X_{4,5,2} + X_{3,4,1}X_{5,6,3} -$
$X_{3,5,1}X_{4,6,3} + X_{3,6,1}X_{4,5,3},$
$P_{28} = X_{2,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$P_{29} = X_{2,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$P_{30} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{5,6,3},$
$P_{31} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,6,3},$
$P_{32} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3},$

$P_{33} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{5,6,3},$
$P_{34} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,6,3},$
$P_{35} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} - X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,6,2}+$
$X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,2},$
$P_{36} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3},$
$P_{37} = X_{2,3,1}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{5,6,4},$
$P_{38} = X_{2,3,1}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{3,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,5,2} - X_{3,4,1}X_{5,6,4},$
$P_{39} = X_{2,3,1}X_{4,6,3},$
$P_{40} = X_{2,3,1}X_{4,6,2} - X_{2,4,1}X_{3,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,4,2},$
$P_{41} = X_{2,3,1}X_{4,5,3},$
$P_{42} = X_{2,3,1}X_{4,5,2} - X_{2,4,1}X_{3,5,2} + X_{2,5,1}X_{3,4,2},$

Sistema de generadores de su radical:

Resulta de la unión entre $C_{\text{antcon},6}$, $C_{\text{nil},6}$ y el conjunto formado por los elementos:

$Q_1 = X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$Q_2 = X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$Q_3 = X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} - X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$Q_4 = X_{3,4,2}X_{5,6,4},$
$Q_5 = X_{3,4,2}X_{5,6,3} - X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,6,2}X_{4,5,3},$
$Q_6 = X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$Q_7 = X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$Q_8 = X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$Q_9 = X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}^2,$
$Q_{10} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4}-$
$X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4}^2 + X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4}-$
$X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$Q_{11} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,2}-$
$X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,2} - X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3}^2-$
$X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,3}-$
$X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,3},$
$Q_{12} = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}^2,$
$Q_{13} = X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{5,6,2} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}+$
$X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}+$
$X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3},$
$Q_{14} = X_{2,5,1}X_{4,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4}-$
$X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,6,3}^2X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$Q_{15} = X_{2,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}-$
$X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}^2X_{5,6,4},$
$Q_{16} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{2,5,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3}-$
$X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$Q_{17} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4},$
$Q_{18} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$
$Q_{19} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4}-$
$X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4}^2 + X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4}-$
$X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4},$

$Q_{20} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,3} - X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,2}-$
$X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,2} - X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3}^2-$
$X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,3} - X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,3}$,
$Q_{21} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{22} = X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} + X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}+$
$X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}+$
$X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}$,
$Q_{23} = X_{2,4,1}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{4,6,2} + X_{2,6,1}X_{4,5,2} + X_{3,4,1}X_{5,6,3}-$
$X_{3,5,1}X_{4,6,3} + X_{3,6,1}X_{4,5,3}$,
$Q_{24} = X_{2,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{25} = X_{2,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$Q_{26} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{5,6,3}$,
$Q_{27} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,6,3}$,
$Q_{28} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$Q_{29} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{5,6,3}$,
$Q_{30} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,6,3}$,
$Q_{31} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} - X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,6,2}+$
$X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,2}$,
$Q_{32} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$Q_{33} = X_{2,3,1}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{5,6,4}$,
$Q_{34} = X_{2,3,1}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{3,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,5,2} - X_{3,4,1}X_{5,6,4}$,
$Q_{35} = X_{2,3,1}X_{4,6,3}$,
$Q_{36} = X_{2,3,1}X_{4,6,2} - X_{2,4,1}X_{3,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,4,2}$,
$Q_{37} = X_{2,3,1}X_{4,5,3}$,
$Q_{38} = X_{2,3,1}X_{4,5,2} - X_{2,4,1}X_{3,5,2} + X_{2,5,1}X_{3,4,2}$

Sistema de generadores de $I_{\mathbf{Lie,nil},6}$ y de su radical:

Resulta de la unión entre $C_{\text{antcon},6}$, $C_{\text{nil},6}$ y el conjunto formado por los elementos:

