Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

INFORME FINAL
Metodología y Práctica de la Enseñanza

Título: ENSEÑANZA DE FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS: UN TRABAJO CON DEFINICIONES Y JUSTIFICACIÓN MATEMÁTICA
Autores: Galeano, Sofía; Vaca, María Inés.
Equipo responsable de MyPE: Esteley, Cristina B.; Coirini Carreras, Araceli; Dipierri, Iris C.; Gerez Cuevas, Nicolás; Mina, María; Smith, Silvina
Profesora Suprevisora de Prácticas: Esteley, Cristina B.
Carrera: Profesorado en Matemática
Fecha: 21-11-2017

Clasificación:
97A General, mathematics and education
97D Education and instruction in mathematics
97H Algebra

Palabras clave:
Polinomios
Factorización
Representaciones
Comprensión
Tecnologías

Resumen:
En este trabajo, presentamos nuestra experiencia profesional desarrollada en el marco de la asignatura MyPE. Para hacerlo, tomamos las nociones de terreno y escenario (en el sentido de Lave, 1991) como medios para organizar la escritura. A partir de esas nociones, en la primera sección presentamos lo que se refiere a la institución como el terreno en el que se llevaron a cabo las prácticas. En la segunda sección, se presenta lo que se refiere al escenario, al explicar sobre la planificación inicial de las clases, así como su implementación efectiva en el aula. En la tercera sección analizamos un problema que surgió en nuestras prácticas: "El sentido de enseñar los casos de factorización de polinomios en el nivel secundario”. Finalmente, en la cuarta sección se presentan algunas breves conclusiones finales. En todas las secciones de nuestro trabajo, confiamos en las contribuciones de diferentes autores para basar nuestras decisiones y discusiones. Para ilustrar las ideas planteadas y desarrolladas presentamos varios ejemplos de las prácticas.

Abstract:
In this work, we present our professional experience developed in the framework of the subject MyPE. In order to do so, we take the notions of arena and setting (in the sense of Lave, 1991) as means for organizing the writing. From those notions, in the first section we present what refers to institution as the arena in which the practices were carried out. In the second section, what is referred to the setting is presented, by explaining about the initial lesson planning as well as its effective implementation in classroom. In the third section we analyze a problem that arose in our practices: "The sense of teaching the cases of factoring polynomials at the secondary school level. Finally, in the fourth section some brief final conclusions are presented. In all the sections of our work, we rely on the contributions of different authors to base our decisions and discussion. In order to illustrate the ideas raised and developed we present several examples from the practices.

Cuando la sabiduría entrare en tu corazón,
y la ciencia fuere grata a tu alma,
la discreción te guardará;
te preservará la inteligencia,
Proverbios 2:10-11

ÍNDICE

Introducción

Decidimos tomar este espacio para exponer la estructura y dinámica que debían tener nuestras prácticas como requerimiento del espacio curricular Metodología y Prácticas de la enseñanza (MyPE). De esta manera queremos que el lector (sea experto en el tema o no) pueda acompañarnos en el proceso de planificación, ejecución y análisis de las prácticas vividas teniendo una mejor comprensión del contexto y marco en el que trabajamos.

Se debe trabajar en equipos colaborativos de por lo menos dos y no más de tres estudiantes (en nuestro caso 2 personas y se lo llama par pedagógico). El equipo de trabajo tiene asignado un profesor supervisor de MyPE y el profesor de la institución que recibe al grupo de trabajo se designa profesor tutor. Nuestras prácticas constan de 3 etapas: pre-activa, activa y post-activa. Durante la etapa pre-activa de la práctica profesional se realizan observaciones en los cursos asignados y consultas en la institución, se hace un estudio y análisis del contenido matemático a desarrollar y se realiza una planificación de la unidad a desarrollar en base a la información recolectada y lo acordado con todos los miembros del equipo.

Luego de realizar las observaciones se debe asignar un integrante del equipo de trabajo a cada curso observado con el fin de que esté a cargo del desarrollo del tema en dicho curso. Se considera que un integrante del par pedagógico está en rol activo cuando se encuentra a cargo del curso asignado, mientras que su par pedagógico se encuentra en rol de observador y colaborador (durante este momento, puede colaborar con el desarrollo de la clase cuando su par pedagógico lo considere necesario o pertinente).

Durante la etapa activa de la práctica profesional se lleva a cabo el dictado de clases, el ajuste de la planificación, la elaboración de materiales, la preparación y la corrección de las evaluaciones del tema desarrollado.

Al finalizar las prácticas, en la etapa post-activa de la práctica profesional se reflexiona sobre la práctica docente, se comunican y analizan las decisiones tomadas durante el desarrollo de las clases y se elabora y presenta el trabajo final de prácticas.

Dado que el marco en el que se desarrolla este trabajo es en la etapa post-activa de las prácticas profesionales, se comunicará de manera crítica parte de la información recolectada y el material preparado durante la etapa preactiva y activa de las mismas, cuestionando y analizando lo esperado de las clases en contraste con lo ocurrido en las mismas.

Para llevar a cabo nuestro análisis decidimos tomar las ideas de terreno y escenario de Lave (1991) con el fin de delimitar nuestras categorías de análisis. Lave plantea al contexto como consistente de dos componentes a las que denomina terreno y escenario, donde terreno remite a los aspectos del contexto que ya existen previos al planteo de las acciones o experiencias de los individuos y sobre los que los sujetos no tienen control; y el escenario “se concibe como una relación entre las personas en acción y los terrenos en los que actúan” (p.164). Es por esto, que en la sección 1 de este trabajo nos centraremos en el análisis del terreno de las prácticas, en la sección 2 en el escenario y en la sección 3 profundizaremos el análisis sobre una problemática particular inspirada en lo vivido en el contexto de nuestras prácticas.

1. El terreno de nuestras prácticas

El terreno es una "...entidad pública y duradera y está organizada física, económica, política y socialmente en el espacio y en el tiempo" (Lave, 1991, p.164)

En este capítulo presentaremos todas las características que Lave considera como parte del terreno.

1.1 La Institución

La institución en la cual se llevaron a cabo las prácticas profesionales fue fundada por una comunidad católica, es pública de gestión privada, admite mujeres y hombres y se encuentra en inmediaciones del centro de la ciudad de Córdoba. Debido a sus orígenes y al proyecto educativo que la institución posee, la comunidad educativa está comprometida con proyectos solidarios, con la enseñanza a partir del aprovechamiento de la tecnología y ofrece jornada extendida opcional para sus alumnos en la que pueden realizar actividades de índole académicas o deportivas.

La institución cuenta con nivel inicial, primario y secundario del cual, en el Ciclo Orientado, la única especialidad es la de Humanidades con orientación en Ciencias Sociales.

La institución respecto a lo edilicio presenta 4 alas y cada una de ellas consta de un subsuelo, primer y segundo piso. Cuenta con laboratorios de diferente naturaleza, conexión a Internet, biblioteca, comedor, cantina, fotocopiadora/librería, amplio patio, canchas de fútbol y de handball, pileta olímpica y un polideportivo techado con un escenario para actos. Además, cuenta con una amplia sala de profesores en la cual los docentes tienen a disposición dos computadoras con conexión a Internet, libros, pizarras con anuncios y un dispenser de agua fría y caliente que pueden utilizar para prepararse infusiones o simplemente beber agua. Además, tienen disponible una fotocopiadora que pueden utilizar y luego abonar el uso al encargado de la misma.

La infraestructura de los cursos es variada: algunas aulas tienen pupitres anclados al piso en hileras de un asiento; en cambio, otras aulas tienen mesas y sillas móviles en las cuales se puede aprovechar para que los alumnos se sienten en parejas. Todas las aulas poseen aire acondicionado frío/calor y tienen en el pizarrón instalada una pizarra electrónica que cuenta con un lápiz óptico (que hace la función de mouse) para manejarla y como soporte un gabinete con teclado que también maneja la pizarra en caso que el lápiz óptico no funcione y se encuentra sobre el escritorio destinado al docente. Todas las aulas poseen una gran cantidad de enchufes que posibilita el trabajo con computadoras y tablets. Además, las aulas que no se encuentran en el subsuelo, tienen ventanales grandes que permiten el ingreso de luz natural. Las decoraciones de las aulas varían según los cursos y los trabajos que se hagan para las distintas materias.

Como ya se puede evidenciar, la institución está muy comprometida con el uso de la tecnología y con lograr la excelencia académica, es por esto que los docentes participan de cursos y capacitaciones sobre la enseñanza con tecnología y el uso de diferentes softwares proporcionados por la institución.

1.2 Los cursos

Las prácticas se llevaron a cabo en los cursos 4º A y 4º B. Cada una de las aulas asignadas a los cursos, posee una tarima y 6 hileras de 6 pupitres anclados a los pisos[1]. Los alumnos tenían asignados asientos que respetaban durante toda la jornada escolar. A continuación en las Imágenes 1 y 2, presentamos el esquema del aula que ocupaban los alumnos, remarcando para cada curso la ubicación tanto de mujeres (M) como de varones (V).

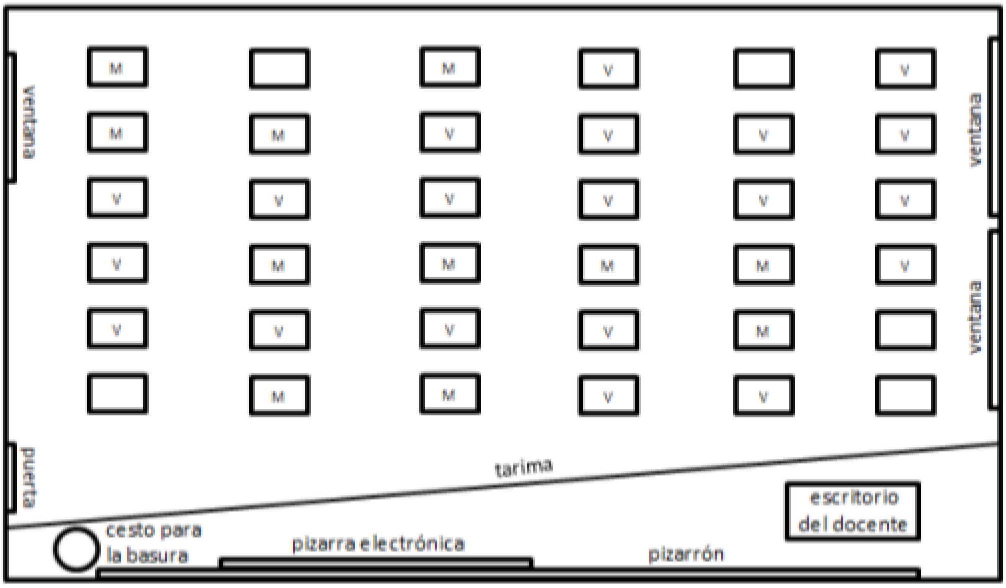


Imagen 1: Ubicación de los alumnos de 4º año A

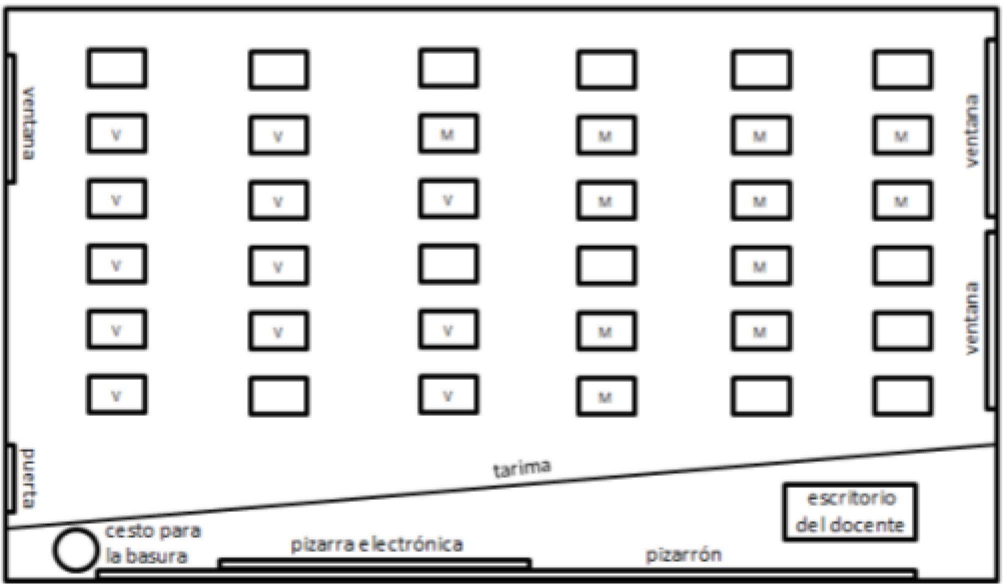


Imagen 2: Ubicación de los alumnos de 4º año B

1Las últimas 2 semanas de clases se les asignó un aula diferente que contaba con mesas y sillas móviles.

Si bien en varios sentidos los cursos eran similares (por ejemplo en trayectoria de formación) es posible también marcar algunas diferencias. Por ejemplo en la cantidad de alumnos, mientras 4º año A contaba con 33 alumnos de los cuales 13 eran mujeres y 20 varones, 4º año B contaba con 23 alumnos en total, 11 mujeres y 12 varones. Otra diferencia se vincula con la distribución de los lugares que ocupaban en los asientos los alumnos según sexo. Para hacer esto evidente decidimos remarcar las ubicaciones de los alumnos en cada curso, debido a que particularmente en 4º año B se distinguía una gran separación entre varones y mujeres. Además, queremos hacer mención que un alumno de 4° año A presenta características que requieren una atención particular en algunas oportunidades. Debido a esto, fue necesario un acompañamiento permanente a este alumno por parte del par pedagógico. Esta decisión resultó muy satisfactoria debido a que en ningún momento de las prácticas hubo dificultades con el alumno, se sintió incluído y la practicante a cargo de ese curso pudo enfocarse en las consultas y dudas de todos los alumnos sin ningún inconveniente. El alumno realizaba los mismos ejercicios que sus compañeros (a veces con mayor dificultad y empleando una mayor cantidad de tiempo pero con disposición para hacer las actividades), y su evaluación sólo requirió ligeras modificaciones en las actividades planteadas atendiendo a las sugerencias que hiciera llegar la psicopedagoga que acompaña a este alumno fuera del horario de clases.

Cada curso contaba con 4 horas cátedra por semana de la asignatura Matemática, tal como lo establece el Diseño Curricular. A continuación, en los Cuadros 1 y 2, presentamos los horarios de cursado de 4º año A y B.

Horario		Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1	7.30 a 8.10	**Matemática**	Ed. Artística	Ed. Física	Historia	Biología
2	8.10 a 8.50	**Matemática**	Ed. Artística	Ed. Física	Historia	Biología
3	8.50 a 9.25	Ed. Física	Biologia	Geografía	Historia	Antropología Social y Cultural
4	9.40 a 10.20	Ed. Física	Biología	Geografía	Lengua y Literatura	Antropología Social y Cultural
5	10.20 a 11.00	Historia	Portugués	Geografía	Lengua y Literatura	Antropología Social y Cultural
6	11.15 a 11.55	Historia	Portugués	**Matemática**	Geografia	Lengua y Literatura
7	11.55 a 12.35	Ed. Artítica	Portugués	**Matemática**	Geografía	Lengua y Literatura
8	13.00 a	FVT	Lengua	Formación	Lengua	

	13.40		Extranjera: Ingles	Cristiana	Extranjera: Ingles	
9	13.40 a 14.20	FVT	Lengua extranjera: Ingles	Formación cristiana	Lengua extranjera: Ingles	
10	14.20 a 15.00	Formación Cristiana-FVT				

Cuadro 1: Horarios de cursado de 4° año A

Horario		Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1	7.30 a 8.10	Ed. Artística	Portugués	Geografía	**Matemática**	Historia
2	8.10 a 8.50	Ed. Artística	Portugués	Geografia	**Matematica**	Historia
3	8.50 a 9.25	Ed. Artística	Portugués	Ed. Física	Biología	FVT
4	9.40 a 10.20	Ed. Física	Formación Cristiana	Ed. Física	Biologia	Geografía
5	10.20 a 11.00	Ed. Física	Geografía	Formación Cristiana	Historia	Geografía
6	11.15 a 11.55	Biología	**Matemática**	Lengua y Literatura	Lengua y Literatura	Antropología Social y Cultural
7	11.55 a 12.35	Biología	**Matemática**	Lengua y Literatura	Lengua y Literatura	Antropología Social y Cultural
8	13.00 a 13.40	Formación Cristiana-FVT	Lengua Extranjera: Ingles	Historia	Lengua Extranjera: Ingles	Antropología Social y Cultural
9	13.40 a 14.20	Formación Cristiana-FVT	Lengua Extranjera: Ingles	Historia	Lengua Extranjera: Ingles	

Cuadro 2: Horario de cursado de 4º año B

1.3 Medios utilizados en el aula

Los alumnos de la institución cuentan con acceso a internet y la pantalla digital como gran recurso para utilizar durante las clases. También tienen disponible un pizarrón verde[2] en paralelo con la pantalla digital para explicaciones.

Los alumnos utilizan muchos apuntes y sus carpetas para el registro de actividades y las clases. En los cursos que nos fueron asignados los alumnos no llevaban con cotidianeidad tablets o computadoras sino que utilizaban el celular para disponibilizar cualquier material digital que les hiciera falta. Este material que debían utilizar, con regularidad se encontraba en el aula virtual que posee la institución. Cada materia de cada año posee su propio curso en el aula virtual que el/la profesor/a puede utilizar de la manera que le parezca más conveniente.

1.4 Estilo de trabajo en la clase de matemática

Durante nuestro período de observaciones, solo pudimos observar una clase en la que hubiera dictado de temas ya que estas se ubicaron durante repasos y toma de evaluaciones. Dadas estas condiciones, consideramos oportuno consultar con la profesora sobre la dinámica del curso y cómo ella manejaba las herramientas digitales. La docente nos comentó que ella explicaba la teoría junto con actividades cortas e iba marcándoles el tiempo de resolución a los estudiantes para evitar que se dispersen. También comentó que ella no hacía uso de la pizarra digital dado que los temas que corresponden a cuarto año conllevan muchas cuentas y trabajo algebraico que se dificulta hacer en la pizarra digital.

En una de las clases observadas, destacamos que la docente daba espacio a los alumnos para pasar al pizarrón y resolver ejercicios en instancias de corrección de tareas. Les solicitaba que trabajaran con prolijidad tanto a los que utilizaban el pizarrón, como a los que utilizaban la pizarra digital.

De los alumnos pudimos observar que el hecho de tener bancos fijos dificultaba la colaboración entre ellos y que al pedir carpetas, nadie tenía mucho más que actividades medianamente completas. Luego, al tener acceso al aula virtual, pudimos corroborar que no estaba siendo muy utilizado este medio y que no había información sobre el teórico o práctico disponible. Esto no significaba un problema ya que la profesora había optado por disponibilizar materiales o ideas en versión papel o por medio de la toma de apuntes en clase.

1.5 Alumnos y docentes

Antes de comenzar las prácticas, tuvimos la posibilidad de observar una jornada escolar completa de los alumnos de cada curso. El objetivo de esta tarea fue observar el comportamiento y participación de los alumnos en cada materia y con cada profesor en particular, además de comprender profundamente las creencias y manejos de la institución.

2En la institución solo había disponible tizas color blanco y no siempre disponíamos de este material junto con el borrador o el lápiz digital.

En ambos cursos la observación de jornada completa se realizó un día miércoles, sin poder observar todas las clases de ese día debido a que había un acto al que asistió todo el nivel secundario. Algo que nos fue comentado por algunos profesores, es que generalmente no piden a los alumnos que hagan trabajos en grupo debido a que los estudiantes provienen de muy diversos barrios de la ciudad (al estar la institución en una zona céntrica, los alumnos suelen vivir muy alejados unos de otros) y es difícil que puedan juntarse. Además, no se les da una gran cantidad de tarea debido a que los alumnos tienen jornada extendida y pasan en un día escolar una importante cantidad de horas en la institución como se puede ver en las Cuadros 1 y 2.

En 4º año A, se notaba un especial cambio de atención y participación de los alumnos a medida que cambiaban de profesor. Con algunos de ellos, la participación de los estudiantes era mínima y se encontraban muy dispersos. Con otros, se notaba una atención particular de los alumnos hacia el profesor, pues el mismo creaba un ambiente participativo que motivaba a los alumnos a interesarse en la clase. Fue notorio el distinto uso que daba cada profesor a la pizarra digital y al aula virtual: mientras que algunos la utilizaban para buscar información para ser debatida con sus alumnos, otros no le daban uso y llevaban a cabo la clase sin necesidad de utilizarla. Durante toda la jornada se distinguió un pequeño grupo de alumnas que no participaba y no se sentían interesadas con lo que ocurría en la clase. En general, el grupo de alumnos era muy unido y se destacaba la ayuda que recibían unos de otros dado que una vez que algunos alumnos comprendían el concepto que se estaba trabajando, ayudaban y explicaban al resto de sus compañeros.

En el curso 4º B, las clases fueron variadas y dependía fuertemente del profesor el uso que se hacía del aula virtual y la pizarra digital. En general, los alumnos estaban calmos y dependía del tipo de actividades propuestas la participación y colaboración de los mismos en el desarrollo de la clase. El trato entre los alumnos permanecía invariante en las diferentes clases y no había grupos consolidados que definieran el manejo del curso, mientras que el trato con los profesores se veía modificado por la personalidad de cada docente y el tipo de gestión que ponía en juego. Los docentes que mantenían una relación más distante con sus alumnos tenían una menor participación de los alumnos en clase y caracterizaban al grupo como difícil, mientras que los docentes que eran más cercanos en el trato y tenían más en cuenta a cada alumno obtenían mayor atención por parte de los alumnos, por tiempos más prolongados y caracterizaban al grupo como uno con gran potencial.

Como algo que es interesante, es importante destacar el cambio de aula que ocurrió a mitad de nuestras prácticas. En primera instancia, como ya se dijo, ambos cursos tenían pupitres anclados en el suelo de hileras de un alumno. En las últimas clases, luego del cambio de aulas, ambos cursos quedaron en aulas con mesas y sillas móviles, que los alumnos aprovecharon para sentarse en parejas. El cambio fue muy satisfactorio en la mayoría de los casos, ya que los alumnos trabajaban más entusiasmados por el hecho de poder consultar con quienes tenían sentados alrededor. Solo en un grupo menor de 4º año A, el cambio fue negativo debido a que en sus nuevos lugares, algunas alumnas charlaban más e impedían que se generara un ambiente de silencio mientras se explicaba o se debatía.

A continuación, en las Imágenes 3 y 4, se presenta el esquema del aula, que a pesar de tener la misma infraestructura que el aula que usaban anteriormente, la ubicación de los escritorios de los alumnos se encuentra modificada.

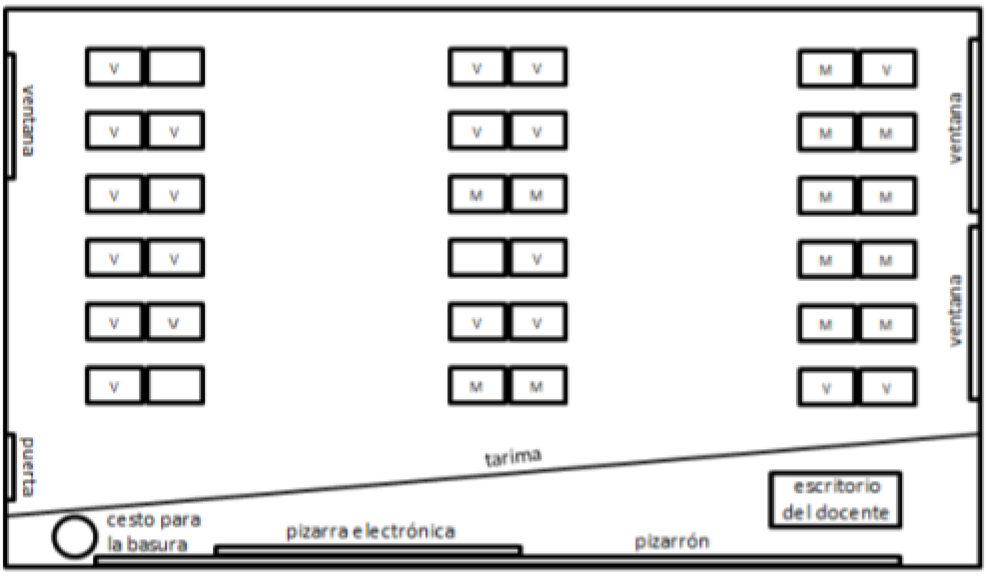


Imagen 3: Nueva ubicación de los alumnos de 4º año A

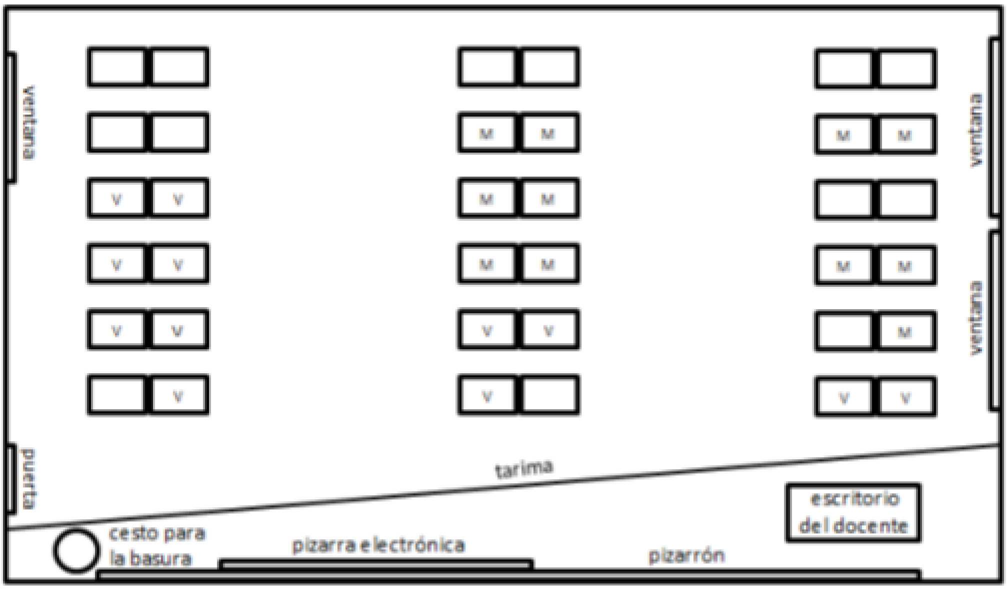


Imagen 4: Nueva ubicación de los alumnos de 4º año B

Con la nueva ubicación de los alumnos en 4º año A se distinguió una mejor conducta y rendimiento del grupo de varones que se identifica en la primera columna.

2. El escenario de nuestras prácticas: Diseño e implementación en el aula

El escenario *“tiene simultáneamente un carácter independiente, físico, y un potencial para la realización sólo en relación con la actividad” (Lave, 1991, p.125-3)*

El escenario, para una actividad, es un modo de representar las relaciones entre la organización del terreno dentro del cual tiene lugar la actividad, la estructura de las experiencias y las expectativas de las personas como actores. Bajo esta concepción es que consideramos incluir en este capítulo lo concerniente a las delimitaciones sobre la planificación por parte de la institución, las decisiones tomadas durante la planificación, todo el material elaborado para las prácticas y un análisis sobre lo efectivamente ocurrido durante el desarrollo de nuestras clases.

2.1 Planificación anual de la materia y tema asignado para las prácticas

Desde un principio contamos con el programa de la materia que nos fue entregado por la profesora. Tenerlo fue clave para poder comenzar a planificar nuestras clases y comprender mejor la posición tomada por la institución para organizar y secuenciar los contenidos matemáticos y su enseñanza. A continuación, en el Cuadro 3, presentamos dicho documento como copia fiel del ejemplar presentado a nosotros por parte de la profesora.

Unidad	Contenidos	Conceptos básicos
N°1: Trigonometría	● Sistemas de medición. ● Conversión. ● Circunferencia trigonométrica. ● Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. ● Resolución de triángulos rectángulos. ● Valores trigonométricos de ángulos notables.	● Ángulos, triángulos ● Trigonometría ● Relaciones trigonométricas ● Funciones inversas
N°2: Inecuaciones	● Definición de desigualdad. ● Operaciones. ● Resolución de inecuaciones. ● Sistemas de inecuaciones. ● Gráfico de soluciones.	● Resolución de inecuaciones ● Sistemas de inecuaciones ● Gráficos
N°3: Expresiones Algebraicas Fraccionarias	● Expresiones algebraicas enteras: los polinomios. ● Características de los polinomios. ● Operaciones: suma, resta y multiplicación de polinomios. División entera de polinomios.	● Polinomios ● Operaciones ● Factorización ● Raíces ● Gráfico

	● Valor numérico de un polinomio de un polinomio para $x=a$. ● Raíces de un polinomio. ● Regla de Ruffini. ● Teorema del Resto. ● Descomposición de un polinomio en factores: Factor común, diferencia de cuadrados, factor común por grupos, trinomio cuadrado perfecto. ● Operaciones sencillas con expresiones algebraicas fraccionarias. ● Casos de factoreo. Teorema de Gauss. ● Cálculo de las raíces de un polinomio. Conjunto de ceros, de positividad y negatividad. Gráfico aproximado de una función polinómica.	
N°4: El conjunto de los números complejos	● El número imaginario. Necesidad de su creación. ● El número complejo como par ordenado y como binomio. ● Su representación en el plano. ● Forma polar y trigonométrica del número complejo. ● Operaciones con complejos. ● Resolución de ecuaciones con solución en el campo de los números complejos.	● Unidad imaginaria ● Números complejos ● Operaciones ● Representación gráfica
N°5: Vectores	● Vectores en el plano. ● Vectores referidos al origen de coordenadas. ● Adición y sustracción de vectores. ● Producto de un escalar por un vector. Módulo. ● Descomposición vectorial. ● Producto escalar de dos vectores. ● Producto vectorial.	● Vectores ● Operaciones ● Representación gráfica

Cuadro 3: Programa anual de 4° año A y B

Además de contar con el programa de la materia, contamos con una planificación anual[3] en la cual la información se divide en 5 categorías: contenidos, objetivos específicos, estrategias/actividades, capacidades y criterios y formas de evaluación. Con respecto a la unidad N°3 (sobre la que deberíamos trabajar) la planificación específica:

- Contenidos: se plantean los mismos que se desarrollan en el programa (como se ilustra en el Cuadro 3).

3La presentación completa de la planificación se presenta en el Anexo I de la sección 6 de este informe.

- Objetivos específicos: que el alumno pueda:
    - Conocer y manejar las expresiones algebraicas.
    - Realizar operaciones con polinomios.
    - Factorizar polinomios.
    - Determinar sus raíces.
    - Encontrar los intervalos de positividad y negatividad.
    - Graficar las funciones polinómicas en forma aproximada.
- Estrategias/actividades:
    - Lectura comprensiva de enunciados.
    - Resolución de ejercicios.
    - Realización de gráficos.
- Capacidades:
    - Oralidad, lectura y escritura.
    - Manejo de las funciones polinómicas.
    - Resolución de ejercicios y situaciones problemáticas.
    - Hacer uso del lenguaje matemático adecuado.
- Criterios y formas de evaluación:
    - Se evaluará el trabajo diario en la carpeta y guías de trabajo.
    - Se hará un seguimiento diario del desempeño áulico (responsabilidad, respeto y compañerismo) que se reflejará en la nota de seguimiento trimestral.
    - Las evaluaciones serán de pocos contenidos con el objetivo que los alumnos vayan estudiando parcialmente las unidades y así poder observar las dudas o errores que puedan tener durante el proceso de aprendizaje.
    - Se considera el orden, prolijidad, procedimiento y resultado de la resolución.
    - Se evalúa teórico y práctico.
    - Se realizarán evaluaciones orales y escritas durante todo el trimestre.
    - Se tendrá en cuenta a la hora de evaluar: procedimiento/desarrollo (80%), resultados (15%) y prolijidad y ortografía (5%)

La información obtenida de la planificación y del programa nos brindó mucha información sobre las expectativas de las institución, de los profesores y de la forma de trabajo esperada en los cursos.

Considerando que a los alumnos se los evalúa sobre contenidos teóricos y prácticos, que se espera que puedan resolver ejercicios y situaciones problemáticas y que hagan uso del lenguaje matemático adecuado, conjeturamos que sería necesario un trabajo teórico avanzado y con un grado de abstracción elevado.

Debido a los requerimientos y lineamientos presentes en la planificación anual de la materia y la presencia del Teorema del Resto entre los contenidos a enseñar llegamos a hipotetizar que se trabajaba con fundamentaciones matemáticas.

Para el desarrollo de nuestras prácticas nos fue asignada la Unidad N°3: “Expresiones Algebraicas Fraccionarias” que abarca los conceptos polinomios, operaciones, factorización, raíces y gráfico. Dentro de esta unidad nos fue asignado la factorización de polinomios como tema a desarrollar[4]. A continuación se detallan los temas que debían desarrollarse durante nuestras prácticas y los objetivos específicos que están presentes en la Planificación anual realizada por la docente.

Temas a desarrollar:

- Raíz de un polinomio
- Regla de Ruffini
- Teorema del Resto
- Descomposición de un polinomio en factores: factor común, diferencia de cuadrados, factor común por grupos, trinomio cuadrado perfecto.
- Casos de factoreo. Teorema de Gauss.

Objetivos específicos:

- Factorizar polinomios.
- Determinar sus raíces.
- Realizar operaciones con polinomios.

Cabe destacar que el Teorema de Gauss fue incluído en nuestra planificación pero no fue tratado en la implementación debido al limitado tiempo asignado al período de prácticas y a que se priorizó la mejor apropiación de contenidos que ya habían sido estudiados, en lugar de continuar incorporando nuevos.

2.2 Planificación del período de prácticas

2.2.1 Decisiones sobre la estructura de nuestras prácticas

"Toda acción de enseñanza supone la fijación de objetivos; sea para una clase determinada, un ciclo lectivo o una unidad de aprendizaje" (Gvirtz y Palamidessi, 1998, p.189). Es por esto que, a la hora de comenzar a planificar nuestras clases, nos propusimos como objetivo que, al finalizar nuestras prácticas, los alumnos sean capaces de:

- Identificar raíces en un polinomio
- Analizar si un polinomio está factorizado correctamente
- Factorizar un polinomio cuando sea posible.

Además planteamos diferentes enfoques para estructurar la planificación de nuestras prácticas:

- *Alumnos resolviendo problemas*, capaces de aplicar sus conocimientos a aquellas situaciones problemáticas que se le presenten, para poder así hallar una solución y ser críticos a la hora de evaluar su sentido.
- *Enfoque investigativo* para la presentación de los conceptos teóricos y la aplicación de los temas en la práctica.
- Teorema de Gauss como el caso de factorización más general.
- Conceptos organizados y trabajados de manera no lineal implicando una construcción y modificación constante de las categorías de factorización.

4Los alumnos no tienen conocimiento de la fórmula de Bashkara para encontrar raíces ya que esto se presenta con demostración en 5° año. Por lo que los alumnos no tenían ningún conocimiento de cómo calcular raíces y nosotras no contábamos con una herramienta para determinar si una ecuación cuadrática tenía o no raíces reales.

Los objetivos y los enfoques planteados conformaron un marco que fue la base para todas las decisiones tomadas con respecto a la planificación de nuestras prácticas. Se decidió trabajar a lo largo de todas las clases de forma grupal (todo el curso) en la construcción de las definiciones y casos de factorización y plantear actividades de ejercitación y problemas para que los alumnos resuelvan de manera individual o grupal para afianzar y desarrollar los conceptos. "*Los momentos de discusión constituyen, así, oportunidades fundamentales para la negociación de significados matemáticos y la construcción de nuevos conocimientos.*" (Ponte, 2005, p.16). Todas las decisiones están alineadas con la primera decisión que se tomó para estructurar las prácticas: las interacciones de las clases y el planteo de problemas deben favorecer a la construcción del conocimiento matemático.

Aprovechando que los alumnos ya tenían la base para operar con polinomios[5], se decidió trabajar con la expresión $P(x)=Q(x).C(x)+R(x)$ que surge del Algoritmo de la División[6] y a partir del mismo desarrollar cada clase, abarcando la utilización del polinomio resto, analizando las formas de escribir un polinomio y separando en los posibles casos. Nos propusimos avanzar en los contenidos de manera que presenten continuidad y culminen con el Teorema de Gauss. Para plantear las actividades que proponemos, creamos dos guías de actividades: una conteniendo la ejercitación necesaria para afianzar los conceptos trabajados en clase como también la ejecución de algoritmos o métodos, y la otra conteniendo los problemas a resolver por los alumnos a lo largo de las clases donde se trabajen todos los conceptos de manera integrada. Esta decisión fue tomada considerando los aportes de João Pedro da Ponte (2005) y Ole Skovsmose (2000) que indican que es necesario trabajar con actividades de distinta naturaleza para lograr un aprendizaje significativo en los alumnos. Estos autores plantean que es necesario que se les presenten actividades a los alumnos que los envuelvan en el quehacer matemático para representar y comprender la matemática desde una perspectiva más investigativa y viva, pero a la vez recalcan la importancia de la ejercitación para afianzar conceptos y ganar habilidades matemáticas para luego poder ser utilizadas en la resolución de problemas.

Desde un principio explicitamos los recursos que utilizaríamos a lo largo de nuestras prácticas. Para los alumnos consideramos que los recursos principales serían las guías de actividades con ejercicios y problemas, el software *GeoGebra*, presentaciones de *PowerPoint*, carpetas y apuntes. Mientras que para nosotras, como docentes, además de estos recursos consideramos los guiones conjeturales, esquemas de organización y nuestra planificación general.

A continuación presentamos en la Imagen 5 un esquema que realizamos al momento de iniciar nuestra planificación con el fin de ordenar y poder visualizar nuestra organización y vinculación de los contenidos para nuestra práctica.

5Luego del receso invernal 4° año A había desarrollado todos los temas correspondientes a operaciones con polinomios y 4° año B, además, había desarrollado valor numérico.
6Los alumnos la llamaban Verificación de la división.

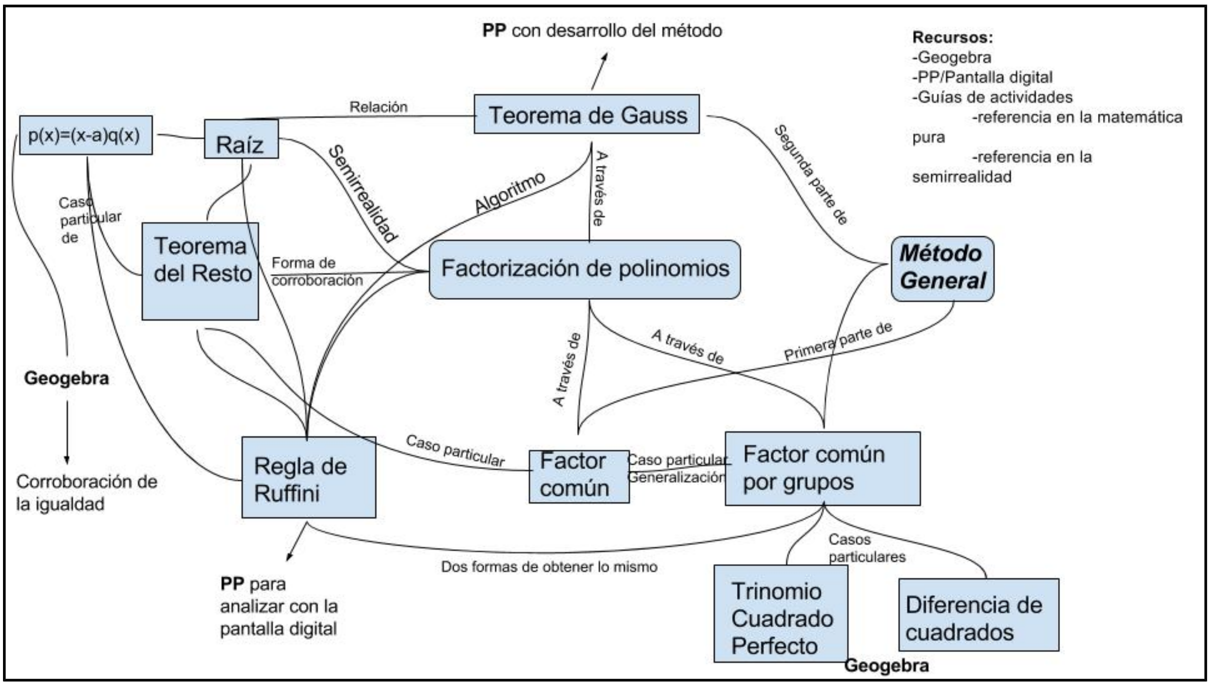


Imagen 5: Estructuración de las contenidos y recursos para el período de prácticas

En el esquema se pueden apreciar las decisiones tomadas sobre el uso de los recursos, la no linealidad en la presentación de los conceptos y el rol que le otorgamos a cada uno de ellos vinculándolos de manera que surja de la necesidad del Teorema de Gauss.

Al decidir utilizar una perspectiva teórica, las definiciones obtuvieron un rol muy importante y decidimos armarlas de manera que sean acordes con la perspectiva que adoptamos para nuestras clases. Sabemos que las definiciones no son únicas pero que deben cumplir con determinadas estructuras:

- *Proposición que expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de los objetos matemáticos* (Zamora Monge y Méndez Méndez, 2014, p. 3).
- *Tiene como propósito trabajar con la idea de lo que ésta significa y con las implicaciones de ese significado, por ello es necesario hacer referencia a sus partes y correspondientes propiedades* (ibidem)

Considerando lo planteado por Zamora Monge y Méndez Méndez (2014) y la decisión de trabajar con la ecuación del Algoritmo de la División fue que decidimos plantear varias definiciones en función de dicha ecuación. A continuación, en el Cuadro 4, presentamos el contraste entre una de las definiciones planteadas por nosotros con una formulación más tradicional.

Definición encontrada	Definición elaborada
Sacar el factor común es añadir el término común de un polinomio, binomio o trinomio, con el menor exponente y el divisor común de sus coeficientes. También se puede describir como buscar el factor común entre los factores. $a^2+ab=a(a+b)$ [7]	Cuando $P(x)=Q(x).C(x)+R(x)$ cumple que a. $R(x)=0$ b. $C(x)$ es un monomio se dice que $C(x)$ es un **factor común** del polinomio $P(x)$. Por lo tanto, extraer factor común a un polinomio, es escribirlo como producto entre un monomio y un polinomio.

Cuadro 4: Comparación de definiciones

Esperábamos desde estas definiciones poder ayudar al alumno a vincularlas con la factorización de polinomios a la que se quería arribar manteniendo un nivel de formalidad que el escenario creado precisaba ya que estamos de acuerdo con que *El lenguaje matemático tiene el propósito de caracterizar los hechos y las reglas de razonamiento con precisión alejando así las ambivalencias propias del lenguaje natural* (Radillo, 2012, p.3).

La estructura de las definiciones estuvo fuertemente mediada por nuestro deseo de reflejar su utilidad y de vincular todo el trabajo que se realizaría previamente y después. Queríamos que sea notoria la utilidad pero manteniendo el trabajo teórico.

> *La teoría matemática es hermosamente útil como herramienta para la resolución de problemas y más aún, a la hora de modelar y describir situaciones innumerables de la realidad* (Zamora Monge y Méndez Méndez, 2014, p.2).

> *Aprender a resolver problemas implica adquirir el dominio de los códigos lingüísticos que rigen las diversas formas de representación los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos* (Radillo, 2012, p.1)

Durante la planificación, esperábamos estar atendiendo a estas consideraciones que plantean Radillo (2012) y Zamora Monge y Méndez Méndez (2014). Cuando tratamos las definiciones para Factor Común, Factor Común por Grupos, Diferencia de Cuadrados y Trinomio Cuadrado Perfecto, intentamos hacer evidente la diferencia entre la definición que tienen estos nombres y la forma de factorizar utilizándola. Todo este trabajo con las definiciones se encuentra presente en la sección 2.2.2.1 en cada Guión Conjetural.

2.2.2 Planificación previa

2.2.2.1 Guiones conjeturales

> *"En resumen, el guión conjetural se presenta como un género que reemplaza a la planificación, no en lo burocrático, sino en la manera de pensar la práctica de enseñanza y la relación con el conocimiento. Es un instrumento que le sirve al*

7https://es.wikiversity.org/wiki/Factorizaci%C3%B3n página consultada el 26/10/2017 *alumno para organizar su propia práctica y, a la vez, reflexionar sobre ella. Es, fundamentalmente, un espacio para pensar acerca de la práctica y pensarse dentro de la práctica." (Bombini, 2002, p.9)*

La planificación de las diez clases que llevaríamos a cabo durante nuestras prácticas se basaron en la construcción de guiones conjeturales para cada una de ellas. Cada guión conjetural se divide en momentos en que se llevaría a cabo la clase y estos momentos se diferencian en el tipo de actividad propuesta (explicación teórica, resolución de actividades, etc). Dentro de cada uno, se encuentran detalladamente las actividades a tratar, las conjeturas y las posibles respuestas que se consideraron principales para cada momento, sabiendo que si se quisieran explicitar todas ellas, sería un trabajo muy tedioso y entorpecería el proceso de lectura.

A continuación, en el Cuadro 5, presentamos la primera planificación de cada día de clases incluyendo la fecha en la que se llevaría a cabo en cada curso (2ª y 3ª columna), con el tema que iba a dictarse y junto con un pequeño desarrollo que esclarece cómo se iba a llevar adelante cada concepto a desarrollar.

Nº de clase	*4º A*	*4º B*	*Tema y/o actividades*	*Desarrollo*
1	31/7	3/8	Raíces de un Polinomio. Teorema del Factor[8].	Resolución de problemas y debate con toda la clase donde se distinga un valor funcional particular. **Definir raíz de un polinomio** y formas de escribir el polinomio en función de sus raíces.
2	2/8	8/8	Algoritmo de división. Teorema del Resto. Ruffini.	Trabajar con el Algoritmo de la División de polinomios basándonos en aquellos que poseen resto distinto del polinomio nulo. Introducir la relación entre el valor del resto y el valor del polinomio con el **Teorema del Resto** y presentar la **Regla de Ruffini** como un método para poder aplicar dicho teorema.
3	7/8	10/8	Factor Común. Factor Común por Grupos.	Algoritmo de división cuando el resto es el polinomio nulo y distinguir si en los productos hay algún monomio (**factor común**) o polinomios (**factor común por grupos**) para plantear los primeros casos de factoreo. **Polinomio primo. Polinomio Mónico. Polinomio factorizado.**
4	9/8	17/8	Ejercitación	Trabajo con ejercitación en la guía y situaciones problemáticas.
5	14/8	22/8	Diferencia de Cuadrados. Trinomio Cuadrado Perfecto.	Utilizar el Algoritmo de División para explicar dos casos de factoreo: **Diferencia de Cuadrados** y **Trinomio Cuadrado Perfecto**.

8Este teorema se presentó como una observación luego de dar la definición de Raíz de un polinomio.

				Luego, notar que es un caso particular de factor común por grupos.
6	16/8	24/8	Ejercitación	Ejercitación y situaciones problemáticas
7	23/8	29/8	Teorema de Gauss	Trabajar con los polinomios que no pueda factorizar con los métodos ya trabajados y plantear el enunciado del **Teorema de Gauss** y corroboración de las raíces.
8	28/8	31/8	Algoritmo de Factorización de Polinomios	Trabajo con **Algoritmo** para factorizar un polinomio que incorpora todas las herramientas ya aprendidas.
9	30/8	5/9	Ejercitación	Espacio para resolver ejercitación y realizar correcciones en el pizarrón.
10	4/9	7/9	Evaluación	
11	6/9	12/9	Devolución	Hacer devolución y esperar consultas particulares.

Cuadro 5: Planificación del período de prácticas

A continuación presentamos los guiones conjeturales de cada clase de nuestras prácticas que se armaron en consonancia con la primera planificación previamente presentada.

Primera Clase (31/7 - 3/8)

En esta clase se trabajará con el concepto de raíz de un polinomio y se lo relacionará con el algoritmo de la división. Se trabajará de manera individual y grupal con los alumnos de forma alternada y se plantearán actividades que problematicen los conceptos que se quieren definir para arribar a estas definiciones con los alumnos.

El objetivo de esta clase es trabajar con la definición de raíz de un polinomio, cómo se traduce esto en el algoritmo de la división de polinomios y empezar a trabajar en la factorización de polinomios a partir de raíces.

En esta clase se trabajará con las primeras partes de dos Guías de actividades. Una está orientada a la práctica y problematización de los conceptos ya construídos para afianzarlos, mientras que la otra está orientada a plantear problemáticas que causen perplejidad en los alumnos y que sirvan para el debate y construcción de los conceptos a trabajar en la clase.

Los recursos que tendrán los alumnos serán las guías, sus carpetas y las definiciones construidas en las clases anteriores (por la profesora) y actuales. Mientras que los recursos que poseeremos nosotras serán las guías, las resoluciones previas que realizamos, este guión conjetural y el libro Matemática I Kaczor et. al.

<u>Primer Momento: Presentación y comienzo de las actividades.</u> (10 minutos)

Al entrar al aula destinaremos 5 minutos para saludar a los alumnos, llenar el libro de temas y presentarnos diciendo que comenzaremos nuestras prácticas. Los alumnos ya están muy informados acerca del trabajo que vamos a realizar como practicantes, por lo que no será necesario destinarle mucho tiempo a esa explicación.

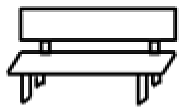
Comenzaremos la clase aclarando que consideraremos de ahora en más a los polinomios como expresiones algebraicas donde el exponente de la variable es un entero no negativo y recordando valor numérico de un polinomio, concepto que previamente han trabajado con la profesora del curso. Para eso, preguntaremos a todo el grupo de alumnos qué recuerdan acerca de ese concepto y lo iremos construyendo con la participación de los estudiantes. Depende qué tan familiarizados están con el concepto, incluiremos un ejemplo (o la cantidad que sea necesaria) en el pizarrón para hacerles preguntas y finalizar con la conclusión de qué es el valor numérico de un polinomio. Destinaremos a este trabajo 5 minutos.

<u>Segundo momento: Realización de una actividad.</u> (15 minutos)

A continuación, les pediremos que realicen la Actividad 1 de la Guía Nº2 que previamente subiremos al aula virtual. Les diremos que trabajen de forma individual y si desean, pueden debatir con sus compañeros cercanos. Nuestra tarea en este momento será caminar por toda el aula para poder guiar a los alumnos cuando nos hagan consultas. En caso de haber una o más dudas comunes entre ellos, se retomarán al momento de realizar el debate.
la siguiente:

Mueble Nº1: Un banco de plaza. Para armar el asiento y el respaldo se necesitan cortar dos placas de madera (cuadrados y/o rectángulos) que cumplan las siguientes condiciones:

-El asiento tiene que tener de alto la mitad que el ancho.
-El respaldo debe tener de alto la misma medida que el asiento y de ancho 12 cm menos que el ancho del asiento.
-Ambas piezas tienen que tener la misma superficie.



<u>Actividad 1:</u> Considerando el formato y las condiciones que tiene el Mueble Nº1 que quiere armar Marcos, realizar las siguientes actividades.

a) Con la información dada del Mueble Nº1, completen la siguiente tabla:

	Ancho	**Alto**	**Área**
Asiento			

Respaldo			

b) ¿Podrán construir este banco? ¿Qué ecuaciones deberían plantearse para encontrar las medidas del asiento y el respaldo? Justifiquen su respuesta.

Consideramos que los estudiantes al momento de realizar la actividad pueden tener dudas sobre:

- cómo completar la tabla.
- qué tipo de registro deben hacer.
- qué se considera como justificación.

En el caso de consultas sobre las consignas, se dejará que los alumnos elijan la forma de llenado de la tabla (ya sea con valores numéricos o con expresiones algebraicas) y esto se retomará en el momento de debatir la actividad, para impulsarlos a avanzar en profundidad y análisis de lo que realizan. Si se presentan consultas sobre el registro y la justificación, se hará hincapié en que deben tener todas las cuentas que ellos utilicen escritas y que todas las cosas que les generaron dudas deberían dejarlas asentadas para evitar confusiones futuras.

En general, consideramos que los alumnos pueden presentar dudas para:

- hacer la traducción del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico de las condiciones del banco, en particular la condición que representa la igualdad de áreas.
- concluir que deben buscar el cero de la expresión algebraica planteada por la tercer condición.
- analizar si las soluciones tienen sentido en el contexto del problema.
- el trabajo con unidades.

Para estas dudas consideramos plantearles las preguntas que enlistamos a continuación:

- ¿Cómo dirían eso en lenguaje matemático?
- ¿Cómo se escribiría eso como un monomio?
- ¿Hay algún dato que si supieran su valor podrían calcular todos los demás? ¿Cómo se llamaría? ¿Podrían escribir todas las demás medidas en función de una?
- ¿Cómo pueden completar la tabla sin poner valores específicos?
- Si los alumnos intentaron con algunos valores específicos se puede preguntar: ¿cuál es el patrón que hay en los números de cada columna?, ¿podrían escribir una expresión algebraica para cada medida que quieren calcular?
- ¿Están usando todos los items que dan condiciones?
- ¿Cómo se traduce esta información?
- En la tabla, ¿están presentes todas las expresiones que se mencionan en el enunciado?
- ¿Cómo pueden asegurar que valen lo mismo dos áreas?
- ¿Hay alguna ecuación más que puedan plantear que los ayude?
- ¿Cómo hago para encontrar un valor que cumpla la igualdad?

- ¿Qué tipo de cuenta debería hacer ahora?
- ¿Cómo pueden seguir para encontrar un valor específico?
- Esos valores que encontraron, ¿tienen sentido? ¿y las unidades?
- ¿Podrías armar esta pieza en la fábrica? Y esto, ¿en qué unidades está?
- ¿Podrías marcar la madera para hacer estas piezas con esas medidas?
- ¿No faltaría algo para que esto sea un respuesta/solución a la pregunta? Haciendo referencia a que es una medida lo que se le debe decir al carpintero.
- En caso que haya dudas sobre el trabajo con unidades se dejará a elección de los alumnos si se lo incluirá en las fórmulas o no, pero se los instará a que lo contemplen siempre a la hora de dar una respuesta.

También consideramos un error muy particular que podrían llegar a tener los alumnos. Este sería que reduzcan la tarea de igualar las áreas a igualar el ancho del asiento con el ancho del respaldo, y el alto del asiento con el alto del respaldo. Así, lograrían establecer un sistema de ecuaciones que estaría lejos de la solución correcta. En caso de que esto ocurra se guiará a los alumnos a la comprensión de que lo hecho no es correcto ya que también se podría pensar la situación contraria: igualar la base del asiento con el alto del respaldo y la base del respaldo con el alto del asiento. La forma de mostrarle a los alumnos que deberían realizar otro planteo sería presentarles una situación donde ocurra que no se cumplen las condiciones que ellos están pidiéndole a la solución, pero sí cumplan una igualdad de áreas. Luego, preguntarles qué planteo consideran que es más cercano a la igualdad de superficies que pide el carpintero.

Tercer momento: Debate grupal. (15 minutos)

Una vez que los alumnos hayan terminado (cabe la posibilidad de que algunos no puedan llegar a un resultado en concreto) daremos lugar a un debate grupal sobre la resolución de la actividad. Consideraremos los procedimientos de los alumnos como también la respuesta a la pregunta b. Las conjeturas que creemos pueden surgir son las mismas planteadas en el segundo momento.

Para llevar a cabo este momento nos basaremos en la observación realizada acerca de cómo han trabajado los alumnos y el método que utilizaron para la resolución. Si encontramos que en todo el grupo se han desarrollado distintos métodos de resolución o distintas justificaciones sobre lo realizado, haremos pasar a esos alumnos. Nuestra intención es darle lugar a los alumnos para que participen haciendo tanto consultas, como dando su propia conclusión de la actividad. En el caso de que el método de resolución haya sido común entre los alumnos, elegiremos uno al azar para que resuelva la actividad en el pizarrón y justifique su trabajo. Después de planteados los métodos que se usaron para las resoluciones, se retomarán los puntos comunes, las disidencias y las ecuaciones planteadas. Se revisará que plantean una ecuación en común y que el valor que se encuentra cumple una propiedad muy particular: Ese valor cumple que verifica la ecuación anteriormente planteada y remarcada.

Una vez resuelta la actividad, hacerles notar a los alumnos que estuvieron haciendo el caso contrario a "hallar el valor numérico de un polinomio": antes tenían el valor de x y hallaban el valor del polinomio en ese x, ahora quieren que el valor del polinomio sea un cierto número y tienen que encontrar el valor de x para lograr el valor deseado. En particular, ese valor deseado es cero y tiene mucha importancia saber cuándo una ecuación sea cero y por lo tanto recibe un nombre específico.

Aquí procedemos a dar la definición de Raíz de un Polinomio. Nuestra intención es construirla con los alumnos, por lo tanto, les daremos el nombre (raíz) de $P(x)$ y comenzaremos a construirla. Para poder llegar a la formulación de la definición se les hará preguntas como:

- Ya sabemos bajo qué condiciones un número real es raíz. Para generalizar, a ese número lo podemos llamar a.
- ¿Qué ecuación es la que dijimos que se cumple cuando un número real a es una raíz?
- Si trabajamos con un polinomio general y lo llamamos $P(x)$, ¿qué relación va a tener con la raíz a?
- ¿Cómo podemos escribir esto de manera que diga todo esto que dijimos nosotros recién?

Un número real a es *raíz* de un polinomio $P(x)$ si $P(a)=0$.

Si un polinomio $P(x)$ tiene una raíz en $x=a$ entonces $P(x)$ se puede escribir de la forma $P(x)=(x-a).Q(x)$ donde $Q(x)$ es un polinomio de un grado menor que $P(x)$.
Esto representa un caso particular del algoritmo de división ya que sería $C(x)=x-a$ y $R(x)=0$.

Esta aclaración será dada a los alumnos por nosotras y no se construirá. Se presentará a partir del algoritmo de la división de polinomios como un caso particular y se comprobará para algunos polinomios sencillos, pero se dejará para el futuro la verificación de dicha igualdad.

