

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA
Y COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA

**DINÁMICA DE UN MICRONADADOR
AUTOPROPULSADO EN UN FLUJO DE
CIZALLAMIENTO**

Diego E. Karam

Director: Dr. Adolfo J. Banchio

5 de Julio de 2017



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/> or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Resumen

Utilizando simulaciones numéricas del tipo Dinámica de Stokes se estudia el movimiento de micronadadores sometidos a un flujo de cizalla. Resulta de gran interés entender la interacción entre la manera en que se propulsa el micronadador y el flujo ambiente. En particular, si de esta resulta alguna orientación de nado favorecida. En este trabajo se partió desde una puesta a punto del código de Dinámica de Stokes, adaptándolo para el estudio de micronadadores de interés [1]. Se encontró que los nadadores cuyos cuerpos tienen simetría de revolución se comportan de manera similar, describiendo órbitas similares a la de los esferoides autopropulsados. Finalmente, se estudia un nadador con cuerpo en forma de esferoide y con un flagelo helicoidal rígido y rotante. En este caso se observa una tendencia del nadador a orientarse en la dirección de la vorticidad del flujo. Esto puede entenderse a partir del análisis de la dinámica orientacional del *cuerpo* del nadador sin autopropulsión sometido a la acción del flujo de cizalla.

The movement of microswimmers under a shear flow is studied using numerical simulations of the Stokesian Dynamics type. It is of great interest to understand the interaction between a swimmer's self-propulsion and the ambient flow. In particular, if this results in some favored swimming orientation. The start point in this work is a set-up of the Stokes Dynamics code, adapting it for the study of microswimmers of interest [1]. It was found that swimmers whose bodies have a revolution symmetry behave similarly, describing orbits similar to that of self-propelled spheroids. Finally, a swimmer with a body in the shape of a spheroid and with a rigid and rotating helical flagellum is studied. In this case, a tendency of the swimmer to orientate itself in the direction of the vorticity of the flow is observed. This can be understood as part of the analysis of the dynamics orientation of the body of the swimmer without self-propulsion subjected to the action of shear flow.

Índice general

1. Introducción	1
2. Marco Teórico	3
2.1. Hidrodinámica de bajo número de Reynolds: las ecuaciones de Stokes . . .	3
2.2. Micronadadores y el Número de Reynolds	5
2.2.1. Generalidades	5
2.2.2. Ejemplos	6
2.3. Flujo ambiente y momentos de la velocidad	7
2.4. El método de Stokesian Dynamics (SD)	9
2.5. Micronadadores con SD	10
2.5.1. Formas de nado	10
2.5.2. Adaptación de SD a nadadores	11
3. Fluido en reposo	13
3.1. Modelos usados	13
3.2. Resultados	15
4. Flujo de cizalla	17
4.1. Agregando flujo ambiente	17
4.1.1. Órbitas de Jeffery	17
4.1.2. Torques sobre esferoides	21
4.2. Micronadadores en un flujo ambiente	23
4.2.1. Adimensionalización	23
4.2.2. Nadadores simples	24
4.2.3. Nadador helicoidal	26
5. Resultados y conclusiones	33
Bibliografía	35

Capítulo 1

Introducción

La dinámica de micronadadores no es un tema nuevo, se conocen resultados teóricos y con respaldo experimental desde hace tiempo [2, 3]. El entusiasmo por la investigación y desarrollo en temas de micronadadores se debe, en gran medida, a la influencia que tienen los microorganismos en todo tipo de sistemas biológicos [4, 5, 6, 7], y a sus potenciales usos como herramientas y objetos de investigación. Haciendo uso de ellos se podría llevar medicamentos a zonas específicas del cuerpo, evitar que lleguen a zonas no deseadas, tomar muestras de tejido biológico de forma poco invasiva, y muchas otras cosas [8, 9]. Los usos de los micronadadores como herramientas se hace posible gracias a nuevas tecnologías de fabricación de nadadores artificiales [10, 11]. Pero, si bien existen métodos de propulsión muy variados para nadadores artificiales [12, 13, 14, 15, 16, 17] y maneras de hacer que microorganismos naden en la dirección deseada [18, 19, 20], hay que notar que, en general, los nadadores estudiados se encuentran en un fluido en reposo. No hay otras corrientes en el fluido que las generadas por los nadadores. En los casos en que se considera flujo externo, suelen aparecer efectos notables como producto de la interacción de los nadadores con el flujo. Esta es una de las razones por la que vale la pena estudiar el efecto de un flujo externo sobre el movimiento de un micronadador. La reología (estudio de la deformación y el flujo de materiales) de suspensiones activas (suspensiones de partículas, o microorganismos, capaces de convertir combustible en trabajo mecánico), por otro lado, resulta de interés, no solo por los fenómenos novedosos que exhiben los sistemas estudiados (como *Fluidización por cizalla* (*shear thinning*) y *Espesamiento por cizalla* (*shear thickening*) [21], cambios en la viscosidad de la suspensión debidos a la anisotropía en la dirección de nado de los organismos), sino también por su importancia en el estudio de sistemas biológicos [22, 23] y desarrollos en tecnología [24, 25, 26].

Para estudiar estos sistemas, existen modelos (basados en ecuaciones tipo Fokker-Plank

[21, 27]) para suspensiones de micronadadores diluídas que predicen la orientación de los nadadores en torno a la dirección de un flujo de cizalla (un flujo constante en el tiempo y con gradiente de velocidad uniforme en el espacio). También se han hecho observaciones [28] de cómo algunas bacterias (vivas) se resisten a ser arrastradas por el flujo y se mantienen orientadas durante cierto tiempo, a diferencia de las bacterias muertas que sólo se mueven por agitación térmica y rotan.

Los modelos teóricos para simulación de micronadadores, o grupos de ellos, se pueden agrupar en dos tipos. Los primeros consisten en ecuaciones con términos estocásticos, donde la interacción del fluido con los nadadores ya se tuvo en cuenta [21, 29, 30, 31], es decir, no se resuelven ecuaciones de hidrodinámica. En el segundo tipo de método, se prescribe un movimiento de nado y se resuelven las ecuaciones de hidrodinámica sobre la superficie del cuerpo [32, 33, 34, 35, 36]. El Método de *Stokesian Dynamics* [37] para simulación de suspensiones (muy usado por ser preciso y rápido) fue adaptado por Swan *et. al* [1] para simular nadadores en bajo Número de Reynolds construyéndolos a partir de esferas. La idea es tener una forma simple y rápida de resolver problemas de los que se llaman de segundo tipo en el párrafo anterior. Se arma un arreglo de esferas que imita al cuerpo que se quiere simular, y SD se encarga de las interacciones. Éste es el método usado para todas las simulaciones incluídas en el presente trabajo.

Ya existe un trabajo de naturaleza similar dentro del grupo de teoría de la materia condensada de FaMAF [38]. La diferencia fundamental con éste trabajo es que Berdakin estudió (usando el método de SD) la dinámica de un nadador sin flujo ambiente. En base a los resultados de esas investigaciones y algunos otros [32, 29], se pretende estudiar la dinámica de distintos tipos de nadadores y objetos.

El trabajo se presenta en dos partes. En el primero se estudian nadadores en un fluido en reposo, los resultados se comparan con otros ya existentes para verificar las modificaciones que se hicieron en el código. En la segunda, se agrega flujo ambiente a las simulaciones. Se simulan, primero, esferoides para los cuales se cuenta con resultados analíticos para comparar. La última parte del trabajo (en el segundo capítulo) trata sobre nadadores autopropulsados en un flujo de cizalla. Se observa la influencia de la simetría de un cuerpo en su movimiento. Se estudia también la dinámica de un nadador helicoidal, y se encuentra que la orientación del nadador prácticamente no depende de su orientación inicial. Se observa, por último, cierta similitud con observaciones experimentales.

Capítulo 2

Marco Teórico

Este capítulo comienza con una descripción de la microhidrodinámica. Las leyes que describen el movimiento de los fluidos en los que se mueven los micronadadores. Luego se da una explicación cualitativa sobre las particularidades del nado de en éste tipo de fluidos. Una vez explicado lo básico sobre el comportamiento de un nadador, se introducen las herramientas teóricas para la descripción del flujo externo y su interacción con el movimiento del nadador. El marco teórico termina con la descripción del método usado para modelar micronadadores y su movimiento.

2.1. Hidrodinámica de bajo número de Reynolds: las ecuaciones de Stokes

Las ecuaciones generales para flujo de momento en un fluido newtoniano e incompresible son las *Ecuaciones de Navier-Stokes*:

$$\begin{cases} \rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \right\} = -\nabla p(\mathbf{r}, t) + \eta \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{cases}$$

Donde, \mathbf{u} es la velocidad del fluido y \mathbf{f}^{ext} representa las fuerzas sobre el fluido que no sean de origen hidrodinámico. En éste trabajo sólo se consideran flujos estacionarios y sin fuerzas externas aplicadas, por lo tanto $\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) / \partial t = 0$ y $\mathbf{f}^{ext} = 0$.

Queda un término que es el gradiente de presiones en el fluido (∇p), un término que da cuenta de las fuerzas viscosas sobre el fluido (contiene al coeficiente de viscosidad η) y un término que representa la inercia en el fluido (término de advección, $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$).

Definiendo la longitud (L) y velocidad (U) características del problema y haciendo un cambio de variables $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/U$, $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/L$, $\tilde{t} = tU/L$ y luego reescalando también la

presión como $\tilde{p} = p - p_0/\rho U^2$ (donde p_0 es alguna presión) se encuentra la versión adimensionalizada de las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) - \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = -\nabla p(\mathbf{r}, t) \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = 0 \end{cases}$$

Llama la atención en éstas ecuaciones la cantidad $Re \approx \rho LU/\eta$. Éste es el llamado *Número de Reynolds* y si se considera que se cumple $Re \ll 1$, se obtienen las *ecuaciones de Stokes*

$$\begin{cases} -\nabla p(\mathbf{r}, t) + \eta \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{cases}$$

(ver [39]). Éstas son las ecuaciones para la hidrodinámica de bajo número de Reynolds (la condición de bajo número de Reynolds se aplica siempre a la dinámica de micronada-dores) y es de gran importancia notar que son lineales en la velocidad.

Al tratar cuerpos sumergidos en estos fluidos se resuelven dos tipos de problemas:

- El campo de velocidades de un fluido en el cual se prescriben las condiciones de contorno (movimiento del cuerpo respecto al fluido, por ejemplo), como un problema de condiciones de contorno usual.
- El movimiento de un cuerpo a través del fluido si se conoce el *flujo ambiente* de antemano.

Al introducir partículas en el problema, hay que imponer una relación entre las velocidades del fluido y la superficie del cuerpo. Para partículas en la escala de micrones la condición más usada es la de igualar las velocidades (*no-slip boundary condition* o condición de no deslizamiento).

A pesar de que se pueden encontrar soluciones exactas de las ecuaciones para algunos casos (como la interacción entre dos esferas, que se menciona más adelante) en un problema con muchos cuerpos esto puede ser muy difícil. Para salvar éste problema se usa una expansión en multipolos de los momentos de la velocidad en la superficie del cuerpo (que concuerda con la velocidad de la superficie misma) análoga a la usada en electrostática (ver [39]). Usualmente basta con calcular los primeros momentos de la expansión.

A saber:

La *fuerza*:

$$\mathbf{F}_i = \oint_S (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})_i dS$$

El *stresslet*:

$$\mathbf{S}_{ij} = \frac{1}{2} \oint_S [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})_i \xi_j + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})_j \xi_i] dS - \frac{1}{3} \oint_S [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \boldsymbol{\xi}] dS \delta_{ij}$$

Y el *torque*:

$$\mathbf{T}_{ij} = \frac{1}{2} \oint_S [(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})_i \xi_j - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}})_j \xi_i] dS$$

Donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el Tensor de stress. Contiene las densidades de fuerza en cada punto (y para cada dirección) del fluido y $\boldsymbol{\xi}$ es un vector sobre la superficie del cuerpo.

La fuerza es el momento de menor orden. El *stresslet* y el *torque* son los siguientes. Si bien \mathbf{S} y \mathbf{T} son del mismo orden, se los considera por separado porque son la parte simétrica y antisimétrica (respectivamente) del tensor que sigue a la fuerza en la expansión multipolar. En el caso de que el flujo ambiente sea lineal en las coordenadas espaciales \mathbf{S} y \mathbf{T} se relacionan con las partes simétrica y antisimétrica (respectivamente) del flujo.

2.2. Micronadadores y el Número de Reynolds

2.2.1. Generalidades

El movimiento de micronadadores se rige por las ecuaciones de la hidrodinámica de bajo número de Reynolds. Este hecho es de suma importancia física. Las ecuaciones para fluidos en estas condiciones tienen diferencias fundamentales con las de Navier-Stokes. Por lo tanto, resulta conveniente adquirir (o retomar) un conocimiento intuitivo sobre el número de Reynolds y su dependencia con el tamaño de los objetos y las propiedades del fluido.

