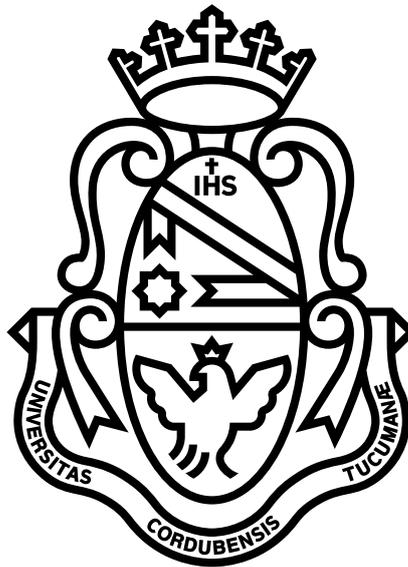


Arquitectura y Evolución de Sistemas Planetarios en Resonancias de dos Cuerpos

Ximena Soledad Ramos

Presentada ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y
Computación como parte de los requerimientos para la obtención
del grado de Doctora en Astronomía de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



Director: Dr. Cristián Beaugé

Córdoba, Argentina
©FaMAF - UNC - 2017



Arquitectura y Evolución de Sistemas Planetarios en Resonancias de dos Cuerpos por Ximena Soledad Ramos se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

*A mis padres,
a la memoria de mi abuela,
y a mi esposo ♥*

Prefacio

Esta tesis de Doctorado es presentada como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Doctora en Astronomía de la Universidad Nacional de Córdoba. La misma contiene los resultados de mis estudios de investigación desarrollados bajo la dirección del Prof. Cristián Beaugé y en colaboración con miembros del grupo de Sistemas Planetarios del Observatorio Astronómico de Córdoba y del Instituto de Astronomía Teórica y Experimental - Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas entre los años 2014 y 2017. Parte de los resultados presentados aquí se encuentran en las siguientes publicaciones en revistas internacionales:

- *The Resonance Overlap and Hill Stability Criteria Revisited*
Ramos, X. S., Correa-Otto, J. A., Beaugé, C., 2015, CeMDA, 123, 453-479.
- *Long-term and Large-scale Hydrodynamical Simulations of Migrating Planets*
Benítez-Llambay, P., **Ramos, X. S.**, Beaugé, C., Masset, F. S., 2016, ApJ, 826, 1, 13.
- *Planetary migration and the origin of the 2:1 and 3:2 (near)-resonant population of close-in exoplanets*
Ramos, X. S., Charalambous, C., Benítez-Llambay, P., Beaugé, C., 2017, A&A, 602, A101.
- *Orbital migration and Resonance Offset of the Kepler-25 and K2-24 Systems*
Charalambous, C., **Ramos, X. S.**, Benítez-Llambay, P., Beaugé, C., 2017, Journal of Physics: Conference Series, 911, 1.

Ximena Soledad Ramos

✉ xramos@oac.unc.edu.ar

🌐 <https://xsramos.wordpress.com>

Córdoba, Diciembre 2017

Resumen

Hasta 1992 nuestro Sistema Solar era el único sistema planetario conocido y estudiado. Desde entonces, y con el descubrimiento de nuevas configuraciones orbitales en los “nuevos” sistemas planetarios, las ideas básicas de la dinámica planetaria han tenido que mejorar. Por un lado, en el sentido puramente matemático, si es posible probar que un sistema multiplanetario es estable para todo tiempo, especialmente en el caso que los movimientos de los cuerpos sean caóticos, y por lo tanto intrínsecamente impredecibles en escalas de tiempo lo suficientemente largas. Y por otro lado, dado que la formación de planetas se desarrolla en un entorno disipativo, sería posible que el sistema planetario típico se formara en lo que resulta ser un estado inestable a largo plazo. Si es esto correcto, características tales como las órbitas caóticas de los planetas del Sistema Solar y las órbitas excéntricas de algunos planetas extrasolares podrían, quizás, ser puntos finales de la evolución de sistemas planetarios inicialmente inestables (Armitage, 2010).

Un resultado clásico de la mecánica celeste es el origen del movimiento caótico como causa de la superposición de resonancias de movimientos medios. Sin embargo, no ha sido posible establecer a partir de este resultado un criterio para determinar las regiones de movimiento estable en el problema restringido de los tres cuerpos (también conocido como el criterio de estabilidad de Hill). Es por ello que, en una primera etapa de esta tesis, se estudia de forma analítica y numérica el movimiento de una partícula de prueba perturbada en un potencial central. Se encuentran dos límites que efectivamente permiten relacionar ambos criterios, y separan las regiones de movimiento estable e inestable, mostrando el papel fundamental de las resonancias de segundo orden. (Ramos *et al.*, 2015)

En una segunda etapa, por medio de desarrollos analíticos, simulaciones hidrodinámicas y simulaciones de N-cuerpos, se realiza un estudio de la dinámica resonante de sistemas planetarios en resonancias de movimientos medios. En particular, se estudia su permanencia en la resonancia bajo los efectos de fuerzas disipativas. Estas fuerzas modelan la interacción gravitatoria entre los planetas y el disco en el cual se forman, y producen una variación en el semieje y excentricidad de los planetas (proceso conocido como migración planetaria). Se encuentra que la relación de períodos de pares de planetas de baja masa resonantes aumenta cuando los planetas migran en discos de gas acampanados, es decir, la relación

de aspecto del disco crece con la distancia. Aplicando este resultado a la distribución observada de los sistemas Kepler, se encuentra que dicha distribución es consistente con un modelo de formación en el cual los planetas adquieren configuraciones resonantes cuando aún el gas no se ha disipado. (Benítez-Llambay *et al.*, 2016; Ramos *et al.*, 2017; Charalambous *et al.*, 2017)

Palabras claves: problema de tres cuerpos - resonancias de movimientos medios - estabilidad - simulaciones numéricas - métodos: analíticos y numéricos - migración planetaria.

Clasificación:

- 95.10.Ce Mecánica Celeste (incluyendo problemas de N-cuerpos).
- 95.75.Pq Procedimientos matemáticos y técnicas computacionales.
- 97.82.-j Sistemas planetarios extrasolares.
- 97.82.Jw Discos Protoplanetarios.
- 95.30.Lz Hidrodinámica.

Abstract

Until 1992, our Solar System was the only planetary system known and studied. Since then, and by the discovery of new orbital configurations in the “new” planetary systems, the basic ideas of planetary dynamics have had to be improved. In the purely mathematical sense, it is possible to prove that one multiplanetary system is stable for all time, especially in the case that the motions of the bodies are chaotic and thus intrinsically unpredictable over large timescales. On the other hand, since the formation of planets takes place in a dissipative environment, it is possible that the typical planetary systems are formed in what turns out to be a long-term unstable state. If this is correct, characteristics such as chaotic orbits of the planets in the Solar System and the eccentric orbits of some extrasolar planets may be the endpoints of the evolution of initially unstable planetary systems (Armitage, 2010).

A classic result of the celestial mechanics is the origin of the chaotic motion as a consequence of the overlap of mean-motion resonances. However, it has not been possible to establish, from this result, a criterion to determine the regions of stable motion in the restricted three-body problem (also known as Hill stability criterion). For this reason, in the first part of this thesis, the motion of a perturbed test particle in a central potential is studied in an analytical and numerical way. Two limits are found, enabling us to relate both criteria. These limits draw border regions of stable and unstable motion, showing the fundamental role of the second-order resonances. (Ramos *et al.*, 2015)

In a second stage, by mean of analytical developments, hydrodynamical simulations, and N-body simulations, a study of the resonant dynamics of planetary systems in mean-motion resonances is performed. In particular, its permanence in resonance under the effects of dissipative forces is studied. These forces model the gravitational interaction between the planets and the disk in which they are formed and produce a variation in the semimajor axis and eccentricity of the planets (the process known as planetary migration). It is found that the orbital period ratios of the adjacent pair of low mass resonant planets increase when the planets migrate in flared disks, that is, the aspect ratio of the disk grows with distance. Applying this result to the observed distribution of the Kepler systems, it is found that it is consistent with a formation model in which the planets acquire

resonant configurations when the gas has not yet dissipated. (Benítez-Llambay *et al.*, 2016; Ramos *et al.*, 2017; Charalambous *et al.*, 2017)

Keywords: three-body problem - mean-motion resonances - stability - numerical simulations - methods: analytical and numerical - planetary migration.

Clasification:

- 95.10.Ce Celestial mechanics (including n-body problems).
- 95.75.Pq Mathematical procedures and computer techniques.
- 97.82.-j Extrasolar planetary systems.
- 97.82.Jw Protoplanetary disks.
- 95.30.Lz Hydrodynamics.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi director Cristián Beaugé por su dedicación y confianza, por enseñarme y guiarme en este trabajo de tesis como así también en los artículos y presentaciones orales y murales presentadas. Le agradezco profundamente la oportunidad que me dio al integrarme, dado que esto me permitió progresar significativamente tanto en lo personal como en lo profesional.

Un profundo y más sincero agradecimiento a mi esposo. Su presencia tanto en el desarrollo de esta tesis como en el pasado y en el futuro, es tan significativo que no puedo encontrar la manera de expresar el agradecimiento por su apoyo, su esfuerzo y su cariño incondicional. Pablo es mi inspiración y mi ejemplo para seguir tanto en lo personal como en lo profesional. Gracias a la vida por haber unido nuestros caminos.

Un enorme agradecimiento a mi hermosa familia por su amor, su esfuerzo y su confianza. Gracias mamá y gracias papá por enseñarme y apoyarme a perseguir y realizar mis sueños. Son mi ejemplo y mi orgullo de cada día. Gracias hermanas por estar presentes y apoyarme en cada paso. Gracias abuelo por tu fuerza, tu perseverancia y tu voluntad; por el ejemplo de nunca bajar los brazos frente a las adversidades. Gracias a mi suegra por escucharme y por el apoyo y el cariño brindado en estos años.

Gracias a mi comisión asesora integrada por mi director, Martín Leiva y Carlos Briozzo, por el apoyo y la predisposición.

Gracias a mis compañeros del Grupo de Sistemas Planetarios: Martín, Cristian, Pablo, Javier, Annabella, Carolina y Federico, por escuchar, sugerir y compartir ideas en los tantos seminarios “Malbec+”.

Gracias a mis compañeros del chalet: Carolina, Luciana, Luciano y Ernesto por mantener un ambiente saludable y agradable para trabajar. Y gracias al “chalet” por alojarme todos estos años.

Un especial agradecimiento a mi tribunal de tesis integrada por la Dra. Claudia Giordano, la Dra. Carolina Chavero y el Dr. Cristian Giuppone, cuyas correcciones, comentarios y sugerencias ayudaron a mejorar este trabajo. Gracias por su disponibilidad y su tiempo!

Esta tesis la pude realizar gracias a todas y cada una de las personas que con-

forman la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, el Observatorio Astronómico de Córdoba y el Instituto de Astronomía Teórica y Experimental. También gracias a la infraestructura y servicios con las que cuentan. Mi enorme agradecimientos a cada institución y a las personas que las conforman. En especial, gracias al personal de CoDePo de la FaMAF por su ayuda, predisposición y eficiencia durante el desarrollo de mi doctorado.

Gracias a CONICET por ser mi principal soporte financiero a través de la beca doctoral de la cual fui beneficiada, y sin ella no hubiese podido sostenerme económicamente durante estos años.

Finalmente, gracias al CCAD de la Universidad Nacional de Córdoba¹, en particular el Cluster Mendieta, el cual forma parte del SNCAD del MinCyT de la República Argentina por los recursos computacionales indispensables para el desarrollo de las simulaciones hidrodinámicas del capítulo 5. Y al IATE por el extensivo uso de sus facilidades computacionales indispensables para el desarrollo de las simulaciones numéricas de los capítulos 4 y 6.

¹<http://ccad.unc.edu.ar/>

Índice general

1. Introducción a sistemas planetarios resonantes	1
1.1. Los sistemas planetarios	1
1.1.1. Técnicas de detección de exoplanetas	2
1.1.1.1. Técnica Doppler o de Velocidad Radial	3
1.1.1.2. Técnica de tránsitos planetarios	5
1.1.1.3. Kepler	5
1.1.2. Características de los sistemas planetarios	6
1.2. Sistemas planetarios resonantes	10
1.2.1. Interpretación geométrica de la resonancia	12
1.2.2. Sistemas (casi)-resonantes en nuestro Sistema Solar	13
1.2.3. Sistemas (casi)-resonantes en los sistemas extrasolares	14
1.3. La población cerca de las RMMs 2 : 1 y 3 : 2	15
1.4. Conclusiones	20
2. El Problema de 3 Cuerpos	23
2.1. Formulación del problema	23
2.1.1. Reducción de Jacobi	25
2.1.2. Variables de Delaunay	26
2.2. Dinámica Resonante	27
2.2.1. Soluciones resonantes estacionarias	29
2.2.2. Reducción a un grado de libertad de F	30
2.2.3. Integrales de movimiento	32
2.2.4. La forma cuadrática de F	32
2.3. Conclusiones	33
3. El P3C Restringido y el SMFR	35
3.1. Hamiltoniano resonante	35
3.1.1. El Problema Circular	38
3.1.2. Puntos fijos y separatriz	41
3.1.3. Dominios de libración y circulación	44
3.1.4. El plano representativo	46
3.2. Cálculo semi-analítico	49

3.3. Resumen	50
4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR	51
4.1. Esquema de la condición de superposición de resonancias	51
4.2. Trabajos previos	55
4.3. El criterio de superposición de resonancias clásico	57
4.3.1. Ancho de libración para las resonancias de primer orden	58
4.3.2. Separación entre resonancias de primer orden	59
4.3.3. La condición de superposición clásica	60
4.4. Pruebas numéricas de los criterios de superposición	62
4.4.1. El indicador Δe	62
4.4.2. Mapa dinámico a gran escala del plano representativo	64
4.4.3. Nuevo criterio con RMMs de 1 ^{er} y 2 ^{do} orden	66
4.5. El criterio de estabilidad de Hill	70
4.5.1. Estabilidad de Hill en elementos orbitales	71
4.5.2. Aplicación a órbitas circulares	73
4.5.3. Aplicación a órbitas excéntricas	76
4.6. Conclusiones	81
5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala	85
5.1. Formación y evolución de los planetas	85
5.2. Evolución orbital de planetas en su disco protoplanetario	86
5.2.1. Migración planetaria	87
5.2.1.1. Torque de la estela	88
5.2.1.2. Torque de corrotación	89
5.2.2. Modelo del disco	90
5.3. Simulando la migración planetaria	92
5.3.1. Simulaciones numéricas	93
5.3.2. Simulaciones hidrodinámicas	94
5.4. Método de remapeo	95
5.4.1. Ecuaciones y código utilizados	96
5.4.2. Método e implementación numérica	97
5.4.2.1. Definiendo los nuevos bordes	98
5.4.2.2. Llenando la malla	101
5.4.2.3. Evolución de la viscosidad del disco	103
5.4.2.4. Desplazamiento de las resonancias de Lindblad	105
5.5. Pruebas numéricas	107
5.5.1. Pruebas sin el método de remapeo	107
5.5.2. Pruebas con el método de remapeo	108
5.5.3. Prueba de evolución viscosa	111
5.5.4. Corrigiendo las frecuencias orbitales	112
5.5.5. Resolviendo la presión de escala del disco	113
5.5.6. Mejoras y propiedades de conservación	113

5.6.	Simulaciones de sistemas planetarios múltiples	114
5.6.1.	Testeando parámetros	116
5.6.2.	Variando la distancia inicial	122
5.6.3.	Variando la resolución	125
5.6.4.	Variando \mathcal{R}_d	126
5.7.	Conclusiones y Discusiones	128
6.	Migración planetaria y exoplanetas observables	131
6.1.	Arquitectura de planetas extrasolares	131
6.2.	El desplazamiento de resonancia	135
6.2.1.	Definición y modelo analítico	135
6.2.2.	El desplazamiento y el factor K	139
6.2.3.	La prescripción de Goldreich y Schlichting	141
6.3.	Migración diferencial y desplazamiento de la resonancia	143
6.3.1.	Desplazamiento de resonancia con simulaciones N-cuerpos	148
6.3.1.1.	Dependencia con la densidad superficial inicial .	149
6.3.2.	Desplazamiento de resonancia con simulaciones hidrodinámicas	150
6.4.	Aplicación a sistemas individuales	153
6.4.1.	Kepler-25 y K2-24	162
6.5.	Conclusiones	166
7.	Conclusiones y perspectivas	169
7.1.	Conclusiones	169
7.2.	Perspectivas	171

Introducción a sistemas planetarios resonantes

En este capítulo presentamos brevemente la definición y las características principales de los sistemas planetarios en general, y en particular, de aquellos cuyos planetas se encuentran casi resonantes o resonantes. Además, daremos algunos ejemplos sencillos y concretos existentes hasta el momento de sistemas (casi)-resonantes tanto en nuestro Sistema Solar como fuera de él.

1.1. Los sistemas planetarios

Un **sistema planetario** es un grupo de cuerpos celestes¹ ordenados de una manera muy particular: un cuerpo celeste principal (o más de uno), denominado estrella central, y uno o más cuerpos celestes de tamaños considerablemente menor que el central, que orbitan a su alrededor, los planetas.

Hasta el 2006 no existía una definición formal para los planetas. En ese mismo año, en la asamblea general la Unión Astronómica Internacional (IAU, según sus siglas en inglés), a través de la Resolución B5, definió dicho término en el Sistema Solar. Un **planeta** es un cuerpo celeste que: (i) orbita alrededor del Sol, (ii) tiene masa suficiente para que su propia gravedad supere las fuerzas de cuerpo rígido de modo que asume una forma en equilibrio hidrostático, o sea que tiene forma casi esférica, y (iii) ha despejado los alrededores de su órbita, es decir que domina la dinámica local. En nuestro Sistema Solar existen 8 planetas. Según su distancia creciente respecto del Sol: Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter, Saturno,

¹El significado de *cuerpo celeste* es tan expansivo y extenso como el universo entero, tanto conocido como desconocido. Por definición implícita, un cuerpo celeste es cualquier objeto *natural* fuera de la atmósfera de la Tierra. La Luna, el Sol y los otros planetas de nuestro Sistema Solar son ejemplos de cuerpos celestes. Sin embargo, según esta definición, también lo son las galaxias, los cúmulos estelares, los agujeros negros y hasta el polvo interestelar.

1. Introducción a sistemas planetarios resonantes

Urano y Neptuno.

Gracias a la fabricación de los telescopios y de su continuo perfeccionamiento, es posible obtener algunas propiedades *observables* de los planetas. La propiedad más importante para nuestro estudio a lo largo de esta tesis es su órbita. La órbita del planeta se denomina a la trayectoria que describe alrededor de la estrella central en el espacio como consecuencia de la acción de la fuerza de gravedad. El cálculo preciso de esta trayectoria es fundamental para nuestro trabajo, y más aún para conocer otras propiedades de los sistemas planetarios tales como las configuraciones resonantes entre planetas. Otras características *observables* de los planetas son sus formas, sus tamaños, sus rotaciones, sus masas o su distribución de masas, su temperatura, su campo magnético, su composición, su estructura superficial y atmosférica.

Wolszczan y Frail (1992) observaron variaciones en los tiempos de arribo de las señales emitidas por el púlsar PSR 1257+12, lo que se atribuyó a dos posibles planetas que estarían orbitando a su alrededor. Tres años más tarde, Mayor y Queloz (1995) encontraron perturbaciones periódicas en las mediciones de las velocidades radiales de la estrella de tipo solar 51 Pegasi, utilizando la técnica Doppler. Así se descubriría el primer planeta alrededor de una estrella de secuencia principal fuera del Sistema Solar, o como se llama comúnmente **planeta extrasolar**. Desde entonces, la búsqueda de planetas fuera de nuestro sistema planetario fue creciendo exponencialmente estando hoy en día en su total auge. La búsqueda de estos nuevos planetas se realiza mediante diversas técnicas: tránsitos planetarios, velocidades radiales (VR), astrometría, imagen directa, microlentes gravitacionales y timing. De todas estas técnicas sólo describiremos en detalle dos de ellas ya que son las más importantes para el resto de nuestro trabajo. Sin embargo, una revisión completa de las técnicas de detección puede encontrarse en los trabajos de Marcy y Butler (1998); Perryman (2000); Fischer *et al.* (2014), entre otros.

1.1.1. Técnicas de detección de exoplanetas

Buscar planetas extrasolares es como buscar una aguja en un pajar. Los planetas emiten poca o ninguna luz por sí mismos, mientras que su estrella brilla intensamente. Como nombramos antes, actualmente se utilizan seis técnicas distintas, pero complementarias en la búsqueda de planetas extrasolares.

La forma más difícil de detectar un planeta es obtener una imagen directa. Esto se debe al enorme contraste entre la luz emitida por la estrella anfitriona y la débil luz del planeta. Para obtener una imagen del planeta, la luz de la estrella debe enmascararse de algún modo para que los observadores puedan indagar en la zona en sombra. Un método es usar radiación infrarroja en vez de luz visible, ya que en estas longitudes de onda el contraste sería mucho menor. Otro método es bloquear físicamente la luz de la estrella usando un coronógrafo que tape el brillo

1.1 Los sistemas planetarios

central de la estrella, dejando visible sólo la corona, la zona exterior de plasma de la atmósfera de la estrella, permitiendo ver la luz de los planetas cercanos (ver, por ejemplo, Fischer *et al.*, 2014).

La mayoría de los planetas extrasolares se han detectado por métodos indirectos, identificando su presencia por su efecto sobre la estrella anfitriona. La existencia de un planeta afecta a su estrella de formas diferentes. Ambos cuerpos orbitan su centro de masa. Dado que, por lo general, la estrella es mucho más masiva que los planetas, el centro de masa está muy cerca de la estrella y ésta parece tambalearse ligeramente a medida que el planeta se desplaza alrededor de ella. Este bamboleo se debe a la perturbación dinámica entre ambos cuerpos y se puede detectar a través de cantidades observables de la estrella.

Cuando el planeta se mueve entre la estrella y el observador, la luminosidad del cuerpo central cambia. Estas pequeñas variaciones son importantes para los astrónomos, ya que posibilitan la observación indirecta de los planetas extrasolares.

Hasta Septiembre de 2017 en la base de datos de exoplanetas exoplanet.eu hay 3668 planetas catalogados, 2748 sistemas planetarios de los cuales 616 son sistemas planetarios múltiples, es decir con más de un planeta. 2752 planetas fueron detectados a través de tránsitos planetarios y variaciones del tiempo de tránsito (TTVs, según sus siglas en inglés), 727 por velocidad radial, 88 por imagen directa, 62 microlentes gravitacionales, 24 a través de timing y tan sólo 1 por astrometría.

En la figura 1.1 mostramos la cantidad de planetas que fueron descubiertos al transcurrir los años; desde los primeros exoplanetas encontrados alrededor de un púlsar en 1992 hasta la actualidad. En el gráfico separamos según el método de detección empleado, desde el más intuitivo como es el método de imagen directa hasta el más complejo tal como es la técnica de microlente. Hasta el presente, el método de tránsitos ha encontrado la mayor cantidad de planetas, especialmente durante los últimos años en donde las misiones espaciales hicieron la diferencia respecto a otras técnicas. No obstante, el método de velocidad radial se mantiene exitoso al pasar los años.

1.1.1.1. Técnica Doppler o de Velocidad Radial

La perturbación dinámica entre planeta-estrella se puede medir mediante el uso de la espectroscopía. A través de los corrimientos de las líneas espectrales, se miden las velocidades en la línea de la visual, esto es, se miden velocidades radiales. Este método es el mismo que el utilizado en los sistemas binarios estelares.

Al acercarse la estrella al observador, en su órbita, el corrimiento de las líneas espectrales se produce hacia las longitudes de onda más cortas el cual produce en el espectro un corrimiento hacia el azul, y al alejarse hacia longitudes de onda más largas lo que produce un corrimiento hacia el rojo, en relación a una longitud de onda central. Ésta es la que tendría la línea espectral considerada si el

1. Introducción a sistemas planetarios resonantes

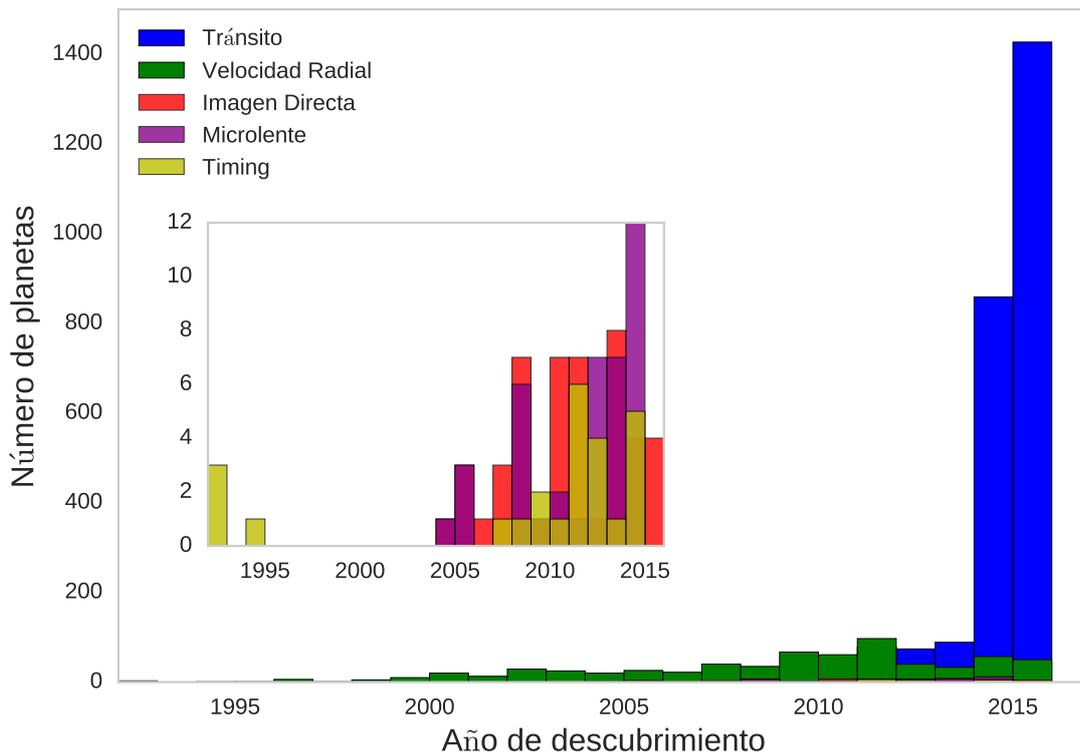


Figura 1.1: Cantidad de planetas confirmados al pasar los años discriminando por técnica de detección. Fuente: exoplanet.eu.

objeto que emite el espectro estuviera en reposo respecto al observador. A partir de estas variaciones es posible calcular la velocidad en la línea de la visual obteniendo una serie de datos discretos que, luego, pueden ser representados por una curva de velocidades radiales. De estas curvas se puede obtener la excentricidad del planeta, el período del planeta y la amplitud de la variación en la velocidad radial. De hecho, a partir de la amplitud de la variación en la velocidad radial se puede determinar la masa por el seno de la inclinación del planeta, es decir, se puede determinar una masa mínima para el planeta (cantidad fundamental para el análisis dinámico de los sistemas planetarios).

Es importante aclarar que la amplitud de velocidad radial de una estrella es sólo del orden de metros/segundos, mientras que la amplitud de estrellas binarias es del orden de km/segundos. Por este motivo, la detección de planetas a partir de este método depende de la precisión instrumental, los períodos de los planetas, la estabilidad de la atmósfera estelar, la temperatura de la estrella anfitriona y de la presencia de estrellas compañeras.

Otra cuestión a tener en cuenta es que existe una especie de selección intrínseca a la propia técnica. Los espectros de las estrellas con masa solar de tipo espectral G tienen muchas líneas delgadas de los metales permitiendo una adecuada determinación de la velocidad radial. No es el caso de estrellas de tipo espectral

1.1 Los sistemas planetarios

más tardío, como por ejemplo las de tipo M, en donde las líneas espectrales de los metales son bastante más amplias, lo que hace obtener sus velocidades radiales con poca precisión (por ejemplo, [Lovis y Fischer, 2010](#), entre otros).

Los primeros planetas detectados con este método son planetas grandes y muy cercanos a sus estrellas (por ejemplo, [Wright *et al.*, 2011](#); [Ford, 2014](#)). A estos planetas se los denomina Júpiter calientes. Ellos son del orden del tamaño de Júpiter, y orbitan sus estrellas en cuestión de días. Un planeta grande causa una gran perturbación, y como el tiempo de órbita es corto, hace que estos planetas sean más fáciles de detectar que los más pequeños o más lejanos de sus estrellas. Sin embargo, [Howard *et al.* \(2010\)](#) han reportado sistemas planetarios con planetas de tamaños tipo Tierra y Neptuno a través del método de velocidad radial.