Para salvar todas las dudas que puedan tener los alumnos daremos como ejemplo el siguiente polinomio: $P(x)=2x^2-8$. En este polinomio se ve fácilmente que una raíz del polinomio es $a=2$. En caso de que los alumnos no puedan encontrarla de manera rápida, se los guiará haciéndoles notar que se debe cumplir $2x^2=8$ ya que se debe cumplir que $P(x)=0$. Pretendemos que a partir de eso, sí puedan considerar a $a=2$ como una raíz. Si consideramos ahora la división de $P(x)$ por $x-2$ encontraremos que $Q(x)=2x+4$ y se cumple que $2x^2-8=(x-2).(2x+4)$ donde $Q(x)$ es de grado menor a $P(x)$ y por lo tanto se verifica este caso particular del algoritmo de la división.

<u>Cuarto momento: Resolución de dos actividades.</u> (15 minutos)

A continuación, les daremos tiempo para realizar las Actividades 1 y 2 de la Guía Nº1. Mientras tanto, seguiremos con la modalidad de recorrer los bancos para salvar dudas de los alumnos.

Actividad 1:

1) Construya un polinomio que...

a) … tenga como raíz a $x=1$
b) … tenga como raíces a $x=1$, $x=8$ y $x=-9$.
c) … tenga las mismas raíces que el inciso anterior pero también sea un polinomio de grado 4.
d) … sea de grado 2 y tenga una sola raíz.

Actividad 2:

2) ¿Cuáles de los siguientes polinomios tienen una raíz en $x=0$, $x=2$ y/o $x=4$?

a) $P(x)=(x+27).(x-8).(x-2)$
b) $P(x)=(x^2-4).(x^2-8x+16)$
c) $P(x)=x^2-8x+16$
d) $P(x)=x^2-27x$

Para la Actividad 1, consideramos que aplicarán la definición de raíz, particularmente la forma de escribir un polinomio como producto de otros dos, donde en uno de ellos entra en juego una raíz del polinomio. En caso de que los alumnos no sepan cómo encarar el ejercicio, los guiaremos para que siempre consideren la definición que ya se les ha dado.

Les podrían surgir dudas el inciso b), ya que no es tan fácil notar que ahora teniendo tres raíces del polinomio, lo puedan también escribir como se planteó en la definición. Para eso, los guiaremos teniendo en cuenta los siguientes comentarios:

- sabemos que un polinomio se puede escribir como producto entre $.x-a$ donde a es una raíz y $Q(x)$. Ahora, si a es una raíz entonces podemos reemplazarla por alguno de los valores que tenemos como condición de la actividad.
- un polinomio podía ser suma, resta y producto de polinomios, ¿qué podríamos pedirle nosotros al polinomio $Q(x)$?
- ¿Qué pasa con $Q(x)$? ¿Qué condiciones remarca la definición que vimos? ¿Será que a $Q(x)$ también lo podemos escribir como producto de dos polinomios? O quizás más de dos. ¿Y si esos dos polinomios son precisamente de la forma $.x-a$ donde sabemos que a es una raíz?

Otra duda que les podría surgir es al momento de trabajar con grado del polinomio en los incisos c) y d). Los alumnos ya están familiarizados con el concepto pero no es fácil notar cómo pueden construir el polinomio pedido. Para eso se los guiará teniendo en cuenta los siguientes comentarios:

- ¿Ya construyeron el polinomio del inciso b)? ¿De qué grado es ese polinomio? ¿Tendrá alguna relación el grado del polinomio con las raíces? ¿Podría haber armado otro?

- Si tomara la multiplicación de dos polinomios, ¿qué relación hay entre las raíces de esos dos polinomios con las raíces del nuevo polinomio?
- ¿Qué se le puede agregar al polinomio del inciso anterior para que ahora sea de grado 4 y siga cumpliendo la condición de tener esas raíces?
- Si seguimos pensando al polinomio que queremos construir en función de la construcción de $Q(x)$, ¿Qué podemos pedirle ahora de parecido/diferente con respecto del inciso anterior?
- ¿Podría pedirle otra condición? ¿Aclara cuál tiene que ser esa raíz que se agrega ahora?
- Si podemos construir nuevos polinomios multiplicando los que ya tenemos por otros, ¿cuáles son las raíces de este nuevo polinomio? ¿Qué polinomios se les ocurren?

Para la Actividad 2 creemos que pueden tener dudas acerca de qué método usar, ya que en todos pueden evaluar el polinomio en cada valor y verificar si ese valor es cero. Pero también algunos están factorizados, por lo que el trabajo se reduciría a ver si reemplazando los valores de x en algún factor este se hace cero y por lo tanto, el polinomio valdrá cero. Ambas aproximaciones serán consideradas correctas y para responder dudas y consultas, retomaremos siempre la definición de raíz que ya se les ha dado en conjunto con la aclaración $P(x)=(x-a).Q(x)$ y las analizaremos a partir de la misma.

Cuando notemos que van concluyendo esas actividades (entre 5 y 10 minutos aproximadamente) comenzaremos con la corrección. Elegiremos alumnos al azar, teniendo en cuenta las resoluciones que ya han hecho, para que pasen al pizarrón y resuelvan las actividades, y se quitarán las dudas que aún persistan.

Quinto momento: Repaso y actividades de Algoritmo de División. (15 minutos)

Destinaremos unos minutos para retomar el Algoritmo de División que ya han trabajado con su profesora. Se volverá a la expresión $P(x)=(x-a).Q(x)$ y se hará ver que si $x-a=C(x)$ entonces $R(x)=0$ y por lo tanto las raíces de un polinomio verifican otra propiedad más (es importante a lo largo de todas las clases remarcar las peculiaridades que poseen las raíces para ir marcando la motivación que llevó al desarrollo original en el entorno científico). A partir de esta propiedad, analizaremos la actividad que se desarrolló durante el segundo momento, nombrando los polinomios que menciona el Algoritmo y viendo qué caso particular reconocen los alumnos. Luego, les daremos 5 minutos para que comiencen a realizar la Actividad 3 de la Guía Nº1.

Actividad 3:

3) ¿Cuáles de estas expresiones podrían corresponderse con el algoritmo de división? Identifiquen los polinomios cociente, divisor y resto.

a) $P(x)=(x^3+9x-7).(x^5+3)+x^4-6$
b) $P(x)=(x^3+9x-7).(x^5+3)+x-6$
c) $P(x)=(x^3+9x-7).(x^8-45)+x^4+x^3-x-6$
d) $(x^3+9x-7).(x^5+3).(x^4-6)$
e) $P(x)=(x^5+9x-7)+(x^5+3).(x^4-6)$
f) $P(x)=x^3+(9x-7).(x^5+3).x^4-6$

La modalidad de trabajo será individual. Recorreremos el aula para salvar dudas y consultas que nos hagan los alumnos. Estas pueden deberse a cómo identificar criterios para llegar a una conclusión sobre si las expresiones se corresponden o no con el algoritmo de división. Para guiarlos se les pedirá que siempre retomen lo que ya saben acerca del algoritmo y si hay alguna condición particular que puedan utilizar:

- ¿Qué fórmula nos propone el algoritmo de división? ¿Qué particularidad tiene cada polinomio que lo compone?
- ¿Podrían identificar alguno de los polinomios del algoritmo con los que están en el ejercicio? ¿Hay uno de ellos que tenga una condición especial? ¿Se cumple?
- ¿Qué significa un triple producto de polinomios? ¿Los podría agrupar de alguna forma para que quede planteado como el algoritmo? Si lo modifico, ¿se siguen cumpliendo las condiciones?
- ¿Un polinomio es siempre sumas de monomios o puede ser producto también?

El objetivo de trabajar con esta actividad es que a partir de la definición de raíz, vayan problematizando el polinomio resto ya que en las clases siguientes se analizarán los casos en los que el polinomio no es nulo y por lo tanto no tiene raíz en ese valor, y también los casos en los que el polinomio resto es nulo.

<u>Sexto momento: Cierre de actividades.</u> (5 minutos)

Una vez finalizadas las propuestas para esta clase, les pediremos a los alumnos que si no terminaron de resolver alguna de las actividades lo hagan, ya que las retomaremos luego en las clases que dedicaremos puramente a ejercitación. Les comentaremos que vamos a continuar trabajando con el Algoritmo de División y por eso es importante que finalicen lo que les quedó pendiente.

Segunda clase (2/8 - 8/8)

En esta clase se trabajará con el Teorema del Resto y la Regla de Ruffini. Se introducirá el teorema como un análisis del algoritmo de la división para un caso particular $(C(x)=x-b)$ y se presentará la regla como un método para realizar la división de polinomios de una manera más sencilla para ese caso en particular. Dentro de este trabajo se distinguirá cuando el polinomio resto es o no es polinomio nulo y la relación que existe con las raíces del polinomio original.

El objetivo de esta clase es presentar dos herramientas muy útiles a la hora de encontrar raíces y factorizar polinomios. Luego de esta clase se comenzarán con diferentes estrategias para factorizar polinomios y estas herramientas serán útiles a la hora de la validación y construcción de estas estrategias.

En esta clase se utilizará la pantalla digital del aula como un recurso muy valioso, ya que la presentación de la Regla de Ruffini se hará a través de un PowerPoint, se utilizarán la Guía de Actividades N°1 y los apuntes personales creados para llevar a cabo el desarrollo del Teorema del Resto. Estos recursos son para los alumnos como para nosotras, con la diferencia que los alumnos también contarán con sus carpetas.

Primer Momento: Presentación y comienzo de las actividades. (5 minutos)

Luego de ingresar al aula y saludar a los alumnos, les pediremos que recordemos entre todos cuáles fueron los conceptos que trabajamos la clase anterior: Raíz de un Polinomio y Algoritmo de División. Si no hay respuesta de los alumnos, los guiaremos para que comiencen a recordarlos ya que los utilizaremos para llevar a cabo esta clase. Dedicaremos a este momento 5 minutos.

Segundo Momento: Explicación del Teorema del Resto (30 minutos)

En este momento de la clase, llevaremos a cabo la explicación del Teorema del Resto. Como anticipo, les diremos que aplicarlo nos permite encontrar el resto de la división de un polinomio $P(x)$ por un polinomio $C(x)$ de la forma $x-b$. Para comenzar, partiremos del Algoritmo de División para el caso particular que mencionamos. Entonces escribiremos en el pizarrón la ecuación $P(x)=C(x).(x-b)+R(x)$. Ahora comenzaremos a hacerles preguntas que vayan guiándolos para arribar a la estructura del teorema:

- ¿Podemos evaluar el polinomio en algún número?
- ¿Qué condición tiene que cumplir el polinomio resto?
- Recuerden que estamos tratando de encontrar una caracterización acerca del resto de la división. ¿Hay alguna forma de que en la expresión se simplifique alguno de los términos?

- ¿Qué pasa si evaluamos el polinomio en el valor b ? ¿Por qué? Evaluemos al polinomio en $x=b$
- Una vez que los alumnos hayan obtenido la expresión $P(b)=R(b)$, entonces el valor numérico del polinomio $P(x)$ en $x=b$ es igual al valor numérico del polinomio $R(x)$ en $x=b$ ¿Qué podemos decir a partir de esto? ¿Qué podemos decir de b ? ¿Qué rol cumple en la expresión del algoritmo de división?

Finalmente, enunciaremos el teorema en el pizarrón y les pediremos que lo copien en sus carpetas.

Al dividir un polinomio $P(x)$ por un polinomio de la forma $x-b$ se obtiene como resto un número que es igual a $P(b)$.

Es clave hacerles notar la importancia de la forma que tiene la expresión del polinomio divisor. Para eso, haremos las siguientes aclaraciones:

- Podemos analizar el caso para a negativo. Si $C(x)=x-b$ y $b=-5$tenemos que $C(x)=x-(-5)=x+5$ y entonces podemos ver que no es necesario que el término independiente sea negativo.
- Si volvemos al algoritmo de división tenemos$P(x)=Q(x).(x-b)+R(x)$ pero ahora también se puede considerar este caso del algoritmo de división $P(x)=Q(x).(x+b)+R(x)=Q(x).(x-(-b))+R(x)$ donde el valor destacado es $x=-b$.
- ¿Qué pasa si procedemos de la misma manera que antes? ¿Si volvemos a evaluar el Polinomio en el valor b? ¿Qué obtendríamos? ¿Nos sirve?
- Entonces para este caso, ¿qué se les ocurre? ¿En qué valor podemos evaluar ahora para que suceda lo mismo que en el caso anterior?

Una vez que los alumnos noten la importancia del signo que acompaña al valor b, podemos escribir la siguiente conclusión:

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por otro $C(x)=x-b$ se determina evaluando al polinomio $P(x)$ en el valor opuesto del término independiente del polinomio divisor $C(x)$.

Es importante hacerles notar a los alumnos que el polinomio resto en este caso es constante y que en caso que sea constante igual a cero, entonces b es una raíz del polinomio pues se cumple $P(b)=R(b)=0$, que es la definición de raíz.

<u>Tercer Momento: Resolución de una actividad</u> (10 minutos)

Les daremos 5 minutos para que realicen los incisos a, b y c de la Actividad 4 y la Actividad 5 de la Guía Nº1 y dedicaremos otros 5 minutos para llevar a cabo una corrección grupal de la misma. La actividad es la siguiente:

4) Calcular el resto de la división de $P(x)$ por $C(x)=x-a$ en los siguientes casos:

- $P(x)=2x+5$ con $a=2$
- $P(x)=2x+5$ con $a=-2$
- $P(x)=-2x+5$ con $a=2$

5) ¿Cuáles de los valores de a de la actividad anterior son raíces?¿Por qué?

En cuanto a la Actividad 4, pretendemos que los alumnos apliquen lo que acaban de aprender acerca del Teorema del Resto. Mientras recorremos los bancos, si notamos que alguno/os no lo utilizan y están resolviendo la división para hallar el resto, les diremos que una forma de comprobar que el resto hallado es correcto es utilizando el Teorema del Resto. Por lo tanto, se considerarán correctos los métodos que utilicen, siempre y cuando, en algún momento, apliquen el teorema aprendido.

Debido a la cantidad de especificaciones que realizamos en el momento anterior para construir el enunciado del teorema y las conclusiones obtenidas, creemos que los alumnos no van a tener mayores problemas en realizar esta actividad. Puede que los alumnos tengan dificultad en evaluar el polinomio y quizás quieran corroborar que los datos obtenidos sean ciertos y para ello se retomarán las construcciones realizadas en el momento anterior como herramienta para ayudarlos.

En lo que refiere a la actividad 5, luego de haber realizado la actividad 4, solamente deben analizar si el polinomio resto es nulo o no para decidir si es raíz y la forma de justificar es a través del algoritmo de división usando el Teorema del Resto. Los alumnos no deberían presentar mayor dificultad a la hora de resolver esta actividad, pero en caso que se genere confusión se apelará a la definición de raíz construida la clase anterior y se aprovechará la estructura del algoritmo de división en el caso del Teorema del Resto recién trabajado para que el alumno construya una justificación con las herramientas que posee.

Tercer Momento: Resolución de una actividad (10 minutos)

Les daremos 5 minutos para que realicen los incisos a, b y c de la Actividad 4 y la Actividad 5 de la Guía Nº1 y dedicaremos otros 5 minutos para llevar a cabo una corrección grupal de la misma. La actividad es la siguiente:

4) Calcular el resto de la división de $P(x)$ por $C(x)=x-a$ en los siguientes casos:

a) $P(x)=2x+5$ con $a=2$
b) $P(x)=2x+5$ con $a=-2$
c) $P(x)=-2x+5$ con $a=2$

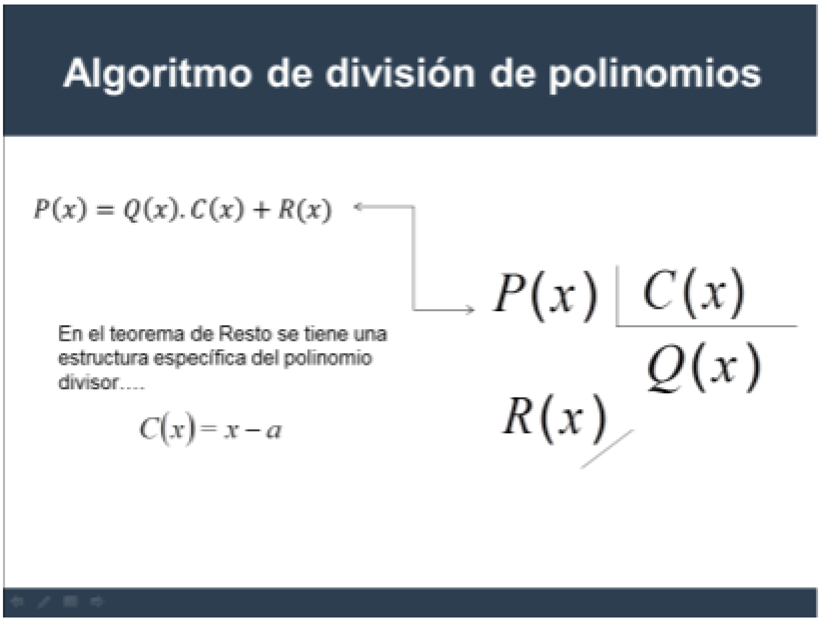
5) ¿Cuáles de los valores de a de la actividad anterior son raíces?¿Por qué?

<u>Cuarto Momento: Explicación de la Regla de Ruffini</u> (30 minutos)

En este momento se trabajará con el PowerPoint que desarrolla la Regla de Ruffini, se irá trabajando con los alumnos poco a poco e inscribiendo los pasos necesarios. El PowerPoint consta de 7 diapositivas, donde la última contiene toda la información condensada del método. Este PowerPoint estará disponible en el aula virtual de los alumnos con antelación y se proyectará en la pantalla digital que hay en el aula.

A continuación presentamos las diapositivas[9] que se utilizarán en la clase con las aclaraciones y comentarios que se harán para completar la información.

<u>Diapositiva 1</u>



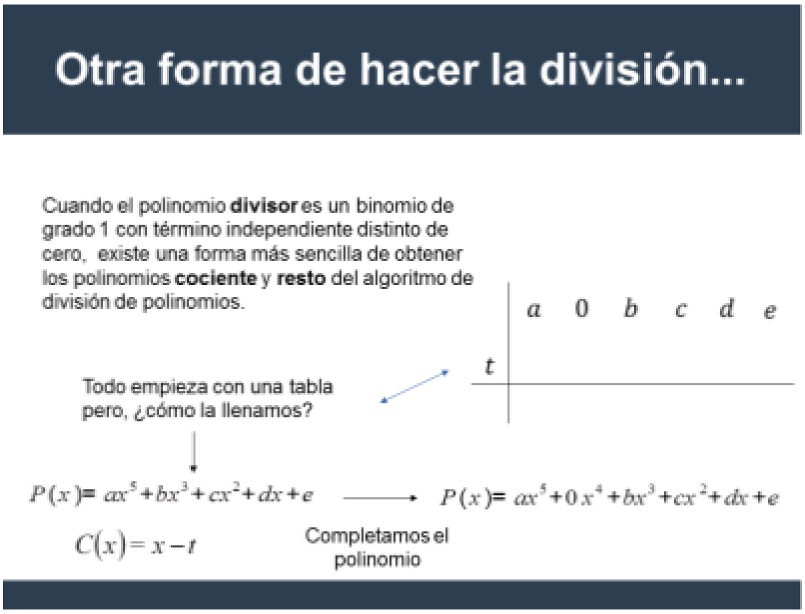
1. Se retomará con los alumnos el algoritmo de división de polinomios y la forma de L acostada que se suele utilizar para calcular la división haciendo la comparación con ambas formas de escribirlo.
2. Se tomará el polinomio divisor particular que se plantea en el Teorema del Resto y se conversará con los alumnos que estos polinomios son muy útiles y los usaremos mucho ya que hay una forma de resolver la división de una manera más simple que la L acostada habitual.

En este momento no debería generarse confusión ni dudas ya que se está

9Las diapositivas tenían un carácter dinámico poniendo en evidencia el aspecto constructivo de la Regla de Ruffini.

recordando conceptos que ya son familiares y conocidos para los alumnos. En caso que algún/os alumnos presenten dudas, se responderán grupalmente de acuerdo a la inquietud de cada uno.

Diapositiva 2



1. Se presentará la tabla en la que se realiza la división con Ruffini y se hablará sobre los dos polinomios involucrados:
    a. $P(x)$ debe estar completo y ordenado, por lo tanto se debe aclarar que si hay monomios con grado de la variable menor que el grado del polinomio que no aparecen, deben agregarse multiplicados por el coeficiente cero y luego se deben ordenar dichos monomios en orden decreciente.
    b. $C(x)=x-t$ debe tener coeficiente principal uno y se debe identificar t. Ejemplo: $C(x)=x+3$, entonces $t=-3$. Si $C(x)=x-7$, entonces $t=7$.
2. Se aclarará que en este método se trabaja con los coeficientes de los polinomios y no se hacen cuentas con la variable, lo que simplifica muchas cuentas y evita muchos errores.

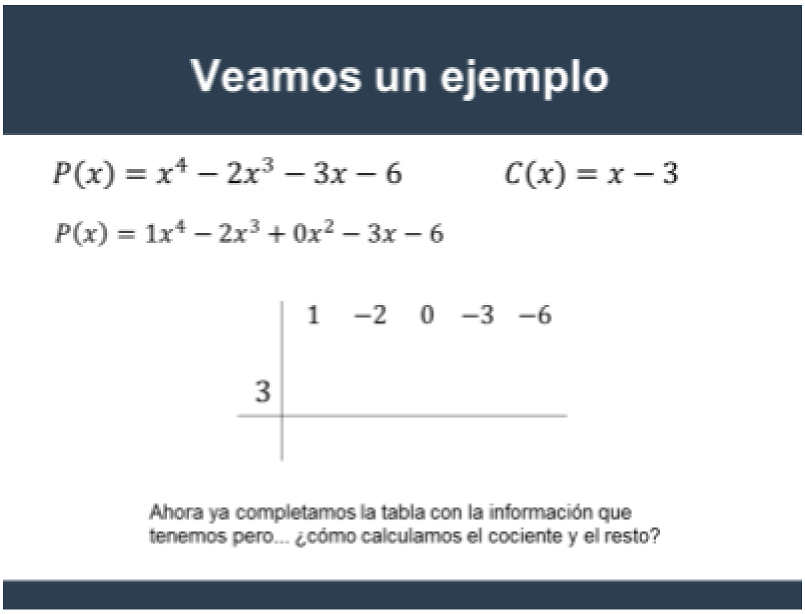
En este momento se puede presentar confusión en cuanto a la forma en la que se debe completar y ordenar el polinomio. Para esto se plantearán en el pizarrón la cantidad de ejemplos necesarios para salvar las dudas y para que quede claro que el polinomio es el mismo. Cabe destacar que estos conceptos (polinomio completo y ordenado) ya los han trabajado con la profesora, pero quizás no los recuerden. Otra confusión de los alumnos puede ser la diferencia entre el término independiente y el coeficiente que se debe ubicar luego en la tabla. Para esto se trabajará con la forma $C(x)=x-t$ y se harán ejemplos donde se explicite que $x-3=x-(3)$ y que $x+5=x-(-5)$. Una vez que hayan sido aclaradas las dudas, consideraremos uno de los polinomios que se ordenaron y completaron y uno de los polinomios donde se ubicó el coeficiente t para realizar la Regla de Ruffini de manera paralela al ejemplo planteado en el PowerPoint. De está manera, mientras explicamos los pasos que posee la Regla de Ruffini en el PowerPoint, podemos aplicar con la intervención de los alumnos el mismo método para otro par de polinomios.

Luego de haber completado y ordenado el polinomio, se procederá a explicar cómo debe llenarse la tabla con la información que tenemos.

a. Se ubica el opuesto del término independiente del polinomio divisor en la intersección de los ejes de la tabla. (Este es el valor que al que se hizo referencia en la diapositiva anterior).
b. Se ubican los coeficientes del polinomio dividendo en la parte superior de la tabla en el orden que se estableció en la diapositiva anterior.

Se tomará el tiempo necesario para salvar dudas sobre esta forma de anotar la información en la tabla y se aclarará que el coeficiente principal del polinomio divisor no aparece ya que este será un supuesto para poder aplicar el método. Gracias a las herramientas que posee este software, esperamos que no haya grandes confusiones.

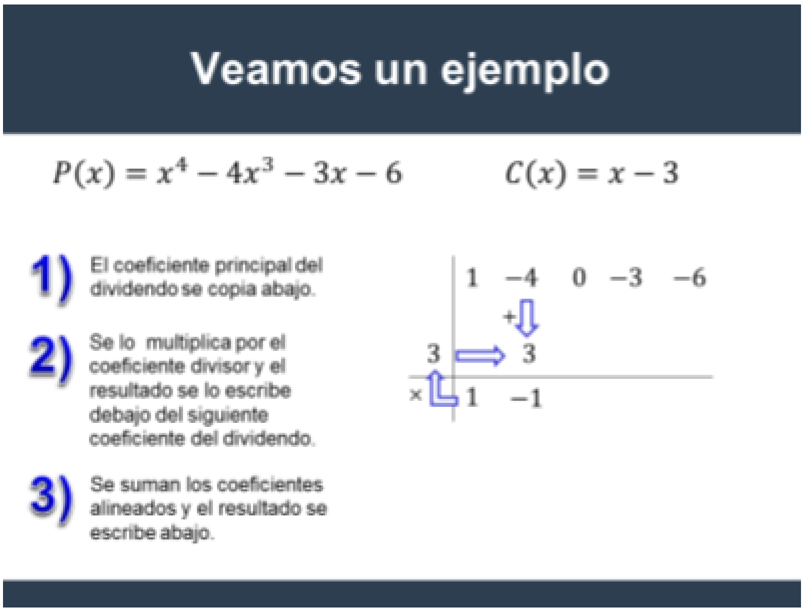
<u>Diapositiva 3</u>



Ahora que los alumnos ya saben completar la tabla, procederemos a dar un ejemplo con el fin de que los alumnos reconozcan y sepan ubicar la información que tienen.

En este momento los alumnos pueden tener dudas sobre la ubicación de la información y acerca de los polinomios que ya estén escritos en el pizarrón. Para aclarar las dudas sobre los pasos anteriores se llenará con los polinomios elegidos en la diapositiva anterior la tabla con ayuda de los alumnos para que ellos puedan vivenciar el proceso de llenado de la tabla e internalizar esta parte del proceso a partir de la práctica. Si no resultara suficiente realizarlo con un solo ejemplo, se retomarán algunos de los polinomios que se completaron y ordenaron como ejemplo en la diapositiva anterior y se los ubicará en distintas tablas para que a partir de la repetición del paso, los alumnos puedan identificar cuál es la ubicación de cada parte de la información que uno posee.

Diapositiva 4

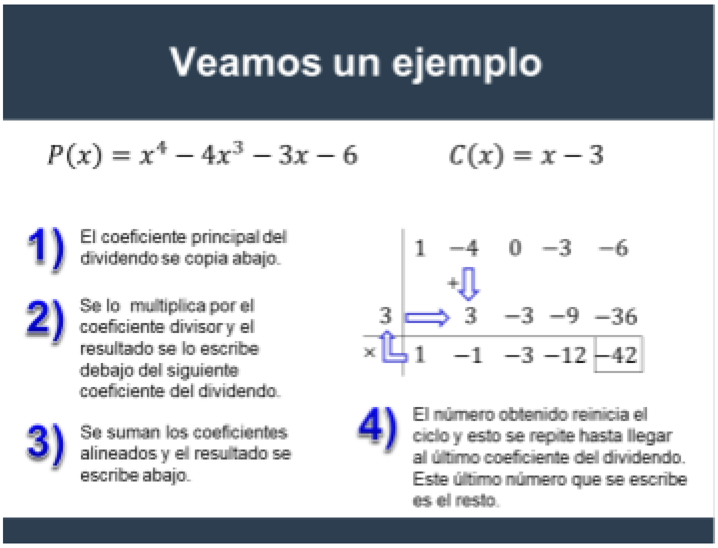


En esta diapositiva explicaremos cómo operar una vez que la tabla está llena con la información que ya sabemos ubicar. Para llevar a cabo la explicación debemos tener en cuenta lo siguiente:

1. Se debe explicar qué significa “copiar abajo” utilizando la flecha indicadora.
2. Se debe aclarar qué coeficientes son los que se deben multiplicar y tomarse el tiempo necesario para que sea claro dónde se debe ubicar en la tabla el resultado.
3. Debe quedar claro que el nuevo valor obtenido debe quedar alineado con el siguiente coeficiente del polinomio y que el resultado de la suma debe quedar alineado pero por debajo de la línea horizontal de la tabla.

Los alumnos en esta etapa pueden confundirse con el orden de los pasos, cómo ordenar los coeficientes de manera correcta y tener dudas sobre el método en general. Para aclarar las dudas que puedan tener sobre el orden de los pasos y el orden en la tabla, se tomará la tabla ya armada en el pizarrón y se procederá a llenar con ayuda de los alumnos. (En caso de haber más tablas con datos y los alumnos presentan dudas se puede hacer el proceso en las distintas tablas para que los alumnos puedan ver la invarianza del método y la independencia que tiene de los números particulares). Si los alumnos tienen dudas sobre el método y son desconfiados se les pedirá un poco de paciencia y confianza en nosotras ya que luego haremos una comprobación.

Por último, en la misma diapositiva presentaremos el cuarto y último paso, el cual explica que el ciclo debe reiniciarse.

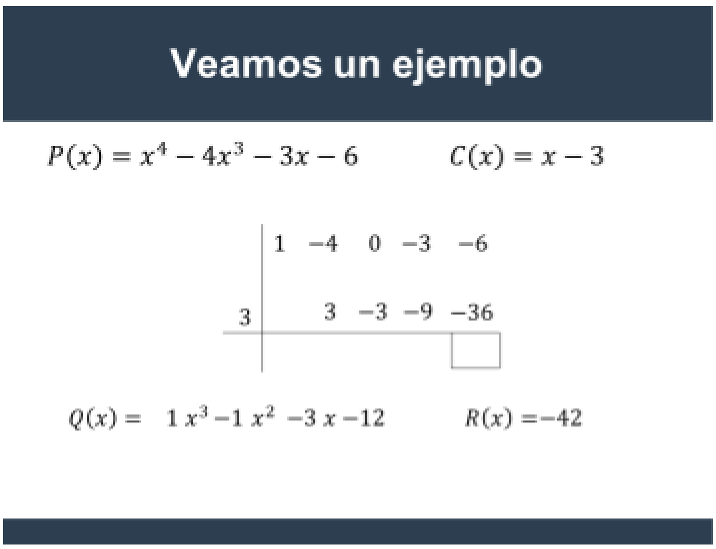


Para la explicación tendremos en cuenta lo siguiente:

1. Ahora se repite el proceso con una simple modificación por lo que se trabajará con las similitudes y diferencias recordando el orden de los pasos y la forma de escritura en la tabla.
2. Se hará énfasis en que esta parte se debe realizar hasta que llegue a la última columna de coeficientes del polinomio dividendo.

En este momento no deberían presentarse dudas ya se repite el proceso que ya se realizó en la diapositiva anterior. En caso de ser necesario, se repetirán los pasos en distintas tablas y se explicará cómo se va avanzando en el orden de la tabla para el llenado.

<u>Diapositiva 5</u>



Esta diapositiva es para explicitar el final de la resolución del método, aclarando que este el último coeficiente corresponde al polinomio resto (el mismo al cual hace referencia el Teorema del Resto).

Los alumnos pueden hacer preguntas como ¿por qué el resto es un número? ¿Puede pasar que nos de un número junto con la x? Les diremos que estas dudas se despejarán cuando pasemos a la siguiente diapositiva pero que recuerden qué condición tiene que cumplir el polinomio resto en función del polinomio divisor.

También se debe aclarar que para decodificar el polinomio cociente debe pensarse que el polinomio está completo y ordenado, que no se deben descartar coeficientes que sean nulos y que el mayor exponente en la variable tiene que ser exactamente un grado menor que el polinomio dividendo.

Los alumnos pueden presentar dificultades a la hora de decodificar los polinomios de manera correcta o pueden equivocarse en el orden del resto y el polinomio cociente, como también en el grado que debe tener el polinomio cociente y el trabajo con los coeficientes nulos.

Luego de este trabajo se hará la comprobación (que había quedado pendiente para los alumnos que presentaban desconfianza o dudas). Esta se hará de dos maneras:

A. Teorema del Resto: se evaluará el polinomio original en el coeficiente divisor (t) y se verificará que $P(t)=R(t)$
B. Algoritmo de división: se corroborará que $P(x)=(x-t).Q(x)+R(x)$ distribuyendo sin recurrir a la constatación empírica sino con la forma algebraica.

La comprobación se realizará en el ejemplo que se plantea en el PowerPoint como también en el ejemplo que se ha realizado en el pizarrón.

Luego de este momento se procederá a realizar actividades de ejercitación para afianzar el método.

<u>Sexto Momento: Resolución de una actividad</u> (10 minutos)

En este momento se les planteará una actividad a los alumnos para que de forma individual apliquen el método y se pueda evidenciar si quedaron dudas o si es necesario simplemente afianzar e internalizar el método. Se trabajará con la Actividad 6 de la Guía N°1.

6) Para los polinomios de los incisos b) y d) de la actividad 2 calcular el resto de la división por $C(x)=x+2$ y $S(x)=x-3$ utilizando la Regla de Ruffini.

Se aclarará a los alumnos que ahora solo deberán hacerlo para los incisos a, b y c de la actividad 2 y que luego retomaremos los demás incisos en otra clase.

En esta instancia, nosotras recorreremos el aula revisando los desarrollos de los alumnos y corrigiendo dudas. No se trabajará con una corrección en el pizarrón ya que durante el desarrollo del PowerPoint se hicieron ejemplos y lo que se quiere averiguar ahora es la comprensión individual de cada alumno.

En cuanto a la actividad, los alumnos pueden presentar las mismas dudas que se plantearon a lo largo de la explicación de las diapositivas y pueden tener errores de cuentas o de improlijidad a la hora de llenar la tabla. Es importante remarcar que se dejará la última diapositiva en la pantalla digital para que los alumnos la puedan consultar y que ellos tienen disponible el PowerPoint en el aula virtual, por lo cual se usarán estas herramientas para guiar y despejar cada duda que pueda surgir en el alumno.

Se continuará con esta actividad hasta que finalice la clase, ayudando a los alumnos con sus dudas y se reiterará las veces que sea necesario que en las clases siguientes estas dos herramientas serán muy útiles y que traten de tenerla en mente a la hora de la práctica. También se les mencionará que pueden completar los incisos que quedaron de la Actividad 4, porque se retomarán todas las actividades en una clase posterior.

Tercera Clase (7/8 - 10/8)

En esta clase nos centraremos en el Algoritmo de la División para plantear dos casos de factorización de polinomio: Factor común y Factor común por grupos. Esto se hará a partir de considerar el polinomio resto como el polinomio nulo y analizar si el polinomio divisor o el cociente son monomios o polinomios.

El objetivo de esta clase es que los alumnos aprendan estas dos formas de factorización para comenzar a trabajar con los polinomios escritos como producto de dos o más polinomios y estrategias para evitar la división de polinomios. Se trabajará de manera crítica y se construirán los conceptos a partir de un problema y posteriormente se trabajará con ejercitación para afianzar los conceptos.

Los recursos para esta clase serán ambas guías de actividades, las carpetas para los alumnos y para nosotras el guión conjetural de esta clase en conjunto con el guión de la primera clase.

Primer Momento: Comienzo de la clase (5 minutos)

Entraremos al aula y saludaremos a los alumnos. Llenaremos el libro de temas e iniciaremos la clase.

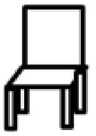
Comenzaremos recordando junto con los alumnos los conceptos que hemos visto las clases anteriores: por un lado, Raíz de un Polinomio, y por otro lado, dejaremos escrito en el pizarrón el Algoritmo de la División ya que es con lo que comenzaremos la clase.

Pediremos a los alumnos que recuerden que la clase anterior trabajamos con el caso particular del Algoritmo de la División: $C(x)=x-a$. Al cabo de esto, les comentaremos que hoy trabajaremos con otro caso que ya habíamos mencionado la clase anterior: $R(x)=0$. Les recordaremos que en el caso que $R(x)=0$ tenemos una raíz y les indicaremos que comenzaremos con la resolución de un problema.

<u>Segundo Momento: Resolución de un problema</u> (25 minutos)

Se les presentará a los alumnos el segundo problema de la Guía N°2 y comenzaremos con una resolución grupal.

Mueble Nº2: Silla. Para armar el asiento y el respaldo necesita cortar dos placas de madera (cuadrados y/o rectángulos) que cumplan las siguientes condiciones:



-El asiento tiene que ser un cuadrado.

-El respaldo tiene el mismo ancho que el asiento y el alto es 13 cm menor que el del asiento.

-La pieza del asiento tiene $\frac{3}{2}$ del área que tiene la pieza del respaldo.

<u>Actividad 2</u>: Teniendo en cuenta el Mueble Nº2, realice las actividades propuestas en la Actividad 1.

La decisión de trabajar de manera grupal se debe a que los alumnos ya plantearon en la primera clase ecuaciones similares para el problema N°1 de la Guía N°2 por lo que la primera parte de la actividad será familiar para ellos, y para nosotras sería un mejor aprovechamiento del tiempo trabajarlo en conjunto. Por otro lado, consideramos que los alumnos presentarán dificultades para poder hallar las raíces en este caso, ya que obtendrán una ecuación cuadrática. Por estas consideraciones es que decidimos guiar la actividad desde el pizarrón y aprovechar el momento de perplejidad, desconcierto y/o falta de herramientas para hallar la solución, para proceder a desarrollar factor común en dicha ecuación.

Se comenzará la actividad resolviendo el inciso a) de la actividad y se plantearán las ecuaciones necesarias a partir de los aportes de los alumnos. En este momento no esperamos grandes dificultades ya que el trabajo es similar al planteado en la primera clase, como se comentó recién.

La diferencia sustancial entre la actividad de la primera clase y la que se propone en ésta, radica en la resolución del inciso b). En este caso, al plantear la ecuación de igualdad de áreas se obtiene una ecuación cuadrática en lugar de una ecuación lineal, que si uno la expresa en la forma polinómica, no parece tener una solución evidente. Creemos que los alumnos intentarán encontrar una solución mediante el tanteo o tratarán de reescribir la ecuación de una manera más sencilla. Si los alumnos que utilizan el tanteo encuentran una solución, se tendrá en consideración ya que las opciones que eligieron para evaluar pueden no ser aleatorias. Es en este momento que nosotras guiaremos de una manera más marcada a los alumnos para reescribir la ecuación de un modo en el cuál sea más sencillo hallar las raíces y posibles soluciones.

La ecuación que tendrán planteada los alumnos será: $\frac{3}{2}x.(x-13)=x^2$ y consideramos que tal vez querrán reescribirla de alguna de las siguientes formas:

- $\frac{3}{2}x^2-\frac{39}{2}x=x^2$ que lo tomaremos como válido para sacar factor común luego de igualarla a cero.
- $\frac{3}{2}(x-13)=x$ y en este caso se pierde una solución, salvo que se los guíe a los alumnos a que consideren ese caso.

A partir de la ecuación original, llevaremos a los alumnos a buscar soluciones sin simplificar. Les plantearemos a los alumnos distintas ayudas y preguntas para que ellos vayan respondiendo y proponiendo pasos a seguir:

- ¿Qué ideas se les ocurren para que esto valga?
- Y si buscamos una raíz, ¿para qué polinomio deberíamos buscarla?
- ¿Podemos encontrar algo en común en todos los términos? ¿Hay término independiente?

Una vez que se escriba el polinomio como $x(\frac{3}{2}(x-13)-x)=0$ o como $x(\frac{1}{2}x-13)=0$(que son equivalentes) se volverá al algoritmo de la división y a la expresión $P(x)=(x-a).Q(x)$donde a es una raíz. Se trabajará con los alumnos para que identifiquen que $x=0$ es una raíz del problema y que se puede identificar $Q(x)=\frac{3}{2}(x-13)-x$ y $C(x)=x$ y en ambos casos (en el algoritmo de la división y la ecuación $P(x)=(x-a).Q(x)$) se obtiene $C(x).Q(x)=0$.

En este momento será sencillo guiar a los alumnos a que den los dos valores de x que hacen posible que se cumpla $C(x).Q(x)=0$, $x=0$ y $x=39$. Luego, se trabajará para responder la pregunta del inciso b del problema. Se le pedirá a un alumno que lea las preguntas y se le pedirá a algún alumno que responda con ayuda de los compañeros

<u>Tercer Momento: Presentación del Factor común</u> (5 minutos)

En este momento se volverá a trabajar con los alumnos para que observen qué polinomio en particular es $C(x)$ y qué hicimos para obtenerlo. Aplicaremos propiedad distributiva y volveremos a la ecuación original. Remarcaremos que lo que hicimos fue aplicar la propiedad distributiva desde uno de los lados de la igualdad, que se llama extraer factor común y que $C(x)$ se llama factor común. Luego de esto les daremos la definición de factor común.

Cuando $P(x)=Q(x).C(x)+R(x)$ cumple que

c. $R(x)=0$

d. $C(x)$ es un monomio

se dice que $C(x)$ es un **factor común** del polinomio $P(x)$.
Por lo tanto, extraer factor común a un polinomio, es escribirlo como producto entre un monomio y un polinomio.

Luego se plantearán las siguientes ecuaciones para identificar $C(x)$ y extraer factor común de ser posible:

1. $P(x)=7x^2+49x^4-7x^3$
2. $P(x)=(x+3x^2).(x^3+9x)$
3. $P(x)=3x^5-6x+9$
4. $P(x)=4x^5+8x^3+16x^{11}+4$
5. $P(x)=4x^5+8x^3+16x^{11}+4x^7$
6. $P(x)=9x^2-6x^4+27x^9$

Estos últimos polinomios están pensados para que se plantee la discusión sobre la segunda condición que debe cumplir el polinomio $C(x)$.

<u>**Cuarto Momento: Presentación de factor común por grupos**</u> (15 minutos)

Se comenzará esta parte de la clase retomando el polinomio $P(x)=(x+3x^2).(x^3+9x)$ que no es el resultado de haber extraído factor común, sin embargo, cumple que si yo aplicara la propiedad distributiva respecto de uno de los polinomios, por ejemplo $C(x)=x+3x^2$ entonces obtendríamos $P(x)=x.(x^3+9x)+3x^2.(x^3+9x)$ y ahora tenemos algo parecido a factor común, solo que lo "común" no es un monomio sino un polinomio.

Luego se dará la definición de factor común por grupos:

Cuando se tiene $P(x)=A(x).C(x)+B(x).C(x)$ y luego se lo puede reescribir como $A(x).C(x)+B(x).C(x)=[A(x)+B(x)].C(x)$ se dice que $C(x)$ es un **factor común por grupos** del polinomio $P(x)$.

<u>Observación</u>: Cuando $P(x)=Q(x).C(x)+R(x)$ tiene $R(x)=0$ y $Q(x)$ y $C(x)$ no son monomios, se puede decir que $Q(x)$ es factor común por grupos de $P(x)$ y $Q(x)$ sería el equivalente a $A(x)+B(x)$.
Es equivalente si se considera a $C(x)$ como el factor común por grupos.

Para ejemplificar, se trabajará con dos polinomios: uno ya factorizado por factor común por grupos, y otro en el que se puede aplicar factor común por grupos:

1. $P(x)=(2x^2+6).(x-2)$
2. $P(x)=2x^3-6x+x^2-3$

Dado que la definición anterior no es una definición fácil de comprender y que también suele ser difícil identificar los casos de factor común por grupos se procederá a resolver una actividad de la Guía N°1 con los alumnos para que identifiquen la diferencia entre factor común y factor común por grupos.

Quinto Momento: Resolución de actividades (10 minutos)

Se presenta la actividad N°9 de la Guía N°1 que se resolverá con los alumnos. Se trabajará de manera individual con una puesta en común donde se dirán los resultados de cada inciso y se fundamentará la decisión de manera oral. Se decidió esto para poder trabajar con las justificaciones de los alumnos y hacerlos avanzar a la utilización de fundamentos teóricos.

9) Decidir en cuáles de los siguientes polinomios se extrajo factor común, factor común por grupos o ninguna de las opciones anteriores.

a. $x.(x+8)-x=x.(x+7)$
b. $3.(x+5)+x.(2x+10)=(3+2x).(x+5)$
c. $3.(x+5)+x.(2x+5)-x^2=(3+x).(x+5)$
d. $3.(x+5).x.(2x+10)=6.(x^3+10x^2+25x)$

Esta actividad tiene dos objetivos: en algunos ítems diferenciar si se ha sacado factor común (estándar o por grupos) o ninguno, y en otros identificar cuál de ellos se aplicó. Para identificar si se ha factorizado correctamente con alguno de los métodos basta hacer la verificación aplicando propiedad distributiva (que creemos que varios alumnos realizarán) o se pueden verificar las condiciones que deben cumplir los polinomios que se están multiplicando para que se corresponda con factor común o factor común por grupos. Se alentará a los alumnos a realizar la verificación utilizando las definiciones dadas y en caso que presenten dudas se les pedirá que las relean y piensen qué condiciones se deben cumplir en las igualdades de polinomios y si estas se están cumpliendo en cada uno de ellos.

El último polinomio se planteó con el propósito de generar un debate en los alumnos ya que si se mira el segundo término de la igualdad, se podría pensar que se sacó factor común y se aplicó la propiedad distributiva para hallar $Q(x)=x^3+10x^2+25x$, pero esto no es cierto ya que $C(x)=6$ tiene grado cero y eso no es admisible en ninguno de los casos de factorización planteados. Si se considera el primer término de la igualdad se puede ver una factorización desordenada y si se modificara dicho orden de la siguiente forma:

$$3.(x+5).x.(2x+10)=3x(x+5)(2x+10)$$

se podría considerar que se utilizaron ambos métodos para factorizar el polinomio.

Creemos que en todos los incisos los alumnos podrán decidir sobre la factorización utilizada pero la forma de justificar variará y se tendrá en cuenta a la hora de la puesta en común, ya que se apelará al resto del curso para validar cada justificación empleada.

<u>**Sexto Momento: Presentación Factorización**</u> (18 minutos)

En este momento les plantearemos a los alumnos que en el último inciso de la actividad se escribió el polinomio como productos de polinomios lineales y que ya no queda ningún polinomio multiplicando que no sea lineal. Entonces, estaríamos tentados a decir que el polinomio está factorizado, pero ¿qué significa en matemática que un polinomio esté factorizado? Les diremos que vamos a tener que ver varias definiciones para saber si un polinomio está o no factorizado en un sentido matemático.

Se comenzará dando la definición de polinomio primo:

> Se llama **polinomio primo** a los polinomios de grado uno y a los polinomios de grado dos que no poseen raíces reales.

Aquí se pueden plantear diversos problemas en la clasificación, ya que hay que diferenciar dos tipos de polinomios: lineales y cuadráticos. Además no todos los polinomios cuadráticos son primos mientras que todos los polinomios lineales si lo son.

Se trabajará por partes. En una primera instancia se reconocerán los candidatos a ser polinomio primo (polinomios lineales y cuadráticos) y en una segunda instancia se reconocerá si el polinomio es lineal o cuadrático. Si el polinomio es lineal podemos clasificarlo como polinomio primo y si es un polinomio cuadrático no sabemos en un primer momento si es primo o no. Al faltarnos herramientas para poder decir si un polinomio cuadrático tiene raíces reales dejaremos en suspenso a estos polinomios y diremos que pueden ser primos o no.

Creemos que el no poder clasificar a los polinomios cuadráticos puede generar mucha desconfianza en los alumnos pero les diremos que la próxima clase teórica retomaremos polinomios cuadráticos y daremos formas de decidir que un polinomio cuadrático <u>no</u> es primo.

Luego, daremos la definición de polinomio mónico:

> Un polinomio $P(x)$ se llama **mónico** si el coeficiente principal es igual a uno.

En esta definición no debería presentarse mayor dificultad e inconveniente ya que los alumnos deben conocerla y en caso de no conocerla, la comprobación que se le debe hacer a un polinomio para poder categorizarlo es verificar cuál es el coeficiente principal.

Luego se dará la definición de polinomio factorizado:

Un polinomio está **factorizado** cuando está expresado como el producto entre su coeficiente principal y polinomios mónicos primos.

Se analizarán los requisitos a tener en cuenta para verificar que un polinomio está factorizado o qué se debe buscar para poder escribir a un polinomio de forma factorizada.

Se identificarán las siguientes condiciones:

1. Saber cuál es el coeficiente principal (a)
2. Conocer todas las raíces del polinomio (x_i)
3. Identificar los polinomios primos

Se trabajará con las raíces y teniendo en cuenta que se tiene $P(x)=(x-x_i).Q(x)$ cuando $x_i$es una raíz. Además, también sabemos que los polinomios de la forma $C(x)=x-x_i$ son mónicos primos. Sabiendo esto, se planteará que se puede reescribir $Q(x)$ en función de otra raíz y de esa manera quedaría el producto de todos los polinomios de la forma $C(x)=x-x_i$ por un polinomio $K(x)$ que no tendría ninguna raíz. Es este polinomio el que se debería reescribir para que sea producto de polinomios cuadráticos sin raíces reales y mónicos.

Se les recordará a los alumnos que todavía no podemos decir si los polinomios cuadráticos que aparecen son primos pero que con la información que saben podríamos ser capaces de decidir si un polinomio no está factorizado cuando no se cumple alguna condición que somos capaces de verificar. Además, podemos argumentar que no sabemos si está factorizado cuando aparece un polinomio cuadrático, ya que no sabemos si éste es primo.

Se retomará el polinomio de la actividad que sirvió para empezar a plantear la definición de polinomio factorizado y se verificará si está factorizado o no.

$P(x)=3x(x+5)(2x+10)$ no cumple que los polinomios sean mónicos y los alumnos pueden verse tentados a decir que es porque $3x$ y $2x+10$ tienen coeficientes principales distintos de uno pero en realidad, tenemos $P(x)=3(x-0)(x+5)(2x+10)$ por lo tanto el 3 cumpliría el rol del coeficiente principal del polinomio $P(x)$. Así, concluimos que nuestro único inconveniente sería el $2x+10$. Pero si planteamos $3x(x+5)(2x+10)=3.x.(x+5).2.(x+5)$ tenemos dos constantes y eso no debería darse, por lo tanto para poder escribir el polinomio factorizado debemos reescribirlo de la siguiente forma: $P(x)=6x(x+5)(x+5)$donde 6 es el coeficiente principal del polinomio original $P(x)$.

<u>Séptimo Momento: Cierre de la clase</u> (2 minutos)

Se recapitulará que vimos dos formas de escribir el polinomio como producto de polinomios de menor grado y que ahora sabemos cuando un polinomio está factorizado y que la próxima clase teórica se retomarán los polinomios cuadráticos y veremos formas de escribirlos de forma factorizada.

Cuarta Clase (9/8 - 17/8)

Destinaremos esta clase a que los alumnos puedan realizar actividades de ejercitación para afianzar los conceptos que han aprendido. Se trabajará con actividades de la Guía N°1 que habían quedado pendientes o incompletas y se trabajará individualmente con una corrección grupal para que los alumnos ganen autonomía pero a la vez, puedan tener validación y que esta no esté a cargo solamente de la docente.

El objetivo de esta clase es vincular los conceptos ya vistos y a partir de la ejercitación poder detectar los errores, confusiones o dificultades de los alumnos para poder ayudarlos, despejar dudas y aclarar temas que no fueron claros. De esta manera se podrá tener una base más fuerte para las próximas clases teóricas, lo cual beneficiará a los alumnos a la hora de llegar al Teorema de Gauss.

Los recursos para los alumnos que se utilizarán en esta clase son: la Guía N°1, las carpetas de los alumnos y Geogebra; mientras que nosotras además utilizaremos los guiones conjeturales de las clases anteriores y el guión de la presente clase.

Primer momento: Comienzo de la clase y anuncio de actividades para hoy (5 minutos)

Comenzaremos la clase anunciando a los alumnos que destinaremos los 80 minutos a realizar actividades de la Guía Nº 1, con el fin de que puedan sacarse todas las dudas que tengan ya que les daremos el espacio para que consulten tanto conceptos como ejercicios específicos en los cuales necesiten ayuda.

Segundo momento: Resolución de actividades

Comenzaremos pidiendo que resuelvan los ítems de la actividad 4 que habían quedado pendientes para resolver esta clase.

4) Calcular el resto de la división de $P(x)$ por $C(x)=x-a$ en los siguientes casos:

d) $P(x)=x^5-8x+10$ con $a=3$

e) $P(x)=7x^2-98x+343$ con $a=-7$

f) $P(x)=7x^2-98x+343$ con $a=7$

5) ¿Cuáles de los valores de a de la actividad anterior son raíces? ¿Por qué?

Para responder dudas y preguntas de los alumnos, tendremos en cuenta las conjeturas ya planteadas en el guión conjetural de la segunda clase. Les daremos 10 minutos para que resuelvan la actividad y destinaremos 5 minutos para la corrección.

Para realizarla, elegiremos 3 alumnos para que nos digan cuánto les dio el resto. La elección se llevará a cabo teniendo en cuenta criterios observados durante la resolución: métodos utilizados, conclusiones obtenidas, justificaciones. En caso de que haya alumnos a los cuales no les coincide el resultado, procederemos a realizarla nosotros en el pizarrón, siempre pidiendo colaboración de los propios alumnos.

Decidimos llevar a cabo esta modalidad de corrección ya que es una clase en la que tendremos una gran cantidad de actividades que corregir y a las cuales destinarle tiempo. Particularmente, esta actividad ya fue comentada y resuelta por alumnos en el pizarrón en la segunda clase. Debido a que los ítems que tienen que resolver ahora implican los mismos métodos y conclusiones que los que ya han hecho, creemos que no tendrán mayores dificultades en la resolución.

A continuación, destinaremos 10 minutos para que los alumnos lleven a cabo la resolución de la actividad siguiente (Actividad 8).

8) Verificar cuál de las siguientes divisiones corresponden a la utilización de la Regla de Ruffini y si es válida la igualdad a partir de sus gráficos (usar Geogebra)

a) $x^4-7x^3+8x^2-47x=(x^2-7).(x^3+8x)+9$

b) $x^4-7x^3+8x^2-56x+9=(x-7).(x^3+8x)+9$

La actividad se basa nuevamente en la utilización de la Regla de Ruffini, ahora para comprobar si fue o no utilizada. Se pretende que los alumnos puedan sacar conclusiones acerca del método que propone la regla, como por ejemplo, cómo queda constituido el grado del polinomio cociente. En caso de que no se den cuenta de utilizar este tipo de caracterizaciones, suponemos que pasarán a llevar a cabo la división mediante la regla y así comprobar si coinciden el cociente, el dividendo y el resto.

Otra caracterización que pueden utilizar es una condición que se impuso al momento de dar la explicación de la regla, y es que se puede aplicar sólo cuando el polinomio divisor es de la forma $x-a$.

En caso de que los alumnos no se den cuenta de utilizar algunas de estas condiciones, se los guiará para que las utilicen con preguntas como:

- ¿Cuál era el grado del polinomio que obteníamos como cociente? ¿Recuerdan qué exponente llevaba la x del primer término que formábamos del cociente?
- ¿Cómo debía ser el polinomio divisor para poder aplicar la Regla de Ruffini?

La corrección de esta actividad (10 minutos) será preguntando a algunos alumnos si se lleva a cabo la utilización de la regla o no y que justifiquen su elección. Pretendemos que en esta clase todos o la mayoría de los alumnos participen, por lo tanto se elegirán alumnos que hasta el momento no han dado aportes y tendremos en cuenta a aquellos que observamos que han utilizado métodos o justificaciones sobresalientes.

Como última actividad se propone la Actividad 12 de la Guía Nº1:

10) Saquen factor común o factor común por grupos en los siguientes polinomios según corresponda.

a) $O(x)=2x^4-x^3-6x^2$
b) $Q(x)=x^3-x^2+x-1$
c) $P(x)=-x^3+2x^2$
d) $R(x)=2x^3-6x^2+x-3$
e) $S(x)=3x-9x^2+27x^3$
f) $C(x)=3x^5+x^4-3x-1$
g) $T(x)=4x^4+8x^3+8x^2+16x$

Se destinarán 20 minutos para su resolución. La actividad tiene como objetivo que los alumnos ejerciten la utilización de los casos de factorización que ya han aprendido.

Para responder dudas, tendremos en cuenta lo que se planteó la clase anterior acerca de estos dos métodos. Creemos que los alumnos tendrán dudas sobre la elección del caso que deben/pueden aplicar. Para eso, les diremos que ellos mismos sean críticos con cada ejercicio: pueden intentar resolverlos de una manera y luego ver si es correcto o satisfactorio el método que utilizaron o si deberán aplicar el otro. Más allá de eso, creemos que la mayor masa de dudas serán sobre el trabajo algebraico que les demandará la factorización y serán dudas sobre cómo escribir y si está correctamente reescrito.

Para la corrección de esta actividad destinaremos 18 minutos. Elegiremos a alumnos para que pasen al pizarrón y resuelvan un ítem de la actividad, considerando todos los pasos y justificaciones que hayan utilizado.

Tercer momento: cierre de la clase (2 minutos)

Terminaremos recordándoles que la clase anterior vimos la definición de polinomio primo y que no podíamos saber si los polinomios cuadráticos son primos o no. Les comentaremos que la siguiente clase será de carácter teórico y aprenderemos dos nuevos casos de factorización que nos ayudarán a identificar a los polinomios cuadráticos que no son primos.

Quinta clase (14/8 - 22/8)

En esta clase se trabajará con las fórmulas de diferencia de cuadrados y trinomio cuadrado perfecto desde dos enfoques distintos para construir dichas fórmulas con los alumnos. Se trabajará con casos particulares y generales para evidenciar las particularidades de estas formas de factorizar polinomios y luego se realizarán actividades para identificar las diferencias y similitudes de estas dos formas de factorizar y luego para aplicarlas.

El objetivo de esta clase es incorporar dos herramientas de factorización para los alumnos. También, esta clase ayudará a problematizar cuándo los polinomios cuadráticos no son primos.