Se define el número de Reynolds (Re) como:

$$Re = \frac{\rho L v}{\eta}$$

(ver [40]) donde ρ es la densidad del fluido, L es una longitud característica del cuerpo, v es una velocidad representativa del problema y η es la viscosidad del fluido. Re es una cantidad adimensional que relaciona la inercia en el movimiento del fluido con la fuerza viscosa en el mismo.

$$\text{se relaciona: } Re = \frac{\text{inercia}}{\text{fuerza viscosa}}$$

Así, cuando Re es pequeño, se puede pensar que la inercia del cuerpo que se encuentra sumergido en el fluido es despreciable. Toda la energía del nadador se usa para cambiar de forma (nadar) o se disipa en calor instantáneamente (en relación a las escalas temporales de interés, introducidas más adelante).

2.2.2. Ejemplos

Para ayudar a dar una idea de las magnitudes manejadas se introducen algunos ejemplos y comparaciones.

El cociente $\eta/\rho = \nu$ se denomina *viscosidad cinemática*, y para el agua (que vamos a usar de ejemplo) vale aproximadamente $\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$. Se pueden usar ordenes de magnitud de las velocidades y tamaños de distintos animales para calcular su número de Reynolds en agua :

Animal	v [m/s]	L [m]	Re
Ballena	~ 10	~ 10	10^8
Humano	~ 1	~ 1	10^6
Pez dorado	$\sim 10^{-1}$	$\sim 10^{-2}$	10^3
E.Coli	$\sim 10^{-6}$	$\sim 10^{-6}$	10^{-6}

Los números en la tabla anterior no son exactos, y puede haber una diferencia de un orden de magnitud en los Re calculados, pero es para esquematizar. El número de Reynolds de 10^8 de la ballena significa que el fluido al rededor de una ballena que nada se vuelve turbulento bajo las condiciones físicas en que el flujo al rededor de un humano sería laminar. Para lograr que el flujo sobre la ballena fuese laminar habría que reducir mucho su velocidad (unos dos ordenes de magnitud). Se puede observar, también, la diferencia enorme entre un humano y una bacteria, mayor que entre un pez y una ballena. También se puede cambiar el fluido. A $20^\circ C$ la miel tiene una viscosidad cinemática de $\sim 10^4 \frac{m^2}{s}$. Por lo tanto, el número de Reynolds de un humano nadando en miel baja 10 ordenes de magnitud, casi alcanzando el de una bacteria en agua.

Dicho todo esto, falta entender qué diferencia a los casos con diferentes números de Reynolds. Ya se mencionó que si $Re \ll 1$, podemos pensar que el cuerpo en cuestión no tiene inercia. Pero aparte de la pérdida de la inercia, hay otro resultado importante. Un teorema importante obtenido por Purcell [2]. Como no hay inercia, la velocidad con que se realiza un movimiento al nadar (una brazada, por ejemplo) no cambia la forma de nado. La condicion final es la misma, independientemente del tiempo que se haya tomado llegar ahí. Entonces, cualquier forma de nado que conste en realizar un movimiento y luego realizar el mismo movimiento en reversa para volver a la *condición* inicial (para realizar el mismo movimiento otra vez y volver a impulsarse) devuelve al nadador a la misma *posición* inicial. No hay desplazamiento neto del nadador. Para nadar en bajo Re se deben realizar movimienos que no sean reversibles.

2.3. Flujo ambiente y momentos de la velocidad

Como ya se mencionó, un flujo ambiente lineal suele dividirse en tres partes: una traslación pura (\mathbf{U}^∞), una parte antisimétrica (rotación pura $\mathbf{\Omega}^\infty$) y una parte simétrica (*strain* \mathbf{E}^∞).

El flujo más simple de éste tipo es constante en el tiempo, uniforme en el espacio y orientado en una dirección $\hat{\mathbf{r}}_1$. Éste se puede describir como

$$\mathbf{u}^\infty = \mathbf{U}^\infty = cte \hat{\mathbf{r}}_1$$

El único flujo que se emplea en éste trabajo es un *flujo de cizalla* (shear flow). Éste es un flujo en cierta dirección $\hat{\mathbf{r}}_1$ cuya intensidad varía linealmente con alguna dirección $\hat{\mathbf{r}}_2$ ortogonal a $\hat{\mathbf{r}}_1$. Se puede describir al flujo de cizalla como

$$\mathbf{u}^\infty = \mathbf{\Omega}^\infty \times \mathbf{r} + \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{r}$$

Esto es, el flujo lineal se descompone en el rotacional (antisimétrico) y el de strain (simétrico) (ver [41]) como se muestra en la figura 2.1.

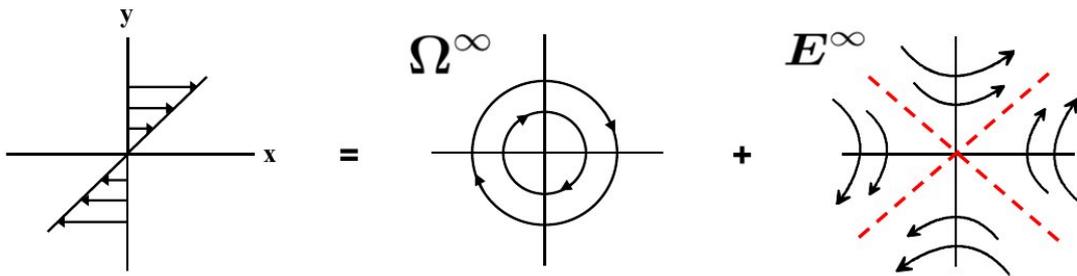


Figura 2.1: Descomposición de un flujo de cizalla en un flujo rotacional y uno de strain. Figura extraída de [41]

Al ser el flujo lineal, se suelen escribir los campos \mathbf{u} , $\mathbf{\Omega}$ y \mathbf{E} en forma matricial. Por ejemplo, para un flujo en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ con gradiente en y :

$$\mathbf{u}^\infty = \dot{\gamma} \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{r} \quad (2.1)$$

$\dot{\gamma}$ se denomina *velocidad de deformación* o *velocidad de cizalla*, y $\mathbf{\Gamma}$ es

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Y se puede escribir la descomposición en $\mathbf{\Omega}$ y \mathbf{E} como

$$\mathbf{E} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Esta manera de escribir los flujo puede ser de ayuda para visualizar el problema y para trabajar cuestiones de estabilidad, entre otras.

Los momentos de la velocidad en la superficie de un cuerpo se descomponen, como ya se explicó, en fuerza, stresslet, torque y otros de orden más alto. La relación de éstos con las componentes del flujo es ineal

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} = \eta \mathcal{R} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^\infty - \mathbf{U} \\ \mathbf{\Omega}^\infty - \mathbf{\Omega} \\ \mathbf{E}^\infty \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Donde se definió que el cuerpo se mueve con velocidad \mathbf{U} y velocidad angular $\mathbf{\Omega}$. \mathcal{R} es la matriz *Gran resistencia*.

También existen las relaciones para los problemas en los que se prescriben la fuerza y el torque en un flujo ambiente concido

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}^\infty - \mathbf{U} \\ \mathbf{\Omega}^\infty - \mathbf{\Omega} \\ \mathbf{E}^\infty \end{pmatrix} = \eta^{-1} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Donde \mathcal{M} es la matriz *Gran movilidad*. Éstos dos tipos de problemas (2.4 y 2.5) son conocidos con el nombre de *Problemas de resistencia* y *Problemas de movilidad*.

Por ser muy usadas en las ecuaciones, se definen las matrices \mathbf{R}_{IJ} y \mathbf{M}_{JI} que relacionan el I-ésimo momento de la fuerza sobre un cuerpo con el J-ésimo momento de la velocidad sobre su superficie. Las matrices \mathcal{R} y \mathcal{M} quedan:

$$\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{FU} & \mathbf{R}_{F\Omega} & \mathbf{R}_{FE} & \cdots \\ \mathbf{R}_{TU} & \mathbf{R}_{T\Omega} & \mathbf{R}_{TE} & \cdots \\ \mathbf{R}_{SU} & \mathbf{R}_{S\Omega} & \mathbf{R}_{SE} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Notar que la relación de inversa vale para las matrices grán movilidad con grán resistencia, pero no entre las que las componen por separado ($\mathbf{R}_{FU} \neq \mathbf{M}_{UF}^{-1}$).

Por último, las *Leyes de Faxén*. Se llama leyes de Faxén a las relaciones entre los momentos de la velocidad de un cuerpo (para condiciones no-slip) y el flujo que lo rodea. Se pueden usar para determinar la dinámica del cuerpo prescribiendo la del fluido, o

viceversa. Dada, entonces, una configuración para un arreglo de esferas (en éste caso), se pueden calcular con éstas leyes las matrices \mathcal{M} o \mathcal{R} . Hasta el orden deseado en los momentos. Ésto último es parte fundamental del método de SD.

2.4. El método de Stokesian Dynamics (SD)

SD es un método similar a los de Dinámica Molecular, usado para simular un sistema de partículas en un fluido a bajo número de Reynolds, donde las partículas pueden interactuar via fuerzas hidrodinámicas y no hidrodinámicas. En base a las interacciones, se calculan las fuerzas y velocidades, y con estos, los cambios en las posiciones de cada partícula del sistema.

Ya se mencionó que existen soluciones analíticas para propiedades de suspensiones de partículas, pero suele requerirse que las suspensiones sean diluidas [42, 43, 44, 45, 46, 47] (se desprecia la interacción entre partículas) o de configuración periódica [48, 49, 50, 51], u otras aproximaciones [52, 53, 54, 55, 56]. El problema de las suspensiones en general es que no se puede resolver el problema de muchos cuerpos analíticamente y, así que éste método viene a intentar salvar ese problema de una manera eficiente.

La idea del algoritmo es la siguiente (ver [37]). Se sabe que los problemas de muchas partículas son mejor tratados en la representación de movilidad. Mientras que es mejor tratar los efectos de las fuerzas de lubricación en la representación de resistencia. En una suspensión hay que tener en cuenta todos esos efectos, y por lo tanto, optar por alguna representación, en SD se usa la de resistencia.

Usando la solución a las ecuaciones de Stokes y las leyes de Faxén, se arma la matriz Gran movilidad correspondiente al sistema (denotada \mathcal{M}^∞). Se tienen en cuenta sólo los momentos de hasta el orden de T y S . Luego se invierte esta matriz para tener la interacción de muchos cuerpos en la representación resistencia. Para incluir los efectos de lubricación, se calculan las matrices de resistencia entre cada par de esferas (\mathcal{R}_{2B}) (ésto porque se conoce la solución exacta a ese problema [39, 57]) y se agrega ese término a la matriz calculada anteriormente.

Al calcular la matriz \mathcal{M} las interacciones de corta distancia (\mathcal{R}_{2B}) aparecen naturalmente. Por lo tanto, al sumar las dos contribuciones a la matriz gran resistencia, se tiene en cuenta esa interacción dos veces. La solución a éste problema es restar la interacción a fin de contarla sólo una vez.

La matriz de Resistencia del problema queda, entonces:

$$\mathcal{R} = (\mathcal{M}^\infty)^{-1} + \mathcal{R}_{2B} - \mathcal{R}_{2B}^\infty$$

Además de eso, se desprecian términos estocásticos en las ecuaciones de movimiento de las partículas (en principio SD puede incluir movimiento browniano) al no ser relevante para éste trabajo. Luego se usa que (ver [58])

$$\mathbf{F} = -\mathbf{R}_{FU} \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{U}^\infty) + \mathbf{R}_{FE} : \mathbf{E} \quad (2.7)$$

para obtener la ecuación de movimiento de una esfera por el método de stokesian dynamics:

$$\Delta \mathbf{x} = \{ \mathbf{U}^\infty + \mathbf{R}_{FU}^{-1} \cdot [\mathbf{R}_{FE} : \mathbf{E}^\infty + \dot{\gamma}^{*-1} \mathbf{F}^{ext}] \} \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (2.8)$$

Donde $\Delta \mathbf{x}$ es el cambio en la posición para una partícula en un periodo de tiempo Δt . $\dot{\gamma}^{*-1} = 6\pi\eta a^2 \dot{\gamma} / |F^p|$ es un parámetro que relaciona la importancia de las fuerzas del flujo externo y las fuerzas entre partículas (F^p). Al tener un mayor $\dot{\gamma}^{*-1}$ las fuerzas hidrodinámicas son más importantes que las externas

2.5. Micronadadores con SD

2.5.1. Formas de nado

Para simular el movimiento de micronadadores hay que proponer una forma de propulsión (denominadas *swimming gaits*). Probablemente, la primera en que uno piense es un denominado *Explicit swimming gait*. Consiste en prescribir una forma de movimiento del nadador y dejar que éste se mueva en el fluido por medio de las interacciones hidrodinámicas.