1.1.1.2. Técnica de tránsitos planetarios

Cuando un planeta pasa entre la línea de visión del observador y su estrella anfitriona se habla de “tránsito”. El planeta bloquea parte de la luz de la estrella durante el tránsito y crea una disminución periódica en el brillo de la estrella. Este efecto puede medirse con fotometría, técnica que mide la cantidad de luz proveniente de los objetos celestes.

La desventaja de esta técnica es que sólo funciona cuando el sistema planetario está orientado en una configuración particular que permite que el tránsito pueda ser detectado desde la Tierra (la órbita planetaria debe estar casi perpendicular al plano del cielo), lo que no ocurre con frecuencia. Por otro lado, la variación del brillo estelar durante el tránsito es muy pequeña, lo que requiere de buenas condiciones para su detección.

Gracias a los tránsitos planetarios, podemos aprender mucho sobre los planetas que eclipsan a la estrella central. Podemos medir el diámetro del planeta, su período orbital, y si existen observaciones con velocidad radial para el mismo objeto, podemos determinar la masa planetaria, su radio y su densidad. Y si combinamos con modelos teóricos podemos inferir la composición del planeta.

Esta técnica no favorece la detección de exoplanetas muy alejados de su estrella, pero si ha observado planetas del tamaño de la Tierra ([Fischer *et al.*, 2014](#), entre otros).

1.1.1.3. Kepler

La misión espacial Kepler, comandada por la NASA, fue una misión muy exitosa que generó gran cantidad de datos sobre una gran variedad de sistemas exoplanetarios. Kepler proporcionó la mejor oportunidad para buscar planetas a través de tránsitos. Monitorizó ~ 195000 estrellas FGKM durante cuatro años y fue singularmente sensible a detectar planetas tan pequeños como la Tierra con períodos menores que un año. Kepler ha encontrado a través de tránsitos más de 4696 candidatos a exoplanetas y que poseen configuraciones orbitales muy

1. Introducción a sistemas planetarios resonantes

particulares. En [Lissauer *et al.* \(2014a\)](#) y en [Borucki \(2017\)](#) se puede obtener un excelente resumen sobre la misión y sus principales resultados.

Utilizamos a lo largo de todo este trabajo los sistemas planetarios detectados por Kepler debido a que es la misión más exitosa de exoplanetas y debido a que posee un gran cantidad de datos hasta el momento.

Es importante aclarar la diferencia existente entre los planetas candidatos, validados y confirmados. [Brown \(2003\)](#) reporta que existen varios procesos astrofísicos que pueden simular tránsitos planetarios. Por ejemplo, el caso de un sistema binario en el que una de las estrellas es mucho más pequeña que su compañera. Por lo tanto, la detección de un patrón similar al tránsito de una estrella no es evidencia suficiente para confirmar la presencia de un planeta en órbita alrededor de la misma. Los planetas “candidatos” son aquellos que se deducen de un análisis de los datos de Kepler pero que aún no han sido “validados” independientemente a través de otro método de detección como un planeta “confirmado”. Es fácil confundir aquellos planetas validados a través de métodos estadísticos con los planetas confirmados. Trabajos como [Lissauer *et al.* \(2011, 2012, 2014b\)](#); [Marcy *et al.* \(2014\)](#) (y sus referencias) son ejemplos de planetas validados a través del análisis de la muestra de Kepler.

1.1.2. Características de los sistemas planetarios

En la figura 1.2 mostramos un diagrama espacial de la gran diversidad de sistemas planetarios detectados hasta el momento. Debido a que son unos cuantos miles, sólo mostramos algunos de ellos a modo ilustrativo. En la parte inferior del diagrama representamos a nuestro Sistema Solar con las posiciones de sus ocho planetas. Luego, simbolizamos al sistema popular TRAPPIST-1 con sus siete planetas, el cual nos demuestra cuán compacto puede llegar a ser un sistema planetario: todos sus planetas se encuentran a menos de 0,1 UA. Otro ejemplo similar es el caso de Gliese 876 y Kepler-79 en donde sus cuatro planetas se encuentran dentro de 1 UA. Sin embargo, puede suceder todo lo contrario: los planetas pueden estar más lejos que Neptuno tal como es el caso de 2M 0219-39. Este diagrama muestra que los sistemas extrasolares presentan arquitecturas y características muy diferentes entre sí, y con respecto a nuestro Sistema Solar, las cuales son necesarias estudiar para poder entender esta gran diversidad. Además, está claro que el conocimiento de un solo ejemplo de sistema planetario no es suficiente como para deducir las propiedades generales.

Los planetas extrasolares son fascinantes porque su estudio puede ayudar a resolver misterios relacionados con nuestro propio Sistema Solar. Como ejemplo, se estima que nuestro sistema tiene aproximadamente 4600 millones de años, pero no hay manera de medir directamente este tiempo. Hasta hace alrededor de 20 años atrás, el Sistema Solar era el único sistema planetario que conocíamos, y no teníamos con qué compararlo hasta ahora. No sabíamos si era uno de muchos

1.1 Los sistemas planetarios

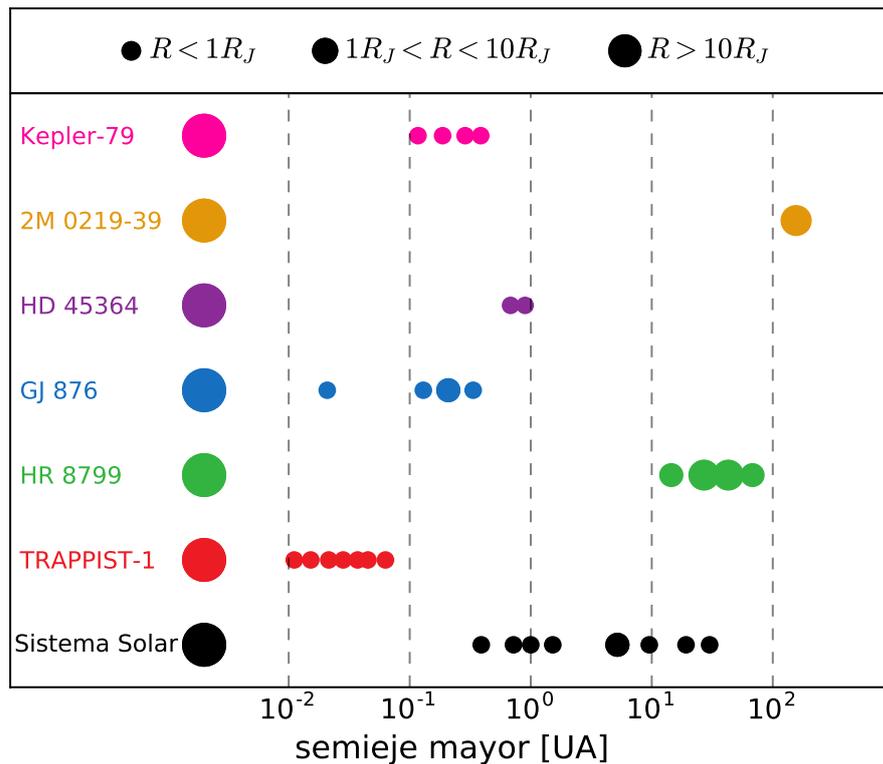


Figura 1.2: Diagrama de la gran diversidad de sistemas planetarios detectados hasta ahora según las posiciones y tamaños de los planetas. Mostramos a modo ilustrativo sólo algunos de los miles de sistemas confirmados. Fuente: exoplanet.eu.

(un ejemplo típico de sistema planetario) o algo excepcional y único. El estudio de la formación de otros sistemas planetarios jóvenes quizás pueda darnos algunas respuestas al respecto.

La figura 1.3 reafirma la gran diversidad de exoplanetas existentes en el Universo, mostrándonos que existe una gran variabilidad de sus excentricidades como de sus distancias a la estrella anfitriona. Contrariamente al caso del Sistema Solar, donde los planetas presentan excentricidades casi nulas, los exoplanetas pueden seguir órbitas muy excéntricas.

En la figura 1.4 mostramos la distribución de sus masas respecto a los períodos orbitales (y por tanto sus semiejes mayores) de todos los exoplanetas confirmados. En colores mostramos aquellos planetas descubiertos a través de los diferentes métodos de detección mientras que en color rojo representamos los planetas de nuestro sistema planetario. De este gráfico podemos ver que los planetas más grandes (también llamados gigantes) como los más chicos (llamados tipo Tierra o Neptuno) están detectados principalmente por el método de velocidad radial seguido por tránsitos. También podemos observar a los planetas gigantes calientes que se encuentran más próximos a la estrella anfitriona (llamados también Júpiter calientes), mientras que los gigantes templados y fríos se encuentran más alejados (ver figura 1.5 para la clasificación). Que la gran mayoría de los plane-

1. Introducción a sistemas planetarios resonantes

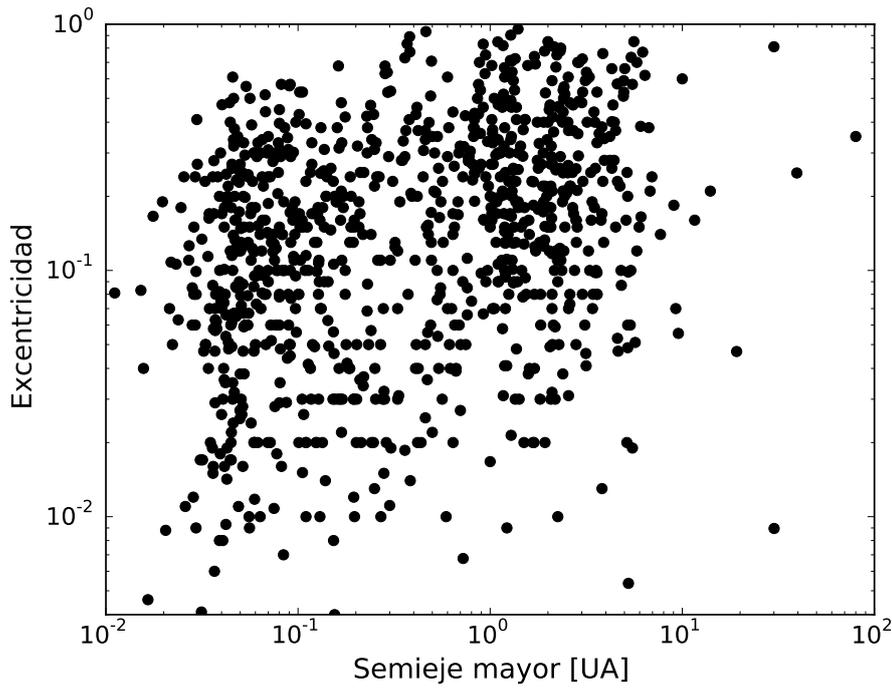


Figura 1.3: La excentricidad orbital en función del semieje mayor orbital de los planetas detectados. Fuente: exoplanet.eu.

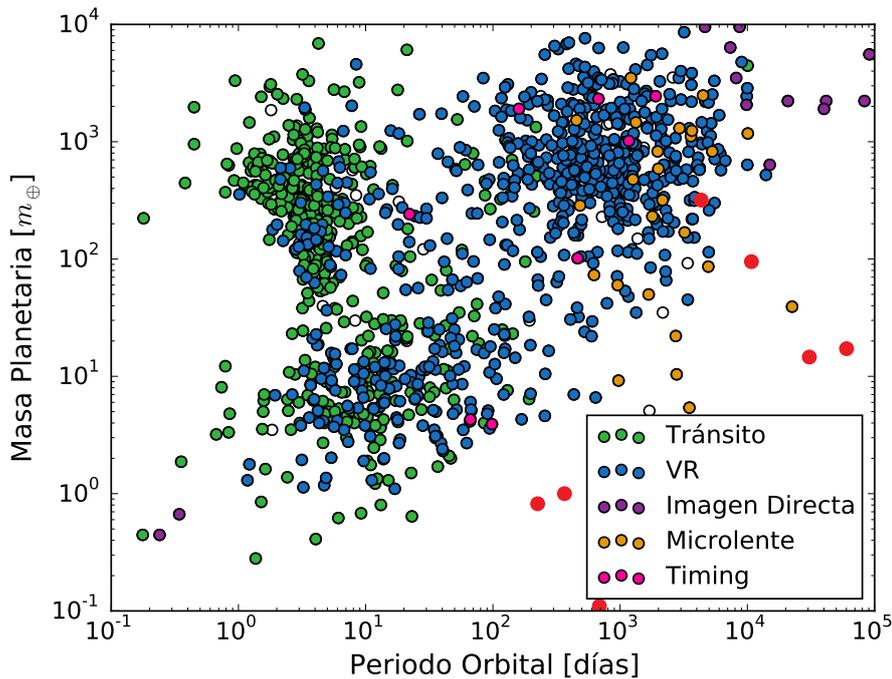


Figura 1.4: Masas aproximadas y el período orbital de los planetas conocidos según la base de datos exoplanet.eu a Septiembre de 2017. Notar que este gráfico no considera detalles importantes como los sesgos de selección. En color se identifican los diferentes métodos de detección y en color rojo los planetas del Sistema Solar.

1.1 Los sistemas planetarios

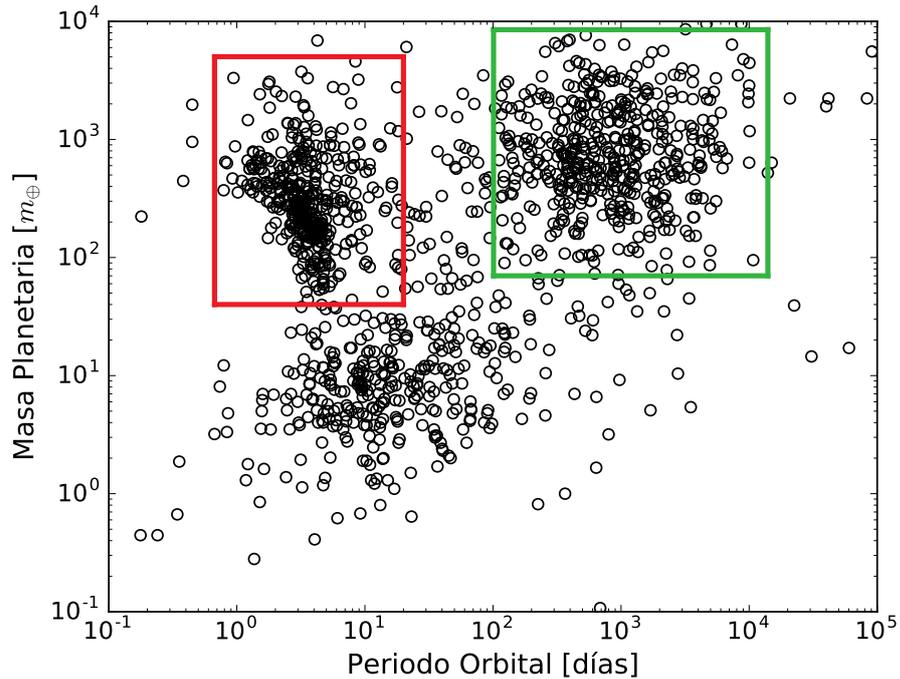


Figura 1.5: La misma figura que la anterior pero mostrando ahora los diferentes grupos de planetas a los cuales nos referimos a lo largo del texto. Remarcados en rojo los denominamos planetas gigantes calientes y en verde planetas gigantes templados y/o fríos.

tas descubiertos sean planetas gigantes no quiere decir que no existan planetas terrestres y que nuestro Sistema Solar sea el único privilegiado con presencia de ellos. Esto se debe a que los métodos de detección favorecen las grandes masas planetarias. A esta población con masas más pequeñas se la conoce como de tipo Tierra o Neptuno por tener tamaños de dichos planetas. Es importante aclarar que esta población de pequeños exoplanetas se encuentra restringida por las observaciones, esto quiere decir, que si se superan dichas limitaciones podemos llegar a encontrar planetas pequeños con períodos orbitales mayores, a por ejemplo, 1000 días. Por este motivo, no podemos clasificarla en la figura 1.5 con un simple recuadro.

Generalmente, los Júpiter calientes carecen de compañeros próximos. Se cree que su origen fue principalmente a través de la dispersión planetaria y resonancias de Kozai, y parte a través de la migración planetaria. Al contrario, los gigantes templados y fríos tienen compañeros cercanos por lo que usualmente los podemos encontrar en sistemas planetarios compuestos por más de un planeta, es decir, múltiples. Estos planetas poseen una fuerte evidencia de migración planetaria. Sin embargo, también existe una fuerte evidencia de que hubo dispersión planetaria, ya que de esta forma se explica la distribución de excentricidades de los exoplanetas (ver figura 1.3). Por lo tanto podemos concluir que los planetas gigantes se formaron lejos de la estrella central y que pudieron haber migrado pero no hasta muy cerca de su estrella. En Ford (2014) (y las referencias en él)

1. Introducción a sistemas planetarios resonantes

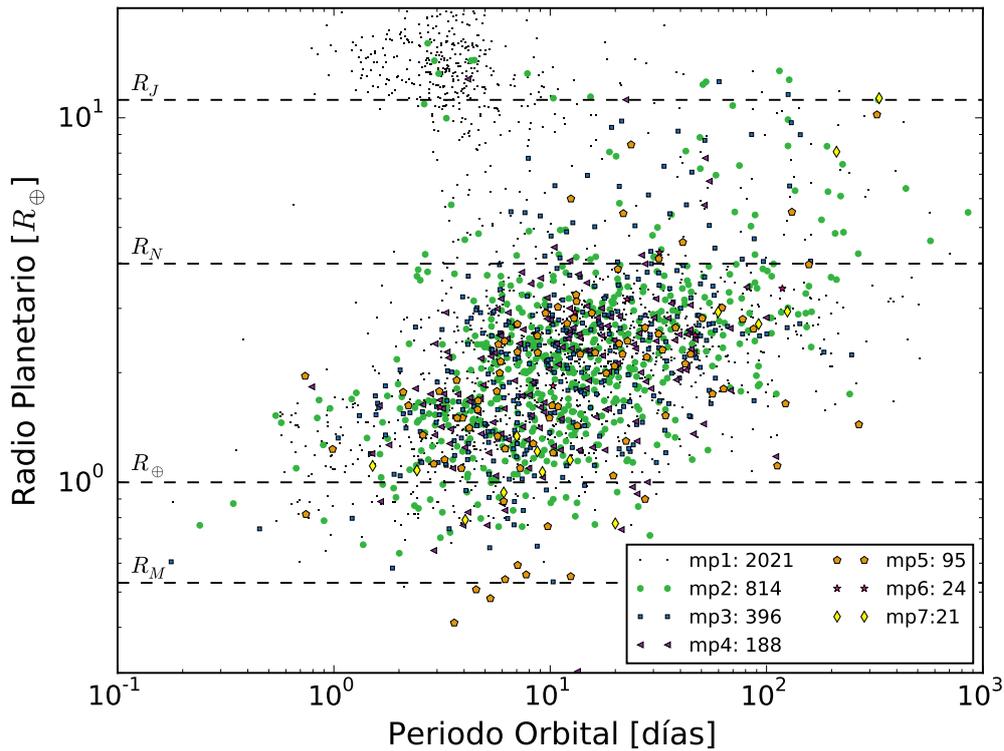


Figura 1.6: Radio planetario (R) en función del período orbital para los planetas detectados. Los símbolos coloreados representan la cantidad de planetas que contiene el sistema al cual pertenecen, es decir, la multiplicidad planetaria (mp). La cantidad total de sistemas con cierta multiplicidad es expuesta en el gráfico. Se representa en línea negra discontinua el valor del radio de Júpiter (R_J), de Neptuno (R_N), de la Tierra (R_{\oplus}) y de Marte (R_M). Fuente: exoplanet.eu.

puede encontrarse un resumen de la arquitectura y formación de estos planetas.

En la figura 1.6 mostramos el radio planetario vs. el período orbital para los planetas detectados. En colores representamos la multiplicidad planetaria correspondiente al sistema al cual corresponde cada planeta. En esta figura se demuestra nuevamente que existe una dificultad para detectar pequeños planetas con largos períodos orbitales, y la ausencia de planetas gigantes en sistemas múltiples. También se observa que la mayoría de los planetas detectados hasta el momento poseen radios entre el terrestre y el neptuniano, y que existe una acumulación de planetas simples separado de la acumulación múltiple entre 1 y 6 días para radios superiores al radio de Júpiter.

1.2. Sistemas planetarios resonantes

La gran cantidad de datos planetarios en los últimos años han provisto de confirmaciones sorprendentes de que nuestro Sistema Solar es un conjunto altamente estructurado de cuerpos orbitantes, pero la estructura no es tan simple como la sucesión hallada por Titius-Bode. Son las leyes de Newton las que están

1.2 Sistemas planetarios resonantes

en acción y el sutil efecto gravitacional que determina la estructura dinámica de los sistemas planetarios es el fenómeno de **resonancia**.

En términos básicos una resonancia puede surgir cuando hay una conmensurabilidad numérica simple entre las frecuencias o los períodos. Los períodos involucrados podrían ser el período rotacional o el período orbital de un solo cuerpo, como en el caso del *acoplamiento spin-órbita* (por ejemplo, la Luna), o quizás los períodos orbitales de dos o más cuerpos, como en el caso del *acoplamiento órbita-órbita* (por ejemplo, tres de las cuatro lunas galileanas de Júpiter, Io, Europa y Ganímedes). Otras relaciones resonantes más complicadas también son posibles. Las fuerzas disipativas están impulsando procesos evolutivos en el Sistema Solar y están conectadas con el origen de alguna de estas resonancias (Murray y Dermott, 1999).

Si los períodos involucrados son los orbitales, decimos que dos o más cuerpos se encuentran en **resonancia de movimientos medios (RMM)** si sus razones de períodos orbitales es un número racional, o en otras palabras cumplen con la siguiente relación:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{p+q}{p} \quad (1.1)$$

donde p y q son números enteros. Notar que el movimiento medio de un cuerpo en una órbita alrededor de la estrella central es $n_i = 2\pi/P_i$, de aquí el nombre de dicha resonancia. Si $q = 1$ se dice que la RMM es de primer orden y se puede demostrar que son las resonancias más fuertes y las más extensas, y por tanto las más interesantes para estudiar. Esta clase de resonancias son nuestro objeto de estudio a lo largo de esta tesis. Si $q = 2$ se dice que la RMM es de segundo orden, las cuales son más débiles y menos extensas que las de primer orden. El orden aumenta al aumentar el valor de q y por tanto disminuirá su efecto y su tamaño. Ahora bien, si ponemos valores a p estaremos cambiando el grado de la resonancia. Por ejemplo, si $q = 1$ y $p = 1$ los cuerpos están en presencia de una RMM de primer orden y de primer grado, esto es según la ecuación una relación de períodos orbitales de exactamente 2, es decir, el cuerpo más interno dará dos vueltas alrededor del objeto central mientras que el cuerpo más externo dará una sola vuelta hasta llegar a la misma configuración inicial del cual se partió. Por el contrario, si elegimos por ejemplo, $q = 1$ y $p = 2$ los cuerpos estarán en una RMM de primer orden y segundo grado, o bien una relación de períodos de 3/2. Estas dos RMM son las más importantes en el sentido del efecto que producen (por ejemplo, Morbidelli, 2002). Sin embargo, en la naturaleza (planetaria) existen una gran variedad de RMM como combinaciones de los números enteros p y q se puedan dar.

Es importante aclarar que una RMM se puede representar de dos diferentes formas: $(p+q)/p$ ó $(p+q) : p$. Ambas notaciones serán utilizadas a lo largo de esta tesis sin distinción alguna.

Entonces, ¿por qué estudiar sistemas resonantes? Porque gracias a este fenómeno

1. Introducción a sistemas planetarios resonantes

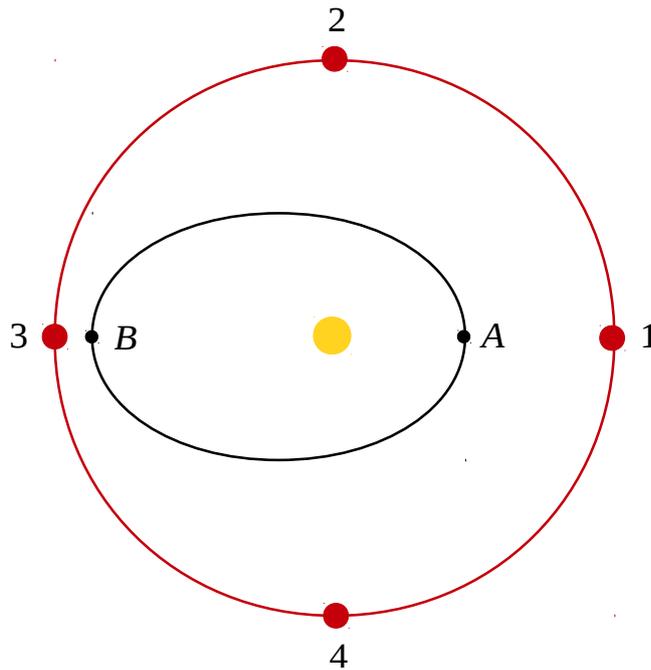


Figura 1.7: Esquema de las posiciones relativas de Júpiter (color rojo) y un asteroide (color negro) cuando su razón de períodos orbitales es igual a 2.

las órbitas de los planetas interactuantes se pueden estabilizar durante su evolución o desestabilizar dependiendo del efecto que produce el otro cuerpo sobre éste. Conocer los fenómenos que estabilizan o desestabilizan un sistema nos permite caracterizarlo y descubrir sus posibles orígenes. Esta idea representa el objetivo de nuestro estudio en esta tesis. Cuando un sistema mantiene su configuración en el tiempo, cuándo es estable y por cuánto tiempo, son interrogantes que intentaremos descubrir aquí.

1.2.1. Interpretación geométrica de la resonancia

A partir de la definición dada anteriormente, queda explícito que el fenómeno de resonancia se puede explicar geoméricamente de una manera sencilla. A continuación daremos un ejemplo concreto para terminar de entender este fenómeno siguiendo el desarrollo de [Murray y Dermott \(1999\)](#).

Consideramos en primer lugar un sistema constituido por un asteroide, el planeta Júpiter y el Sol. Para simplificar supongamos que el asteroide se mueve en una órbita excéntrica y Júpiter en una órbita circular, tal como se muestra en curva negra y roja respectivamente en la figura 1.7. Júpiter perturba al asteroide sin masa (en realidad tiene masa, pero es despreciable frente al planeta, y más aún frente al Sol), el cual está en una resonancia 2/1 con el planeta. También, consideramos que todo movimiento se encuentra en el plano de la órbita de Júpiter, y que todos los ángulos involucrados son inicialmente iguales a cero. En esta situación, estamos ignorando cualquier perturbación entre los cuerpos para estudiar

1.2 Sistemas planetarios resonantes

sólo la geometría que lleva a encuentros repetidos.

En la figura 1.7 mostramos las diferentes configuraciones en el tiempo que tiene el sistema a lo largo de sus trayectorias alrededor del Sol. La configuración inicial del sistema en el tiempo $t = 0$ se da cuando Júpiter y el asteroide están en conjunción (puntos 1 y A). Así, el asteroide se encuentra en el perihelio de su órbita. Como los cuerpos están en resonancia 2/1, el asteroide completará dos órbitas por cada período de Júpiter (P_J). Sin considerar perturbaciones, cuando Júpiter llegue al punto 2 en el tiempo $t = \frac{1}{4}P_J$, el asteroide está en el afelio de su órbita (punto B), punto de mínima separación entre ambas. Aunque es evidente la aproximación cercana entre las dos órbitas, Júpiter no está lo suficientemente cerca cuando el asteroide se encuentra en su afelio. De forma similar, cuando Júpiter alcanza esta posición (punto 3) en el tiempo $t = \frac{1}{2}P_J$, el asteroide volvió al perihelio. En $t = \frac{3}{4}P_J$, el asteroide vuelve al punto peligroso (punto B) pero Júpiter nuevamente no se encuentra lo suficientemente cerca para que existan perturbaciones que cambien significativamente sus órbitas. Finalmente, en $t = P_J$ ambos cuerpos vuelven a la configuración inicial (punto 1 y A). Resulta entonces que la proximidad de las órbitas de ambos cuerpos da una falsa alarma de que se produzcan grandes perturbaciones, ya que las posiciones de los cuerpos nunca coinciden al mismo tiempo en su mínima separación. Estas configuraciones peligrosas se evitan por el mecanismo de resonancia. Este es un ejemplo de una configuración de equilibrio estable entre un asteroide y Júpiter.