Los recursos para los alumnos que se utilizarán en esta clase son la Guía de Actividades Nº1 y la carpeta de los alumnos, y para nosotras los guiones conjeturales de esta clase y de la clase N°3.

Primer momento: Comienzo de la clase (5 minutos)

Comenzaremos la clase ingresando al aula, saludaremos a los alumnos y destinaremos unos minutos a repasar lo que estudiamos la última clase teórica: factor común y factor común por grupos. Recordaremos también que a estos casos de factoreo los estudiamos a partir del caso particular $R(x)=0$ de la ecuación que nos brinda el Algoritmo de División, y que hoy seguiremos estudiando este caso para aprender dos casos más de factorización.

Segundo momento: Presentación Diferencia de Cuadrados (20 minutos)

Destinaremos este momento de la clase para presentar el que será el tercer caso de factorización que estudiaremos: Diferencia de Cuadrados. Para eso, debemos presentarles con antelación a los alumnos las características que deben tener los polinomios para poder factorizarlos por este caso.

Comenzaremos comentándoles a los alumnos que a ciertos polinomios, que son binomios, se los denomina Diferencia de Cuadrados y una de sus características es que tienen grado par. Este término (Diferencia de Cuadrados) puede resultarles familiar, y si no lo es, les pediremos que nos cuenten qué piensan acerca del mismo, ya que tanto “diferencia” como “cuadrados” sí son términos que reconocen. Para llegar a una conclusión los guiaremos con preguntas como:

- ¿Qué operación indica la palabra diferencia?
- ¿Y la palabra cuadrado a qué les parece que se refiere?
- Ya sabemos que son binomios, entonces ¿qué forma tendrán estos polinomios?
- Si tenemos dos términos y uno tiene que ser el término principal y dijimos que es de grado dos, ¿el otro término puede tener a la variable?

Pretendemos que no habrá mayores inconvenientes para deducir que $P(x)$ es de la forma $P(x)=x^2-a^2$ donde a es un número real. Y finalmente les diremos que estos polinomios, denominados Diferencia de Cuadrados se pueden reescribir como $P(x)=(x-a).(x+a)$ y verificaremos aplicando propiedad distributiva que se cumple $x^2-a^2=(x-a).(x+a)$. Por lo tanto podemos concluir que:

Si un polinomio $P(x)$ es de la forma $P(x)=x^2-a^2$ donde a es un número real, se lo llama Diferencia de cuadrados y se lo puede reescribir como:

$$P(x) = (x - a).(x + a)$$

Ahora procederemos a estudiar el caso más general. Para eso, les preguntaremos a los alumnos si se les ocurre otro polinomio que cumpla las características para ser Diferencia de Cuadrados. En caso de que algún/os aporten opciones, las estudiaremos entre todos y las validaremos o refutaremos. Finalmente, si a nadie se le ha ocurrido hasta ahora otro polinomio les recordaremos que nosotras mencionamos que el polinomio debía tener grado par y escribiremos en el pizarrón el polinomio $P(x) = x^{2n} - a^{2n}$ donde n es un número natural, y a es un número real. Les afirmaremos que ese polinomio también es una Diferencia de Cuadrados. Pediremos que ellos deduzcan que cumple las condiciones necesarias para categorizarlo así. Finalmente, lo escribiremos de la forma $P(x) = (x^n)^2 - (a^n)^2$ y les diremos a los alumnos que partiendo del primer caso, deduzcan cómo se puede reescribir este polinomio. Concluiremos que:

Si un polinomio $P(x)$ es de la forma $P(x) = x^{2n} - a^{2m}$ donde a es un número real y n y m son números naturales, a $P(x)$ se lo llama Diferencia de Cuadrados y se lo puede escribir como:

$$P(x) = (x^n - a^m).(x^n + a^m).$$

Observación: si tenemos a^m en lugar de a^{2m}y $a^m > 0$, entonces se puede escribir:

$$(x^{2n} - a^m) = (x^n - \sqrt{a^m}).(x^n + \sqrt{a^m})$$

Ahora haremos una serie de aclaraciones para los alumnos, ya que además se pueden tener los siguientes casos:

1. $a^2 - x^2$
2. $(bx)^2 - a^2$
3. $x^{2n} - (ax)^{2m}$

En los dos primeros casos la factorización se puede realizar sin ningún inconveniente y se lo puede mostrar a los alumnos utilizando las fórmulas obtenidas por la definición y a partir de los ejemplos $P(x) = 25x^2 - 9$ y $T(x) = 3 - x^4$. En el tercer caso, no se debería hacer diferencia de cuadrados para factorizar sino factor común, ya que es una herramienta más sencilla y se obtendrían los mismos resultados. Esto se puede ejemplificar a los alumnos a través de los polinomios $P(x) = x^{2n} - 2x^{2n}$ y $P(x) = x^{2n} - x^n$.

De esta manera hemos realizado ejemplos que los impulsa a verificar las condiciones para poder aplicar el método de factorización y a la vez pudieron verificar numéricamente que las ecuaciones de igualdad planteadas son ciertas.

Tercer momento: Presentación Trinomio Cuadrado Perfecto (15 minutos)

Ahora procederemos a presentarles el cuarto caso de factoreo: Trinomio Cuadrado

Perfecto. Les indicaremos que como su nombre lo dice, los polinomios a los que podemos aplicarle este caso serán trinomios y deben cumplir varias condiciones. En una primera instancia se les pedirá que realicen distributiva en los siguientes polinomios:

I. $P(x)=(x-2)^2$
II. $P(x)=(x+2)^2$
III. $P(x)=(x-3)^2$

Luego se les pedirá a los alumnos que digan cuáles fueron sus respuestas. Se verá que todos tienen algo en común: son trinomios donde el término cuadrático es el cuadrado del término lineal del binomio y el término independiente también es el cuadrado del término lineal del binomio original. Ahora debemos ver qué relación mantiene el término lineal del trinomio obtenido con los términos del binomio original.

Lo primero que observaremos es que el coeficiente de este término es un número par en los 3 ejemplos y lo reescribiremos como producto. Esto dejará en evidencia que este coeficiente es el producto entre el término independiente del binomio original y el número dos. En este momento el signo que posee este término puede pasar desapercibido pero se les hará notar a los alumnos que en el caso I y II hay una única diferencia entre los trinomios que se obtuvieron y ésta es el signo que posee el término lineal. Los alumnos a esta altura pueden argumentar que puede ser una coincidencia que esto suceda y que no pase en el caso general, esto servirá de disparador para abandonar los casos particulares y explicitar la relación que hay entre el binomio elevado al cuadrado y el trinomio obtenido. Para ello se escribirá en el pizarrón $(x+a)^2$ y se les pedirá a los alumnos que vayan diciendo qué pasos hay que realizar para escribirlo de forma canónica (escribir la potencia como producto, realizar distributiva y agrupar los términos que tengan el mismo grado hasta escribirlo como monomio).

Así habremos llegado a la fórmula que queríamos, pero en esta forma de escritura hemos perdido el signo. En este momento tenemos dos opciones: hacer el mismo desarrollo para $(x-a)^2$ o problematizar el valor de a. Consideramos que es más valioso problematizar el valor de a y trabajaremos con los casos particulares que ya mencionamos antes y analizaremos otro más: $(x+9)^2$. Reescibiremos todos los términos lineales de la forma $2ax$ y obtendremos $2.(-2).x$, $2.2.x$, $2.(-3).x$ y $2.9.x$. Volviendo a la fórmula general, podemos ver que el signo que tiene el término lineal del trinomio corresponde al signo que tiene el término independiente del binomio. Esto servirá como herramienta para corroborar la correcta aplicación de la fórmula.

Ahora observaremos la ecuación $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ y les diremos a los alumnos que esta relación se puede decir de la siguiente forma: el resultado de elevar un binomio al cuadrado es un trinomio donde cada término corresponde a:

-el primer término del binomio elevado al cuadrado (x^2)
-el segundo término del binomio elevado al cuadrado (a^2)
-dos veces el producto entre los términos del binomio ($2ax$)

En este momento les plantearemos a los alumnos la fórmula genérica: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ y diremos que estábamos trabajando con $b=x$ pero que podríamos tener $b = c\,x^n$.

Si un polinomio $P(x)$ es de la forma $P(x) = c^2x^2 + 2acx + a^2$ se dice que es un **Trinomio Cuadrado Perfecto** y $P(x)$ se puede reescribir en su forma factorizada como
$$P(x) = (cx + a)^2$$

<u>Cuarto momento: Resolución de actividades</u> (35 minutos)

Este momento será dedicado a la ejercitación. Para eso, les pediremos que resuelvan la Actividad 15 de la Guía Nº1.

13) Decida si las siguientes factorizaciones son correctas y si corresponden a la fórmula del trinomio cuadrado perfecto o a la fórmula de diferencia de cuadrados.

a) $x.(x+2).(x-2) = x^3 - 4x^2 + 4$
b) $(x^2-4).(x^2+4) = x^4 - 16$
c) $2x + 2x^2 + 2 = 2(x+1)^2$
d) $4x^4 - 8x^2 + 4 = (2x^2 - 2)^2$
e) $(-4x^3-3).(-4x^3+3) = 16x^6 - 9$

Esta actividad tiene dos tareas por realizar. Por un lado, comprobar si la igualdad es válida, para lo que tendrán que resolver la factorización y comprobarlo. Y por otro lado, deberán identificar si se está hablando de una Diferencia de Cuadrados o de un Trinomio Cuadrado Perfecto. Pretendemos que en una primera instancia, los alumnos reconozcan en la ecuación polinómica de cuál de los dos casos se trata, y que luego verifiquen si se aplicó correctamente.

Para su resolución, destinaremos 10 minutos. En cuanto a las dudas que pueda haber, nos basaremos siempre para responderlas en la teoría que hemos dado y diremos a los alumnos que apelen a los ejemplos que hemos resuelto con todo el grupo para despejar sus dudas.

La corrección la llevaremos a cabo de manera oral, eligiendo a algunos alumnos para que digan qué caso de factoreo es y si vale la igualdad, y les pediremos que justifiquen su respuesta. Para este momento destinaremos 5 minutos.

A continuación, pediremos que resuelvan la Actividad 14 de la Guía Nº1.

12) Aplicar la fórmula de trinomio cuadrado perfecto o diferencia de cuadrados para escribir en factores los siguientes polinomios.

a) $Q(x) = x^6 - x^2$
b) $P(x) = 4x^2 + 6x + 9$
c) $S(x) = 25x^2 - 3$

d) $L(x)=x^2-8x+16$
e) $A(x)=x^6-27$

Esta actividad es de pura ejercitación y tiene como objetivo afianzar los conceptos de Diferencia de Cuadrados y de Trinomio Cuadrado Perfecto. Como en la actividad anterior, primero deberán reconocer de qué caso se trata y luego aplicar la igualdad que ya conocen, para lo que deberán identificar bien cada elemento. Creemos que para eso, existirán las principales dudas: para la Diferencia de Cuadrados, cuál será la base, de cuál de los dos casos de Diferencia de Cuadrados que vimos estamos hablando; y para Trinomio Cuadrado Perfecto, cuáles serán los términos que son cuadrados perfectos, cómo identificar el otro término, etc.

Para salvar este tipo de dudas, como siempre, recurriremos a la teoría que les hemos dado considerando cada duda particular de los alumnos para responder en función de la comprensión y madurez que cada uno tenga del tema. Les pediremos un poco de autonomía para realizar la actividad, siempre y cuando pensemos que no es necesaria una intensiva explicación, sino que ellos mismo pueden darse cuenta de lo que deben hacer.

Para el momento de su realización, destinaremos 10 minutos, y para la corrección otros 10 minutos. La misma se llevará a cabo eligiendo alumnos para que realicen la actividad en el pizarrón. La elección de los mismos dependerá de lo que hayamos observado mientras resolvían la actividad.

Creemos que la mayor dificultad de los alumnos en ambas actividades será el trabajo con signos que en este momento es de crucial importancia, ya que es la esencia de estas factorizaciones. Para evitar que los alumnos mantengan o arrastren errores en sus factorizaciones o verificaciones, se les recordará siempre chequear el orden de los signos, a qué término están acompañando y que realicen distributiva luego, para verificar una correcta solución. Si en la forma factorizada se presentan dos binomios idénticos o distintos (en algún signo), esto también es una forma de identificar qué caso de factorización puedo llegar a realizar y puede ser algo que los alumnos no tengan presentes en una primera instancia.

Otra cuestión a tener en cuenta es la cantidad de términos que debo obtener al realizar la verificación. Si es un trinomio o binomio ya sé para qué caso de factorización es candidato mi polinomio.

Todas estas consideraciones que se desprenden de las definiciones pero que son sutiles se explicitarán y mencionarán a los alumnos cuando presenten problemas o dudas.

Luego de la corrección en el pizarrón, les haremos notar a los alumnos que han estado trabajando con polinomios cuadráticos que no son primos, algo que habíamos dejado pendiente la tercera clase cuando hablamos de factorización.

<u>Quinto momento: Cierre de la clase</u> (5 minutos)

Terminaremos la clase haciendo un pequeño resumen de los 4 casos de factoreo que hemos visto hasta ahora y les anunciaremos que la clase siguiente será de ejercitación.

Sexta Clase (16/8 - 24/8)

Esta clase estará totalmente dedicada a realizar actividades de la Guía N°1 que abarquen todos los conceptos ya trabajados previamente y se trabajará con un problema de la Guía N°2. El trabajo será de manera individual para que cada alumno pueda encontrar los puntos donde tiene dificultades y enfocarse en resolver dudas puntuales. Las correcciones de las actividades serán grupales y serán los alumnos quienes pasen adelante a realizar esta tarea, teniendo que resolver y justificar cada paso que hagan. Luego se tomarán conclusiones y se harán aclaraciones generales cuando sea necesario.

El objetivo de esta clase es que los alumnos puedan poner en práctica todos los conceptos que se fueron trabajando y que comiencen a vincularlos. Es decir, se intentará que puedan comprender que a un polinomio es posible aplicarle más de un caso de factorización, que en algunos casos, es indistinto cual caso de factorización se aplica y que escribir al polinomio como producto tiene ventajas a la hora de buscar raíces.

En esta clase se utilizarán las Guías de Actividades, el PowerPoint sobre Ruffini y las carpetas de los alumnos como recursos para los alumnos, agregando para nosotras los guiones conjeturales de las clases anteriores y el guión de esta clase.

<u>Primer momento: Comienzo de la clase</u> (5 minutos)

Comenzaremos la clase entrando al aula, saludando a los alumnos y les diremos que destinaremos esta clase a realizar actividades y que les daremos lugar para que consulten todas sus dudas.

<u>Segundo momento: Resolución de actividades</u>

Comenzaremos pidiéndoles a los alumnos que comiencen a resolver la Actividad 7 de la Guía de Actividades Nº1. La misma tiene como objetivo afianzar los conocimientos que hasta el momento se han estudiado, principalmente Teorema del Resto y Raíz de un Polinomio. Destinaremos 15 minutos a su resolución. La actividad es la siguiente:

7)

a) Hallar el resto de la división de $P(x)$ por . $C(x)=x-1$.

i) $P(x)=x^3-3x^2+4x+k$

ii) $P(x)=x^2-2x-k$

iii) $P(x)=x^2+2x-1$

b) ¿Para qué valores de k, $x=1$es una raíz?

c) Decida y justifique si los factores que se obtuvieron en el inciso a) son polinomios primos.

En cuanto al ítem a), los alumnos pueden encontrar confuso el hecho de que existe una variable x y una constante k en los polinomios. Eso se les aclarará en caso de que no lo comprendan. Se les dirá que k es una constante, que deben trabajar con ella como si fuera un número y que en el siguiente ítem la utilizarán para realizar la consigna que se les pide. En cuanto a la tarea que pide este inciso, creemos que los alumnos no tendrán dificultad en llevarla a cabo ya que se trata de un ejercicio para aplicar Regla de Ruffini, concepto con el que ya han trabajado.

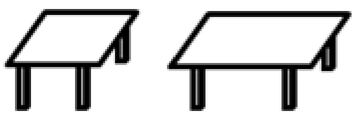
Para el inciso b), será necesario que utilicen lo que ya saben acerca de la raíz de un polinomio. En caso de que los alumnos no comprendan de qué manera llevar a cabo la actividad, se los guiará haciéndoles preguntas como:

- ¿Qué significa que $x=1$ es una raíz? Si evaluamos el polinomio en $x=1$ ¿qué obtendremos?
- Recuerden que tenemos que hallar el valor de k para esa situación. Si en la expresión reemplazamos el valor de x por 1, ¿qué podemos decir de la expresión que obtenemos? ¿Ahora qué variables tiene la ecuación? ¿se podría encontrar un valor para k?
- Si k es una incógnita porque es el valor que debemos hallar, ¿cómo lo podemos encontrar a partir de esta expresión?

En cuanto al inciso c), las consultas que tengan las responderemos siempre teniendo en cuenta la definición de polinomio primo, concepto que fue analizado en una clase previa.

Para llevar a cabo la corrección de esta actividad (10 minutos), elegiremos tres alumnos para que pasen al pizarrón y resuelvan cada ítem del inciso a) y respondan también cómo resolvieron el inciso b) correspondiente. La elección se llevará a cabo teniendo en cuenta criterios observados durante la resolución: métodos utilizados, conclusiones obtenidas y justificaciones. Se pedirá a cada uno que comente y explique a sus compañeros qué métodos utilizaron para llevar a cabo la resolución y qué justificaciones tienen para afirmar lo que realizaron. En caso de que algún/os alumnos no coincidan con los resultados, haremos las aclaraciones que sean necesarias para salvar todas las dudas que puedan existir. Para eso, se hará participar al resto de sus compañeros, para generar un debate de lo que se ha puesto en duda.

Luego se trabajará con el problema 3 de la Guía N°2:



Mueble Nº3: Banquetas.

En la fábrica se venden dos tipos de banquetas, unas con asientos cuadrados y otras con asientos rectangulares. Como las ventas de estos productos no son muy altas, Juan quiere quitar uno de los modelos para ahorrarle dinero a la fábrica. Para decidir qué banqueta dejar, debe tener en cuenta que para cortar las piezas de las banquetas se utilizan placas de $120\,cm$ de ancho y $200\,cm$ de largo y se corta sólo un modelo de pieza por placa. El encargado de la máquina les comunicó que para obtener la medida deseada deben agregarle a cada lado $5\,cm$, los cuales se perderán luego de emprolijar y moldear cada pieza. Para medidas entre $30\,cm$ y $45\,cm$, la madera sobrante de cada placa está dada por las siguientes ecuaciones: $A(x)=24000\,cm^2-12(x^2cm^2-25\,cm^2)$ y $B(x)=24000\,cm^2-8(x^2+10\,x\,cm+25\,cm^2)$ donde la ecuación ya contempla los $5\,cm$ que se deben agregar pero no recuerda qué ecuación corresponde a cada pieza.

Actividad 3:

a) ¿Cuál de las ecuaciones representa a las piezas cuadradas y cuál a las piezas rectangulares?
b) ¿Con qué forma de pieza (cuadrada o rectangular) se desperdicia menos madera si se considera $x=40\,cm$? En este caso, ¿qué modelo le conviene dejar a Juan en producción?

Se le dedicarán 20 minutos de la clase para la resolución y otros 10 minutos para la corrección. El trabajo será individual pero se permitirá que los alumnos consulten a sus compañeros y si deciden resolverlo en grupos, se verificará que todos los participantes del grupo estén aportando a la solución del problema. Nuestra tarea durante la resolución será ir por el aula, verificando que trabajen, ayudando con las dudas que puedan aparecer y manteniendo el orden del curso. Para realizar esta tarea tendremos las posibles dificultades de los alumnos a la hora de resolver el problema.

En esta actividad puede haber diferentes confusiones y consideramos que las más importantes son:

- Confusión a la hora de interpretar qué modificaciones genera el deber agregar $5\,cm$ a las medidas de las piezas
- Confusión a la hora de entender qué representan los polinomios $A(x)$ y $B(x)$
- Dificultades para identificar a qué pieza corresponde cada ecuación

Para dilucidar estos inconvenientes se tendrán en cuenta las siguientes preguntas:

- Si yo quiero tener una pieza de $30\,cm.30\,cm$ cuando la pieza esté terminada, ¿de qué tamaño debería cortarla ahora, según las indicaciones del encargado?
- ¿Qué significa que se tiene que agregar $5\,cm$ a cada lado? (dibujar un rectángulo con algunas medidas y señalar) ¿Qué medida le voy a pedir a este lado para cumplir con la condición?
- (hacer una cuadrado o rectángulo en el pizarrón y hacer otro superpuesto pero un poco mayor) Si al finalizar el trabajo con la pieza se quiere que tenga el tamaño del cuadrado (o rectángulo) pequeño pero nos están diciendo que lijando, emprolijando, redondeando se pierden $5\,cm$ entonces debería cortar una pieza un

poco más grande para que después de todo el proceso tenga el tamaño que yo quería originalmente. Ahora, ¿Cuántos cm debería agregarle a la pieza pequeña para obtener la grande (que terminará teniendo el tamaño de la pequeña)?

- El encargado me está diciendo que tengo que cortar una piezas más grande del tamaño que yo necesito porque en el proceso que se le hace a la pieza se pierde tamaño. ¿Cómo agrego $5cm$ a cada lado para cumplir con lo que me dice el encargado?
- El enunciado dice que los polinomios $A(x)$ y $B(x)$ nos dicen la cantidad de madera que sobra de la placa original al cortar piezas cuadradas o rectangulares. Para saber cuánto sobra, hay que evaluar a los polinomios en las medidas que uno quiere de las piezas.
- Como son rectangulares y cuadradas las piezas y las ecuaciones solo dependen de x, vamos a suponer que las medidas de las tablas sólo dependen de la elección de una de las medidas.
- Una vez que elijamos la medida de la tabla que controla los demás tamaños, lo que nos dicen los polinomios es que si evaluamos en ese valor al polinomio, cada ecuación nos dice cuántos cm^2 sobran que no se pueden utilizar para hacer más piezas. Nos está diciendo cuanta madera se desperdicia con cada pieza.
- ¿Pueden ver que en las dos ecuaciones aparece el término $24000cm^2$ y después hay un polinomio multiplicado por una constante? ¿Qué pinta tienen esos polinomios?
- ¿Podrían reescribir los polinomios que están siendo multiplicados por la constante?
- Si pensamos que estos polinomios son las áreas de las piezas que yo quiero cortar, ¿podrían decir algo de la forma que tendrán las piezas a partir del polinomio?

Sabemos que los alumnos pueden presentar otras dudas, las cuales se considerarán individualmente y se responderán en base a las cuestiones ya planteadas.

Sabemos que los alumnos pueden presentar dificultades al tener que evaluar el polinomio ya que podrían evaluar en $x=40cm$ o en $x=45cm$ si se hiciera la corrección, pero la aclaración después de las ecuaciones plantea que se consideran los $5cm$ extras como parte de la ecuación, por lo tanto se guiará a los alumnos a comprender esa aclaración para que sepan en qué valor realmente deberán evaluar los polinomios.

Luego del momento de resolución se irá a la corrección y se elegirán dos alumnos que pasen al pizarrón para que cuenten lo que hicieron, cómo lo hicieron y cómo respondieron las preguntas que aparecen en el problema. Luego, se les preguntará a los demás si están de acuerdo, si llegaron a otras conclusiones y se dejará un pequeño espacio para debate y problematización de las soluciones en caso de que haya diferencia de opiniones.

Luego se dedicarán 10 minutos para realizar la actividad 13 de la Guía N°1:

11) Responda las siguientes preguntas considerando el polinomio del inciso a) de la actividad 12

a. ¿Cuál es el resto de la división de dicho polinomio por $D(x)=2x+8$?
b. Nombre una raíz del polinomio.
c. ¿Puede aplicar algún otro método de factorización? ¿Por qué?
d. ¿Cómo se puede modificar al polinomio para que tenga una raíz en $x=5$?
e. ¿Cuál es el resto de este polinomio si se divide por $C(x)=x+5$?

Esta actividad está pensada para ser un repaso e integración de los conceptos ya trabajados ya que:

- en el inciso a) se pide hacer Ruffini pero primero se deberá hacer una modificación a los polinomios.

- en el inciso b) se debe encontrar una raíz, pero lo alumnos en la actividad 12, utilizaron factor común para escribir ese polinomio como producto, por lo que hallar una raíz no es tan complejo.

- en el inciso c) deben justificar por qué no podrían hacerle otra factorización al polinomio mediante trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados o factor común por grupos.

- en el inciso d) deberán recordar la ecuación $P(x)=(x-a)Q(x)$cuando a es una raíz e identificar el polinomio con el que están trabajando como $Q(x)$.

- en el inciso e) deberán aplicar teorema del resto para averiguar el valor deseado.

Como se puede ver, esta actividad abarca todos los conceptos trabajados hasta el momento y se darán las ayudas correspondientes a cada duda puntual que pueda haber considerando los desarrollos teóricos que se hicieron en clase.

Una vez terminada la resolución se pasará a la corrección a la que se le dedicarán 10 minutos. Se elegirá un alumno por inciso para que cuente su resolución y se le pedirá a los demás que corroboren si obtuvieron los mismos valores y por qué. Si hay alumnos que tienen dudas las responderemos nosotras a todo el grupo una vez que el alumno que esté exponiendo termine de hacerlo.

De esta manera, exponiendo un repaso e integración de todos los conceptos vistos, se terminará la clase y se les recordará que la clase siguiente veremos un caso mucho más general de factorización que puede ayudarnos a factorizar en casos como en el inciso c) que no podíamos hacer nada más.

Séptima Clase (23/8 - 29/8)

En esta clase se trabajará con el teorema de Gauss. Se planteará un polinomio para el cual ninguna de las herramientas de factorización ya conocidas por los alumnos sea aplicable y se presentará dicho teorema. Se trabajará con el enunciado y sus consecuencias. Luego se buscarán las raíces del polinomio antes mencionado buscando primero posibles raíces a partir de las condiciones que nos proporciona el teorema. Una vez hecho esto, se problematizará sobre las posibles soluciones y un método para factorizar el polinomio a partir del Teorema de Gauss.

El objetivo de esta clase es comprender el teorema de Gauss y sus consecuencias en la factorización de polinomios. En esta clase y la siguiente se problematizarán las soluciones que brinda el teorema y qué diferencias tiene con los otros métodos de factorización ya vistos.

Los recursos de los alumnos para esta clase son la Guía N°1, las carpetas de los alumnos y el PowerPoint sobre Ruffini. Para nosotras, los recursos son los mismos pero utilizaremos el guión conjetural de la clase y los guiones conjeturales de clases anteriores cuando surjan inconvenientes con los métodos que ya se han visto.

Primer momento: Comienzo de la clase (5 minutos)

Entraremos al aula, saludaremos a los alumnos y les comentaremos lo que estudiaremos esta clase. Comenzaremos por decirles que trabajaremos en una primera instancia con aquellos polinomios cuadráticos a los cuales no les podíamos hallar raíces. Veremos un método que sirve por un lado para hallar todas las posibles raíces racionales de un polinomio y por otro lado como parte de un caso de factorización.

Segundo momento: Presentación de Gauss (20 minutos)

Comenzaremos trabajando con el polinomio $P(x)=2x^2+3x-2$ y les preguntaremos si pueden encontrar sus raíces. Les daremos unos instantes para que piensen y se den cuenta que no pueden usar ningún caso de factorización que ya han visto. En caso de que algunos puedan hallar raíces evaluando con números al azar se lo dará como válido y se preguntará cómo fue el proceso de elección de los valores.

Como la construcción del teorema de Gauss con los alumnos sería muy dificultosa, se decidió enunciar dicho teorema y trabajar con los alumnos las hipótesis, tesis y verificar que se cumpla para el polinomio que se planteó al principio de la clase.

> Cuando una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, p divide al término independiente y q al coeficiente principal.

En primera instancia deberemos trabajar con los alumnos la comprensión del enunciado, ya que no es inmediato comprender que no hay raíces racionales que no sean proporcionadas por el teorema. Se comenzará preguntando a los alumnos qué es lo que ellos entienden que les dice el teorema y partiremos de allí.

En primera instancia habrá que hacer una gran aclaración sobre el enunciado. Es importante recordarles todo el tiempo a los alumnos que las divisiones no se establecen de cualquier forma, sino que siempre debe ser el dividendo un divisor del término independiente y el divisor, un divisor del coeficiente principal. Debemos recordarles que asignar los roles invertidos puede generar que no encuentren las raíces del polinomio en cuestión. Luego, comenzaremos a trabajar con el teorema.

Lo primero que vamos a destacar son las hipótesis:

- si $P(x)$ es nuestro polinomio, debe tener coeficientes enteros.
- $\frac{p}{q}$ debe ser una raíz y fracción irreducible, por lo tanto es un número racional.

Luego veremos cuál es la tesis del teorema: la raíz $\frac{p}{q}$ cumple la propiedad que p es un divisor del término independiente de $P(x)$ y q es un divisor del coeficiente principal de $P(x)$.

Ahora, observaremos qué nos está diciendo el teorema: si se tiene una raíz racional del polinomio, esta tiene que ser un cociente entre un divisor del término independiente y un divisor del coeficiente principal. Pero nosotros lo que queremos es averiguar las raíces, no las tenemos todavía. Para esto observaremos qué otra cosa nos está diciendo el teorema.

Les plantearemos a los alumnos el hecho de tener una raíz racional irreducible que no cumpla la propiedad que dice el teorema, por lo que tendríamos $\frac{a}{b}$ donde a no divide al término independiente o b no divide al coeficiente principal del polinomio (alcanza con que uno de ellos no lo cumpla, no es necesario que no se cumplan ambas). Ahora, $P(x)$ es un polinomio que cumple tener coeficientes enteros y tenemos una raíz racional irreducible $\frac{a}{b}$, entonces el teorema dice que a divide al término independiente y que b divide al coeficiente principal; pero nosotros supusimos que esto no era cierto así que llegamos a una contradicción. Aquí es un punto donde los alumnos se pueden confundir y tener dudas pero creemos que con un poco de ayuda y acompañamiento podrán comprender la idea. Llegamos a una contradicción donde lo único que supusimos era que $\frac{a}{b}$ no cumplía una propiedad y era raíz, entonces esto debe ser falso y en consecuencia, si tenemos una fracción que no cumple la propiedad, entonces no es una raíz del polinomio. Luego diremos las consecuencias del teorema:

- no hay raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros que no sean cociente entre divisores del término independiente y el coeficiente principal.
- si uno calcula todas las posibles combinaciones del $\frac{p}{q}$ donde p divide al término independiente y q divide al coeficiente principal, obtendremos todas las posibles raíces racionales de nuestro polinomio.
- el teorema solo dice qué números racionales NO son raíces, no dice cuáles lo son,

solo proporciona candidatos a raíces.

- el teorema no dice nada de raíces irracionales, por lo tanto no podemos decir si hallamos todas las raíces de un polinomio.

Para finalizar este momento, retomaremos el polinomio al cual no se le encontraron raíces al comenzar la clase y se aplicarán las conclusiones que se obtuvieron del teorema de Gauss para encontrar dichas raíces.

Empezaremos tomando los divisores del término independiente: 1, -1, 2 y -2 y luego los del coeficiente principal: 1, -1, 2 y -2 y armaremos las posibles raíces del polinomio. Es importante hacer este paso en conjunto con los alumnos y que puedan notar cómo llevarlo a cabo para no olvidarse de ninguna combinación. Una vez que hayamos obtenido todas las posibles raíces, se les preguntará a los alumnos cómo podemos verificar cuáles son verdaderamente raíces y cuáles no. Creemos que los alumnos no tendrán dificultades en responder esto ya que raíz de un polinomio es un concepto con el que se ha trabajado durante toda la práctica docente.

Finalmente, llegaremos a que las raíces son -2 y ½. En este momento notarán que si factorizamos tendríamos nuestro polinomio escrito como producto de dos polinomios de grado uno y por lo tanto estaría factorizado y no tiene otras raíces.

Para finalizar, trabajaremos en conjunto con los alumnos los siguientes polinomios y hallaremos sus raíces.

- $P(x)=3x^2-4x-4$
- $Q(x)=x^4+2x^3-2x-1$

<u>**Tercer momento: Resolución de actividades**</u> (25 minutos)

Dedicaremos este momento a que los alumnos realicen actividades de ejercitación. Les pediremos que resuelvan primero la Actividad 15 de la Guía Nº1.

15)

a) Calculen todas las posibles raíces racionales de los siguientes polinomios:
   i) $P(x)=x^3+5x-3$
   ii) $P(x)=25x^2-3$
   iii) $L(x)=x^2-8x+16$
   iv) $C(x)=3x^5+x^4-3x-1$
   v) $T(x)=4x^4+8x^3+8x^2+16x-7$

b) ¿Cuáles son realmente raíces?¿Por qué?

Para el inciso a), los alumnos deberán utilizar el teorema de Gauss para hallar todas las posibles raíces. En caso de que los alumnos consideren en algunos casos utilizar algún método de factorización, se les hará notar que este inciso no les pide las raíces del polinomio ni que factoricen el polinomio, sino que pide dar TODAS las posibles raíces racionales del polinomio, respuesta que solo podrán dar utilizando el teorema de Gauss. Pretendemos hacer notar a los alumnos que hay una gran diferencia entre el Teorema de Gauss y los métodos de factorización antes vistos. Esta diferencia radica en que Gauss te brinda todas las posibles raíces racionales, no te factoriza el polinomio ni te garantiza que verdaderamente tengas raíces, mientras que los métodos de factorización te brindan raíces y factorizan el polinomio a la vez, pero son métodos poco generales.

Para resolver el inciso b) deberán identificar cuáles de las posibles raíces calculadas en el inciso a) son realmente raíces. Para esto, creemos que utilizarán la definición de raíz, ya que solo deben evaluar los polinomios, pero en caso que utilicen otra estrategia se considerará válida siempre y cuando la respuesta sea correcta.

Dedicaremos 15 minutos a la resolución de esta actividad y 10 minutos a la corrección. La resolución será individual y nosotras utilizaremos el tiempo para ir por los bancos, verificando que los alumnos trabajen y ayudando cuando sea pertinente. La corrección se llevará a cabo de manera oral, eligiendo alumnos con los criterios que se utilizaron en las clases anteriores, para que enumeren las posibles raíces de cada polinomio y luego comenten cuáles de ellas verdaderamente son raíces. Para cada polinomio daremos espacio al resto de los alumnos para que comenten si concuerdan o hay alguna discrepancia entre los valores obtenidos en el inciso a) y b) y las formas que utilizaron para obtenerlos.

Creemos que los alumnos tendrán dificultades para obtener todas las posibles raíces ya que no deben olvidarse de ninguna combinación entre los divisores del término independiente y del coeficiente principal. También, al momento de convertir esos valores obtenidos en fracciones irreducibles, es muy factible que varios alumnos se equivoquen. Se eligieron polinomios teniendo en cuenta estas dificultades para tratar de reducirlas y se los acompañará y ayudará para evitar problemas de este tipo. En cuanto a comprensión de consigna y a la resolución, creemos que no tendrán mayores dificultades ya que en el momento anterior se trabajó en desglozar el Teorema de Gauss de manera que los alumnos puedan comprenderlo y además, el trabajo con raíces es familiar para ellos.

Cuarto momento: Presentación del método para factorizar utilizando Gauss (15 minutos)

En este momento presentaremos a los alumnos un método para factorizar en el cual se utiliza el Teorema de Gauss. Éste nos dice cuáles son todas las posibles raíces racionales de un polinomio pero para poder factorizar debemos chequear cuáles de estos valores realmente son raíces. Para saber esto construiremos en conjunto con los alumnos una manera de saber cuántas raíces puede tener como máximo un polinomio.

Les presentaremos a los alumnos los siguientes polinomios:

- $x^2+3x+2=(x+1).(x+2)$
- $x^3-2x^2-5x+6=(x-1).(x+2).(x-3)$
- $x^4+x^3-7x^2-x+6=(x-1).(x+3).(x-2).(x+1)$

Les haremos notar en un primer momento, que todos los polinomios están factorizados ya que están escritos como producto de polinomios primos. Al reconocer eso, esperamos que noten que tenemos todas las raíces de cada polinomio y que la cantidad coincide con el grado del polinomio debido a que es un producto.

En un primer momento, los alumnos pueden deducir que a un polinomio de grado n le podemos hallar n raíces reales, pero esto es falso. Para que comprendan, les presentaremos el ejemplo $x^4-3x^3+3x^2+x-6=(x+1).(x-2).(x^2-2x+3)$ Notarán que el polinomio (x^2-2x+3) no puede factorizarse con las herramientas que conocemos. Por lo tanto, tenemos un polinomio de grado 4 al cual le podemos hallar solo dos raíces.

Así podemos concluir con los alumnos que si tenemos un polinomio $P(x)$ de grado n, podemos usar Gauss para hallar sus raíces y si estas son una cantidad n, entonces podemos escribir el polinomio como n productos de polinomios de grado uno ya que conocemos todas sus raíces. Para dejar en claro esta idea procederemos a realizar un ejemplo.

Tomaremos el polinomio $P(x)=3x^2-4x-4$ al cual le hallamos sus raíces en el segundo momento y eran $x=2$ y $x=\frac{-2}{3}$. Gracias al resultado anterior, podemos deducir que esas son todas las raíces del polinomio y por lo tanto lo podemos expresar como $P(x)=(x-2).(x+\frac{2}{3})$ y concluimos que el polinomio está factorizado ya que son polinomios primos.

Por otro lado, y para dejar claro que se nos puede presentar otra situación, tomaremos el otro ejemplo que vimos en el segundo momento: $Q(x)=x^4+2x^3-2x-1$. Aplicando Gauss concluimos que el polinomio tiene dos raíces: $x=1$ y $x=-1$. Lo que sucede aquí es que no podemos escribir a $Q(x)$ factorizado ya que debemos hallar $T(x)$ tal que $Q(x)=(x-1).(x+1).T(x)$. Procederemos entonces a explicarles a los alumnos cómo, mediante Ruffini, podemos obtener $T(x)$.

Les explicaremos que en estos casos, lo que debemos hacer es tomar una de las raíces x_1 que ya hemos encontrado y dividir $Q(x)$ por $(x-x_1)$. Como estamos dividiendo por un binomio que tiene coeficiente principal igual a uno entonces podemos utilizar Ruffini. Así, si tomamos $x=1$, obtendremos que $Q(x)=(x-1).(x^3+3x^2+3x+1)$. Ahora debemos tomar el valor de la otra raíz y dividir (x^3+3x^2+3x+1) por el binomio $(x+1)$ nuevamente mediante Ruffini. Así obtendremos que $Q(x)=(x-1).(x+1).(x^2+2x+1)$. Aquí debemos hacerles notar que $x=-1$ es una raíz del polinomio (x^2+2x+1), por lo tanto, podemos dividirlo por $(x+1)$ y finalmente obtendremos que $Q(x)=(x-1).(x+1).(x+1).(x+1)$. Claramente aquí tenemos las cuatro raíces del polinomio y pudimos escribirlo de manera factorizada. En este caso el motivo de no poder escribir de manera factorizada inmediatamente fue que una de las raíces era múltiple, si las raíces no fueran múltiples podemos utilizar igualmente este método para escribir el polinomio lo más factorizado posible.

Quinto Momento: Resolución de actividades (15 minutos)

A continuación presentamos la actividad 14 de la Guía N°1 que deberán resolver los alumnos en este momento de la clase:

14) Dar las raíces de los siguientes polinomios y decidir si están factorizados. Decir qué casos de factorización se utilizaron.

a. $P(x)=x.(x+4).(x-3)^4.(x^2-9)$
b. $P(x)=x.(x^2-4x+4).x^3+3.(x^2-4x+4).x^3$
c. $P(x)=x^6-x^2$
d. $P(x)=4x2+6x+9$

Esta actividad está planeada para ser integradora y tiene como objetivo que los alumnos trabajen de manera integrada con todas las formas de factorizar un polinomio y hallar las raíces que tienen. Creemos que esta actividad no presentará mayores dificultades en cuanto a comprensión de lo enunciado. En cuanto a la resolución, creemos que será confuso para algunos alumnos escribir las raíces de los polinomios cuando no estén completamente factorizados y pueden no factorizar a la mínima expresión el polinomio. En estos casos, se guiará a los alumnos a que vayan considerando la información que les está brindando el polinomio y que observen, comparando los polinomios con las definiciones que tienen en sus carpetas, para intentar factorizarlos y luego poder deducir cuáles son sus raíces.

Esta actividad está pensada para que los alumnos la resuelvan de manera individual durante los últimos 15 minutos de la clase y no se hará la corrección en este momento sino en la clase siguiente, esto es para permitir que los alumnos puedan ser independientes y críticos a la hora de intentar evaluar la correcta resolución de la actividad, antes de hacer la corrección grupal en la siguiente clase.

Cuando se esté llegando al final de la clase se les comentará que la próxima clase continuaremos trabajando con este tipo de polinomios y trataremos un algoritmo que nos dará una forma de escribir un polinomio en su forma factorizada a partir de todas las herramientas ya estudiadas. Les pediremos que no olviden tener la tablet para la siguiente clase y que terminen de hacer los incisos de esta actividad que no hayan finalizado.

Octava Clase (28/7 - 31/8)

En esta clase se presentará un algoritmo de factorización para los alumnos en el cual se contempla utilizar todas las herramientas aprendidas hasta el momento y se tomará el tiempo para comprenderlo entre los alumnos y desglozarlo paso por paso para que no queden dudas. Luego se trabajará con actividades en las que deban implementar este algoritmo.

El objetivo de esta clase es unificar los métodos de factorización aprendidos y brindar una herramienta para poder decidir si un polinomio está factorizado. Esta será la última clase en la que se verá teoría y por lo tanto se consideró este algoritmo como englobador y como una buena oportunidad para rever aquellas dudas que hayan quedado en los alumnos concernientes a los conceptos teóricos con los que se trabajó.

En esta clase los alumnos utilizarán sus carpetas, la pizarra electrónica para trabajar con la interpretación del algoritmo y el pizarrón. Nosotras también tendremos a nuestra disposición el Guión conjetural de esta clase.

Primer momento: Comienzo de la clase (5 minutos)

Comenzaremos la clase ingresando al aula, saludaremos a los alumnos y les comentaremos en forma general qué realizaremos esta clase. Por un lado, haremos un resumen de la teoría vista, el cual les servirá para la evaluación. Y por otro lado, trabajarán en ejercicios en los que deberán aplicar esa teoría y que integran todos los temas vistos.

Segundo momento: Presentación del Algoritmo de Factorización (35 minutos)

Les pediremos a los alumnos que abran el archivo que tienen en el aula virtual con el título “Algoritmo de Factorización de Polinomios” y nosotras abriremos el archivo en la pizarra electrónica. Preguntaremos a los alumnos si saben lo que es un algoritmo y dependiendo de las respuestas se harán preguntas o se pasará directamente a la lectura del archivo.

En una primera instancia se le pedirá a algún alumno que lea en voz alta la parte introductoria del archivo:

Un algoritmo es un conjunto de instrucciones, que cumplidas en el orden en que son enunciadas, conducen a la solución de un problema al cabo de una cantidad finita de pasos. Cada uno de esos pasos es una operación lógica o matemática. Un problema puede tener un algoritmo propio que lo resuelva. Entonces, después de aplicar sucesivamente ese algoritmo se puede llegar a la solución de ese problema.

Si consideramos que nuestro problema es poder escribir todo polinomio de forma factorizada, deberíamos buscar qué algoritmo nos serviría. Vimos varias formas de factorizar polinomios: podemos utilizar factor común, factor común por grupos, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados y teorema de Gauss con la regla de Ruffini pero, ¿cuál efectuamos? ¿Cuál método nos conviene utilizar? Veamos un algoritmo que nos ayude con nuestro objetivo.

Luego de la lectura se preguntará a los alumnos si hay dudas y qué es lo que ellos entienden. Si hay dudas, se responderán en la medida que sea posible y sino se pedirá paciencia y se les responderá luego. Seguido a esto, se pedirá a otro alumno que lea la primera oración del algoritmo.

Si nuestro polinomio se llama $P(x)$ y está escrito de la forma $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_n x^n$ debemos seguir los siguientes pasos:

Los alumnos ya han trabajado con notaciones matemáticas avanzadas pero aún no conocen la fórmula de sumatoria, por lo tanto nos detendremos aquí para explicárselas. Comenzaremos dándole el nombre de Sumatoria y a partir de eso les preguntaremos a qué creen que hace referencia. Les explicaremos que refiere a la suma de términos. Haremos notar a los alumnos que estamos diciendo que el polinomio $P(x)$ es igual a la suma de términos que son de la forma $a_n x^n$, es decir, $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots$ donde a_k son los coeficientes y x^k son las variables donde k indica el grado del término.

Cuando haya quedado clara esta notación se les hará notar que si nuestro polinomio no cumple lo pedido allí no se podría realizar el primer paso del algoritmo. Se remarcará que es necesario tener un polinomio escrito como sumas de monomios de distinto grado para poder comenzar a trabajar y tomaremos un polinomio $P(x)$ para ir implementando los pasos del algoritmo a medida que vamos leyéndolos e interpretándolos.

Luego, se comenzará la lectura grupal del algoritmo y se trabajará pidiendo a alumnos que pasen al frente a leer un paso del algoritmo y que marquen en la pizarra lo que crean que es más importante. Entre todos los ayudaremos y nosotras haremos preguntas para verificar que se comprendan todos los subpasos y la notación.

1) Debemos verificar si el término independiente es distinto de cero o no.
   a) Si el término independiente del polinomio es cero, entonces hacemos factor común eligiendo como el factor común a x^k, donde k es el menor de los grados de los monomios que conforman a $P(x)$. De esta manera obtenemos $P(x)=x^k.Q(x)$ donde $Q(x)$es un polinomio con el término independiente distinto de cero.
   b) Si el término independiente es distinto de cero, consideramos $P(x)=Q(x)$.

En este paso, se debe verificar si el polinomio cumple una condición, de ser así se debe realizar una operación matemática y de caso contrario no se realiza ninguna acción.

Este paso es sencillo y no creemos que los alumnos tengan mayores dificultades para comprenderlo, aunque tener una parte a y b puede generar confusión en un principio. En caso de que esto suceda, se planteará en otras palabras el paso y se verá si la confusión persiste o si se comprende la idea.

2) Tomo a $Q(x)$ y chequeo si puedo realizar factor común por grupos, diferencia de cuadrados o trinomio cuadrado perfecto.

a. Trinomio cuadrado perfecto: si puedo identificar en $Q(x)$un trinomio cuadrado perfecto, lo reescribo en función de la fórmula que nos brinda trinomio cuadrado perfecto: $Q(x)=Q_1(x).Q_2(x)$.
b. Diferencia de cuadrados: si puedo identificar en $Q(x)$una diferencia de cuadrados entonces lo reescribo en función de la fórmula que nos brinda el método $Q(x)=Q_1(x).Q_2(x)$.
c. Factor común por grupos: si puedo identificar factor común por grupos reescribo $Q(x)$como $Q(x)=Q_1(x).Q_2(x)$.

Este paso sigue la misma lógica que plantea el paso anterior. Debo verificar si el polinomio $Q(x)$ obtenido en el paso anterior cumple alguna de las condiciones de factor común por grupos, diferencia de cuadrados o trinomio cuadrado perfecto. En caso positivo, realizo dicha factorización y en caso negativo el polinomio $Q(x)$ permanece igual.

3) Una vez que hago todos estos pasos, puedo chequear si en los polinomios $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$ obtenidos de factorizar $Q(x)$ pueden ser factorizados. Si es así, vuelvo a hacer el paso 2 para ese polinomio. Y puedo repetirlo mientras sea posible.

Este paso es sencillo en enunciado pero es complejo de ejecutar, pues cada vez que se factoriza utilizando un método surgen nuevos polinomios que hay que verificar si se puede aplicar algún método de factorización. Esta idea será más clara en el ejemplo pero se tratará que los alumnos comprendan que deben realizar el paso 2, luego verificar si en cada uno de los polinomios que se están multiplicando para formar $Q(x)$ se puede ejecutar el paso 2 nuevamente, y así se debe seguir hasta que cuando se verifique esto, ningún polinomio pueda ser factorizado mediante factor común por grupos, diferencia de cuadrados o trinomio cuadrado perfecto.

4) Ahora, tengo $Q(x)=Q_1(x).Q_2(x).Q_3(x).....Q_j(x)=\sum_{s=1}^{j} Q_s(x)$. Si hay alguno de estos $Q_s(x)$ que no sea un polinomio primo, no puedo factorizarlo utilizando los métodos de factorización del paso 2. Para estos polinomios puedo utilizar el método que aprendimos a partir del teorema de Gauss. Los pasos a seguir son:

a. Uso el teorema de Gauss para encontrar las posibles raíces.

b. Verifico cuáles de estos valores son raíces y las llamo x_i.

c. Utilizando la regla de Ruffini escribo $Q_s(x)=(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3)....(x-x_t)Q_s(x)$donde $Q_s(x)$ no tiene más raíces racionales.

d. Tomo a $Q_s(x)$ y verifico si puedo realizar el paso 2_a, 2_b o 2_c y en caso de ser posible realizo la factorización.

Nota: Si tenemos $Q(x)=(x-y)Q_1(x)$ se debe verificar si $Q_1(y)=0$ o $Q_1(x)\neq 0$ antes de continuar factorizando con otra raíz. Si y cumple que $Q_1(y)=0$, se llama raíz múltiple y $Q_1(x)$se puede factorizar en función de y.

En este paso se deben verificar nuevamente los polinomios $Q_i(x)$ que están formando $Q(x)$. Ahora particularmente se verifica cuáles de ellos no son polinomios primos. A estos polinomios debo aplicarles el algoritmo de factorización vista la clase anterior que surgió a partir del teorema de Gauss.

Este paso también involucra al paso 2 ya que una vez que se factoriza en función de una de sus raíces, el nuevo polinomio obtenido puede cumplir las condiciones para factorizar utilizando alguno de los métodos planteados en el paso 2.

5) Ahora tenemos el polinomio escrito como $P(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k).\prod_{l=1}^{m}(a_l x^2+b_l x+c_l)$, pero el polinomio no está factorizado a menos que $a_l=1 \ \forall l=1,\ldots,m$ y los polinomios cuadráticos no tengan raíces. Si reescribimos nuestro polinomio $P(x)$ para que los polinomios cuadráticos que lo conforman sean mónicos obtendríamos $P(x)=\prod_{l=1}^{m}a_l.\prod_{k=1}^{n}(x-x_k).\prod_{l=1}^{m}(x^2+\frac{b_l}{a_l}x+\frac{c_l}{a_l})$ y no podemos seguir factorizando más con las herramientas que tenemos. Si no tenemos ningún polinomio cuadrático entonces podemos decir que el polinomio está factorizado, sino diremos que no podemos asegurar que el polinomio esté factorizado pero que no se puede seguir factorizando con las herramientas conocidas.

El paso 5 verifica si todos los polinomios obtenidos son primos. En caso positivo, se avisa que el polinomio está factorizado, en caso contrario, si la falla está en que hay polinomios que no son mónicos se modifica la situación y si el problema es que no se puede saber si los polinomios son cuadráticos se avisa que el polinomio no está factorizado pero que no se puede seguir factorizando con las herramientas conocidas.

En este paso lo alumnos se encontrarán con la fórmula de productoria la cual aún no conocen. Les diremos su nombre y a partir de eso iremos guiándolos para que lo relacionen con la fórmula de sumatoria y ellos mismos puedan arribar al significado de esta notación.

Tercer Momento: Resolución de Actividades (30 minutos)

En este momento realizaremos los primeros incisos de la actividad 16 de la Guía N°1 para que los alumnos puedan aplicar el algoritmo recién aprendido.

16) Escriba los siguientes polinomios de forma factorizada en caso de ser posible y cuando no pueda justifique el motivo. Ayuda: Utilice el algoritmo de factorización.

a) $P(x)=x^3+2x^2-x$

b) $P(x)=x^7+2x^6-x^5+x^4+3x^3+6x^2-3x+3$

c) $P(x)=-x^4+x^2-4x+8$

En esta actividad consideramos que tal vez los alumnos tengan más dudas sobre la aplicación del algoritmo que sobre los métodos de factorización. Para cada duda que presenten los alumnos, nos basaremos en los pasos del algoritmo para despejarlas y consideraremos las dificultades individuales para plantearles preguntas específicas que aporten a la comprensión de lo que se está trabajando.

En este momento les daremos 20 minutos a los alumnos para resolver las actividades y destinaremos 10 minutos para corregir en el pizarrón el primer inciso.

Novena Clase (30/8 - 5/9)

Primer momento: Comienzo de la clase (5 minutos)

Comenzaremos la clase ingresando al aula, saludando a los alumnos y les comentaremos cómo llevaremos a cabo esta clase. Les recordaremos que la clase siguiente es la evaluación, por lo tanto esta clase se les dará el espacio para que sigan resolviendo actividades y puedan despejar todas las dudas que tengan tanto prácticas como teóricas.

Segundo momento: Resolución de actividades (70 minutos)

Iniciaremos este momento pidiéndole a los alumnos que resuelvan los incisos que habían quedado pendientes de la Actividad 14 de la Guía Nº1.

14) Dar las raíces de los siguientes polinomios y decidir si están factorizados. Decir qué casos de factorización se utilizaron.

e) *$P(x)=25x^2-3$

f) *$P(x)=x^2-8x+16$

g) *$P(x)=x.(x-3)+x.(2x+8)$

h) *$P(x)=(x^2-9)^3.(x+3)^5.(x^2-6x+9)$

i) *$P(x)=(x^4-16)^3.(x+3)^5.(x^2-6x+9)$

j) *$P(x)=(x^2-9)^3.(x+3)^5.(x^2-6x+9)+3.(x+3)^5.(x^2-6x+9)$

Debido a que algunos incisos ya fueron resueltos en la séptima clase, creemos que los alumnos no tendrán mayores dudas para la resolución. En caso de que las haya, nos basaremos siempre en la teoría dada para responderlas. Destinaremos 25 minutos a su resolución.

La corrección, a la cual destinaremos 10 minutos, se llevará a cabo comenzando por los primeros incisos que dejamos pendientes para corregir esta clase. La corrección se llevará a cabo de manera oral eligiendo a algunos, con los mismos criterios de elección de las clases anteriores, para que nos comenten y justifiquen su resolución.

Luego les daremos 20 minutos a los alumnos para que realicen los incisos que quedaron pendientes de la Actividad 16 de la Guía Nº1.

16) Escriba los siguientes polinomios de forma factorizada en caso de ser posible y cuando no pueda justifique el motivo. Ayuda: Utilice el algoritmo de factorización.

d) *$P(x)=x^5+x^4-11x^3+x^2-12x$

e) *$P(x)=x^4-x^3-15x^2+9x+54$

f) *$P(x)=(4x^2+2x+8).(x^2-7)$

g) *$P(x)=(4x^2+3x+8).(x^4-9).(x+\sqrt{3})$

Esta actividad engloba todos los conceptos vistos acerca de factorización y como herramienta deben utilizar el algoritmo visto la clase anterior.

Para la corrección (15 minutos) elegiremos 4 alumnos, los cuales pasarán al pizarrón a realizar la resolución de cada ítem explicando y justificando paso a paso lo que realizaron.

Tercer momento: Cierre de la clase (5 minutos)

Para finalizar la clase, recordaremos a los alumnos que la clase siguiente es la evaluación. Les recomendaremos que terminen todas las actividades que les quedaron pendientes de la guía, que resuelvan las actividades con asterisco y que revisen cómo resolvimos los problemas de la guía N°2.

Para una mejor comprensión por parte del lector acerca de por qué se decidió trabajar a lo largo de todos los guiones desde la construcción de los conceptos en conjunto con los alumnos, analizaremos el segundo momento de la segunda clase: presentación del Teorema del Resto. La idea de construcción del conocimiento se ve claramente reflejada en este momento debido a que se pensó en conformar una demostración del teorema para presentarlo y así, que los alumnos arriben al resultado que este propone.

Como en un principio teníamos la impresión de que los alumnos podían trabajar fluidamente con la expresión brindada por el Algoritmo de la División de polinomios, pensamos problematizar la estructura de los polinomios $C(x)$ (polinomio cociente) y $R(x)$

(polinomio resto) a partir de definir la estructura de $Q(x)$ (polinomio divisor). Era a partir de esta problematización que se quería llegar a la presentación formal del Teorema del Resto. Como se puede ver en el guión conjetural, la propuesta para ese momento de la clase retoma esta intención y plantea las preguntas y conjeturas pertinentes para lograr el objetivo.

En esta instancia, es importante para nosotras mencionar por qué decidimos trabajar con preguntas a lo largo de todas nuestras clases y qué rol le otorgamos. Fue pensado recuperando aportes de George Pòlya (1945) y Schoenfeld (1992). Pòlya en su libro "How to solve it: a new aspect of mathematical method" (Como resolver problemas, 1945) plantea una serie de sugerencias e indicaciones para el docente con el fin de ubicar al alumno en la situación de resolver problemas y considera el rol docente como el colaborador para que se logre el objetivo. Este autor plantea que es necesaria la repetición, prueba y error y sistematización del trabajo para que el alumno adquiera las habilidades para comprender y resolver problemas y que es el docente quien puede contribuir con el trabajo de los alumnos o sus ideas para que los mismos avancen. La forma predilecta del autor para reformular y ampliar las ideas del alumno es mediante preguntas e indicaciones que lo lleven a reflexionar sobre lo trabajado y lo que se debe trabajar en situaciones futuras. Complementando los aportes de Pòlya (1945), Schoenfeld (1992) plantea que es necesario que el trabajo matemático en el aula emule la comunidad de práctica matemática. Los alumnos deberían ser gradualmente llevados a trabajar de la misma manera que se hace en la comunidad científica, erradicando el mito del trabajo aislado y meramente conceptual que realizan los matemáticos. Considerando las posibilidades de los cursos en los que debíamos desarrollar nuestras prácticas es que decidimos plantear el trabajo con preguntas que (según nosotras) permitiría una aproximación al trabajo más participativo y social que estos dos autores plantean en sus trabajos.