Existe (por lo menos) otra forma de nadar. Ya que un cuerpo se mueve por medio de la interacción con el fluido que lo rodea, puede prescribirse la velocidad del fluido en cada punto de la superficie del cuerpo. Esto causa una fuerza propulsiva, de la misma forma que prescribir un movimiento para el nadador, pero con algunos cambios.

Hay que recordar que aunque se puede conocer la forma de propulsión del nadador, (flagelos, cilios, etc) encontrar las componentes más características de las velocidades en el flujo y usarlas como modelo del ambiente es suficiente para hacerlo nadar. Es más, la segunda opción puede ser una simplificación importante en cuanto a la complejidad de la simulación.

Suele usarse [21, 59, 60] como aproximación un campo que consta de sólo un dipolo

asignado al nadador, que puede estar en la dirección de nado o en la opuesta. En el primer caso el nadador se denomina *pusher* y en el segundo *puller*.

Éste trabajo trata sólo efectos hidrodinámicos para un nadador. Por lo tanto toda la interacción va a depender de la superficie del cuerpo que se modele. Así, para simular el cuerpo de un nadador simplemente se genera una forma similar a la buscada a partir de las esferas usadas por SD.

2.5.2. Adaptación de SD a nadadores

El método está diseñado para calcular la dinámica de las esferas, no del cuerpo entero. Así que se usa un tensor (Σ) para proyectar las fuerzas, torques y velocidades de las partículas al cuerpo. Ésto se hace pensando a cada esfera como un elemento del arreglo:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{U}} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \Delta \mathbf{r} \quad (2.9)$$

Si un arreglo rígido de esferas se mueve con velocidad lineal $\hat{\mathbf{U}}$ y angular $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$, \mathbf{u} es la velocidad de una esfera que se encuentra a Δr del centro del arreglo. El tensor Σ expresa esta relación. Para una esfera y un cuerpo determinados, se escribe como

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta r_3 & -\Delta r_2 & 1 & 0 & 0 \\ -\Delta r_3 & 0 & \Delta r_1 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta r_2 & -\Delta r_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hay que aclarar que se usa un vector velocidad que incluye las velocidades lineales y angulares de todas las partículas, la relación anterior se expresaría, entonces:

$$\hat{\mathbf{U}} = \Sigma \mathbf{u} \quad (2.10)$$

aunque no es usual expresar la velocidad del cuerpo en términos de las velocidades de las esferas que lo componen, sino más bien lo contrario

$$\mathbf{u} = \Sigma^T \hat{\mathbf{U}} \quad (2.11)$$

Teniendo esto, para calcular las velocidades de los cuerpos, basta calcular las fuerzas sobre las esferas que los integran usando (con SD) lo ya visto sobre hidrodinámica y

luego pasar las fuerzas de las partículas a fuerzas sobre el cuerpo usando el tensor Σ
Al ser despreciada la inercia de las partículas, para cada una se cumple

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{ext} = 0 \quad (2.12)$$

Donde \mathbf{F}_{ext} suma las fuerzas no hidrodinámicas. Además, si \mathbf{R}_{FU} es la matriz resistencia que relaciona la \mathbf{U} del fluido con la \mathbf{F} sobre la partícula y \mathbf{R}_{FE} es lo mismo con el \mathbf{E} del fluido, es posible escribir

$$\mathbf{F} = -\mathbf{R}_{FU} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{R}_{FE} : \mathbf{E} - \dots \quad (2.13)$$

y con eso calcular la velocidad como

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_{FU}^{-1} \cdot (\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{R}_{FE} : \mathbf{E} - \dots) \quad (2.14)$$

Usando Σ , la velocidad del nadador ($\hat{\mathbf{U}}$) puede escribirse en función de los momentos del fluido en cada partícula

$$\hat{\mathbf{U}} = (\Sigma \cdot \mathbf{R}_{FU} \cdot \Sigma^T)^{-1} \cdot \Sigma \cdot (-\mathbf{R}_{FE} : \mathbf{E} - \dots)$$

En ésta ecuación, $(\Sigma \cdot \mathbf{R}_{FU} \cdot \Sigma^T)^{-1}$ juega el papel de una \mathbf{R}_{FU}^{-1} para el ensamble de esferas completo. Es el tensor que toma las fuerzas sobre el cuerpo ($\Sigma \cdot (-\mathbf{R}_{FE} : \mathbf{E} - \dots)$) y las lleva a velocidades.

Aparte de lo anterior, para hacer que un ensamble se mueva por sí mismo, hay que incluir una forma de nado. El gait explícito se incluye sumando un término $\mathbf{u}_s(t)$ a la velocidad de cada partícula.

$$\mathbf{u} = \Sigma^T \cdot \hat{\mathbf{U}} + \mathbf{u}_s(t)$$

Para usar un gait implícito, en cambio, se añade el campo de velocidades que se necesite al \mathbf{E} del fluido en la superficie del nadador. Con estas consideraciones, la velocidad sobre el cuerpo queda, entonces:

$$\hat{\mathbf{U}} = -(\Sigma \cdot \mathbf{R}_{FU} \cdot \Sigma^T)^{-1} \cdot \Sigma \cdot (\mathbf{R}_{FU} \cdot \mathbf{U}_s + \mathbf{R}_{FE} : \mathbf{E})$$

donde ahora \mathbf{U}_s es sólo la velocidad de propulsión y \mathbf{E} incluye el campo de strain del fluido y los momentos producidos por el nadador.

Capítulo 3

Fluido en reposo

La primera parte del trabajo consistió en revisar el código existente. El código usado podía simular nadadores sin flujo ambiente. Para eso se aprovecharon resultados existentes de cálculos hechos por el mismo método en [1, 38].

En estas simulaciones el tiempo está adimensionalizado con la velocidad del nadador (Ω). Esto es importante porque la adimensionalización del tiempo va a cambiar más tarde.

3.1. Modelos usados

Se usaron tres modelos diferentes de nadadores, los cuales se detallan a continuación.

Spinner:

Un Spinner consta de sólo dos esferas cuyos centros están separados por una distancia $2R$ y que rotan con velocidades angulares en direcciones opuestas. Si bien se midió la velocidad en función de la separación entre esferas para comparar con resultados extraídos del artículo [1], para otros usos de estos nadadores (como el estudio de su dinámica en un flujo de cizalla) se usó $R = 2,001$. *Esta distancia se usa como distancia estándar entre esferas para todos los cuerpos simulados* (siempre que sea posible).

Three-link:

El otro nadador que se usó para comparación de los resultados fue un *Three-link*. Consta de tres esferas que se mantienen alineadas pero las distancias entre la esfera del centro y las de los extremos van cambiando como funciones sinusoidales del tiempo (desfasadas una de la otra).

En la figura 3.1 se presentan esquemas simplificados de un nadador Spinner y un Three-

link.

Puller:

Para éste nadador, se prescribe el momento dipolar de la velocidad del fluido en una de las esferas (que no sufre propulsión por causa de el momento), la velocidad del fluido sobre la superficie de la otra esfera causa que se traslade, acercándose a la primera, que se ver repelida por las fuerzas de lubricación. En la figura (3.2) se muestra un dibujo de un Puller.

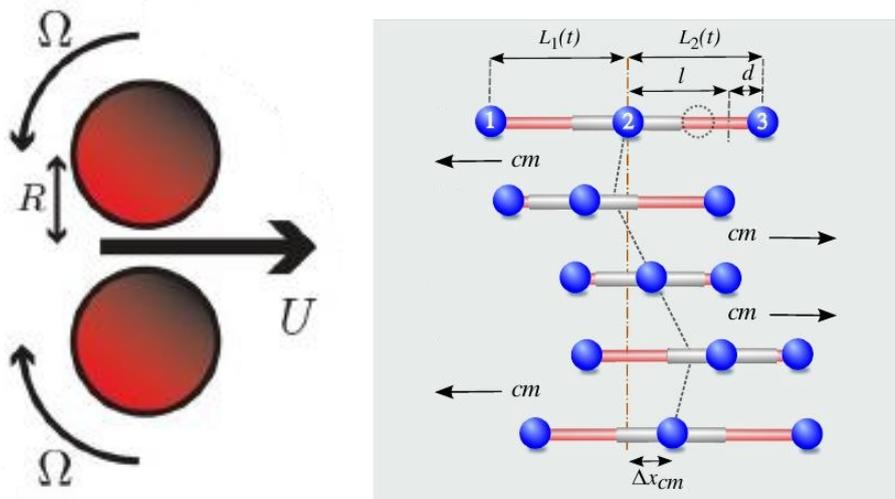


Figura 3.1: Izquierda, Spinner. Derecha, Three-link. Se esquematizan las formas de nado. Imágenes extraídas de [1, 38].

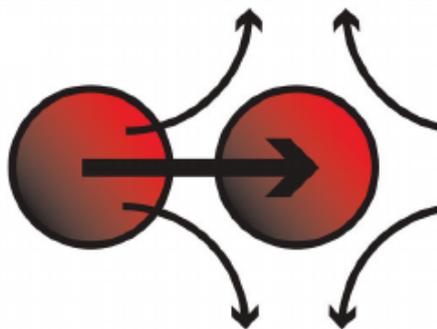


Figura 3.2: Esquema de un nadador Puller. Las flechas curvadas indican las velocidades prescritas para el fluido en torno a una esfera. La flechas recta indica la velocidad que adquiere el nadador. Imágen extraída de [1].

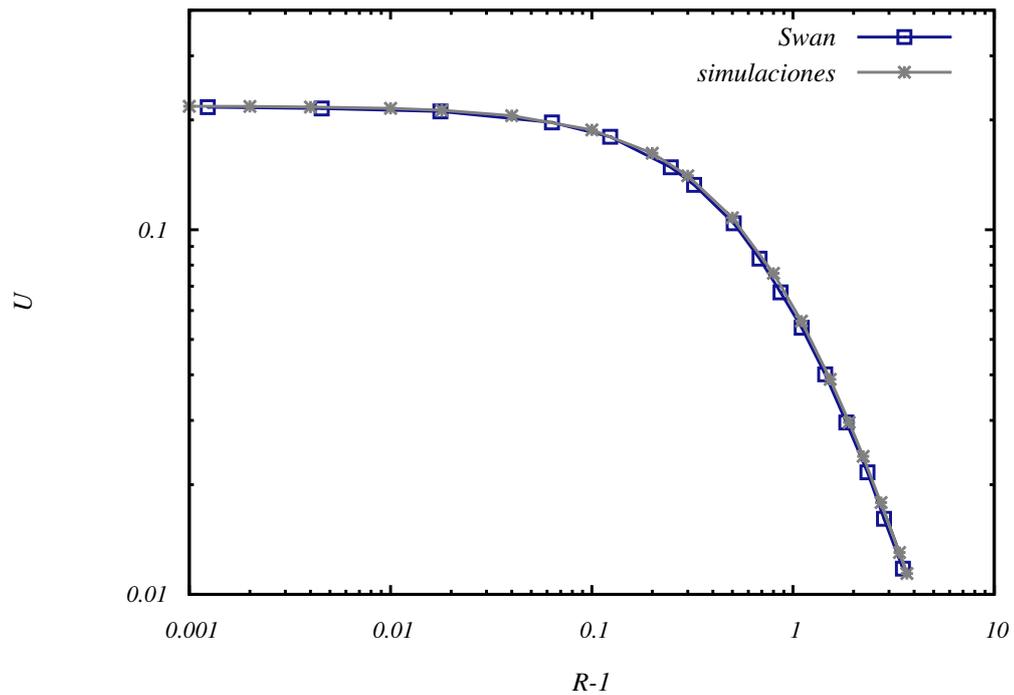


Figura 3.3: Velocidades de un spinner para distintos valores de separación entre esferas.

3.2. Resultados

Se comparó la velocidad de un Spinner en función de la separación entre esferas. Los resultados obtenidos están de acuerdo con los de Swan, cuyos datos no están publicados. Se usó el programa g3data [61] para extraer puntos de sus gráficos y hacer las comparaciones.

Las comparaciones de los resultados obtenidos se muestran en el gráfico 3.3, U vs $R - 1$.

Para el nadador Three-link se compararon los resultados con los obtenidos por Berdakin. En las figuras (figuras 3.4 y 3.5) se muestran las posiciones del centro de masa del nadador a distintos tiempos. Se puede ver un comportamiento oscilatorio que al cabo de un período ($T = 2\pi$, porque la forma de nado es periódica en el tiempo) resulta en un desplazamiento neto del nadador.