Si en lugar de esta configuración estable consideramos que el movimiento se inicia con Júpiter en el punto 3 y el asteroide en el punto B, una vez tras otra los objetos se encontrarán en esta conjunción con el asteroide en el afelio de su órbita en su separación mínima. Este es un ejemplo de una configuración de equilibrio inestable entre un asteroide y Júpiter.

1.2.2. Sistemas (casi)-resonantes en nuestro Sistema Solar

Nuestro sistema planetario está plagado de ejemplos de RMM y/o configuraciones próximas a ellas (por ejemplo, Roy y Ovenden, 1954). Encontramos estas configuraciones desde los cuerpos más pequeños del sistema (asteroides) hasta los más grandes (planetas gigantes). Dada la gran cantidad de ejemplos, aquí daremos sólo algunos para ser ilustrativos:

- Sistema **Neptuno-Plutón**. Estos cuerpos están en una RMM 3 : 2.
- Sistema **Trojanos de Júpiter-Júpiter**. Los Trojanos de Júpiter se encuentran en RMM 1 : 1 con el planeta en los puntos Lagrangianos L_4 y L_5 , posiciones muy estables a lo largo del tiempo. Este tipo de resonancia también es llamada *coorbital* dado que los objetos involucrados en ella comparten la misma órbita alrededor del Sol.

1. Introducción a sistemas planetarios resonantes

- Sistema **Io-Europa-Ganímedes**. Tres de las cuatro lunas galileanas de Júpiter están en una RMM muy particular $4 : 2 : 1$ llamada *resonancia de Laplace*. A este tipo de resonancia se la suele conocer como una *cadena de resonancias*, ya que, y tal como lo indica la palabra cadena, es una sucesión de RMM entre los cuerpos del sistema.
- El sistema de las lunas de Saturno **Mimas-Tethys** están en una RMM $4:2$, **Enceladus-Dione** en una RMM $2:1$, **Titan-Hiperión** en una RMM $4:3$, entre otras.

1.2.3. Sistemas (casi)-resonantes en los sistemas extrasolares

Así como nuestro Sistema Solar posee muchas configuraciones resonantes entre sus componentes no es de sorprender que los sistemas extrasolares también las posean. En este apartado daremos algunos ejemplos que no podemos dejar de mencionar de planetas extrasolares resonantes.

- En el **púlsar PSR B1257+12**, los dos planetas exteriores, están casi en una resonancia $3 : 2$. Esta casi resonancia produce interacciones gravitatorias suficientemente grandes para ser fácilmente detectables, lo que permitió confirmar la existencia de los planetas y medir sus inclinaciones poco después de su descubrimiento (Rasio *et al.*, 1992; Malhotra *et al.*, 1992).
- En el sistema **GJ 876**, los planetas *c*, *b* y *e* tienen períodos cercanos a la relación $4 : 2 : 1$ (Lee y Peale, 2002; Rivera *et al.*, 2010), es decir una resonancia de Laplace.
- En el sistema **HD 73526**, los planetas *b* y *c* se encuentran en una resonancia $2 : 1$ (Tinney *et al.*, 2006), al igual que en el sistema **HD 128311** (Vogt *et al.*, 2005).
- En el sistema **HD 82943**, los planetas *c* y *b* se encuentran en una resonancia $2 : 1$ (Lee *et al.*, 2006).
- En el sistema **HD 45364**, los planetas gigantes *b* y *c* se encuentran en una resonancia $3 : 2$ (Correia *et al.*, 2009).
- En el sistema **HD 204313**, los planetas *b* y *d* se encuentran en una resonancia $3 : 2$ (Rein, 2012).
- En el sistema **HD 5319**, los planetas *b* y *c* se encuentran en una resonancia $4 : 3$ (Giguere *et al.*, 2015).
- En el sistema **HD 60532**, los planetas *b* y *c* se encuentran en una resonancia $3 : 1$ (Laskar y Correia, 2009).

1.3 La población cerca de las RMMs 2 : 1 y 3 : 2

- En el sistema **HD 33844**, los planetas b y c se encuentran en una resonancia 5 : 3 (Wittenmyer *et al.*, 2016).
- En el sistema **HD 202206**, los planetas b y c se encuentran en una resonancia 5 : 1 (Correia *et al.*, 2005).
- Lissauer *et al.* (2011) encuentran que los cuatro planetas del sistema **Kepler-223 (KOI-730)** están en una cadena de resonancias con relaciones de períodos 8 : 6 : 4 : 3.
- Fabrycky *et al.* (2014) encuentran que tres planetas en el sistema **Kepler 60 (KOI-2086)** tienen RMM 5 : 4 y 4 : 3.
- El revolucionario sistema **TRAPPIST-1** consiste de siete planetas tipo Tierra que orbitan alrededor de una estrella enana. Los seis planetas interiores forman la cadena casi resonante más larga conocida de exoplanetas, siendo las relaciones de los períodos orbitales P_c/P_b , P_d/P_c , P_e/P_d , P_f/P_e y P_g/P_f próximas a las relaciones de pequeños enteros, 8/5, 5/3, 3/2, 3/2 y 4/3, respectivamente (Gillon *et al.*, 2017). Además de estar en cadena de resonancias de pares consecutivos, también lo están de a tres planetas.

Hemos ejemplificado que existe una gran diversidad de sistemas exoplanetarios resonantes. No sólo se encuentran sistemas resonantes de primer orden, sino que existen sistemas resonantes de alto orden tal como el caso del sistema HD 202206 entre otros.

1.3. La población cerca de las RMMs 2 : 1 y 3 : 2

Como hemos visto en el apartado anterior, existen sistemas exoplanetarios que están en las cercanías de las RMMs. Además, hemos aclarado y especificado si se trata de un sistema resonante o un sistema casi resonante pero, ¿qué significa que un sistema sea casi resonante? Geométricamente hablando, un sistema casi resonante es aquel en el cual se cumple que:

$$\frac{P_2}{P_1} \simeq \frac{p+q}{p}, \quad (1.2)$$

es decir, los valores de sus relaciones de períodos son aproximadamente igual al cociente de enteros p y q . Por ejemplo, Saturno y Júpiter están muy próximos a la RMM nominal 5:2, pero P_7/P_5 no toma el valor exacto de 2,5, sino que toma el valor de 2,48327337.... Algo parecido sucede con las lunas de Júpiter, Europa y Ganímedes en donde su relación de períodos tiene un valor de 2,014696018, pero usualmente se dice que está cerca de una RMM 2:1. En la mayoría de los casos, siempre nos referimos a sistemas casi resonantes cuando sus relaciones de períodos no superan aproximadamente el 10% del valor nominal.

1. Introducción a sistemas planetarios resonantes

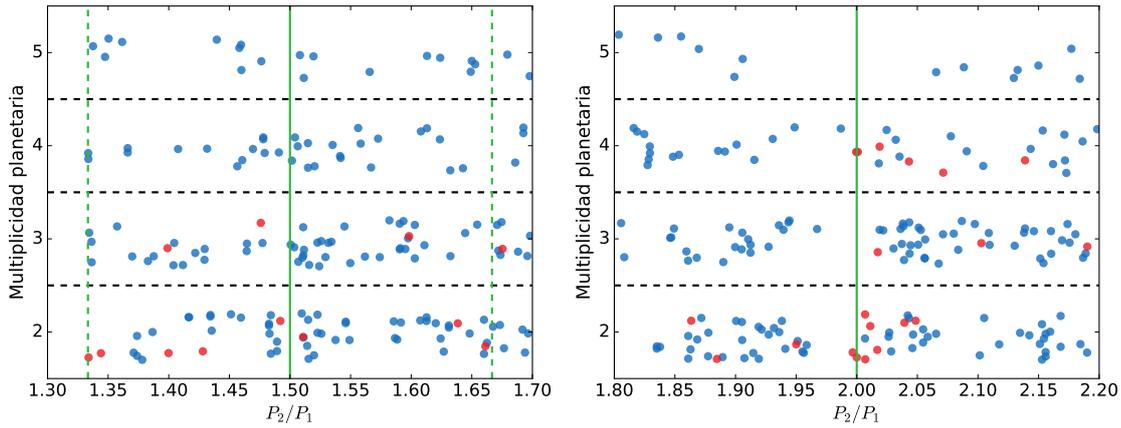


Figura 1.8: Multiplicidad planetaria para los pares de planetas de sistemas Kepler (color azul) y VR (color rojo). Las ubicaciones de las RMMs exactas 3 : 2 y 2 : 1 están indicadas por líneas verdes verticales, mientras que en líneas verdes discontinuas se representan otras resonancias.

En esta sección sólo nos dedicaremos a describir algunos sistemas que se encuentren en las cercanías de las RMM 2 : 1 y 3 : 2, debido a que nos enfocaremos a lo largo de toda esta tesis sólo en este tipo de configuraciones.

[Lissauer et al. \(2011\)](#) comentan que aproximadamente un tercio de los sistemas multiplanetarios estudiados por las mediciones de VR contienen pares planetarios casi resonantes, aproximadamente la mitad de estos cerca de la resonancia 2 : 1. Por otro lado, [Winn y Fabrycky \(2015\)](#) muestran que existe una agrupación de pares de planetas con masas más grandes que Júpiter dentro de la resonancia 2 : 1. La figura 1.8 nos indica la cantidad de sistemas que contienen 2, 3, 4 y 5 planetas (multiplicidad planetaria) en las cercanías de las resonancias nominales consideradas en esta sección. En color azul se representan los pares de planetas confirmados por Kepler, y en rojo los confirmados por VR. La primera característica que se observa es la falta de sistemas detectados con VR que contengan 4 y 5 planetas alrededor de la RMM 3 : 2, y de 5 planetas alrededor de la 2 : 1. Esta figura muestra la característica comentada por [Lissauer et al. \(2011\)](#) en las cercanías de la comensurabilidad de menor orden, resaltando aquellos sistemas con 2 y 4 planetas. Los sistemas Kepler presentan un pequeño déficit alrededor la resonancia 2 : 1, que no se observa alrededor de la otra resonancia.

El exceso y déficit en la inmediaciones de las resonancias nominales mencionados en el párrafo anterior también se muestra en la figura 1.9. El histograma de relación de períodos fue generado para todos los sistemas planetarios múltiples descubiertos por Kepler, dominado por pequeños planetas con períodos más cortos que unos pocos cientos de días. Podemos ver que existe un déficit de pares de planetas con relaciones de períodos entre 1,99 – 2,00 y un exceso de pares con relaciones de períodos entre 1,50 – 1,51 y 2,00 – 2,02. Esta conclusión fue expuesta por [Terquem y Papaloizou \(2007\)](#) como una consecuencia de la disipación de las mareas dentro del planeta interior que causaría la separación de las órbitas, una

1.3 La población cerca de las RMMs 2 : 1 y 3 : 2

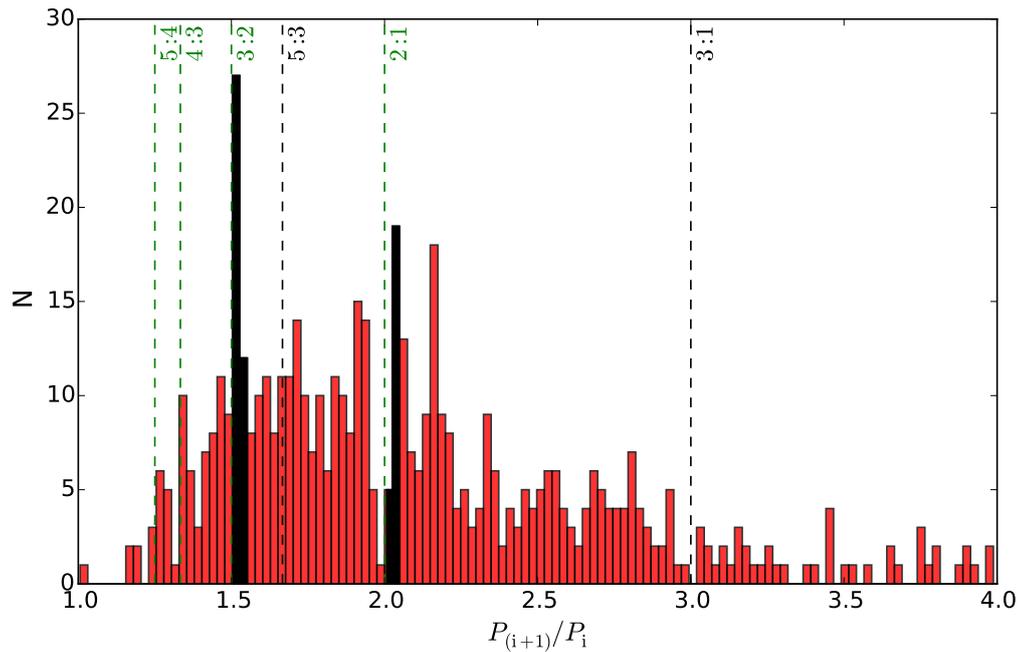


Figura 1.9: Histograma de razón de períodos orbitales para todos los pares de planetas de sistemas multiplanetarios Kepler. Las ubicaciones de las RMMs están indicadas por líneas a trazos verticales. La mayoría de los planetas no residen en o cerca de las resonancias. Sin embargo, hay un exceso significativo de pares de planetas con razones de períodos a penas más grandes que aquellos que están en las RMMs exactas.

idea que fue recogida de nuevo por [Batygin y Morbidelli \(2013a\)](#) y [Lithwick *et al.* \(2012\)](#) una vez que la muestra de Kepler estuvo disponible. Tal como se puede ver del histograma, las resonancias 2 : 1 y 3 : 2 no son las únicas con excesos y/o escasez en sus alrededores. Existen otras resonancias en lo que sucede algo similar. Sin embargo, no son de interés para el resto de nuestro trabajo.

A pesar de este interés en los sistemas casi resonantes, la principal lección de la figura 1.9 es que las resonancias son poco frecuentes entre los planetas pequeños con períodos menores que algunos años ([Lissauer *et al.*, 2011](#)). Las relaciones de período más comúnmente observadas están en el rango de 1,5 – 3,0. El menor coeficiente de período confirmado es $\sim 1,17$ y pertenece a Kepler-36. Este sistema presenta dos planetas inusualmente estrechamente espaciados. Esta tendencia hallada fue inicialmente sorprendente porque los sistemas Doppler ya habían demostrado una mayor preferencia por las resonancias y porque la teoría de la migración de disco (por la que los planetas con órbitas grandes se desplazan a órbitas más pequeñas a través de interacciones gravitatorias con el disco protoplanetario) predijo que los pares de planetas a menudo son atrapados en conmensurabilidades ([Goldreich y Tremaine, 1980](#); [Lee y Peale, 2002](#)).

Una característica que podemos resaltar es que la mayoría de los pares de planetas casi resonantes de Kepler se encuentran en sistemas con baja multiplicidad planetaria (2 y 3 planetas) como se muestra en la figura 1.8.

1. Introducción a sistemas planetarios resonantes

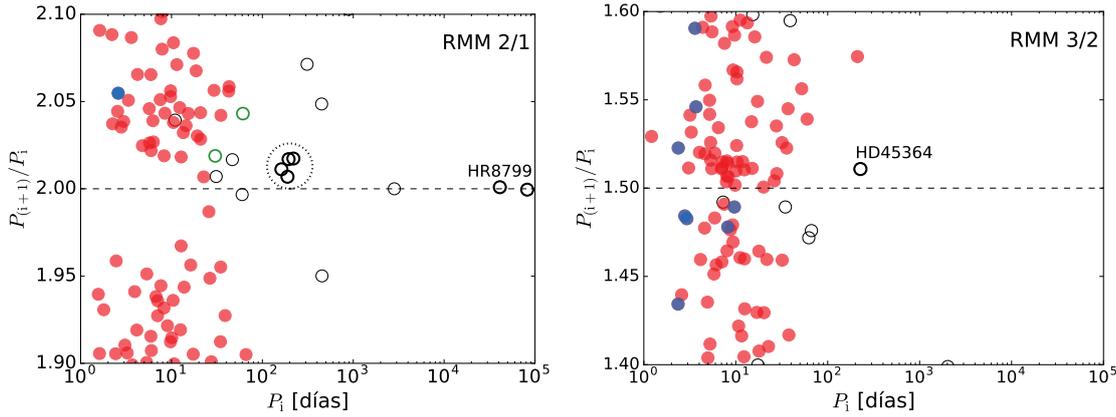


Figura 1.10: Distribución de relaciones de períodos orbitales entre pares de planetas adyacentes como una función del período orbital del planeta interno en la vecindad de la RMM 2 : 1 (izquierda) y RMM 3 : 2 (derecha). Los datos fueron obtenidos de exoplanet.eu. Los círculos rojos representan los planetas detectados a través de tránsitos o TTVs, mientras que los círculos azules corresponden a los planetas Kepler validados recientemente por [Morton et al. \(2016\)](#). Los planetas descubiertos por cualquier otro método se muestran con círculos abiertos. En el gráfico de la izquierda, los círculos abiertos verdes denotan al sistema GJ 876, mientras que el círculo negro a trazos agrupa los miembros resonantes (o casi resonantes) de HD 73526, HD 82943, HD 155358, y HD 92788. Figura adaptada de [Ramos et al. \(2015\)](#).

Para una mejor comprensión de la distribución de las relaciones de períodos orbitales, en la figura 1.10 mostramos dicha distribución ($P_{(i+1)}/P_i$) para planetas adyacentes en sistemas multiplanetarios, en función del período orbital del miembro interno de cada par, P_i . El gráfico de la izquierda muestra la proximidad de la RMM 2 : 1 mientras que el gráfico de la derecha presenta resultados para la conmensurabilidad 3 : 2. En ambos casos, los círculos rojos corresponden a sistemas planetarios detectados por tránsitos o TTVs y son en su mayoría frutos de la misión Kepler. Los sistemas recientemente validados por [Morton et al. \(2016\)](#) se indican por separado en azul, ya que no son planetas realmente confirmados y siguen sujetos a incertidumbres. Finalmente, los descubiertos por todos los otros métodos, particularmente con velocidad radial, son identificados por círculos negros abiertos.

Ambas distribuciones muestran características distintas. Entre la población no detectada a través de tránsitos, la RMM 2 : 1 contiene varios ejemplos bien conocidos de pares resonantes e incluso resonancias múltiples. Los planetas en HR 8799 están situados muy lejos de la estrella central (períodos orbitales superiores a 10^4 días) y parecen estar atrapados en una resonancia de tipo Laplace. La relación de períodos orbitales de los planetas más externos es de 2,0009 y 1,9995, respectivamente, situándolos extremadamente cerca de la posición de la resonancia exacta (por ejemplo, [Goździewski y Migaszewski, 2014](#)).

Más cerca de la estrella, y rodeado por un círculo punteado abierto, se encuentra un grupo de sistemas planetarios muy cercanos a la resonancia 2 : 1 y

1.3 La población cerca de las RMMs 2 : 1 y 3 : 2

detectados a través de los relevamientos de velocidad radial. Tal vez los ejemplos más conocidos son HD 82943, cuyos dos planetas confirmados tienen una razón de períodos de $\sim 2,017$ (Baluev y Beaugé, 2014) y HD 73526 con un valor de 2,006 (Wittenmyer *et al.*, 2014). Las incertidumbres en los ajustes orbitales dificultan establecer si todos los demás casos son verdaderamente resonantes (por ejemplo, HD 128311, ver McArthur *et al.*, 2014; Rein, 2015), aunque las consideraciones de estabilidad usualmente requieren la libración de los ángulos resonantes.

El último ejemplo de sistemas detectados a través de VR en la vecindad de la RMM 2 : 1 es GJ 876, con los tres planetas ubicados en una resonancia de Laplace (por ejemplo, Rivera *et al.*, 2010; Baluev, 2011). Ambos pares adyacentes se identifican en el marco superior por círculos verdes abiertos. Aunque el sistema también alberga un planeta interior mucho más pequeño, está situado muy cerca de la estrella y con interacciones gravitacionales insignificantes con los otros miembros. El desplazamiento de resonancia para GJ 876 es mayor que el observado en otros casos, con relación de período orbital de $\sim 2,02$ y $\sim 2,04$ (Nelson *et al.*, 2016).

Se ha demostrado que el sistema GJ 876 es significativamente caótico (Martí *et al.*, 2013), aunque estable durante períodos de tiempo comparables a la edad del sistema. Batygin *et al.* (2015) sostuvo que la caoticidad fuerte es incompatible con una migración suave en un disco laminar, proponiendo en cambio que la captura de resonancia ocurrió en un disco turbulento caracterizado por perturbaciones estocásticas de pequeña amplitud. Sin embargo, no está claro por qué la turbulencia habría afectado a este sistema y no a los demás miembros de la población resonante. Por otro lado, Martí *et al.* (2016) mostraron que la resonancia de Laplace para el sistema GJ 876 también contiene una región interna muy regular. Aunque los ajustes orbitales actuales sitúan el sistema en el dominio resonante exterior más estocástico, es posible que las observaciones futuras puedan cambiar esta imagen y ser más consistentes con la zona interior regular.

La distribución de los sistemas detectados con tránsitos y TTVs alrededor de la RMM 2 : 1 (figura 1.10, círculos rojos) muestra dos características principales que han sido el foco de varios trabajos en los últimos años. En primer lugar, hay un exceso significativo de planetas en la parte superior de la resonancia exacta con una mediana cercana a 2,04 para $P_2/P_1 \in [2,0; 2,1]$. Dado que los radios planetarios de estos planetas son consistentes con masas en el rango de Super-Tierras y Neptunos, se cree generalmente que estos sistemas están fuera del dominio de libración y no son resonantes en su naturaleza. Sin embargo, es curioso ver que los sistemas más distantes, con masas típicamente más grandes, tienen desviaciones más pequeñas a pesar de que su dominio de libración es significativamente mayor.

Una segunda característica en la distribución de los sistemas de tránsitos y TTVs es un aumento significativo en el valor del apartamiento de la resonancia exacta para los planetas más cercanos a la estrella. Delisle y Laskar (2014)

1. Introducción a sistemas planetarios resonantes

también encontraron un desplazamiento más grande cerca de la estrella central, analizando dos subconjuntos: el primero con $P_1 \leq 15$ días y un segundo subconjunto con $P_1 \geq 15$ días. Estos autores atribuyeron esta dicotomía a los efectos de las mareas, que deberían ser importantes para los períodos orbitales por debajo de $P_1 \leq 10 - 20$ días. La figura 1.10 muestra resultados similares, pero va un paso más allá. El desplazamiento de la resonancia nominal observado puede indicar una posible tendencia “suave” en la que la distribución de dichos apartamientos dependa principalmente de la distancia desde la estrella y no tanto del tipo de migración. Observar que para valores de período del planeta interno bajos, $P_1 \sim 1$ día, el desplazamiento es alrededor de 2,05, mientras que para períodos orbitales $P_1 \sim 10^3$ días dicho desplazamiento no supera el 1%. El caso de GJ 876 parece cumplir con esta idea. Aunque se detectan a través de VR y consisten en planetas gigantes, su valor de apartamiento de la resonancia exacta es similar al de los sistemas de Kepler y no a otros casos resonantes más distantes también compuestos de cuerpos gigantes.

El gráfico de la derecha de la figura 1.10 muestra los resultados para la proximidad a la RMM 3 : 2. Actualmente sólo hay un sistema de VR resonante confirmado (HD 45364, [Correia et al., 2009](#)), con $P_1 \sim 226$ días y un desplazamiento del 1%. Por lo tanto, al menos en el caso de los *surveys* de velocidad radial, la población resonante de la 3 : 2 es mucho menos abundante que la observada en la 2 : 1.

Los sistemas de tránsitos y TTVs alrededor de la RMM 3 : 2 también muestran diferencias significativas con respecto a la conmensurabilidad 2 : 1. Por un lado, el desplazamiento existente es notablemente más pequeño con una mediana de $\sim 1,51$, calculada para sistemas con $P_2/P_1 \in [1,5; 1,6]$. Este valor es del mismo orden que el observado para HD 45364, lo que indica una menor dependencia con el período orbital. De hecho, como se señala en [Wang y Ji \(2014\)](#), la distribución de los sistemas de Kepler es consistente con una acumulación cercana a la resonancia exacta con pequeños desplazamientos, y no se observa una brecha significativa para los pequeños valores inferiores a la resonancia nominal. Una segunda característica interesante es una aparente acumulación de sistemas (casi)-resonantes con períodos orbitales $P_1 \sim 10$ días, que tampoco se observa en el caso de la resonancia 2 : 1.

1.4. Conclusiones

Cuando nuestro Sistema Solar era el único que conocíamos era fácil imaginar que otras estrellas contaban con toda una gama de planetas iguales al nuestro. Ahora, cada nuevo planeta descubierto reafirma que las ideas preconcebidas acerca de los sistemas planetarios están hechas para refutarlas: desde sus arquitecturas hasta sus orígenes.

El tamaño de la muestra de exoplanetas aún es demasiado pequeño. Existen

1.4 Conclusiones

varios miles de planetas confirmados, en comparación con los muchos cientos de miles de millones de posibilidades. La buena noticia es que cada descubrimiento tiene una enorme influencia en las probabilidades de encontrar planetas del tamaño de la Tierra (por ejemplo) en otros lugares. Además, intensifica la probabilidad de obtener finalmente una teoría unificada de la formación y evolución de nuestro propio Sistema Solar, aunque aún es un objetivo utópico.

En este capítulo hemos presentado algunas características relevantes de nuestro objeto de estudio a lo largo de esta tesis: los exoplanetas; en particular, aquellos que se encuentran cerca y en resonancia de movimientos medios. Los sistemas resonantes son una fuente de información valiosa para el estudio de la estabilidad de dichos sistemas. Conocer los fenómenos que estabilizan o desestabilizan un sistema nos permite caracterizarlo y descubrir sus orígenes.

Hemos visto que los sistemas exoplanetarios múltiples de baja masa prefieren evitar las resonancias exactas. Esta cualidad distintiva, podría ser evidencia importante sobre los mecanismos de formación de tales sistemas. Y dado que no existe en la literatura una explicación unificada del origen de estos sistemas, en los capítulos subsiguientes intentaremos explicar esta cualidad distintiva desde el punto de vista de la dinámica y de la formación.

1. Introducción a sistemas planetarios resonantes

El Problema de 3 Cuerpos

¿Cómo se mueven tres cuerpos bajo su atracción gravitatoria mutua? Este problema fue estudiado por Isaac Newton, Henri Poincaré, Pierre-Simon Laplace entre otros matemáticos eminentes en los últimos cuatro siglos. Este problema llamado **problema de los tres cuerpos** (P3C) surge en muchos contextos diferentes en la naturaleza: desde los vuelos espaciales hasta sistemas estelares de nuestra galaxia; en los cuales se necesita calcular órbitas con gran precisión.

En este capítulo, describiremos analíticamente el movimiento de dos planetas que orbitan cerca de una resonancia de movimientos medios de primer orden, utilizando la formulación Hamiltoniana. Reduciremos el Hamiltoniano completo para este sistema con órbitas casi circulares y casi coplanares a un sistema de un grado de libertad con un solo parámetro libre (Sessin y Ferraz-Mello, 1984). Seguimos una secuencia de transformaciones canónicas utilizadas originalmente por Wisdom (1986) y Henrard *et al.* (1986) y recientemente por Batygin y Morbidelli (2013a) y Deck *et al.* (2013), entre otros.

2.1. Formulación del problema

Para el desarrollo de esta sección, y las subsiguientes, seguiremos principalmente a Brouwer y Clemence (1961), Murray y Dermott (1999), Ferraz-Mello (2007), Beaugé *et al.* (2007), entre otros.