2.2.2.2 Guías de actividades y material preparado

"Toda la planificación presupone una definición de una estrategia de enseñanza, donde sobresalen siempre dos elementos, las actividades del profesor (que va a hacer) y las actividades de los alumnos (lo que se espera que el alumno haga), y se establece un horizonte temporal para su respectiva concretización"
(Ponte, 2005, p.12)

Durante la etapa de planificación de nuestras prácticas, como mencionamos anteriormente, decidimos confeccionar 2 guías de actividades. Además consideramos oportuno utilizar PowerPoints (PP) mediante los cuales aprovecharíamos la pantalla digital para desarrollar diferentes conceptos, dado que las animaciones y la prolijidad que brinda un recurso de este tipo favorece a una presentación más clara y a una comprensión menos obturada por parte de los alumnos.

En el Anexo II se presentan ambas guías de actividades completas y el PP preparado para nuestras clases (todo el material está presente en los distintos guiones conjeturales de la sección 2.2.2.1), mientras que en esta sección se desarrolla el fundamento para las decisiones tomadas con respecto a las guías, tomando algunos ejemplos para hacer evidente cómo concretamos estas ideas.

Decidimos confeccionar dos guías debido al tipo de actividades que deseábamos presentar en los cursos. Por un lado, la Guía de Actividades Nº1, comprende ejercicios que tenían como objetivo servir de práctica para que los alumnos afiancen los contenidos trabajados y profundicen las propiedades e interrelaciones que existen entre los conceptos estudiados en clase. Además, contiene todas las definiciones y teoremas que se trabajarían a lo largo de las clases[10]. Por otro lado, la Guía de Actividades Nº2 contempla situaciones problemáticas que tenían como objetivo ubicar a los alumnos en un escenario de resolución de problemas y otorgar sentido a los conceptos matemáticos a partir de una contextualización. Estas decisiones están basadas, como mencionamos anteriormente, en los aportes que Ole Skovsmose (2000) y João Pedro da Ponte (2005) hacen a la clasificación de actividades.

Ole Skovsmose (2000) plantea que hay 6 tipos diferentes de ambientes de aprendizajes determinados por el tipo de referencia que se tomen (situaciones de la vida real, semi-realidad y matemática pura) y por las formas de organización de las actividades de los estudiantes (paradigma del ejercicio y escenarios de investigación). El autor plantea que *moverse dentro de los diversos ambientes de aprendizaje puede ayudar a dar un nuevo significado a las actividades de los estudiantes* (Skovsmose, 2000, p.18) mientras que João Pedro da Ponte (2005) suma a la clasificación anterior 3 aspectos vinculados a las actividades para los alumnos: el nivel de desafío que representan para los alumnos (desafío elevado o desafío reducido), la duración que puede demandar (duración corta, media o larga) y el tipo de resolución que habilita (cerrada o abierta). Más aún, Ponte plantea: *lo que los alumnos aprenden resulta de dos factores principales: las actividades que realizan y la reflexión que efectúan sobre ella* (Ponte, 2005, p.1). Es por esto que las dos guías estaban pensadas para ser un pasaje entre distintos ambientes de aprendizajes y aportar a una enseñanza más exploratoria de los casos de factorización.

Las actividades de la guía N°1 a pesar de ser ejercicios según la clasificación de Ponte por ser de resolución cerrada y desafío reducido (se intentó que sean desafiantes para los alumnos), fueron pensadas de forma que vinculen el concepto a trabajar con los contenidos previamente trabajados y salgan de actividades típicas sobre factorización de polinomios. Un ejemplo de esto es la actividad N°9 que se presenta en el Cuadro 6.

Decidir en cuáles de los siguientes polinomios se extrajo factor común, factor común por grupos o ninguna de las opciones anteriores.

a) $x.(x+8)-x=x.(x+7)$

b) $3.(x+5)+x.(2x+10)=(3+2x).(x+5)$

c) $3.(x+5)+x.(2x+5)-x^2=(3+x).(x+5)$

d) $3.(x+5).x.(2x+10)=6.(x^3+10x^2+25x)$

Cuadro 6: Actividad N°9 de la guía N°1

Esta actividad consiste en analizar la validez de la igualdad presentada e identificar si se corresponde con la utilización de factor común o factor común por grupos. En esta

10Esta decisión se tomó en base a la sugerencia de la profesora supervisora de MyPE que con este recaudo se evitaría que haya problemas provenientes de errores en la toma de nota de los alumnos.

actividad esperábamos que los alumnos pensaran diferentes formas de verificar la veracidad de la igualdad favoreciendo la exploración.

> *Una estrategia de enseñanza-aprendizaje exploratoria valorizará más los momentos de reflexión y discusión con toda la clase*, *teniendo como base el trabajo práctico desarrollado previamente, como momentos por excelencia para la sistematización de conceptos, la formalización y el establecimiento de conexiones matemáticas* (Ponte, 2005, p.16).

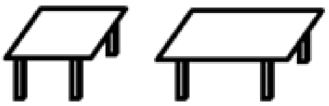
A pesar que cada uno de los ítems de la actividad Nº9 tienen una única solución, el análisis para decidir si se utilizó factor común o factor común por grupos puede ser variado y por lo tanto esperábamos de esta manera generar debate en el aula. Uno de los posibles argumentos que los alumnos podían utilizar era: si en el miembro derecho o izquierdo de la igualdad se tenía un producto de polinomios donde uno de ellos era un monomio, entonces se había utilizado la herramienta factor común. Este tipo de argumentos utilizando las definiciones vistas, sus consecuencias y las herramientas de factorización que de ellas se desprenden, formaron parte de las clases y se esperaba que los alumnos fueran capaces de incorporarlas a la hora de trabajar y justificar su trabajo. Sabemos que no alcanza con plantear algunas actividades de este tipo para llegar a la estrategia de enseñanza-aprendizaje exploratoria que Ponte plantea, pero creemos que es un pequeño paso en esa dirección en el contexto de la enseñanza de “técnicas” de factorización.

Las actividades de la guía N°2 estaban pensadas en un ambiente de semi-realidad en el sentido de Skovsmose (2000), donde en una fábrica, se desean hacer ciertos muebles (ver Cuadro 7). A pesar de que las medidas e información que se plantean son datos recabados de la realidad, no podemos clasificar a nuestras actividades como situaciones de la vida real ya que parte de lo planteado está idealizado con el fin de hacerlo accesible a los alumnos y de delimitar la duración de la actividad para los momentos de práctica en las clases.

A partir de estas actividades (que llamamos problemas según la clasificación de Ponte (2005)) donde los alumnos debían plantear diferentes ecuaciones, se harían surgir distintos conceptos (como la definición de raíz y factor común) o se utilizarían para que los alumnos hagan análisis cualitativos utilizando distintos casos de factorización. De esta manera pensábamos generar un cambio de dinámica en el trabajo matemático en nuestras clases. La idea de utilizar como disparador de definiciones algunos de los problemas planteados está basada en las palabras de Ponte (2005):

> *Es muchas veces más eficaz, en términos de aprendizaje, que ellos* (los alumnos) *descubran un método propio para resolver una cuestión que esperar a que aprendan el método del profesor y sean capaces de reconocer, ante una situación dada, cómo aplicarlo* (Ponte, p.9).

Mueble Nº3: Banquetas.



En la fábrica se venden dos tipos de banquetas, unas con asientos cuadrados y otras con asientos rectangulares. Como las ventas de estos productos no son muy altas, Juan quiere quitar uno de los modelos para ahorrarle dinero a la fábrica. Para decidir qué banqueta dejar, debe tener en cuenta que para cortar las piezas de las banquetas se utilizan placas de $120\,cm$ de ancho y $200\,cm$ de largo y se corta sólo un modelo de pieza por placa. El encargado de la máquina les comunicó que para obtener la medida deseada deben agregarle a cada lado $5\,cm$, los cuales se perderán luego de emprolijar y moldear cada pieza. Para medidas entre $30\,cm$ y $45\,cm$, la madera sobrante de cada placa está dada por las siguientes ecuaciones: $A(x)=24000\,cm^2-12(x^2 c\,m-25\,cm^2)$ y $B(x)=24000\,cm^2-8(x^2+10\,x\,cm+25\,cm^2)$ donde la ecuación ya contempla los $5\,cm$ que se deben agregar pero no recuerda qué ecuación corresponde a cada pieza.

Actividad 3:

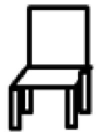
a) ¿Cuál de las ecuaciones representa a las piezas cuadradas y cuál a las piezas rectangulares?
b) ¿Con qué forma de pieza (cuadrada o rectangular) se desperdicia menos madera si se considera $x=40\,cm$? En este caso, ¿qué modelo le conviene dejar a Juan en producción?

Cuadro 7: Actividad N°3 de la guía N°2

Si uno observa con atención los polinomios $A(x)$ y $B(x)$ presentes en el Cuadro 7, se puede identificar que son el resultado de restar dos polinomios: uno constante ($2400\,m^2$) y otro de grado dos. Con la información disponible del enunciado previo a la actividad y el conocimiento de la fórmula de Trinomio Cuadrado Perfecto y Diferencia de Cuadrados, los alumnos podían identificar a qué tipo de pieza correspondía cada ecuación. Luego, lo que se quería era retomar el concepto valor numérico de un polinomio y que a partir de los resultados obtenidos ($A(40\,cm)$ y $B(40\,cm)$) debatan y analicen los resultados en función de la pregunta pudiendo llegar a una única respuesta correcta, pero si tenían en cuenta la expresión de ambos polinomios podrían abrir la discusión a cuestiones de gastos, ganancia y nivel de producción.

Queremos mencionar además, cómo se llevó a cabo la resolución del problema N°2 de la guía (ver Cuadro 8) para evidenciar el trabajo al que nos referimos cuando hablamos de construcción de los contenidos.

Mueble Nº2: Silla. Para armar el asiento y el respaldo necesita cortar dos placas de madera (cuadrados y/o rectángulos) que cumplan las siguientes condiciones:



-El asiento tiene que ser un cuadrado.
-El respaldo tiene de ancho el mismo ancho que el asiento y de alto lo mismo que el ancho menos 13 cm.

-La pieza del asiento tiene $\frac{3}{2}$ del área que tiene la pieza del respaldo.

Actividad 2: Considerando el formato y las condiciones que tiene el Mueble Nº1 que quiere armar Marcos, realizar las siguientes actividades.

a) Con la información dada del Mueble, completen la siguiente tabla:

	Ancho	**Alto**	**Área**
Asiento			
Respaldo			

b) ¿Podrán construir este banco? ¿Qué ecuaciones deberían plantearse para encontrar las medidas del asiento y el respaldo? Justifiquen su respuesta.

Cuadro 8: Actividad N°2 de la guía N°2

Se pediría a los alumnos que realizaran el planteo de las ecuaciones y no se esperaría mayores problemas en esta etapa de la resolución debido a que ya habrían hecho un trabajo similar en una actividad dada anteriormente. Así, los alumnos podrían arribar correctamente a la ecuación $0=\frac{1}{2}x^2-\frac{39}{2}x$. En esta instancia, los alumnos no sabrían resolver ecuaciones cuadráticas, por lo que se tomaría este momento para realizar un debate con todo el curso e introducir la herramienta factor común a partir de la utilización de la misma. Primero se llevaría a cabo su implementación y luego se le daría la formalidad con la definición. La practicante en rol activo haría preguntas y luego de que los alumnos debatan e intenten encontrar una solución, escribiría en el pizarrón la ecuación $0=\frac{1}{2}x(x-39)$. Así los alumnos, aplicando propiedad distributiva, podrían verificar que $\frac{1}{2}x^2-\frac{39}{2}x=\frac{1}{2}x(x-39)$.Con esta otra expresión equivalente a la anterior, los alumnos notarían que pueden hallar los valores de x y luego evaluar el sentido de ese valor contrastando con la realidad. El objetivo de trabajar de esta manera es no depender solamente de la perspectiva teórica, sino también poder construir las herramientas para factorizar polinomios desde su utilidad.

Nuevamente, sabemos que lo propuesto con estas actividades no representa o captura en su totalidad un escenario de investigación pero consideramos que sí pudimos satisfacer una de las características que estos poseen: *un escenario de investigación invita a los estudiantes a formular preguntas y buscar explicaciones* (Skovsmose, 2000, p.8).

En conclusión con respecto a las guías preparadas, podemos decir que las actividades planteadas en ambas tienen el propósito de ir más allá de un mero ejercicio, dado que desde un principio nos propusimos trabajar con un enfoque investigativo y porque además, la planificación de la materia incluía “resolución de ejercicios y situaciones problemáticas” como una capacidad a desarrollar en los alumnos.

El PP que se preparó para el cuarto momento de la segunda clase, tenía como objetivo presentar, a los alumnos, el método llamado Regla de Ruffini de una manera más dinámica, visual y constructiva. Dado que uno debe identificar coeficientes, ubicarlos en una tabla, realizar operaciones en un cierto orden y luego recuperar los polinomios originales y escribir dos polinomios nuevos, nos pareció muy positivo aprovechar la visualización que aportaría a los alumnos el uso de animaciones para marcar estos pasos. De esta manera utilizaríamos el pizarrón verde como un soporte y aprovecharíamos los recursos digitales que la institución posee.

Es importante mencionar que fue una decisión tomada desde un principio que durante los momentos de ejercitación se utilice la pizarra digital como proyector. Es decir, la pantalla mostraría los conceptos que se deberían utilizar para la resolución de las actividades y/o los enunciados presentes en las guías (la Imagen 6 refleja estos momentos). De esta manera siempre se aprovecharía al máximo la prolijidad que brinda el recurso junto con la cantidad de material que se puede disponer en simultáneo (material que se vería limitado si sólo se dispusiera del pizarrón verde).

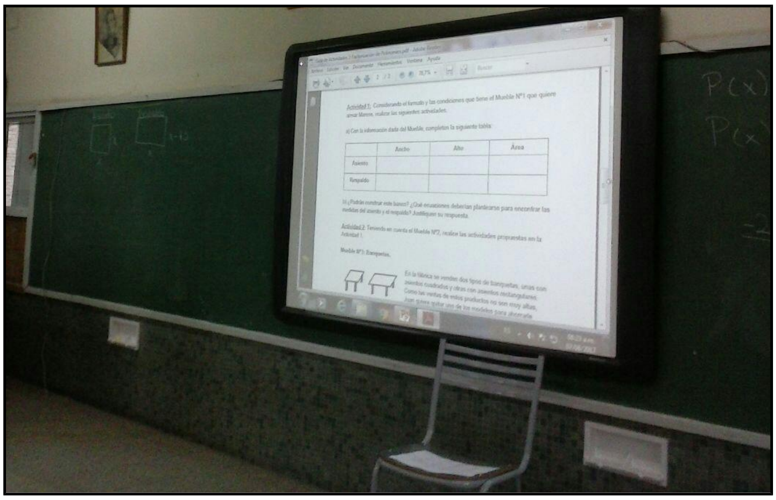


Imagen 6: Trabajo simultáneo con el pizarrón y la pizarra digital

2.3 Implementación de la planificación y las modificaciones realizadas

La acción de diseñar tiene como fin enriquecer, analizar y mejorar la tarea de enseñanza; debe servir para repensar la propia acción en términos prácticos. (Gvirtz y Palamidessi, 1998, p.183)

A partir de la segunda clase que se llevó a cabo en la práctica en cada curso, surgió la necesidad de modificar y reestructurar toda la planificación realizada debido a que varias de nuestras conjeturas basadas en lo propuesto en la planificación y programa de la materia no representaban con total fidelidad la situación en el aula. Es por esto que se decidió realizar un cambio en el orden en que se desarrollaban los contenidos, y algunos de ellos no se trabajaron desde la idea de construcción del conocimiento pensada en un principio. Además, la nueva reestructuración también tuvo en cuenta los efectos de los cortes provocados en 4º año B debido a que las primeras clases fueron interrumpidas por el feriado correspondiente al 17 de agosto y el día del educador católico. Además de esto es importante aclarar que en este mismo curso, los días jueves se iniciaban las clases entre quince y veinte minutos más tarde de lo previsto, ya que ese día se realizaba una formación de todos los cursos en el patio del colegio. La misma era un espacio donde ocurría el izamiento de bandera, se realizaba una oración, se comunicaban datos e información relevante para estudiantes o docentes.

A continuación presentamos el cronograma efectivo de clases por curso, con los temas dictados y cómo fueron llevados a cabo (Cuadros 9 y 10).

Clase N°	4° A	Tema	Desarrollo
1	31/7	Raíz de un polinomio	Construcción de la definición de **raíz** de un polinomio a partir de la resolución de una situación problemática.
2	2/8	Caso particular del Algoritmo de la División. Teorema del resto	Análisis de un caso particular del algoritmo de la división que determina el valor de una raíz. Enunciado del **Teorema del Resto** a partir de una idea de la demostración.
3	7/8	Regla de Ruffini. Factor común.	**Regla de Ruffini** como herramienta para conocer el resto de una división entre dos polinomios para determinar el valor de una raíz. Presentación de la primera herramienta: **Factor Común**, a partir de la resolución de una situación problemática.
4	9/8	Factor común. Factor común por grupos. <u>Evaluación Parcial Nº1</u>.	Presentación de la segunda herramienta: **Factor Común por Grupos**, a partir de la primera herramienta. Primera evaluación parcial.
5	14/8	Diferencia de cuadrados y Trinomio cuadrado perfecto	Presentación de la tercera y cuarta herramientas: **Diferencia de Cuadrados** y **Trinomio Cuadrado Perfecto**, a partir del análisis de gráficos.
6	16/8	Trinomio Cuadrado Perfecto. Ejercitación	Repaso de la última herramienta vista. Resolución de ejercicios y corrección de los mismos.
7	23/8	Entrega de Evaluación Parcial Nº1 y repaso. <u>Evaluación Parcial Nº2</u>	Repaso de todas las herramientas vistas para factorizar un polinomio y realización de actividades. Segunda Evaluación Parcial.
8	28/8	Polinomio Factorizado. Entrega de Evaluación	Definición de **Polinomio Factorizado**.

		Parcial Nº2.	
9	30/8	Práctica/Ejercitación	Resolución paso a paso de la factorización de un polinomio considerando todas las justificaciones pertinentes.
10	4/9	Práctica/Ejercitación	Resolución y corrección de actividades.
11	6/9	Evaluación Sumativa	Se destinó todo el módulo a la evaluación.
12	13/9	Devolución	La profesora del curso estuvo a cargo de esta clase, por eso, se tomaron los primeros 15 minutos para la devolución de las evaluaciones y se les pidió a los alumnos que escribieran sobre su experiencia vivida en las prácticas.

Cuadro 9: Cronograma efectivo de clases de 4° año A

Clase N°	4° B	Tema	Desarrollo
1	3/7	Raíz de un polinomio	Construcción de la definición de **raíz** de un polinomio a partir de la resolución de una situación problemática.
2	8/8	Teorema del resto	A partir de casos particulares se verificó lo enunciado en el **Teorema del Resto**.
3	15/8	Polinomio mónico, primo y factorizado.	Repaso sobre definición de raíz y teorema del resto con soporte gráfico. Presentación de las definiciones de **polinomio mónico, primo y factorizado.**
4	17/8	Factor común.Evaluación Parcial N°1	Se presentó la primera herramienta para factorizar polinomios: **Factor Común.** Primera evaluación parcial.
5	22/8	Factor común por grupos y diferencia de cuadrados.	Presentación de la segunda herramienta de factorización: **Factor común por grupos**. Caso concatenado de factorización utilizando factor común y factor común por grupos. Presentación de la **Diferencia de Cuadrados** a partir de análisis de gráficos.
6	24/8	Trinomio cuadrado perfecto	Presentación del **Trinomio Cuadrado Perfecto** a partir del análisis de gráficos y explicación de la generalización de la concatenación de métodos de factorización.

7	29/8	Repaso. Evaluación Parcial N°2	Repaso sobre las herramientas factor común, factor común por grupos y diferencia de cuadrados. Segunda evaluación parcial.
8	31/8	Práctica/Ejercitación	Repaso general a partir de la corrección de actividades integradoras. Ejercitación particular sobre polinomios factorizados.
9	5/9	Práctica/Ejercitación	Repaso sobre trinomio cuadrado perfecto y ejercitación. Repaso general a partir de resolución y corrección de actividades integradoras.
10	7/9	Evaluación Sumativa	Se destinó todo el módulo a la evaluación.
11	12/9	Devolución	La profesora del curso estuvo a cargo de esta clase mientras la practicante tomaba la evaluación a los alumnos ausentes el día 7/9. En los últimos 15 minutos se hizo la devolución de las evaluaciones y se les pidió a los alumnos que escribieran sobre su experiencia vivida en las prácticas.

Cuadro 10: Cronograma efectivo de clases de 4° año B

Como se puede observar, se realizaron modificaciones en ambos cursos relacionadas con los contenidos trabajados en cada clase. Debido a las interrupciones producidas en 4º año B, no se pudo trabajar el método de la Regla de Ruffini, pero se trabajó con una gran anticipación respecto a 4º año A la definición de Polinomio Factorizado. Además, como ya se dijo, no fue trabajado el Teorema de Gauss ni el Algoritmo de Factorización de Polinomios, por lo que fueron suprimidas las actividades propuestas en las clases 7 y 8 reemplazándolas por otras más pertinentes para esa instancia. En todos los casos los cambios se realizaron con acuerdo de la docente del curso.

En la planificación previa, se pensaba dar todos los contenidos desde una perspectiva muy teórica, pero a la hora de llevar esta idea al aula, no fue satisfactoria debido a que los alumnos no podían llegar al nivel de abstracción que nosotras estimábamos que tenían posibilidades de hacer (nuestro supuesto se basaba en las observaciones realizadas y en el análisis de la planificación). Es por esto que se decidió reducir la formalidad pero manteniendo un enfoque teórico, ya que decidimos aprovechar esta instancia para trabajar con la correcta utilización de definiciones y justificaciones matemáticas formales. A pesar de que desde un principio quisimos trabajar con esta idea, no era el objetivo principal para nuestras prácticas. Luego, pasó a serlo ya que debimos abandonar otros de los objetivos propuestos debido a la diferencia entre el escenario esperado o imaginado y el real.

Las matemáticas se perciben como un tema que en sí necesita ser reflexionado, puesto que las matemáticas son una parte central de nuestra cultura *basada en la tecnología y puesto que ellas ejercen muchas funciones* (Skovsmose, 2000, p.4).

Nosotras nos planteamos comenzar las clases iniciando el trabajo en el curso recuperando la idea de reflexión anterior a partir del uso de justificaciones. Tratando así, que los alumnos puedan comprender con mayor profundidad los conceptos con los que estaban trabajando matemáticamente.

Por lo mencionado anteriormente, decidimos poner énfasis en la implementación de justificaciones de todo lo realizado en las actividades que se les proponían a los alumnos. Esperábamos que los estudiantes utilizaran las definiciones abordadas para arribar a estas justificaciones. Para mencionar algunos ejemplos, se trabajó en la justificación de por qué un número es raíz de un polinomio, por qué puede utilizarse o no la Regla de Ruffini para dividir dos polinomios, por qué se puede extraer un monomio como factor común en un polinomio, etc. En la sección 2.4 se pueden encontrar algunas justificaciones de los alumnos en las evaluaciones tomadas.

2.3.1 Guiones conjeturales

Al momento de la implementación de nuestros guiones conjeturales, percibimos una diferencia del escenario imaginado con el real. Es por eso, que como se dijo anteriormente, debimos realizar modificaciones pertinentes para que nuestras clases sean adecuadas a nuestro escenario imaginado y poder garantizar un buen ambiente de aprendizaje para nuestros alumnos.

Antes de comenzar a mostrar las modificaciones, queremos presentar los registros que se hicieron en el pizarrón cuando se trabajó con la definición de raíz en 4° año B, para que el lector pueda evidenciar las diferencias y similitudes con nuestro guión conjetural.

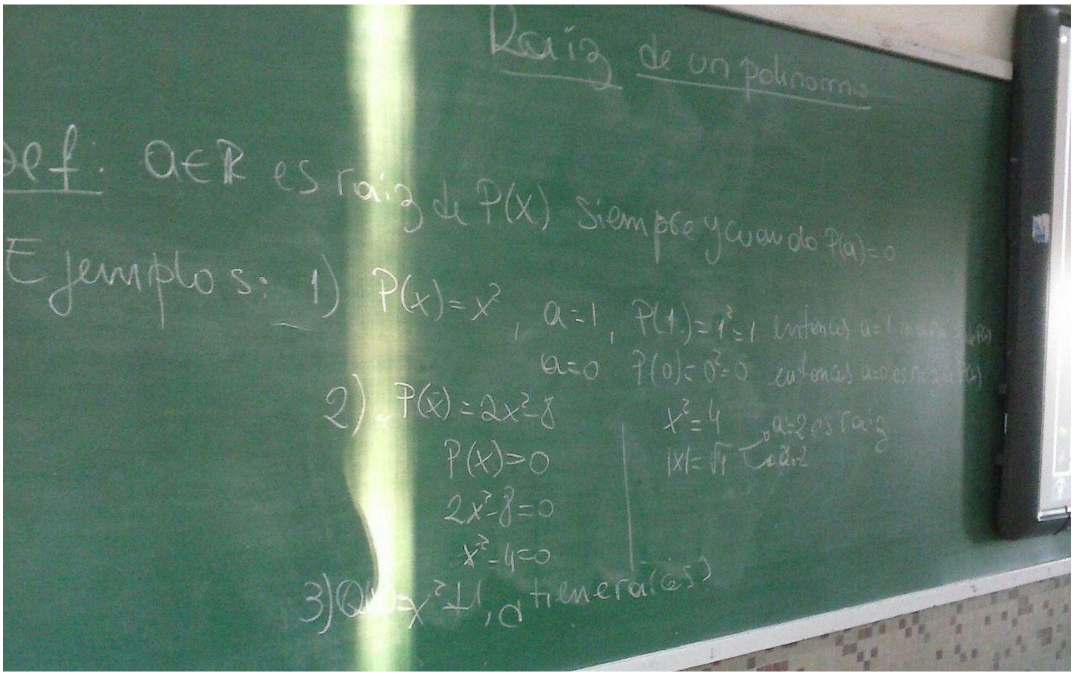


Imagen 7: Registros en el pizarrón de la presentación de raíz de un polinomio

En la Imagen 7 se puede evidenciar la definición de raíz de un polinomio e inmediatamente ejemplos y contraejemplos. Si se observa el ítem 1) se ve que se verifica si $a=1$ y $a=0$ son raíces del polinomio $P(x)=x^2$ escribiendo una respuesta que contempla decir si son o no raíces de ese polinomio en particular. Luego en el ítem 2) se plantea la ecuación que se requiere verificar y al resolverla poder decidir cuales son los valores en $\Re$ que pueden ser llamados raíz de este polinomio. Como se puede ver, el ítem 3) plantea el polinomio $P(x)=x^2+1$ y deja la pregunta ¿tiene raíces?. La clase siguiente se retomó esta pregunta y se trabajó con la presentación de algunos polinomios que no tienen raíces reales.

Comenzando a trabajar con las modificaciones efectuadas, lo que nos llevó a tomar esta decisión de realizar modificaciones pertinentes fue el momento de llevar a cabo la presentación del Teorema del Resto (presente en el segundo guión conjetural y trabajado en la misma sección). Para que el lector tenga una mejor idea de cómo fue esta implementación de lo planificado en los guiones conjeturales, comentaremos lo ocurrido cuando se implementó este momento en 4º año A y sus implicancias en la modificación de los guiones para el resto de las clases.

Como ya hemos mencionado, en la planificación inicial se pensó en la utilización del Algoritmo de la División de polinomios como base para construir los conocimientos vinculados con factorización de polinomios en conjunto con los alumnos. Se había repasado este concepto la clase anterior junto con los estudiantes y uno de los motivos de esta decisión fue para disponibilizarlo en esta segunda clase. Se comenzó diciendo a los alumnos que el Teorema del Resto nos iba a permitir conocer el resto de la división de un polinomio $P(x)$ por uno $Q(x)$de la forma $x-b$. Es por esto, que en el pizarrón se escribió la ecuación $P(x)=C(x).(x-b)+R(x)$ como base para comenzar a construir el resultado que nos ofrece este teorema. Al querer saber el resto de la división de estos polinomios, se incentivó a que los alumnos se percataran de que $C(b)(b-b)=0$ haciéndoles preguntas como las que se encuentran en el guión conjetural. Así, se pudo llegar a la igualdad $P(b)=R(b)$. El primer problema que surgió en la implementación que no se consideró durante la planificación, fue que los alumnos no consideraban que un polinomio pueda tener grado cero y por lo tanto no se podía vincular que $P(b)=R(b)$ nos decía que en realidad $R(x)=P(b)$ (resultado que se pensaba obtener a partir de las propiedades de los polinomios de grado cero). Fuera de esto, también se esperaba que los alumnos pudieran encontrarle un sentido útil al resultado que ofrece este teorema pero en lugar de lograr esto, a los alumnos les generó muchas dudas e incertidumbres respecto a cómo debían resolver algún ejercicio vinculado con el Teorema del Resto.

Estas dos situaciones fueron los principales motivadores para hacer un cambio radical en nuestra planificación y replantear la forma de trabajar en clases. En este momento queremos evidenciar este cambio mostrando cómo fue la presentación efectiva de los temas Trinomio Cuadrado Perfecto y Diferencia de Cuadrados en nuestras clases.

Decidimos utilizar este ejemplo debido al tipo de recurso utilizado. Desde un principio, a causa de la incertidumbre de los alumnos en cuanto al objetivo de la factorización de polinomios, se les dijo que esta herramienta les sería útil para la realización de gráficos de funciones polinómicas ya que necesitan conocer las raíces del polinomio y si está escrito en forma factorizada estas son “más fáciles” de obtener. Lo que ocurrió, es que ese contenido (gráfico de funciones polinómicas) debía ser estudiado por los alumnos luego de terminadas nuestras prácticas, entonces aún no le podían asignar valor ni utilidad al objeto de estudio salvo el cumplir con lo previsto en el programa. Para aportar a este otorgamiento de sentido es que decidimos introducir las herramientas Diferencia de Cuadrados y Trinomio Cuadrado Perfecto mediante gráficos para que fueran incorporando el sentido de los mismos y que puedan ir tendiendo redes que interconectaran los diferentes temas de estudio.

Para lograr esto, se decidió armar una presentación en *Power Point* que comparara dos gráficos de polinomios de grado 2, realizados con el software *GeoGebra* como se muestra a continuación en la Imagen 8. Cabe señalar que la presentación era animada de modo tal que, primero se visibilizaron los gráficos y luego sus correspondientes expresiones analíticas.

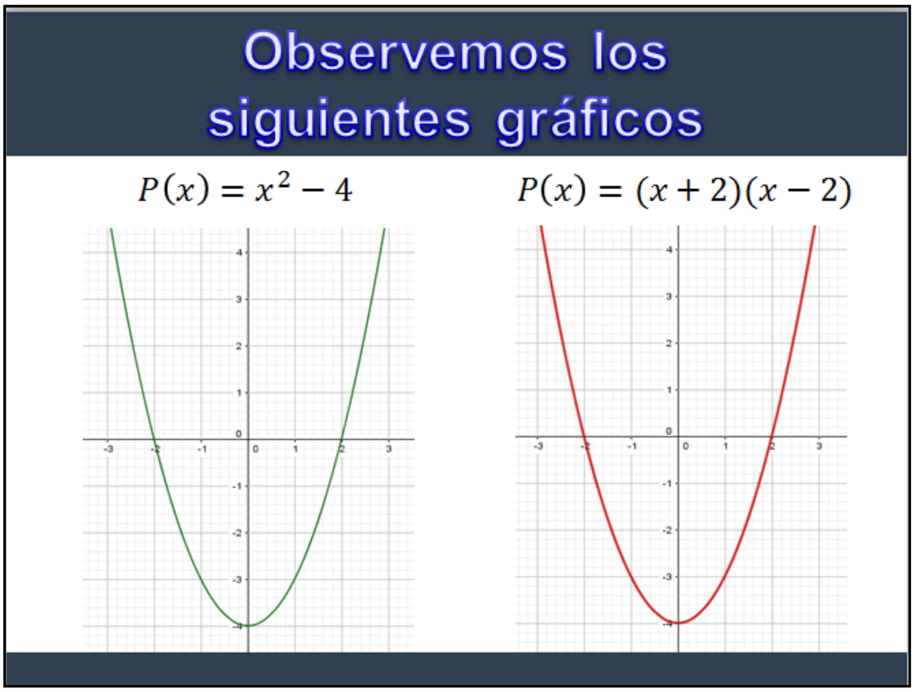


Imagen 8: Diapositiva 1 del PP de Diferencia de Cuadrados

Se les dijo a los alumnos que cada gráfico fue realizado introduciendo distintas expresiones (las que se encuentran arriba de cada gráfico) y la idea era que buscando similitudes, arriben a que los gráficos eran exactamente iguales y por lo tanto también las correspondientes expresiones algebraicas debían ser equivalentes[11]. Así, los alumnos mencionaron que ambos tenían las mismas raíces, la misma ordenada al origen y consideraron con ayuda de la practicante a cargo, algunos pares ordenados de puntos y notaron que coincidían. Finalmente, para verificar la igualdad entre ambas expresiones, se trabajó algebraicamente con la expresión $(x-2)(x+2)$ mediante operaciones y se llegó a la otra expresión (x^2-4).

11Los alumnos mostraban confusión al momento de representar equivalencias en lenguaje coloquial y matemático formal. Este también fue un factor tenido en cuenta para las modificaciones que se hicieron para la implementación.

Este problema de comunicación compete, por tanto, al alumno que debe implicarse en el proceso de aprendizaje del lenguaje matemático y al profesor, que debe esforzarse, en primer lugar, en descubrir qué quieren decir los alumnos cuando dicen lo que dicen. (Radillo, 2005, p. 2)

A causa de las confusiones que generó en los alumnos el nivel de formalidad de las definiciones tanto de Factor Común como de Factor Común por Grupos, se decidió realizar una modificación en la definición con la que se trabajaría esta herramienta y la siguiente que sería Trinomio Cuadrado Perfecto. A continuación, en el Cuadro 11, se comparan las dos definiciones de Diferencia de Cuadrados.

Definición previa	Definición dada
Cuando $P(x)=x^{2n}-a^{2n}$ se lo llama diferencia de cuadrados y se lo puede reescribir como $P(x)=(x^n-a^n).(x^n+a^n)$. Observación: si tenemos a^n en lugar de a^{2n} y $a^n>0$ entonces se puede escribir $x^{2n}-a^n=(x^n-\sqrt{a^n}).(x^n+\sqrt{a^n})$	Cuando un polinomio cumple que es un binomio en los cuales sus términos son monomios y cuadrados perfectos, y están relacionados por una resta, el polinomio se llama Diferencia de Cuadrados. Así, si a y b son monomios, la expresión a^2-b^2 puede reescribirse como $(a+b)(a-b)$.

Cuadro 11: Definiciones de Diferencia de cuadrados

Otro ejemplo de las modificaciones que se realizaron para la puesta en práctica de nuestra planificación es el uso que se hizo del problema N°2 de la guía N°2 (se habló brevemente sobre esta actividad en la sección 2.2.2.2). Mientras que en 4° año A la implementación de la actividad se llevó a cabo como estaba pensada, en 4° año B se dejó como tarea a los alumnos la clase previa a que se desarrollara el tema factor común para poder comenzar la clase con un debate sobre las posibles formas de encontrar una solución a la ecuación planteada. Esta decisión fue tomada en base al tiempo disponible en 4° año B (que era significativamente menor los días jueves comparable con el tiempo en 4º año A). Al llegar a la clase en la que se desarrollaría factor común y querer comenzar el debate, ningún alumno había trabajado con el problema y nuevamente por cuestiones de tiempo se tuvo que suprimir el debate y trabajar directamente con la presentación formal de la herramienta.

2.3.2 Guías de actividades y material preparado

“Es preciso que las tareas, en su conjunto, proporcionen un recurso de aprendizaje coherente, que permita a los estudiantes la construcción de los conceptos fundamentales en juego, la comprensión de los procedimientos matemáticos, el dominio de las notaciones y formas de representación relevantes, como también las conexiones dentro y fuera de la matemática” (Ponte, 2005, p.18).

Como se mencionó en la sección anterior, durante la implementación de las prácticas se hicieron muchas modificaciones en la secuenciación y en los modos de presentación de los contenidos que nos correspondían. *Un modelo no es verdadero o falso, apenas será más o menos eficaz en relación con algún objetivo específico* (Villarreal, 2013, p.101). Estas decisiones afectaron también a los recursos que se utilizarían y las actividades que se llevarían a cabo.

En primera instancia se decidió armar otros PP's que agilizaran los repasos y la presentación de los casos de factorización mediante ejemplos y su posterior institucionalización. Sumado a esto, se confeccionó una guía complementaria con ejercicios a pedido de los alumnos, con el fin de que les sirviera para practicar los casos particulares y concatenados[12]. La guía contiene polinomios para factorizar utilizando las distintas herramientas vistas en clase y también posee preguntas y consignas para repasar los demás conceptos trabajados en clase y que serían evaluados (definición de raíz, Teorema del Resto y en el caso de 4° año A Regla de Ruffini). Por último, se redactó un documento que reunía las definiciones vistas en clase y las condiciones que cada una contemplaba para que los alumnos puedan utilizarlas en las justificaciones que se les pedían o pedirían en instancias de evaluación. Todos estos materiales que se utilizaron están presentes en el Anexo IV de este informe y se fue subiendo al aula virtual de este curso.

Queremos darle una especial atención a los PP's utilizados en las clases porque fueron un recurso determinante en nuestra práctica. Desde un principio valoramos la claridad y agilidad que proporcionan a las exposiciones pero en nuestro caso, además, los PP's complementados con el uso del pizarrón verde generaron una muy buena dinámica para responder dudas y ejemplificar lo presentado. En un principio se preparó el PP para la Regla de Ruffini (cuarto momento del segundo guión conjetural, página 37) y al implementarlo notamos que los chicos utilizaban fuertemente la posibilidad de visualización y que este soporte no sólo les resultaba atractivo desde el punto de vista de la apariencia, sino que ir respondiendo, trabajando y ver que sus propuestas eran lo que ya estaba planteado los animaba a participar más en la clase. Por esto durante las clases se decidió elaborar más recursos de este tipo.

Por ejemplo, en 4º año A los alumnos se encontraban con muchas incertidumbres acerca del sentido de la utilización de los conceptos que estaban aprendiendo. Por eso en la tercera clase fue pertinente utilizar una presentación de PP que abarcara los conceptos estudiados hasta el momento durante nuestras prácticas, incorporando los previos que habían estudiado con su profesora en esta unidad (operaciones entre dos polinomios y valor numérico de un polinomio) y cómo se relacionaban para arribar a la factorización de polinomios. Esto es, siempre se fue buscando hacer evidentes las conexiones entre los contenidos y procedimientos que formaban la trayectoria del trabajo matemático en el aula. Para explicarles esto, en la Imagen 9 se presenta una de las diapositivas:

12Con la palabra concatenados nos referimos a los casos en los que se pueden aplicar dos o más herramientas para factorizar a un polinomio dado.

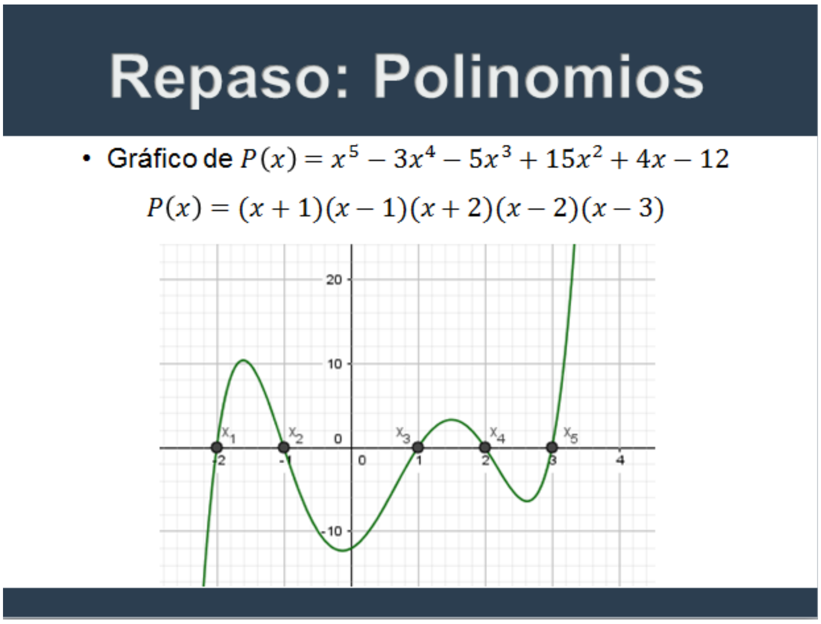


Imagen 9: Diapositiva del PP de repaso

Se les planteó a los alumnos que piensen qué datos necesitaríamos si quisiéramos graficar el polinomio $P(x)$. Les indicamos que para poder realizarlo, uno de los datos que necesitamos saber son los puntos de corte del gráfico con el eje x que, como ya habíamos discutido, representan las raíces del polinomio. Al ser el polinomio $P(x)$ de grado 5, no podemos encontrar “a simple vista” sus raíces, pero si estuviera factorizado se harían evidentes.

Debido a lo satisfactorio que fue la implementación de un PP de repaso en este curso, se consideró realizar lo mismo con 4º año B pero con las adecuaciones pertinentes. También supusimos que crear un PP para dictar las herramientas Factor Común y Factor Común por Grupos sería satisfactorio (también incluía las definiciones de polinomio primo, mónico y factorizado junto con ejemplos y contraejemplos para cada definición). El recurso fue pensado de manera que sea evidente la extracción del factor común gracias a las animaciones y distintos colores que se utilizaron. Al ver lo positivo que esto resulto se armó otro PP para Trinomio Cuadrado Perfecto y Diferencia de Cuadrados utilizando, como ya se mostró, gráficos.

Finalmente, como se decidió afianzar la utilización de justificaciones a partir de las definiciones, creemos importante destacar el PP que fue presentado en una clase de ejercitación previa a la evaluación final. El mismo contenía un ejemplo completo de la factorización de un polinomio, justificando la implementación de cada herramienta utilizada. Para una mejor comprensión de lo realizado por parte del lector, presentamos en la Imagen 10 la primera diapositiva de este PP junto con la justificación de por qué pudo aplicarse una herramienta.

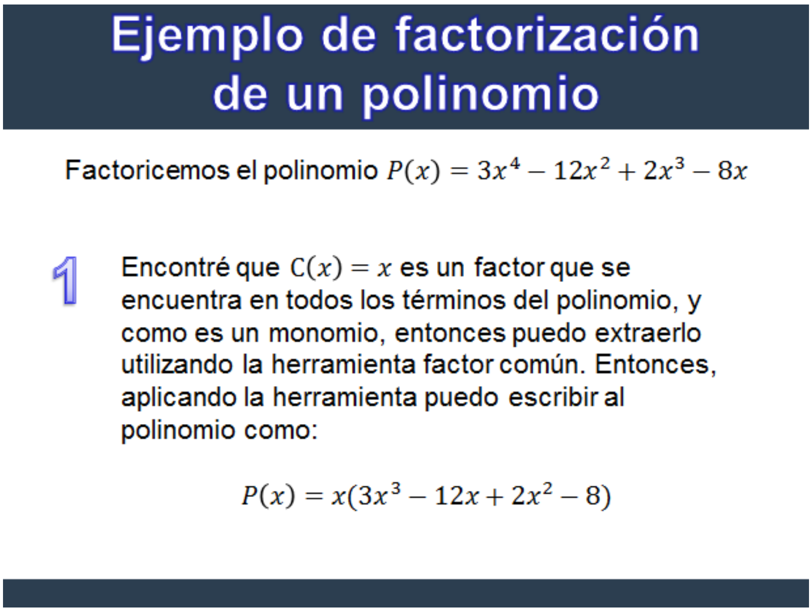


Imagen 10: Diapositiva 1 del PP de repaso previo a la evaluación

Este recurso, como todos los utilizados durante nuestras clases, se encontraba disponible en el aula virtual de la materia, por lo que fue muy positivo para los alumnos tanto en instancia del trabajo en aula (la mayoría accedía al aula virtual con sus teléfonos celulares o tablets) como medio que pudieron utilizar para estudiar y analizar haciendo evidente qué esperábamos de ellos con respecto a las justificaciones.

2.4 Evaluaciones

"Estrechamente ligada a la temática de la gestión curricular está la temática de las evaluaciones, encarada como proceso regulador de la enseñanza-aprendizaje. Es a través de las evaluaciones que el profesor recoge la información que le permite detectar problemas e insuficiencias en los aprendizajes de los alumnos y también en su trabajo, verificando así las necesidades de introducir modificaciones en su planificación y en su modo de trabajo" (Ponte, 2005, p.20)

En la planificación inicial se consideró tomar una evaluación el último día de nuestras prácticas. La misma integraría todos los contenidos estudiados en ese período y llevaría una nota. Luego, al vivenciar las dificultades que estaban presentando los alumnos, se decidió incluir dos trabajos prácticos (evaluaciones parciales) de los cuales se obtendría otra nota. *Evaluar el aprendizaje implica, siempre, evaluar la enseñanza* (Documento evaluación secundaria, Ministerio de educación, 2011, p.3). Por eso, la incorporación a la planificación de estas evaluaciones parciales tuvo como objetivo poder valorar los conceptos que se trabajaban en las clases tempranamente (no contemplando todos los contenidos vistos), con el fin de poder corregir errores en la implementación de la planificación, ya sea por falta de práctica de los alumnos, por una exposición poco clara de los conceptos y de nuestros criterios de trabajo o por la insuficiencia de las actividades y de los debates planteados en clase. También se utilizaron estas evaluaciones para hacer evidentes la adecuada aplicación de herramientas y definiciones.

2.4.1 Evaluaciones parciales:

"En el proceso constante de evaluar, es posible hacer "cortes" para revisar lo hecho y calificar" (Documento evaluación secundaria, Ministerio de educación, 2011, p.14). En este sentido, las evaluaciones parciales tuvieron el rol de una *evaluación formativa* (a pesar que luego tendrían una calificación) y fue en base a los resultados obtenidos en cada una de ellas la manera en que se reorganizaban las clases siguientes para retomar errores y fortalezas y trabajar con los alumnos para corregir aquello que fuese necesario.

Las evaluaciones parciales fueron llevadas a cabo en la cuarta y la séptima clase y se les asignaron duraciones distintas. El puntaje de cada una de ellas se determinó sobre un valor de cien puntos, de los cuales se consideró un puntaje especial a cada actividad del trabajo teniendo en cuenta la prolijidad, resolución y justificación.

La primera evaluación parcial (EVP1) se llevó a cabo en la cuarta clase y se destinaron 20 minutos para su resolución. Decidimos utilizar los 20 minutos finales de la clase y no los iniciales para que los alumnos no se dispersen y estén concentrados durante todo el módulo y además, eventualmente, salvar dudas. Los contenidos que fueron evaluados son Raíz de un polinomio y Teorema del Resto. A continuación, presentamos la actividad que conformaba esta evaluación parcial[13] en cada curso en los Cuadros 12 y 13 y la correspondiente distribución de puntajes en el Cuadro 14.

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar su decisión utilizando las ideas trabajadas en clase:

a) $P(x)=4x-7x^2$ tiene una raíz en $x=0$.
b) $P(x)=4x-7x^2$ tiene una raíz en $x=2$.
c) El resto de dividir $P(x)=4x-7x^2$ por $Q(x)=x+2$ es $R(x)=-20$.

Cuadro 12: Actividad de la EVP1 de 4° año A

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar su decisión utilizando las ideas trabajadas en clase:

a) $P(x)=4x-7x^2$ tiene una raíz en $x=\frac{4}{7}$.
b) $P(x)=4x-7x^2$ tiene una raíz en $x=1$.
c) Es resto de dividir $P(x)=4x-7x^2$ por $Q(x)=x+2$ es $R(x)=20$.

Cuadro 13: Actividad de la EVP1 de 4° año B

13Las evaluaciones parciales y la evaluación final contenían una breve introducción sobre los criterios que se utilizarían para corregir como también los contenidos a evaluar. Estos se pueden ver en el Anexo III donde se encuentran las evaluaciones completas.

Procedimiento	10 puntos
Identificar el procedimiento correcto	13 puntos
Justificación	7 puntos
Prolijidad	3 puntos

Cuadro 14: Distribución de puntajes de cada inciso de la EVP1 para ambos cursos

Como se puede observar, había 3 incisos y a cada uno le correspondía un valor de 33 puntos. Es por esto que el alumno que respondía correctamente a toda la evaluación sumaba 99 puntos y en ese caso se le asignaba un 100. Es importante destacar el puntaje que le fue asignado a la justificación de cada inciso, algo que se anticipó que iba a ser evaluado y que se trabajó constantemente con los alumnos. Esto es, el proceso de justificación no sólo fue objeto de aprendizaje sino también objeto de enseñanza.

Destacamos en la Imagen 11 la correcta justificación de un alumno de 4º año B en el inciso a)

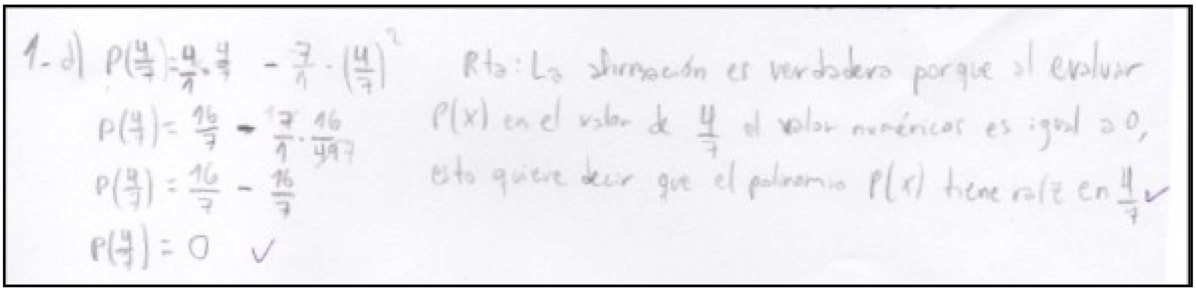


Imagen 11: Resolución de un alumno de 4° año B de la actividad 1-a) de la EVP1

En esta respuesta del alumno se puede ver una clara apropiación del concepto raíz de un polinomio, ya que es capaz de verificar la condición que le otorga a un número real el status de raíz de un polinomio. Además, el alumno responde sobre la veracidad de la afirmación con una justificación utilizando el concepto de valor numérico y la condición particular para que el número (en este caso $\frac{4}{7}$) sea raíz. Esta justificación hecha por el alumnos era la esperada en esta instancia.

> *El desafío radica en considerar los resultados siempre como punto de partida para la mejora y el fortalecimiento; en entender la evaluación desde una perspectiva holística, que permita dar cuenta de los procesos de apropiación de saberes de diferentes ámbitos (intelectual, social, afectivo) y de los logros alcanzados hasta un cierto momento, para ponerlos en relación con las condiciones en que se produjo el proceso mismo de enseñanza, sus fortalezas y debilidades, la necesidad de ratificar o rectificar ciertos rumbos, y sus efectos* (Documento curricular, Ministerio de educación, 2011, p.18 tomo 3).

En general, podemos decir que esta primera evaluación parcial fue muy satisfactoria debido a que por un lado, los alumnos pudieron notar sus fortalezas y errores y consultar acerca de ambos y por otro lado, nos sirvió para detectar dificultades y errores de los alumnos (que surgieron de la forma de enseñanza) para mejorar nuestra forma de expresar ideas y evitarles confusiones.

La segunda evaluación parcial (EVP2) se llevó a cabo en los últimos treinta minutos de la séptima clase y los contenidos que se evaluaron fueron distintos en cada curso debido a las interrupciones ocurridas en 4° año B. A continuación presentamos las actividades evaluadas en los Cuadros 15 y 16 y la asignación de puntaje de cada uno teniendo en cuenta los criterios de evaluación presentados en el Cuadro 17.

1) Utilicen las herramientas factor común y factor común por grupos para escribir a $P(x)=x^6-3x^4+x^3-3x$ como producto de polinomios.
2) Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifiquen su respuesta utilizando las ideas trabajadas en clase:
    a) $P(x)=9x^2-49$ se puede factorizar utilizando diferencia de cuadrados.
    b) $P(x)=x^3+2x+1$ se puede factorizar utilizando factor común por grupos.

Cuadro 15: Actividades de la EVP2 de 4º año A

1) Utilicen las herramientas factor común y factor común por grupos para escribir al polinomio $P(x)=x^5-2x^4+x^3-2x^2$ de forma factorizada.
2) Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifiquen su respuesta utilizando las ideas trabajadas en clase:
    a) $P(x)=3x^5-9x^2$ se puede factorizar utilizando factor común.
    b) $P(x)=x^3(x^2-4)(x+3)$ es un polinomio que está factorizado.
    c) $P(x)=4x^2-81$ se puede factorizar utilizando diferencia de cuadrados.

Cuadro 16: Actividades de la EVP2 de 4º año B

4° año A		**4° año B**	
1) Identificar el procedimiento correcto	15 puntos	1) Identificar el procedimiento correcto	15 puntos
1) Justificación	15 puntos	1) Procedimiento	10 puntos
1) Procedimiento	10 puntos	1) Justificación	5 puntos
2_a) Identificar el procedimiento correcto	10 puntos	2_a) Procedimiento	5 puntos
2_a) Justificación	10 puntos	2_a) Identificar el procedimiento correcto	10 puntos
2_b) Identificar el procedimiento correcto	20 puntos	2_a) Justificación	10 puntos
2_b) Justificación	20 puntos	2_b) Justificación	15 puntos
		2_c) Procedimiento	5 puntos

		2_c) Identificar el procedimiento correcto	5 puntos
		2_c) Justificación	15 puntos

Cuadro 17: Distribución de puntajes de la EVP2 para ambos cursos

Lo esperado por nosotras, respecto a la justificación en el inciso 2_b) se puede evidenciar, en la Imagen 12, en la justificación elaborada por un alumno de 4º año B al resolver la EVP2:

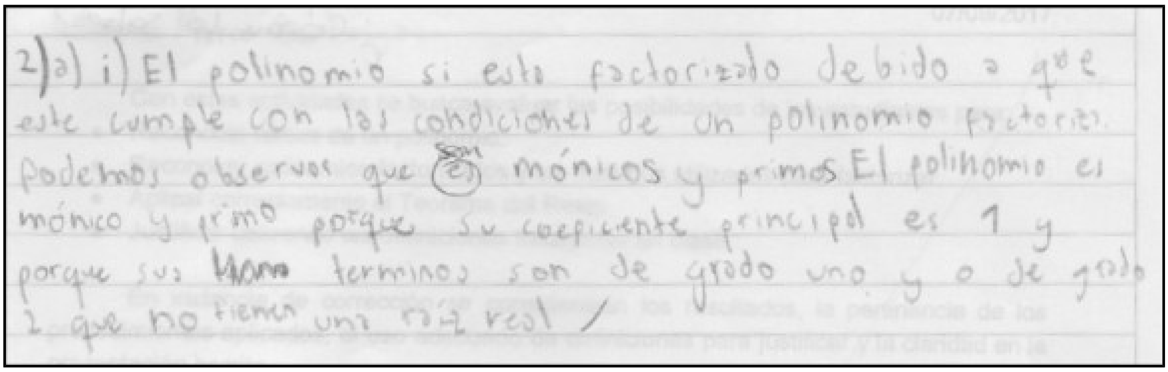

2)a) i) El polinomio si esta factorizado debido a que este cumple con las condiciones de un polinomio factoriz. Podemos observar que son mónicos y primos El polinomio es mónico y primo porque su coeficiente principal es 1 y porque sus terminos son de grado uno y o de grado 2 que no tienen una raiz real /

Imagen 12: Resolución de un alumno de 4° año B de la actividad 2_b) de la EVP2

Esta justificación hecha por un alumno (que refleja la realizada por varios alumnos) se consideró correcta ya que expresa cuáles son las condiciones que un polinomio debe cumplir para que se pueda decir que está factorizado. El alumno fue capaz de reconocer que el polinomio cumple estas condiciones a pesar de no escribirlo en la evaluación (como es el caso en el que el polinomio de grado dos no tiene raíces reales). Se consideró correcta en esta instancia su justificación y se trabajó para que en la instancia de la evaluación sumativa los alumnos sean capaces de justificar también estos pequeños pasos.

En los siguientes gráficos (Imágenes 13 y 14) se presentan los puntajes obtenidos por cada alumno, de cada sección, en ambas evaluaciones parciales antes de obtener la nota final (EVPF). La nota que se obtuvo no necesariamente corresponde con el promedio de ambas evaluaciones pues se tuvo en cuenta el trabajo en clase de cada alumno para efectuar un redondeo del puntaje. Para asegurar el anonimato de los alumnos que fueron parte de las prácticas se decidió asignarle a cada uno de ellos un número (en el caso de los alumnos de 4° año A los números del 1 al 33 y en el caso de 4° año B los números del 1 al 23) y consignar los puntajes que cada uno obtuvo a ese número. Por ejemplo: a Pedro Asis[14] se le asigna el 4 y en ese caso los datos que posee la tabla en la columna del número 4 corresponde a los puntajes obtenidos por Pedro Asis.

14Este es un nombre ficticio.