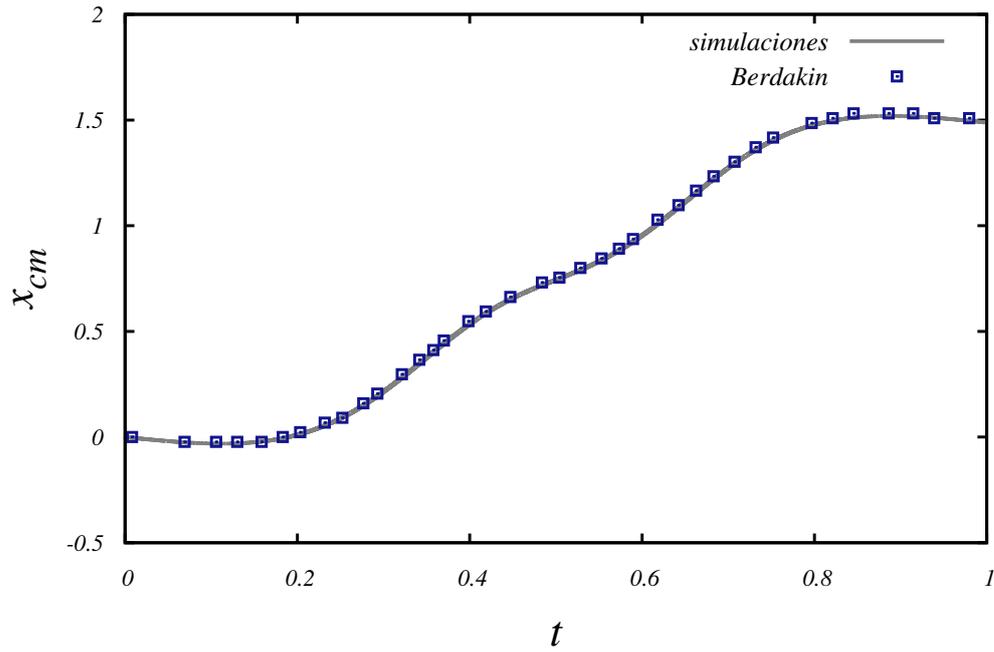


Figura 3.4: Posicion del centro de masa de un three-link con parámetros $l = 8$, $d = 5,9$ para un periodo. El tiempo esta normalizado para comparar con los resultados de Berdakin.

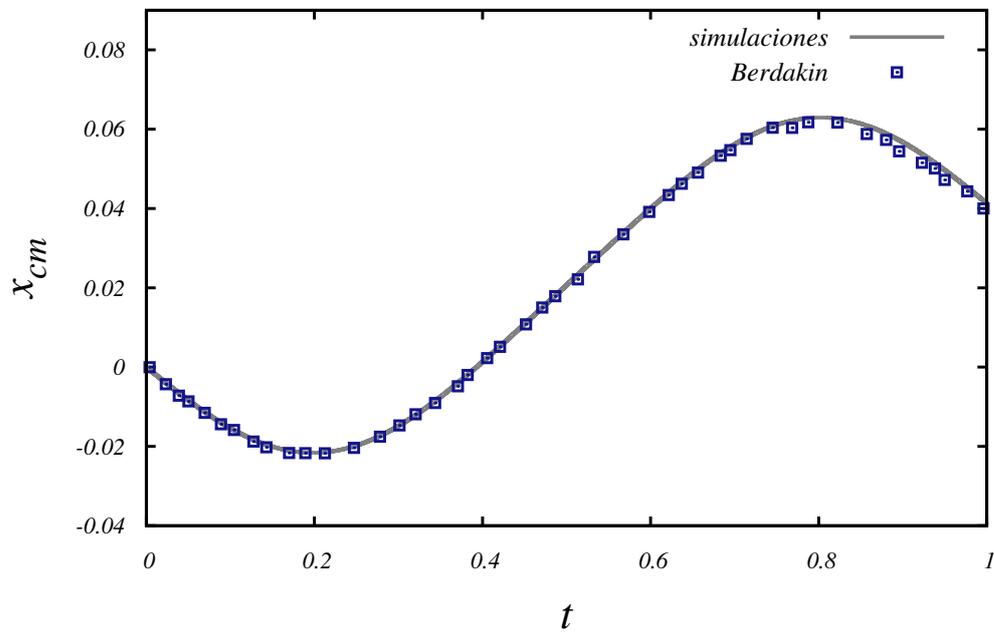


Figura 3.5: Posicion del centro de masa de un three-link con parámetros $l = 2,6$, $d = 0,5$ para un periodo. El tiempo esta normalizado para comparar con los resultados de Berdakin.

Capítulo 4

Flujo de cizalla

4.1. Agregando flujo ambiente

Una vez que el código estuvo puesto a punto, comenzó la tarea de agregar flujo ambiente a la simulación.

El estudio de la dinámica de cuerpos oblongos o prolados es de interés para el estudio de la dinámica de sistemas variados. Existen diversos resultados analíticos y numéricos, particularmente para geometrías simples[62, 63, 64]. Se encontró que era posible aprovechar resultados exactos con los que comparar simulando esferoides (rígidos) en un flujo de cizalla. El hecho de que los esferoides no naden ayuda como paso intermedio antes de mezclar los problemas de nado con los de flujo ambiente.

En éste caso, el tiempo se adimensionaliza poniendolo en unidades del $\dot{\gamma}$ del flujo.

4.1.1. Órbitas de Jeffery

Se denomina órbitas de Jeffery a la precesión que causa un flujo lineal de cizalla sobre un esferoide inmerso en un fluido. Un esferoide es un cuerpo de revolución (se puede obtener la superficie de un esferoide haciendo rotar una elipse sobre uno de sus ejes) similar a una esfera, pero con uno de sus ejes de mayor o menor longitud que los otros dos. Si uno de los ejes es mayor a los otros dos, se define la orientación de un esferoide como el vector que va desde el centro geométrico de la figura hasta uno de los dos puntos más alejados sobre su superficie (puntas del esferoide).

Jeffery[65] resolvió analíticamente el problema de la orientación de un esferoide en un flujo de cizalla. Las soluciones se denominan *Órbitas de Jeffery* y son un resultado muy conocido dentro de la hidrodinámica a bajo número de Reynolds.

En este trabajo, las órbitas de Jeffery son muy importantes. La dinámica de la orientación de cualquier cuerpo oblongo es similar (en mayor o menor medida) a la de un esferoide,

con lo que el manejo de ésta parte de la teoría resulta muy útil para un entendimiento intuitivo de la fenomenología que se va a presentar.

Las ecuaciones paraméricas para los ángulos del vector (unitario) orientación del esferoide son

$$\tan(\theta) = \frac{Cr}{[r^2 \cos^2(\Phi) + \sin^2(\Phi)]^{1/2}} \quad (4.1)$$

$$\tan(\Phi) = -r \tan\left(\frac{\dot{\gamma}t}{r + r^{-1}}\right) \quad (4.2)$$

donde r es el cociente entre ejes (el mayor y el menor del esferoide), y C es una constante de integración. Se va a usar el término *órbitas* para hacer referencia tanto a un conjunto de puntos sobre la esfera unidad correspondiente a las orientaciones de un cuerpo a distintos tiempos como a el movimiento de todo el cuerpo.

Los angulos se definen por su relacion con las coordenadas cartesianas x, y, z como

$$x = \text{sen}(\theta)\cos(\Phi) \quad (4.3)$$

$$y = \text{sin}(\theta)\sin(\Phi) \quad (4.4)$$

$$z = \cos(\Phi) \quad (4.5)$$

Algunos ejemplos de órbitas de Jeffery se muestran en las figuras 4.1 y 4.2. En las figuras se observan las trayectorias descritas por el vector orientación sobre la esfera unitaria (recordar que dicho vector no depende de la posición del esferoide en el espacio, sólo de su orientación). El flujo usado es de la forma $\mathbf{u} = \dot{\gamma}\hat{\mathbf{u}}$. También se encuentra que el periodo para la precesión (las órbitas son siempre cerradas) es

$$T = \frac{2\pi(r + r^{-1})}{\dot{\gamma}} \quad (4.6)$$

Donde T es el periodo.

El caso de las órbitas de Jeffery es muy importante. No sólo un esferoide, si no que cualquier cuerpo oblongo va a describir órbitas similares a las de un esferoide (aunque las de Jeffery se correspondan exactamente sólo con el movimiento de esferoides). Saber ésto ayuda a dar una mejor manejo intuitivo del movimiento de cuerpos en un flujo de cizalla.

Por último, puede ser útil notar que un esferoide siempre se puede pensar centrado en el origen. Ésto no es una simplificación, sino que elegirlo centrado en otro lugar sólo agrega una traslación de cuerpo rígido al movimiento, cosa que no es de interés ahora.

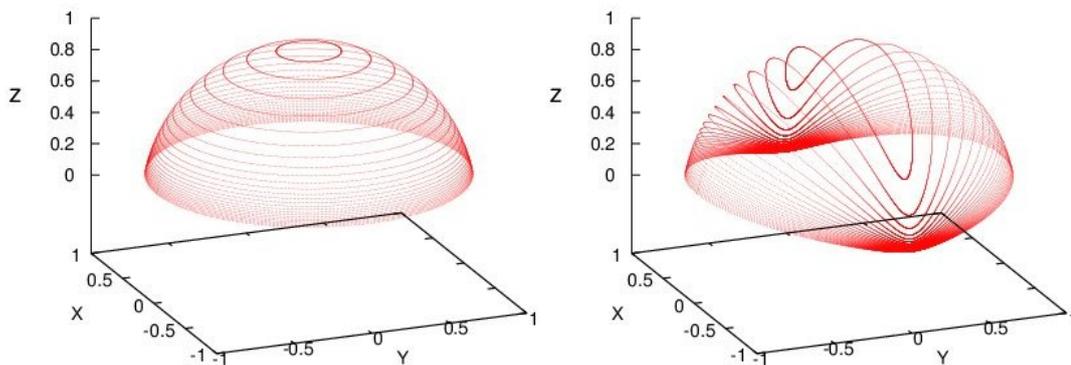


Figura 4.1: Orbitas de Jeffery analíticas para un flujo $x - y$ con $r = 1$ (izquierda) $r = 10$ (derecha). Cada órbita corresponde a una condición inicial distinta

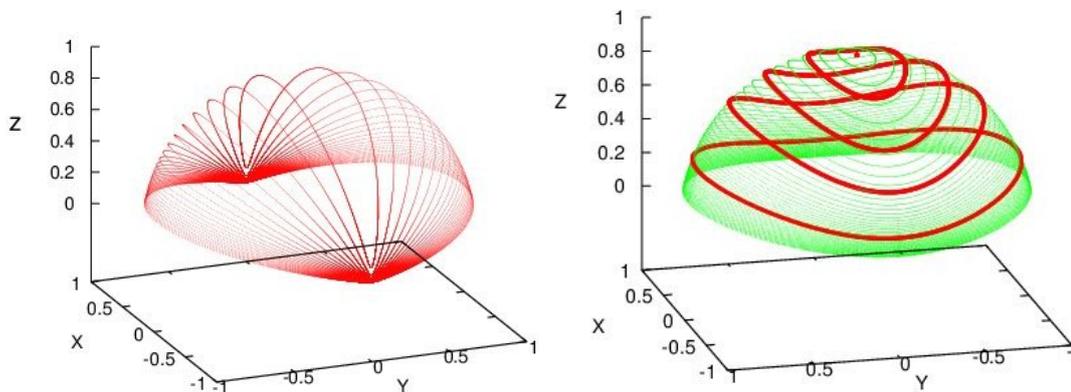


Figura 4.2: Izquierda: Orbitas de Jeffery analíticas para $r = 50$ y flujo $x - y$. Derecha: comparación entre órbitas analíticas (verdes, finas) y simulaciones (rojas, más gruesas). Cada órbita corresponde a una condición inicial distinta

Sabiendo todo eso, se pueden comparar las simulaciones con resultados analíticos para comprobar si las modificaciones que se le hicieron al código están bien.

Uno podría preguntarse qué tipo de esferoide (relleno o hueco) es mejor para modelar un cuerpo macizo. Hay que notar que desde el punto de vista de los resultados de Jeffery esto no interesa, pero SD va a trabajar con esferoides porosos (por estar contruidos a partir de pequeñas esferas) y pueden haber diferencias importantes por las interacciones que puedan aparecer o desaparecer respecto del problema original del cuerpo continuo. Se hicieron algunas simulaciones de esferoides huecos y rellenos con el mismo r en el mismo flujo y se determinó el periodo de precesión de cada uno.

Los esferoides llenos se generaron acomodando las esferas en una configuración de las llamadas *closest packed* (FCC o HCP) y luego quitando las que estén a una distancia del centro mayor a la requerida. Para generar esferoides huecos, se genera una hilera de esferas de punta a punta del esferoide, todas en el mismo plano, y luego se rellena el resto de la superficie del esferoide de forma que entre la mayor cantidad de esferas posible.

No es posible mantener una distancia de 2,001 entre todas las esferas.

Se encontró que el periodo de los esferoides huecos se asemejaba más al período teórico probando los tiempos de los periodos de cada uno y se concluyó que son los más adecuados para las simulaciones en cuanto a los resultados y al tiempo de simulación. Hay que recordar que se usan más esferas para un esferoide lleno que para uno hueco y el tiempo de simulación va como $\sim n^3$. Con n el número de esferas. La superficie de los esferoides está bien representada, en cuanto a la precisión en la determinación de periodos de precesión, por el arreglo de esferas que usamos. Además, usar esferas para llenar los esferoides hace mucho más lento el tiempo de cálculo, genera interacciones artificiales en el interior del cuerpo y produce una superficie más irregular que la generada acomodando esferas sobre la superficie deseada, lo que entorpece los resultados.