Sea m_0 la masa de la estrella central y m_1 y m_2 las masas de los planetas que la orbitan. Supongamos que $m_1, m_2 \ll m_0$. Las ecuaciones de movimiento de todos los cuerpos con respecto a un marco de referencia inercial centrado en el baricentro del sistema son:

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = -\mathcal{G} \sum_{j=0, j \neq i}^{N=2} \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (2.1)$$

2. El Problema de 3 Cuerpos

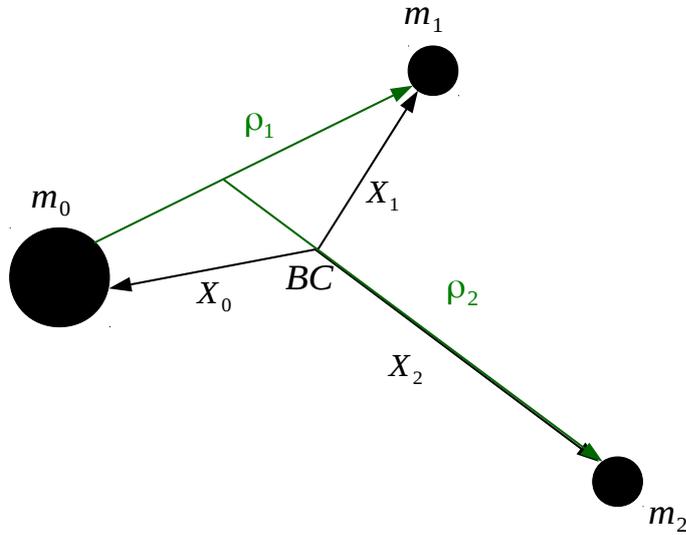


Figura 2.1: Esquema del P3C genérico de masas m_0 , m_1 y m_2 con vectores posición \mathbf{x}_0 , \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 respecto al baricentro del sistema (BC). Los vectores posición de la formulación Jacobiana son ρ_1 y ρ_2 en color verde. Notar que ρ_2 tiene su origen en el baricentro del subsistema formado por los cuerpos con masas m_0 y m_1 .

donde \mathcal{G} denota la constante de gravitación universal y \mathbf{x}_i sus posiciones. Estas posiciones junto con el momento lineal $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{x}}_i$ conforman un conjunto de variables canónicas, y el Hamiltoniano del sistema no es más que la suma de la energía cinética T y la energía potencial V :

$$\hat{H} = T + V = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N=2} \frac{\mathbf{p}_i^2}{m_i} - \mathcal{G} \sum_{i=0}^{N=2} \sum_{j=i+1}^{N=2} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (2.2)$$

Este sistema tiene $3(N + 1)$ grados de libertad, no obstante puede ser reducido a $3N$ grados de libertad. La reducción más utilizada en el estudio del P3C y planetario y en sistemas estelares es la propuesta por Jacobi, que usaremos aquí. Existe otra reducción realizada por Poincaré con la cual resulta más laboriosa trabajar debido a que las coordenadas y velocidades están medidas desde diferentes orígenes.

En la figura 2.1 mostramos esquemáticamente el problema de 3 cuerpos con masas m_0 , m_1 y m_2 con vectores posición \mathbf{x}_0 , \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 respecto al baricentro del sistema (BC). Los vectores posición en la formulación Jacobiana son ρ_1 y ρ_2 en color verde.

2.1 Formulación del problema

2.1.1. Reducción de Jacobi

En la formulación Jacobiana, la posición y la velocidad del planeta con masa m_1 vienen dados en un marco de referencia con origen en m_0 (es decir, en la estrella central), mientras que la posición y velocidad de m_2 están en un marco de referencia con origen en el baricentro de m_0 y m_1 (ver figura 2.1). En el marco de referencia de Jacobi, las coordenadas ρ_i y sus momentos canónicos asociados Π_i vienen dados por:

$$\begin{aligned}\rho_i &= \mathbf{x}_i - \frac{1}{\hat{\sigma}_i} \sum_{j=0}^i m_j \mathbf{x}_j, & i = 1, 2, \\ \hat{\Pi}_i &= \Pi_i - \sum_{j=i+1}^{N=2} \frac{m_j \Pi_j}{\hat{\sigma}_{j-1}}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

donde,

$$\hat{\sigma}_i = \sum_{j=0}^i m_j. \quad (2.4)$$

Observar que Π_i está definido de forma implícita a través de la relación $\hat{\Pi}_i$ (ver Ferraz-Mello *et al.*, 2005, 2011 para los detalles de su construcción).

En estas variables canónicas, la energía cinética es:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{\Pi_i^2}{2\tilde{\beta}_i}, \quad (2.5)$$

donde $\tilde{\beta}_i$ es la masa reducida de la formulación Jacobiana y viene dada por:

$$\tilde{\beta}_i = \frac{m_i \hat{\sigma}_{i-1}}{\hat{\sigma}_i}. \quad (2.6)$$

Finalmente, el Hamiltoniano F del P3C en el formalismo de Jacobi se puede escribir como $F = F_0 + F_1$, donde

$$\begin{aligned}F_0 &= \left(\frac{\Pi_1^2}{2\tilde{\beta}_1} - \frac{\mathcal{G}\hat{\sigma}_1\tilde{\beta}_1}{|\rho_1|} \right) + \left(\frac{\Pi_2^2}{2\tilde{\beta}_2} - \frac{\mathcal{G}\hat{\sigma}_2\tilde{\beta}_2}{|\rho_2|} \right) \\ F_1 &\simeq -\mathcal{G}m_1m_2 \left(\frac{1}{|\rho_1 - \rho_2|} - \frac{\rho_2 \cdot \rho_1}{|\rho_2|^3} \right).\end{aligned}\quad (2.7)$$

F_0 sólo contiene dos términos relacionados al movimiento kepleriano de los dos planetas, y por tanto se lo conoce como *término kepleriano* o *no perturbativo*, mientras que a F_1 se lo conoce como *término perturbativo* o *función perturbadora* debido a la interacción entre m_1 y m_2 . Éste último está formado a su vez por dos términos. El primer término es llamado el *término directo* porque corresponde al efecto

2. El Problema de 3 Cuerpos

del perturbador directamente sobre la masa perturbada, y el segundo es llamado el *término indirecto* debido a que representa el efecto de las perturbaciones sobre la masa central.

Es importante señalar que la expresión para F_1 es aproximada debido a que estamos suponiendo desarrollo en series a primer orden de m_i/m_0 , ya que suponemos que $m_1, m_2 \ll m_0$. Consideramos que m_1 es el planeta interno mientras que m_2 es el planeta externo. F_1 se puede escribir como suma de series de Fourier en los ángulos y series de potencias en las excentricidades (Brouwer y Clemence, 1961; Murray y Dermott, 1999), la cual resulta ser una buena aproximación si las excentricidades orbitales son pequeñas. También se puede expandir en polinomios de Legendre, de la relación de las distancias de los dos planetas a la estrella central. Las expansiones con polinomios de Legendre sólo pueden usarse en el estudio de sistemas jerárquicos donde el cociente de las distancias de los planetas al cuerpo central permanece siempre pequeño. En nuestro trabajo utilizamos la expansión en series de Fourier y potencias.

2.1.2. Variables de Delaunay

Nuestro propósito ahora es obtener los elementos orbitales y las variables de Delaunay correspondientes a las coordenadas relativas introducidas antes, las cuales deben usarse cuando la teoría de perturbaciones canónicas es construída usando F_0 como aproximación no perturbada. Para ello, tenemos que resolver la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi y construir las variables ángulo-acción del problema dado. Para hacerlo, el estudio del caso planar es preferible debido a que todas las características dinámicas aparecen en este caso y tiene la ventaja de simplificar los cálculos.

Se pueden definir las variables canónicas de Delaunay en el marco de referencia de Jacobi, las cuales vienen dadas por las acciones (L_i, G_i, H_i) y sus respectivos ángulos (l_i, ω_i, Ω_i):

$$\begin{aligned} L_i &= \tilde{\beta}_i \sqrt{\mathcal{G} \hat{\sigma}_i a_i} \\ G_i &= L_i \sqrt{1 - e_i^2} \\ H_i &= G_i \cos(I_i) \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde $l_i, \omega_i, \Omega_i, a_i, e_i$ e I_i son la anomalía media, el argumento del pericentro, la longitud del nodo ascendente, el semieje mayor, la excentricidad y la inclinación de los planetas. $i = 1$ representa al planeta interno e $i = 2$ al planeta externo. Por definición, los semiejes mayores y las excentricidades son:

$$a_i = \frac{\tilde{\beta}_i^2 \mathcal{G} \hat{\sigma}_i \rho_i}{2\tilde{\beta}_i^2 \mathcal{G} \hat{\sigma}_i - \rho_i \Pi_i^2} \quad ; \quad e_i = \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_i}{a_i}\right)^2 + \frac{\rho_i \cdot \Pi_i^2}{\tilde{\beta}_i^2 \mathcal{G} \hat{\sigma}_i a_i}}. \quad (2.9)$$

2.2 Dinámica Resonante

Sin embargo, se suelen usar las variables modificadas de Delaunay:

$$\begin{aligned} L_i &= L_i \\ S_i = L_i - G_i &= L_i(1 - \sqrt{1 - e_i^2}) \\ H_i - G_i &= G_i(1 - \cos(I_i)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

con ángulos conjugados $(\lambda_i, -\varpi_i, -\Omega_i)$. λ_i y ϖ_i son la longitud media y la longitud del pericentro de los planetas.

Con estas nuevas variables y definiciones, el Hamiltoniano toma la siguiente forma:

$$F = F_0 + F_1 = -\frac{\mu_1}{2L_1^2} - \frac{\mu_2}{2L_2^2} + F_1(a_i, e_i, \lambda_i, \varpi_i, \Omega_i), \quad (2.11)$$

donde

$$\mu_i = \mathcal{G}^2 \hat{\sigma}_i^2 \tilde{\beta}_i^3. \quad (2.12)$$

2.2. Dinámica Resonante

Cuando se expresa el Hamiltoniano en términos de los elementos orbitales, F_1 se puede desarrollar en series de potencias en excentricidades e inclinaciones, con cada término proporcional a una función periódica de una combinación lineal de los ángulos orbitales.

Para sistemas lejos de las resonancias de movimiento medio, existen términos de corto período (se promedian a cero en escala de tiempo mucho mayor a su período orbital) y seculares (variaciones en tiempos largos; éstos términos son independientes de los ángulos rápidos λ_i). Cuando los movimientos medios de los planetas (n_i) forman una relación racional $n_2/n_1 \sim p/(p+q)$, con p y q números enteros positivos, el sistema está cerca de una RMM de orden q -ésimo, y todos los términos periódicos en el Hamiltoniano que son funciones de la combinación $(p+q)\lambda_2 - p\lambda_1$ variarán lentamente (en relación con las longitudes medias de los planetas).

Estamos interesados en la dinámica a largo plazo del sistema de dos planetas, por lo que eliminamos todos los términos de corto período promediándolos. Esto es una transformación canónica entre el Hamiltoniano completo y el Hamiltoniano promediado. Formalmente, este promedio se realiza con el método de [Hori \(1966\)](#), y deberíamos definir nuevas variables *medias* que no son equivalentes a los valores osculantes. Sin embargo, para no alterar la notación, supongamos que ambas variables se representan de la misma forma. Después del promediado sólo quedan términos seculares y resonantes en el Hamiltoniano.

Los términos seculares aparecen sólo en el segundo orden en las excentricidades e inclinaciones, o más alto orden. El término resonante aparece en el orden q -ésimo en excentricidades y orden q o más alto en inclinaciones. Los términos

2. El Problema de 3 Cuerpos

de RMM de primer orden, con $q = 1$ o $n_1/n_2 = P_2/P_1 \sim (p+1)/p$, aparecen en excentricidades de primer orden (aunque también lo hacen en el segundo orden de las inclinaciones), (Brouwer y Clemence, 1961; Murray y Dermott, 1999).

Si consideramos sólo el caso planar, todos los términos que dependen de I_i y de Ω_i no aparecen en el Hamiltoniano, por lo que las variables del sistema se reducen. En esta situación, introducimos una nueva transformación a las variables canónicas resonantes (por ejemplo, Ferraz-Mello, 1988):

$$\begin{aligned} J_1 &= L_1 + p(S_1 + S_2) & ; & & \lambda_1 \\ J_2 &= L_2 - (p+q)(S_1 + S_2) & ; & & \lambda_2 \\ S_1 &= L_1 - G_1 & ; & & \theta_1 \\ S_2 &= L_2 - G_2 & ; & & \theta_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde θ_i son denominados ángulos resonantes o ángulos críticos y sus expresiones son:

$$q\theta_1 = (p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 - q\omega_1 \quad \text{y} \quad q\theta_2 = (p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 - q\omega_2. \quad (2.14)$$

La función perturbadora promediada dependerá sólo de los ángulos resonantes y ambas longitudes medias serán cíclicas, por lo que J_1 y J_2 serán constantes de movimiento. La variación en el tiempo de L_i y S_i de cualquier condición inicial será tal que $J_1 = \text{cte}$ y $J_2 = \text{cte}$. Luego, el Hamiltoniano viene dado por:

$$F = -\frac{\mu_1}{2L_1^2} - \frac{\mu_2}{2L_2^2} + F_1(a_i, e_i, \theta_i). \quad (2.15)$$

El siguiente paso es encontrar la forma funcional explícita de F_1 en las variables canónicas. Para ello usamos las expansiones a segundo orden en excentricidades presentadas, por ejemplo, en Brouwer y Clemence (1961) y Murray y Dermott (1999). Considerando RMMs de primer orden ($q = 1$), sólo nos quedamos con aquellos términos resonantes a primer orden en excentricidades, es decir no consideramos los términos seculares ya que no afectan a la dinámica resonante (Yoder, 1973; Wisdom, 1980; Sessin y Ferraz-Mello, 1984, entre otros). Resulta que la función perturbadora viene dada por:

$$F_1 \simeq -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{a_2} [\hat{g}_1(\alpha)e_1 \cos(\theta_1) + \hat{g}_2(\alpha)e_2 \cos(\theta_2)], \quad (2.16)$$

donde $\alpha = a_1/a_2$, y los coeficientes $\hat{g}_1(\alpha)$ y $\hat{g}_2(\alpha)$ son una combinación de coefi-

2.2 Dinámica Resonante

cientes de Laplace $b_{1/2}^{(j)}(\alpha)$ y sus derivadas D_α dados por:

$$\begin{aligned}\hat{g}_1(\alpha) &= -\frac{1}{2}[2(p+1) + \alpha D_\alpha] b_{1/2}^{(p+q)}(\alpha) = -\frac{1}{2}g_1(\alpha) \\ \hat{g}_2(\alpha) &= \frac{1}{2}[-1 + 2(p+1) + \alpha D_\alpha] b_{1/2}^{(p+q-1)}(\alpha) - \frac{\delta_{p,1}}{2\alpha^2} = \frac{1}{2}g_2(\alpha).\end{aligned}\quad (2.17)$$

El segundo término de $\hat{g}_2(\alpha)$ es la contribución de la parte indirecta de la función perturbadora, y está sólo presente en el caso de RMM 2 : 1 (Brouwer y Clemence, 1961; Murray y Dermott, 1999).

En una primera aproximación, podemos escribir el momento modificado de Delaunay S_i como $S_i \simeq \frac{1}{2}L_i e_i^2$, por lo que la excentricidad viene dada por $e_i \simeq \sqrt{2S_i/L_i}$. Esta aproximación es adecuada incluso para valores de la excentricidad cerca de 0,5. Además, despreciamos las posibles derivadas parciales de la función perturbadora con respecto a cualquiera de los semiejes mayores. Con estas aproximaciones, F_1 se puede expresar como:

$$F_1 = A_1 \sqrt{2S_1} \cos(\theta_1) - A_2 \sqrt{2S_2} \cos(\theta_2), \quad (2.18)$$

donde,

$$A_i = \frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{2a_2 \sqrt{L_i}} g_i(\alpha). \quad (2.19)$$

El Hamiltoniano del P3C en las nuevas variables y considerando sólo los términos resonantes viene dado por:

$$F = -\frac{\mu_1}{2L_1^2} - \frac{\mu_2}{2L_2^2} + A_1 \sqrt{2S_1} \cos(\theta_1) - A_2 \sqrt{2S_2} \cos(\theta_2). \quad (2.20)$$

2.2.1. Soluciones resonantes estacionarias

El sistema promediado dado por la ecuación (2.20) es un sistema de dos grados de libertad. Una característica importante del sistema es que existen soluciones estacionarias (Beaugé *et al.*, 2003; Ferraz-Mello *et al.*, 2003; Lee y Peale, 2003). Éstas están definidas por las ecuaciones:

$$\frac{dS_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \theta_i} = 0 \quad \frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial S_i} = 0. \quad (2.21)$$

Estas expresiones son tales que S_i y θ_i son constantes excepto para los términos de corto período eliminados por la promediación y para las contribuciones de órdenes más altas. Si S_i son constantes significa que los a_i y e_i son constantes en estas soluciones. Si θ_i son constantes significa que $\Delta\omega = \theta_1 - \theta_2$ es constante, por lo que los pericentros se mueven con la misma velocidad, esto quiere decir que su separación mutua no varía. Este estado relativo fijo en sistemas resonantes es conocido como *corrotación apsidal*.

2. El Problema de 3 Cuerpos

La primera ecuación dice que las soluciones estacionarias se encuentran en los extremos de la función con respecto a las variables θ_i . Estos extremos sólo dependen de las relaciones de masas de los dos planetas y de sus excentricidades (constantes en la solución estacionaria). Resulta entonces,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_i} = \mp A_i \sqrt{2S_i} \sin(\theta_i) = 0, \quad \text{sí y sólo si,} \quad \theta_i = 0, \pm\pi. \quad (2.22)$$

La segunda ecuación sí depende de las masas, pero más fuertemente del cociente de ellas. Resulta,

$$\frac{\partial F}{\partial S_i} = n_2(p+1) - n_1 p + \frac{\partial F_1}{\partial S_i} = 0, \quad \text{sí y sólo si,} \quad \frac{A_1 \cos(\theta_1)}{\sqrt{2S_1}} = \frac{A_2 \cos(\theta_2)}{\sqrt{2S_2}}. \quad (2.23)$$

Expresando la ecuación (2.23) en elementos orbitales se puede obtener una clara relación entre las excentricidades, los semiejes mayores y los cocientes de masas de ambos planetas.

Para las ecuaciones (2.21) se pueden buscar las soluciones de corrotación apsidal (ACR, según sus siglas en inglés y definido en [Beaugé et al., 2003, 2006](#)) en el caso de las RMMs. Nuestro propio Sistema Solar tiene ejemplos de estas resonancias de corrotación. Uno de ellos es el bien conocido par de satélites Io-Europa que se encuentran en una RMM 2 : 1 y están en resonancia de corrotación (ver [Ferraz-Mello, 1979](#)). Ambos ángulos resonantes θ_i y consecuentemente $\Delta\omega$, oscilan (con muy pequeña amplitud) alrededor de valores fijos. La ACR exacta está definida, en este caso, para $\theta_1 = 0$ y $\Delta\omega = \pi$. Este caso se denomina ACR-(0, π) o *anti-alineado*.

El sistema exoplanetario resonante GJ 876, también tiene resonancia de corrotación, aunque en este caso las variables angulares oscilan alrededor de $\theta_1 = 0$ y $\Delta\omega = 0$ (ver [Laughlin et al., 2005](#)). Este caso se denomina ACR-(0, 0) o *alineado*.

2.2.2. Reducción a un grado de libertad de F

El Hamiltoniano (2.20) es un sistema de 2 grados de libertad y como tal es muy difícil para estimar soluciones cerca de una resonancia. [Sessin y Ferraz-Mello \(1984\)](#) demostraron que este Hamiltoniano resonante se puede reducir a un grado de libertad. Por supuesto no podemos esperar que este sistema reducido reproduzca toda la dinámica del P3C, pero si nos dará una muy buena caracterización de éste.

[Wisdom \(1986\)](#) mostró que la transformación de Sessin puede ser vista como una rotación canónica. Siguiendo los pasos de [Henrard et al. \(1986\)](#), definimos las variables canónicas regulares:

$$K_i = \sqrt{2S_i} \cos(\theta_i) \quad H_i = \sqrt{2S_i} \sin(\theta_i), \quad (i = 1, 2) \quad (2.24)$$

2.2 Dinámica Resonante

donde $S_i = \frac{1}{2}(K_i^2 + H_i^2)$. Luego, el Hamiltoniano reducido puede ser escrito como:

$$F = -\frac{\mu_1}{2L_1} - \frac{\mu_2}{2L_2} + A_1 K_1 - A_2 K_2, \quad (2.25)$$

donde,

$$\begin{aligned} L_1 &= J_1 - \frac{p}{2}(K_1^2 + H_1^2 + K_2^2 + H_2^2) \\ L_2 &= J_2 + \frac{p+1}{2}(K_1^2 + H_1^2 + K_2^2 + H_2^2). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Definimos un nuevo conjunto de variables canónicas (K'_1, H'_1, K'_2, H'_2) dados en términos de las variables originales como una rotación en un ángulo $\tilde{\gamma}$:

$$\begin{aligned} K'_1 &= K_1 \cos(\tilde{\gamma}) + K_2 \sin(\tilde{\gamma}) \\ K'_2 &= -K_1 \sin(\tilde{\gamma}) + K_2 \cos(\tilde{\gamma}) \\ H'_1 &= H_1 \cos(\tilde{\gamma}) + H_2 \sin(\tilde{\gamma}) \\ H'_2 &= -H_1 \sin(\tilde{\gamma}) + H_2 \cos(\tilde{\gamma}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Las variables ángulo-acción asociadas a este nuevo conjunto son:

$$S'_i = \frac{1}{2}(K_i'^2 + H_i'^2) \quad \tilde{\theta}_i = \arctan(H'_i/K'_i). \quad (2.28)$$

Dado que la rotación no afecta a las distancias, las variables de Delaunay L_i expresadas en (2.26) conservan su forma:

$$\begin{aligned} L_1 &= J_1 - p(S'_1 + S'_2) \\ L_2 &= J_2 + (p+1)(S'_1 + S'_2), \end{aligned} \quad (2.29)$$

y la función perturbadora del Hamiltoniano resonante (2.25) es:

$$F_1 = [A_1 \cos(\tilde{\gamma}) - A_2 \sin(\tilde{\gamma})]K'_1 - [A_1 \sin(\tilde{\gamma}) + A_2 \cos(\tilde{\gamma})]K'_2. \quad (2.30)$$

Ahora, elegimos el ángulo de rotación de forma tal que:

$$\sin(\tilde{\gamma}) = -\frac{A_2}{\tilde{A}} \quad ; \quad \cos(\tilde{\gamma}) = \frac{A_1}{\tilde{A}}, \quad (2.31)$$

donde $\tilde{A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ es un tipo de valores promediados entre las magnitudes de ambos términos resonantes. Con esta elección de $\tilde{\gamma}$, el segundo término de (2.30) se cancelará y el Hamiltoniano resonante reducido será dado por:

$$F = -\frac{\mu_1}{2L_1^2} - \frac{\mu_2}{2L_2^2} + \tilde{A} \sqrt{2S'_1} \cos(\tilde{\theta}_1). \quad (2.32)$$

2. El Problema de 3 Cuerpos

Hemos reducido el P3C completo a un grado de libertad considerando sólo los términos resonantes. Las nuevas variables ángulo-acción son $(S'_1, \tilde{\theta}_1)$ y tiene una nueva integral de movimiento dada por S'_2 conocida como la *integral de Ses-sin*. El Hamiltoniano reducido tiene la misma forma funcional que el dado por el Segundo Modelo Fundamental de la Resonancia (SFMR, [Henrard y Lemaître, 1983](#)) válido para el P3C restringido circular (P3CRC).

2.2.3. Integrales de movimiento

Recordemos que comenzamos nuestro análisis con cuatro grados de libertad y redujimos el problema a uno solo. En consecuencia, tenemos tres integrales de movimiento, las cuales son:

$$\begin{aligned} J_1 &= L_1 + p(S_1 + S_2) = L_1 + p(S'_1 + S'_2) = \text{cte.} \\ J_2 &= L_2 - (p+1)(S_1 + S_2) = L_2 - (p+1)(S'_1 + S'_2) = \text{cte.} \\ S'_2 &= \left(\frac{A_2}{\tilde{A}}\right)^2 S_1 + \left(\frac{A_1}{\tilde{A}}\right)^2 S_2 + \left(\frac{A_2}{\tilde{A}}\right)\left(\frac{A_1}{\tilde{A}}\right)\sqrt{2S_1}\sqrt{2S_2}\cos(\omega_2 - \omega_1) = \text{cte.} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Combinando las dos primeras ecuaciones se pueden obtener dos expresiones distintas para las constantes:

$$\begin{aligned} J_{\text{tot}} &= J_1 + J_2 = L_1 + L_2 - S_1 - S_2 = L_1 + L_2 - S'_1 - S'_2 \\ \mathcal{P} &= (p+1)J_1 + pJ_2 = (p+1)L_1 + pL_2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

La primera expresión es el momento angular total del sistema, y es constante en un marco de referencia canónico. J_{tot} escrito en elementos orbitales define un acoplamiento entre las excentricidades; cuando una crece, la otra decrece de manera que J_{tot} permanece constante. La segunda expresión, llamada *parámetro espacial* ([Michtchenko y Ferraz-Mello, 2001](#); [Michtchenko et al., 2008a](#)), introduce un acoplamiento similar, pero esta vez entre los semiejes mayores de los planetas. La invarianza de \mathcal{P} garantiza que ambos semiejes oscilan en contrafase y con amplitudes inversamente proporcionales a sus masas planetarias.

El resultado más importante viene de reescribir las expresiones (2.33) de otra manera:

$$L_1 + pS'_1 = N_1 = \text{cte.} \quad L_2 - (p+1)S'_1 = N_2 = \text{cte.}, \quad (2.35)$$

donde la invarianza de N_1 nos dice cómo el semieje mayor del planeta interno varía en relación a S'_1 , mientras N_2 lo hace para el planeta externo.

2.2.4. La forma cuadrática de F

Vamos a expandir F_0 en series de potencias de S'_1 . Para ello definimos el valor de L_i en la resonancia exacta como:

2.3 Conclusiones

$$\frac{\mu_i}{L_{i,\text{res}}^3} \equiv n_{i,\text{res}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}\hat{\sigma}_i}{a_{i,\text{res}}^3}}, \quad i = 1, 2, \quad (2.36)$$

y consideramos sólo condiciones iniciales cercanas a la resonancia exacta, de modo que cualquier valor de L_i está próximo a $L_{i,\text{res}}$. Entonces, podemos expandir la parte no perturbada de F como una serie de Taylor alrededor de $(L_i - L_{i,\text{res}})$:

$$\frac{\mu_i}{2L_i^2} = \frac{\mu_i}{2L_{i,\text{res}}^2} - \frac{\mu_i}{L_{i,\text{res}}^3}(L_i - L_{i,\text{res}}) + \frac{3}{2} \frac{\mu_i}{L_{i,\text{res}}^4}(L_i - L_{i,\text{res}})^2 + \dots \quad (2.37)$$

Despreciando los términos constantes y de más alto orden, e introduciendo esta serie truncada en la parte no perturbada de (2.32) obtenemos:

$$F_0 \simeq 4(n_{1,\text{res}}L_1 + n_{2,\text{res}}L_2) - \frac{3}{2} \left(\frac{n_{1,\text{res}}}{L_{1,\text{res}}} L_1^2 + \frac{n_{2,\text{res}}}{L_{2,\text{res}}} L_2^2 \right). \quad (2.38)$$

El siguiente paso es introducir las expresiones de L_i obtenidas a partir de la ecuación (2.35) en (2.38). Luego, podemos escribir la aproximación cuadrática de la parte no perturbada del Hamiltoniano como:

$$F_0 = -\frac{n_{2,\text{res}}}{L_{2,\text{res}}} (\hat{A}_0 S_1'^2 + \hat{A}_1 S_1') = -\frac{1}{\tilde{\beta}_2 a_{2,\text{res}}^2} (\hat{A}_0 S_1'^2 + \hat{A}_1 S_1'), \quad (2.39)$$

donde \hat{A}_0 y \hat{A}_1 son constantes positivas que dependen sólo de p y las masas:

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= \frac{3}{2}(p+1) \left(p+1 + p \frac{L_{2,\text{res}}}{L_{1,\text{res}}} \right) \\ \hat{A}_1 &= 3(p+1) \left(N_2 - N_1 \frac{L_{2,\text{res}}}{L_{1,\text{res}}} \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Finalmente, el Hamiltoniano reducido de la ecuación (2.32) queda expresado como:

$$F = -\frac{1}{\tilde{\beta}_2 a_{2,\text{res}}^2} (\hat{A}_0 S_1'^2 + \hat{A}_1 S_1') + \tilde{A} \sqrt{2S_1'} \cos(\tilde{\theta}_1), \quad (2.41)$$

donde notar que \tilde{A} debe estar evaluado en la resonancia.

2.3. Conclusiones

El Hamiltoniano 2.41, expresado como el SMFR, posee la misma forma que el Hamiltoniano del P3C restringido en la vecindad de una RMM, salvo de las diferencias de interpretación de las variables. Esto significa que la dinámica resonante de dos planetas es equivalente a la del P3C restringido. Entonces, nuestro siguiente objetivo es analizar con más detalle el P3CR; motivo del siguiente capítulo.