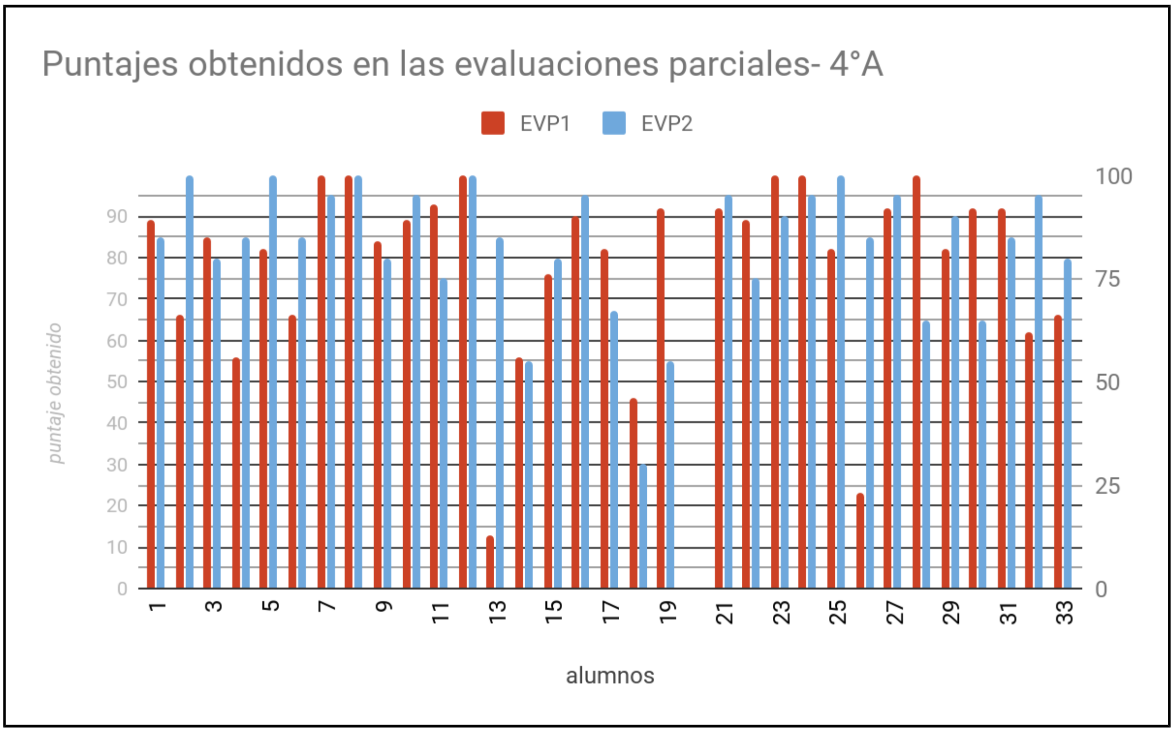


Imagen 13: Gráfico de los puntajes obtenidos por los alumnos de 4° año A en ambas evaluaciones parciales

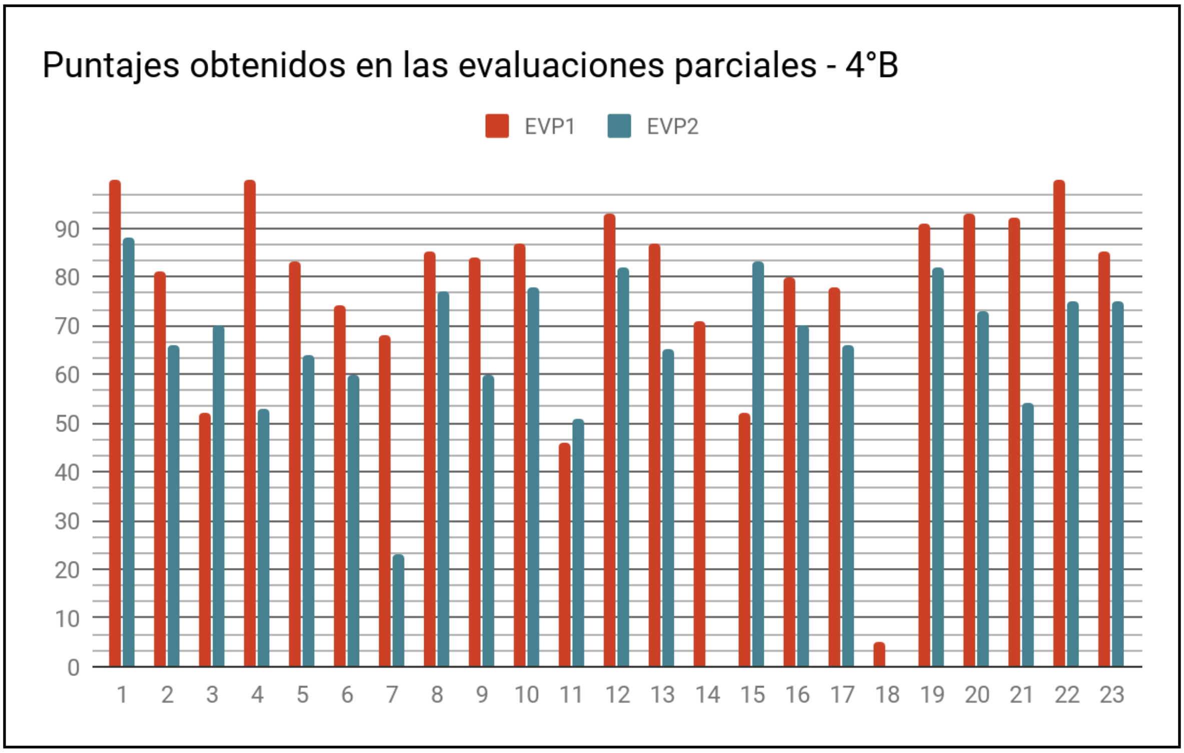


Imagen 14: Gráfico de los puntajes obtenidos por los alumnos de 4° año B en ambas evaluaciones parciales

Como se puede observar en los gráficos, en general los alumnos mantuvieron o mejoraron el nivel de desempeño cuando la exigencia fue aumentando y fueron muy pocos los casos en los que no se evidenció un progreso a pesar de los esfuerzos realizados. Esto revela el compromiso que asumieron los alumnos junto con nosotras en todo el proceso de enseñanza y aprendizaje.

> *"Lo que se propone es un delicado equilibrio entre entrega, exigencia y espera, lo que supone un compromiso ético de los involucrados en el proceso de evaluación"* (Documento curricular, Ministerio de educación, 2011, p.19).

Nosotras pudimos vivenciar los efectos positivos en el trabajo de los alumnos de aceptar el desafío de encontrar este equilibrio en el proceso de evaluación.

Los siguientes gráficos (Imágenes 15 y 16) representan la distribución de notas finales provenientes de las evaluaciones parciales para cada curso. Sobre el gráfico se encuentra la cantidad de alumnos que obtuvieron la nota que se muestra en el exterior junto con el porcentaje de alumnos que la obtuvieron.

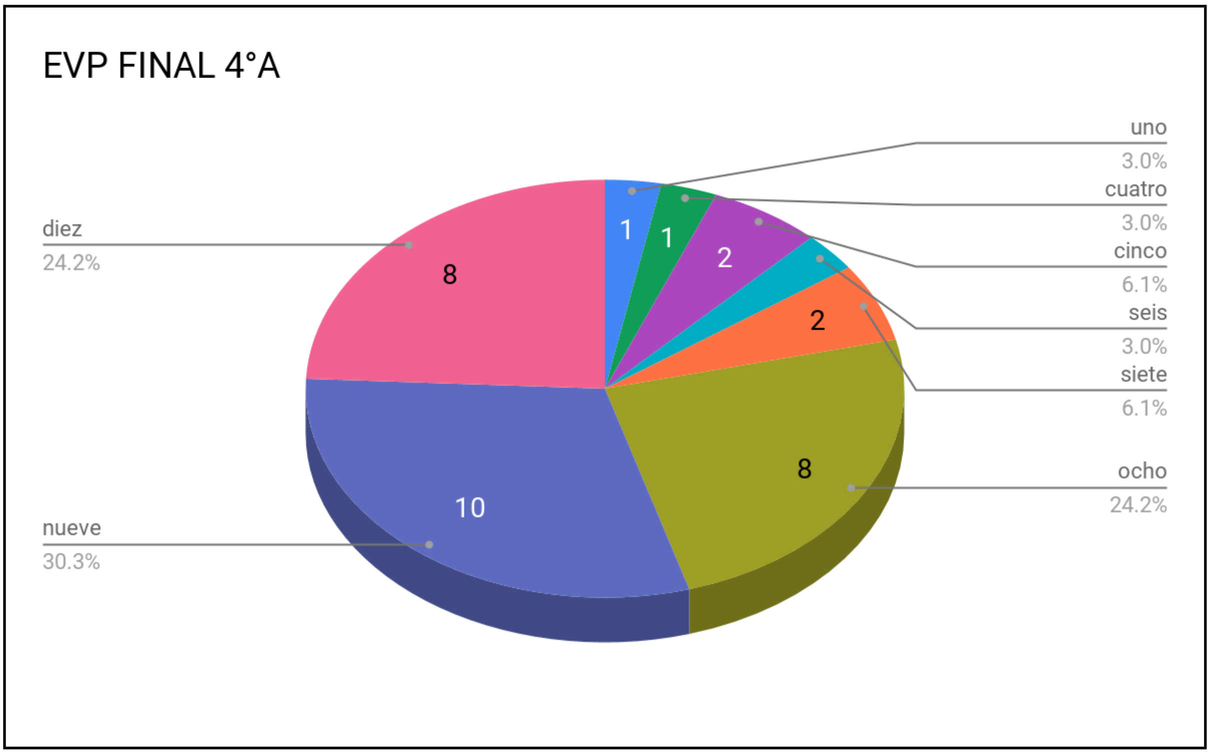


Imagen 15: Gráfico con la distribución de puntajes de la EVPF para 4° año A

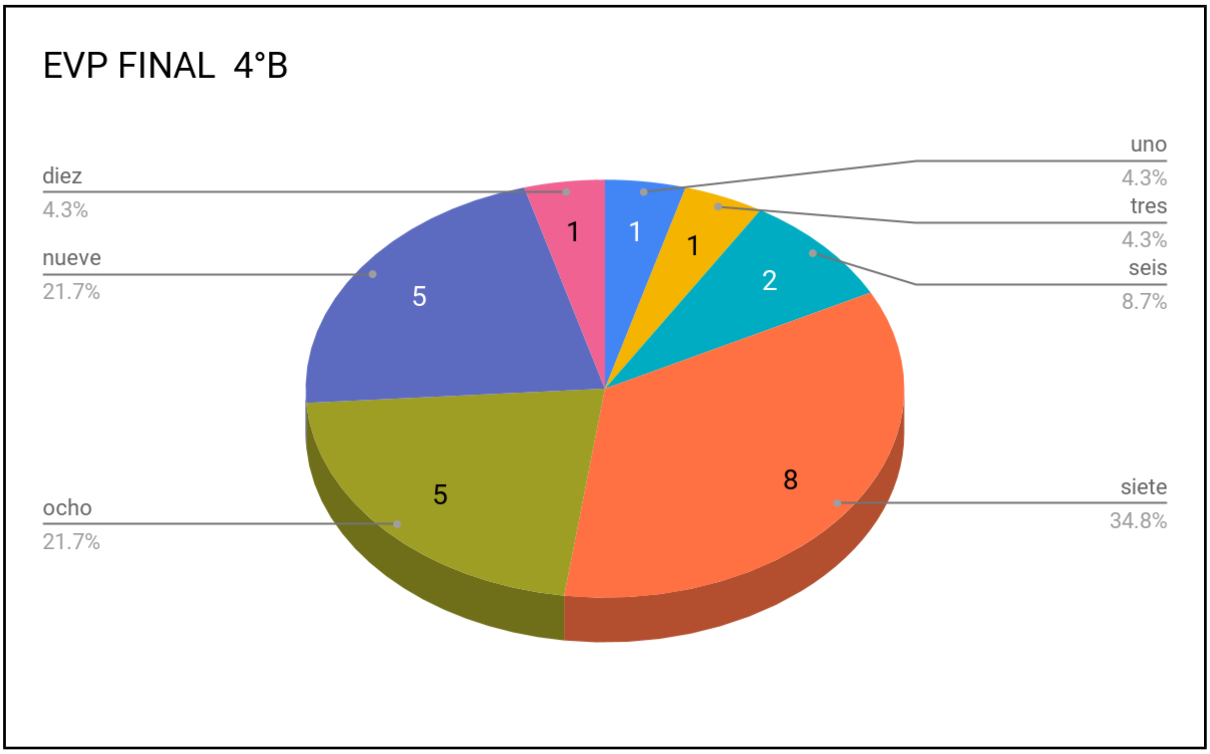


Imagen 16: Gráfico con la distribución de puntajes de la EVPF para 4° año B

Como resumen de los datos presentados en los gráficos en las Imágenes 15 y 16, queremos resumir el porcentaje de alumnos que tuvo nota entre 6-10, 4-5, y 1-3.

Notas entre	Porcentaje de alumnos en 4º A	Porcentaje de alumnos en 4º B
1-3	3.0%	8.6%
4-5	9.1%	0.0%
6-10	87.9%	91.4%

Cuadro 18: Porcentaje de notas obtenidas en cada curso

De observar el Cuadro 18 se puede notar que un gran número de alumnos aprobaron las evaluaciones parciales (el 87.9% en 4° año A y el 91.4% en 4° año B) y lo queremos mencionar debido a que se pudo apreciar el compromiso de estudio por parte de los alumnos. Particularmente, el porcentaje obtenido con nota menor a tres correspondía a alumnos que tenían dificultades en el curso de matemática y las notas obtenidas coincidían con el promedio que ya tenían con la profesora del curso. Además queremos destacar que para ayudar a los alumnos y reforzar y apreciar el esfuerzo que realizaron, inmediatamente después de cada evaluación parcial, se escanearon aquellas resoluciones que tenían respuestas correctas o esperadas para luego subirlas al aula virtual y de esta forma darles a los alumnos más material para su estudio.

2.4.2 Evaluación sumativa:

Nuestra evaluación sumativa preliminar se pensó durante el período de planificación dado que consideramos muy importante que las evaluaciones que se les toma a los alumnos sean coherentes con lo trabajado en las clases. Las actividades en ella planteadas eran similares a las que se presentaban en la guía N°1 y comprendía un problema similar al problema 1 de la guía N°2. Varias de estas actividades debieron ser cambiadas debido a que no se realizaron las actividades similares que estaban planteadas en las guías o no se llegó a trabajar esos conceptos en clase.

Consideramos que haber preparado una evaluación preliminar durante nuestra etapa de planificación fue muy positivo dado que esta permitió explicitar los objetos de enseñanza y de aprendizaje que para nosotras eran primordiales y ayudó en la jerarquización a la hora de práctica con los alumnos y la selección de contenidos básicos al momento de reestructurar nuestra práctica.

Finalmente, en la clase N°11 de 4° año A y N°10 de 4° año B se tomó la evaluación sumativa que correspondía a la segunda nota que nosotras les asignaríamos a los alumnos. Para esta evaluación se destinó el módulo completo (80 minutos) de forma que los alumnos tuvieran tiempo suficiente para realizar todas las actividades de manera tranquila. Dado que no todos los contenidos que vieron ambos cursos fueron iguales, las evaluaciones presentan diferencias y similitudes. Presentamos ahora las actividades de ambas evaluaciones (Cuadros 19 y 21) en conjunto con el puntaje que se les asignó (Cuadro 22) enfatizando la distribución de puntajes en función de ciertos procesos o conceptos que se consideraron relevantes acordes al trabajo matemático desarrollado en las clases. Además, mostramos la evaluación modificada como sugerencia de la psicopedagoga que fue tomada al alumno mencionado en sección 1 (Cuadro 20).

1) Factorizar los siguientes polinomios e identificar y nombrar dos raíces de cada uno:

a) $P(x)=x^6-81x^2$.
b) $T(x)=x^6-18x^5+81x^4$
c) $S(x)=3x^6+6x^7-6x^3-3x^2$
d) $R(x)=x^7-2x^3+x^2-x^5+2x-1$

2) Calcular el polinomio resto de la división del polinomio $P(x)=7x^5+5x^2-3$ por el polinomio $Q(x)=x-1$.(Utilizar Teorema del Resto).

3) Utilizar la Regla de Ruffini para identificar los polinomios cociente y resto de las siguientes divisiones:

a) $P(x)=2x^4-3x+12$ por $Q(x)=x+2$
b) $P(x)=12x^4-10x^3+5x$ por $Q(x)=x-1$

Cuadro 19: Actividades de la evaluación de 4° año A

1) Factorizar los siguientes polinomios:

a) $R(x)=x^6-81x^2$ utilizando primero factor común y después diferencia de cuadrados.

b) $S(x)=3x^6+6x^7-6x^3-3x^2$
c) $Q(x)=x^2-18x+81$

2) Teniendo en cuenta los polinomios de la actividad 1, responder:
a) ¿$x=0$ es una raíz de $R(x)$? ¿Por qué?
b) ¿$x=2$ es una raíz del polinomio $S(x)$? ¿Por qué?

3) Calcular el polinomio resto de la división del polinomio $P(x)=7x^5+5x^2-3$ por el polinomio $Q(x)=x-1$.(Utilizar Teorema del Resto).

4) Utilizar la Regla de Ruffini para identificar los polinomios cociente y resto de la división de $P(x)=2x^4-3x+12$ por $Q(x)=x+2$.

Cuadro 20: Evaluación modificada para el alumno de 4º año A

1) Factorice utilizando dos o más herramientas:
a) $P(x)=2x^5-16x^3+32x$
b) $P(x)=x^8-2x^5+x^2-x^6+2x^3-1$

2) Observe los polinomios y para cada uno de ellos responda:
a) ¿Está factorizado el polinomio? ¿Por qué?
i) $3x(x-5)(x+5)(x^2+1)^2$
ii) $3x(2x-5)(x+5)(x^2+1)^2$
iii) $7x(x^2-49)(x-10)$
iv) $x^4(x^2-16)-1(x^2-16)$
b) Factorice aquellos polinomios que decida que no están factorizados.
c) Nombre 3 raíces para cada uno de los polinomios del ítem a).

3) Calcular el polinomio resto de la división por $Q(x)$ del polinomio $P(x)$.
a) $Q(x)=x+1$, $P(x)=4x^7-7x^2+9$
b) $Q(x)=x-2$, $P(x)=8x^2-7x+4$

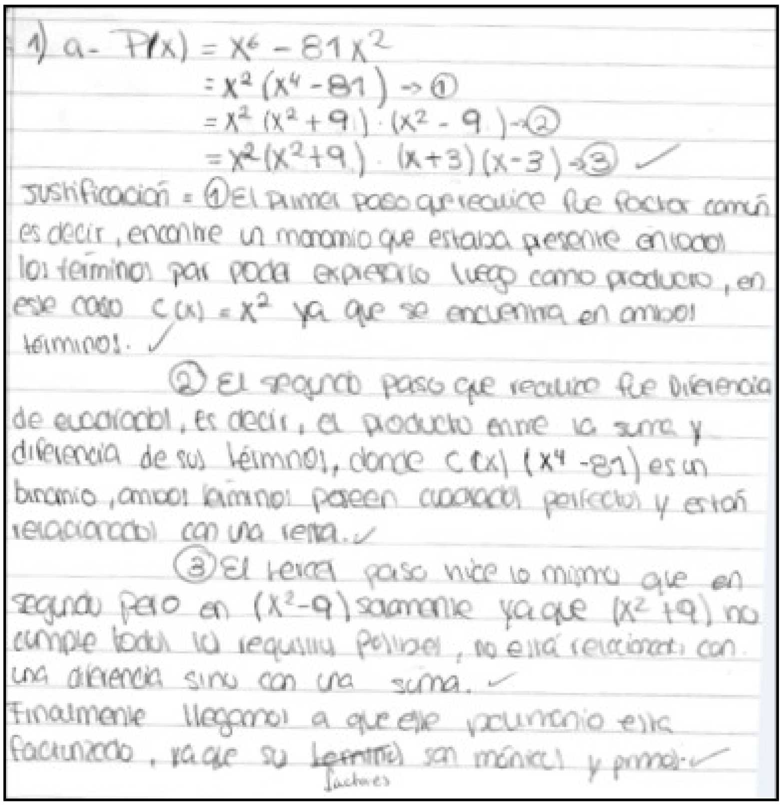
Cuadro 21: Actividades de la evaluación 4° año B

4° año A		4° año B	
1) Procedimiento	6 puntos	1_a) Procedimiento	5 puntos
1) Raíces	4 puntos	1_a) Justificación	5 puntos
1) Justificación	5 puntos	1_b) Procedimiento	5 puntos
2) Procedimiento	6 puntos	1_b) Justificación	5 puntos
2) Justificacion	4 puntos	2_a) Justificación (cada item)	5 puntos
3) Procedimiento	5 puntos	2_b) Justificación cada item (solo son 3)	5 puntos
3) Justificación	5 puntos	2_c) Nombrar las raíces (en cada ítem)[15]	2 puntos

3) Identificar los polinomios Cociente y Resto	5 puntos	2_c) Justificar (en cada item)	4 puntos
		3_a) Procedimiento	5 puntos
		3_a) Justificación	5 puntos
		3_a) Procedimiento	5 puntos
		3_a) Justificación	5 puntos

Cuadro 22: Distribución de puntaje de evaluación para cada curso

En esta instancia, en la Imagen 17, destacamos la correcta justificación de un alumno de 4º año A en la actividad 1_a):



1) a- $P(x) = x^6 - 81x^2$

$= x^2 (x^4 - 81) \to ①$

$= x^2 (x^2 + 9) \cdot (x^2 - 9) \to ②$

$= x^2 (x^2 + 9) \cdot (x + 3)(x - 3) \to ③$

Justificación = ① El primer paso que realice fue factor común es decir, encontre un monomio que estaba presente en todos los términos para poder expresarlo luego como producto, en este caso $C(x) = x^2$ ya que se encuentra en ambos términos.

② El segundo paso que realizo fue Diferencia de cuadrados, es decir, el producto entre la suma y diferencia de sus términos, donde $C(x)$ $(x^4 - 81)$ es un binomio, ambos términos poseen cuadrados perfectos y están relacionados con una resta.

③ El tercer paso hice lo mismo que en segundo paso en $(x^2 - 9)$ solamente ya que $(x^2 + 9)$ no cumple todos los requisitos posibles, no está relacionado con una diferencia sino con una suma.

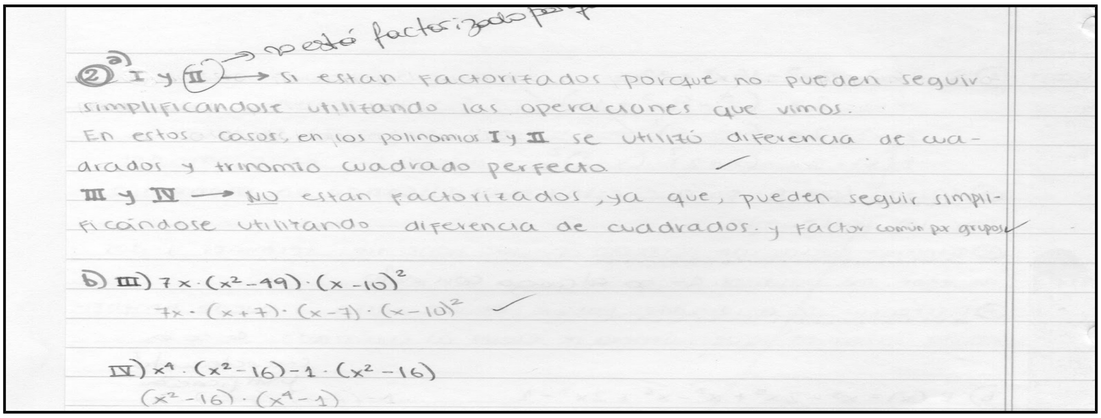
Finalmente llegamos a que este polinomio esta factorizado, ya que sus ~~términos~~ factores son mónicos y primos.

Imagen 17: Resolución de una alumna de 4° año A de la actividad 1-a) de la EVF

Aquí, tanto la resolución algebraica como las justificaciones planteadas se consideraron correctas. La justificación realizada fue de manera completa ya que explicitaba su trabajo paso a paso. Así, la alumna pudo reconocer las condiciones necesarias para aplicar cada herramienta utilizando correctamente las definiciones de las mismas. A pesar de que la alumna no justifica porqué los términos son cuadrados perfectos, al escribirlos en la parte algebraica del trabajo se puede evidenciar que no escribe la justificación sólo como parte de una receta, sino que está comprendiendo lo realizado.

Queremos en particular mostrar el caso de una alumna de 4° año B que al responder la actividad 2_a) retoma lo trabajado en la actividad 9 de la guía N°1 (actividad mencionada en la sección 2.2.2.2).

15Este puntaje sería como máximo 24 y en caso que eso suceda se le asignaban 25 puntos.


no está factorizado por

② a) I y II → si estan factorizados porque no pueden seguir simplificandose utilizando las operaciones que vimos.
En estos casos, en los polinomios I y II se utilizó diferencia de cuadrados y trinomio cuadrado perfecto
III y IV → NO estan factorizados, ya que, pueden seguir simplificandose utilizando diferencia de cuadrados. y factor común por grupos

b) III) $7x \cdot (x^2-49) \cdot (x-10)^2$
$7x \cdot (x+7) \cdot (x-7) \cdot (x-10)^2$

IV) $x^4 \cdot (x^2-16) - 1 \cdot (x^2-16)$
$(x^2-16) \cdot (x^4-1)$

Imagen 18: Resolución de la actividad 2_a) de la evaluación final de 4° año B

Esta alumna no solo respondió si los polinomios estaban factorizados, sino que también identificó algunas de las herramientas que se utilizaron para escribir el polinomio como producto de factores. Nos pareció interesante para mencionar esta resolución dado que fue un caso muy particular y reflejó que la actividad N°9, trabajada en clase, en su momento se interpretó como una actividad que creó conflicto, en realidad, con este escrito, se hace evidente que tuvo un impacto en la comprensión de algunos alumnos. Quizás si se hubiera trabajado más con este tipo de actividades, más alumnos habrían podido apropiarse del sentido de este tipo de actividades para brindarles una comprensión mayor. Quizás el tiempo disponible influenció nuestras decisiones. Ambas afirmaciones se presentan en términos de conjeturas que permiten pensar y avanzar.

Para este momento de las prácticas, el desempeño de los alumnos con las herramientas era muy bueno y sus justificaciones eran muy completas, esto se refleja en la mayoría de los puntajes que obtuvieron en las evaluaciones. Estos datos se presentan en las Imágenes 19 y 20.

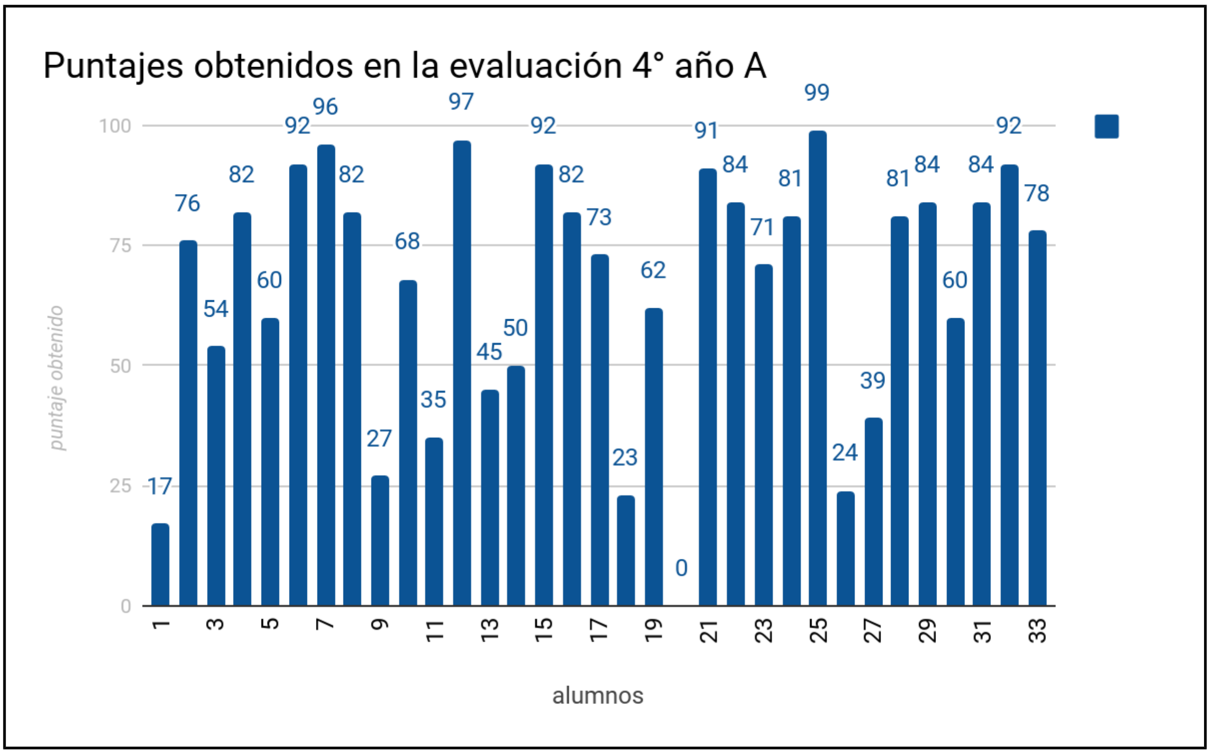


Imagen 19: Puntaje obtenido por alumno en 4° año A

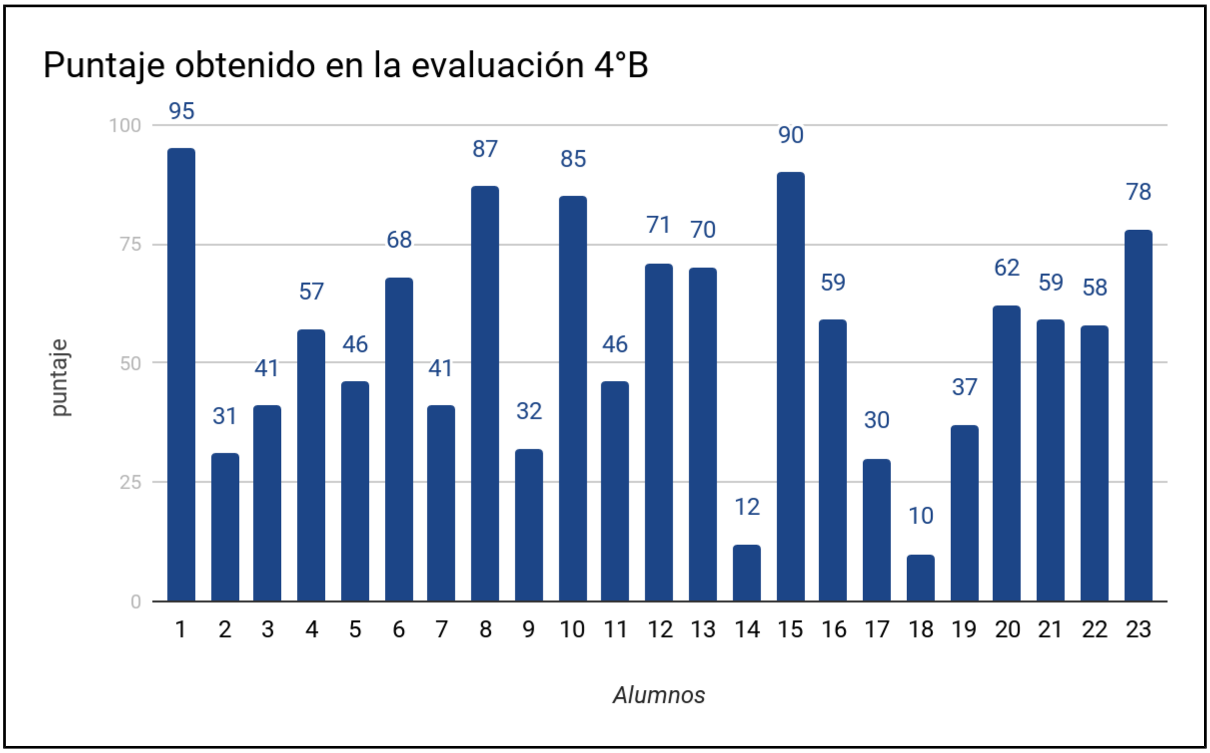


Imagen 20: Puntaje obtenido por alumno en 4° año B

Queremos mencionar los porcentajes de aprobación que hubo en la evaluación sumativa en ambos cursos. En 4° año A el 72.73% obtuvo una nota entre 6 y 10 (24 alumnos de 33) y en 4° año B fue el 56.52% (13 alumnos de 23).

A partir de lo ocurrido en nuestras clases, el trabajo realizado por parte de los alumnos y las instancias de consulta que ellos tuvieron, observamos que las evaluaciones verdaderamente reflejaban el nivel de apropiación de los alumnos de los conceptos trabajados y su capacidad de justificación. Pudimos percibir el esfuerzo y compromiso de los alumnos para trabajar con las justificaciones (objeto de estudio que era nuevo para ellos) y cómo fueron influyendo la comprensión de las definiciones en las justificaciones, y viceversa. Nos produjo una gran satisfacción el buen desempeño de los estudiantes en sus evaluaciones (parciales o sumativa). Cabe también destacar que, hoy y en la instancia de prácticas, lo que más rescatamos es el progreso en el desempeño de los alumnos y el aporte que significó la nota EVPF para los alumnos que comprenden los temas pero no suelen tener un buen desempeño en las evaluaciones sumativas (quizás porque deben integrar ideas y procedimientos). Esta nota significó una mejora en sus promedios y un incentivo para seguir trabajando y esforzándose.

3. Análisis de un problema: El sentido de la enseñanza de los casos de factorización de polinomios en el nivel secundario.

Desafiar a un alumno supone proponerle situaciones que él visualice como complejas pero al mismo tiempo posibles, que le generen una cierta tensión, que lo animen a atreverse, que lo inviten a pensar, a explorar, a poner en juego conocimientos que tiene y probar si son o no útiles para la tarea que tiene entre manos, que lo lleven a conectarse con sus compañeros, a plantear preguntas que le permitan avanzar […] Se necesita -claro- creer que es posible lograr que los alumnos se ubiquen en esa posición, pero esa creencia no se puede inventar, es necesario sustentarla en conocimientos que permitan pensar por dónde se puede empezar a actuar (Sadovsky, 2005, p.13).

3.1 Introducción

En esta instancia de nuestro trabajo queremos realizar un análisis sobre una problemática particular que emergió durante la planificación, implementación y reflexión de nuestras prácticas. Es nuestra intención hacernos distintas preguntas y tratar de dar respuesta a algunas de ellas mientras invitamos al lector a reflexionar sobre otras, con el fin de poder afectar nuestras futuras prácticas sobre este tema y objeto de estudio como también servir de apoyo o contraste para futuras planificaciones de otros.

3.2 Nuestra problemática de interés

Durante la etapa pre-activa y activa de nuestras prácticas profesionales nos cuestionamos sobre el sentido y los modos de la enseñanza de la factorización de polinomios en el nivel secundario y cómo estos modos pueden afectar la comprensión, aprendizaje y la atribución de sentido por parte de los alumnos en relación a dicha temática. Al reflexionar sobre nuestras prácticas notamos que en realidad lo que nos preocupaba y generaba dudas del desarrollo de los casos de factorización de polinomios en el secundario es el sentido que el docente le puede otorgar (si la enseñanza de este tema tiene un fin en sí mismo o cobra sentido al aplicarse en la enseñanza de otros conceptos y temas), la jerarquía que le puede atribuir en el programa de la materia (en términos de selección, organización y secuenciación de los contenidos) y qué enfoque puede utilizar para presentarlo en el aula sabiendo que el concepto puede ser estudiado desde el punto de vista algebraico o analítico o de un modo que integre ambos puntos de vista. Todos estos aspectos influyen en el posicionamiento del docente y pueden obturar o facilitar la comprensión de los alumnos de los casos de factorización de polinomios. A partir de esta reflexión es que decidimos tomar como nuestra problemática de estudio:

El sentido de la enseñanza de los casos de factorización de polinomios en el nivel secundario.

La secuenciación de los contenidos en el programa de la materia que nosotras recibimos a la hora de planificar, contemplaba la enseñanza de los números complejos y teorema fundamental del álgebra luego de la unidad que contiene polinomios y su factorización. Esto restringía el conjunto de los polinomios posibles a trabajar y estudiar: se trabajaría entonces con polinomios de una variable real y con coeficientes reales. Cabe indicar que en general se había trabajado con valores enteros. Estas decisiones y otras orientadas al trabajo algebraico con polinomios, determinaron el surgimiento de los interrogantes antes mencionados.

En el marco de esta problemática y estos interrogantes, consideramos analizar particularmente el sentido de la enseñanza del Teorema del Resto. Este contenido fue dictado durante nuestras prácticas y pudimos observar cómo obturó la comprensión de los conceptos que le siguieron y la disposición de los alumnos durante el resto de las clases debido a que ellos no pudieron encontrarle un sentido a dicho teorema e incorporarlo como un aprendizaje significativo. Dado que el conflicto generado con el Teorema del Resto es una clara manifestación de las inquietudes que surgieron durante nuestras prácticas, consideramos analizar este caso particular en el marco general de nuestro análisis.

3.2 Nuestro análisis

Hacer matemáticas es un trabajo del pensamiento que construye los conceptos para resolver problemas, que plantea nuevos problemas a partir de conceptos así construidos, que rectifica los conceptos para resolver problemas nuevos, que generaliza y unifica poco a poco los conceptos en los universos matemáticos que se articulan entre ellos, se estructuran, se desestructuran y se reestructuran sin cesar. (Charlot, 1986, p.3)

En esta sección queremos plantear diferentes dimensiones de análisis de nuestra problemática. De esta manera queremos aportar información pertinente y trascendente que ayude a comprender cuál es el sentido que se le da a la enseñanza de los casos de factorización de polinomios en el nivel secundario.

Es así que para avanzar en nuestro análisis tomamos como referencia lo tratado en el Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba, así como también lo considerado en la planificación y programa de la Institución en la cual se llevaron a cabo nuestras prácticas. Además, el rol que cumple la factorización de polinomios en la enseñanza de otros contenidos y el enfoque que se le puede dar a la misma. También se analizaron los materiales disponibles (libros e internet) como soporte para la enseñanza de los casos de factorización de polinomios.

3.2.1 El diseño curricular

Para comenzar nuestro análisis nos hicimos algunas preguntas acerca de la problemática elegida. A medida que avancemos en el análisis iremos dando algunas respuestas. La pregunta principal es: *¿Cómo están presentes en el diseño curricular vigente para el nivel secundario los casos de factorización de polinomios?* Y en particular nos preguntamos:

- *¿Es considerado prioritario en el diseño curricular el desarrollo de este tema? En caso de ser así, ¿de qué forma se hace evidente?*
- *¿Se considera en el diseño curricular el contexto en el que surgió el objeto matemático a la hora de pensar el modo de enseñanza propuesto?*

A continuación procedemos a intentar dar respuesta a estos interrogantes particulares.

- *¿Es considerado prioritario en el diseño curricular el desarrollo de este tema? En caso de ser así, ¿de qué forma se hace evidente?*

Antes de comenzar nuestro análisis consideramos muy importante explicar la estructura del Diseño Curricular de la provincia de Córdoba vigente (versión 2011-2015) junto con los conceptos claves que utiliza y sus definiciones para evitar confusiones al lector. El Diseño Curricular (DC) para la orientación Ciencias Sociales y Humanidades[16] divide la sección de matemática (que está presente en el Tomo 3) en 4 partes: Presentación, Objetivos, Aprendizajes y Contenidos y Orientaciones para la enseñanza y la evaluación.

El DC entiende que los objetivos "expresan los logros a alcanzar en función de los aprendizajes considerados básicos e imprescindibles en concordancia con los propósitos que orientan la formación" (p.7) y además menciona: "...delinean un horizonte de expectativas en cuanto ponen en evidencia el alcance de las transformaciones que se imaginan y desean tanto en términos individuales como sociales..." (p.7). Entiende que "...un APRENDIZAJE [...] remite a los saberes fundamentales cuya apropiación la escuela debe garantizar a todos los estudiantes ya que [...] son centrales y necesarios para el pleno desarrollo de las potencialidades de adolescentes y jóvenes, su participación en la cultura y la inclusión social." (p.7) y que "Los aprendizajes involucran contenidos-conceptos, formas culturales, lenguajes, valores, destrezas, actitudes, procedimientos y prácticas..." (p.7) y que estos "...permiten identificar los alcances esperados en la apropiación del contenido por parte del estudiante..." (p.7).

Por otro lado, en la sección orientaciones para la enseñanza el DC presenta "...sugerencias que orientan la selección de estrategias docentes y los modos más adecuados de intervención" (p.8).

Ahora sí podemos abocarnos a nuestros interrogantes. Las únicas menciones sobre el trabajo con polinomios en el DC en la sección de Aprendizajes y Contenidos hacen referencia a ecuaciones de primer y segundo grado:

- "Reconocimiento de la insuficiencia de los números reales para expresar todas las raíces de una ecuación como lo indica su grado (por ejemplo, ecuaciones del tipo $x^2+1=0$)" (p.16).
- "Producción de argumentaciones acerca de la validez de expresiones algebraicas equivalentes para resolver problemas que requieran de ecuaciones de primer y segundo grado" (p.18).

16Si bien nuestro análisis se basa en lo planteado en la orientación Ciencias Sociales y Humanidades, se revisó lo contemplado para las otras orientaciones y no se encontraron diferencias sustanciales.

- "Producción de argumentaciones acerca de la validez del Teorema Fundamental del Álgebra que alude a características particulares de los números complejos al resolver ecuaciones cuadráticas" (p.18).

Mientras que en la sección de intervenciones docentes habla sobre las acciones del docente:

- "Se intenta así superar el trabajo fragmentado de noción de función que prioriza la algoritmación y que contempla a la función como un procedimiento" (p.26)
- "Considera actividades en las que se ponen en juego las **relaciones de dependencia y variabilidad**" (p.27)
- "Plantea problemas donde intervengan **variables reales**, en lugar de priorizar solamente el tratamiento con naturales y enteros, que si bien facilitan el cálculo reducen la noción de función como sucesión" (p.27)
- "Contempla problemas en los que las **fórmulas** sean herramientas para su resolución, en lugar de actividades donde las fórmulas algebraicas son interpretadas como un conjunto de técnicas eficaces para determinar el valor de incógnitas, perdiéndose el sentido de variabilidad" (p.27)
- "Contempla problemas en los que los **gráficos** se consideran esenciales para acceder a las diferentes significaciones de la noción de función y no un punto de llegada" (p.27)
- "Propone actividades para avanzar en las **caracterizaciones de las funciones lineales y cuadráticas** mediante fórmulas y/o gráficos, interpretando sus parámetros" (p.28)
- "Al respecto es fundamental que el docente sea gestor de la resolución de problemas y de la reflexión sobre los mismos, para evitar caer en el trabajo rutinario con la tecnología y que los estudiantes pierdan de vista la actividad que deben realizar. Se trata de propiciar la concentración en el problema a resolver y no en la mecánica" (p.29)
- "Contempla **dos dimensiones del álgebra:** dimensión útil (...) y dimensión objeto (...)" (p.31).
- "Contempla actividades donde el uso de **hojas de cálculo** aparezca como herramienta para resolver problemas (herramienta de trabajo del estudiante) y no como un fín en sí mismo. De esta manera, el uso de hojas de cálculo permite facilitar el tratamiento numérico y la realización de gráficos." (p.26)
- "Los programas graficadores constituyen un medio para enriquecer la comprensión de problemas pues potencian la representación gráfica, la rapidez de cálculo y la modelización sin acudir a la forma clásica." (p.29)

A partir de los aprendizajes y contenidos del DC se puede apreciar que solo está contemplado el tratamiento de polinomios lineales y cuadráticos y se entrevé una orientación hacia la elaboración e interpretación de gráficos. Incorporando a esto lo mencionado recién sobre las orientaciones para la enseñanza, se puede concluir que el DC propicia el tratamiento analítico de los polinomios y no se hace tan evidente el aspecto algebraico tradicional con lápiz y papel como fundamental, ya que constantemente menciona el uso de las tecnologías digitales para facilitar (y/o completar) el trabajo algebraico y numérico permitiendo a los alumnos y el docente avocarse a análisis cualitativos, problematizar las variaciones funcionales y evidenciar las riquezas gráficas. El DC pareciera otorgar un mayor interés en la problematización de variaciones funcionales, de la noción de completitud (por ejemplo: la insuficiencia de los números reales para dar las soluciones de algunos polinomios cuadráticos) y una actitud crítica sobre el trabajo matemático. A la vez, establece que las tecnologías son un medio útil para favorecer este trabajo al reducir el tiempo de tratamiento de los conceptos y aprendizajes intermedios para lograr los objetivos, y aprendizajes y contenidos prioritarios.

A partir de todo lo mencionado anteriormente, podemos ver que (según nuestra interpretación) el DC no considera prioritaria la enseñanza de los casos de factorización de polinomios en 4º año de nivel secundario. Pareciera que el DC está alineado con lo que plantea Radillo et. al (2005): *La complejidad de una tarea matemática debe residir en el proceso de solución del problema y no en el proceso de identificación de la situación problemática* (p.5). Es tal vez por esta razón que favorece el tratamiento analítico y el algebraico lo deja en un segundo plano.

- *¿Se considera en el diseño curricular el contexto en el que surgió el objeto matemático a la hora de pensar el modo de enseñanza propuesto?*

  (La matemática es un producto) *cultural, porque sus producciones están permeadas en cada momento por las concepciones de la **sociedad** en la que emergen, y condicionan aquello que la **comunidad de matemáticos** concibe en cada momento **como posible** y **como relevante*** (Sadovsky, 2005, p.22)

En el período en el que se comenzó a buscar métodos para encontrar raíces de polinomios, se favorecía el trabajo a partir de algoritmos, es decir que se intentaba encontrar algoritmos que condujeran a la solución general de distintos problemas que luego serían aplicados a casos particulares. Esta perspectiva algorítmica de la época contrasta con las ideas del DC que parecieran querer erradicar toda evidencia de la algoritmización en el nivel secundario (cuestión que no solo no es posible sino que sería un gran expulsor de sentido). Más en general, el surgimiento del Álgebra estuvo fuertemente mediado por perspectivas geométricas y con carácter generalizador del Aritmética. Esta naturaleza en sus orígenes no puede ser ignorada, pues podría ser uno de los principales expulsores de sentido a la hora de la enseñanza o aprendizaje. *Las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y las traducciones entre ellas son un elemento fundamental para su comprensión y, por lo tanto, para su enseñanza y aprendizaje* (Font (2000) en Radillo et. al, 2005, p.6). No podemos pretender favorecer solo una forma de representación de los objetos matemáticos ni olvidar los obstáculos y razones de la génesis de los mismos al momento de la planificación por dos motivos: son la principal fuente de otorgamiento de sentido, y evidencian obstáculos y dificultades con los que muy probablemente los alumnos se encuentren[17].

> *Un sistema de símbolos (fórmulas) que refleja las relaciones y conexiones entre los objetos matemáticos y sus propiedades da el origen del lenguaje analítico o algebraico* (p.4).

Teniendo en cuenta lo que plantea Radillo et. al (2005), la distinción sobre analítico y algebraico no es natural y está fuertemente ligada por convenciones y construcciones

17Todo el análisis basado en la historia de los casos de factorización de polinomios se dió a partir del estudio de los trabajos de Carmen Sessa (2005), Sandra Jiménez (2013) y páginas web.

humanas ya desde el 3300 A.C. se encuentran vestigios de lo que hoy llamamos trabajo algebraico. No podemos ignorar que el surgimiento del símbolo y lenguaje matemático fue un proceso extenso que fue creciendo en complejidad y fue moldeando el trabajo matemático. Una definición, un teorema, un método matemático tal como se presenta en las escuelas, en los libros y en la comunidad matemática lejos está de ser igual al objeto en el momento de su surgimiento. En ese sentido cabe destacar que:

> *Hacer matemática es un trabajo del pensamiento que construye los conceptos para resolver problemas, que plantea nuevos problemas a partir de los conceptos así construidos, que rectifica los conceptos para resolver problemas nuevos, que generaliza y unifica poco a poco los conceptos en los universos matemáticos que se articulan entre ellos, se estructuran, se desestructuran y reestructuran sin cesar.* (Charlot, 1986, p. 3)

Así, si verdaderamente queremos poner a los alumnos en la situación de comprender lo producido por la comunidad de práctica matemática (Schoenfeld, 1992) debemos tener en cuenta cómo los conceptos son objetos modificables y reestructurables, no estancados y acabados. No solo los alumnos suelen recibir definiciones hermosas (según profesores y la comunidad matemática) sino que estas definiciones están usualmente escritas en un lenguaje matemático que para los alumnos no siempre es sencillo comprender.

> *El lenguaje especializado de las matemáticas o lenguaje matemático, el cual tiene además el propósito de caracterizar los hechos y las reglas de razonamiento con precisión, así como las relaciones y conexiones entre los objetos matemáticos y sus propiedades* (Radillo, 2012, p.163)

> *La dificultad lingüística de estos términos estriba en su carácter sintético, ya que cada uno de ellos involucra varios conceptos matemáticos y/o condiciones necesarias para operar con ellos* (p. 167)

Aprender dicho lenguaje no se presenta como una tarea fácil; el alumno se enfrenta a un lenguaje formal, dominado por un gran número de normas que le confieren gran rigidez (Radillo et. al, 2005, p.2), nosotras consideramos que esta rigidez, la complejidad de las reglas de razonamientos, la forma sintética de presentación y el contexto de los objetos matemáticos (en el sentido de proceso histórico de conformación del objeto) conforman una parte importante de las variables didácticas que se deben tener en cuenta a la hora de levantar conjeturas para la planificación de un docente, y todas ellas están ligadas a los procesos históricos de la matemática en general y las condiciones específicas que modifican el objeto.

En conclusión, desde nuestra comprensión de lo establecido en el DC, no se contempla el origen de los contenidos en su planteamiento. La visión de favorecer un trabajo analítico está fuertemente mediado por un uso avanzado de los símbolos y una comprensión moderna de la matemática. Olvida los obstáculos y el proceso que sufrieron los conceptos para ser establecidos como tales en la comunidad matemática. No queremos con esto decir que la perspectiva del DC esté mal sino resaltar un posible foco de conflictos a la hora de las planificaciones para el aula. En particular, dentro del trabajo con polinomios y su factorización, el DC no contempla el entorno específico en el que surgieron con todos los problemas y beneficios que tuvo.

3.2.2 Rol en la enseñanza

Continuando con nuestro análisis, nos planteamos la siguiente pregunta: *¿Para qué otros conceptos matemáticos resulta relevante el conocimiento de los casos de factorización de polinomios?* De manera más específica:

- ¿Cómo afecta la presencia o ausencia de la enseñanza de los casos de factorización de polinomios en el dictado de otros temas de la matemática y otras asignaturas?

- Para un desarrollo profundo de los temas ligados a la factorización de polinomios ¿es necesario un conocimiento profundo o basta con un breve tratamiento de los casos de factorización de polinomios?

Con estas preguntas hacemos referencia a cómo influye la enseñanza de los casos de factoreo de polinomios en otros contenidos que el DC sí considera como prioritarios. Para analizar esto, nos detuvimos en los contenidos del DC para 5° y 6° año referidos a este tema. Para 5º año, el DC en la sección Aprendizajes y Contenidos explicita (p.17-18):

- “Investigación del conjunto de definición de una función y de sus limitaciones para resolver problemas que se modelicen mediante funciones.”
- “Interpretación de gráficos y fórmulas que representen variaciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas en función del problema a resolver.”
- “Análisis de comportamiento de las funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas desde sus representaciones en gráficos y fórmulas (incluyendo interpretación y variación de parámetros).”
- “Formulación de argumentaciones acerca de la validez de expresiones algebraicas equivalentes para resolver problemas que requieran de ecuaciones polinómicas.”
- “Uso de ecuaciones polinómicas en una variable real, logarítmicas, exponenciales y análisis del conjunto solución.”

Mientras que en los objetivos se plantea (p.14):

- “Utilizar e interpretar ecuaciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas como modelo matemático para resolver problemas, seleccionando el modelo más adecuado en función del problema.”
- “Interpretar información presentada en forma oral o escrita - textos, gráficos, fórmulas- para resolver problemas.”

En cuanto a lo que menciona el DC respecto a 6º año, no pudimos encontrar contenidos que evidencien la utilización de los casos de factorización de polinomios.

Podemos ver que de la misma forma en que, para 4° año, no son contenidos-aprendizajes prioritarios, tampoco lo son para 5° y 6° año.

Como se puede evidenciar por lo trabajado en la sección anterior y lo ahora explicitado, el DC considera suficiente un tratamiento breve de los casos de factorización de polinomios para llegar a sus objetivos de carácter analítico y globales. Además, este tratamiento es suficiente para todos aquellos aprendizajes que se ven vinculados a éste en momentos posteriores. El DC está enfocado a los análisis cualitativos y a la problematización y modelación de situaciones sociales relevantes, pero “no considera” que para poder llegar a ese nivel de abstracción es necesario un proceso profundo y complejo por parte de los alumnos en el cual participan las distintas representaciones de los objetos de estudio. Radillo (2012) en uno de sus trabajos plantea lo que es el código gráfico, verbal y simbólico, que no es simple decodificar la información de una representación a la otra y cómo el profesor debería trabajar en la articulación de estos códigos y representaciones para favorecer la comprensión de los alumnos que proviene de la convergencia de toda la información que brindan las representaciones. En especial plantea:

> *El código gráfico se distingue del simbólico y del verbal en que no contiene oraciones en sentido estricto, ya que los trazos no son signos ordenados (n-tuplos de signos), y por ende pueden ser leídos de diversas maneras* (p.166-167).

Esta riqueza que aporta del código gráfico de necesitar los otros códigos ayuda a esta vinculación y el DC está enfocado en el aprovechamiento de esta representación pero deja de lado algunas de las representaciones simbólicas con sus respectivas riquezas para el análisis y que además contribuyen con la comprensión, sentidos y conexiones.

3.2.3 La planificación y el programa de la materia en nuestra institución

En esta sección en particular queremos detenernos a estudiar el programa de la institución en la que se situaron nuestras prácticas y contrastar las decisiones de selección, organización y secuenciación de contenidos en función con lo planteado en el DC.

Antes de comenzar con este estudio, queremos hacer un análisis de todo lo que implica para un docente generar una apropiada selección, organización y secuenciación de los contenidos correspondientes al programa de la materia. Es importante tener en cuenta que el docente se encuentra inmerso en un Sistema Didáctico que no le es ajeno ni indistinto a la hora de llevar a cabo una planificación para su curso. Se entiende por Sistema Didáctico a la relación existente entre el docente, sus alumnos y los contenidos que se ponen en juego en las clases. Entendemos así, que el docente no puede alejarse de este triángulo didáctico para llevar a cabo su planificación y es por esto, que también entra en juego la Institución donde el mismo se sitúa o en el terreno en el que acontece (terreno se usa en el sentido de Lave(1991)).

Cada institución en su estructura organizativa genera condicionantes que afectan tanto positiva como negativamente la construcción de una planificación para que la misma contemple lo establecido en el DC considerando las capacidades, oportunidades y posibilidades de los alumnos que asisten a la misma. A su vez, no se puede dejar de tener en cuenta lo que el Ministerio propone para cada nivel a través del Diseño Curricular. Estos aspectos que afectan la planificación anual para matemática (en realidad, afectan las planificaciones de todas las materias) se ven representados en la Imagen 21 que presentamos a continuación.

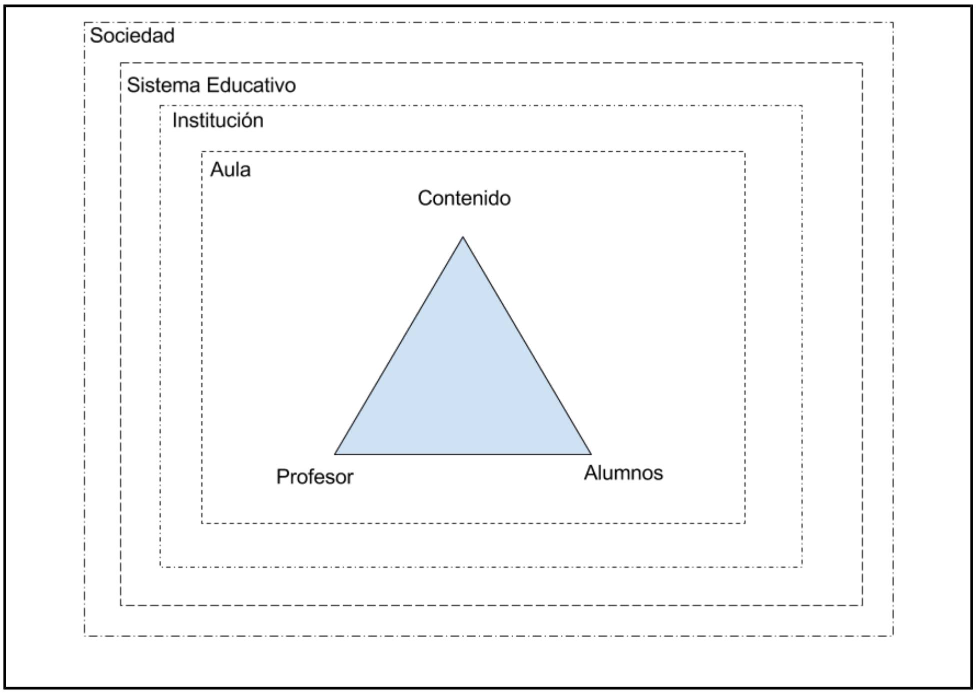


Imagen 21: Sistema didáctico (representación tomada de los apuntes del curso Didáctica de la Matemática, 2016)

Como se puede ver en la Imagen 21, las líneas que delimitan las contenciones son líneas discontinuas, pues se considera que no son simples contenciones sino que son marcos de referencia que se modifican mutuamente. Por ejemplo, es obvio decir que las decisiones tomadas a nivel nacional o provincial del sistema educativo modifican las prácticas en el aula pero son también estas prácticas en el aula las que llevan a planteamientos que derivan en legislaciones y decisiones a nivel del sistema educativo.

Sabemos que en el caso particular de nuestras prácticas se hicieron presentes estas influencias que ejerce la institución sobre la planificación (por ejemplo, la necesidad que se dicten ciertos temas porque el profesor de física los “necesita” en años posteriores) y es por eso que hay grandes diferencias entre esta y lo planteado por el DC. Aún así, consideramos muy positivo poder analizar las diferencias y similitudes entre la planificación y el DC ya que así quedará reflejada la complejidad del Sistema Didáctico y del trabajo de selección, organización y secuenciación que debe atender un docente. Desafío que nosotras mismas debimos sortear. En particular, queremos revisar algunos aspectos que evidencien la distancia existente entre lo referido al DC y lo adoptado por la institución sobre los temas referidos a la Unidad Nº3.