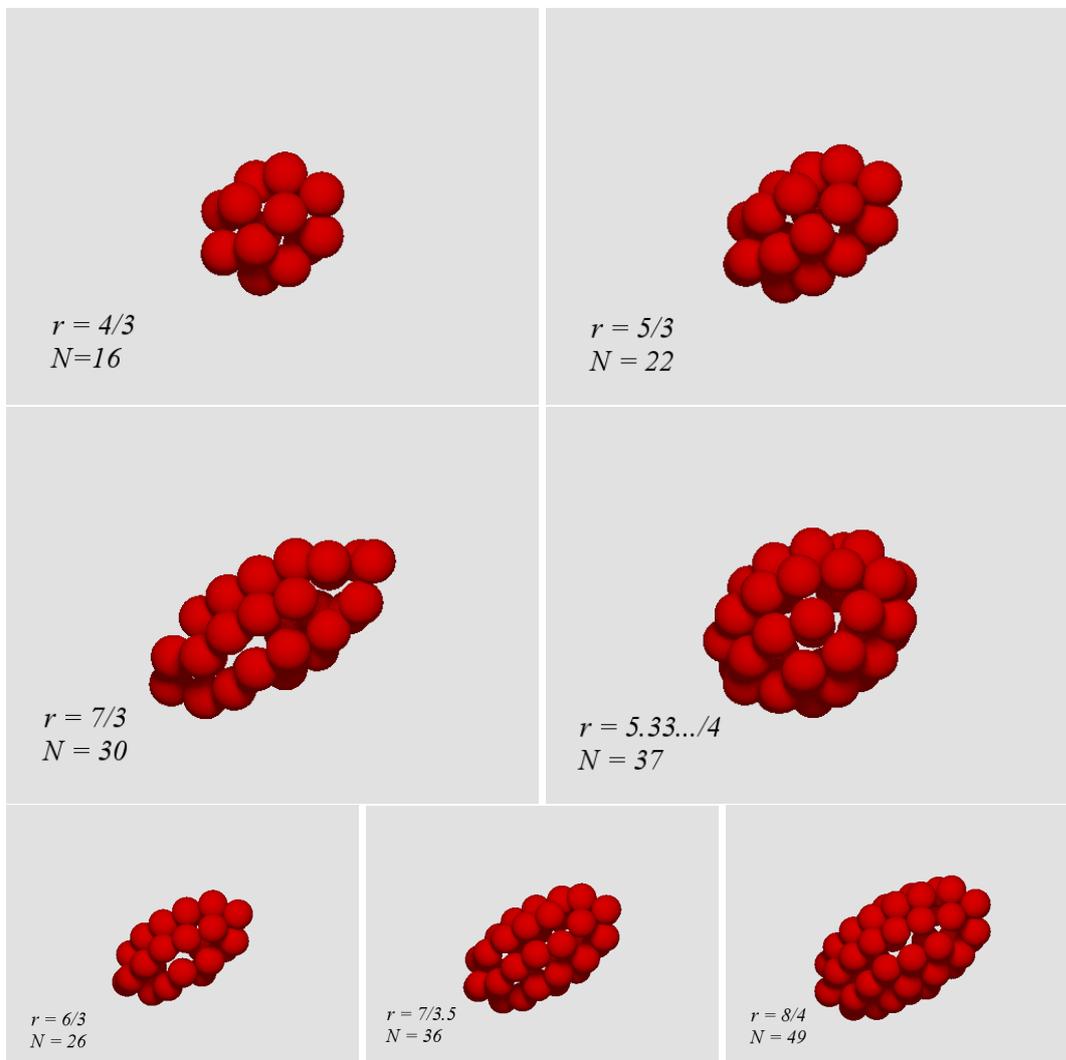


Figura 4.3: Esferoides usados para cálculos de r_{ef} . Notar que los últimos tres fueron generados para tener el mismo $r = 2,0$, la diferencia entre ellos está en el número de esferas que los componen.

Una vez determinado el tipo de arreglo a usar, se pasó a la comparación con resultados analíticos. La cantidad más simple para las comparaciones es el periodo de precesión. Su cálculo consiste, simplemente, en cronometrar el tiempo que el esferoide tarda en pasar por el mismo lugar dos (o más, para más precisión) veces.

Para las pruebas se usaron varios r distintos. Para cada valor de r se hicieron corridas con distintos valores de $\dot{\gamma}$ y se calculó un cociente entre ejes efectivo r_{ef} a partir de un ajuste del periodo como función $T(r)$ (r_{ef} sale de ajustar la función $T/2(r) = \pi(r + r^{-1})/\dot{\gamma}$ con los valores de $T/2, \dot{\gamma}$ sacados de simulaciones de los esferoides armados con esferas). Los valores de $\dot{\gamma}$ usados estaban en el intervalo $[3,0 : 7,0]$ puesto que a valores bajos las simulaciones tardaban demasiado ($T \sim 1/r$) y no se planeó usar valores demasiado altos. Además, se observó que el error relativo no dependía apreciablemente del valor de $\dot{\gamma}$ (tabla 4.2).

Notación: Se usan expresiones tipo $r = 8/4$ en lugar de $r = 2$ para recordar que hay diferencia en la cantidad de esferas (N). El número de esferas se muestra junto a su correspondiente esferoide en la figura 4.3.

Por último, los resultados de los medios periodos (medir periodos enteros es más complicado y menos preciso que medir mitades) para distintos esferoides y los r_{ef} calculados se muestran en la tabla 4.1.

4.1.2. Torques sobre esferoides

No es requisito para obtener órbitas de Jeffery que el cuerpo sea un elipsoide perfecto. Un sólido de revolución oblongo cualquiera va a precesar cuando esté inmerso en un flujo de cizalla. Se puede definir, entonces, un cociente entre ejes efectivo para cada cuerpo. Cox [66] encontró que para un cuerpo de revolución cualquiera se puede definir un r_{ef} a partir de los torques que el fluido ejerce sobre el cuerpo al estar alineado (G) y perpendicular (K) al flujo

$$r_{ef} = \sqrt{\frac{G}{K}} \quad (4.7)$$

Es importante notar que el cuerpo debe estar inmóvil dentro del flujo. No pueden determinarse G y K mientras el cuerpo precesa porque eso está supuesto en la derivación de la fórmula.

Se calcularon cocientes entre ejes efectivos para elipsoides usando el método de Cox. Se consiguió mantenerlos quietos quitando del código la evolución para las posiciones de las esferas. Como es de esperar, el radio efectivo de Cox no depende de $\dot{\gamma}$. Se muestran los cálculos de varios r_{ef} en la tabla 4.3.

$\dot{\gamma}$	$(T/2)_{4/3}$	$(T/2)_{5/3}$	$(T/2)_{6/3}$	$(T/2)_{7/3}$
3,0	2.2083	2.4402	2.7454	3.0778
4,0	1.6562	1.8302	2.0591	2.3083
5,0	1.3250	1.4641	1.6473	1.8466
6,0	1.1041	1.2201	1.3727	1.5389
7,0	0.9464	1.0458	1.08165	1.3138
r_{ef}	$1,34 \pm 0,06$	$1,76000 \pm 0,00002$	$2,160 \pm 0,009$	$2,545 \pm 0,002$

$\dot{\gamma}$	$(T/2)_{5,333.../4}$	$(T/2)_{8/4}$	$(T/2)_{7/3,5}$
3,0	2.1984	2.6862	2.7123
4,0	1.6488	2.0041	2.0342
5,0	1.3191	1.6033	1.6274
6,0	1.0992	1.3361	1.3562
7,0	0.9422	1.1515	1.1624
r_{ef}	$1,36874 \pm 0,00004$	$2,077 \pm 0,004$	$2,11789 \pm 0,00002$

Tabla 4.1: Mitades de periodos para distintos valores de r y $\dot{\gamma}$. Con estos datos se hacen los ajustes para obtener el r_{ef} en cada caso. La fila de más abajo muestra los valores de r_{ef} con sus errores estadísticos, resultados de los ajustes.

r	r_{ef}	Δr_{ef}
4/3	1,380	0,009
5/3	1,77	0,01
7/3	2,58	0,03
5,333.../4	1,372	0,001
6/3	2,167	0,001
7/3,5	2,14	0,01
8/4	2,087	0,001

Tabla 4.3: Cocientes entre ejes efectivos calculados como cocientes de torques

Los errores para r_{ef} se estimaron rotando cada esferoide sobre su eje mayor y midiendo el torque en cada caso, la mitad de la diferencia entre la mayor cociente resultante y el menor se usó como error. Abajo se presenta una comparación entre los radios calculados con los dos métodos

$\hat{\gamma}$	$(\Delta T/2)_{4/3}$	$(\Delta T/2)_{5/3}$	$(\Delta T/2)_{7/3}$	$(\Delta T/2)_{5,333.../4}$	$(\Delta T/2)_{7/3,5}$
3,0	0,0122	0,0280	0,0642	0,00767	0,03602
4,0	0,0122	0,0281	0,0641	0,00767	0,03601
5,0	0,0122	0,0280	0,0641	0,00772	0,03604
6,0	0,0122	0,0280	0,0642	0,00767	0,03606
7,0	0,0122	0,0280	—	0,00770	0,03601

Tabla 4.2: Errores relativos para los r_{ef} de distintas elipsoides

r	a/b	r_{ajuste}	r_{cox}
4/3	1,33...	1,34	1,380
5, 333.../4	1,33...	1,36874	1,372
5/3	1,66...	1,76	1,77
7/3	2,33...	2,545	2,58
6/3	2,0	2,160	2,167
7/3,5	2,0	2,11789	2,14
8/4	2,0	2,077	2,087

Tabla 4.4: Comparación de los resultados para los dos métodos que se usaron en el cálculo de r_{ef} .

4.2. Micronadores en un flujo ambiente

En la última parte del trabajo, se hicieron las últimas modificaciones al código para incluir los procesos ya vistos (el nadador activo y la interacción con el flujo). Una vez que se tuvo el código funcionando, se estudió la dinámica de los nadadores en flujo ambiente. Cosas como la dependencia de la orientación con la velocidad de nado y la forma del nadador.

4.2.1. Adimensionalización

Aunque las situaciones con $\dot{\gamma} \neq 0, \Omega = 0$ y $\dot{\gamma} = 0, \Omega \neq 0$ estén bien resueltas por separado, tratarlas juntas requiere un poco de cuidado. La adimensionalización no es igual para los dos casos, así que hay que usar una de las dos anteriores Y reescalar las cantidades correspondientes (en general, velocidades relacionadas con el otro proceso). Como no son de interés el modulo de la velocidad del nadador y el flujo por separado, sino la relación entre ellos, se define un parámetro nuevo para las simulaciones: $\gamma^* = \dot{\gamma}a/\Omega$ (notar que en éste caso $a = 1$). Recordando que las unidades de tiempo para el nadador

en un fluido quieto y para un cuerpo inerte en un flujo eran a/Ω y $\dot{\gamma}^{-1}$ respectivamente, se adimensionaliza usando la siguiente idea. Si $\gamma^* > 1$ entonces $\dot{\gamma}^{-1} < \Omega^{-1}$ por lo tanto usar $\dot{\gamma}^{-1}$ como unidad de tiempo da un paso temporal más pequeño. Luego se reescalan las velocidades del nadador (dependientes de Ω). De la misma forma, si $\gamma^* < 1$, se usa Ω^{-1} como unidad de tiempo y se reescalan las velocidades del flujo (dependientes de $\dot{\gamma}$).

4.2.2. Nadadores simples

Comenzando por los casos más simples, se estudiaron un Spinner y un Three-link, pero ahora inmersos en flujo lineal de cizalla.

Los dos tipos de nadadores mostraron comportamientos similares en cuanto a trayectorias y orientaciones. La posición inicial se fijó en el plano $x - y$ (siendo que el flujo era $\dot{\gamma}y\hat{x}$). El movimiento observado dependía de la orientación inicial, y podía ser de dos tipos: una órbita cerrada (o casi), o una trayectoria similar a una cicloide.

Lo que ocurre es que los dos tipos de nadadores usados son, en todo momento, cuerpos oblongos, y por lo tanto el flujo de cizalla les produce rotaciones similares a órbitas de Jeffery. Además, la autopropulsión hace que se muevan desde valores mayores a menores (y viceversa) en la coordenada y , cambiando con eso su velocidad de traslación. Hay que recordar que en todo momento el fluido le produce, a un cuerpo que mantiene su forma, la misma velocidad de rotación.