2. El Problema de 3 Cuerpos

CAPÍTULO 3

El P3C Restringido y el SMFR

Para poder relacionar de un modo más fácil la dinámica generada por el SMFR con el criterio de estabilidad desarrollado en el capítulo siguiente, usaremos el problema de 3 cuerpos restringido (P3CR) como modelo físico. En este capítulo estudiamos la topología del SMFR y su dinámica para hallar las principales características del sistema. Recordemos que estamos interesados únicamente en estudiar la dinámica resonante por lo que nos centramos sólo en este aspecto.

Para el desarrollo de este capítulo, seguiremos el trabajo realizado principalmente por [Brouwer y Clemence \(1961\)](#), [Murray y Dermott \(1999\)](#), [Ferraz-Mello \(2007\)](#), [Beaugé *et al.* \(2007\)](#), entre otros.

3.1. Hamiltoniano resonante

Consideremos un sistema baricéntrico cerca de m_0 , nuestro problema de interés puede ser resumido de la siguiente manera. Asumimos una partícula con masa m (despreciable) orbitando una estrella central con masa m_0 y perturbada por un planeta con masa m_1 . Denotaremos con a al semieje mayor osculador de la partícula, e su excentricidad, I su inclinación, λ la longitud media, ϖ la longitud del pericentro y Ω la longitud del nodo ascendente. Los elementos orbitales con subíndice 1 corresponden al perturbador, cuya órbita se considera exterior a la de la partícula ($a < a_1$). Además, asumimos que todo movimiento está restringido al plano.

Para el P3CR, las variables de Delaunay modificadas dadas por la ecuaciones (2.11) se reducen a:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a} & ; & \lambda \\ S &= \sqrt{\mu a}(1 - \sqrt{1 - e^2}) & ; & -\varpi \\ \Lambda & & ; & \lambda_1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

3. El P3C Restricto y el SMFR

donde, $\mu = \mathcal{G}m_0$. Dado que la longitud del pericentro del planeta es constante, no es una variable del sistema dinámico. Λ es el momento canónico asociado a λ_1 , y su valor no se conoce a priori. Las variables ángulo-acción (Λ, λ_1) son introducidas para que el Hamiltoniano sea autónomo (constante para cualquier instante), y por tanto ahora estamos en un espacio de fase extendido.

El Hamiltoniano del sistema en el espacio de fase extendido puede ser escrito como:

$$F(L, S, \Lambda, \lambda, \varpi, \lambda_1) = -\frac{\mu^2}{2L^2} + n_1\Lambda - R(L, S, \lambda, \varpi, \lambda_1, a_1, e_1, \varpi_1), \quad (3.2)$$

donde n_1 es el movimiento medio del perturbador y R representa la función perturbadora debida a las perturbaciones gravitacionales de m_1 .

Ahora suponemos que la partícula sin masa se encuentra en la vecindad de una resonancia de movimiento medio genérica $(p+q)/p$ con el perturbador, tal que

$$(p+q)n_1 - pn \simeq 0, \quad (3.3)$$

donde n es el movimiento medio de la partícula. Entonces ahora, al igual que en el caso del P3C, es conveniente introducir un conjunto de variables canónicas resonantes $(S, N, \Lambda', \sigma, \nu, Q)$, las cuales están relacionadas a las variables de Delaunay a través de

$$\begin{aligned} S & & ; & \quad q\sigma = (p+q)\lambda_1 - p\lambda - q\varpi \\ N = S - L - \Lambda & & ; & \quad q\nu = -(p+q)\lambda_1 + p\lambda + q\varpi_1 \\ \Lambda' = p\Lambda + (p+q)L & & ; & \quad qQ = \lambda - \lambda_1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde qQ es el ángulo sinódico y $\theta_2 = -\nu$ (ver ec. (2.14)). La transformación inversa puede ser obtenida fácilmente después de algunas manipulaciones algebraicas, y se tiene:

$$\begin{aligned} S & & ; & \quad M = \sigma + (p+q)Q \\ L = \frac{p}{q}(N - S) + \frac{1}{q}\Lambda' & & ; & \quad M_1 = -\nu + pQ \\ \Lambda = -\frac{(p+q)}{q}(N - S) - \frac{1}{q}\Lambda' & & ; & \quad \varpi = \varpi_1 - \sigma - \nu, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde M y M_1 son las anomalías medias. Dado que la transformación $(L, S, \Lambda, \lambda, \varpi, \lambda_1) \rightarrow (S, N, \Lambda', \sigma, \nu, Q)$ es canónica, el Hamiltoniano del espacio de fase extendido se conserva.

En la vecindad de una resonancia de movimiento medio, tanto σ como ν son ángulos que varían lentamente (es decir, variables de largo período) mientras que Q tiene una alta frecuencia del orden de la inversa de los períodos orbitales de los cuerpos. Además, la amplitud de las variaciones de los períodos cortos suelen ser mucho menores que sus contrapartes resonantes y seculares, y por lo

3.1 Hamiltoniano resonante

tanto tienen poco efecto sobre la evolución a largo plazo del sistema. Esto es útil para el promediado del Hamiltoniano con respecto a Q , que además, elimina las variaciones de corto período.

El promediado se realiza generalmente a través de una técnica de perturbación tal como el método de Hori (Hori, 1966, ver también Ferraz-Mello, 2007). Básicamente, buscamos una transformación canónica tipo Lie

$$B(S^*, N^*, \Lambda'^*, \sigma^*, \nu^*, Q^*) : (S, N, \Lambda', \sigma, \nu, Q) \rightarrow (S^*, N^*, \Lambda'^*, \sigma^*, \nu^*, Q^*) \quad (3.6)$$

para nuevas variables (primadas) tales que el nuevo Hamiltoniano F^* es independiente de Q^* . Aunque la construcción de B es complicada cuando se extiende a altos órdenes del parámetro pequeño (aquí la relación m_1/m_0), cuando se restringe a primer orden puede ser simplemente pensado como la integral definida de F sobre Q en el intervalo $[0; 2\pi]$. El mismo procedimiento también se puede realizar numéricamente, realizando una expansión semi-analítica para el Hamiltoniano promediado (Moons y Morbidelli, 1993; Beauge, 1994).

Independientemente del método adoptado, obtenemos una nueva función F^* ($S^*, N^*, \Lambda'^*, \sigma^*, \nu^*$) que es cíclica en Q^* . Consecuentemente, el correspondiente momento canónico Λ'^* es una integral de movimiento del sistema. Analizando las transformaciones (3.5) percibimos que Λ'^* sólo aparece como una constante aditiva en la relación entre los momentos. Así, independientemente de las condiciones iniciales, podemos elegir $\Lambda'^* = 0$ y simplificar las transformaciones Hamiltonianas y canónicas.

En las variables promediadas, los momentos de Delaunay y resonantes están relacionados a través de:

$$L^* = \frac{p}{q}(N^* - S^*) \quad ; \quad \Lambda^* = -\frac{(p+q)}{q}(N^* - S^*) = -\frac{(p+q)}{p}L^*, \quad (3.7)$$

y el Hamiltoniano promediado F^* se puede escribir como:

$$F^*(S^*, N^*, \sigma^*, \nu^*) = F_0^*(S^*, N^*) - R^*(S^*, N^*, \sigma^*, \nu^*), \quad (3.8)$$

donde,

$$F_0^*(S^*, N^*) = -\frac{\mu^2 q^2}{2p^2}(N^* - S^*)^{-2} - \frac{(p+q)}{q}n_1(N^* - S^*) \quad (3.9)$$

y R^* es ahora la función perturbadora promediada en términos de períodos cortos. Así, conseguimos reducir el problema a dos grados de libertad y eliminar la variable Λ del sistema.

Ahora, haremos una aproximación cuadrática de $F_0^*(S^*, N^*)$ cuya expresión viene dada por (3.9). El primer paso será expresar $F_0^*(S^*, N^*)$ en función de los

3. El P3C Restricto y el SMFR

momentos de Delaunay utilizando la ecuación (3.7):

$$F_0^*(S^*, N^*) = F_0^*(L^*) = -\frac{\mu^2}{2L^{*2}} - \frac{(p+q)}{p}n_1L^*, \quad (3.10)$$

Al igual que antes el valor de L^* en la resonancia exacta es:

$$\frac{\mu^2}{L_{\text{res}}^{*3}} = n_{\text{res}}^* = \frac{(p+q)}{p}n_1, \quad (3.11)$$

y consideramos sólo condiciones iniciales cercanas a la resonancia exacta, de modo que cualquier valor de L^* está próximo a L_{res}^* . Entonces, podemos expandir la parte integrable de F^* como una serie de Taylor alrededor de L_{res}^* :

$$\frac{\mu^2}{2L^{*2}} = \frac{\mu^2}{2L_{\text{res}}^{*2}} - \frac{\mu^2}{L_{\text{res}}^{*3}}(L^* - L_{\text{res}}^*) + \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{L_{\text{res}}^{*4}}(L^* - L_{\text{res}}^*)^2 + \dots \quad (3.12)$$

Despreciando los términos de más alto orden, podemos reescribir esta expresión como:

$$\frac{\mu^2}{2L^{*2}} \simeq \frac{3\mu^2}{L_{\text{res}}^{*2}} - \frac{4\mu^2}{L_{\text{res}}^{*3}}L^* + \frac{3}{2} \frac{\mu^2}{L_{\text{res}}^{*4}}L^{*2} \quad (3.13)$$

Introduciendo esta serie truncada en la ecuación (3.10) y usando la relación (3.11) podemos aproximar la parte no perturbada como:

$$F_0^*(S^*, N^*) \simeq -A_0(N^* - S^*)^2 + A_1(N^* - S^*), \quad (3.14)$$

donde A_i son constantes positivas que dependen sólo de p, q y las masas:

$$A_0 = \frac{3p^2\mu^2}{2q^2L_{\text{res}}^{*4}} \quad ; \quad A_1 = \frac{3p\mu^2}{qL_{\text{res}}^{*3}}. \quad (3.15)$$

Finalmente, el Hamiltoniano promediado lo podemos escribir como:

$$F^*(S^*, N^*, \sigma^*, \nu^*) \simeq -A_0(N^* - S^*)^2 + A_1(N^* - S^*) - R^*(S^*, N^*, \sigma^*, \nu^*). \quad (3.16)$$

3.1.1. El Problema Circular

Ahora consideramos el caso en donde m_1 se mueve en una órbita circular (es decir, $e_1 = 0$). La función perturbadora promediada es función sólo de σ , porque el ángulo auxiliar ν es cíclico y el momento asociado N^* es una integral de movimiento. De las ecuaciones (3.4) y (3.7) podemos escribir:

$$N^* = S^* + \frac{q}{p}L^* = \sqrt{\mu a^*} \left(\frac{(p+q)}{p} - \sqrt{1 - e^{*2}} \right) = \text{cte.} \quad (3.17)$$

3.1 Hamiltoniano resonante

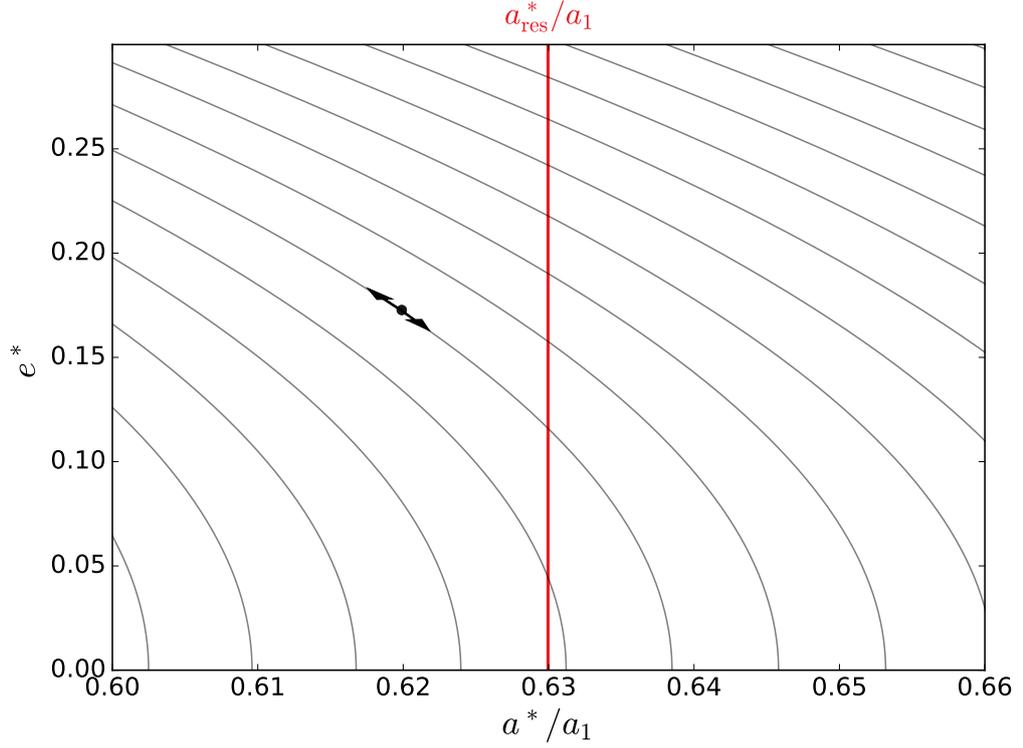


Figura 3.1: Curvas de N^* constantes en el plano $(a^*/a_1, e^*)$ para la RMM 2/1. La resonancia exacta está marcada con una línea roja vertical. El punto negro representa una condición inicial genérica, mientras que las flechas indican las posibles rutas de su evolución.

Esto implica que, dados valores iniciales cualesquiera del semieje mayor medio y excentricidad media, su evolución temporal conservará el valor de N^* . Ambos elementos orbitales no son independientes, sino que están acoplados. Cuando uno aumenta su valor, el otro debería disminuir para compensar tal como muestra la figura 3.1.

Entonces, el Hamiltoniano completo puede ser escrito de la siguiente manera:

$$F^*(S^*, \sigma^*, N^*) = -\frac{\mu^2 q^2}{2p^2} (N^* - S^*)^{-2} - \frac{(p+q)}{q} n_1 (N^* - S^*) - R^*(S^*, \sigma^*, N^*), \quad (3.18)$$

que es un sistema de un grado de libertad parametrizado por N^* . Dado que el valor de F^* debe conservarse a través de cualquier órbita dada, las curvas de nivel del Hamiltoniano en el plano de fase (S^*, σ^*) marcarán las curvas de fase de diferentes condiciones iniciales. En otras palabras, toda la topología de la resonancia puede ser analizada simplemente mirando las curvas de nivel de F^* para diferentes valores de N^* .

Retomamos nuestra atención a la expresión de $R^*(S^*, \sigma^*, N^*)$ adoptada para la mayoría de los modelos de resonancia analíticos. De la expansión de Laplace de la función perturbadora, conservamos sólo los términos resonantes y seculares de

3. El P3C Restricto y el SMFR

más bajo orden, y por tanto escribimos:

$$R^* = \frac{\mathcal{G}m_1}{a_1} \left(\hat{g}_{0,0}(\alpha^*) + \hat{g}_{0,1}(\alpha^*)e^{*2} + \hat{g}_{1,0}(\alpha^*)e^* \cos \sigma^* \right). \quad (3.19)$$

En el caso de las resonancias de primer orden, las expresiones para los coeficientes pueden ser encontrados en [Brouwer y Clemence \(1961\)](#) o [Murray y Dermott \(1999\)](#), y son:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{0,0}(\alpha^*) &= \frac{1}{2}b_{1/2}^{(0)}(\alpha^*) \\ \hat{g}_{0,1}(\alpha^*) &= \frac{1}{8} \left[2\alpha^* D_\alpha + \alpha^{*2} D_\alpha^2 \right] b_{1/2}^{(0)}(\alpha^*) \\ \hat{g}_{1,0}(\alpha^*) &= -\frac{1}{2} \left[2(p+q) + \alpha^* D_\alpha \right] b_{1/2}^{(p+q)}(\alpha^*), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde $D_\alpha \equiv d/d\alpha$ es el operador diferencial, y $b_{1/2}^{(j)}$ son los coeficientes de Laplace. Notar que $\hat{g}_{1,0}(\alpha^*)$ tiene la misma expresión que $\hat{g}_1(\alpha)$ (ver ec. (2.17)).

Haremos dos aproximaciones adicionales. En primer lugar, evaluaremos todos los coeficientes en la resonancia exacta $\alpha_{\text{res}}^* = a_{\text{res}}^*/a_1$. Puesto que la perturbación es pequeña comparada con el Hamiltoniano no perturbado, y estamos interesados sólo en la vecindad de la resonancia exacta, entonces el error cometido aquí no es significativo. En segundo lugar, aproximaremos las excentricidades por:

$$e^* \simeq \sqrt{\frac{2S}{L^*}} \simeq \sqrt{\frac{2S}{L_{\text{res}}^*}}. \quad (3.21)$$

Los mismos argumentos mencionados antes son válidos aquí, y de nuevo el error generado por esta aproximación no es relevante, al menos hasta excentricidades del orden de $e \sim 0,5$.

Introduciendo estas simplificaciones en (3.18) y utilizando la expresión (3.14) para F_0^* , podemos escribir el Hamiltoniano resonante promediado completo para el problema circular como:

$$F^*(S^*, \sigma^*, N^*) = -A_0(N^* - S^*)^2 + A_1(N^* - S^*) - C_1 S^* - C_2 \sqrt{2S^*} \cos \sigma^*, \quad (3.22)$$

donde hemos dejado los términos constantes, y los nuevos coeficientes están dados por

$$C_1 = \frac{\mathcal{G}m_1}{a_1 L_{\text{res}}^*} \hat{g}_{0,1}(\alpha_{\text{res}}^*) \quad ; \quad C_2 = \frac{\mathcal{G}m_1}{a_1 \sqrt{L_{\text{res}}^*}} \hat{g}_{1,0}(\alpha_{\text{res}}^*). \quad (3.23)$$

La expresión (3.22) constituye un modelo analítico muy simple para las resonancias de movimiento medio en el problema de los 3 cuerpos circular y, además la expansión de Taylor de la parte no perturbada, es idéntica al Segundo Modelo Fundamental de la Resonancia (SMFR, [Henrard y Lemaître, 1983](#)). Notar la equi-

3.1 Hamiltoniano resonante

valencia del Hamiltoniano del P3C dado por la ecuación (2.41) y el Hamiltoniano del P3CR dado por (3.22).

3.1.2. Puntos fijos y separatriz

El cálculo de puntos fijos de una cierta función es muy útil en el análisis de su comportamiento. Entonces, buscamos los puntos fijos del Hamiltoniano (3.22) para un dado valor de N^* . Éstos vienen dados por los (S^*, σ^*) que cumplen simultáneamente con la siguiente condición:

$$\frac{dS^*}{dt} = \frac{d\sigma^*}{dt} = 0 \quad (3.24)$$

y que, a partir de las ecuaciones de Hamilton, están asociadas a extremos locales de F^* :

$$\frac{\partial F^*}{\partial \sigma^*} = \frac{\partial F^*}{\partial S^*} = 0. \quad (3.25)$$

Luego, introduciendo la expresión (3.22) en (3.25) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial \sigma^*} &= C_2 \sqrt{2S^*} \sin(\sigma^*) = 0 \\ \frac{\partial F^*}{\partial S^*} &= 2A_0(N^* - S^*) - A_1 - C_1 - \frac{C_2}{\sqrt{2S^*}} \cos(\sigma^*) = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Siguiendo los pasos realizados en el capítulo anterior (ver ec. (2.24)), introducimos las variables canónicas regulares:

$$K = \sqrt{2S^*} \cos(\sigma^*) \quad H = \sqrt{2S^*} \sin(\sigma^*), \quad (3.27)$$

y transformando $(S^*, \sigma^*) \rightarrow (K, H)$, la primera ecuación de (3.26) implica que todos los puntos fijos estarán ubicados en el eje $H = 0$ y corresponden a $\sigma^* = 0$ o $\sigma^* = \pi$. La segunda ecuación requiere un poco de más trabajo pero se reduce a encontrar un valor crítico de N^* que resuelve dicha ecuación.

Usando el resultado previo que $H = 0$, y luego de hacer algunas cuentas algebraicas resulta que

$$K^3 + bK + c = 0, \quad (3.28)$$

donde $b = \frac{1}{A_0}(A_1 + C_1 - 2A_0N^*)$ y $c = \frac{C_2}{A_0}$. K viene dado por las raíces de la ecuación (3.28), las cuales dependen a su vez del signo del discriminante $D = 4(2A_0N^* - A_1 - C_1)^3 - 27A_0C_2^2$. Si $D > 0$, la ecuación tiene tres raíces reales distintas. Si $D = 0$, la ecuación tiene una raíz múltiple y todas las raíces son reales. Si $D < 0$, la ecuación tiene una raíz real y dos complejas.

En la figura 3.2 se muestra la solución de la ecuación (3.28). Se representa la relación entre el valor del coeficiente b y las raíces K obtenidas.

Resulta entonces, que para resonancias de primer orden ($q = 1$), todos los pun-

3. El P3C Restricto y el SMFR

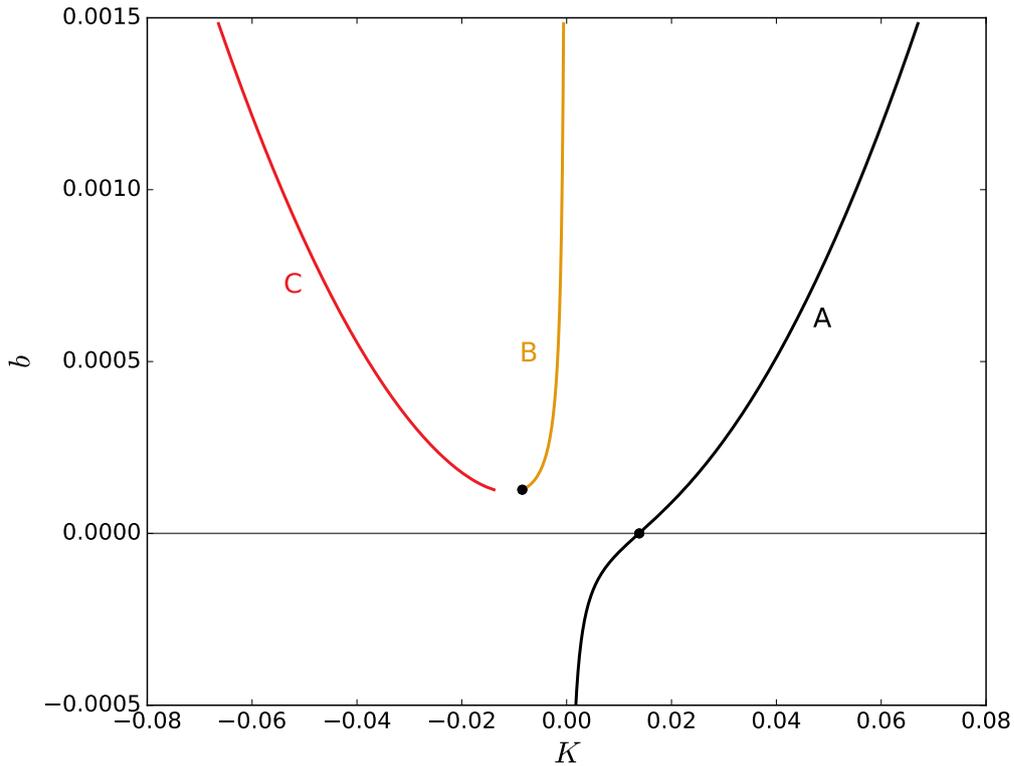


Figura 3.2: Relación entre el valor de b y la posición sobre el eje x de los puntos de equilibrio que se obtienen de (3.26) luego de un cambio de variables. Las ramas A y B definen los puntos de equilibrio estables mientras que la rama C da un punto de equilibrio inestable. El punto de intersección asociado con la resonancia exacta en $b = 0$ es representado con un círculo negro, al igual que la intersección de las ramas estables e inestables.

tos fijos están ubicados en $\sigma^* = 0$ o $\sigma^* = \pi$, y están parametrizados por el valor de N^* (Beauge, 1994). Si este parámetro es menor que un valor crítico (valor correspondiente a $D = 0$)

$$N_c^* = \frac{1}{2A_0} \left[A_1 + C_1 + \left(\frac{27}{4} A_0 C_2^2 \right)^{1/3} \right], \quad (3.29)$$

el sistema contiene un sólo punto fijo (estable) en $\sigma^* = 0$. Por el contrario, si $N^* > N_c$, el Hamiltoniano F^* tiene tres puntos fijos: dos centros (uno ubicado en $\sigma^* = 0$ y el otro en $\sigma^* = \pi$) más un punto inestable en $\sigma^* = \pi$. Los valores correspondientes del momento S^* pueden ser calculados analíticamente resolviendo las ecuaciones de movimiento. Los resultados, dados en funciones trigonométricas y hiperbólicas complejas, pueden ser convertidos de nuevo a a^* y e^* .

La figura 3.3 traza las familias de puntos fijos para la RMM 2:1, adoptando a Júpiter (con la masa actual) como el perturbador. Las curvas grises corresponden a diferentes valores de $N^* = \text{cte.}$, y el valor crítico N_c^* está marcado por una curva azul. El semi-plano superior (valores positivos de $e^* \cos \sigma^*$) corresponde a

3.1 Hamiltoniano resonante

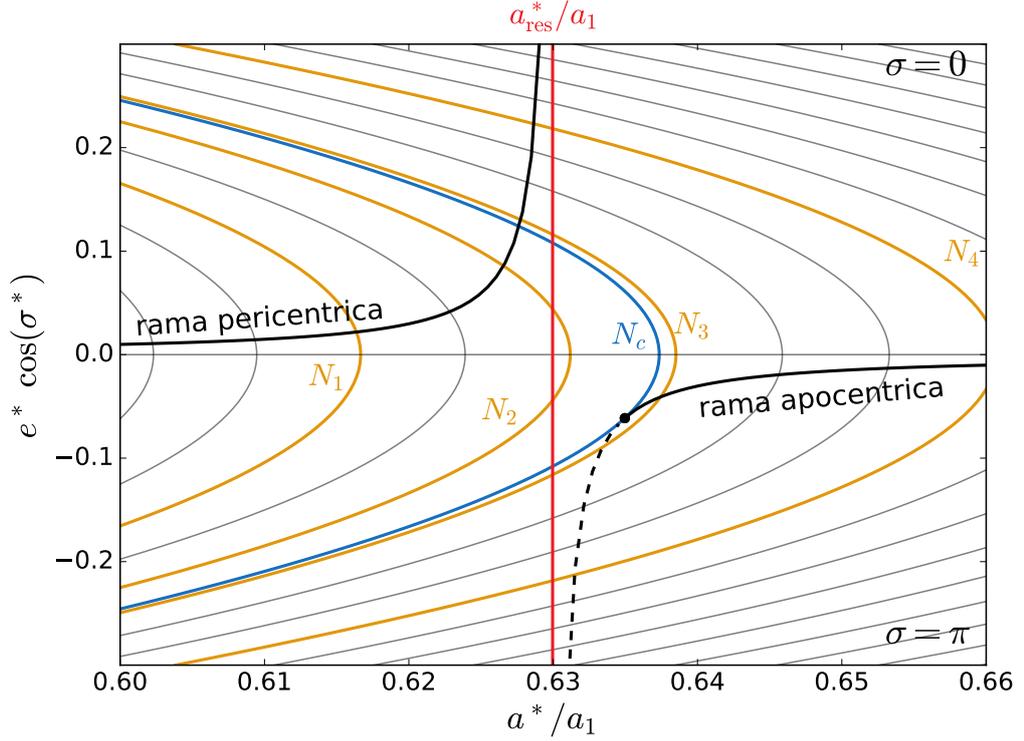


Figura 3.3: Las curvas negras muestran las familias de puntos fijos para la RMM 2 : 1 en el plano $(a^*/a_1, e^*)$, considerando a Júpiter como el perturbador. El semi-plano superior (valores positivos de $e^* \cos \sigma^*$) corresponde a $\sigma^* = 0$, mientras que el semi-plano inferior corresponde a $\sigma^* = \pi$. La posición del semieje mayor medio de la resonancia nominal está marcada por una línea vertical roja. Las curvas grises corresponden a diferentes valores de $N^* = \text{cte.}$ (con $N_1 < \dots < N_4$). El valor crítico N_c^* está marcado por una curva de color azul. Figura adaptada de Ramos *et al.* (2015).