- Sobre el título de la unidad

La unidad N°3, como ya mencionamos anteriormente, se corresponde con funciones lineales, cuadráticas y sus gráficos que plantea el DC. El nombre de la unidad en la institución donde se llevaron a cabo las prácticas era “Expresiones Algebraicas Fraccionarias” por lo que desde el momento cero se puede evidenciar un corrimiento respecto de lo que se esperaría que se enseñe cuando es tratada la unidad. Dado que el DC plantea un tratamiento de las funciones polinómicas basándose en su naturaleza variacional para favorecer un estudio analítico, ver que la planificación contempla trabajar con expresiones polinómicas y, en consecuencia, favorecer el tratamiento algebraico, para el análisis creemos que es una clara evidencia de lo que la institución asume que debe ser la secuencia de enseñanza. Tales suposiciones tienen su propio valor para la institución.

- Las proporciones de contenidos algebraicos y analíticos

Si uno observa el DC, los aprendizajes esperados están basados en el trabajo con gráficos y las ventajas del cambio de representación de los objetos (representación analítica, algebraica y gráfica) y cómo la utilización de todas ellas llevan a una comprensión más profunda y global del trabajo matemático referido a funciones. Pero la utilización conjunta de las representaciones de las funciones no se ve reflejado en la selección y secuenciación del programa, ya que este contempla esencialmente el trabajo algebraico para obtener toda la información necesaria para elaborar gráficos. Esta cuestión pondría en evidencia el hecho que algunas representaciones quedan limitadas a ser herramientas para llegar a la otra representación. Particularmente, pareciera que el trabajo algebraico con los polinomios se transforma en herramienta con el fin de poder construir gráficos.

- Función del gráfico

En este momento queremos primero aclarar que con función del gráfico queremos hablar del rol otorgado al gráfico de funciones en el programa en contraste con el rol que establece el DC. En el programa de la materia se trata a los gráficos de funciones como una idea o noción a la que es posible aproximarse tomando como base un previo trabajo algebraico (como ya mencionamos antes) y el último objeto de estudio de la unidad conformando así la “integración” de todo lo aprendido hasta el momento. No se contemplan trabajos de análisis variacional a partir de los gráficos ni la utilización de estos para resolver problemas relevantes, por lo que concluimos que nuevamente la planificación de la materia presenta un corrimiento respecto de lo planteado en el DC. Este corrimiento sabemos que se produce por las necesidades institucionales de cubrir los contenidos que plantea el DC y con los contenidos que se requieren para el tratamiento de otras problemáticas (en la materia o en otras de años superiores). Cada Institución privilegia decisiones en función de sus propias necesidades o condiciones.

- Relación dependencia y variabilidad

La relación de dependencia y variabilidad puede ser analizada si se trabaja desde una perspectiva analítica con los polinomios. Al no evidenciarse este trabajo en la organización de la unidad, no puede ser un objeto de estudio en las clases pues generaría rupturas y obstáculos que no podrían ser subsanados con el estudio del resto de los contenidos seleccionados.

- Habilidades prioritarias

El DC plantea que es necesario desarrollar en los alumnos la capacidad de análisis y de trabajo con problemáticas relevantes. El programa de la materia contempla la resolución de problemas y que el alumno sea capaz de comprender y resolver situaciones que se modelen con los contenidos que contempla la unidad, pero uno de los objetivos principales de la unidad es que el alumno sea capaz de trabajar operatoriamente con los polinomios. Esto remarca que para la institución es necesaria una comprensión profunda de algunos objetos para poder comprender otros profundamente (aunque sean de distinta naturaleza).

En este breve análisis procuramos analizar si fueron percibidos y cómo los planteamientos y lineamientos del DC. En este ejemplo particular queríamos llevar al lector a reflexionar sobre el trabajo que todo docente debe hacer en todo momento de sus prácticas y que mencionamos anteriormente: seleccionar, organizar y secuenciar los contenidos y aprendizajes en función de los requerimientos del Ministerio de Educación plasmados en los Diseños Curriculares. Nosotras comprendemos que esta no es una tarea ni sencilla ni rápida, que requiere mucho trabajo de análisis, representa un desafío para repensar la práctica y resignificar constantemente lo que se hace, se debe hacer y se hizo anteriormente. Además, sabemos que las planificaciones ya toman mucho tiempo de elaboración e incorporar este trabajo de analizar el DC constantemente conllevaría mucho más tiempo, pero creemos que traería grandes beneficios a la hora de la práctica y a pesar que no es suficiente para subsanar las fallas y desigualdades que hay en nuestro sistema educativo, es un importante avance hacia un trabajo más cohesionado.

3.2.4 Material de soporte

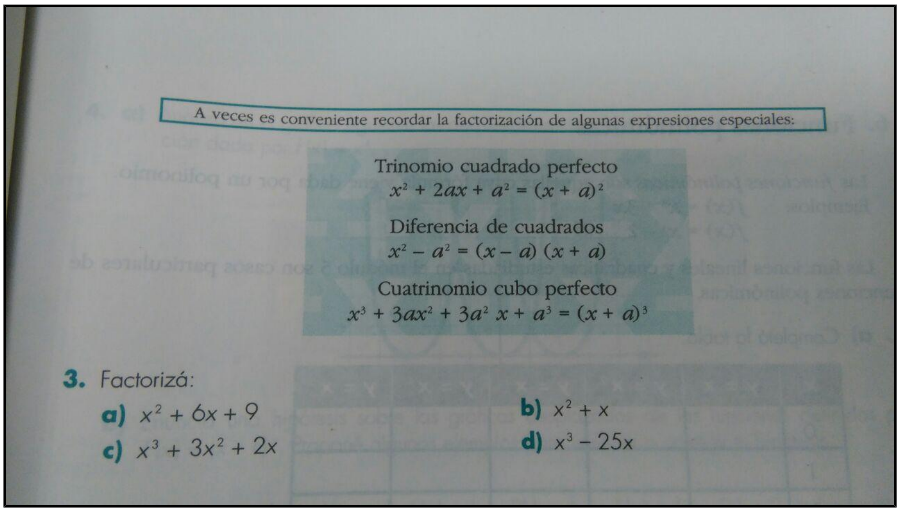
Luego de revisar qué debemos trabajar verdaderamente en el nivel secundario consideramos preguntarnos: *Si quisiéramos enseñar los casos de factorización de polinomios desde una perspectiva cercana a lo que plantea el DC ¿encontraríamos material (de nivel académico o didáctico) que ayude en el momento de planificación?*

Para continuar con el análisis, decidimos interpretar el sentido que le dan a la enseñanza de los casos de factorización de polinomios los libros de texto o manuales para el secundario que se utilizan en las escuelas. En un primer momento se pensó en analizar libros surgidos de editoriales cordobesas (ya que el DC analizado pertenece a la provincia de Córdoba), pero no pudimos encontrar material debido a que la utilización de los mismos se fue perdiendo por diversas cuestiones políticas y económicas. Así, pasamos a analizar qué ocurría con los libros que no eran precisamente de Córdoba, pero surgió otro obstáculo ya que los mismos son antiguos y no hay ediciones relativamente nuevas.

Estábamos a punto de evitar este análisis cuando consideramos que al igual que fue nuestro caso, todo docente a la hora de planificar busca información de apoyo y actividades posibles para sus alumnos. Es por esto que decidimos no evitar esta sección y presentar evidencias de la información y propuestas tanto de enseñanza como de actividades para trabajar con los casos de factorización de polinomios que se encuentran en libros de nivel secundario, páginas web y portales educativos.

Los libros:

En este momento, expondremos diferentes desarrollos teóricos y actividades planteados en libros de nivel secundario para luego hacer breves análisis sobre lo que se puede evidenciar que se plantea como enfoque de enseñanza.



A veces es conveniente recordar la factorización de algunas expresiones especiales:

Trinomio cuadrado perfecto
$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$

Diferencia de cuadrados
$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

Cuatrinomio cubo perfecto
$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$

3. Factorizá:

a) $x^2 + 6x + 9$

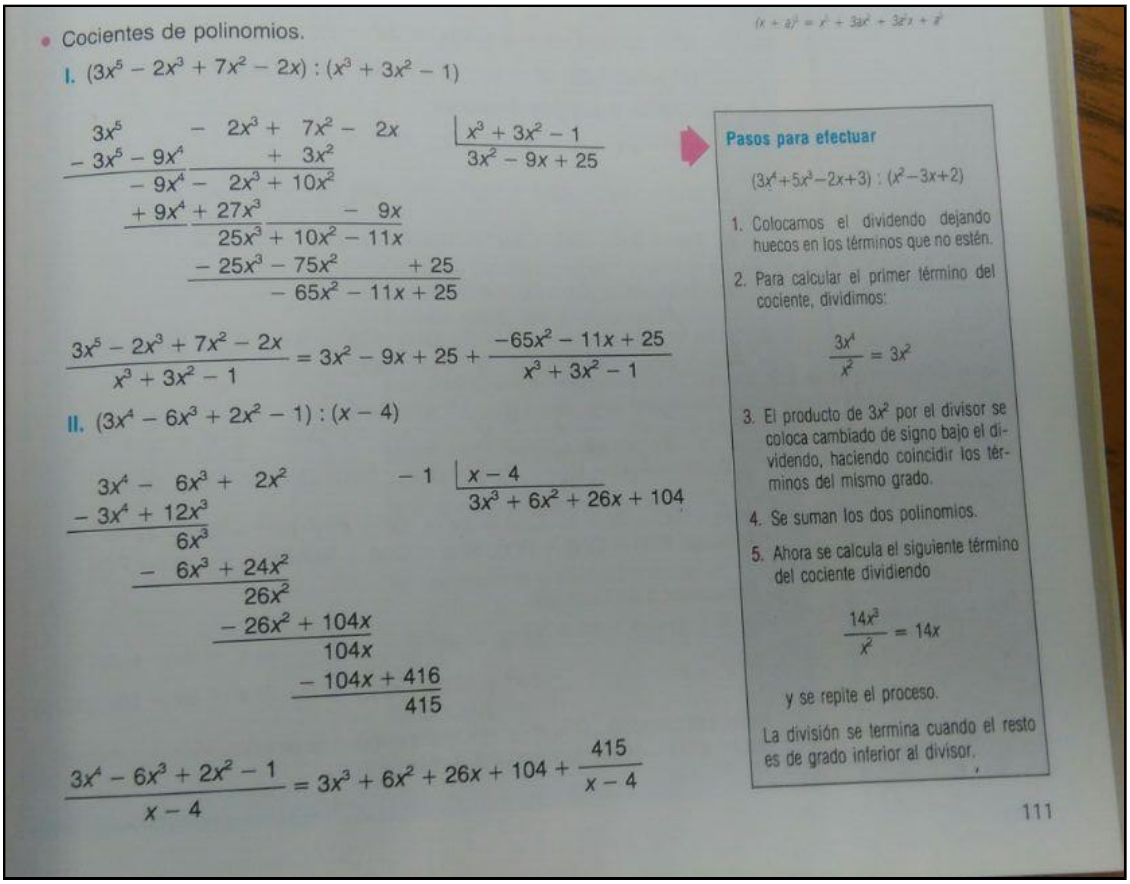
b) $x^2 + x$

c) $x^3 + 3x^2 + 2x$

d) $x^3 - 25x$

Imagen 22: tomado de Etchegoyen et al. 1999 p.141

En la Imagen 22 se aprecia cómo se presentan las herramientas como “expresiones especiales” de las cuales es conveniente recordar su factorización. Se da a conocer la igualdad de las expresiones y se puede ver que no se presentan en forma de definición, sino que a cada igualdad simplemente se le asigna un nombre. Luego de esta presentación de las herramientas, se pide a los alumnos que apliquen esa “técnica” en ciertos polinomios para factorizarlos.



$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$

• Cocientes de polinomios.

I. $(3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x) : (x^3 + 3x^2 - 1)$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & & -2x^3 & +7x^2 & -2x & & x^3+3x^2-1 \\
-3x^5 & -9x^4 & & +3x^2 & & & 3x^2-9x+25 \\
 & -9x^4 & -2x^3 & +10x^2 & & & \\
 & +9x^4 & +27x^3 & & -9x & & \\
 & & 25x^3 & +10x^2 & -11x & & \\
 & & -25x^3 & -75x^2 & & +25 & \\
 & & & -65x^2 & -11x & +25 &
\end{array}
$$

$$\frac{3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x}{x^3 + 3x^2 - 1} = 3x^2 - 9x + 25 + \frac{-65x^2 - 11x + 25}{x^3 + 3x^2 - 1}$$

II. $(3x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 1) : (x - 4)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -6x^3 & +2x^2 & & -1 & x-4 \\
-3x^4 & +12x^3 & & & & 3x^3+6x^2+26x+104 \\
 & 6x^3 & & & & \\
 & -6x^3 & +24x^2 & & & \\
 & & 26x^2 & & & \\
 & & -26x^2 & +104x & & \\
 & & & 104x & & \\
 & & & -104x & +416 & \\
 & & & & 415 &
\end{array}
$$

$$\frac{3x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 1}{x - 4} = 3x^3 + 6x^2 + 26x + 104 + \frac{415}{x - 4}$$

Pasos para efectuar

$(3x^4+5x^3-2x+3) : (x^2-3x+2)$

1. Colocamos el dividendo dejando huecos en los términos que no estén.
2. Para calcular el primer término del cociente, dividimos:

$$\frac{3x^4}{x^2} = 3x^2$$

3. El producto de $3x^2$ por el divisor se coloca cambiado de signo bajo el dividendo, haciendo coincidir los términos del mismo grado.
4. Se suman los dos polinomios.
5. Ahora se calcula el siguiente término del cociente dividiendo

$$\frac{14x^3}{x^2} = 14x$$

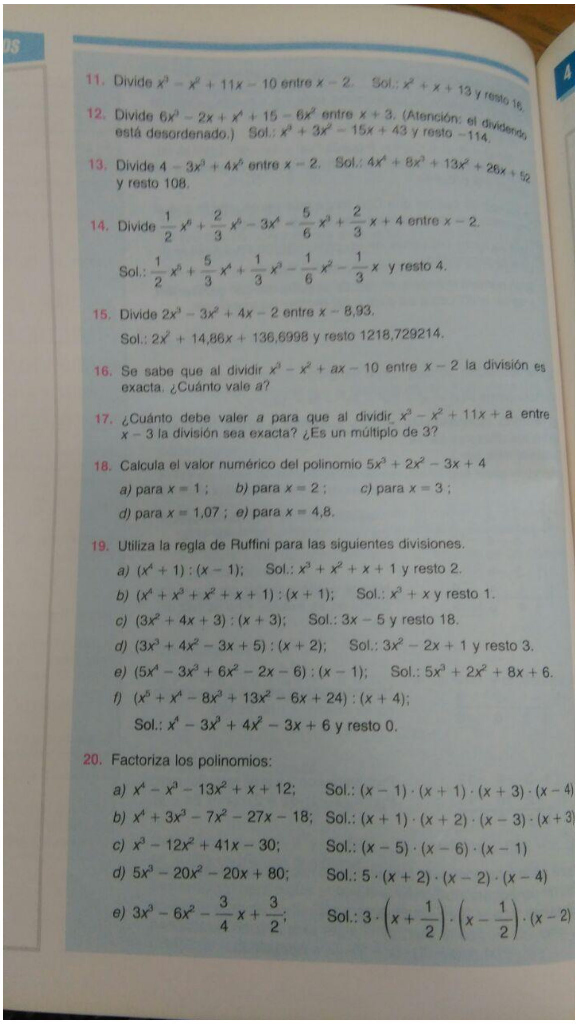
y se repite el proceso.

La división se termina cuando el resto es de grado inferior al divisor.

111

Imagen 23: tomado de Guzmán, Colera y Salvador 1991 p.111

En la Imagen 23 se puede evidenciar que además de dejar asentado el proceso de la división con un ejemplo, también explica en un recuadro ubicado a la derecha los pasos que deben aplicarse para ir resolviendo. Los términos que utiliza no son formales matemáticamente, por ejemplo cuando menciona “dejar huecos en los términos que no están”. También se pueden evidenciar errores numéricos en las cuentas que se realizan (ver ítem 5 de la explicación que ejemplifica $\frac{14x^3}{x^2}=14x$ pero en la división no hay ningún $14x^3$), lo que llevaría a una gran confusión por parte de los alumnos.



11. Divide $x^3 - x^2 + 11x - 10$ entre $x - 2$. Sol.: $x^2 + x + 13$ y resto 16.

12. Divide $6x^3 - 2x + x^4 + 15 - 6x^2$ entre $x + 3$. (Atención: el dividendo está desordenado.) Sol.: $x^3 + 3x^2 - 15x + 43$ y resto -114.

13. Divide $4 - 3x^3 + 4x^5$ entre $x - 2$. Sol.: $4x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 26x + 52$ y resto 108.

14. Divide $\frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{3}x^5 - 3x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x + 4$ entre $x - 2$.

Sol.: $\frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x$ y resto 4.

15. Divide $2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ entre $x - 8{,}93$.

Sol.: $2x^2 + 14{,}86x + 136{,}6998$ y resto 1218,729214.

16. Se sabe que al dividir $x^3 - x^2 + ax - 10$ entre $x - 2$ la división es exacta. ¿Cuánto vale a?

17. ¿Cuánto debe valer a para que al dividir $x^3 - x^2 + 11x + a$ entre $x - 3$ la división sea exacta? ¿Es un múltiplo de 3?

18. Calcula el valor numérico del polinomio $5x^3 + 2x^2 - 3x + 4$

a) para $x = 1$; *b)* para $x = 2$; *c)* para $x = 3$;

d) para $x = 1{,}07$; *e)* para $x = 4{,}8$.

19. Utiliza la regla de Ruffini para las siguientes divisiones.

a) $(x^4 + 1) : (x - 1)$; Sol.: $x^3 + x^2 + x + 1$ y resto 2.

b) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$; Sol.: $x^3 + x$ y resto 1.

c) $(3x^2 + 4x + 3) : (x + 3)$; Sol.: $3x - 5$ y resto 18.

d) $(3x^3 + 4x^2 - 3x + 5) : (x + 2)$; Sol.: $3x^2 - 2x + 1$ y resto 3.

e) $(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 2x - 6) : (x - 1)$; Sol.: $5x^3 + 2x^2 + 8x + 6$.

f) $(x^5 + x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 6x + 24) : (x + 4)$;

Sol.: $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 6$ y resto 0.

20. Factoriza los polinomios:

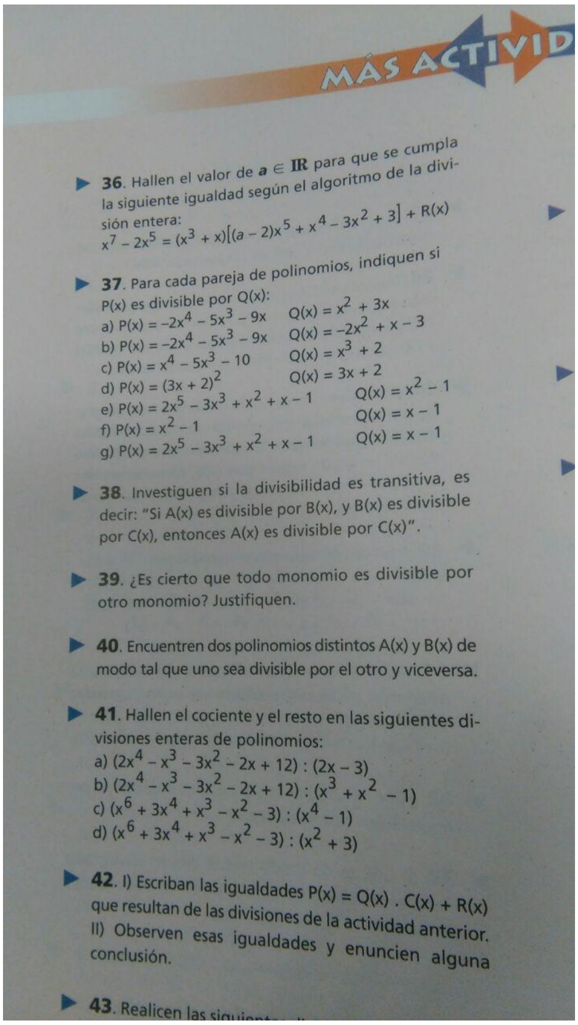
a) $x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$; Sol.: $(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 4)$

b) $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$; Sol.: $(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$

c) $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$; Sol.: $(x - 5) \cdot (x - 6) \cdot (x - 1)$

d) $5x^3 - 20x^2 - 20x + 80$; Sol.: $5 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$

e) $3x^3 - 6x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$; Sol.: $3 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 2)$



MÁS ACTIVID

36. Hallen el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la siguiente igualdad según el algoritmo de la división entera:
$x^7 - 2x^5 = (x^3 + x)[(a - 2)x^5 + x^4 - 3x^2 + 3] + R(x)$

37. Para cada pareja de polinomios, indiquen si P(x) es divisible por Q(x):
a) $P(x) = -2x^4 - 5x^3 - 9x$ $Q(x) = x^2 + 3x$
b) $P(x) = -2x^4 - 5x^3 - 9x$ $Q(x) = -2x^2 + x - 3$
c) $P(x) = x^4 - 5x^3 - 10$ $Q(x) = x^3 + 2$
d) $P(x) = (3x + 2)^2$ $Q(x) = 3x + 2$
e) $P(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 + x - 1$ $Q(x) = x^2 - 1$
f) $P(x) = x^2 - 1$ $Q(x) = x - 1$
g) $P(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 + x - 1$ $Q(x) = x - 1$

38. Investiguen si la divisibilidad es transitiva, es decir: "Si A(x) es divisible por B(x), y B(x) es divisible por C(x), entonces A(x) es divisible por C(x)".

39. ¿Es cierto que todo monomio es divisible por otro monomio? Justifiquen.

40. Encuentren dos polinomios distintos A(x) y B(x) de modo tal que uno sea divisible por el otro y viceversa.

41. Hallen el cociente y el resto en las siguientes divisiones enteras de polinomios:
a) $(2x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 12) : (2x - 3)$
b) $(2x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 12) : (x^3 + x^2 - 1)$
c) $(x^6 + 3x^4 + x^3 - x^2 - 3) : (x^4 - 1)$
d) $(x^6 + 3x^4 + x^3 - x^2 - 3) : (x^2 + 3)$

42. I) Escriban las igualdades $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ que resultan de las divisiones de la actividad anterior.
II) Observen esas igualdades y enuncien alguna conclusión.

43. Realicen las

Cuadro 23: tomado de Guzmán, Colera y Salvador 1991 p. 116 (imagen izquierda) y Kaczor et al. 2005 p.142 (imagen derecha)

En estas dos últimas imágenes contenidas en el Cuadro 23 que elegimos mostrar, podemos hacer una comparación relacionada con el tipo de actividades presentadas en dos libros de nivel secundario. Por un lado, en la imagen que se encuentra a la izquierda, se presentan ejercicios que según la clasificación de Skovsmose (2000) pertenecen al ambiente de aprendizaje denominado como "paradigma de ejercicio con referencia a la matemática pura". Los mismos llevan a que los alumnos simplemente aprendan un mecanismo para cada actividad que se le presenta. Por otro lado, en el libro que se muestra en la imagen de la derecha, se pueden evidenciar actividades que llevan a no sólo aplicar mecanismos, sino también a manipularlos para "descubrir" otros resultados y propiedades, lo que acerca a los estudiantes al ambiente de Escenario de Investigación y es cercano al concepto de exploración que menciona Ponte (2005) (es el caso de la actividad 36, 38, 39 y 40).

El portal educ.ar:

Durante la etapa de planificación de nuestras prácticas investigamos sobre el material disponible en el sitio web educ.ar[18]. En esta página se encuentran recursos para docentes y alumnos (ya sean documentos de apoyo didáctico, actividades para los alumnos o recursos interactivos). Lamentablemente, todo el caudal de información disponible no nos fue completamente útil ya que el material disponible para el tratamiento de polinomios y en particular factorización de polinomios era escaso (8 recursos relacionados con polinomios).

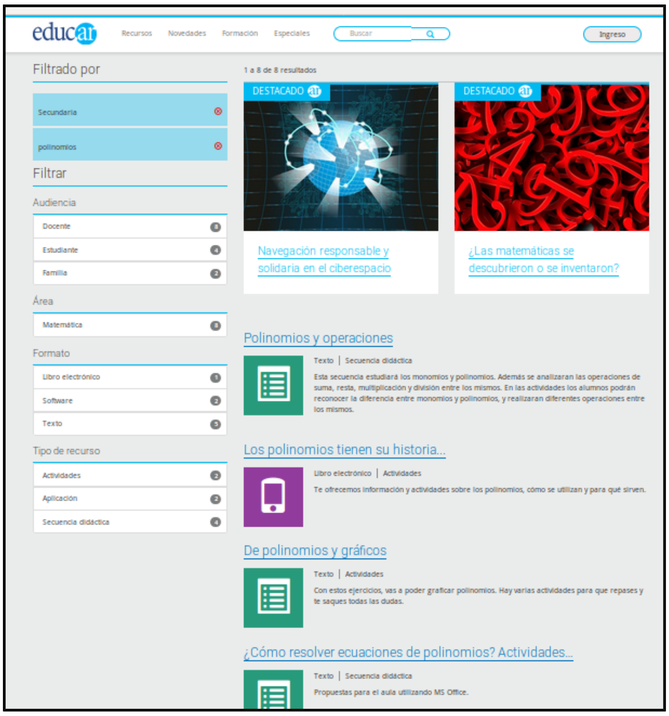
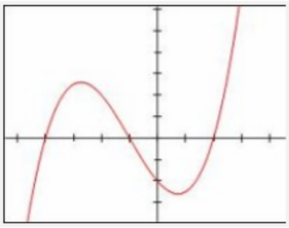


Imagen 24: página de busqueda de recursos del portal educ.ar consultado el 26/10/2017

Asimismo, de una de las actividades planteadas pudimos reconocer un gran potencial y nos fue de utilidad para presentar la Guía de Actividades Nº2 y crear el escenario de investigación que habíamos planteado en un principio para nuestras prácticas. La actividad fue recortada y modificada pero fue de gran utilidad encontrarla antes de comenzar nuestra planificación porque aportó a delimitar nuestras ideas y objetivos. A continuación, mostramos en las Imágenes 24, 25 y 26 cómo está presentada la actividad en el portal sin incluir las actividades propuestas como secuencia posterior ya que no las utilizamos y no es pertinente para nuestro análisis.

18Esta es una página que depende del Ministerio de Educación y tiene el propósito de servir de base de datos para los docentes.

Raíces de un polinomio



Autores: Sebastián Vera y Javier Peña

Responsable disciplinar: Sebastián Vera

Área disciplinar: Matemática

Temática: Raíces o ceros de un polinomio y expresión polinómica factorizada

Nivel: Secundario, ciclo básico

Secuencia didáctica elaborada por Educ.ar

Propósitos generales

0. Promover el uso de los equipos portátiles en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
0. Promover el trabajo en red y colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los alumnos y el rol del docente como orientador y facilitador del trabajo.
0. Estimular la búsqueda y selección crítica de información proveniente de diferentes soportes, la evaluación y validación, el procesamiento, la jerarquización, la crítica y la interpretación.

Introducción a las actividades

En esta secuencia trabajaremos con la búsqueda de ceros o raíces de un polinomio. Mediante las actividades propuestas los alumnos podrán observar y analizar las ventajas de escribir un polinomio en su forma factorizada para encontrar sus raíces. Para ello deberán recurrir a teoremas y propiedades vistas en otras secuencias, como el Teorema de Ruffini, el Teorema del Resto y la divisibilidad entre polinomios.

Imagen 25: portal educativo educ.ar consultado el 26/10/2017

Objetivos de las actividades

Que los alumnos:

1. Analicen las ventajas de tener polinomios factorizados para hallar los ceros.
2. Vinculen la presencia de raíces de un polinomio con factores del mismo.
3. Identifiquen los ceros o raíces de polinomios por medio de la factorización de polinomios, apelando a teoremas y a propiedades.

Objetivos pedagógicos

Actividad 1

Analicen la siguiente situación:
Para armar el asiento y el respaldo de una silla, un carpintero necesita cortar dos placas de madera con las siguientes condiciones:

0. Ambas piezas tienen que tener la misma superficie.
0. El asiento tiene que ser un cuadrado.
0. El respaldo tiene que ser un rectángulo que tenga el doble de altura que el asiento y su ancho 19,5 cm menor.

a) En grupos de dos o tres alumnos, completen la siguiente tabla con la información dada:

Imagen 26: portal educativo educ.ar consultado el 26/10/2017

partes de la silla		ancho	largo	área
Asiento				
Respaldo				

b) ¿Podrá el carpintero construir esta silla? ¿Qué ecuaciones debería plantearse para encontrar las medidas del asiento y el respaldo? Justifiquen su respuesta.

c) Para encontrar las medidas del asiento y el respaldo, tuvieron que calcular las raíces o ceros de algún polinomio. Visiten los siguientes links para profundizar sobre este tema:

Imagen 27: portal educativo educ.ar consultado el 26/10/2017

Como se puede ver en los guiones conjeturales y en el Anexo II, la actividad se utilizó para plantear los dos primeros problemas de la Guía de Actividades N°2, manteniendo la estructura y la orientación del trabajo matemático que plantea pero modificando las preguntas de modo que tengan un correlato con el texto introductorio de la guía y sean lo más claras posibles. Otra modificación a la actividad fueron las medidas ya que nosotras consideramos que era importante que las medidas que tuvieran los muebles fueran lo más realistas posibles y por eso modificamos los datos para lograr esto y atender a nuestra decisión de trabajar en un ambiente de semi-realidad.

Las páginas web:

En la búsqueda de información para poder trabajar con las definiciones de la manera que nos propusimos, vimos que era insuficiente el tratamiento que había en los libros y en el portal educ.ar por lo que decidimos buscar en otras páginas web con información académica las definiciones para tener un panorama más amplio y poder decidir con más información lo que sería mejor para nuestros alumnos.

Caso II - Factor común por agrupación de términos [editar]

Para trabajar un polinomio por agrupación de términos, se debe tener en cuenta dos características las que se repiten. Se identifica porque es un número par de términos.

Un ejemplo numérico puede ser:

$$2y + 2j + 3xy + 3xj$$

entonces puedes agruparlos de la siguiente manera:

$$= (2y + 2j) + (3xy + 3xj)$$

Aplicamos el caso I (Factor común)

$$= 2(y + j) + 3x(y + j)$$
$$= (2 + 3x)(y + j)$$

Ejercicio # 2 del algebra: am - bm + an - bn = (am-bm)+(an-bn) = m(a-b)+ n(a-b) =(a-b)(m+n)

Imagen 28: página web de wikiversidad consultada el 26/10/2017

Como se puede ver en la Imagen 28, en la breve introducción que hace, la redacción es poco clara y además menciona el error que fue muy común en los alumnos durante las prácticas que es identificar que esta herramienta se puede usar solo cuando hay un número par de términos. Luego realiza un ejemplo explicando el método con un polinomio de más de una variable.

Raíz de un polinomio

Diremos que un número $x=a$ es raíz de un polinomio $P(x)$ si al evaluar P en a se anula, es decir, $P(a)=0$.
Un polinomio es divisible por otro si al realizar la división el resto es 0.
Por tanto, si a es raíz de un polinomio $P(x)$, teniendo en cuenta el teorema del resto, podemos afirmar que $P(x)$ es divisible por x-a.

Si a es una raíz de un polinomio entonces a divide al término independiente.
Dado $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ y sea a una raíz de P
$P(a) = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0$, al sea a una raíz, $P(a) = 0$
$c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0 = 0$ pasamos el término independiente al segundo miembro y sacamos factor común a a, queda $a \cdot (c_n a^{n-1} + c_{n-1} a^{n-2} + \ldots + c_1) = - c_0$ de aquí se deduce que la raíz es divisor del término independiente.

Esto nos permite buscar las raíces entre los divisores del término independiente

Factorizar un polinomio

Factorizar consiste en descomponer un polinomio como producto de otros más simples. Cuando un polinomio no se puede poner como producto de otros más simples se dice que es irreducible.
Para factorizar un polinomio hallamos su raíces, si a es una raíz de $P(x)$, entonces $P(x)=(x\text{-}a) \cdot P_1(x)$, así hemos descompuesto P como producto de dos polinomios, reiteramos el proceso, ahora con P_1 y seguimos hasta que nos encontremos con un polinomio irreducible.

Imagen 29: página ematematicas consultada el 26/10/2017

En esta Imagen (Imagen 29) podemos ver una descripción ampliamente teórica (nos referimos con esto a que son descripciones cargadas de lenguaje matemático formal y descripciones para alumnos de nivel universitario) y condensada, que para un alumno en el nivel secundario puede generarle más confusión y desmotivarlo frente al nivel de complejidad.

Factorizar el siguiente polinomio $\Rightarrow P(x) = x^5 - 9x^3 + 4x^2 + 12x$

1. **Factor común**

   Todos los términos tienen x, es el factor común.

   $x\,(x^4 - 9x^2 + 4x + 12)$, ya hemos obtenido un factor que es x.

   Para comprobar que lo hemos hecho bien si multiplicamos debemos obtener P(x).

2. **Ruffini** para el polinomio que nos ha quedado.

   Le llamamos Q(x) $\Rightarrow Q(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$

   Los divisores del término independiente 12 de menor a mayor son: $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12$.

   Sustituimos la x del polinomio por estos valores, de menor a mayor, $\pm1,\ \pm2$ etc .

   Para $x = 1 \Rightarrow Q(1) = 1^4 - 9\cdot1^2 + 4\cdot1 + 12 \Rightarrow Q(1) = 8$

   Como $8 \neq 0$, $x = 1$ no da un factor.

   Para $x = -1 \Rightarrow Q(-1) = (-1)^4 - 9(-1)^2 + 4(-1) + 12$

   $Q(-1) = 0 \Rightarrow x = -1$ da un factor $\rightarrow (x + 1)$

Imagen 30: página vadenumeros consultada el 26/10/2017

En la Imagen 30, para presentar la forma de factorizar utiliza un resultado previo sobre las raíces enteras de polinomios de coeficientes enteros que no fue enunciado, por lo que cualquier alumno que desconoce ese resultado no comprendería la lógica del trabajo ni sabría cómo reproducirlo.

Cuadrado de un binomio: suma $(a + b)^2$ o diferencia $(a - b)^2$

Naturalmente realizar un cuadrado es multiplicar el binomio por sí mismo, luego:

$\mathbf{(a + b)^2} = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$

" El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo "

De modo similar: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (igual que antes pero cambiando el signo central).

"En cualquier caso se debe tener en cuenta que el primer término "a" también puede ser negativo y por tanto cambiar el signo central". "En general se puede considerar siempre como una suma y para cada término asignarle el signo que le preceda (ver ejemplo 13 - b)

Ejemplo 13.-

a) $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $(- x + 3)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

Imagen 31: página descartes.cnice.mec consultada el 26/10/2017

En la Imagen 31 podemos ver una presentación del binomio cuadrado que en principio es lo mismo que trinomio cuadrado perfecto pero hay diferencias porque uno está pensado en términos de factorización y otro de expansión. No representan lo mismo aunque sean expresiones equivalentes. La descripción y la presentación son semejantes a clases expositivas tradicionales.

Como se puede evidenciar en las imágenes recién mostradas, la información puede presentar algunas diferencias pero en general sólo se plantean las ecuaciones que cumplen y los nombres que adquieren, utilizando un lenguaje simbólico principalmente y minimizando el uso del lenguaje natural.

Como el lector ya se debe haber percatado, todo el material disponible en los diferentes recursos y materiales tiene la misma estructura: exponer las “definiciones” (quizás con algún ejemplo) y listar actividades de ejercitación.

> *Si los profesores de álgebra tienden a enseñar lo que está en los textos, parece obvio que el primer paso para cambiar la forma de enseñar álgebra -asumiendo que se quiera cambiar la manera en que se enseña- es modificar la presentación del álgebra en los textos* (Kieran, 1992, p.7)

Como plantea Kieran (1992), es necesario para el docente que la información a la que puede acceder le sea de utilidad para modificar sus prácticas, pero esto no solo afecta al docente. Si los alumnos al buscar información solo pueden encontrar información en lenguaje formal y con una explicación muy breve, es difícil que aporte a las representaciones mentales que ellos hacen de los objetos matemáticos.

3.2.5 El enfoque de enseñanza

De todo el material revisado y la propuesta de enseñanza hecha, queremos dilucidar:

- ¿Qué aportes brinda la enseñanza de los casos de factorización de polinomios para el desarrollo de un pensamiento matemático y la comprensión de la matemática y su estructura?
- ¿Qué tratamiento se le da al pasaje de lo algebraico a lo analítico?

El DC plantea que se debe utilizar el trabajo algebraico, analítico y los gráficos para que los alumnos tengan una mayor comprensión de la vinculación de los objetos pero no plantea cómo y ya vimos que minimiza lo algebraico. Esto dificulta que los alumnos puedan ver los objetos de manera vinculada y global.

> *...como bien se sabe existe todo un cuerpo teórico de conocimiento matemático que no puede ser subestimado ni omitido a la hora de enfrentar al estudiantado con el aprendizaje de la disciplina (Pimm, 1990; Alcalá, 2002; Lee, 2006). Más aún, cuando lo que se persigue es el aprendizaje significativo de esta disciplina. Es de mencionarse que, este cuerpo teórico, va desde las definiciones más simples a los teoremas más elaborados, tanto de la Matemática pura como de la aplicada*. (Zamora Monge y Méndez Méndez, 2014, p.1)

Este cuerpo teórico mencionado por Zamora Monge y Méndez Méndez (2014) es casi transparente a la hora de las planificaciones y muy probablemente sea la causa de varios conflictos y dificultades a la hora de enseñar diferentes temas que tienen una gran profundidad e impacto en este cuerpo teórico. Comprender el tratamiento de los polinomios y funciones polinómicas de manera integral (entendiendo las ventajas y desventajas de la representación gráfica, analítica y algebraica), comprendiendo las vinculaciones que hay entre las distintas representaciones del objeto y comprender que las actividades que se plantean en las clases no deben estar pensadas para la utilización de una sola de estas representaciones, es lo que hace que los polinomios sean una manera predilecta para construir en los alumnos nociones de estructuras matemáticas y la comprensión del trabajo matemático (Schoenfeld, 1992).

> *La idea prevaleciente es que la enseñanza de algoritmos habilitará a los alumnos, en su debido tiempo, a usar esas técnicas apropiadamente, en situaciones que son posiblemente nuevas para ellos, bajo su responsabilidad y control* (Douady, 1999, p.115)

Lo que Douady plantea como la creencia de muchos docentes es lo que, desde nuestra comprensión de la enseñanza, impide que el trabajo con polinomios sea significativo. El trabajo con polinomios en el nivel secundario aporta principalmente a la comprensión del uso del símbolo y las distintas representaciones como herramienta para el trabajo.

> *La representación de un cierto objeto abarca tanto la construcción de la representación como la posibilidad de operar con dicha representación, realizando transformaciones regidas por las leyes del registro en el que se representa.* (Sadovsky, 2005, p. 33)

Poder utilizar el símbolo y las representaciones de manera significativa en la resolución de problemas requiere una abstracción del objeto matemático desligados de sus representaciones, es lo que Davis, P. & Hersh, R. (1981) plantean como abstracción como extracción (p. 129-133). Según estos autores, el objeto puede ser comprendido utilizando representaciones pero su comprensión va más allá de eso, pues comprende al objeto en sí.

Para poder llegar a esta abstracción como extracción es necesario, como ya mencionamos antes, que los alumnos sean llevados a trabajar con las distintas representaciones de los polinomios y que puedan ir desarrollando la habilidad de elegir qué tipo de representación y manipulación de las expresiones es más útil. Esto solo se logra trabajando desde el día uno con las relaciones que guardan las distintas representaciones y valorizándolas de igual manera para que los alumnos no favorezcan la utilización de una sobre las demás.

Régine Douady (1995) en uno de sus trabajos menciona varios puntos a tener en cuenta a la hora de trabajar polinomios con los alumnos para que ese trabajo sea verdaderamente significativo. A continuación rescatamos algunas de sus ideas para ejemplificar este trabajo matemático necesario que venimos planteando:

- *Yo concibo el aprendizaje del cálculo algebraico como el equilibrio o la interacción entre la construcción del significado y la familiaridad técnica con los algoritmos* (p. 78).
- *No basta con uno o varios problemas para que los estudiantes manejen a plenitud de responsabilidad una competencia algebraica* (p. 78).

- *La escritura es un medio privilegiado para comunicarse en matemáticas; pero también es un medio* ***para progresar****. Aquí, la escritura factorizada y la escritura desarrollada facilitan el acceso a las diferentes propiedades de los polinomios* (p. 80).
- *...el hecho de que los estudiantes se hagan cargo, al menos de manera parcial, del control de sus producciones puede convertirse en un motor para el avance del aprendizaje* (p. 81).
- *Después de todo el trabajo en clase sobre el problema, al profesor le toca seleccionar aquello que para los estudiantes ha tomado sentido, aquello que es matemáticamente interesante y que se puede volver a utilizar, y aquello que hace parte, bien sea de forma directa de sus objetos de enseñanza, o en forma preliminar, o en forma de práctica de campo sobre los objetos del programa* (p. 81).
- *...el profesor tiene que organizar la transformación de las herramientas a objetos y viceversa. Su objetivo es permitir a los estudiantes apropiarse del conocimiento que, gracias a la situación, está disponible y puede tomar significado para ellos* (p. 87).
- *La explotación de los cambios entre cuadros o de cambios del punto de vista dentro de un mismo cuadro juega un papel clave.* (p. 87)
- *Se puede notar que, del lado del profesor, la institucionalización es un proceso que hace su aparición con la selección del problema, con las decisiones que organizan la situación didáctica y que el curso no es sino una etapa del proceso.* (p. 82)

No podemos establecer respuestas contundentes a las preguntas que nos hicimos al comienzo de la sección pero esperamos haber aportado herramientas que sirvan para la reflexión del lector sobre los posibles beneficios de una enseñanza más integrada y vinculada del objeto matemático polinomios. Es verdad que nos centramos en los polinomios en lugar de la factorización de polinomios, pues consideramos que comprender lo que la enseñanza de polinomios aporta a la construcción del pensamiento matemático y la comprensión del cuerpo matemático es lo que modificará la perspectiva y la enseñanza de la factorización de polinomios.

3.2.6 El caso particular del Teorema del Resto

Continuando con el análisis de nuestra problemática, queremos salirnos de la generalidad y trabajar con lo ocurrido en nuestras prácticas al presentar el Teorema del Resto. Como ya hemos mencionado, este contenido se encontraba presente en los contenidos que debíamos dar dentro de la unidad.

Para que el lector pueda entender de manera completa la dificultad surgida en nuestras prácticas, creemos que es importante destacar que previamente al dictado de este contenido, ya habíamos trabajado con los alumnos el concepto de raíz de un polinomio y una forma de factorizar polinomios a partir del conocimiento de raíces (conocido como el Teorema del Factor). No está de más decir que creemos que fue el hecho de tener una herramienta tan potente lo que llevó a los alumnos a no poder otorgar sentido o utilidad al resultado del Teorema del Resto.

Queremos destacar por qué este teorema es un punto sensible en nuestro análisis. Durante la etapa de planificación categorizamos como innecesario este teorema ya que no aporta nuevos conceptos ni resignifica los conceptos que el alumno ya incorporó en su estructura mental. A pesar de esto, buscamos la forma de que los alumnos puedan otorgarle sentido (esto se menciona en la sección 2.3.1) pues comprendimos que si nosotras tomábamos una actitud negativa, esta se transmitiría a los alumnos, y esto no era un efecto deseado. De todos modos, en el momento de las prácticas, esta falta de otorgamiento de sentido por nuestra parte se vió reflejada en los alumnos y a pesar de nuestros esfuerzos esta insuficiencia aparente de sentido e inutilidad se evidenció en todo momento incluso en las evaluaciones. Por eso, antes de comenzar a hacer algo en esta sección, queremos mostrar las siguientes evidencias al lector.

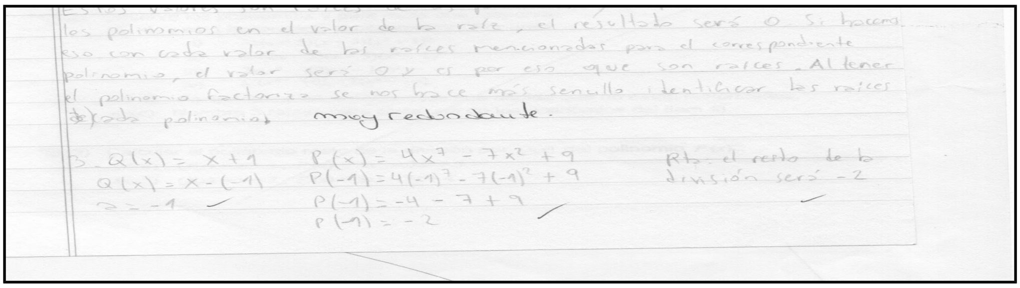


Imagen 32: resolución de la actividad 3 de la EVP1 de 4° año B

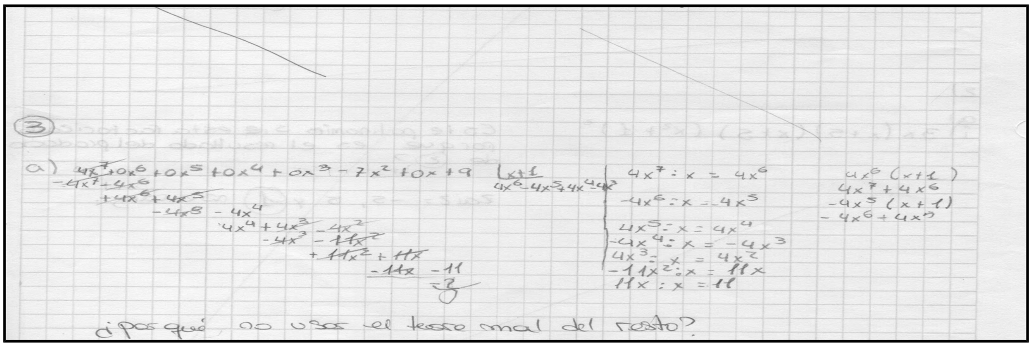
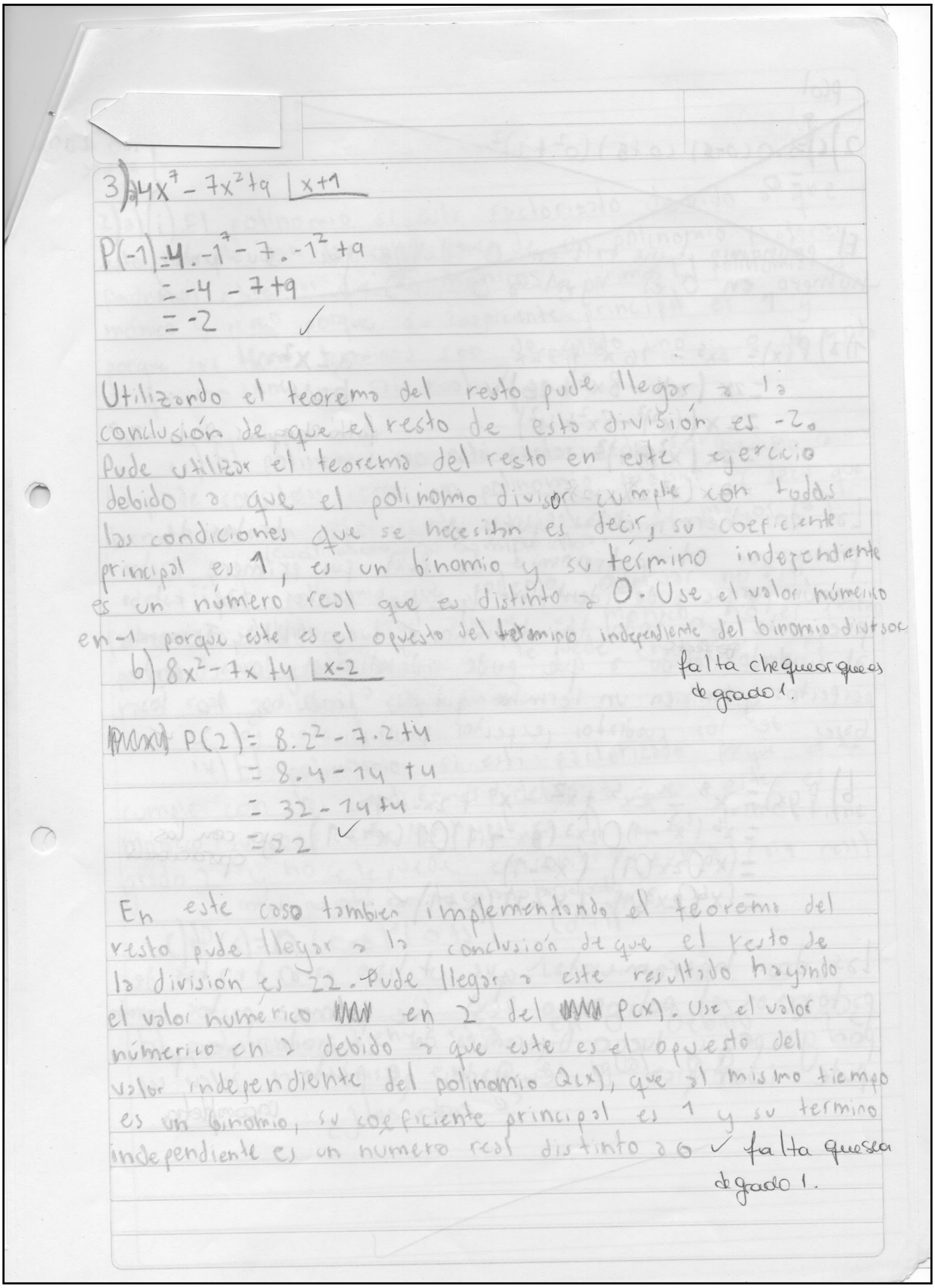


Imagen 33: actividad 3_a) de la evaluación sumativa de 4° año B



3) $4x^7 - 7x^2 + 9 \;\lfloor x+1$

$P(-1) = 4.-1^7 - 7.-1^2 + 9$
$= -4 - 7 + 9$
$= -2$ ✓

Utilizando el teorema del resto pude llegar a la conclusión de que el resto de esta división es -2. Pude utilizar el teorema del resto en este ejercicio debido a que el polinomio divisor cumple con todas las condiciones que se necesitan es decir, su coeficiente principal es 1, es un binomio y su término independiente es un número real que es distinto a 0. Use el valor número en -1 porque este es el opuesto del termino independiente del binomio divisor

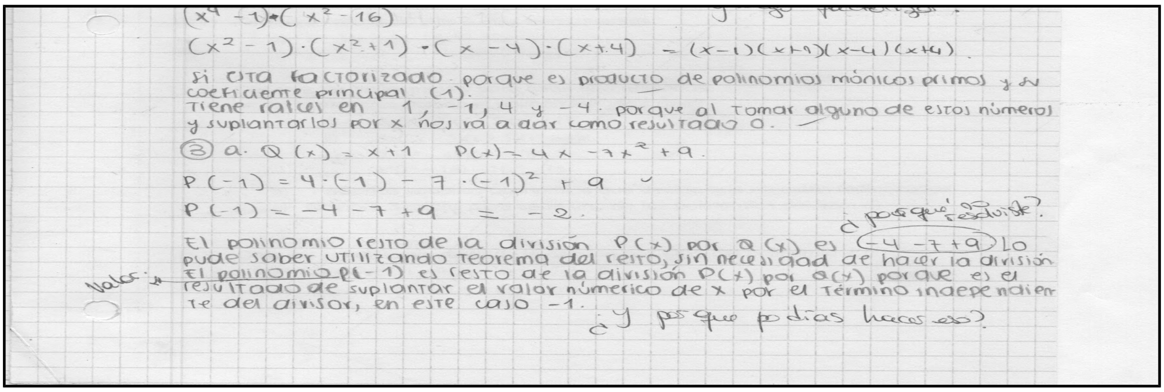
falta chequear que es de grado 1.

b) $8x^2 - 7x + 4 \;\lfloor x-2$

$P(2) = 8.2^2 - 7.2 + 4$
$= 8.4 - 14 + 4$
$= 32 - 14 + 4$ ✓
$= 22$

En este caso tambien implementando el teorema del resto pude llegar a la conclusión de que el resto de la división es 22. Pude llegar a este resultado hayando el valor numerico en 2 del P(x). Use el valor númerico en 2 debido a que este es el opuesto del valor independiente del polinomio Q(x), que al mismo tiempo es un binomio, su coeficiente principal es 1 y su termino independiente es un numero real distinto a 0 ✓ falta que sea de grado 1.

Imagen 34: resolución de la actividad 3) de la evaluación sumativa de 4° año B



$(x^4-1)\cdot(x^2-16)$

$(x^2-1)\cdot(x^2+1)\cdot(x-4)\cdot(x+4) = (x-1)(x+1)(x-4)(x+4)$

Si esta factorizado porque es producto de polinomios mónicos primos y su coeficiente principal (1).
Tiene raíces en 1, −1, 4 y −4. porque al tomar alguno de estos números y suplantarlos por x nos va a dar como resultado 0.

③ a. $Q(x) = x+1$ $P(x) = 4x - 7x^2 + 9$

$P(-1) = 4\cdot(-1) - 7\cdot(-1)^2 + 9$

$P(-1) = -4 - 7 + 9 = -2$

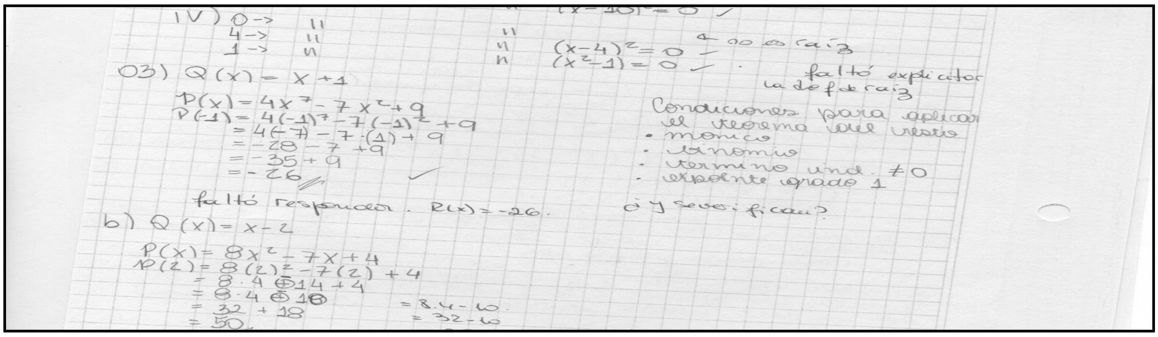
¿porqué lo resolviste?

El polinomio resto de la división $P(x)$ por $Q(x)$ es $-4-7+9$. Lo pude saber utilizando teorema del resto, sin necesidad de hacer la división. El polinomio $P(-1)$ es resto de la división $P(x)$ por $Q(x)$ porque es el resultado de suplantar el valor numérico de x por el término independiente del divisor, en este caso −1.

Valor

¿Y porque podías hacer eso?

Imagen 35: resolución de la actividad 3_a) de la evaluación sumativa de 4° año B



03) $Q(x) = x+1$

$P(x) = 4x^7 - 7x^2 + 9$

$P(-1) = 4(-1)^7 - 7(-1)^2 + 9$

$= 4(-7) - 7\cdot(1) + 9$

$= -28 - 7 + 9$

$= -35 + 9$

$= -26$

faltó responder. $R(x) = -26$.