Para comprobar lo anterior se corrieron simulaciones de un Spinner sin flujo externo, de donde se guardaron las velocidades para cada tiempo (recordar que en este caso, los Spinners tienen $R = 2,001$). Luego se quitó la propulsión y se incluyó flujo. Se volvió a correr la simulación y esta vez se guardaron las orientaciones para cada tiempo. Se generó, entonces, una nueva trayectoria para el centro de masa del Spinner. Dada una posición inicial, se usaba la orientación obtenida en la segunda simulación y la velocidad obtenida en la primera y se actualizaba la posición mediante una rutina de integración de Euler ($\Delta\mathbf{x} = \mathbf{v}\Delta t$). Los resultados de ésta trayectoria para el centro de masa se condicen con los de las primeras simulaciones (las que incluyen autopropulsión y flujo externo) mostrando que el movimiento del nadador es una superposición de los casos ya estudiados (figura 4.4).

Para ver si un gait implícito cambia la situación, se construyó un *Puller*. La configuración de las esferas para un Puller es exactamente la misma que la de un Spinner, la diferencia está en la forma (y dirección) de propulsión.

Se corrieron, con éste nadador, simulaciones donde la condición inicial y el γ^* eran

idénticos a los del Spinner. También los resultados fueron idénticos. Se repitió el mismo comportamiento de órbitas cerradas o cicloides, y las trayectorias calculadas con integración Euler coinciden con las obtenidas en las simulaciones.

En cuanto a los Three-link, los resultados obtenidos fueron similares a los de los demás, pero las trayectorias y orientaciones sufren pequeñas variaciones, oscilaciones, producidas por el cambio de forma del nadador. De todas maneras, en rasgos generales, las órbitas son como las de los Spinners y Pullers.

Para terminar con éstos nadadores simples, hay que resaltar que los comportamientos observados son los mismos (con pequeñas variaciones) para valores de $0,1 < \gamma^* < 10$. Este (presumible) detalle es importante para la comparación con los nadadores no simétricos.

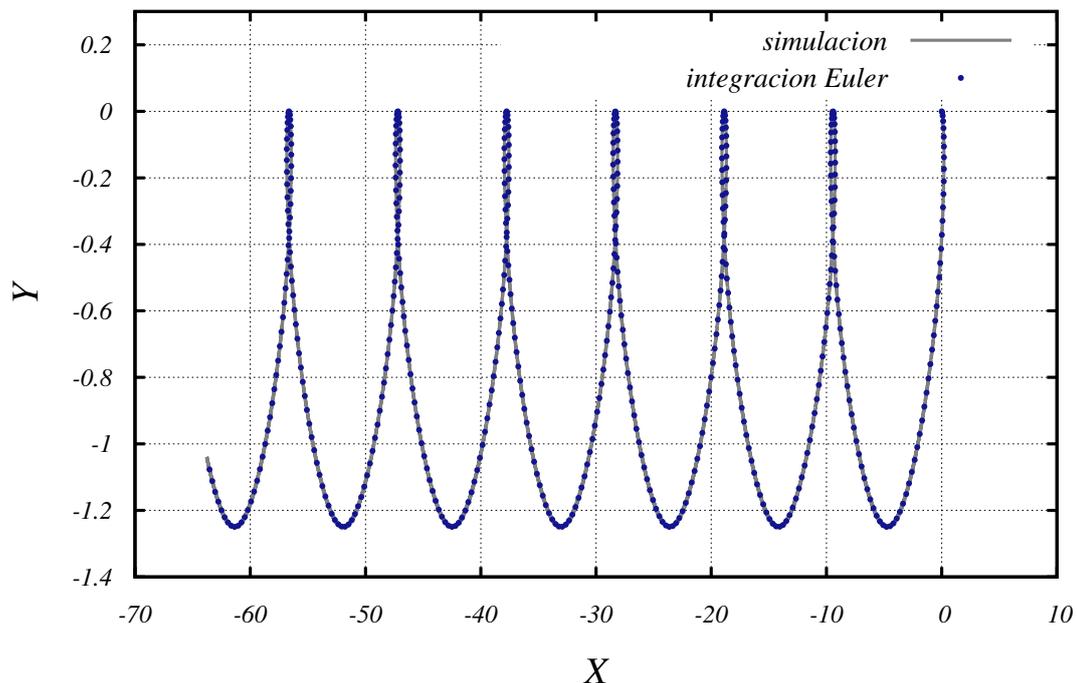


Figura 4.4: Comparación entre la trayectoria del centro de masa de una Spinner en una simulación (línea gris) y la integración Euler usando velocidades y orientaciones sacadas de simulaciones separadas (puntos azules). Se grafican pocos puntos verdes (uno de cada 1000 que se obtuvieron) para hacerlo más cómodo visualmente.

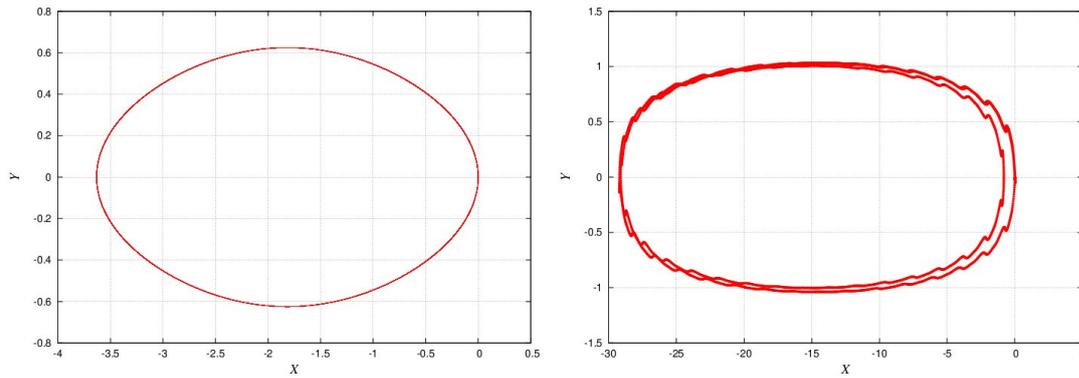


Figura 4.5: Ejemplo de comparación entre las trayectorias del centro de masa para un Spinner (izquierda) y un Three-link (derecha)

4.2.3. Nadador helicoidal

Hasta ahora, ninguno de los nadadores estudiados se orienta. Todos tienen órbitas similares a las de un esferoide. Esto no es un problema, simplemente ocurre que la dinámica de nadadores con mucha simetría (como los ya estudiados) parece ser siempre similar. Por otro lado, Fu *et.al* [32] observaron que bacterias *Bacillus Subtilis* en un flujo de cizalla son impulsadas en la dirección de la vorticidad del flujo (dirección \hat{z} en un flujo $x - y$) y concluyen que éste efecto es producido por la forma de la cola de los microorganismos. En ése trabajo se argumenta que si se piensa a la cola del nadador como una hélice y al cuerpo como un esferoide, se genera un torque que produce la orientación de las bacterias en la dirección observada.

Por lo anterior se decidió estudiar una hélice inmersa en flujo lineal ($x - y$) como primera aproximación.

Una hélice describe movimientos similares a los de los demás cuerpos estudiados (tipo órbita de Jeffery), pero con una diferencia importante. Si se orienta la hélice en la dirección \hat{z} , además de rotar sobre sí misma, se produce una traslación a lo largo del eje. Las demás orientaciones para la hélice no producen ningún efecto sobresaliente. Todas presentan movimientos de traslación, junto con la precesión correspondiente a un cuerpo oblongo y la rotación sobre el eje del cuerpo.

Dado lo interesante del comportamiento observado, se decidió estudiar un nadador cuya forma incluyera una hélice y un cuerpo como los de las bacterias descritas por Fu. El último nadador que se estudió consta de una hélice para la cola y un esferoide para formar el cuerpo. Las esferas de la cola están alejadas en $3a$ del eje de la cola, formando una hélice de dos vueltas completas al rededor del eje. El cuerpo es un esferoide como los ya estudiados, de radio $r = 6/3$. El método de propulsión es un gait explícito. La cola

rota sobre su eje, haciendo un movimiento similar al de un tirabuzón para nadar (ver figura 4.6). Como resultado del movimiento de la cola, para conservar momento angular, el cuerpo rota en la dirección opuesta. Hay que remarcar que el movimiento del cuerpo no forma parte del gait.

En éste caso, se define $\gamma^* = \dot{\gamma}/\Omega$ donde Ω es la velocidad angular de la cola. Pero la velocidad del nadador es muy inferior a la velocidad angular de su cola. Así, γ^* podría no ser buena representación de la relación entre las velocidades. De todas formas, se observa que la velocidad de nado es lineal con la velocidad angular de su cola. Por lo tanto podemos seguir usando γ^* como parámetro del problema.

Para estudiar estos nadadores se tuvieron en cuenta dos casos: el movimiento de un nadador con $\Omega = 0$ u $\Omega \neq 0$. Observar los dos casos permite diferenciar cuales de los efectos observados en los movimientos de los nadadores son debidos a la forma helicoidal de su cola (viendo la diferencia con los movimientos de esferoides inertes) y cuales se deben a la autopropulsión (diferencias entre movimientos con y sin velocidad de nado). En principio se tomaron seis orientaciones iniciales. Para explicar mejor, sean los ángulos Φ y θ como se usaron en la Subsección 4.1.1. Tres de las orientaciones iniciales usadas estan a lo largo de los ejes coordenados : $(\Phi, \theta) = (0, 0); (\pi/2, 0); (\pi/2, -\pi/2)$. Las otras tres eran orientaciones intermedias : $(\Phi, \theta) = (\pi/4, 0); (\pi/4, \pi/4); (\pi/4, \pi/2)$. Para cada orientación se corrieron simulaciones con $\gamma^* = 0,0, 0,6$ y $1,0$. Eso es $\Omega = 0, \Omega = \frac{5}{3}\dot{\gamma}$ y $\Omega = \dot{\gamma}$ respectivamente.

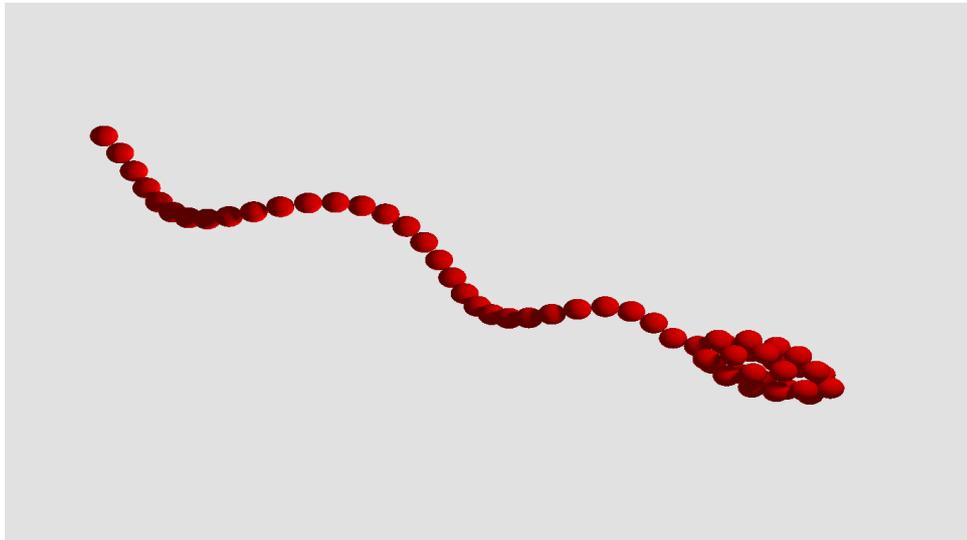


Figura 4.6: Nadador helicoidal usado para las simulaciones.

Se observó que en casi todos los casos la orientación de los nadadores describe trayectorias similares a las órbitas de Jeffery, pero cada vez que vuelve al mismo θ , adquiere

una mayor componente en z , como se muestra en los ejemplos de las figuras 4.7 y 4.8. Esta regla se rompe, obviamente, para el caso en que el nadador comienza orientado en z y de manera menos obvia para un nadador que comienza orientado en $(\pi/4, 0)$. Las orbitas en todos los casos restantes se acercan a las de este último con el paso del tiempo. Se usaron también casos en que la orientación inicial tenía componente negativa en z . En estos casos el ángulo Φ se hace más pequeño con el tiempo, al igual que antes.