$\sigma^* = 0$, y los puntos fijos definen lo que se conoce usualmente como la *rama pericéntrica*. Todos los puntos fijos de la rama pericéntrica son linealmente estables. Tienen baja excentricidad lejos de la resonancia exacta (mostrada aquí como una línea vertical roja), pero el valor de e^* aumenta cuando $a^* \rightarrow a_{\text{res}}^*$. Sin embargo, en ningún caso el punto fijo interseca la ubicación nominal de la resonancia, pero siempre se encuentra en valores más pequeños del semieje mayor.

El semi-plano inferior corresponde a $\sigma^* = \pi$ (valores negativos de $e^* \cos \sigma^*$). Para bajas excentricidades, las soluciones son estables de nuevo, y forman lo que se conoce como la *rama apocéntrica*. Para altas excentricidades (curva discontinua) las soluciones son inestables y corresponden a los puntos fijos hiperbólicos de los cuales provienen la separatriz de las regiones de libración. Esto significa que, una partícula sin masa puede tener movimiento alrededor de la rama apocéntrica sólo para una excentricidad baja y para un semieje mayor significativamente mayor (y desplazado de) a_{res}^*/a_1 .

Ferraz-Mello (1988) encontró una expresión simple relacionando el semieje mayor y la excentricidad para todos los puntos fijos. Aunque sus cálculos emplearon la expansión asimétrica de la función perturbadora (Ferraz-Mello, 1987), el

3. El P3C Restricto y el SMFR

mismo procedimiento puede seguirse en el caso del SMFR. Comenzamos escribiendo la condición $d\sigma^*/dt = 0$ para los puntos fijos como

$$2A_0(N^* - S^*) - A_1 - C_1 - \frac{C_2}{\sqrt{2S^*}} \cos \sigma^* = 0, \quad (3.30)$$

donde como ya dedujimos el ángulo resonante es igual a cero o π . En lugar de expresar esto como una ecuación algebraica en S^* , recordamos que $L^* = p(N^* - S^*)/q$ de la cual podemos simplemente obtener:

$$\frac{C_2}{\sqrt{2S^*}} \cos \sigma^* = 2A_0 \frac{q}{p} L^* - A_1 - C_1 = 2A_0 \frac{q}{p} (L^* - L_c^*), \quad (3.31)$$

donde,

$$L_c^* = \frac{p}{q} \frac{A_1 + C_1}{2A_0} \quad (3.32)$$

constituye el valor de equilibrio de la variable de Delaunay.

A continuación, aproximamos $\sqrt{2S^*} \simeq e^* \sqrt{L^*} \simeq e^* \sqrt{L_{\text{res}}^*}$ y, después de algunas sustituciones, obtenemos que la excentricidad e^* y el valor de L^* para todos los puntos fijos son:

$$\frac{1}{e^*} \cos \sigma^* = \frac{2A_0 q}{C_2 p} \sqrt{L_{\text{res}}^*} (L^* - L_c^*). \quad (3.33)$$

Los valores de $L^* < L_c^*$ dan lugar a la rama pericéntrica, mientras que otros valores generan las familias apocéntricas y hiperbólicas. Sin embargo, observamos que el valor de N^* está implícito en esta ecuación, lo que puede complicar el cálculo del ancho de libración. Además, no hay información sobre la estabilidad de cada solución, que debe estimarse mediante cálculos adicionales. Finalmente, la ecuación (3.33) predice que las ramas estables e inestables son completamente simétricas (o anti-simétricas) con respecto a L_c^* . Esto no es exactamente cierto, pero es lo suficientemente preciso para la mayoría de los propósitos en este trabajo.

Sin embargo, la principal ventaja de la ecuación (3.33) es su simplicidad y facilidad de uso. También muestra claramente la naturaleza hiperbólica de las ramas pericéntricas y apocéntricas y cómo la ubicación de los puntos fijos tiende a órbitas parabólicas cuando nos aproximamos a la resonancia exacta.

3.1.3. Dominios de libración y circulación

Para cada valor de N^* podemos trazar las curvas de nivel de valores constantes del Hamiltoniano del SMFR $F^*(S^*, \sigma^*, N^*)$ en el plano $(e^* \cos(\sigma^*), e^* \sin(\sigma^*))$. Cada curva de nivel definirá el movimiento orbital (curva de fase) de una condición inicial diferente. En este sistema de coordenadas, la distancia radial de cada punto al origen indicará la excentricidad orbital, mientras que la distancia angular a la abscisa positiva representará el valor de σ^* .

3.1 Hamiltoniano resonante

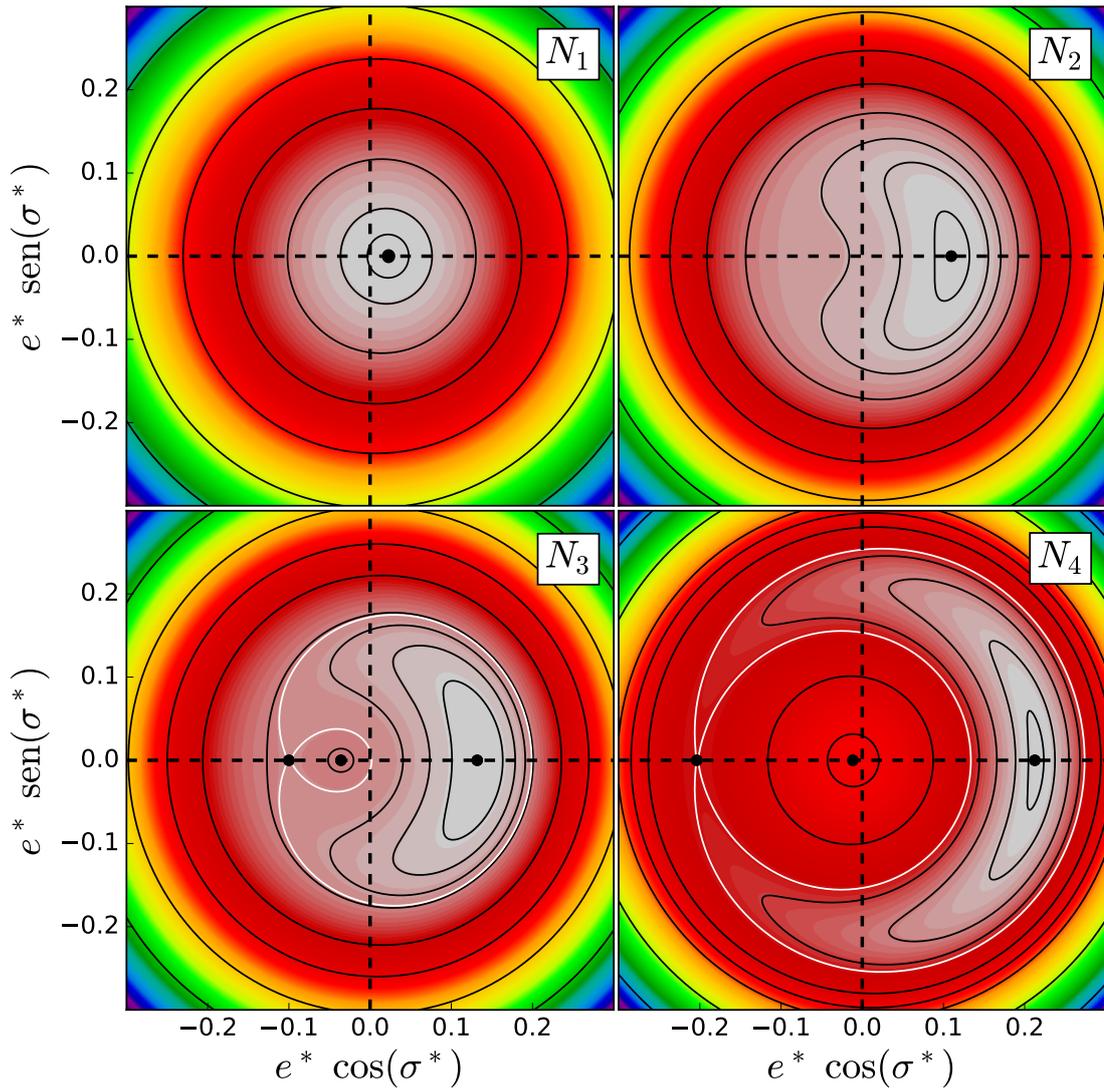


Figura 3.4: Curvas de nivel del Hamiltoniano (3.22) para los diferentes valores de N^* constantes tomados en la figura 3.3. Los puntos negros representan los puntos fijos para cada caso y la curva blanca que aparece en los dos gráficos de abajo representa la separatriz.

La figura 3.4 muestra los resultados de los cuatro valores de N^* elegidos en la figura 3.3. Los dos primeros corresponden a valores de N^* por debajo del valor crítico N_c^* , por lo que sólo se observa un punto fijo estable (punto negro), cuya excentricidad crece desde el gráfico de la izquierda a la de la derecha. Las curvas de fase son círculos concéntricos, aunque significativamente deformadas en el caso de $N^* = N_2$. No hay separatriz y ninguna órbita homoclínica en ninguno de los dos casos. Así, aunque es posible encontrar condiciones iniciales para las cuales el ángulo de resonancia σ^* no toma todos los valores entre $[0; 2\pi]$, éstas no son verdaderas libraciones. Se les suele llamar *libraciones cinemáticas*, ya que son topológicamente equivalentes a las circulaciones alrededor de un centro que se desplaza del origen. Todas las condiciones iniciales con $N^* < N_c^*$ son por tanto **no**

3. El P3C Restricto y el SMFR

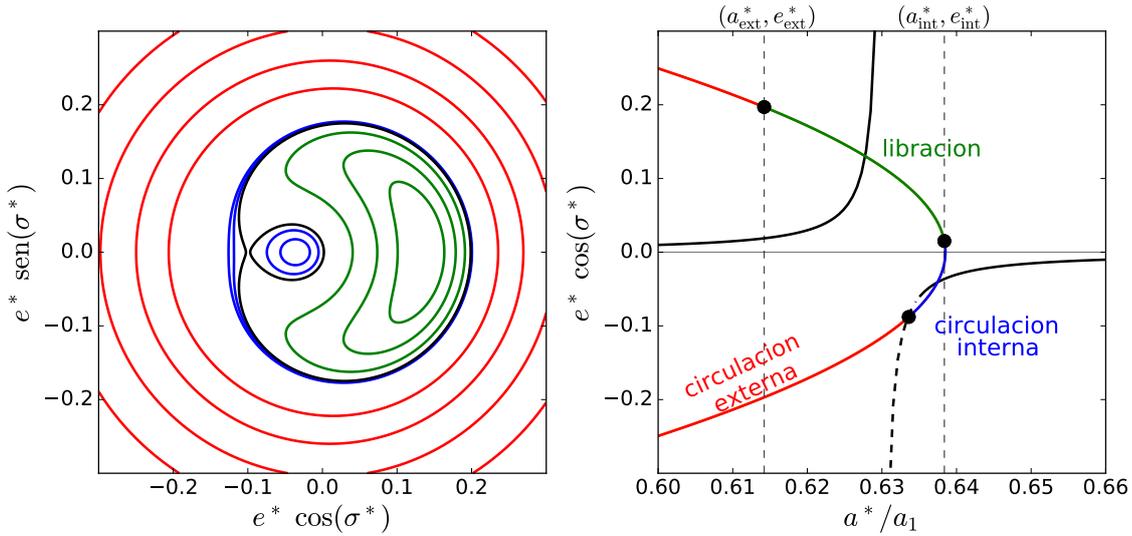


Figura 3.5: **Izquierda:** plano de fase de F^* para $N^* = N_3$. Las órbitas en las regiones de circulación interna se dibujan en azul, órbitas libracionales en verde y la región de circulación externa en rojo. La separatriz se representa con una línea continua de color negra. **Derecha:** similar que el gráfico de la izquierda sólo que representado en otro plano, $(a^*/a_1, e^*)$. Las curvas negras representan la rama pericéntrica ($\sigma^* = 0$) y apocéntrica ($\sigma = \pi$). Los puntos negros marcan los límites de cada movimiento.

resonantes y topológicamente equivalentes al movimiento fuera de la conmensurabilidad.

Para $N^* > N_c^*$ (paneles inferiores) la imagen cambia. La región de circulación se divide en dos partes: una zona de *circulación interna*, situada para excentricidades bajas, y una región de *circulación externa* para altas excentricidades. Ambos están separados por la curva blanca, que recibe el nombre de **separatriz**.

Ahora hay tres puntos fijos en el plano de fase, dos estables y uno inestable. El inestable es de naturaleza hiperbólica y forma parte de la región inestable de la rama apocéntrica. Siempre se encuentra en el eje $\sigma^* = \pi$. La separatriz es la curva de fase asociada al punto hiperbólico. La región dentro de la separatriz define la región verdadera de la libración y sus órbitas se llaman generalmente *libraciones dinámicas* puesto que se separan del resto del plano de fase por la órbita separatriz de período infinito. Aquí de nuevo el ángulo de resonancia no toma todos los valores entre $[0; 2\pi]$, sino libra alrededor de $\sigma^* = 0$ con amplitud decreciente cuando nos acercamos al punto fijo del centro de libración. Las órbitas libracionales en el plano de fase se asemejan a bananas, y a veces se conocen con ese nombre.

3.1.4. El plano representativo

El gráfico de la izquierda de la figura 3.5 reproduce de nuevo el plano de fase correspondiente a $N^* = N_3$, donde ahora cada diferente dominio de movimien-

3.1 Hamiltoniano resonante

to (circulación interna, libración y circulación externa) se muestra en un color diferente. La separatriz se representa con una línea continua de color negra.

Excepto en el caso de una pequeña parte de la región de circulación interna que corresponde a libraciones cinemáticas de pequeña amplitud alrededor de la rama apocéntrica, todas las otras órbitas intersectan el eje $\sigma^* = 0$ en un punto. Entonces, la naturaleza de todas estas órbitas se puede identificar simplemente analizando lo que sucede con las condiciones iniciales para $\sigma^* = 0, \pi$.

El gráfico de la derecha muestra, en negro, la rama pericéntrica ($\sigma^* = 0$) y apocéntrica ($\sigma^* = \pi$). Las curvas roja, verde y azul son las partes de la curva $N^* = N_3$ que corresponden a las condiciones iniciales en los dominios de circulación externa, libración y circulación interna, respectivamente. Los límites de cada movimiento se marcan con puntos negros, en particular, con líneas grises discontinuas se resalta la zona de libración.

El plano representativo es muy importante ya que dado cualquier condición inicial, podemos deducir automáticamente su tipo de movimiento: libratorio, circulante o no resonante. También da una visión cualitativa de la extensión del dominio de resonancia en el plano $(a^*/a_1, e^*)$, sin tener que realizar ninguna integración numérica.

Para $N^* > N_c^*$ podemos calcular los bordes de la región de libración. Éstos serán dados por los valores de $K = \sqrt{2S^*} \cos \sigma^*$, con $\sigma^* = 0, \pi$ tal que el Hamiltoniano coincide con el valor en el punto fijo hiperbólico. Entonces, junto con el valor de N^* podemos transformar a los elementos orbitales y calcular los valores: $(a_{\text{int}}^*, e_{\text{int}}^*)$ y $(a_{\text{ext}}^*, e_{\text{ext}}^*)$ (ver figura 3.5). El primer par definirá la rama de la separatriz que separa la zona de libración de la región de circulación interna, o más precisamente, su intersección con el eje $\sigma^* = 0, \pi$, mientras que el segundo par marcará la aparición de la región de circulación externa.

La figura 3.6 muestra la estructura de la RMM con Júpiter como el perturbador. Las curvas rojas se calcularon usando el Hamiltoniano del SMFR (3.22), mientras que las curvas negras muestran los resultados usando un modelo semi-analítico para el Hamiltoniano resonante en el cual la función perturbadora promediada es evaluada numéricamente para cada punto. El SMFR muestra un muy buen acuerdo con el cálculo exacto, especialmente para bajas excentricidades, lo que justifica el uso del modelo analítico para las órbitas casi circulares. Sin embargo, el SMFR subestima sistemáticamente el ancho de libración, un dato que se tendrá en cuenta en etapas posteriores de este trabajo.

Para simplificar nuestra notación, denotaremos por **separatriz interna** el lugar de los puntos que separan la región de la circulación interna del dominio libracional, calculado para todos los $N^* \geq N_c$. De manera similar, referiremos a la frontera entre el dominio de libración y la región de circulación externa como la **separatriz externa** de la resonancia. Notar que la rama interna de la separatriz se extiende por debajo de $e^* \cos \sigma^* = 0$, indicando que también está presente para $\sigma^* = \pi$; por lo que, el límite del dominio libracional para las órbitas circulares

3. El P3C Restringido y el SMFR

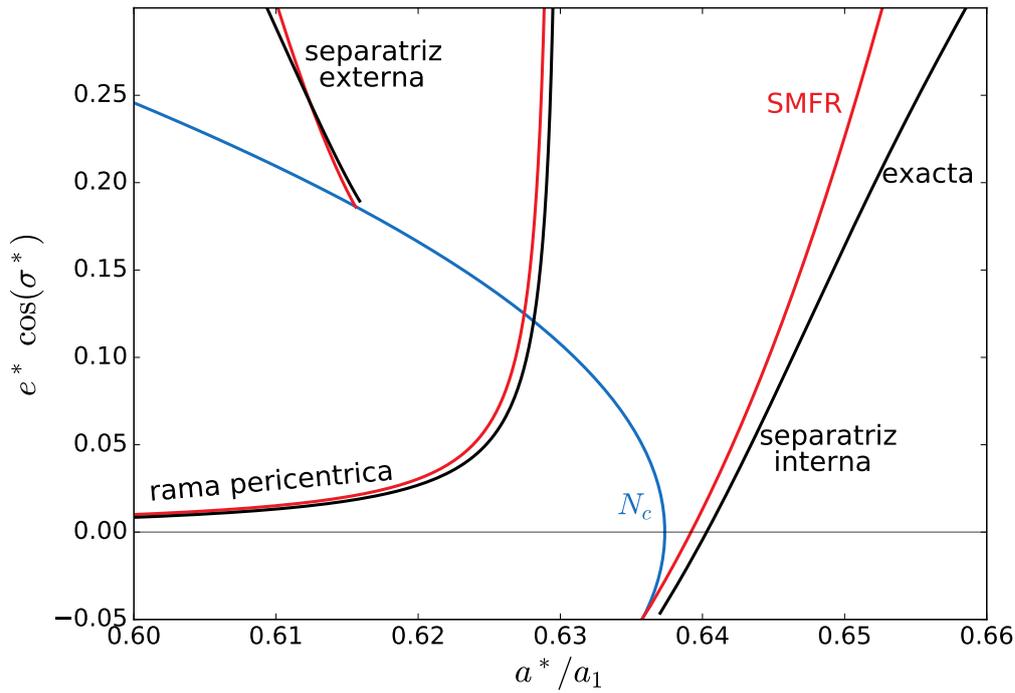


Figura 3.6: Estructura de la RMM 2 : 1 con Júpiter como perturbador en una órbita circular. Las líneas finas continuas muestran la ubicación de las soluciones estables (rama pericéntrica), mientras que las líneas gruesas continuas muestran ambas ramas de la separatriz. La región de libración aparece sólo para $N^* \geq N_c^*$ (mostrada con una curva negra a trazos). Notar que la rama interna de la separatriz se extiende a valores de $e^* \cos \sigma^* < 0$ que implica $\sigma^* = \pi$. Figura adaptada de Ramos *et al.* (2015).

($e^* = 0$) no viene dado por la curva $N^* = N_c^*$ sino que viene dado por los valores más grandes de la integral de movimiento.

Una característica importante de la figura 3.6 que ha recibido poca atención es el hecho de que la separatriz exterior no se extiende hasta órbitas circulares. Aunque, para cada valor de $N^* > N_c$ el sistema contiene una rama interna y una externa, éstas aparecen en el plano $(a^*/a_1, e^*)$ con excentricidades diferentes. Esto es un resultado natural del hecho de que ambos conjuntos (a_{int}^*, e_{int}^*) y (a_{ext}^*, e_{ext}^*) deben conducir al mismo valor de N^* .

Si analizamos esta figura para un dado valor (fijo) de la excentricidad, entonces para $e^* \geq 0,18$ ambas ramas de la separatriz estarán presentes y el dominio libracional estará contenido dentro. Sin embargo, para $e^* < 0,18$, no hay rama externa de la separatriz. En otras palabras, para este rango de excentricidades, todos los valores del semieje mayor $a^* < a_{res}$ darán $N^* < N_c$ y entonces corresponderán a una circulación. De hecho, hay una región de libración, pero es mucho más pequeña, y limitada por la separatriz interna y el valor del semieje mayor es tal que $N^* = N_c$.

3.2 Cálculo semi-analítico

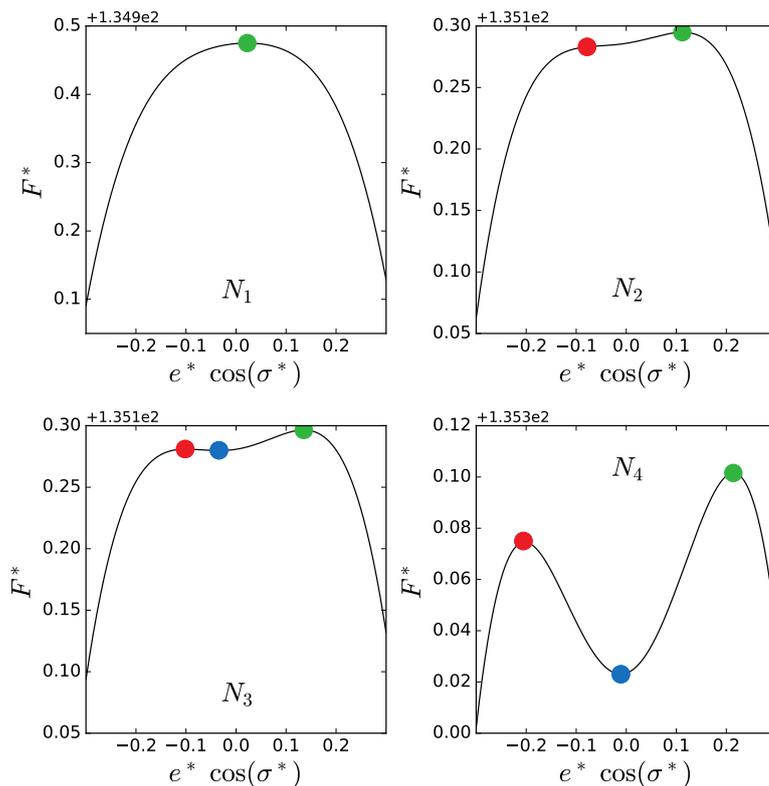


Figura 3.7: Valores del Hamiltoniano (3.16), como una función de la excentricidad. El círculo verde, rojo y azul representa un máximo, máximo local y un mínimo local del Hamiltoniano, respectivamente.

3.2. Cálculo semi-analítico

En la sección anterior determinamos las ramas de la separatriz numéricamente, sin embargo, también es posible expandir la función perturbadora promediada exacta y calcularla directamente.

También obtuvimos el Hamiltoniano resonante completo dado por la ecuación (3.16), el cual debe ser evaluado numéricamente para cada valor del conjunto (S^*, N^*, σ^*) . Como los puntos fijos y el ancho máximo de la separatriz ocurren en el eje $\sigma^* = 0, \pi$, nuestro análisis de este Hamiltoniano numérico puede reducirse a su comportamiento en este segmento de línea 1D.

La figura 3.7 representa los valores de este Hamiltoniano semi-analítico en función de la excentricidad e^* , para cuatro valores diferentes de N^* . Estos fueron los mismos que se eligieron para la figura 3.3. $N^* = N_1$ corresponde a la región no resonante antes de la aparición del dominio de libración. $N^* = N_2$ está muy cerca de N_c^* que señala primero la bifurcación de la rama pericéntrica y la existencia de tres puntos fijos. Los valores mayores de N^* incluyen dominios de libración cada vez más grandes. Los valores positivos de $e^* \cos \sigma^*$ corresponden a $\sigma^* = 0$, mientras que los valores negativos a $\sigma^* = \pi$.

En los gráficos sucesivos, los puntos fijos correspondientes a la rama pericéntri-

3. El P3C Restricto y el SMFR

ca se resaltan con círculos verdes. Para $N^* = N_1$ sólo este punto fijo existe, y el Hamiltoniano está cerca del parabólico alrededor de este valor. Para $N^* \geq N_2$ vemos la aparición del punto fijo hiperbólico (círculo rojo) y la rama apocéntrica (círculo azul). El valor de $F_{\text{hiperb}}^*(N^*)$ alrededor del punto fijo pericéntrico marca los límites de la separatriz en el dominio de la libración.

3.3. Resumen

A través de la formulación Hamiltoniana hemos podido caracterizar la base de nuestro problema de interés sin perder la generalidad. Podemos concluir que la mejor forma de estudiar sistemas de 3 cuerpos es a través de su forma equivalente expresada por el SMFR, en donde el cuerpo de interés se comporta como una partícula (cuerpo sin masa).

Hemos visto que el plano representativo de nuestro sistema es el plano $(a^*/a_1, e^*)$, en el cual dada una excentricidad e para la partícula podemos deducir el tipo de movimiento que tendrá. Sin embargo, no sólo nos conformamos con conocer si este movimiento es libracional o no, sino que nuestro mayor interés es cuándo este movimiento será estable y cuándo no. En otras palabras, buscamos cuál es el semieje mayor que separa al dominio de un movimiento estable y uno inestable.

Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

La estabilidad de los sistemas planetarios es un tema de larga data y de gran estudio. En este trabajo diremos que un sistema es estable si no existen grandes cambios en su configuración espacial a lo largo del tiempo. Conocer sus posibles cambios nos da información sobre su evolución, y por tanto de su posible formación. Existen numerosos estudios analíticos, semi-analíticos y numéricos que nos permiten evaluar la estabilidad de un cierto sistema. Estamos interesados en estudiar dinámicamente por qué los planetas permanecen por mucho tiempo (una gran porción de sus vidas) en estas configuraciones resonantes. Para esto, primero debemos entender qué significa la estabilidad de estos planetas y cómo se puede calcular.

En este capítulo nos enfocaremos en ver cuándo un sistema es estable o no a partir de dos criterios. Por un lado, el criterio de superposición de resonancias y por otro el criterio de estabilidad de Hill. Como ya hemos visto, el P3C resonante general se reduce al P3CR, por lo tanto estudiaremos ambos criterios de estabilidad en el sistema reducido. Para esto, nos será muy útil la caracterización hecha en el capítulo anterior.

Este capítulo fue desarrollado expandiendo las ideas planteadas, principalmente, en [Ramos *et al.* \(2015\)](#).

4.1. Esquema de la condición de superposición de resonancias

En este apartado presentamos brevemente un esquema básico para entender el significado de la superposición de resonancias antes de comenzar a discutir los criterios de estabilidad orbital. Para esto empleamos el problema más simple

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

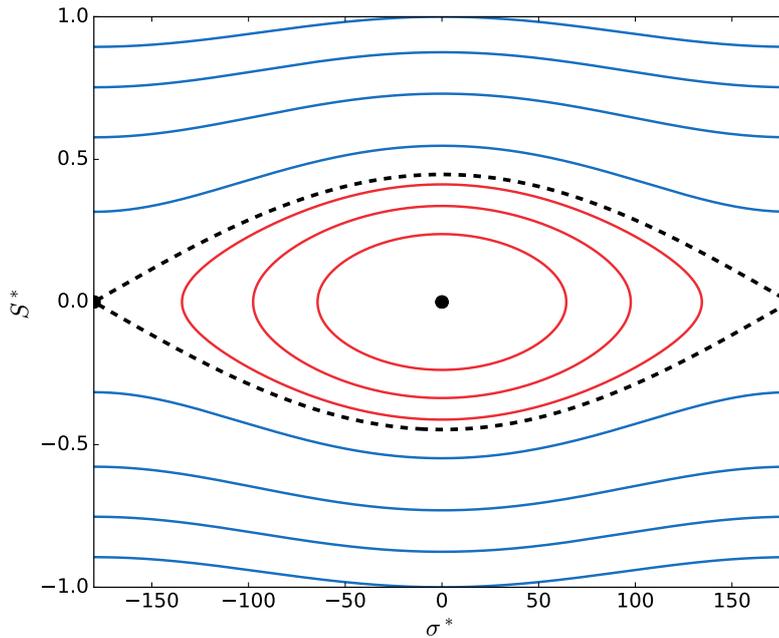


Figura 4.1: Espacio de fase del péndulo en el plano (σ^*, S^*) . El punto de equilibrio estable (señalado con un círculo negro central), las oscilaciones/libraciones representadas en líneas de color rojas, la separatriz que parte del punto de equilibrio inestable para terminar en el mismo punto se representa en línea negra discontinua y las rotaciones/circulaciones se representan en líneas de color azules. El punto de equilibrio inestable está señalado con un círculo negro. Observar que se representa dos veces el mismo punto inestable en los extremos.