$(x-4)^2 = 0$ 4 no es raíz

$(x^2-1) = 0$

faltó explicitar la def de raíz

Condiciones para aplicar el teorema del resto

- mónico
- binomio
- término ind. $\neq 0$
- exponente grado 1

¿y se verifican?

b) $Q(x) = x-2$

$P(x) = 8x^2 - 7x + 4$

$P(2) = 8(2)^2 - 7(2) + 4$

$= 8\cdot 4 - 14 + 4$

$= 8\cdot 4 - 10$

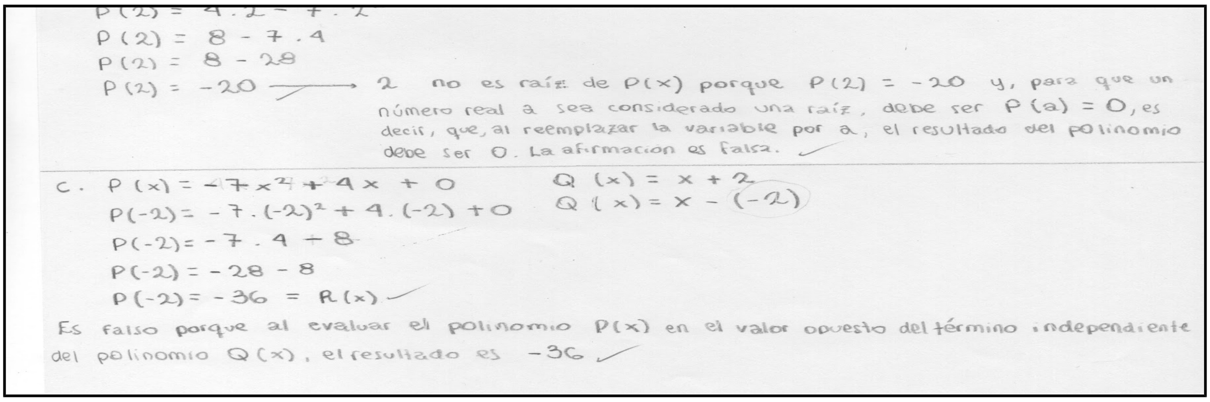
$= 32 + 18$

$= 50$

$= 8.4 - 10$

$= 32 - 10$

Imagen 36: resolución de la actividad 3_a) de la evaluación sumativa de 4° año B



$P(2) = 8 - 7.4$

$P(2) = 8 - 28$

$P(2) = -20$ → 2 no es raíz de $P(x)$ porque $P(2) = -20$ y, para que un número real a sea considerado una raíz, debe ser $P(a) = 0$, es decir, que, al reemplazar la variable por a, el resultado del polinomio debe ser 0. La afirmación es falsa.

c. $P(x) = -7x^2 + 4x + 0$ $Q(x) = x+2$

$Q(x) = x - (-2)$

$P(-2) = -7.(-2)^2 + 4.(-2) + 0$

$P(-2) = -7.4 + 8$

$P(-2) = -28 - 8$

$P(-2) = -36 = R(x)$

Es falso porque al evaluar el polinomio $P(x)$ en el valor opuesto del término independiente del polinomio $Q(x)$, el resultado es −36

Imagen 37: resolución inciso c) de la EVP1 de 4° año A

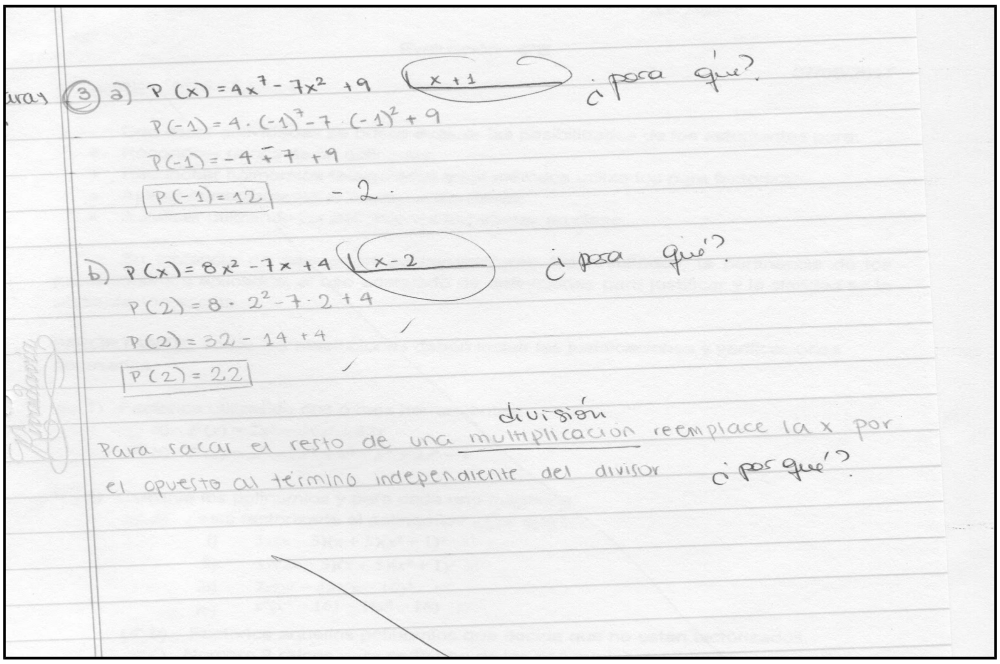


Imagen 38: resolución de la actividad 3) de la evaluación sumativa de 4° año B

Como se puede evidenciar, algunos alumnos pudieron asimilar el resultado que brinda el Teorema del Resto (Imágenes 32, 35, 36, 37) y lo aplicaron correctamente tanto en la resolución de las actividades como en las argumentaciones de las mismas. Sin embargo, no estamos seguras de que los alumnos lo hayan comprendido, es decir, consideramos que han hecho uso de las herramientas que les dimos a partir de una receta de resolución en lugar de elaborar una respuesta basándose en la comprensión del teorema.

Por otro lado, se puede evidenciar en la Imagen 33 que en particular un alumno (en este ejemplo, pero este proceder se repitió en varias evaluaciones) no logró incorporar el resultado dado por el teorema ya que al pedirle el resto de la división lo que hizo fue la división completa entre los dos polinomios a pesar de que no se le pidió que de el polinomio cociente. Un caso en el que fue evidente que el Teorema de Resto no fue significativo, sino solo un tema más para estudiar, es el que se puede ver en las Imágenes 34 y 38 pues los alumnos estaba dispuestos a hacer la división para hallar el polinomio resto y luego por una aclaración hecha al curso decidieron utilizar el teorema (la aclaración consistía en recordarles que división de polinomios no era un tema a evaluar y que el Teorema del Resto si).

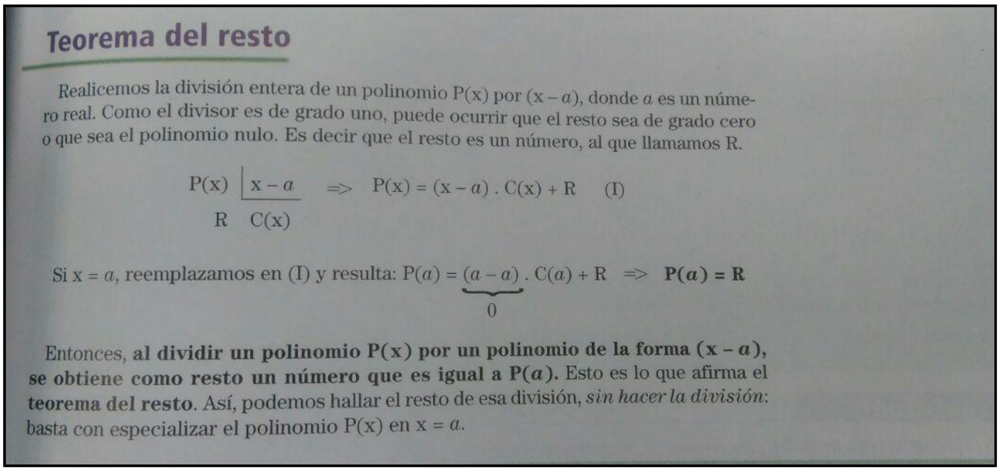
Fueron estos resultados en conjunto con nuestros cuestionamientos personales que nos motivaron a preguntarnos: *¿Cuál es el sentido de la enseñanza del Teorema del Resto en el nivel secundario?*

Para llevar a cabo este análisis acerca del sentido que tiene la enseñanza del Teorema del Resto en el nivel secundario, en un principio quisimos hacer las mismas preguntas que en el tratamiento general de nuestra problemática pero al comenzar a trabajar comprendimos que sería redundante y de poca utilidad ya que podemos listar las respuestas a todas las preguntas hechas anteriormente sin necesidad de un análisis particular. Es por esto que decidimos hacernos una nueva pregunta: *¿qué conocimientos* *aporta al alumno enseñar el Teorema del Resto en el marco de la factorización de polinomios?*

Para responder esta pregunta, comenzaremos haciendo un análisis general comparando lo ocurrido en nuestras prácticas con el marco teórico que nosotras propusimos para luego finalizar respondiendo la pregunta antes planteada.

Del análisis del DC ya sabemos que no se contempla ni es prioritaria la enseñanza del Teorema del Resto. También sabemos que al no contemplarse el origen de los casos de factorización de polinomios, no se considera tampoco la génesis de este teorema ya que surge como herramienta facilitadora en el planteamiento de algoritmos de factorización.

Al analizar libros de nivel secundario, nos encontramos con un panorama muy parecido al ya analizado en la sección 3.2.4. Pero, buscando en libros que no necesariamente pertenecen al nivel secundario, destacamos el hallazgo de lo que en muchos materiales de estudio se llama Teorema del Factor. Creemos mucho más oportuna la incorporación del mismo a las escuelas. Esta creencia es uno de los puntos a analizar en esta sección. A continuación, en las Imágenes 39, 40 y 41, presentamos fragmentos de libros donde se trata el Teorema del Resto para mostrar lo que en nosotras provocó dudas y dificultades para otorgarle sentido. Es a partir de las imágenes que comenzaremos a analizar diferentes cuestiones que modifican la enseñanza del Teorema del Resto.


Teorema del resto

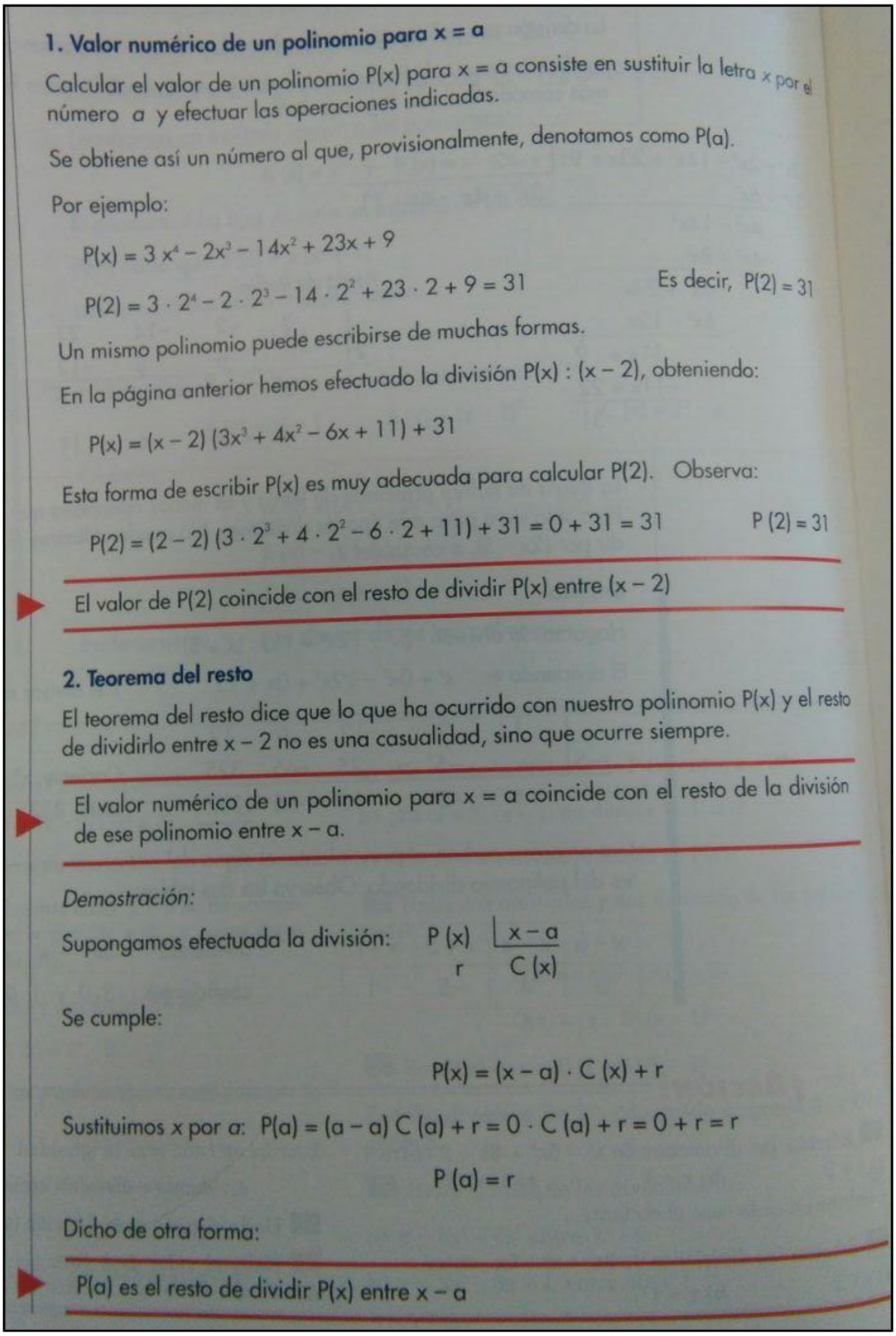
Realicemos la división entera de un polinomio P(x) por $(x - a)$, donde a es un número real. Como el divisor es de grado uno, puede ocurrir que el resto sea de grado cero o que sea el polinomio nulo. Es decir que el resto es un número, al que llamamos R.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - a \\ \hline R & C(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x - a) \,.\, C(x) + R \qquad (I)$$

Si $x = a$, reemplazamos en (I) y resulta: $P(a) = \underbrace{(a - a)}_{0} \,.\, C(a) + R \;\Rightarrow\; \mathbf{P(a) = R}$

Entonces, **al dividir un polinomio $P(x)$ por un polinomio de la forma $(x - a)$, se obtiene como resto un número que es igual a $P(a)$.** Esto es lo que afirma el **teorema del resto**. Así, podemos hallar el resto de esa división, *sin hacer la división*: basta con especializar el polinomio P(x) en $x = a$.

Imagen 39: tomado de Kaczor et al. 2005 p.133



1. Valor numérico de un polinomio para $x = a$

Calcular el valor de un polinomio $P(x)$ para $x = a$ consiste en sustituir la letra x por el número a y efectuar las operaciones indicadas.

Se obtiene así un número al que, provisionalmente, denotamos como $P(a)$.

Por ejemplo:

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 23x + 9$$

$$P(2) = 3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 14 \cdot 2^2 + 23 \cdot 2 + 9 = 31$$ Es decir, $P(2) = 31$

Un mismo polinomio puede escribirse de muchas formas.

En la página anterior hemos efectuado la división $P(x) : (x - 2)$, obteniendo:

$$P(x) = (x - 2)(3x^3 + 4x^2 - 6x + 11) + 31$$

Esta forma de escribir $P(x)$ es muy adecuada para calcular $P(2)$. Observa:

$$P(2) = (2 - 2)(3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 11) + 31 = 0 + 31 = 31$$ $P(2) = 31$

El valor de $P(2)$ coincide con el resto de dividir $P(x)$ entre $(x - 2)$

2. Teorema del resto

El teorema del resto dice que lo que ha ocurrido con nuestro polinomio $P(x)$ y el resto de dividirlo entre $x - 2$ no es una casualidad, sino que ocurre siempre.

El valor numérico de un polinomio para $x = a$ coincide con el resto de la división de ese polinomio entre $x - a$.

Demostración:

Supongamos efectuada la división: $\begin{array}{r|l} P(x) & x - a \\ \hline r & C(x) \end{array}$

Se cumple:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + r$$

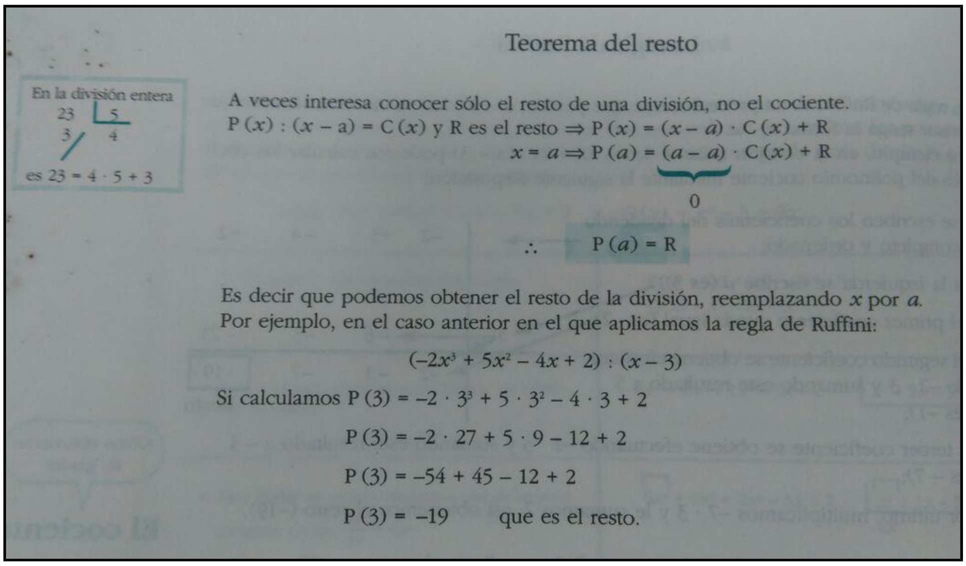
Sustituimos x por a: $P(a) = (a - a)\,C(a) + r = 0 \cdot C(a) + r = 0 + r = r$

$$P(a) = r$$

Dicho de otra forma:

$P(a)$ es el resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$

Imagen 40: Tomado de Álvarez, Arribas, Ruiz 1997 p.92



Teorema del resto

En la división entera
23 | 5
3   4
es 23 = 4 · 5 + 3

A veces interesa conocer sólo el resto de una división, no el cociente.

$P(x) : (x - a) = C(x)$ y R es el resto $\Rightarrow P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R$

$x = a \Rightarrow P(a) = \underbrace{(a - a)}_{0} \cdot C(x) + R$

$\therefore \quad P(a) = R$

Es decir que podemos obtener el resto de la división, reemplazando x por a.
Por ejemplo, en el caso anterior en el que aplicamos la regla de Ruffini:

$(-2x^3 + 5x^2 - 4x + 2) : (x - 3)$

Si calculamos $P(3) = -2 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 2$

$P(3) = -2 \cdot 27 + 5 \cdot 9 - 12 + 2$

$P(3) = -54 + 45 - 12 + 2$

$P(3) = -19$ que es el resto.

Imagen 41: Etchegoyen et al. 1999 p.136

En las Imágenes 39 y 41 se puede ver que se plantea el Teorema del Resto a partir de hacer una “demostración” y luego se escribe como conclusión el enunciado y se realiza un ejemplo. En la Imagen 40 se puede ver una secuencia “más ordenada” (coincide con las formas de presentación de la clase magistral de nivel universitario) pero no deja de presentar una demostración poco formal. En este caso se utiliza la simbología de forma conveniente pero no consistente con los objetos que se están manipulando, pues R denota el polinomio resto pero los polinomios se están denotando con mayúscula y deben representar en su nombre la variable (sabemos que esto se hace pues el polinomio resto en este caso posee grado cero pero no es simple para los alumnos entender el sentido de este cambio de notación).

Una de las dificultades surgidas en nuestras prácticas fue el hecho de que los alumnos consideraron el enunciado del teorema como una definición, y por lo tanto no podían aplicarlo correctamente (no verificaban condiciones necesarias para utilizar el resultado). *Se ha afirmado que las matemáticas están particularmente caracterizadas por algo que se llama prueba* (Davis, P. & Hersh, R., 1981, p.147). Si las demostraciones son una herramienta que caracteriza a la matemática ¿por qué las demostraciones no son parte del trabajo matemático en las clases? Una posible respuesta es que el trabajo con demostraciones demanda mucho tiempo y es muy complejo abordar las diferentes formas de demostrar matemáticamente en el aula.

> *En el caso de los teoremas, se puede explorar el dominio de validez al imaginar las variantes, demostrarlas, o, por el contrario, construir los contra-ejemplos para asegurarse de que eso no es posible. En todos los casos se llega a relacionar nociones diferentes. El hecho de relacionarlas es a su vez una fuente de significado para quienes las realizan* (Douady, 1995, p. 64).

Como planteamos anteriormente, creemos mucho más fructífero para la comprensión de los alumnos relacionado a los temas que estuvieron estudiando de factorización de polinomios, la utilización del Teorema del Factor y no precisamente el

Teorema del Resto. En el Cuadro 24 presentamos los dos enunciados como partida para realizar un breve análisis de lo que plantea cada uno.

Teorema del Resto	Teorema del Factor
El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por otro $C(x)=x-a$ se determina evaluando al polinomio $P(x)$ en el valor opuesto del término independiente del polinomio divisor $C(x)$	Un polinomio $P(x)$ tiene un factor $(x-k)$ si y sólo si k es una raíz de $P(x)$, es decir que $P(k)=0$

Cuadro 24: Comparación entre el teorema del resto y teorema del factor

En el Cuadro 24 se pueden contrastar los enunciados de cada teorema como una forma de ayudar a evidenciar lo que para nosotras es más fructífero. Por un lado, el Teorema del Resto se basa en hallar de una manera más sencilla (sin hacer la división) el resto de la división entre dos polinomios particulares. Como ya mencionamos anteriormente, el Teorema del Resto surgió como herramienta de testeo para los matemáticos que en la época trabajaban con algoritmos mientras que el teorema del factor era una herramienta que dependía de conocer las raíces para poder factorizar. Los conocimientos que requieren para su utilización son muy distintos. Si se piensa trabajar con una perspectiva no algorítmica de la factorización de polinomios, entonces no es conveniente utilizar el teorema del resto pues su función es servir a un algoritmo. En la secuenciación propuesta por nosotras (y en general de otros docentes) el teorema del factor está más vinculado con lo que "vendrían viendo" los alumnos y también estaría vinculado con la regla de Ruffini (para encontrar $Q(x)$ tal que $P(x)=Q(x)(x-k)$ con k raíz del polinomio). También podemos aclarar que el Teorema del Factor es más específico que el Teorema del Resto pero al ser un resultado de doble implicación resulta más útil a la hora de buscar formas de factorizar, ya que teniendo una raíz podemos reescribir el polinomio o identificando el factor podemos deducir que tenemos una raíz.

En nuestra práctica, el Teorema del Resto fue dictado como ya se dijo luego de la definición de raíz de un polinomio. Al presentarlo como está enunciado en el cuadro, no es difícil notar que los alumnos no pudieron encontrar una relación con lo que "venían viendo" y a lo que queríamos llegar que es factorizar un polinomio. *El profesor debe ayudar al alumno a percibir y a integrar la necesidad del rigor, tanto como debe ayudarlo a construir los conceptos matemáticos.* (Charlot, 1986, p.5). Consideramos oportuno tratar al Teorema del Resto también como una herramienta para verificar la correcta utilización de la Regla de Ruffini pero esto tampoco ayudó a los alumnos a otorgarle sentido al teorema. Además, desde nuestro punto de vista, la incorporación del Teorema del Resto no lleva a generar grandes cambios en cuanto a apropiación de sentido de otros contenidos si el mismo no estuviera. En cambio, teniendo en cuenta todo lo mencionado anteriormente, nos parece más oportuno trabajar con el Teorema del Factor con mayor profundidad debido a que vincula la definición ya apropiada por los alumnos, con el objeto de estudio al que se quiere arribar.

Finalmente, queremos tratar de dar respuesta a nuestra pregunta *¿qué conocimientos aporta al alumno enseñar el Teorema del Resto en el marco de la factorización de polinomios?* Como se puede evidenciar en nuestro análisis, afirmamos que no haber implementado el Teorema del Resto en nuestras prácticas no habría influido negativamente en la presentación de los contenidos referidos a la factorización de polinomios. Sabemos que el Teorema del Resto es muy debatido y "el salto epistemológico" que es necesario para que los alumnos puedan incorporarlo es una cuestión que no llegamos a problematizar pero que sabemos que está presente. *Para estar seguros, siempre hay una posibilidad de desacuerdo entre las intuiciones. El proceso de ajuste mutuo para asegurar el acuerdo nunca se termina completamente* (Davis, P. & Hersh, R., 1981, p.399). Hasta este momento nuestras intuiciones están en desacuerdo y mientras no podamos responder sobre un motivo por el cual enseñar el Teorema del Resto en el nivel secundario, afirmamos que una alternativa más fructífera tal vez con los estudiantes y con sus procesos de aprendizaje es trabajar con el Teorema del Factor.

3.3 Conclusiones

El propósito es promover en los estudiantes una formación que incluya la diversidad de discusiones teóricas y metodológicas que provienen de los diferentes campos de reflexión y acción de estas Ciencias, asegurando el desarrollo de propuestas de enseñanza que contemplen la articulación y la convergencia de saberes para la consideración de diferentes problemáticas sociales (DC, 2011, p.1 Tomo 3).

Para concluir nuestro análisis queremos tratar de responder desde nuestra perspectiva teniendo en cuenta todo lo analizado anteriormente, al título de la problemática planteada. Todo este análisis fue realizado con el fin de poder encontrar qué sentido tiene para el nivel secundario la enseñanza de los casos de factorización de polinomios.

Luego de un análisis minucioso sobre cada aspecto que consideramos que puede influir en la aplicación o no de los casos de factorización de polinomios en el nivel secundario, podemos decir que el sentido de la enseñanza de este objeto está fuertemente ligada a la perspectiva que el docente adopte sobre el tema y que es fuertemente dependiente de los objetivos a lograr y las interacciones en el aula que se quieren favorecer. Consideramos que una perspectiva más integral y vinculada con las exploración de las diferentes representaciones (aumentando progresivamente el uso del lenguaje matemático formal) <u>es una de las maneras</u> de darle significado a la enseñanza de estos temas en el nivel secundario.

> *…un matemático productor "sabe" muy distinto que un alumno de la escuela concebido como "matemático", lo cual obliga a pensar qué elementos tendría un alumno para reconstruir una idea que fue elaborada con otras herramientas y desde otro marco conceptual* (Sadovsky, 2005, p. 24).

No podemos olvidar que nuestros alumnos no son matemáticos expertos (Schoenfeld, 1992) ni que el saber matemático del aula es diferente al saber matemático de la comunidad científica, pero se puede acercar a los alumnos poco a poco a comprender esta comunidad de práctica. Para poder lograr esto, no podemos olvidarnos del rol que deben asumir los alumnos:

> *Los estudiantes, por su parte, para aprender necesitan asumir la tarea de reconstrucción matemática como un proyecto personal: esto implica que consideren como objeto de reflexión sus resoluciones y que puedan producir teoría a partir de ellas…* (p.59)

Lograr que los alumnos se involucren en este trabajo es un desafío para el docente y creemos que teniendo este desafío como objetivo lograremos ir cambiando poco a poco la enseñanza de la matemática.

> *La participación de cada uno de los actores enriquece la producción y permite poner en discusión la diversidad de representaciones y significados de los objetos matemáticos que surgen de las prácticas* (Diseño curricular, 2011, p.13 tomo 3)

4. A modo de cierre

"Cuando encontramos que hay coherencia efectiva entre enseñanza y evaluación, cuando la evaluación está alineada con el currículo y con la programación didáctica, cuando evaluación y enseñanza están realmente entretejidos, cuando los nuevos aprendizajes de los alumnos se asientan sobre aprendizajes previos y se establece una red que contiene los aprendizajes nuevos y lo que ya sabían y entre ellos se enriquecen mutuamente, cuando lo que se enseña y se aprende es interesante y desafiante, y cuando se perciben estos aprendizajes como asequibles, entonces, en esa congruencia, hallamos la "honestidad" de la buena enseñanza y de la buena evaluación de los aprendizajes" (Alicia Camilloni citado en Documento curricular, Ministerio de Educación, 2011, p.15)

Utilizaremos la última sección de este informe para realizar reflexiones finales acerca de nuestras prácticas profesionales y los aportes que nos brindó a nuestra formación como futuros docentes, pero primero queremos agradecer a la institución y la docente que nos abrieron las puertas y nos brindaron su apoyo para esta etapa de nuestra formación.

En primer lugar queremos destacar los aportes obtenidos en nuestra primera experiencia como responsables de la planificación de una unidad de un curso de secundario. Teniendo en cuenta que esta planificación la realizamos sólo teniendo la base de los contenidos que debíamos dar, consideramos que fue un trabajo muy gratificante elaborar y pensar actividades para nuestros alumnos "partiendo desde cero". Confeccionar guiones conjeturales para cada clase, considerando conjeturas para todos los momentos ya sean de carácter teórico o práctico, nos ayudó a ampliar nuestra visión acerca de todo lo que se debe tener en cuenta a la hora de planificar.

En segundo lugar queremos mencionar lo que consideramos que generó el mayor crecimiento personal durante toda esta experiencia, que es haber estado a cargo de la enseñanza de una unidad. Nuestras prácticas en general fueron muy gratificantes y pudimos aprender aspectos que hasta ahora en nuestra carrera no habíamos podido vivenciar, como lo es el llamado manejo de un grupo. Aprendimos que hay 1001 formas de que la clase que se prepara cambie antes de llegar al aula y en el aula se cambie otras 100 veces. Comprendimos más la complejidad del trabajo docente y el rol que ocupa en las instituciones.

En tercer lugar queremos destacar que estudiar en profundidad el tema que nos fue asignado nos ayudó a visualizar todo lo estudiado sobre la complejidad de los conceptos matemáticos y cómo tratarlos para la presentación en el aula. El estudio en profundidad de los temas nos ayudó a ver que siempre se puede estar mejor preparados y conocer más aspectos y resultados que ayuden a presentar diferentes perspectivas en el aula y a tener alternativas a la hora de necesitar cambiar el rumbo en el aula.

En cuarto lugar queremos mencionar los aportes generados al haber realizado un extenso análisis de una problemática surgida durante nuestras prácticas profesionales. El buscar información, tratar de vincularla con nuestra problemática y tener que elaborar análisis, plantear alternativas y pensar un objeto de enseñanza desde las diferentes estructuras que lo delimitan provocó que comprendieramos mejor el Sistema Didáctico y las interacciones entre todos los actores.

Esperamos que todo el trabajo realizado provea de información al lector sobre lo que es beneficioso y lo que no a la hora de planificar sobre la factorización de polinomios. Esperamos que las decisiones tomadas sobre la estructuración de las prácticas pueda ayudar a repensar las interacciones en el aula y ayude a concretar las ideas de cambio que siempre se mencionan en los distintos ámbitos de problematización de la enseñanza. Por último, esperamos que lo planificado y lo logrado sirva como punto de partida para el lector, siendo de apoyo para lograr mejoras cada vez más significativas en la enseñanza de la matemática.

La educación es el arma más poderosa para cambiar el mundo.

Nelson Mandela

5. Referencias

ARTÍCULOS Y TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN:

- Arcavi, A. (1194) *Symbol sense: Informal sense-making in Formal Mathematics* aparecido en la revista For the learning of Mathematics. Traducción 2003
- Bombini, G. (2002) *Prácticas docentes y escritura: hipótesis y experiencias en torno a una relación productiva*, ponencia presentada en las primeras Jornadas de Práctica y residencia en la formación docente, Facultad de FIlosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba. Disponible en: http://renpyr.xtrweb.com/jornadas/(D)%20Practicas/WebTrabajos/BOMBINI%20T.htm
- Charlot, B. (1986). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas.* Conferencia dictada en Cannes. Citado en Gobierno de la Provincia de Buenos Aires. Secretaría de Cultura y Educación. Serie Documentos para capacitación semipresencial. Educación Secundaria 1° año (7°ESB). Introducción al Diseño Curricular Matemática (pp 65,69). La plata, Buenos Aires, Argentina:Autor.
- Davis, P. & Hersh, D. (1981) *The mathematical experience*, Editorial Mariner books, Boston, Estados Unidos de América (reimpresión de la edición de 1989)
- Douady, R. (1995) *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento* en Ingeniería didáctica en educación matemática, Grupo Editorial Iberoamericana, Bogotá, Colombia.
- Douady, R. (1999) *Relation Function/al Algebra: An example in high school (age 15-16)* in European Research in Mathematics Education I (p.113-124)
- Gvirtz, S; Palamidessi, M. (2008) *El ABC de la tarea docente: Curriculum y enseñanza*, Editorial Aique. Buenos Aires.
- Jimenez Ardila, S; Salazar Fino, V; Mora Mendieta, L. (2013). *La factorización de polinomios de segundo grado y los personajes involucrados en su historia*, I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. República Dominicana.
- Kieran, C. (1992) *The Learning and Teaching of School Algebra* publicado en Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning, (Ed.) Grouws, Macmillan, New York, 1992, pp. 390-419. Traducción parcial realizada por Vilma María Mesa, y luego Dilma Fregona amplió esas notas para el curso “Didáctica y taller de matemática” del Profesorado de Matemática de la Fa.M.A.F
- Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica .* Editorial Paidós, Argentina.
- Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba Secretaría de Educación Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa Dirección General de Planeamiento e Información Educativa (2011), *La evaluación de los aprendizajes en Educación Secundaria. Documento de apoyo curricular*.
- Ministerio de Educación del Gobierno de la Provincia de Córdoba. Diseño Curricular para el ciclo Orientado-documento de trabajo 2011.
- Ponte, J.P. (2005). *Gestão curricular em matemática*, In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

- Pòlya, G. (1945,2° edición 1957, reimpresión 2009) *How to solve it? A new aspect of mathematical method*, Editorial Ishi Press, Nueva York, Estados Unidos de América.
- Radillo Enríquez, M.; Nesterova, E.; Ulloa Azpeitia, R. y Pantoja Rangel, R. (2005) *Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas relacionados con deficiencias en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático y viceversa* en CIVE 2005 Congreso Internacional Virtual de Educación, Universidad de Guadalajara, México.
- Radillo Enríquez, M. (2012) Los códigos del lenguaje matemático en la geometría euclidea en Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25 (p.161-169).
- Sadovsky, P. (2005) *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Libros del Zorzal. Buenos Aires, Argentina.
- Schoenfeld, A. (1992) *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics*. In: Grouws, D. (Ed.) Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. p. 334-370. New York: Macmillan.
- Sessa, C. (2005) *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*. Libros del Zorzal, Buenos Aires, Argentina.
- Skovsmose, O. (2000) *Escenarios de investigación*. Revista EMA 6(1), 3-26.
- Villarreal, M. (2012) *Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. Virtualidad, Educación y Ciencia*. V.3, N.5, pp. 73-94. http://revistas.unc.edu.ar/index.php/vesc
- Zamora Mongue, W. y Méndez Méndez, M. (2014) *En Matemática es importante tanto la teoría como la práctica: el papel de las definiciones.* Universidad UCR, Costa Rica.

PÁGINAS WEB:

- https://es.wikiversity.org/wiki/Factorizaci%C3%B3n Página wikiversidad en factorización consultada el 26/10/2017.
- https://www.ematematicas.net/polinomios.php?ejercicio=factoriza Página ematemáticas rsobre factorización de polinomios consultada el 26/10/2017.
- http://www.vadenumeros.es/cuarto/factorizacion-de-polinomios.htm Página vadenumeros consultada el 26/10/2017.
- http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Polinomios/polinomios1.htm Página Descartes consultada el 26/10/2017.
- Portal educ.ar: https://www.educ.ar
- https://www.educ.ar/recursos/14989/raices-de-un-polinomio Actividad mencionada en la sección 3.2.4 El portal educ.ar consultada el 26/10/2017.
- https://es.wikipedia.org/wiki/Factorizaci%C3%B3n_de_polinomios Página Wikipedia sobre factorización de polinomios consultada el 3/10/2017.
- https://es.wikipedia.org/wiki/Historia_de_la_matem%C3%A1tica Página Wikipedia sobre historia de la matemática consultada el 26/10/2017.
- https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Cronolog%C3%ADa_de_la_matem%C3%A1tica Página Wikipedia sobre cronología de la matemática consultada el 26/10/2017.
- https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_factor Página Wikipedia sobre el teorema del factor consultada el 26/10/2017.
- https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_resto Página Wikipedia sobre el teorema del resto consultada el 26/102017.

LIBROS DE NIVEL SECUNDARIO:

- Etchegoyen, S.; Fagale, E.; Rodríguez, S.; Avila de Kalan, M.; Alonso M. (1999) *MATEMÁTICA 1* Editorial Kapelusz, Buenos Aires, Argentina.
- Álvarez, F.; Arribas, A. y Ruiz, A. (1997) *Fractal Matemáticas 4* Editorial Vicens Vives, Barcelona, España.
- Kaczor, P.; Schaposchnik, R.; Franco, E.; Cicala, R. y Díaz, B. (2005) *MATEMÁTICA I* Editorial Santillana POLIMODAL, Montevideo, República Oriental del Uruguay.
- Altman, S.; Comparatore, C. y Kurzrok, L. (2002) *Funciones 1* Editorial Longseller Buenos Aires, Argentina.
- de Guzmán, M.; Colera, J. y Salvador, A. (1991) *MATEMATICAS Bachillerato 1* Editorial ANAYA, Madrid, España.
- Buteler de Defrancisco, D. y Giorgetti de Giubergia, A. (1995) *MATEMATICA 3* Lugar Editorial, Buenos Aires, Argentina.

6. Anexo

Anexo I: Planificación anual de la materia

Fundamentación: la matemática está presente en el proceso educativo para contribuir al desarrollo integral de los/as estudiantes, con el objetivo de aumentar las perspectivas de asumir los retos del siglo XXI, época signada por la ciencia y la técnica. La misma tiene un papel formativo, pues al ser una ciencia que a partir de nociones fundamentales desarrolla teorías que se valen únicamente del razonamiento lógico, contribuye a desarrollar el pensamiento lógico-deductivo, permitiendo formar sujetos capaces de observar, analizar y razonar. De esa manera posibilita la aplicación de los conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivos con las de los demás. El desarrollo de la competencia cognitiva general, y la posibilidad de llevar a cabo razonamientos de tipo formal, abren nuevas oportunidades para avanzar en el proceso de la construcción del conocimiento matemático, asegurando mayores niveles de abstracción. Esta ciencia posee también un valor instrumental, ya que sirve como herramienta para resolver problemas en todas las actividades humanas. En ese sentido, aporta técnicas y métodos funcionales para la vida. La representación de la realidad, la clasificación de los elementos y la abstracción coherente es producto de una tecnología matemática. La matemática para la Educación Media introduce nuevas relaciones entre, conceptos y procedimientos, ampliando el campo de reflexión; se utilizan nuevos algoritmos de creciente complejidad, poniendo énfasis en la comprensión y exploración de nuevas aplicaciones de los mismos, relacionándolo con otras ciencias. En la actualidad, en función de las necesidades del mundo del trabajo, de los avances tecnológicos y de los cambios en el campo de estudio de otras ciencias, es necesario abordar en su enseñanza elementos de estadística descriptiva, en análisis de errores, la formulación de modelos determinísticos y probabilísticos y las estrategias para la resolución de problemas. Para ello, será necesario el empleo de productos tecnológicos actuales, los cuales contribuyen a promover en el educando nuevas capacidades que pueden darse tanto en el dominio cognitivo, afectivo o psicomotor, para lograr de esta manera, la formación de personas altamente competitivas en la sociedad actual. La matemática debe ser vista como una parte integrante de la cultura de la humanidad, no solo por su función instrumental sino también porque incentiva la creación de mentes críticas y creativas, ya que si bien vivimos en un mundo concreto, es necesario desarrollar la capacidad de abstracción, a fin de comprender y modificar nuestro entorno.

Objetivos generales:

- Adquirir esquemas de conocimientos que les permitan ampliar su experiencia dentro de la esfera de lo cotidiano.
- Desarrollar procesos de pensamiento específico dirigido a dicha experiencia.
- Comprender la significación y funcionalidad de los sistemas de representación en su conexión con el mundo, entre sus diversas ramas y con otras ciencias.
- Destacar el valor y el método de esta asignatura como fundamento de los conocimientos que necesita el alumno dentro cualquier actividad.
- Reconocer y utilizar correctamente los diferentes conjuntos numéricos.
- Interpretar conceptualmente cada tema.

- Valorar la tecnología como elemento que posibilita la agilidad y exactitud enriqueciendo el campo conceotual.
- Manejar correctamente los instrumentos de trabajo específicos, adquiriendo un método para tal tarea.

Unidad-conceptos	contenidos	Objetivos especificos	estrategias/actividades	capacidades	Criterios y formas de evaluación
Unidad N°1: trigonometría Conceptos: relaciones trigonométricas	-sistemas de medición -conversión -circunferencia trigonométrica -razones trigonométricas en el triángulo rectángulo -resolución de triángulos rectángulos -valores trigonométricos de ángulos notables	que el alumno pueda: -establecer las diferencias entre los distintos sistemas de medición -definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo -establecer las propiedades entre los lados -aplicar estrategias personales para resolver problemas que relacionan ángulos y longitudes -resolver problemas de la vida cotidiana aplicando las propiedades de la trigonométría	-lectura comprensiva de los enunciados -resolución de problemas -resolución de ejercicios -análisis de resultados	-diferenciar unidades de medidas angulares -establecer relaciones entre lados y ángulos -solucionar situacione problemáticas -resolver ejercicios -hacer uso del lenguaje matemático adecuado	-se evaluará el trabajo diario en la carpeta y guías de trabajo -se hará un seguimiento diario del desempeño áulico(responsabilidad, respeto y compañerismo) que se reflejará en la nota de seguimiento trimestral -las evaluaciones serán de pocos contenidos con el objetivo que los alumnos vayan estufianfo parcialmente las unidades y así poder observar las dudas o errores que puedan tener durante el proceso de aprendizaje. -se consiera el orden, prolijidad, procedimiento y resultado en la resolución -se evalúa teórico y práctico -se realizarán evaluaciones orales y escritas durante todo elt rimestre -se tendrá en cuenta a la hora de evaluar: procedimiento/desarrollo (80%), resultados (15%) y prolijidad y ortografía (5%)
Unidad N°2: “Inecuaciones” Conceptos: Inecuaciones: -Resolución -Sistemas -Gráficos	-Definición de desigualdad -Operaciones -Resolución de Inecuaciones -Sistemas de Inecuaciones -Gráfico de soluciones	-Introducir al alumnos en el tema de desigualdades y sus operaciones -Resolver sistemas de inecuaciones -Graficar las soluciones	-Lectura comprensiva de los enunciados -Resolución de ejercicios Análisis de la solución gráfica	-Manejo de operaciones con inecuaciones -Resolver situaciones problemáticas -Hacer uso del lenguaje matemático adecuado	**Igual que en la columna anterior**
Unidad N°3: “Expresiones algebraicas fraccionarias” Conceptos: -Polinomios -	-Expresiones algebracias enteras: los polinomios. -Características de los polinomios. -Operaciones: Suma, resta y multiplicación	Que el alumnos pueda: -Conocer y manejar las expresiones algebraicas. -Realizar operaciones con polinomios. -Factorizar polinomios.	-Lectura comprensiva de los enunciados -Resolución de ejercicios -Realización de gráficos	-Oralidad, lectura y escritura -Manerjo de las funciones polinómicas -Resolución de ejercicios y situaciones problemáticas	**Igual que en la columna anterior**

Operaciones -Factorización -Raíces -Gráfico	de polinomios. División entera de polinomios. -Valor numérico de un polinomio para $x=a$. -Raíces de un polinomio. -Regla de Ruffini. Teorema del Resto. -Descomposición de un polinomio en factores: Factor común, diferencias de cuadrados, factor común por grupos, trinomio cuadrado perfecto. -Operaciones sencillas con expresiones algebraicas fraccionarias. -Casos de factoreo. Teorema de Gauss. -Calculo de raíces de un polinomio. Conjunto de ceros, positividad y negatividad. Gráfico aproximado de una función polinómica.	-Determinar sus raíces -Encontrar los intervalos de positividad y negatividad. -graficas las funciones polinómicas en forma aproximada		-Hacer uso del lenguaje matemático adecuado	
Unidad n°4: “El conjunto de los números complejos” Conceptos: -Unidad imaginaria -Números complejos -Operaciones -Representación gráfica	-El número imaginario. Necesidad de su creación. -El número complejo como par ordenado y como binomio. -Su representación en el plano. -Forma polar tt trigonométrica del número complejo. -Operaciones con complejos -Resolución de ecuaciones con solución en el	Que el alumnos pueda: -Caracterizar los diferentes conjuntos numéricos por sus usos y sus propiedades. -Analizar las propiedades de las operaciones de los distintos conjuntos numéricos en la resolución de problemas. -Generar diferentes estrategias de cálculo y estimar resultados al resolver problemas, evaluando la	-Lectura comprensiva de los enunciados -Resolución de ejercicios -Realización de gráficos	-Manejo de los números complejos -Resolución de ejercicios y situaciones problemáticas -Hacer uso del lenguaje matemático adecuado	**Igual que en la columna anterior**

	campo de los números complejos	validez de procedimientos y resultados de acuerdo al problema.			
Unidad N°5: “Vectores” Conceptos: -Vectores -Operaciones -Representación gráfica	-Vectores en el plano. -Vectores referidos al origen de coordenadas. Adición y sustración de vectores. -Producto de escalar por un vector. Módulo. -Descomposición vectorial. -Producto escalar de dos vectores -Producto vectorial	Que el alumnos pueda: -Tener un manejo de vecrores para una futura utilización en física. -Poder realizar operaciones -Representar gráficamente vectores. -Descomponer vectores utilizando los conceptos de trigonometría	-Lectura comprensiva de los enunciados -Resolución de ejercicios -Realización de gráficos	-Resolución de situaciones problemáticas -Poder definir conceptos haciendo uso del lengujae matemático adecuado	**Igual que en la columna anterior**

Anexo II: Materiales preparados durante la planificación de las prácticas

Guía de Actividades Nº1

Ejercitación

1) Construya un polinomio que…

a) … tenga como raíz al punto $x=1$

b) … tenga como raíces a los puntos $x=1$, $x=8$ y $x=-9$.

c) … tenga raíces en los mismos puntos que en el inciso anterior pero también sea un polinomio de grado 4.

d) … sea de grado 2 tenga una sola raíz.

2) ¿Cuáles de los siguientes polinomios tienen una raíz en $x=0$, $x=2$ y/o $x=4$?

a) $P(x)=(x+27).(x-8).(x-2)$

b) $P(x)=(x^2-4).(x^2-8x+16)$

c) $P(x)=x^2-8x+16$

d) $P(x)=x^2-27x$

3) ¿Cuáles de estas expresiones podrían corresponderse con el algoritmo de división? Identifiquen los polinomios cociente, divisor y resto.

a) $P(x)=(x^3+9x-7).(x^5+3)+x^4-6$

b) $P(x)=(x^3+9x-7).(x^5+3)+x-6$

c) $P(x)=(x^3+9x-7).(x^8-45)+x^4+x^3-x-6$

d) $P(x)=(x^3+9x-7).(x^5+3).(x^4-6)$

e) $P(x)=(x^5+9x-7)+(x^5+3).(x^4-6)$

f) $P(x)=x^3+(9x-7).(x^5+3).x^4-6$

Un número real a es *raíz* de un polinomio $P(x)$ si $P(a)=0$.
Si un polinomio $P(x)$ tiene una raíz en $x=a$ entonces $P(x)$ se puede escribir de la forma $P(x)=(x-a).Q(x)$ donde $Q(x)$ es un polinomio de un grado menor que $P(x)$.

4) Calcular el resto de la división de $P(x)$ por $C(x)=x-a$ en los siguientes casos:

a) $P(x)=2x+5$ con $a=2$

b) $P(x)=2x+5$ con $a=-2$

c) $P(x)=-2x+5$ con $a=2$

d) *$P(x)=x^5-8x+10$ con $a=3$

e) *$P(x)=7x^2-98x+343$ con $a=-7$

f) *$P(x)=7x^2-98x+343$ con $a=7$

5) ¿Cuáles de los valores de a de la actividad anterior son raíces? ¿Por qué?

6) Para los polinomios del inciso b) y d) de la actividad 2 calcular el resto de la división por $C(x)=x+2$ y $S(x)=x-3$ utilizando la Regla de Ruffini.

7) *

a) Hallar el resto de la división de $P(x)$ por $C(x)=x-1$.

i) $P(x)=x^3-3x^2+4x+k$

ii) $P(x)=x^2-2x-k$

iii) $P(x)=x^2+2x-1$

b) ¿Para qué valores de k, $x=1$es una raíz?

c) Decida y justifique si los factores que se obtuvieron en los incisos anteriores son polinomios primos.

8) Verificar cuál de las siguientes divisiones corresponden a la utilización de la Regla de Ruffini y si es válida la igualdad a partir de sus gráficos (usar Geogebra)

a) $x^4-7x^3+8x^2-47x=(x^2-7).(x^3+8x)+9$

b) $x^4-7x^3+8x^2-56x+9=(x-7).(x^3+8x)+9$

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por otro $C(x)=x-a$ se determina evaluando al polinomio $P(x)$ en el valor opuesto del término independiente del polinomio divisor $C(x)$.

9) Decidir en cuáles de los siguientes polinomios se extrajo factor común, factor común por grupos o ninguna de las opciones anteriores.

a) $x.(x+8)-x=x.(x+7)$
b) $3.(x+5)+x.(2x+10)=(3+2x).(x+5)$
c) $3.(x+5)+x.(2x+5)-x^2=(3+x).(x+5)$
d) $3.(x+5).x.(2x+10)=6.(x^3+10x^2+25x)$

10) Saquen factor común o factor común por grupos en los siguientes polinomios según corresponda.

a) $O(x)=2x^4-x^3-6x^2$
b) $Q(x)=x^3-x^2+x-1$
c) $P(x)=-x^3+2x^2$
d) $R(x)=2x^3-6x^2+x-3$
e) $S(x)=3x-9x^2+27x^3$
f) $C(x)=3x^5+x^4-3x-1$
g) $T(x)=4x^4+8x^3+8x^2+16x$

11) Responda las siguientes preguntas considerando el polinomio del inciso a) de la actividad 12.

a) ¿Cuál es el resto de la división de dicho polinomio por $D(x)=2x+8$?
b) Nombre una raíz del polinomio.
c) ¿Puede aplicar algún otro método de factorización? ¿Por qué?
d) ¿Cómo se puede modificar al polinomio para que tenga una raíz en $x=5$?
e) ¿Cuál es el resto de este polinomio si se divide por $C(x)=x+5$?

Cuando $P(x)=Q(x).C(x)+R(x)$ cumple que

a. $R(x)=0$
b. $C(x)$ es un monomio

se dice que $C(x)$ es un **factor común** del polinomio $P(x)$.
Por lo tanto, sacar factor común a un polinomio, es escribirlo como producto entre un monomio y un polinomio.

Cuando se tiene $P(x)=A(x).C(x)+B(x).C(x)$ y luego se lo puede reescribir como $A(x).C(x)+B(x).C(x)=[A(x)+B(x)].C(x)$ se dice que $C(x)$ es un **factor común por grupos** del polinomio $P(x)$.

<u>Observación</u>: Cuando $P(x)=Q(x).C(x)+R(x)$ tiene $R(x)=0$ y $Q(x)$ y $C(x)$ no son monomios, se puede decir que $Q(x)$ es factor común por grupos de $P(x)$ y $Q(x)$ sería el equivalente a $A(x)+B(x)$.
Es equivalente si se considera a $C(x)$ como el factor común por grupos.

Se llama **polinomio primo** a los polinomios de grado uno y a los polinomios de grado dos que no poseen raíces reales.

Un polinomio $P(x)$ se llama **mónico** si el coeficiente principal es igual a uno.

Un polinomio está **factorizado** cuando está expresado como el producto entre su coeficiente principal y polinomios mónicos primos.

12) Aplicar la fórmula de trinomio cuadrado perfecto o diferencia de cuadrados para escribir en factores los siguientes polinomios.

a) $Q(x)=x^6-x^2$
b) $P(x)=4x^2+6x+9$
c) $S(x)=25x^2-3$
d) $L(x)=x^2-8x+16$
e) $A(x)=x^6-27$
f) $^*B(x)=27-x^6$
g) $^*C(x)=x^4-14x^2+49$
h) $^*E(x)=x^6+3x+\frac{9}{4}$
i) $^*F(x)=-x^6+3x-\frac{9}{4}$

13) Decida si las siguientes factorizaciones son correctas y si corresponden a la fórmula del trinomio cuadrado perfecto o a la fórmula de diferencia de cuadrados.

a) $x.(x+2).(x-2)=x^3-4x^2+4$
b) $(x^2-4).(x^2+4)=x^4-16$
c) $2x+2x^2+2=2(x+1)^2$
d) $4x^4-8x^2+4=(2x^2-2)^2$
e) $(-4x^3-3).(-4x^3+3)=16x^6-9$

14) Dar las raíces de los siguientes polinomios y decidir si están factorizados. Decir qué casos de factorización se utilizaron.

a) $P(x)=x(x+4).(x-3)^4.(x^2-9)$
b) $P(x)=x.(x^2-4x+4).x^3+3.(x^2-4x+4).x^3$
c) $P(x)=x^6-x^2$
d) $P(x)=4x^2+6x+9$

e) $*P(x)=25x^2-3$
f) $*P(x)=x^2-8x+16$
g) $*P(x)=x.(x-3)+x.(2x+8)$
h) $*P(x)=(x^2-9)^3.(x+3)^5.(x^2-6x+9)$
i) $*P(x)=(x^4-16)^3.(x+3)^5.(x^2-6x+9)$
j) $*P(x)=(x^2-9)^3.(x+3)^5.(x^2-6x+9)+3.(x+3)^5.(x^2-6x+9)$

Si un polinomio $P(x)$ es de la forma $P(x)=x^2-a^2$ donde a es un número real, se lo llama Diferencia de cuadrados y se lo puede reescribir como:

$$P(x)=(x-a).(x+a)$$

Si un polinomio $P(x)$ es de la forma $P(x)=x^{2n}-a^{2m}$ donde a es un número real y n y m son números naturales, a $P(x)$ se lo llama Diferencia de Cuadrados y se lo puede escribir como:

$$P(x)=(x^n-a^m).(x^n+a^m).$$

<u>Observación</u>: si tenemos a^m en lugar de a^{2m}y $a^m>0$, entonces se puede escribir:

$$(x^{2n}-a^m)=(x^n-\sqrt{a^m}).(x^n+\sqrt{a^m})$$

Si un polinomio $P(x)$ es de la forma $P(x)=c^2x^2+2acx+a^2$ se dice que es un **Trinomio Cuadrado Perfecto** y $P(x)$ se puede reescribir en su forma factorizada como

$$P(x)=(cx+a)^2$$

15)

a) Calculen todas las posibles raíces racionales de los siguientes polinomios:
   i) $P(x)=x^3+5x-3$
   ii) $P(x)=25x^2-3$
   iii) $L(x)=x^2-8x+16$
   iv) $C(x)=3x^5+x^4-3x-1$
   v) $T(x)=4x^4+8x^3+8x^2+16x-7$

b) ¿Cuáles son realmente raíces?¿Por qué?

Cuando una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, p divide al término independiente y q al coeficiente principal.

16) Escriba los siguientes polinomios de forma factorizada en caso de ser posible y cuando no pueda justifique el motivo. Ayuda: Utilice el algoritmo de factorización.

a) $P(x)=x^3+2x^2-x$
b) $P(x)=x^7+2x^6-x^5+x^4+3x^3+6x^2-3x+3$
c) $P(x)=-x^4+x^2-4x+8$
d) $*P(x)=x^5+x^4-11x^3+x^2-12x$

e) $*P(x)=x^4-x^3-15x^2+9x+54$

f) $*P(x)=(4x^2+2x+8).(x^2-7)$

g) $*P(x)=(4x^2+3x+8).(x^4-9).(x+\sqrt{3})$

Guía de Actividades Nº2

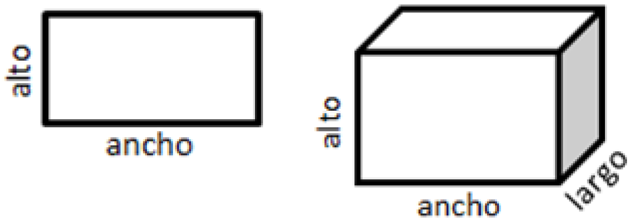
Problemas

El dueño de la fábrica de muebles Imsa, Pedro Imsa, tiene una gran lucha con sus hijos. Él considera que ellos no están listos para hacerse cargo de la fábrica para que el finalmente pueda retirarse y disfrutar de sus nietos. Sus hijos Marcos, Lorena y Juan están determinados a mostrarle su error e idearon un plan que le probaría a su padre que ellos pueden hacerse cargo de la fábrica.

El plan es simple. Marcos se va a encargar de hacer nuevos muebles para la fábrica, Lorena va a involucrarse con los pedidos que hagan clientes en el local y Juan va a verificar que en los muebles que se hacen en la fábrica haya el mínimo desperdicio de madera.

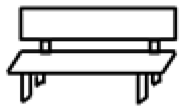
La fábrica ya le dijo a Marcos cuales son las condiciones que deben cumplir las distintas piezas de madera para poder aceptarles diseños nuevos de muebles. A Juan, el encargado del almacenamiento de las placas de madera le dijo los tamaños de dichas placas junto con los tamaños de las piezas que se cortan.

Para que no haya confusiones entre los trabajadores, la fábrica propuso ciertas convenciones. Una de ellas, es llamar ancho, alto y largo como se muestra en las figuras:



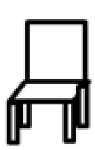
Marcos eligió 2 muebles para armar y las condiciones de armado que le impusieron desde la fábrica son:

Mueble Nº1: Banco de plaza. Para armar el asiento y el respaldo se necesitan cortar dos placas de madera (cuadrados y/o rectángulos) que cumplan las siguientes condiciones:



-El asiento tiene que tener de alto la mitad que el ancho.
-El respaldo debe tener de alto la misma medida que el asiento y de ancho 12 cm menos que el ancho del asiento.
-Ambas piezas tienen que tener la misma superficie.

Mueble Nº2: Silla. Para armar el asiento y el respaldo necesita cortar dos placas de madera (cuadrados y/o rectángulos) que cumplan las siguientes condiciones:



-El asiento tiene que ser un cuadrado.
-El respaldo tiene de ancho el mismo ancho que el asiento y de alto lo mismo que el ancho menos 13 cm.

-La pieza del asiento tiene $\frac{3}{2}$del área que tiene la pieza del respaldo.

<u>Actividad 1:</u> Considerando el formato y las condiciones que tiene el Mueble Nº1 que quiere armar Marcos, realizar las siguientes actividades.

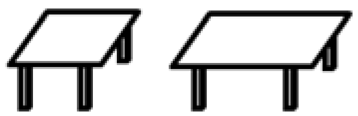
a) Con la información dada del Mueble, completen la siguiente tabla:

	Ancho	**Alto**	**Área**
Asiento			
Respaldo			

b) ¿Podrán construir este banco? ¿Qué ecuaciones deberían plantearse para encontrar las medidas del asiento y el respaldo? Justifiquen su respuesta.

<u>Actividad 2</u>: Teniendo en cuenta el Mueble Nº2, realice las actividades propuestas en la Actividad 1.

Mueble Nº3: Banquetas.

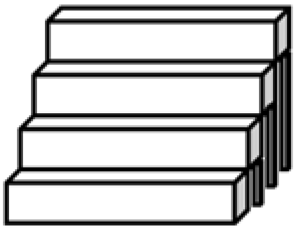


En la fábrica se venden dos tipos de banquetas, unas con asientos cuadrados y otras con asientos rectangulares. Como las ventas de estos productos no son muy altas, Juan quiere quitar uno de los modelos para ahorrarle dinero a la fábrica. Para decidir qué banqueta dejar, debe tener en cuenta que para cortar las piezas de las banquetas se utilizan placas de $120\,cm$ de ancho y $200\,cm$ de largo y se corta sólo un modelo de pieza por placa. El encargado de la máquina les comunicó que para obtener la medida deseada deben agregarle a cada lado $5\,cm$, los cuales se perderán luego de emprolijar y moldear cada pieza. Para medidas entre $30\,cm$ y $45\,cm$, la madera sobrante de cada placa está dada por las siguientes ecuaciones: $A(x)=24000\,cm^2-12(x^2 cm^{\square}-25\,cm^2)$ y $B(x)=24000\,cm^2-8(x^2+10\,x\,cm+25\,cm^2)$ donde la ecuación ya contempla los $5\,cm$ que se deben agregar pero no recuerda qué ecuación corresponde a cada pieza.