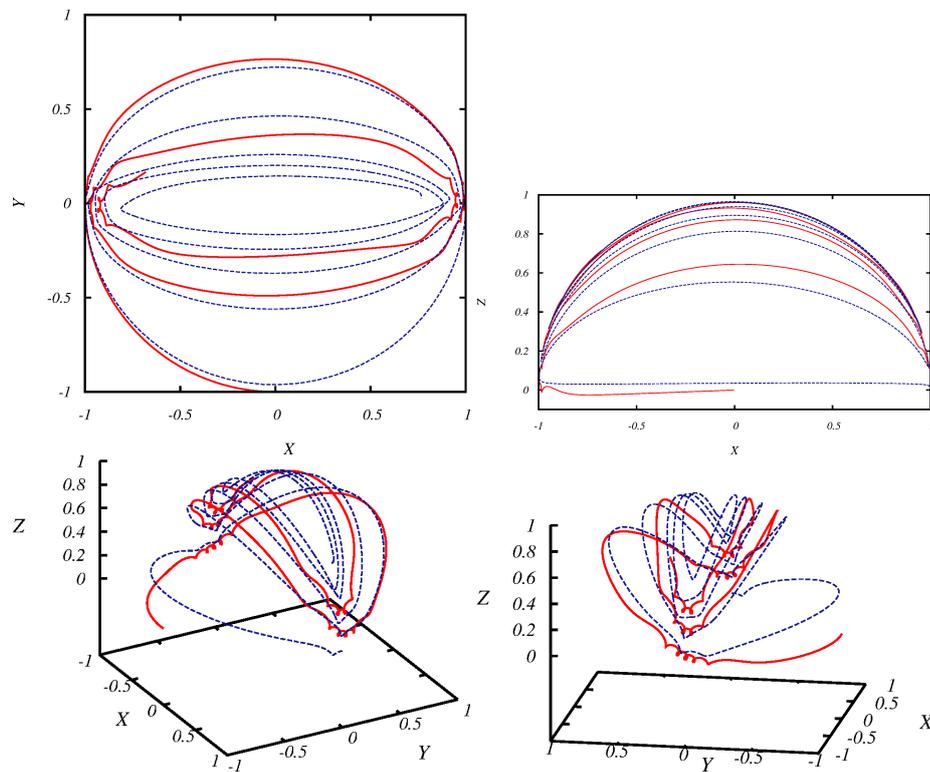


Figura 4.7: Órbitas para el mismo nadador con $\gamma^* = 0,6$ (líneas rojas continuas) y $\gamma^* = 1,0$ (líneas azules, a trazos). Se puede observar cómo el comportamiento de los dos casos es similar, pese a las diferentes velocidades de nado y tiempos de corrida de las simulaciones.

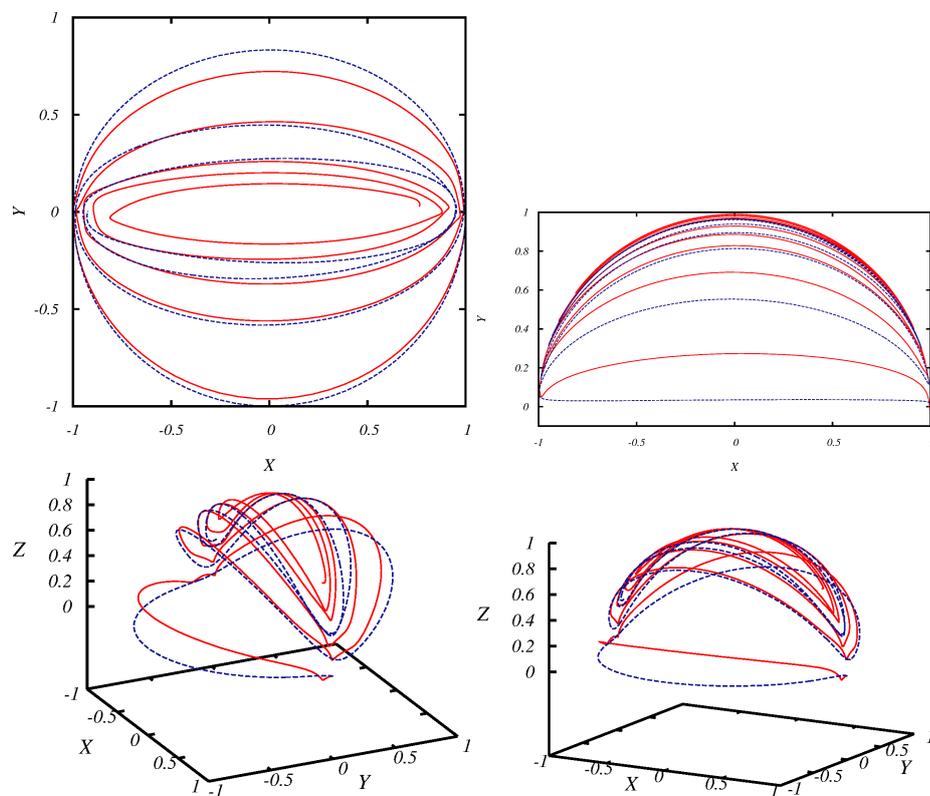


Figura 4.8: Órbitas para el mismo nadador con $\gamma^* = 1,0$ (líneas rojas continuas) y $\Omega = 0,0$ (líneas azules, a trazos). Se puede observar cómo el comportamiento de los dos casos es similar, pese a las diferentes velocidades de nado y tiempos de corrida de las simulaciones.

Habiendo visto cómo la orientación de los nadadores se acerca más a z a medida que transcurre el tiempo, resulta muy entendible el resultado obtenido para las trayectorias de sus centros de masa. Recordando que el movimiento total de los nadadores es una superposición del movimiento producto de la propulsión y el que les provoca el flujo externo, se pueden mirar éstos efectos por separado.

Si bien la dirección de nado para tiempos cortos depende mucho de la orientación inicial, a tiempos largos los nadadores terminan describiendo una especie de órbitas mucho más largas en el eje x (dirección del flujo) que en el y . Al igual que en las órbitas de Jeffery, el tiempo que un nadador pasa orientado cerca de la dirección del flujo es mucho mayor al que pasa orientado en la dirección del gradiente de velocidades (perpendicular al flujo). Por lo tanto, un nadador va a describir una trayectoria en z , con un movimiento de vaivén en x , y muy poco movimiento en y .

Como se puede ver en las figuras 4.7 y 4.8, la orientación de un nadador con el tiempo no describe una trayectoria que tenga simetría de reflexión en el eje y . Por lo tanto, el nadador termina estando en $Y > 0$ o $Y < 0$ la mayor parte del tiempo. Ésto provoca que el flujo ambiente lo arrastre, haciendo que la trayectoria del nadador gane una componente en x que se vuelve aproximadamente constante una vez que la orientación del nadador se vuelve más cercana a z .

Con todo lo anterior, se pueden interpretar correctamente los gráficos de ejemplos de trayectorias para centros de masa de algunos nadadores. Comparando una trayectoria del principio de la simulación (figura 4.9) con las trayectorias de simulaciones más avanzadas se puede observar cómo la mayor simetría de las orientaciones pasado un tiempo provoca que el movimiento del nadador se haga más regular.

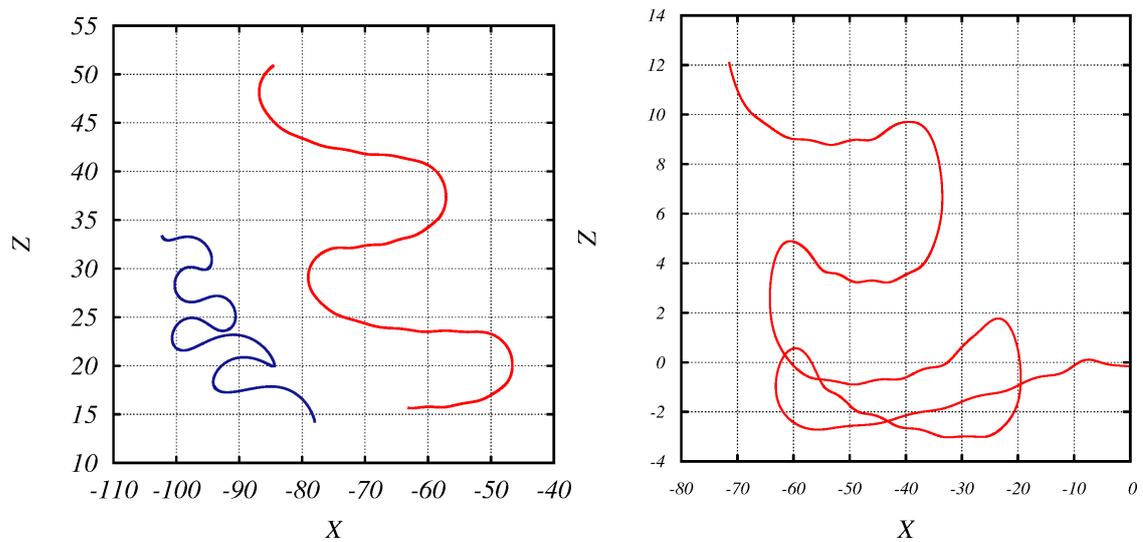


Figura 4.9: Imagen izquierda: ejemplos de trayectorias de centros de masa para un nadador en un flujo con $\gamma^* = 1,0$ (izquierda) y $\gamma^* = 0,6$ (derecha). Se puede ver cómo la trayectoria para $\gamma^* = 1,0$ comienza a parecerse a la de $\gamma^* = 0,6$ a medida que el nadador va hacia arriba. Imagen derecha: orientación de un nadador al comienzo de una simulación. La trayectoria mostrada es muy irregular debido a los cambios grandes en la orientación del nadador al comienzo. Se grafican las trayectorias en el plano xz debido a que la componente en el eje y es demasiado pequeña en comparación

Capítulo 5

Resultados y conclusiones

Se pudieron reproducir resultados anteriores de nadadores simples para el método de SD. Con eso se probó el código antes de comenzar el trabajo de incluir flujo ambiente a la simulación.

Para asegurar que el flujo ambiente era tratado correctamente se calcularon cocientes de radios efectivos (r_{ef}). Usando los resultados analíticos de Jeffery y Cox se comparó el cociente efectivo asignado a esferoides compuestos por esferas con el cociente de esferoides ideales. Se encontró que el error relativo en el cálculo de r no era mayor al 0,1. En la última parte del trabajo se corrieron simulaciones de distintos nadadores en un flujo ambiente. Los nadadores simples (aquellos con simetría de rotación en un eje) mostraron un comportamiento previsible. Sus trayectorias son una simple superposición de el desplazamiento propio del nado, junto con la precesión que causa el flujo de cizalla en un cuerpo oblongo. Estos nadadores sólo son arrastrados por el flujo como cualquier cuerpo. El nadador helicoidal, por otro lado, mostró una tendencia a orientarse en la dirección de la vorticidad del flujo. Con eso se consigue que la dirección de nado quede (en promedio si se quiere) bien definida.

A lo largo del trabajo, se observó que para todas las formas de nadadores usadas la orientación se parece, en cierta medida, a la de un esferoide (como se remarcó en la sección sobre órbitas de Jeffery). Éste es un hecho importante que no se conocía de antemano. El resultado de la orientación de nadadores en la dirección de vorticidad del flujo no es algo extraño sólo sacado de las simulaciones. Como ya se mencionó, Colocando bacterias en un tanque con un gradiente de nutrientes (para atraer a las bacterias a uno de los extremos del tanque) y generando un fuerte flujo de cizalla con vorticidad opuesta al gradiente de nutrientes, Fu consiguió alejar a las bacterias de los nutrientes, sólo por la forma en que sus flagelos helicoidales se alinean con la vorticidad al aplicarles un flujo externo. La orientación encontrada en este trabajo para el nadador helicoidal (que

termina nadando en la dirección de la vorticidad del flujo) sugiere que se puede pensar esto como una verificación (en el caso de nadadores en flujo ambiente no hay resultados analíticos conocidos) del método usado para simular micronadadores.

Además de los resultados obtenidos se pueden pensar varios problemas por estudiar a partir de esto.

En todo éste trabajo no se estudiaron interacciones entre nadadores. Sólo la dinámica de un nadador. Comenzar a trabajar sobre las interacciones entre nadadores podría ser útil para varias cosas. Si bien, en principio, la reología de una suspensión activas requiere demasiados nadadores como para ser simulados por el método de SD, Saintillan [67] afirma que el fenómeno de orientación de nadadores en una suspensión puede ser explicado a partir de la interacción entre dos nadadores. Simulaciones de pares de nadadores son una posibilidad, y pueden ayudar en el entendimiento de estos fenómenos. Además de eso, usando también simulaciones de dos nadadores, puede estudiarse la interacción de los microorganismos con paredes [68, 69]. Se puede modelar la interacción de un nadador con una parde como la imagen del nadador, similar al método de las imágenes usado en electrostática. Este último tema es importante dentro de problemas en los cuales se tienen nadadores en canales o trampas.

Un asunto que queda pendiente dentro de lo visto es el movimiento de un nadador cuya orientación se encuentra muy cerca de z . Si bien se vió que para valores suficientemente grandes de Φ el comportamiento es siempre el mismo (el descripto en la última parte del trabajo). Cuando Φ es pequeño la orientación ya no evoluciona de la misma forma. Estudiar la dinámica de las orientaciones para un nadador con éstas configuraciones sería, en principio, una continuación natural en el estudio de la dinámica de los nadadores helicoidales.