(pero a la vez completo) y ya conocido: el problema del péndulo simple resonante. Como nuestro objetivo es simplemente dar la definición de la superposición de resonancias, no entraremos en detalle en los cálculos previos a los resultados usados aquí.

Las curvas de nivel del Hamiltoniano del péndulo simple resonante se pueden representar en el plano de fase (σ^*, S^*) tal como muestra la figura 4.1. Se observa que existen puntos en donde los regímenes de movimiento cambian. Cada relación de resonancia generará un par de nuevos puntos fijos en este plano, uno estable, $\sigma^* = 0$ (círculo negro en el centro) y uno inestable, $\sigma^* = \pi$ (círculo negro en los extremos).

La trayectoria que parte del punto de equilibrio inestable (en un extremo) para terminar nuevamente en él (en el otro extremo), se denomina separatriz (línea discontinua). Como ya vimos en la sección anterior, la separatriz separa dos clases de movimiento cualitativamente diferentes: oscilaciones o libraciones (curvas de color azul) y rotaciones o circulaciones (curvas de color rojo) como también muestra la figura 4.1. La separatriz es la primera en verse afectada frente a una perturbación, dando lugar a una capa estocástica donde el movimiento es caótico. Las capas estocásticas son dominios en las vecindades de las separatrices de las resonancias. En este caso, la separatriz es una curva cerrada que corresponde

4.1 Esquema de la condición de superposición de resonancias

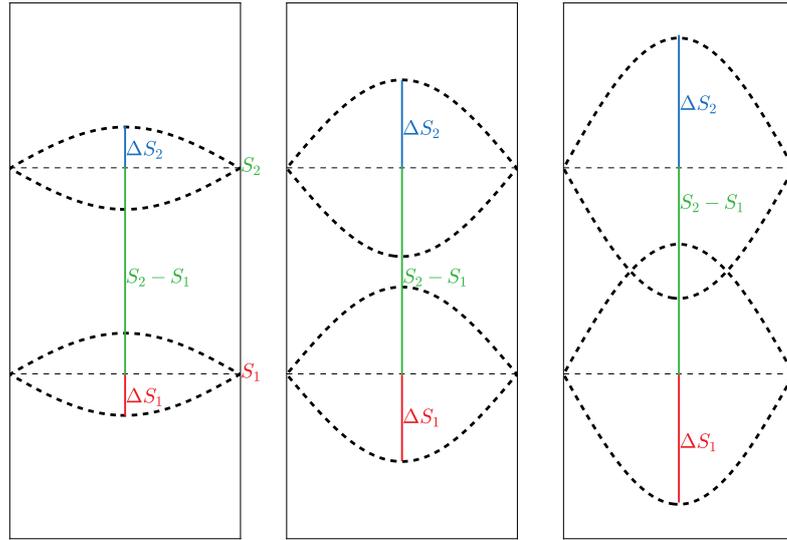


Figura 4.2: Esquema de dos resonancias en el plano (σ, S) . Cada uno de los gráficos tiene una pequeña perturbación que es creciente hacia la derecha. En el gráfico de la izquierda las separatrices de ambas resonancias están aisladas. Sin embargo, a medida que la perturbación aumenta, las separatrices se van haciendo más grandes (gráfico del medio) hasta llegar a una superposición de las mismas (gráfico de la derecha), aniquilando toda órbita no resonante entre ellas.

a una trayectoria de período infinito.

Mientras el tamaño de la capa caótica sea suficientemente pequeña, los toros invariantes sobrevivirán tanto en las regiones de circulación como en el interior del dominio de libración (consecuencia de la denominada teoría de estabilidad de sistemas dinámicos de Kolgomorov, Arnold y Moser, KAM, Moser, 1973). En otras palabras, siempre que esta capa caótica sea suficientemente pequeña, habrá órbitas regulares y no resonantes que funcionan como barreras de contención de la región caótica. Así, una condición inicial cercana a la separatriz puede presentar un movimiento caótico, pero su acción nunca cambiará en una cantidad mayor que el tamaño del dominio resonante. Esto implica que es posible tener caos sin inestabilidad.

Imaginemos que ahora tenemos dos resonancias diferentes en el plano (σ, S) , como se muestra esquemáticamente en la figura 4.2. Supongamos que la primera está centrada alrededor de un valor de la acción igual a S_1 mientras que la segunda está situada alrededor de S_2 . Sea ΔS_i el ancho máximo de cada región de libración, calculada para $\sigma = 0$, y $\Delta S_{\text{res}} = S_2 - S_1$ la distancia entre ambos centros de resonancia.

Como antes, frente a una perturbación, cada separatriz generará una región caótica localizada, pero mientras ambas resonancias estén suficientemente separadas, seguirá habiendo órbitas no resonantes entre ellas. En consecuencia, las zonas caóticas de cada comensurabilidad permanecerán de nuevo limitadas y aisladas.

Sin embargo, si los centros de resonancia están lo suficientemente cercanos, o

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

las perturbaciones son cada vez mayores, ambas separatrices se intersectarán. Sin tener en cuenta el tamaño de la capa caótica, esto ocurrirá cuando:

$$\Delta S_{\text{res}} \equiv S_2 - S_1 \leq \Delta S_1 + \Delta S_2. \quad (4.1)$$

Aquí asumimos que el tamaño del dominio de libración es simétrico con respecto a cada centro de libración; esta condición se satisface para el modelo del péndulo resonante, pero no necesariamente en otros casos. Llamamos a la expresión (4.1) la **condición de superposición de resonancias**: para $\sigma = 0$ las regiones de libración se superponen y ambas separatrices se entrelazan.

La superposición de resonancias tiene dos consecuencias muy importantes. En primer lugar, ya no queda espacio entre las resonancias para la existencia de toros invariantes. Por lo tanto, el movimiento “no resonante” no es posible en esta región. En segundo lugar, una condición inicial en una resonancia puede viajar a lo largo de la conexión entre ambas separatrices y quedar temporalmente atrapada en la otra conmensurabilidad. De hecho, la órbita ya no está restringida a una sola resonancia, sino que alternará entre una y la otra. Ambas resonancias ya no están aisladas, sino que interactúan. La acción S puede entonces cubrir una gama mucho más grande durante su evolución temporal; llamamos a este tipo de caos *global* y por lo general conduce a la inestabilidad orbital.

La condición de superposición de resonancias descrita por la ecuación (4.1) fue estudiada por primera vez por [Walker y Ford \(1969\)](#) y posteriormente ampliada por [Chirikov \(1979\)](#) en sus estudios de la dinámica del plasma interactuando con campos magnéticos. Es un criterio extremadamente simple pero poderoso que relaciona eficazmente el caos con la inestabilidad.

En la figura 4.3 mostramos esquemáticamente el mismo concepto de superposición de resonancias pero ahora para el P3CRC en nuestro plano representativo de elementos orbitales (a, e) con una masa y semieje mayor del perturbador tales como las de Júpiter. Se muestran tres resonancias de primer orden con su correspondiente dominio libracional sombreado; en azul la RMM 2 : 1, en rosa la 3 : 2 y en rojo la 4 : 3. La superposición de la separatriz interna de la RMM 3 : 2 con la separatriz externa de la RMM 4 : 3 conforma un dominio de inestabilidad orbital (región sombreada a trazos) en donde domina el caos. El comienzo de esta región caótica viene dada por a_{superp} para una dada e y en la figura se representa con un círculo negro. Con Δa_{res} representamos la distancia entre dos centros de resonancias consecutivos, y con Δa_{sep} el ancho de la región de libración. Observar que ambas cantidades dependen de la excentricidad tomada.

De forma análoga a la expresión (4.1), en estas coordenadas, la condición de superposición de resonancias definida antes queda determinada por:

$$\Delta a_{\text{res}}(p) \leq \Delta a_{\text{sep}}(p) + \Delta a_{\text{sep}}(p + 1). \quad (4.2)$$

Es importante señalar que la superposición de resonancias depende de la excen-

4.2 Trabajos previos

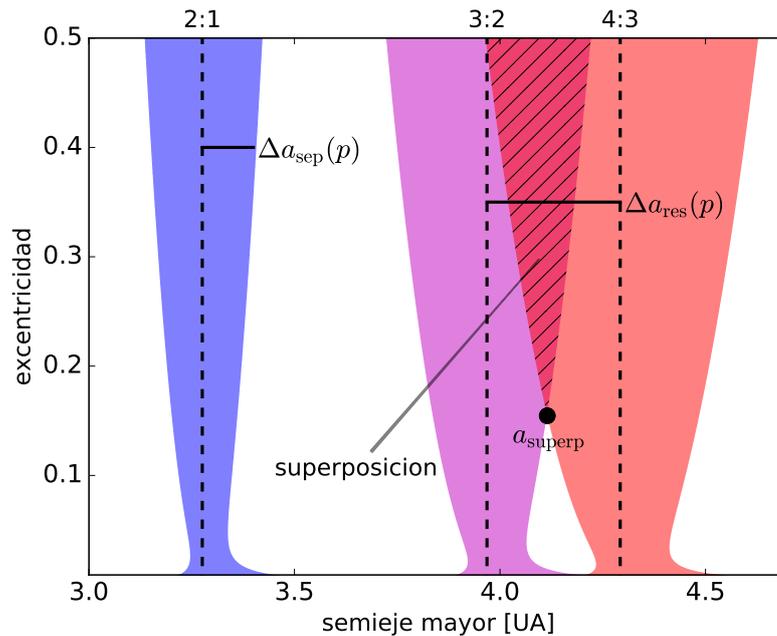


Figura 4.3: Esquema del concepto de la superposición de resonancias de movimientos medios adyacentes de primer orden para el problema de 3 cuerpos restringido.

tricidad tomada; resultado que tendremos en cuenta más adelante.

En resumen, podemos decir entonces que, la superposición de resonancias comienza cuando sus separatrices se tocan. La posibilidad de que un sistema se mueva de una resonancia a la otra bajo la condición anterior es bastante obvia. El problema es otro, ¿cómo calcular la condición de la separatriz en contacto teniendo en cuenta una deformación de la separatriz por una resonancia vecina? El método más simple es utilizar los parámetros de la resonancia no perturbados, es decir, considerar cada una de las resonancias como si estuvieran aisladas. Está claro que uno puede esperar obtener de esta manera sólo una estimación del orden de magnitud. Este procedimiento simple es lo que se denomina criterio de superposición y lo veremos en la sección siguiente.

4.2. Trabajos previos

La estabilidad orbital ha sido abordado por diferentes métodos, dependiendo del tipo de estabilidad que se considera. El método más simple es el llamado **Estabilidad de Hill**, en el cual se dice que una condición inicial es estable si su constante de Jacobi C_J es mayor que el valor C_{L_1} que adquiere en el punto Lagrangiano L_1 del sistema (ver por ejemplo, [Golubev, 1968](#); [Marchal y Bozis, 1982](#)). La partícula será entonces atrapada dentro de una región de velocidad cero de Hill que excluye la posición de m_1 . La trayectoria nunca será capaz de cruzar la órbita del perturbador y por lo tanto, permanecerá limitada ([Hill, 1878](#); [Szebehely, 1967](#)).

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

El resultado de condiciones iniciales que no satisface el criterio de Estabilidad de Hill no es obvio. Aunque la condición $C_J > C_{L_1}$ es suficiente para la estabilidad, no es necesaria. Es posible encontrar soluciones que no cumplan con esta desigualdad, pero son, sin embargo, estables, al menos para tiempos del orden de giga años (por ejemplo, Gladman, 1993).

Como veremos más adelante, algunas de estas condiciones iniciales se encuentran dentro del dominio libracional de las resonancias de movimiento medio, pero otras no son resonantes.

Un segundo estimador del tiempo de inestabilidad orbital es el criterio de Superposición de Resonancias, basado en el trabajo de Chirikov (1979) y aplicado por primera vez al problema de 3 cuerpos por Wisdom (1980). Como su nombre indica, postula que el caos global (y por tanto la inestabilidad orbital) es provocado por la superposición de resonancias de movimiento medio adyacentes (tal como hemos introducido en la subsección anterior). Wisdom se concentró en el caso de órbitas circulares ($e = 0$) y conmensurabilidades de primer orden. Su criterio de superposición estipula que la inestabilidad ocurrirá siempre que la distancia entre dos RMM consecutivas sea menor o igual a la suma de sus anchos de libración.

Utilizando un modelo analítico SMFR (Henrard y Lemaître, 1983) y suponiendo que la suma de los anchos de libración podría ser aproximada por el doble del tamaño de la separatriz interna de la conmensurabilidad más lejana del perturbador, Wisdom (1980) estimó que el semieje mayor *promediado* a_{superp}^* que conduce a la superposición puede ser aproximado por:

$$a_{\text{superp}}^* = a_1 \left[1 - D \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^{2/7} \right] \quad (4.3)$$

donde $D = 1,3$ es una constante. Esta expresión asume condiciones iniciales tales que los ángulos resonantes σ son ceros, donde la región de libración de resonancias de primer orden es máxima.

Malhotra (1998) y Deck *et al.* (2013) presentaron cálculos nuevos del límite de superposición, usando una descripción similar del modelo analítico para el Hamiltoniano pero con diferentes grados de aproximaciones. Es importante aclarar que Deck *et al.* (2013) usaron el SMFR como modelo del P3C general, es decir con masas planetarias no despreciables.

Deck *et al.* (2013), por ejemplo, toma en cuenta que las resonancias adyacentes no tienen los mismos anchos mitad de libración, mientras que ambos trabajos consideran expresiones ligeramente diferentes para el ancho mitad de la resonancia. Sus resultados muestran la misma forma funcional en términos de las masas planetarias, aunque con diferentes coeficientes numéricos: $D = 1,4$ en el caso de Malhotra (1998) y $D = 1,46$ para Deck *et al.* (2013).

Duncan *et al.* (1989) evita métodos analíticos y ataca el problema usando si-

4.3 El criterio de superposición de resonancias clásico

mulaciones numéricas con un mapa simpléctico. Sus resultados una vez más confirman la misma dependencia con m_1/m_0 , pero con un coeficiente más grande: $D = 1,49$. En consecuencia, la llamada ley $(m_1/m_0)^{2/7}$ parece extremadamente robusta al modelado del problema, aunque el factor numérico muestra una dispersión significativa.

El caso de órbitas excéntricas ($e > 0$) es más delicado. Mientras que los experimentos numéricos de [Quillen y Faber \(2006\)](#) parecen indicar que no existen diferencias significativas en el límite de superposición de resonancias para excentricidades moderadas, los estudios analíticos de [Mustill y Wyatt \(2012\)](#) y de [Deck et al. \(2013\)](#) apuntan en la dirección contraria. Ambos trabajos predicen que incluso para valores bajos de la excentricidad la distancia de superposición ocurre mucho más lejos de los planetas y, más sorprendentemente, la dependencia con la masa planetaria cambia a $(m_1/m_0)^{1/5}$.

4.3. El criterio de superposición de resonancias clásico

Siguiendo las ideas de [Walker y Ford \(1969\)](#) y [Chirikov \(1979\)](#), [Wisdom \(1980\)](#) estableció lo que se podría llamar la condición para la superposición de resonancias clásica en el PR3C. Se dice que la superposición ocurre cuando, para un valor dado de la excentricidad media e^* , la distancia Δa_{res}^* entre resonancias de movimiento medio adyacentes es menor o igual que la suma de sus anchos de libración Δa_{sep}^* . La misma idea también fue adoptada por cálculos analíticos posteriores, como [Malhotra \(1998\)](#) y [Deck et al. \(2013\)](#), aunque este último trabajo mejoró el modelo tomando en cuenta que los anchos mitad entre RMMs vecinas no son iguales.

Todas estas estimaciones también emplearon el SMFR como el modelo de resonancia, aunque con diferentes grados de aproximación del Hamiltoniano, o en la deducción del ancho de la resonancia. En muchos casos, estas aproximaciones se hicieron para obtener resultados en expresiones explícitas simples, aunque los errores introducidos no fueron adecuadamente corroborados/comprobados.

Finalmente, la superposición de resonancia fue calculada en el plano representativo definido por $\sigma^* = \omega = 0$ y evaluado en $e^* = 0$. Estas elecciones de las condiciones iniciales permitieron considerar sólo el rol de las conmensurabilidades de primer orden. Las RMMs de segundo orden tienen un tamaño de libración mínimo para $\sigma^* = 0$, mientras que el ancho de la separatriz de las resonancias de tercer orden tienden a cero para órbitas circulares. Esto indica que, centrarse en las resonancias de primer orden parece una buena aproximación, especialmente cuando se estudia la superposición para las órbitas circulares.

En esta sección se deduce de nuevo el límite de superposición de resonancias para órbitas circulares (es decir, $e^* = 0$), siguiendo los mismos supuestos descritos anteriormente. Sin embargo, reduciremos las aproximaciones al mínimo, incluso si esto implica resultados que no están en expresiones analíticas explícitas.

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

4.3.1. Ancho de libración para las resonancias de primer orden

Para cualquier conmensurabilidad de movimiento medio de primer orden (es decir, $q = 1$), queremos estimar el ancho del dominio de libración para órbitas circulares. En otras palabras, estamos interesados en la distancia $\Delta a_{\text{sep}}^*(p)$ entre la posición nominal de la resonancia $(p + 1)/p$ y el borde de la rama interna de la separatriz en $e^* = 0$.

Comenzamos con la expresión (3.22) para el Hamiltoniano del SMFR. Puesto que el valor de N^* es constante, podemos agregar una cantidad igual a $C_1 N^*$ sin cambiar la dinámica. Así, obtenemos una nueva expresión dada por:

$$F^* = -A_0(N^* - S^*)^2 + (A_1 + C_1)(N^* - S^*) - C_2\sqrt{2S^*}\cos\sigma^*, \quad (4.4)$$

o, escribiendo $(N^* - S^*) = L^*/p$,

$$F^* = -\frac{A_0}{p^2}L^{*2} + \frac{(A_1 + C_1)}{p}L^* - C_2\sqrt{2S^*}\cos\sigma^*. \quad (4.5)$$

Hemos mantenido la denominación de esta función, aunque los Hamiltonianos (4.4) y (4.5) difieren en una constante. Podemos simplificar aún más esta expresión. Usando la definición de L_c^* dada por (3.32) podemos escribir $(A_1 + C_1) = 2A_0L_c^*/p$. Introduciendo esta igualdad en el Hamiltoniano, y dividiendo a ambos lados por un factor A_0/p^2 , obtenemos

$$\hat{F}^* \equiv \frac{p^2}{A_0}F^* = -L^{*2} + 2L_c^*L^* - \frac{C_2p^2}{A_0}\sqrt{2S^*}\cos\sigma^*. \quad (4.6)$$

Para calcular el ancho de libración para un dado valor de N^* debemos primero determinar el valor del Hamiltoniano en un punto fijo hiperbólico. De (3.31) con q_1 , podemos escribir el valor de S_N^* y L_N^* en un dado punto fijo como:

$$\sqrt{2S_N^*} = -\frac{C_2p}{2A_0}\left(L_N^* - L_c^*\right)^{-1}, \quad (4.7)$$

donde S_N^* y L_N^* son funciones de N^* . Sustituyendo en (4.6), el Hamiltoniano del punto fijo hiperbólico será dado por:

$$\hat{F}_{\text{hiper}}^*(N^*) = -L_N^{*2} + 2L_c^*L_N^* + \frac{C_2p^2}{A_0}\sqrt{2S_N^*}. \quad (4.8)$$

Ahora buscamos los valores de $L^* = L_{\text{sep}}^*$ y $S^* = S_{\text{sep}}^*$ tal que el Hamiltoniano en $\sigma^* = 0$ alcanza el mismo valor. Esto es simplemente:

$$\hat{F}_{\sigma^*=0}^*(N^*) = L_{\text{sep}}^{*2} + 2L_c^*L_{\text{sep}}^* - \frac{C_2p^2}{A_0}\sqrt{2S_{\text{sep}}^*}. \quad (4.9)$$

4.3 El criterio de superposición de resonancias clásico

Sin embargo, L_{sep}^* y S_{sep}^* no son independientes, sino que están relacionados a través del valor elegido de N^* . Sin ninguna pérdida de generalidad, podemos escribir:

$$L_{\text{sep}}^* = L_N^* + \Delta L^* \quad ; \quad S_{\text{sep}}^* = S_N^* + \Delta S = S_N^* - \frac{1}{p} \Delta L^*, \quad (4.10)$$

donde la última igualdad se deriva de la restricción que $N^* = \text{cte}$. Puesto que nos interesa calcular el ancho mitad de la libración para órbitas circulares (es decir, para $S_{\text{sep}}^* = 0$), la segunda ecuación se reduce a $S_N^* = \Delta L^*/p$. Introduciendo estas ecuaciones en las expresiones (4.8) y (4.9) e igualando los valores de ambos Hamiltonianos, obtenemos

$$(\Delta L^*)^2 + 2(L_N^* - L_c^*) \Delta L^* + \frac{C_2 p^{3/2}}{A_0} \sqrt{2\Delta L^*} = 0, \quad (4.11)$$

la cual admite una solución no trivial:

$$\Delta L^* \equiv L_{\text{sep}}^* - L_N^* = p \left(-\frac{3C_2}{4A_0} \right)^{2/3}. \quad (4.12)$$

Ahora podemos calcular la distancia ΔL_{sep}^* entre la separatriz interna y la resonancia exacta como

$$\Delta L_{\text{sep}}^* = L_{\text{sep}}^* - L_{\text{res}}^* \simeq (L_{\text{sep}}^* - L_N^*) + (L_N^* - L_c^*) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) p \left(-\frac{3C_2}{4A_0} \right)^{2/3}. \quad (4.13)$$

De (3.15) y (3.23) podemos escribir

$$-\frac{3C_2}{4A_0} = \frac{m_1}{m_0} \frac{L_c^{*3/2}}{2p^2} \alpha_{\text{res}} \hat{g}_{1,0}(\alpha_{\text{res}}) \simeq \frac{0,4}{p} \frac{m_1}{m_0} L_c^{*3/2}, \quad (4.14)$$

donde hemos usado la aproximación $\alpha_{\text{res}} \hat{g}_{1,0}(\alpha_{\text{res}}) \simeq -0,8p$ (Malhotra, 1998). Por último, convertimos los resultados a semieje mayor y obtenemos

$$\Delta a_{\text{sep}}^*(p) \simeq 1,6 a_1 \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^{2/3} \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^{1/3} \frac{p}{(p+1)^{2/3}}, \quad (4.15)$$

la cual es muy similar a la expresión dada por Wisdom (1980). Sin embargo, para mantener la precisión incluso para resonancias de bajo grado, evitaremos cualquier transformación analítica entre p y su valor de a_{res}^* .

4.3.2. Separación entre resonancias de primer orden

Para este paso seguiremos la deducción presentada en Morbidelli (2002) aunque, una vez más, tratando de eludir cualquier simplificación no esencial que pueda afectar su precisión.

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

La ubicación nominal de las RMMs $(p+1)/p$ y $(p+2)/(p+1)$ pueden ser escritas como:

$$a_{\text{res}}^* = a_1 \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^{1/3} \left(\frac{p}{p+1} \right)^{2/3} ; \quad a_{\text{res}}^{*'} = a_1 \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^{1/3} \left(\frac{p+1}{p+2} \right)^{2/3} \quad (4.16)$$

donde su separación viene dada por:

$$\Delta a_{\text{res}}^*(p) = a_1 \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{p+1}{p+2} \right)^{2/3} - \left(\frac{p}{p+1} \right)^{2/3} \right]. \quad (4.17)$$

Ahora asumimos que $p \gg 1$, y expandimos cada uno de los términos dentro de los corchetes en una serie de Taylor. Conservando sólo los términos de primer orden, podemos escribir aproximadamente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{p+1} \right)^{2/3} &= \left(1 - \frac{1}{p+1} \right)^{2/3} \simeq 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{p+1} \\ \left(\frac{p+1}{p+2} \right)^{2/3} &= \left(1 - \frac{1}{p+2} \right)^{2/3} \simeq 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{p+2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Finalmente, introduciendo ambas expresiones en (4.17), obtenemos:

$$\Delta a_{\text{res}}^*(p) \simeq \frac{2}{3} a_1 \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^{1/3} \frac{1}{(p+1)(p+2)}. \quad (4.19)$$

Esto es diferente a la expresión de [Wisdom \(1980\)](#) y de [Deck *et al.* \(2013\)](#) que adoptan $\Delta a_{\text{res}}^* = (2a_1)/(3(p+1)^2)$. Por un lado, es importante mantener explícitamente la relación de masa entre el perturbador y la estrella. Por otro lado, la diferencia en la dependencia con p es también significativa, especialmente para resonancias de bajo grado. Es fácil ver que mientras que la relación adoptada por [Wisdom \(1980\)](#) sobrestima sistemáticamente la verdadera separación, ocurre lo contrario para (4.19). Encontramos que una estimación mucho más precisa, incluso para valores bajos de p puede escribirse como:

$$\Delta a_{\text{res}}^*(p) \simeq \frac{2}{3} a_1 \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^{1/3} \frac{1}{(p+1)(p+3/2)}, \quad (4.20)$$

en otras palabras, a mitad de camino ente ambas aproximaciones originales.

4.3.3. La condición de superposición clásica

Teniendo expresiones para el ancho mitad de la libración (ec. (4.15)) y la separación entre resonancias de primer orden consecutivas (ec. (4.20)), podemos proceder a calcular la condición para la superposición de resonancias. Siguiendo

4.3 El criterio de superposición de resonancias clásico

Wisdom (1980), esto se dice que ocurre siempre que el orden de la resonancia adquiera un valor $p = p_c$ tal que:

$$\Delta a_{\text{res}}^*(p_c) = 2\Delta a_{\text{sep}}^*(p_c). \quad (4.21)$$

Deck *et al.* (2013) mejoró esta estimación reemplazando el lado derecho con $\Delta a_{\text{sep}}^*(p_c) + \Delta a_{\text{sep}}^*(p_c + 1)$, dando lugar a un cambio significativo en los resultados. Sin embargo, como se discutirá más adelante, esta modificación de la condición clásica no resultará necesaria y adoptaremos la expresión (4.21).

Cualquiera que sea nuestra elección, la idea sigue siendo la misma: la superposición se define cuando la separatriz interna de la RMM $(p_c + 1)/p_c$ intersecta la rama externa de la resonancia $(p_c + 2)/(p_c + 1)$. Como en los criterios originales de Chirikov, el cruce de la separatriz de dos conmensurabilidades genera una ruta dinámica que conduce a la inestabilidad orbital. Sin embargo, es importante destacar que la mera proximidad entre resonancias no es suficiente. La superposición requiere la existencia e intersección de dos separatrices. Si ambas no están presentes, no se puede decir que se produzca superposición.

Resolviendo la ecuación (4.21), obtenemos el valor de p_c que indica la superposición de resonancias (para órbitas circulares) de acuerdo con este modelo como:

$$4,8 p_c(p_c + 3/2)(p_c + 1)^{1/3} \simeq \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^{-2/3}. \quad (4.22)$$

Puesto que dar resultados en valores de p_c es difícil, podemos transformarlos a valores de a^* usando la expresión (4.16). Como antes, evitamos las simplificaciones analíticas y cualquier suposición a priori de que $p_c \gg 1$, pero elegimos realizar un ajuste numérico unidimensional del semieje mayor crítico en función de m_1/m_0 . Resulta entonces:

$$a_{\text{superp}}^* \simeq a_1 \left[1 - 1,225 \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^{0,28} \right]. \quad (4.23)$$

Luego, esto es el semieje mayor medio inicial mínimo, para órbitas circulares, de modo que la partícula con masa despreciable se encuentra en una región inestable generada por la superposición de la resonancia de movimiento medio interior de primer orden con un planeta perturbador (también en órbita circular) de masa m_1 .

Es importante destacar que este cálculo, así como la expresión resultante, se expresa en elementos orbitales *promediados*. Esto es importante al comparar sus predicciones con las de las simulaciones numéricas. Para obtener el límite de superposición en el semieje mayor osculador debemos realizar la transformación

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

inversa, que produce la siguiente relación aproximada

$$a_{\text{superp}} \simeq a_1 \left[1 - 1,06 \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^{0,275} \right]. \quad (4.24)$$

Ahora, esta expresión puede ser comparada directamente con las integraciones numéricas, siempre que los ángulos iniciales sean elegidos iguales a cero. Notar que los exponentes de ambas descripciones del criterio de superposición son similares a $2/7 \simeq 0,286$, pero ligeramente menores.