$P_1 = X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_2 = X_{3,4,2}X_{5,6,4}$,
$P_3 = X_{3,4,2}X_{5,6,3} - X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,6,2}X_{4,5,3}$,
$P_4 = X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4}+$
$X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4}^2-$
$X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}^2X_{5,6,4} + X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$P_5 = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4}-$
$X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4}^2 + X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4}-$
$X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_6 = X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,2}-$
$X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,2} - X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3}^2$
$-X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,3} - X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,3}$,
$P_7 = X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{5,6,2} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}+$
$X_{3,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} + X_{3,6,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}$,
$P_8 = X_{2,5,1}X_{4,6,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4}-$
$X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,6,3}^2X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$P_9 = X_{2,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{4,5,3}X_{5,6,4}-$

$X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,5,3}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}^2X_{5,6,4}$,
$P_{10} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{2,5,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} -$
$X_{2,6,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_{11} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$P_{12} = X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3} - X_{2,6,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_{13} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,4} -$
$X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} - X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4}^2 + X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,4} -$
$X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_{14} = X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2}X_{5,6,3} - X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,2} -$
$X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3}X_{5,6,2} - X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3}^2 -$
$X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,3}X_{5,6,4} + X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3}X_{5,6,3} - X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}X_{5,6,3}$,
$P_{15} = X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} + X_{2,5,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2} +$
$X_{3,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{3,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{3,5,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} + X_{3,5,2}X_{3,6,1}X_{4,5,3}$,
$P_{16} = X_{2,4,1}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{4,6,2} + X_{2,6,1}X_{4,5,2} + X_{3,4,1}X_{5,6,3} - X_{3,5,1}X_{4,6,3} +$
$X_{3,6,1}X_{4,5,3}$,
$P_{17} = X_{2,4,1}X_{4,6,3}X_{5,6,4}$,
$P_{18} = X_{2,4,1}X_{4,5,3}X_{5,6,4}$,
$P_{19} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{4,6,2}X_{5,6,4} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{5,6,3}$,
$P_{20} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,6,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,6,3}$,
$P_{21} = X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,3} - X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$P_{22} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{4,5,2}X_{5,6,4} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{5,6,3}$,
$P_{23} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,6,3}$,
$P_{24} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,6,2} - X_{2,4,1}X_{3,6,2}X_{4,5,2} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,6,2} +$
$X_{2,6,1}X_{3,4,2}X_{4,5,2}$,
$P_{25} = X_{2,4,1}X_{3,5,2}X_{4,5,3} - X_{2,5,1}X_{3,4,2}X_{4,5,3}$,
$P_{26} = X_{2,3,1}X_{5,6,3} + X_{2,4,1}X_{5,6,4}$,
$P_{27} = X_{2,3,1}X_{5,6,2} - X_{2,5,1}X_{3,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,5,2} - X_{3,4,1}X_{5,6,4}$,
$P_{28} = X_{2,3,1}X_{4,6,3}$,
$P_{29} = X_{2,3,1}X_{4,6,2} - X_{2,4,1}X_{3,6,2} + X_{2,6,1}X_{3,4,2}$,
$P_{30} = X_{2,3,1}X_{4,5,3}$,
$P_{31} = X_{2,3,1}X_{4,5,2} - X_{2,4,1}X_{3,5,2} + X_{2,5,1}X_{3,4,2}$

Bibliografía

[1] M. F. Atiyah y I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, University of Oxford.

[2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52.

[3] Luiz A. B. San Martin, *Álgebras de Lie*, Universidad Estadual de Campinas.

[4] William W. Adams y P. Loustaunau *An Introduction to Gröbner Bases*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 3.

[5] Willem A. de Graaf, *Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2*, Journal of Algebra 309 (2007).

[6] A. Fialowski y M. Penkava, *The moduli space of 3-dimensional associative algebras*, arXiv (2008).

[7] S. Laplagne, *Algoritmos de álgebra conmutativa en anillos de polinomios*, Tesis de Licenciatura Universidad Nacional de Buenos Aires.

[8] S. Laplagne, *Algoritmos de descomposición primaria*, Tesis de Doctorado Universidad Nacional de Buenos Aires.

[9] Bernard Sturmfels, *Solving systems of polynomial equations*, University of California at Berkeley (2002).