Bibliografía

- [1] James W. SWAN, John F. BRADY y Rachel S MOORE. “Modeling hydrodynamic self-propulsion with Stokesian Dynamics. Or teaching Stokesian Dynamics to swim”. En: *Phys. Fluids* 23, no 7 (2011), pág. 071901.
- [2] Edward M PURCELL. “Life at low Reynolds number”. En: *American journal of physics*. 45 (1977), págs. 3-11.
- [3] Geoffrey TAYLOR. “The action of waving cylindrical tails in propelling microscopic organisms”. En: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* The Royal Society (1952), págs. 225-239.
- [4] Jeffrey A. RIFFELL y Richard K ZIMMER. “Sex and flow: the consequences of fluid shear for sperm–egg interactions”. En: *Journal of Experimental Biology* 210, no 20 (2007), págs. 3644-3660.
- [5] Joseph N. RYAN y Menachem ELIMELECH. “Colloid mobilization and transport in groundwater”. En: *Colloids and surfaces A: Physicochemical and engineering aspects* 107 (1996), págs. 1-56.
- [6] Osnat EYTAN, Ariel J. Jaffa y David ELAD. “Peristaltic flow in a tapered channel: application to embryo transport within the uterine cavity”. En: *Medical engineering physics* 23, no 7 (2001), págs. 475-484.
- [7] M. M. Velraeds y col. “Interference in initial adhesion of uropathogenic bacteria and yeasts to silicone rubber by a *Lactobacillus acidophilus* biosurfactant”. En: *Journal of medical microbiology* 47, no 12 (1998), págs. 1081-1085.
- [8] K. Riehemann y col. “Nanomedicine—challenge and perspectives”. En: *Angewandte Chemie International Edition* 48 (2009), págs. 872-897.
- [9] Omid C. FAROKHZAD y Robert LANGER. “Impact of nanotechnology on drug delivery”. En: *ACS nano* 3, no1 (2009), págs. 16-20.
- [10] Tian Yun HUANG y et al. “3D printed microtransporters: Compound micromachines for spatiotemporally controlled delivery of therapeutic agents”. En: *Advanced Materials* 27 (2015), pág. 2.

- [11] B. Shapiro y col. "Shaping magnetic fields to direct therapy to ears and eyes". En: *Annual review of biomedical engineering* 16 (2014), págs. 455-481.
- [12] M. S. Sakar y col. "Single cell manipulation using ferromagnetic composite micro-transporters". En: *Applied physics letters* 96, no 4 (2010), pág. 043705.
- [13] K. E. Peyer y col. "Magnetic helical micromachines". En: *Chemistry-A European Journal* 19, no 1 (2013), págs. 28-38.
- [14] Evin GULTEPE y et al. "Biopsy with Thermally Responsive Untethered Micro-tools". En: *Advanced Materials* 25, no 4 (2013), págs. 514-519.
- [15] D. Patra y col. "Intelligent, self-powered, drug delivery systems". En: *Nanoscale* vol. 5, no 4 (2013), págs. 1273-1283.
- [16] B. R. Donald y col. "An untethered, electrostatic, globally controllable MEMS micro-robot". En: *Journal of microelectromechanical systems* 15, no 1 (2006), págs. 1-15.
- [17] D. R. Frutiger y col. "Small, fast, and under control: wireless resonant magnetic micro agents". En: *The International Journal of Robotics Research* 29 (2010), págs. 613-636.
- [18] William M. DURHAM, John O. KESSLER y Roman STOCKER. "Disruption of vertical motility by shear triggers formation of thin phytoplankton layers". En: *science* 323, no 5917 (2009), págs. 1067-1070.
- [19] R. B. Frankel y col. "Magneto-aerotaxis in marine coccoid bacteria". En: *Biophysical journal* 73, no 2 (1997), págs. 994-1000.
- [20] Victor SOURJIK y Howard C BERG. "Functional interactions between receptors in bacterial chemotaxis". En: *Nature* 428, no 6981 (2004), págs. 437-441.
- [21] David SAINTILLAN. "The dilute rheology of swimming suspensions: A simple kinetic model". En: *Experimental Mechanics* 50, no 9 (2010), págs. 1275-1281.
- [22] N. A. HILL y T. J. PEDLEY. "Bioconvection". En: *Fluid Dynamics Research* 37, no 1 (2005), págs. 1-20.
- [23] Uwe KILS. "Formation of micropatches by zooplankton-driven microturbulences". En: *Bulletin of Marine Science* 53, no 1 (1993), págs. 160-169.
- [24] et al PAXTON Walter F. "Catalytic nanomotors: autonomous movement of striped nanorods". En: *Journal of the American Chemical Society* 126, no 41 (2004), págs. 13424-13431.
- [25] Min Jun KIM y Kenneth S BREUER. "Enhanced diffusion due to motile bacteria". En: *Phys. Fluids* 16, no 9 (2004), págs. L78-L81.

- [26] N. Darnton y col. “Moving fluid with bacterial carpets”. En: *Biophysical journal* 86, no 3 (2004), págs. 1863-1870.
- [27] Amir Alizadeh PAHLAVAN y David SAINTILLAN. “Instability regimes in flowing suspensions of swimming micro-organisms”. En: *Phys. Fluids* 23, no 1 (2011), pág. 011901.
- [28] Salima RAFAÏ, Levan JIBUTI y Philippe PEYLA. “Effective viscosity of microswimmer suspensions”. En: *Phys. Rev. Lett.* 104, no 9 (2010), pág. 098102.
- [29] Roberto RUSCONI, Jeffrey S. GUASTO y Roman STOCKER. “Bacterial transport suppressed by fluid shear”. En: *Nature physics* 10, no 3 (2014), págs. 212-217.
- [30] Andreas ZÖTTL y Holger STARK. “Periodic and quasiperiodic motion of an elongated microswimmer in Poiseuille flow”. En: *arXiv* arXiv:1207.1186 (2012), preprint.
- [31] Ganesh SUBRAMANIAN y Donald L KOCH. “Critical bacterial concentration for the onset of collective swimming”. En: *J. Fluid Mech.* 632 (2009), págs. 359-400.
- [32] H. C. Fu, T. R. Powers y R. Stocker. “Bacterial rheotaxis”. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 109, no 13 (2012), págs. 4780-4785.
- [33] Eric E. KEAVENY y Martin R MAXEY. “Spiral swimming of an artificial microswimmer”. En: *J. Fluid Mech.* 598 (2008), págs. 293-319.
- [34] Takuji ISHIKAWA, M. P. SIMMONDS y T. J PEDLEY. “Hydrodynamic interaction of two swimming model micro-organisms”. En: *J. Fluid Mech.* 568 (2006), págs. 119-160.
- [35] T. Ishikawa y col. “Hydrodynamic interactions between two swimming bacteria”. En: *Biophysical journal* 93 (2007), págs. 2217-2225.
- [36] Alex KANEVSKY, Michael J. SHELLEY y Anna-Karin TORNBERG. “Modeling simple locomotors in Stokes flow”. En: *Journal of Computational Phy* 229, no 4 (2010), págs. 958-977.
- [37] John F. BRADY y Georges BOSSIS. “Stokesian dynamics”. En: *Annu. Rev. Fluid Mech.* 20, no 1 (1988), págs. 111-157.
- [38] Ivan BERDAKIN, Verónica I. MARCONI y Adolfo J. BANCHIO. “The Three linked spheres micro-swimmer: A Stokesian-Dynamics approach”. En: *A ser enviado* (2017).
- [39] Sangtae KIM y Seppo J KARRILA. “Microhydrodynamics: principles and selected applications”. En: *Courier Corporation* (2013).

- [40] G. K. BATCHELOR. "An introduction to fluid dynamics". En: *Cambridge university press* (2000).
- [41] Gerhard NÄGELE. "Colloidal hydrodynamics". En: *Physics of Complex Colloids (Proc. Int. School of Physics 'Enrico Fermi', Course 184)* (2013), págs. 507-601.
- [42] Albert EINSTEIN. "Eine neue bestimmung der moleküldimensionen". En: *Annalen der Physik* 324, no 2 (1906), págs. 289-306.
- [43] G. K. BATCHELOR. "Transport properties of two-phase materials with random structure". En: *Annu. Rev. Fluid Mech.* 6, no 1 (1974), págs. 227-255.
- [44] Howard BRENNER. "Rheology of a dilute suspension of axisymmetric Brownian particles". En: *International Journal of Multiphase Flow* 1, no 2 (1974), págs. 195-341.
- [45] Duncan James JEFFREY y Andreas ACRIVOS. "The rheological properties of suspensions of rigid particles". En: *AIChE Journal* 22, no 3 (1976), págs. 417-432.
- [46] W. B. RUSSEL. "Review of the role of colloidal forces in the rheology of suspensions". En: *J. Rheology* 24, no 3 (1980), págs. 287-317.
- [47] Robert H. DAVIS y Andreas ACRIVOS. "Sedimentation of noncolloidal particles at low Reynolds numbers". En: *Annu. Rev. Fluid Mech.* 17, no 1 (1985), págs. 91-118.
- [48] A. A. ZICK y G. M. HOMS Y. "Stokes flow through periodic arrays of spheres". En: *J. Fluid Mech.* 115 (1982), págs. 13-26.
- [49] M. ZUZOVSKY, P. M. ADLER y BRENNER. "H. Spatially periodic suspensions of convex particles in linear shear flows. III. Dilute arrays of spheres suspended in Newtonian fluids". En: *Phys. Fluids* 26, no 7 (1983), págs. 1714-1723.
- [50] Kevin C. NUNAN y Joseph B. KELLER. "Effective viscosity of a periodic suspension". En: *J. Fluid Mech.* 142 (1984), págs. 269-287.
- [51] P. M. ADLER, M. ZUZOVSKY y BRENNER. "H. Spatially periodic suspensions of convex particles in linear shear flows. II. Rheology". En: *International Journal of Multiphase Flow* 11, no 3 (1985), págs. 387-417.
- [52] G. K. BATCHELOR. "Sedimentation in a dilute dispersion of spheres". En: *J. Fluid Mech.* 52, no 02 (1972), págs. 245-268.
- [53] G. K. BATCHELOR y J. T. GREEN. "The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 ". En: *J. Fluid Mech.* 56, no 03 (1972), págs. 401-427.

- [54] David J JEFFREY. “Conduction through a random suspension of spheres”. En: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* The Royal Society (1973), págs. 355-367.
- [55] E. J HINCH. “An averaged-equation approach to particle interactions in a fluid suspension”. En: *J. Fluid Mech.* 83, no 04 (1977), págs. 695-720.
- [56] R. W O’BRIEN. “A method for the calculation of the effective transport properties of suspensions of interacting particles”. En: *J. Fluid Mech.* 91, no 01 (1979), págs. 17-39.
- [57] D. J. JEFFREY e Y. ONISHI. “Calculation of the resistance and mobility functions for two unequal rigid spheres in low-Reynolds-number flow”. En: *J. Fluid Mech.* 139 (1984), págs. 261-290.
- [58] Georges BOSSIS y John F. BRADY. “Dynamic simulation of sheared suspensions. I. General method”. En: *J. Chem. Phys.* 80, no 10 (1984), págs. 5141-5154.
- [59] David SAINTILLAN y Michael J SHELLEY. “Instabilities and pattern formation in active particle suspensions: kinetic theory and continuum simulations”. En: *Phys. Fluids* 100, no 17 (2008), pág. 178103.
- [60] Juan P. HERNANDEZ-ORTIZ, Christopher G. STOLTZ y Michael D. GRAHAM. “Transport and collective dynamics in suspensions of confined swimming particles”. En: *Phys. Fluids* 95, no 20 (2005), pág. 204501.
- [61] Jonas FRANTZ. *g3data webpage* (<http://www.frantz.fi/software/g3data.php>). 2017.
- [62] Ehud GAVZE, Mark PINSKY y Alexander KHAIN. “The orientation dynamics of small prolate and oblate spheroids in linear shear flows”. En: *International Journal of Multiphase Flow* 83 (2016), págs. 103-114.
- [63] O. Ok PARK y Gerald G FULLER. “Dynamics of rigid dumbbells in confined geometries Part II. Time-dependent shear flow”. En: *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 18, no 2 (1985), págs. 111-122.
- [64] Donald L. KOCH y Ganesh SUBRAMANIAN. “Collective hydrodynamics of swimming microorganisms: living fluids”. En: *Annu. Rev. Fluid Mech.* 43 (2011), págs. 637-659.
- [65] George B JEFFERY. “The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid”. En: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* The Royal Society (1922), págs. 161-179.
- [66] R. G COX. “The motion of long slender bodies in a viscous fluid. Part 2. Shear flow”. En: *J. Fluid Mech.* 45, no 04 (1971), págs. 625-657.

- [67] David. SAINTILLAN. “Kinetic models for biologically active suspensions”. En: *Natural Locomotion in Fluids and on Surfaces*. Springer New York 13, no 1 (2012), págs. 53-71.
- [68] A. P. Berke y col. “Hydrodynamic attraction of swimming microorganisms by surfaces”. En: *Phys. Rev. Lett.* 101, no 3 (2008), pág. 038102.
- [69] R. Di Leonardo y col. “Swimming with an image”. En: *Phys. Rev. Lett.* 106, no 3 (2011), pág. 038101.