<u>Actividad 3:</u>

c) ¿Cuál de las ecuaciones representa a las piezas cuadradas y cuál a las piezas rectangulares?

d) ¿Con qué forma de pieza (cuadrada o rectangular) se desperdicia menos madera si se considera $x=40\,cm$? En este caso, ¿qué modelo le conviene dejar a Juan en producción?



Mueble Nº4: Grada.

Un día Lorena estaba atendiendo el local comercial de la fábrica y le encargaron unos tablones de madera para armar los asientos de una tribuna. Cada tablón es un paralelepípedo que conforma un escalón, como se ve en el dibujo. Para sorprender al padre decidió encargarse de realizar el presupuesto y a pedido del cliente debe darle las especificaciones de tamaño (ancho, alto y largo) de los tablones. La máquina que decidieron utilizar está calibrada para cortar piezas con cierto volumen. Este volumen está dado por la ecuación $V(x)=x^3+\frac{73}{3}mx^2+\frac{95}{12}m^2x-2m^3$ y se puede ingresar el valor de x deseado. En este caso, Lorena consideró $x=\frac{1}{2}m$, pero necesita saber cuáles serán los valores de ancho, alto y largo de cada tablón para considerar si esos valores son razonables. Teniendo en cuenta que estos tablones se utilizarán para construir una tribuna con el fin de utilizarla en un club de deportes.

Actividad 4: ¿Qué tiene que hacer Lorena para saber los valores que necesita proporcionarle al cliente?

Ayuda: el volumen de un paralelepípedo está dado por la fórmula $V=ancho.alto.largo$

PP sobre Regla de Ruffini

Diapositiva 1

Algoritmo de división de polinomios

$$P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$$

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} & C(x) \\ R(x) & \end{array}$$

En el teorema de Resto se tiene una estructura específica del polinomio divisor....

$$Q(x) = x - a$$

Diapositiva 2

Otra forma de hacer la división...

Cuando el polinomio **divisor** es un binomio de grado 1 con término independiente distinto de cero y coeficiente principal igual a 1, existe una forma más sencilla de obtener los polinomios **cociente** y **resto** del algoritmo de división de polinomios.

Todo empieza con una tabla pero, ¿cómo la llenamos?

$$P(x) = ax^5 + bx^3 + cx^2 + dx + e \longrightarrow P(x) = ax^5 + 0x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$Q(x) = x - t$$

Completamos el polinomio

$$a \quad 0 \quad b \quad c \quad d \quad e$$

Diapositiva 3

Veamos un ejemplo

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x - 6 \qquad Q(x) = x - \mathbf{3}$$

$$P(x) = \mathbf{1}x^4 \ \mathbf{-2}x^3 + \mathbf{0}x^2 \ \mathbf{-3}x \ \mathbf{-6}$$

Ahora ya completamos la tabla con la información que tenemos pero... ¿cómo calculamos el cociente y el resto?

Diapositiva 4

Veamos un ejemplo

$$P(x) = x^4 - 4x^3 - 3x - 6 \qquad Q(x) = x - 3$$

1) El coeficiente principal del dividendo se copia abajo.

2) Se lo multiplica por el coeficiente divisor y el resultado se lo escribe debajo del siguiente coeficiente del dividendo.

3) Se suman los coeficientes alineados y el resultado se escribe abajo.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & 0 & -3 & -6 \\
 & & + & & & \\
3 & & 3 & -3 & -9 & -36 \\
\hline
\times & & -1 & -3 & -12 & \boxed{-42}
\end{array}$$

4) El número obtenido reinicia el ciclo y esto se repite hasta llegar al último coeficiente del dividendo. Este último número que se escribe es el resto.

Diapositiva 5

Veamos un ejemplo

$P(x) = x^4 - 4x^3 - 3x - 6$ $\qquad$ $Q(x) = x - 3$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -4 & 0 & -3 & -6 \\
3 & & 3 & -3 & -9 & -36 \\
\hline
 & 1 & -1 & -3 & -12 & \boxed{-42}
\end{array}$$

$C(x) = \quad x^3 \quad x^2 \quad x$ $\qquad$ $R(x) =$

Diapositiva 6

Veamos un ejemplo

$P(x) = x^4 - 4x^3 - 3x - 6$ $\qquad$ $Q(x) = x - 3$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -4 & 0 & -3 & -6 \\
3 & & 3 & -3 & -9 & -36 \\
\hline
 & & & & & \boxed{}
\end{array}$$

$C(x) = 1\,x^3 -1\,x^2 \;-3\,x -12$ $\qquad$ $R(x) =-42$

Anexo III: Evaluaciones

Evaluación parcial N°1 - 4° año A

09/08/2017

NOMBRE:

Con esta actividad se busca valorar las posibilidades de los estudiantes para reconocer raíces de un polinomio y para justificar utilizando las definiciones trabajadas en clase.

1) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar su decisión utilizando las ideas trabajadas en clase:
   a) $P(x)=4x-7x^2$ tiene una raíz en $x=0$.
   b) $P(x)=4x-7x^2$ tiene una raíz en $x=2$.
   c) El resto de dividir $P(x)=4x-7x^2$ por $Q(x)=x+2$ es $R(x)=-20$.

Evaluación parcial N°1 - 4° año B

17/08/2017

NOMBRE:

Con esta actividad se busca valorar las posibilidades de los estudiantes para reconocer raíces de un polinomio y para justificar utilizando las definiciones trabajadas en clase.

1) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar su decisión utilizando las ideas trabajadas en clase:
   a) $P(x)=4x-7x^2$ tiene una raíz en $x=\frac{4}{7}$.
   b) $P(x)=4x-7x^2$ tiene una raíz en $x=1$.
   c) Es resto de dividir $P(x)=4x-7x^2$ por $Q(x)=x+2$ es $R(x)=20$.

Evaluación parcial N°2 - 4° año A

23/08/2017

NOMBRE:

Con esta actividad se busca valorar las posibilidades de los estudiantes para reconocer polinomios factorizados, los métodos implementados para obtenerlos y las posibilidades de los mismos para justificar utilizando las definiciones trabajadas en clase.

1) Utilicen las herramientas factor común y factor común por grupos para escribir a $P(x)=x^6-3x^4+x^3-3x$ como producto de polinomios.
2) Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifiquen su respuesta utilizando las ideas trabajadas en clase:
   a) $P(x)=9x^2-49$ se puede factorizar utilizando diferencia de cuadrados.
   b) $P(x)=x^3+2x+1$ se puede factorizar utilizando factor común por grupos.

Evaluación parcial N°2 - 4° año B

29/08/2017

NOMBRE:

Con esta actividad se busca valorar las posibilidades de los estudiantes para reconocer polinomios factorizados, los métodos implementados para obtenerlos y las posibilidades de los mismos para justificar utilizando las definiciones trabajadas en clase.

1) Utilicen las herramientas factor común y factor común por grupos para escribir al polinomio $P(x)=x^5-2x^4+x^3-2x^2$ de forma factorizada.
2) Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifiquen su respuesta utilizando las ideas trabajadas en clase:
   a) $P(x)=3x^5-9x^2$ se puede factorizar utilizando factor común.
   b) $P(x)=x^3(x^2-4)(x+3)$ es un polinomio que está factorizado.
   c) $P(x)=4x^2-81$ se puede factorizar utilizando diferencia de cuadrados.

Evaluación - 4° año A

06/09/2017

NOMBRE:

Con estas actividades se busca valorar las posibilidades de los estudiantes para:

- Reconocer raíces de un polinomio.
- Reconocer los métodos que se pueden utilizar para factorizar polinomios.
- Aplicar correctamente el Teorema del Resto.
- Utilizar la Regla de Ruffini.
- Justificar utilizando las definiciones trabajadas en clase.

En instancia de corrección se considerarán los resultados, la pertinencia de los procedimientos aplicados, el uso adecuado de definiciones para justificar y la claridad en la presentación escrita.

IMPORTANTE: Todas las resoluciones deben incluir las justificaciones y verificaciones necesarias.

1) Factorizar los siguientes polinomios e identificar y nombrar dos raíces de cada uno:
    e) $P(x)=x^6-81x^2$.
    f) $T(x)=x^6-18x^5+81x^4$
    g) $S(x)=3x^6+6x^7-6x^3-3x^2$
    h) $R(x)=x^7-2x^3+x^2-x^5+2x-1$
2) Calcular el polinomio resto de la división del polinomio $P(x)=7x^5+5x^2-3$ por el polinomio $Q(x)=x-1$.(Utilizar Teorema del Resto).
3) Utilizar la Regla de Ruffini para identificar los polinomios cociente y resto de las siguientes divisiones:
    a) $P(x)=2x^4-3x+12$ por $Q(x)=x+2$
    b) $P(x)=12x^4-10x^3+5x$ por $Q(x)=x-1$

Modificación para el alumno de 4° año A

1) Factorizar los siguientes polinomios con la herramienta indicada:
    a) $S(x)=3x^6+6x^7-6x^3-3x^2$ utilizando factor común por grupos.
    b) $Q(x)=x^2-18x+81$ utilizando trinomio cuadrado perfecto.
    c) $R(x)=x^6-81x^2$ utilizando primero factor común y después diferencia de cuadrados..

2) Teniendo en cuenta los polinomios de la actividad 1, responder:
    a) ¿$x=0$ es una raíz de $R(x)$? ¿Por qué?
    b) ¿$x=2$ es una raíz del polinomio $S(x)$? ¿Por qué?

2) Calcular el polinomio resto de la división del polinomio $P(x)=7x^5+5x^2-3$ por el

polinomio $Q(x)=x-1$.(Utilizar Teorema del Resto).
3) Utilizar la Regla de Ruffini para identificar los polinomios cociente y resto de la división de $P(x)=2x^4-3x+12$ por $Q(x)=x+2$.

Evaluación - 4° año B

07/09/2017

NOMBRE:

Con estas actividades se busca valorar las posibilidades de los estudiantes para:

- Reconocer raíces de un polinomio.
- Reconocer polinomios factorizados y los métodos utilizados para factorizar.
- Aplicar correctamente el Teorema del Resto.
- Justificar utilizando las definiciones trabajadas en clase.

En instancia de corrección se considerarán los resultados, la pertinencia de los procedimientos aplicados, el uso adecuado de definiciones para justificar y la claridad en la presentación escrita.

IMPORTANTE: Todas las resoluciones deben incluir las justificaciones y verificaciones necesarias.

2) Factorice utilizando dos o más herramientas:
   a) $P(x)=2x^5-16x^3+32x$
   b) $P(x)=x^8-2x^5+x^2-x^6+2x^3-1$

2) Observe los polinomios y para cada uno de ellos responda:
   a) ¿Está factorizado el polinomio? ¿Por qué?
      i) $3x(x-5)(x+5)(x^2+1)^2$
      ii) $3x(2x-5)(x+5)(x^2+1)^2$
      iii) $7x(x^2-49)(x-10)$
      iv) $x^4(x^2-16)-1(x^2-16)$
   b) Factorice aquellos polinomios que decida que no están factorizados.
   c) Nombre 3 raíces para cada uno de los polinomios del item a).

3) Calcular el polinomio resto de la división por $Q(x)$ del polinomio $P(x)$.
   a) $Q(x)=x+1$, $P(x)=4x^7-7x^2+9$
   b) $Q(x)=x-2$, $P(x)=8x^2-7x+4$

Anexo IV: Material preparado durante la implementación de las prácticas

Guía Complementaria de Actividades

Factoricen los siguientes polinomios…

...Utilizando factor común:

a) $P(x)=24x^3-16x^2-4x^4$
b) $T(x)=25x^4+10x^3-5x^2$
c) $Q(x)=8x^3-5x^2$
d) $R(x)=10x^3+15x^2$

...Utilizando factor común por grupos:

a) $S(x)=2x^5+2x^3+x^4+x^2$
b) $P(x)=10x^3-4x+15x^2-6$
c) $R(x)=5x^3-6x^2+10x-12$
d) $T(x)=3x^3+2x^2-3x-2$
e) $L(x)=x^3+3x^2-2x-6+x^5+3x^4$
f) $V(x)=8x^{10}+2x^9+x^3+8x^7+2x^6+1$

...Utilizando diferencia de cuadrados:

a) $P(x)=4x^2-16$
b) $Q(x)=9-x^2$
c) $T(x)=16x^2-9$
d) $R(x)=49-9x^4$
e) $S(x)=81-x^4$
f) $V(x)=16-81x^{12}$

...Utilizando trinomio cuadrado perfecto:

a) $T(x)=x^2+1-2x$
b) $Q(x)=x^2-20x+100$
c) $R(x)=25-10x+x^2$
d) $S(x)=4x^2+12x+9$
e) $V(x)=4x^6+49-28x^3$
f) $U(x)=x^6-2x^5+x^4$

...Utilizando dos o más de las herramientas aprendidas:

a) $P(x)=12x^2-3$
b) $S(x)=3x^4-12x^2+2x^3-8x$

c) $T(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$
d) $R(x) = 3x^9 - 12x^7$
e) $Q(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$
f) $G(x) = 3x^2 + 15x + 18$
g) $U(x) = x^6 - 2x^5 + x^4$
h) $W(x) = 5x^5 - x^6 - 80x + 16x^2$
i) $Z(x) = -x^{12} + x^{11} - 2x^8 + x^{10} - x^9 + 2x^6 - x^5 + x^4 - 2x$
j) $D(x) = x^3 + 2x - x$
k) $M(x) = x^7 + 2x^6 - x^5 + x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 3x + 3$

Ahora que los polinomios están escritos como producto de otros polinomios, observe esos productos y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles de estos polinomios están factorizados? Justifique utilizando la definición.
2. Para cada uno de los polinomios factorizados, identifique y nombre dos de sus raíces.
3. ¿Cuál es el resto de la división de cada polinomio por el binomio $E(x) = x + 1$?
4. ¿Por qué pudo factorizar el polinomio usando las herramientas que aplicó? Justifique usando las definiciones trabajadas en clase.

Un problema:

En una fábrica de juguetes quieren armar un rompecabezas que tenga piezas de diferentes formas pero igual tamaño. Se quiere que una de las piezas sea cuadrada y la otra rectangular.

En la fábrica anuncian que la piezas deben cumplir que:

1. la pieza rectangular debe tener como alto 5 cm menos que el ancho.
2. la pieza cuadrada tiene como ancho ⅔ del ancho que tiene la pieza rectangular.

¿Cuánto debería medir x para que sea posible hacer las piezas?

Definiciones y sus condiciones

En este archivo incorporamos las condiciones que se deben verificar en cada definición para poder clasificar un polinomio y utilizar las herramientas aprendidas.

1. **Raíz**:
   a. Si $P(a)=0$ entonces a es raíz de $P(x)$.

   - Ejemplos:
     - $P(x)=x^4+3x$ tiene una raíz en $x=0$ y $x=4$ no es raíz de $P(x)$.
     - $Q(x)=x^2+1$no tiene raíces reales.
     - $S(x)=x(x-3)$ tiene raíces en $x=0$ y en $x=3$. No tiene raíces en $x=1$ ni en $x=4$.

2. **Teorema del Resto**: el polinomio divisor $Q(x)$
   a. Debe ser un binomio
   b. Debe ser un polinomio de grado 1
   c. Debe tener coeficiente principal igual a 1
   d. Debe tener término independiente distinto de cero
   e. Se debe encontrar a tal que $Q(x)=x-a$

   Luego, se puede aplicar el teorema y decir que $R(x)=P(a)$.

   - Ejemplos:
     - $P(x)=x^3-x+7x^2$,$Q(x)=x+1$, $Q(x)$ cumple las condiciones , $a=-1$ y $P(-1)=7$ por lo tanto $R(x)=7$
     - $P(x)=x^3-x+7x^2$, $Q(x)=2x-7$, $Q(x)$ no cumple las condiciones por lo tanto no se puede aplicar el teorema del resto.

3. **Regla de Ruffini**. Para poder dividir un polinomio $P(x)$ por un $Q(x)$, $P(x)$ debe estar completo y ordenado y $Q(x)$ tiene que:
   a. Ser un binomio
   b. Ser de grado 1
   c. Tener coeficiente principal igual a 1
   d. Tener término independiente distinto de cero

4. **Polinomio primo**: $P(x)$ para ser primo debe cumplir una de las siguientes condiciones:
   a. Debe ser de grado uno.
   b. Debe ser de grado dos y no tener raíces reales.

   Ejemplos:
   - $P(x)=9x+8$ es un polinomio primo porque tiene grado 1.
   - $P(x)=x^2+1$ es un polinomio primo porque no tiene raíces reales.
   - $P(x)=x^2-4$ no es un polinomio primo porque tiene una raíz en $x=2$ y en

$x=-2$
- $P(x)=x^3+1$no es un polinomio primo porque no cumple ser un polinomio de grado 1 o 2.

5. **Polinomio mónico**: debe cumplir que el coeficiente principal es igual a uno.

   Ejemplos:
   - $P(x)=9x+8$ no es mónico pues su coeficiente principal es 9.
   - $P(x)=7x+x^5-2x^8-14x^{11}$ no es mónico pues su coeficiente principal es -14
   - $P(x)=7x+x^5-2x^8-x^{11}$ no es mónico pues su coeficiente principal es -1
   - $P(x)=x^2+1$es mónico porque su coeficiente principal es igual a 1.
   - $P(x)=3x^2+1-x^4+x^8$es mónico porque su coeficiente principal es igual a 1.

6. **Polinomio factorizado**: debe cumplir
   a. Estar escrito como producto de polinomios y su coeficiente principal.
   b. Los polinomios que se están multiplicando deben ser primos.
   c. Los polinomios que se están multiplicando deben ser mónicos.

   Ejemplos:
   - $P(x)=4x^5(x-3)^2(x^2+8)$ está factorizado porque cumple las tres condiciones.
   - $P(x)=4x^5(x^2-1)(x^2+8)$no está factorizado porque x^2-1 no es primo.
   - $P(x)=4x^5(2x-3)(x^2+8)$ no está factorizado porque $2x-3$no es mónico
   - $P(x)=123x(x+1)$ está factorizado porque cumple las tres condiciones.

7. **Factor común**: debe identificarse $C(x)$ un <u>factor</u> que esté presente en cada término del polinomio y que cumpla ser un monomio.

   Ejemplos:
   - $P(x)=x^5-3x^7-2x^3$, $C(x)=x^3$ es factor común.
   - $P(x)=x^5-3x^7-2x^3+10$, no se puede identificar $C(x)$que sea un monomio y que esté presente en todos los términos.

8. **Factor Común por Grupos**: debe haberse separado en grupos al polinomio y haber utilizado factor común en cada grupo. Luego, si se identifica $C(x)$ que sea un <u>factor</u> que esté presente en cada término y no sea un monomio, se puede llamar factor común por grupos y se puede utilizar la herramienta para factorizar.

   Ejemplos:
   - $P(x)=3x(2x+1)+7x^3(2x+1)$, $C(x)=2x+1$ es un factor común por grupos y $D(x)=x+1$ no lo es.

9. **Diferencia de cuadrados**: el polinomio $P(x)$ debe cumplir:
   a. Debe ser un binomio.

b. Los términos deben estar relacionados por una diferencia.
c. Cada término debe ser cuadrado perfecto.

Una vez verificadas estas condiciones se puede utilizar la definición y reescribir el polinomio.

Ejemplos:

- $P(x)=4x^2-16$ es una diferencia de cuadrados porque es un binomio, sus términos están relacionados por una diferencia y se identifican dos cuadrados perfectos: $a=2x$ y $b=4$.
- $P(x)=x^2-1$es una diferencia de cuadrados y se justifica de la misma forma que el ejemplo anterior.
- $P(x)=x^2-x+1$ no es diferencia de cuadrados pues no es un binomio.
- $P(x)=x^2+4$no es diferencia de cuadrados porque los términos se están sumando.
- $P(x)=x-4$ no es diferencia de cuadrados porque x no es un cuadrado perfecto.

10. **Trinomio Cuadrado Perfecto**: el polinomio $P(x)$ debe verificar:
    a. Que tenga 3 términos.
    b. Que dos de sus términos sean cuadrados perfectos.
    c. El tercer término debe ser el doble producto de las bases de los cuadrados perfectos.

Luego, se puede aplicar la definición y factorizar el polinomio.

Ejemplos:

- $P(x)=x^2-2x+1$ es un trinomio cuadrado perfecto por ser un trinomio, y además se identifican dos cuadrados perfectos: $a=x$ y $b=-1$ (o también $a=-x$ y $b=1$¿ y $2.x.(-1)=-2x$.
- $P(x)=x^2-2x-1$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque -1 no es un cuadrado perfecto.
- $P(x)=x^2+x+4$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque aunque $a=x$ y $b=2$ $2ab=2.2x=4x$ y $4x\neq x$.

PP de repaso en 4º año A

Diapositiva 1

Repaso: Polinomios

- Definición de un polinomio $P(x)$

Una expresión algebraica es un polinomio si es suma de monomios.

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que intervienen son la multiplicación y la potencia de exponente entero positivo.

Diapositiva 2

Repaso: Polinomios

- Operaciones dado uno o más polinomios

  Suma, resta, multiplicación y división

Ejemplo:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 & x - 1 \\
\hline
 & x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 \\
0 &
\end{array}
$$

$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = (x-1)(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12) + 0$$

Diapositiva 3

Repaso: Polinomios

- Valor numérico de un polinomio $P(x)$

Dado un polinomio $P(x)$ y un número real a, el valor numérico del polinomio en a es $P(a)$.

Ejemplo: $P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$

$P(1) = 1^5 - 3.1^4 - 5.1^3 + 15.1^2 + 4.1 - 12$
$P(1) = 0$

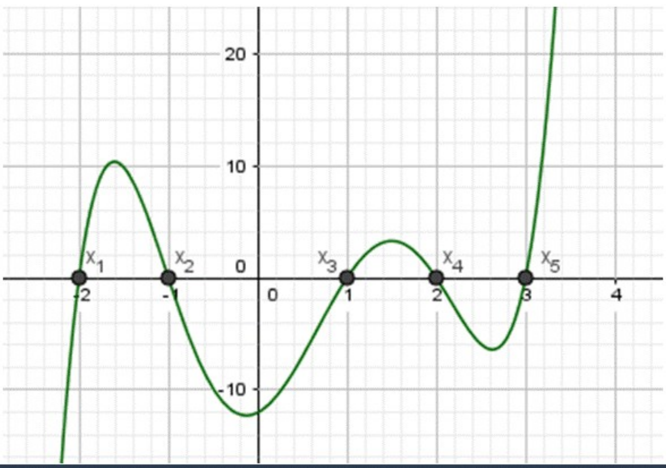
$P(-3) = (-3)^5 - 3.(-3)^4 - 5.(-3)^3 + 15.(-3)^2 + 4.(-3) - 12$
$P(-3) = -240$

Diapositiva 4

Repaso: Polinomios

- Gráfico de $P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$

$P(x) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(x-3)$



Diapositiva 5

Repaso: Polinomios

- Raíz de un polinomio $P(x)$

Un número real a es raíz de un polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$

Ejemplo: $P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$

$P(1) = 0 \longrightarrow$ Por lo tanto, $a = 1$ es raíz de $P(x)$

$P(-3) = -240 \longrightarrow$ Por lo tanto, $a = -3$ no es raíz de $P(x)$

Diapositiva 6

Repaso: Polinomios

- Teorema del Resto

Al dividir un polinomio $P(x)$ por un polinomio de la forma $x - b$ se obtiene como resto un número que es igual a $P(b)$

Ejemplo: $P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$

$P(1) = 0$ Entonces el resto de la división de $P(x)$ por $(x - 1)$ es 0

$P(-3) = -240$ Entonces el resto de la división de $P(x)$ por $(\, x - (-3)\,)$ es -240

Diapositiva 7

Repaso: Polinomios

Para poder graficar funciones polinómicas, necesitaremos saber todas las raíces del polinomio.

Para decidir si un número a es raíz de un polinomio $P(x)$, podemos calcular $P(a)$ y si cumple $P(a) = 0$ entonces a es una raíz del polinomio.

Por el Teorema del Resto, sabemos que $P(a)$ es igual al resto de la división entre $P(x)$ y $(x - a)$

Entonces a es raíz del polinomio $P(x)$ si el resto de la división entre $P(x)$ y $(x - a)$ es igual a 0.

Diapositiva 8

Repaso: Polinomios

Si queremos saber si $a = 5$ es una raíz del polinomio
$P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$
podemos hacer $P(5)$ y verificar si es igual a 0.

En este caso, vamos a trabajar con números muy grandes que nos pueden llevar a calcular mal.

Entonces podemos hacer la división de $P(x)$ por $x - 5$ y ver si el resto es igual a 0.

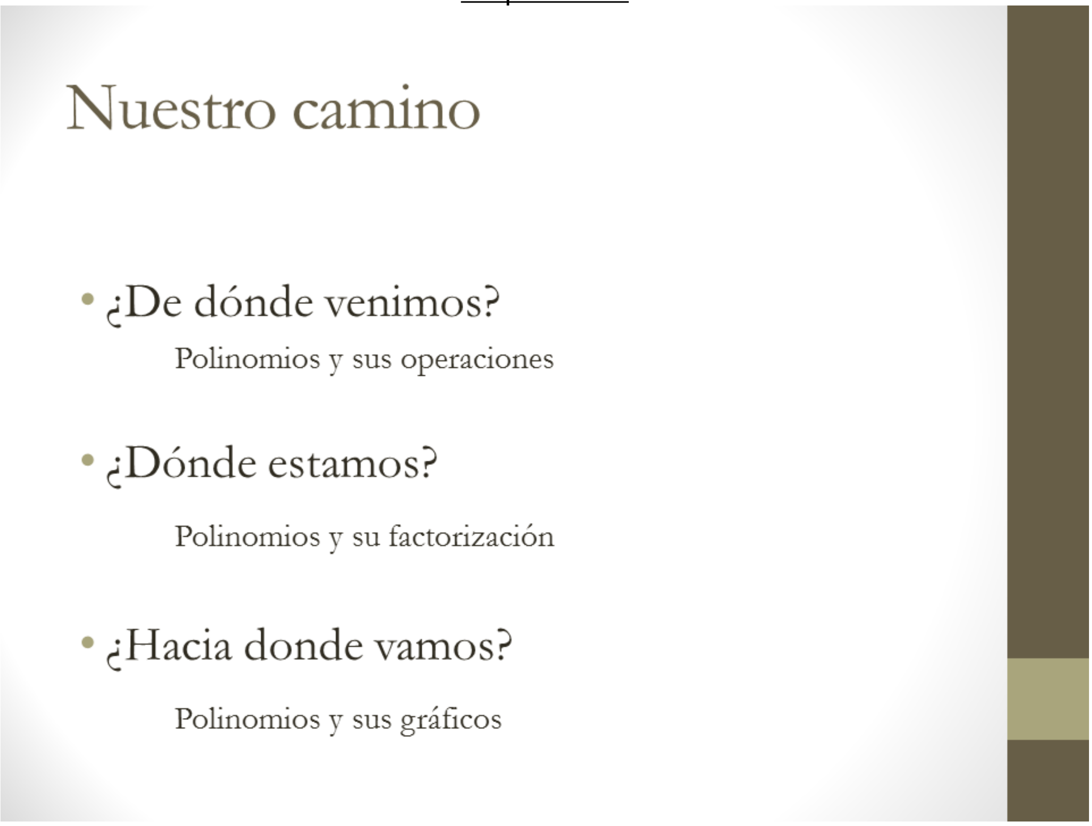
$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 \quad \underline{|\ x - 5\ }$$

Para eso, veamos un método mas sencillo para hacer divisiones de polinomios por un binomio de la forma $x - b$

PP de repaso en 4º año B

Diapositiva 1

Diapositiva 2



Diapositiva 3

Polinomios y sus operaciones

Operaciones con dos o más polinomios: suma, resta, multiplicación y división

Ejemplo:

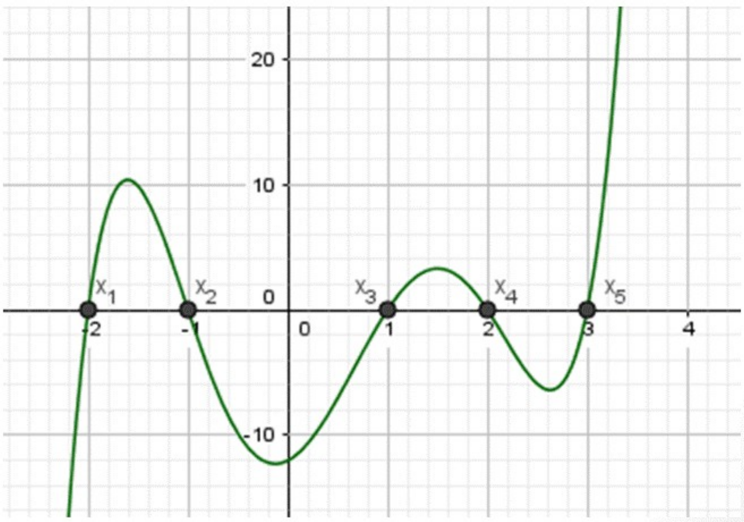
$$\begin{array}{l|l} x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12 & x-1 \\ \hline & x^4-2x^3-7x^2+8x+12 \\ 0 & \end{array}$$

$$x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=(x-1)(x^4-2x^3-7x^2+8x+12)+0$$

Diapositiva 4

Polinomios y sus gráficos

- Gráfico de $P(x)=x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12$



Diapositiva 5

Polinomios y su factorización

- **¿Qué vimos?**
  - Valor numérico de un polinomio
  - Raíz de un polinomio
  - Teorema del Resto
- **¿Qué veremos?**
  - Regla de Ruffini
  - Factorización de polinomios
    - Definiciones
    - Estrategias de factorización

Diapositiva 6

Ejemplo 1: $P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$

a) Veamos si $x = 1$ es raíz de $P(x)$

$P(1) = 1^5 - 3.1^4 - 5.1^3 + 15.1^2 + 4.1 - 12$

$P(1) = 0$

entonces $x = 1$ en raíz de $P(x)$

b) Veamos si $x = -3$ es raíz de $P(x)$

$P(-3) = (-3)^5 - 3.(-3)^4 - 5.(-3)^3 + 15.(-3)^2 + 4.(-3) - 12$

$P(-3) = -240$

entonces $x = -3$ NO es raíz de $P(x)$

c) ¿cuál es el polinomio resto de la división de $P(x)$ por $Q(x) = x + 3$?

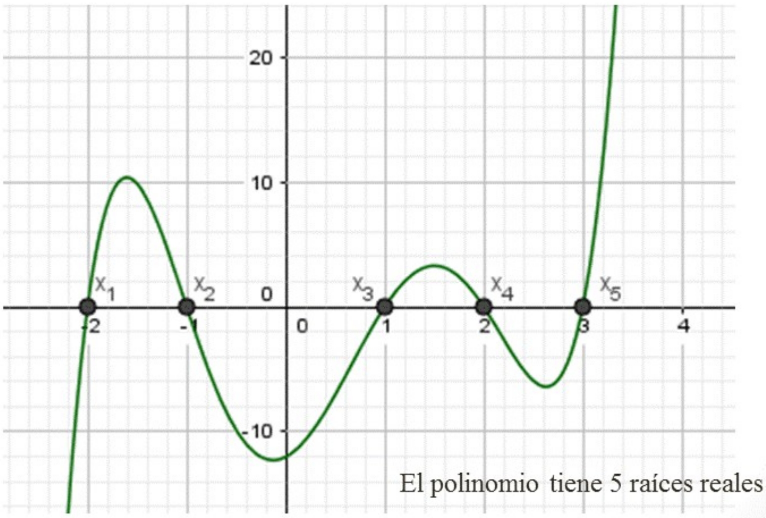
Respuesta: $R(x) = -240$ es el polinomio resto de la división de $P(x)$ con $Q(x)$.

d) ¿cuál es el polinomio resto de la división de $P(x)$ por $Q(x) = x - 1$?

Respuesta: $R(x) = 0$ es el polinomio resto de la división de $P(x)$ con $Q(x)$.

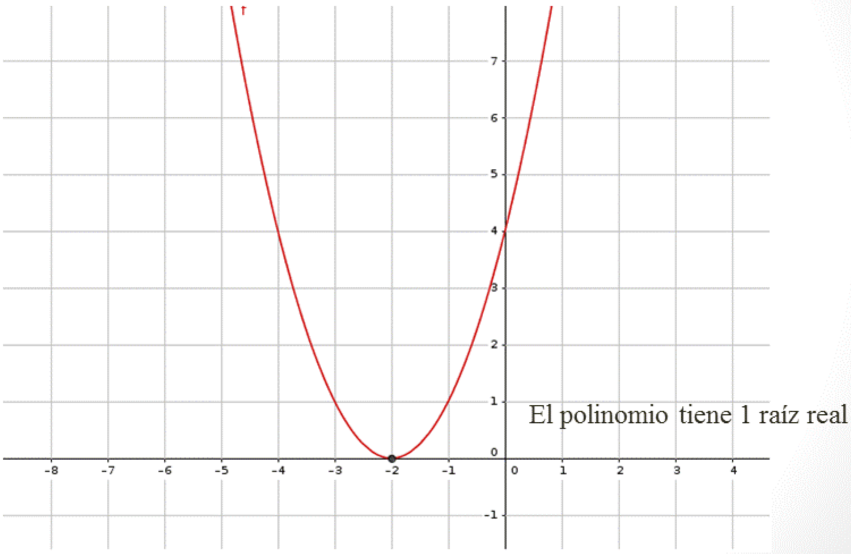
Diapositiva 7

Ejemplo 1: $P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$

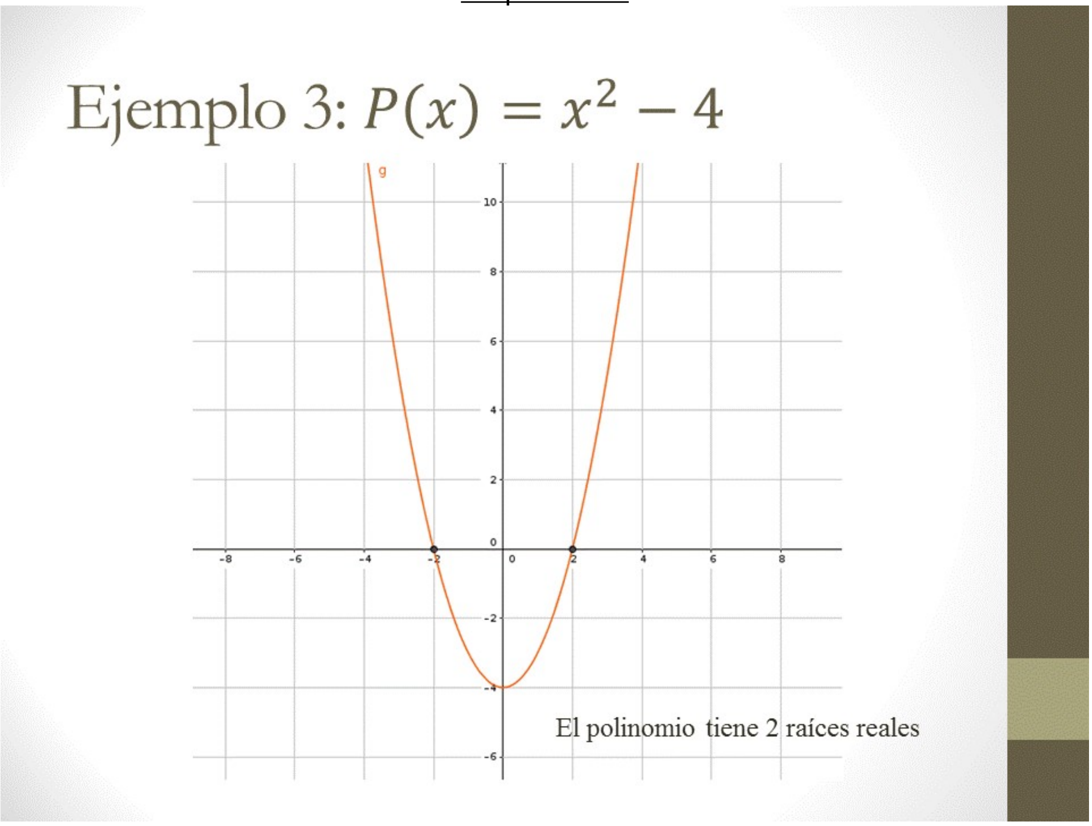


Diapositiva 8

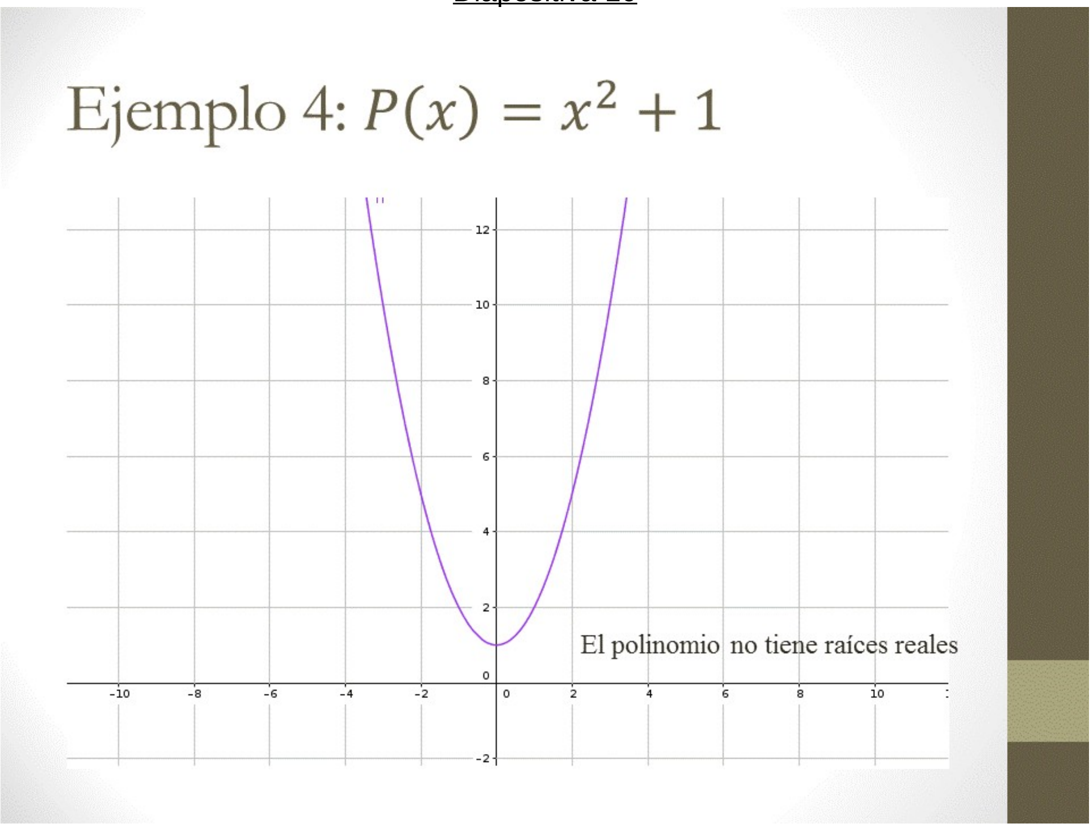
Ejemplo 2: $P(x) = x^2 - 4x + 4$



Diapositiva 9

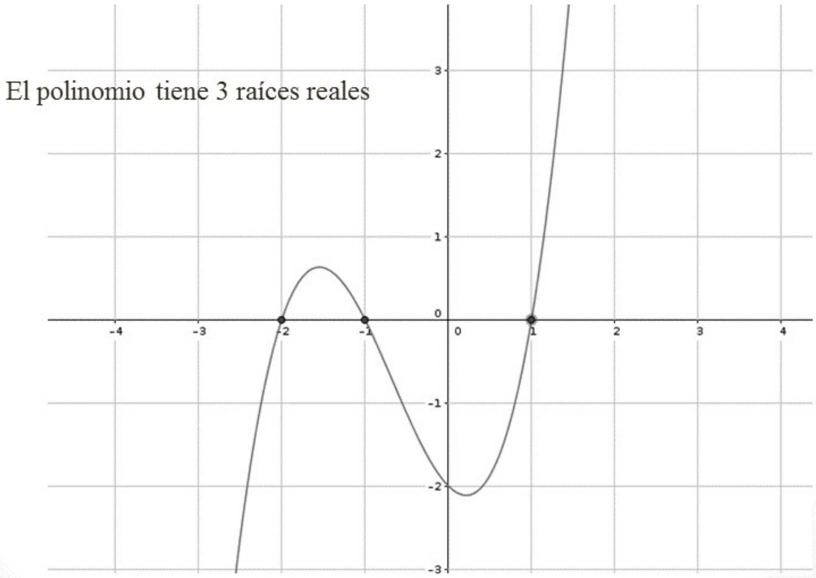


Diapositiva 10



Diapositiva 11

Ejemplo 5: $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$



Diapositiva 12

Repaso:

Entonces podemos ver que para poder graficar polinomios es útil saber sus raíces y tener el polinomio escrito como productos ayudará a este objetivo

- **Definición de raíz:** un número real a se llama raíz de un polinomio $P(x)$ si el valor numérico de $P(x)$ en a es igual a cero. Es decir, $P(a) = 0$.
- **Teorema del Resto:** al dividir un polinomio $P(x)$ con otro de la forma $Q(x) = x - a$, el polinomio resto que se obtiene es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ en a. Es decir, $R(x) = P(a)$.

Ojo: $Q(x) = x - a$ es la condición que pide el teorema para que el resultado sea válido. Si el polinomio $Q(x)$ no cumple tener esta estructura, el resultado que dice el teorema no es cierto.

Por ejemplo: $P(x) = 2x + 8$ y $Q(x) = 2x + 8$

$C(x) = 1$ y $R(x) = 0$

pero según el teorema debería cumplirse que $R(x) = -8$.

Esto es porque no se puede utilizar el teorema del resto con este $Q(x)$.

PP Factor Común, Factor Común por Grupos y Polinomio Factorizado

Diapositiva 1

Factor Común

Analicemos el siguiente polinomio:

$$P(x) = x^2(x^3 - 3x^5 - 8)$$

Si aplicamos propiedad distributiva queda expresado como suma de monomios

$$P(x) = x^5 - 3x^7 - 8x^2$$

Pero… ¿cómo podemos hacer el proceso inverso?

Dapositiva 2

Factor Común

$$P(x) = x^5 - 3x^7 - 8x^2$$

Debemos encontrar un factor que sea común en todos los términos del polinomio

$$P(x) = x^3x^2 - 3x^5x^2 - 8x^2$$

Extraemos el factor que es común en todos los términos

$$P(x) = x^2(x^3 - 3x^5 - 8\ )$$

Diapositiva 3

Factor Común

Veamos otro ejemplo:

$$Q(x) = 3x^2 - 9x + 6$$

1 Identificamos el factor común $\Rightarrow$ $Q(x) = 3x^2 - 3.3x + 3.2$

2 Extraemos el factor $\Rightarrow$ $Q(x) = 3(x^2 - 3x + 2)$

Diapositiva 4

Factor Común

Definición:

Cuando $P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$ cumple que
- $R(x) = 0$
- $C(x)$ es un monomio

se dice que $C(x)$ es un **factor común** del polinomio $P(x)$.

Por lo tanto, sacar factor común a un polinomio, es escribirlo como producto entre un monomio y un polinomio.

Diapositiva 5

Factor Común

Ejemplo 1:

$$P(x) = 7x^2 + 49x^4 - 7x^3$$
$$P(x) = 7x^2 + 7.7x^2x^2 - 7x^2x$$
$$P(x) = 7x^2(1 + 7x^2 - x)$$

Diapositiva 6

Factor Común

Ejemplo 2:

$$P(x) = x^2 - 3x + 2$$

No se puede identificar ningún factor que sea común en los tres términos

Por lo tanto, no se puede extraer factor común a este polinomio

Diapositiva 7

Factor Común

Ejemplo 3:

$$P(x) = 3x^5 - 6x + 9$$
$$P(x) = 3x^5 - 3.2x + 3.3$$
$$P(x) = 3(x^5 - 2x + 3)$$

Diapositiva 8

Factor Común

Ejemplo 4:

$$P(x) = 4x^5 + 8x^3 + 16x^{11} + 4$$

Diapositiva 9

Factor Común

Ejemplo 5:

$$P(x) = 4x^5 + 8x^3 + 16x^{11} + 4x^7$$
$$P(x) = 4x^3x^2 + 4.2x^2x + 4.4x^2x^9 + 4x^2x^5$$
$$P(x) = 4x^2(x^3 + 2x + 4x^9 + x^5)$$

Diapositiva 10

Factor Común

Ejemplo 6:

$$P(x) = 9x^2 - 6x^4 + 27x^9$$

Diapositiva 11

Factor Común por Grupos

Si ahora tenemos un polinomio escrito como producto de dos binomios, también podemos aplicar propiedad distributiva. Por ejemplo:

$$P(x) = (3 + 4x^3)(7x^2 - 5x)$$

$$P(x) = 21x^2 - 15x + 28x^5 - 20x^4$$

Pero nuevamente, ¿cómo podemos hacer el proceso inverso?

Diapositiva 12

Factor Común por Grupos

$$P(x) = 21x^2 - 20x^4 + 28x^5 - 15x$$

1 Agrupamos términos que tengan en común algún factor

$$P(x) = 21x^2 + 28x^5 - 15x - 20x^4$$

$$P(x) = 7.3x^2 + 7.4x^2x^3 - 5.3x - 5.4xx^3$$

2 Extraemos factor común de cada grupo

$$P(x) = 7x^2(3 + 4x^3) - 5x(3 + 4x^3)$$

3 Extraemos como factor común el término igual

$$P(x) = (3 + 4x^3)(7x^2 - 5x)$$

Diapositiva 13

Factor Común por Grupos

Definición:

Cuando se tiene $P(x) = A(x).C(x) + B(x).C(x)$

y luego se lo puede reescribir como

$A(x).C(x) + B(x).C(x) = [A(x) + B(x)].C(x)$

se dice que $C(x)$ es un **factor común por grupos**

del polinomio $P(x)$.

Diapositiva 14

Factor Común por Grupos

Ejemplo 1:

$$P(x) = 2x^3 - 6x + x^2 - 3$$
$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$$
$$P(x) = 2x^2x + x^2 - 2.3x - 3$$
$$P(x) = x^2(2x + 1) - 3(2x + 1)$$
$$P(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$$

Diapositiva 15

Factor Común por Grupos

Ejemplo 2:

$$P(x) = 10x^3 - 4x + 15x^2 - 6$$

Diapositiva 16

Factor Común por Grupos

Ejemplo 3:

$$P(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x + 3x^2 + 3$$

Diapositiva 17

Polinomio Factorizado

Se llama **polinomio primo** a los polinomios de grado uno y a los polinomios de grado dos que no poseen raíces reales.

Un polinomio P(x) se llama **mónico** si el coeficiente principal es igual a uno.

Un polinomio está **factorizado** cuando está expresado como el producto entre su coeficiente principal y polinomios mónicos primos.

Diapositiva 18

Polinomio Factorizado

Ejemplo:

¿$P(x) = 3x(x+5)(2x+10)$ está factorizado?

NO Porque $2x+10$ no es un polinomio mónico

¿Cómo podemos reescribirlo para que sea mónico?

$$P(x) = 3x(x+5)(2x+10)$$
$$P(x) = 3x(x+5)2(x+5)$$
$$P(x) = 6x(x+5)(x+5)$$

Ahora $P(x)$ está factorizado

PP Diferencia de Cuadrados y Trinomio Cuadrado Perfecto

Diapositiva 1

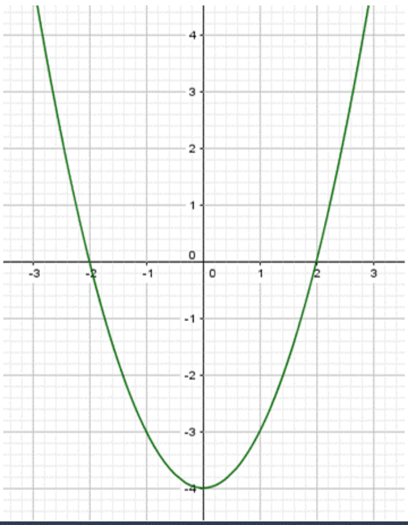
Nuestra caja de herramientas para el trabajo matemático

Herramientas	Nombre	Ejemplo
Primera	Factor Común	$P(x) = x^{11} - 3x^3 + 6x^5$ $P(x) = x^3(x^8 - 3 + 6x^2)$
Segunda	Factor Común por Grupos	$P(x) = x^2 + 2 + 2x + x^3$ $P(x) = (x^2 + 2)(1 + x)$
Tercera		
Cuarta		

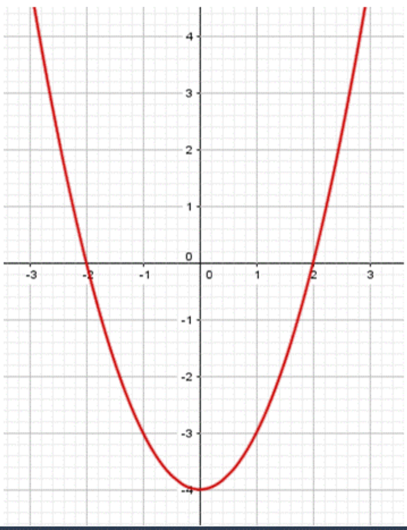
Diapositiva 2

Observemos los siguientes gráficos

$P(x) = x^2 - 4$



$P(x) = (x + 2)(x - 2)$



Diapositiva 3

Diferencia de Cuadrados

Definición:

La diferencia de los cuadrados de un binomio es igual al producto entre la suma y la diferencia de sus términos.

Diapositiva 4

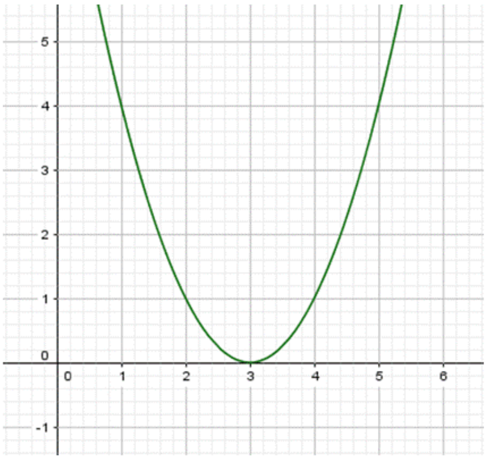
Nuestra caja de herramientas para el trabajo matemático

Herramientas	Nombre	Ejemplo
Primera	Factor Común	$P(x) = x^{11} - 3x^3 + 6x^5$ $P(x) = x^3(x^8 - 3 + 6x^2)$
Segunda	Factor Común por Grupos	$P(x) = x^2 + 2 + 2x + x^3$ $P(x) = (x^2 + 2)(1 + x)$
Tercera	Diferencia de Cuadrados	$P(x) = x^2 - 4$ $P(x) = (x + 2)(x - 2)$
Cuarta		

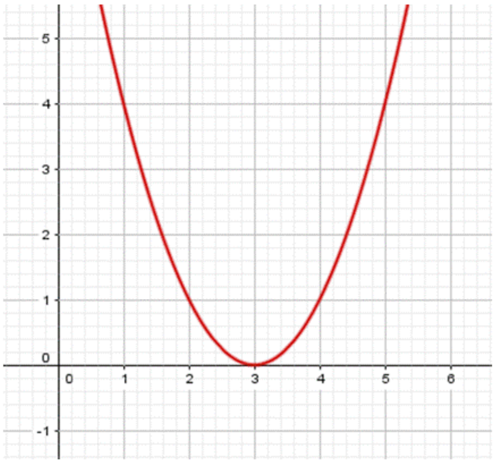
Diapositiva 5

Observemos los siguientes gráficos

$P(x) = (x-3)^2$



$P(x) = x^2 - 6x + 9$



Diapositiva 6

Trinomio Cuadrado Perfecto

Definición:

Cualquier binomio elevado al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble del primer por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

Diapositiva 7

Nuestra caja de herramientas para el trabajo matemático

Herramientas	Nombre	Ejemplo
Primera	Factor Común	$P(x) = x^{11} - 3x^3 + 6x^5$ $P(x) = x^3(x^8 - 3 + 6x^2)$
Segunda	Factor Común por Grupos	$P(x) = x^2 + 2 + 2x + x^3$ $P(x) = (x^2 + 2)(1 + x)$
Tercera	Diferencia de Cuadrados	$P(x) = x^2 - 4$ $P(x) = (x + 2)(x - 2)$
Cuarta	Trinomio Cuadrado Perfecto	$P(x) = (x - 3)^2$ $P(x) = x^2 - 6x + 9$

PP Ejemplo de Factorización de un polinomio

Diapositiva 1

Ejemplo de factorización de un polinomio

Factoricemos el polinomio $P(x) = 3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$

1 Encontré que $C(x) = x$ es un factor que se encuentra en todos los términos del polinomio, y como es un monomio, entonces puedo extraerlo utilizando la herramienta factor común. Entonces, aplicando la herramienta puedo escribir al polinomio como:

$$P(x) = x(3x^3 - 12x + 2x^2 - 8)$$

Diapositiva 2

Ejemplo de factorización de un polinomio

Factoricemos el polinomio $P(x) = 3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$

2 En el factor $3x^3 - 12x + 2x^2 - 8$ puedo formar dos grupos: $3x^3 - 12x$ y $2x^2 - 8$ y a ambos extraerles factor común, entonces a $P(x)$ lo puedo reescribir como:

$$P(x) = x[3x(x^2 - 4) + 2(x^2 - 4)]$$

Diapositiva 3

Ejemplo de factorización de un polinomio

Factoricemos el polinomio $P(x) = 3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$

3 En el factor $3x(x^2 - 4) + 2(x^2 - 4)$ encontré que $x^2 - 4$ es un factor que se encuentra en ambos términos del polinomio, y como no es un monomio, puedo aplicar factor común por grupos. Entonces, puedo reescribir al polinomio $P(x)$ como:

$$P(x) = x(x^2 - 4)(3x + 2)$$

Diapositiva 4

Ejemplo de factorización de un polinomio

Factoricemos el polinomio $P(x) = 3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$

4 El factor $x^2 - 4$ es una diferencia de cuadrados ya que es un binomio, ambos términos son cuadrados perfectos y además se relacionan por una diferencia, entonces puedo reescribir a $x^2 - 4$ como $(x + 2)(x - 2)$ y por lo tanto a $P(x)$ lo reescribo como:

$$P(x) = x(x + 2)(x - 2)(3x + 2)$$

Diapositiva 5

Ejemplo de factorización de un polinomio

Factoricemos el polinomio $P(x) = 3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$

5 Los factores x, $x+2$ y $x-2$ son primos ya que son de grado uno y mónicos porque su coeficiente principal es 1. El factor $3x+2$ es primo pero no mónico ya que su coeficiente principal es 3, entonces, puedo extraer factor común 3 y escribir al factor como $3(x+\frac{2}{3})$. Entonces:

$$P(x) = 3x(x+2)(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

Diapositiva 6

Ejemplo de factorización de un polinomio

Factoricemos el polinomio $P(x) = 3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$

6 Ahora $P(x)$ está escrito como el producto entre su coeficiente principal y polinomios primos mónicos, por lo tanto está factorizado.

$$P(x) = 3x(x+2)(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

Diapositiva 7

Ejemplo de factorización de un polinomio

Factoricemos el polinomio $P(x) = 3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$

$$P(x) = 3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$$

1 $P(x) = x(3x^3 - 12x + 2x^2 - 8)$

2 $P(x) = x[3x(x^2 - 4) + 2(x^2 - 4)]$

3 $P(x) = x(x^2 - 4)(3x + 2)$

4 $P(x) = x(x + 2)(x - 2)(3x + 2)$

5 $P(x) = 3x(x + 2)(x - 2)\left(x + \frac{2}{3}\right)$

Diapositiva 8

Ejemplo de factorización de un polinomio

Encontremos las raíces de $P(x) = 3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$

$$P(x) = \underbrace{3x}_{x=0}\underbrace{(x + 2)}_{x=-2}\underbrace{(x - 2)}_{x=2}\underbrace{\left(x + \frac{2}{3}\right)}_{x=-\frac{2}{3}}$$

Como $P(0) = 0, P(-2) = 0, P(2) = 0$ y $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$ entonces por la definición de raíz, $x = 0, x = -2, x = 2$ y $x = -\frac{2}{3}$ son raíces de $P(x)$ y como el polinomio es de grado 4, esas son las únicas raíces de $P(x)$.

Diapositiva 9

Ejemplo de factorización de un polinomio

Encontremos el resto de la división de
$P(x) = 3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$ por $Q(x) = x + 1$
utilizando el Teorema del Resto.

El Teorema del Resto nos dice que el resto de la división entre $P(x)$ por $Q(x) = x - a$ es igual a $P(a)$.

En este caso, $a = -1$ entonces el resto de la división entre $P(x)$ y $Q(x)$ es

$$P(-1) = 3.(-1)^4 - 12.(-1)^2 + 2.(-1)^3 - 8.(-1)$$
$$P(-1) = 3 - 12 - 2 + 8$$
$$P(-1) = -3$$

Diapositiva 10

Ejemplo de factorización de un polinomio

Encontremos los polinomios cociente y resto de la división de $P(x) = 3x^4 - 12x^2 + 2x^3 - 8x$ por $Q(x) = x + 1$ utilizando la Regla de Ruffini.

	3	2	-12	-8	0
-1		-3	1	11	-3
	3	-1	-11	3	-3

$C(x) = 3x^3 - x^2 - 11x + 3$ $\qquad$ $R(x) = -3$

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación del Informe Final de Prácticas de *Metodología y Práctica de la Enseñanza*, damos Fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por el Tribunal.