4.4. Pruebas numéricas de los criterios de superposición

4.4.1. El indicador Δe

Una interesante herramienta para analizar el comportamiento de los sistemas planetarios es el llamado Método de Excentricidad Máxima (MEM) (por ejemplo, [Dvorak et al., 2004](#)), que sigue el valor máximo de e alcanzado por un cuerpo dado durante una simulación numérica. Para órbitas inicialmente excéntricas, un mejor indicador es la diferencia entre los valores máximos y mínimos, o el valor de Δe .

Aunque no es una medida del movimiento caótico, este indicador Δe es una herramienta extremadamente útil para mapear la estructura resonante en problemas de N-cuerpos. Su aplicación es muy simple. Una grilla de condiciones iniciales en un plano representativo es numéricamente integrado por un intervalo de tiempo T mayor que el período del ángulo más lento del sistema. Durante la integración controlamos los valores mínimos y máximos alcanzados por una de las acciones (que llamamos J), y calculamos la diferencia $\Delta J = J_{\text{max}} - J_{\text{min}}$. Finalmente, trazamos el valor de ΔJ como un gráfico de color en el plano de las condiciones iniciales.

La figura 4.4 muestra un ejemplo para el péndulo simple. Dividimos el plano en una grilla de 500×500 de valores iniciales de la acción y del ángulo, $(J \text{ y } \theta)$ ¹. Luego, cada condición inicial es integrada por un tiempo total de T . Los valores resultantes de ΔJ se muestran en un gráfico a color. Las condiciones iniciales próximas al punto fijo estable ($J = 0, \theta = 0$) aparecen con un color oscuro, indicando valores muy pequeños de ΔJ . Por el contrario, las condiciones iniciales cercanas a la separatriz aparecen como regiones de color muy claro (color blanco), que corresponde a grandes cambios en el momento. Por lo tanto, aunque no pudiéramos obtener explícitamente las curvas de fase del Hamiltoniano (figura 4.1),

¹Observar que el plano (J, θ) se corresponde a nuestro plano (S^*, σ^*) de la figura 4.1, sólo que aquí lo llamamos diferente ya que estamos ejemplificando, y por tanto no queremos confundir al lector.

4.4 Pruebas numéricas de los criterios de superposición

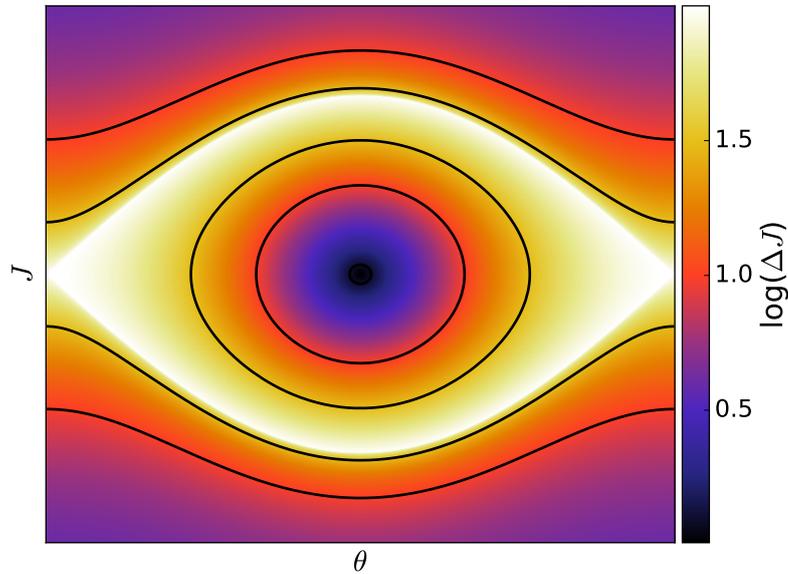


Figura 4.4: Mapa dinámico cualitativo en el plano de fase para la diferencia ΔJ (código a color) para el problema del péndulo simple. En líneas negras se muestran curvas de nivel del Hamiltoniano, mientras que la separatriz se muestra en color blanco (ver figura 4.1).

este gráfico nos permite estimar tanto la ubicación de los posibles puntos fijos así como la separatriz de la región resonante. Las líneas negras indican curvas de nivel del Hamiltoniano.

Una vez definido el método, podemos aplicarlo a una resonancia de movimiento medio en el problema circular de tres cuerpos restringido. La figura 4.5 muestra el mapa resultante para la RMM 2:1 en el plano representativo $(a/a_1, e)$ de condiciones iniciales (osculadoras), donde todos los ángulos fueron elegidos inicialmente igual a cero. Todas las condiciones iniciales se integraron con un código de N-cuerpos basado en Bulirsch-Stoer para 10^5 órbitas del perturbador, y el código a color es la diferencia en la excentricidad alcanzada por cada partícula (es decir Δe). Las líneas grises marcan diferentes valores de N^* , con N_c resaltado con una curva gris continua más gruesa.

Ahora, podemos comparar estos resultados con las predicciones del modelo semi-analítico de resonancia. La predicción de la rama pericéntrica se muestra con una curva blanca discontinua, mientras que ambas ramas de la separatriz son indicadas con líneas negras gruesas. El acuerdo es muy bueno, lo que indica que el modelo semi-analítico es una herramienta muy precisa para estimar las características de una determinada resonancia de movimiento medio. Más importante aún, muestra que para órbitas circulares, no existe separatriz externa para la RMM 2 : 1, y lo mismo sucede para cualquier otra conmensurabilidad de primer orden. Para $e = 0$, todas las condiciones iniciales con $a < a_{\text{res}}$ prácticamente no muestran cambios en la excentricidad y permanecen cerca de las órbitas circulares a lo largo de la integración. Sólo aquellas condiciones iniciales con $a > a_{\text{res}}$

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

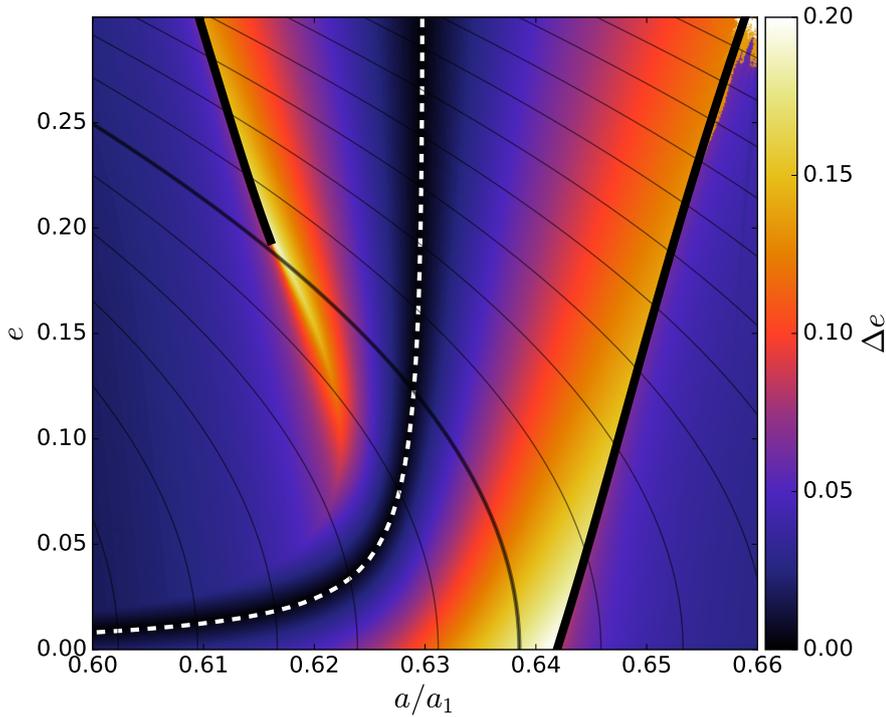


Figura 4.5: Valores de Δe en el plano representativo $(a/a_1, e)$ de las condiciones iniciales osculadoras en la vecindad de la RMM 2:1 con Júpiter (masa actual). Todas las variables angulares se inicializaron iguales a cero. La rama pericéntrica de las soluciones de amplitud cero se muestra como una blanca discontinua y ambas ramas de la separatriz en líneas negras continuas gruesas. Las curvas $N^* = \text{cte.}$ se indican con líneas grises, mientras que N_c se resalta con una curva gris más gruesa. Las regiones de máxima variación de la excentricidad aparecen en blanco, mientras que las asociadas a pequeños cambios se las indica en negro. Figura adaptada de Ramos *et al.* (2015).

muestran un incremento en la excentricidad, alcanzando un máximo en la ubicación de la rama interna de la separatriz, ubicada aproximadamente en $a \simeq 0,64a_1$.

De nuevo, la no existencia de la separatriz externa para bajas excentricidades es el resultado de trazar el plano representativo en variables no canónicas. Para todos los valores de $N^* \geq N_c$ existen ambas ramas de la separatriz, aunque con diferentes valores del semieje mayor y excentricidad.

4.4.2. Mapa dinámico a gran escala del plano representativo

Con el fin de comparar las diferentes versiones del criterio de superposición de resonancia, se construyó un mapa dinámico en el plano $(a/a_1, m_1/m_0)$, con 800 valores del semieje mayor osculante y 200 valores de la relación de masa entre $m_1/m_0 \in [10^{-6}, 10^{-2}]$. Las excentricidades osculadoras y los ángulos iniciales se eligieron iguales a cero, y todas las órbitas se integraron por 10^5 períodos orbitales del perturbador. Los resultados se muestran en la figura 4.6, donde las regiones azules marcan pequeños cambios en la excentricidad, y las regiones en rojo oscuro indican movimiento hiperbólico y/o escapes.

4.4 Pruebas numéricas de los criterios de superposición

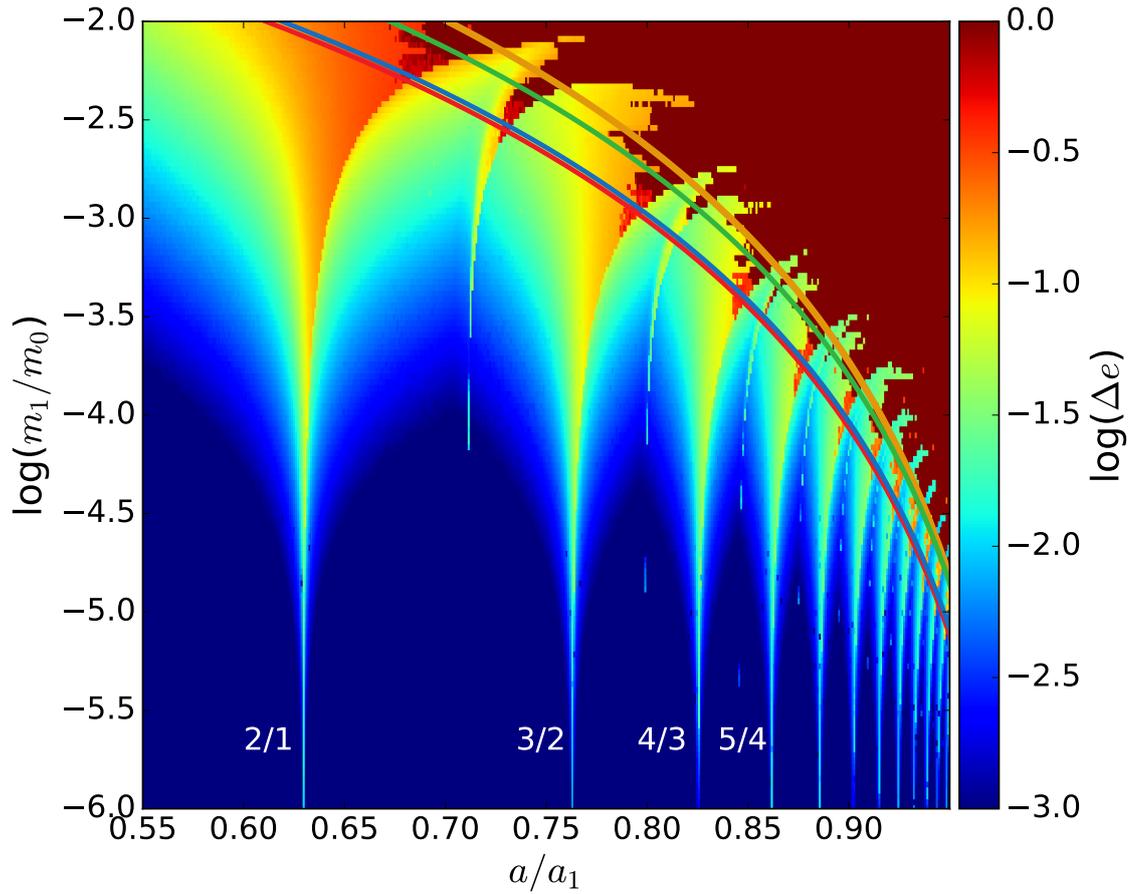


Figura 4.6: Mapa Δe de condiciones iniciales en el plano $(a/a_1, m_1/m_0)$ (en elementos osculadores) con órbitas circulares. Las órbitas hiperbólicas finales se muestran en rojo oscuro. Las curvas de color son diferentes predicciones de la superposición de resonancia: el criterio de Wisdom con $D = 1,30$ (verde), la expresión analítica de Deck et al. (2013) con $D = 1,46$ (azul), el ajuste numérico de Duncan et al. (1989) con $D = 1,49$ (rojo), y el criterio desarrollado aquí (naranja). La ubicación de las principales RMM de primer orden están indicadas con texto blanco. Figura adaptada de Ramos et al. (2015).

El mapa muestra las diferentes resonancias presentes en este intervalo de semieje mayor, comenzando con la RMM 2:1 en $a/a_1 \simeq 0,63$, hasta resonancias de primer orden con $p \rightarrow 20$ para relación de semieje mayores superior a 0,95. Estas resonancias generan un límite en forma de “dientes de sierra” para la región inestable. Como veremos más adelante, no todas corresponden a conmensurabilidades de primer orden. La misma figura muestra, en curvas continuas, las predicciones de los diferentes criterios de superposición discutidos en la sección anterior. Para permitir una comparación adecuada, todos los valores de a_{superp}^* fueron transformados a semiejes mayores osculadores.

Si bien todos los criterios parecen similares, las expresiones deducidas por Duncan et al. (1989) y Deck et al. (2013) parecen ajustarse bien a los extremos inferiores de la estructura en forma de dientes de sierra. En el caso del valor da-

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

do por [Duncan *et al.* \(1989\)](#), esto no es inesperado ya que se obtuvo mediante un ajuste de cuadrados mínimos de una serie de simulaciones numéricas usando un mapa simpléctico. La curva verde, correspondiente a la predicción original de [Wisdom \(1980\)](#), pasa a través de la mitad de la región de diente de sierra, como si estas estructuras fueran aplanadas. Entonces, el valor $D = 1,30$ parece dar un mejor límite “promedio” entre los dominios estable e inestable. Por último, la curva naranja presenta las predicciones de la ecuación (4.24). Aunque tiene una forma funcional diferente, produce prácticamente los mismos resultados que [Wisdom \(1980\)](#) para $m_1/m_0 < 10^{-4}$. Sin embargo, para las masas más grandes hay una discrepancia cada vez mayor y perceptible, y nuestros valores están sistemáticamente más cerca del perturbador.

Antes de proceder a una comparación más detallada entre estos modelos, es importante revisar si las suposiciones detrás del criterio de superposición de la resonancia son de hecho coherentes con las estructuras mostradas en los mapas dinámicos. En primer lugar, hay evidencia de resonancias de segundo orden (5 : 3, 7 : 5, 9 : 7, etc.), particularmente cercanas al límite de inestabilidad, que interactúan con las RMM de primer orden y contribuyen a generar el dominio caótico. Éstas no se consideran en los criterios de superposición desarrollados hasta ahora.

Una segunda característica que se puede percibir desde el mapa dinámico es que la separatriz externa de las RMMs de primer orden parece tener poco efecto en la dinámica del sistema. La razón detrás de esto se mencionó antes: la separatriz externa (localizada en $a < a_{\text{res}}$) sólo existe para las excentricidades por encima de cierto umbral, y no está presente para las órbitas circulares. Entonces, la única región realmente resonante para órbitas circulares ocurre para $a > a_{\text{res}}$ y se caracteriza por la separatriz interna. Por lo tanto, la idea de usar el ancho de libración para la separatriz interna como un estimador para la rama externa, es cuestionable (al menos para las órbitas circulares).

4.4.3. Nuevo criterio con RMMs de 1^{er} y 2^{do} orden

Para analizar este punto con más detalle, la figura 4.7 muestra el mismo mapa dinámico que antes, sólo que esta vez hemos superpuesto la posición nominal de las RMMs de primer y segundo orden (líneas negra y verde discontinuas, respectivamente) en términos del semieje mayor osculante. Mientras que a_{res}^* es una función débil de la masa perturbadora (y en realidad disminuye para valores mayores de m_1), la diferencia entre a^* y a muestra una dependencia mucho más fuerte. Por otra parte, nuestra elección de ángulos para el plano representativo (es decir, $\lambda = \lambda_1 = \omega = 0$) corresponde al valor máximo alcanzado por el semieje mayor debido a oscilaciones de corto período, lo que conduce a resonancia exacta que se produce más cerca del planeta debido al aumento de m_1 .

La misma figura también muestra, en curvas negras continuas, la separatriz

4.4 Pruebas numéricas de los criterios de superposición

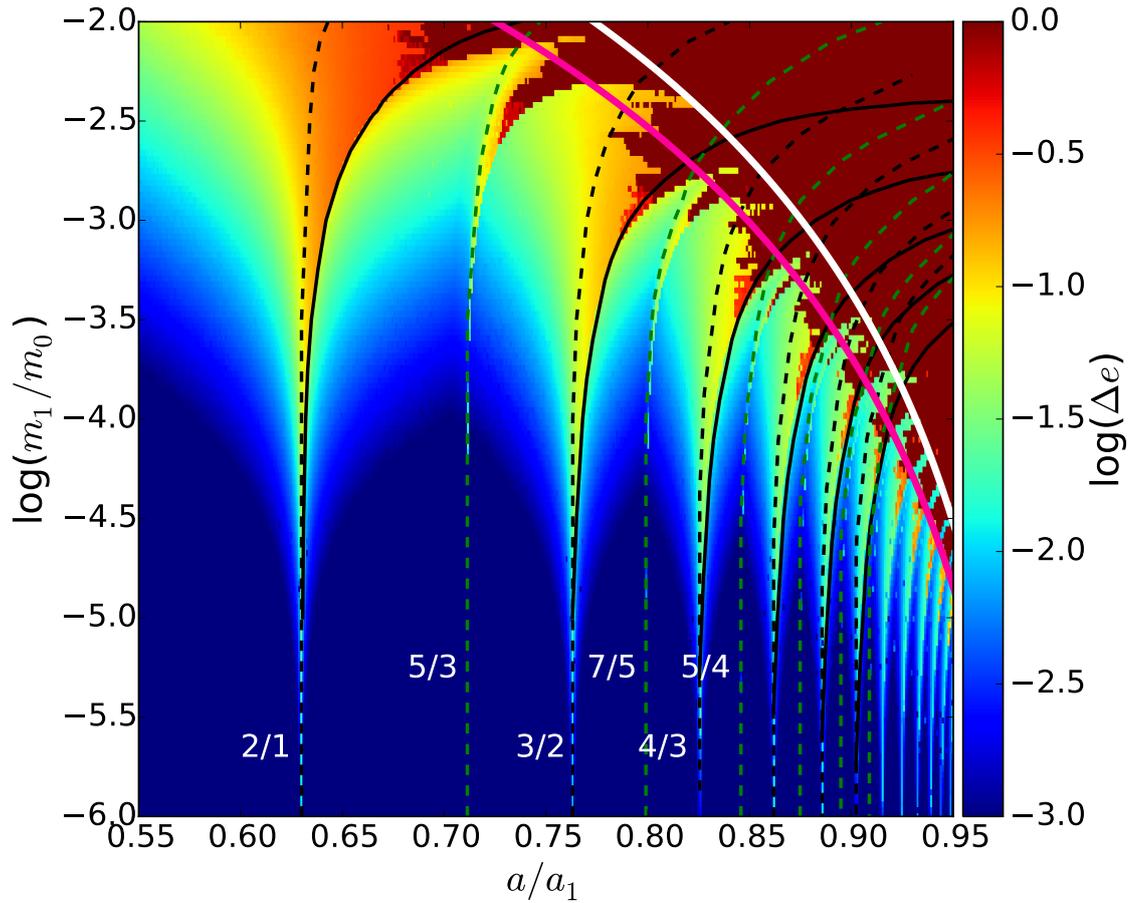


Figura 4.7: El mismo mapa dinámico mostrado en figuras anteriores, sólo que esta vez superpuesto con la estructura resonante de las RMM de primer (negro) y segundo orden (verde). La ubicación de cada rama pericéntrica se muestra en líneas discontinuas, mientras la extensión de la separatriz interna para órbitas circulares (sólo resonancias de primer orden) se muestra en líneas continuas. La curva rosada muestra el resultado del nuevo criterio de superposición de resonancia desarrollado utilizando estas resonancias (4.27). La curva blanca gruesa, correspondiente a la ecuación (4.28), es la ubicación aproximada del comienzo de la región inestable global. Figura adaptada de Ramos *et al.* (2015).

interna para las conmensurabilidades de primer orden. Ahora podemos ver un mejor acuerdo entre la estructura resonante y los resultados de las simulaciones numéricas. A medida que consideramos valores mayores de m_1 , la región cercana a la separatriz interna de cada resonancia de primer orden se vuelve cada vez más caótica, generando una región de inestabilidad orbital, caracterizada por $\Delta e \rightarrow 1$. Paralelamente, aparece un dominio caótico diferente, ligado a conmensurabilidades de segundo orden, cuyos efectos han sido casi despreciables hasta ese punto. El tamaño de ambas regiones caóticas aumenta con la masa perturbadora hasta que, en algún punto, ambas se intersectan. El caos global entonces se establece y la mayoría de las condiciones iniciales entre ambas conmensurabilidades se vuelven inestables.

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

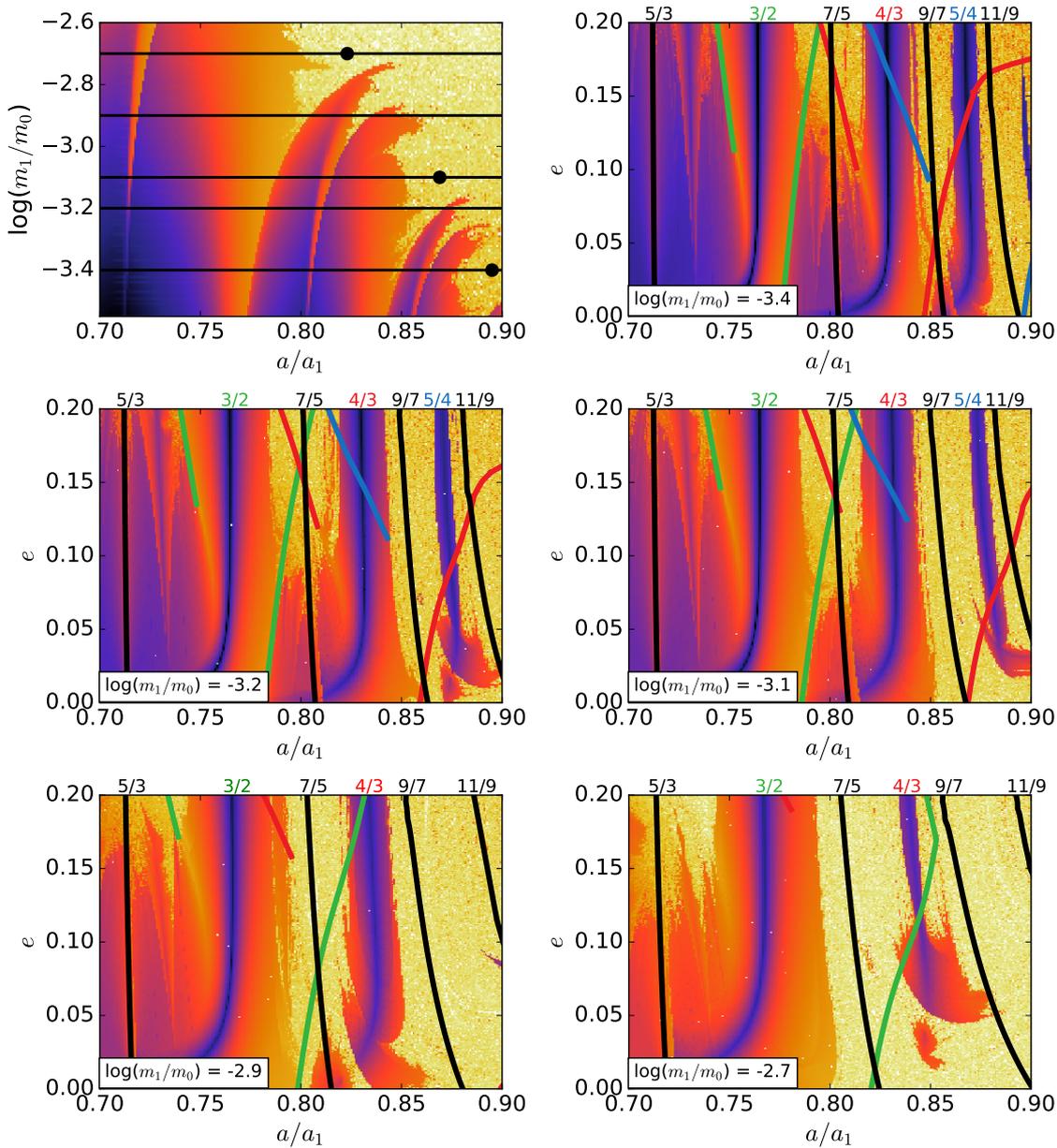


Figura 4.8: El gráfico superior izquierdo muestra un aumento del mapa dinámico en el plano $(a/a_1, m_1/m_0)$ presentado en la figura anterior. Se destacan cinco valores de la masa perturbadora con líneas horizontales negras. La intersección entre resonancias de primer y segundo orden adyacentes se indica con círculos negros. Los gráficos restantes presentan nuevos mapas dinámicos en el plano $(a/a_1, e)$ para cada valor de m_1/m_0 . La ubicación de las resonancias de segundo orden se indican con líneas negras, mientras que la separatriz de la RMM de primer orden se muestra en diferentes colores. Cada comensurabilidad se indica en la parte superior de los gráficos. Figura adaptada de [Ramos *et al.* \(2015\)](#).

Una vista complementaria se presenta en la figura 4.8, en forma de nuevos mapas en el plano $(a/a_1, e)$ para cinco valores de m_1/m_0 . Como antes, las regiones oscuras están asociadas a pequeños cambios en la excentricidad durante el

4.4 Pruebas numéricas de los criterios de superposición

tiempo de integración total, mientras que lo contrario ocurre para las condiciones iniciales identificadas con tonos más claros. La ubicación de resonancias de segundo orden se indican en líneas negras, mientras que la separación de conmensurabilidades de primer orden se muestran en curvas de color. Estos se calcularon utilizando un modelo semi-analítico (por ejemplo [Beauge, 1994](#)) y no con el SMFR para permitir una mejor correlación con los resultados numéricos. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la separatriz ha sido trazada asumiendo resonancias aisladas y, como tal, no toma en cuenta las perturbaciones que surgen por la proximidad a otras conmensurabilidades.

Si bien las características dinámicas son complejas y muestran evidencia de la interacción entre muchas resonancias diferentes, algunas características pueden ser descifradas analizando su evolución como función de la masa planetaria. Para $m_1/m_0 = 10^{-3,4}$, todas las órbitas inicialmente circulares con $a/a_1 > 0,88$ son inestables, un valor cercano al punto de intersección entre la resonancia 11 : 9 y la separatriz interna de la conmensurabilidad 5 : 4. Las condiciones iniciales con semieje mayor más pequeño aparecen principalmente como regulares, aunque un movimiento caótico es visible en la proximidad de $a/a_1 \simeq 0,85$, asociado a una intersección cercana entre la resonancia 9 : 7 y la separatriz interna de la 4 : 3.

Entre $m_1/m_0 = 10^{-3,2}$ y $m_1/m_0 = 10^{-3,1}$, las RMM 9 : 7 y 4 : 3 se intersectan y todas las condiciones iniciales circulares más cercanas al planeta son inestables. Una nueva región aislada de movimiento caótico aparece en $a/a_1 \simeq 0,80$, generada por la interacción entre la conmensurabilidad 7 : 5 y la separatriz interna de la resonancia 3 : 2. Para $m_1/m_0 = 10^{-2,9}$ esta capa caótica se hace más extensa y finalmente se fusiona con la región de inestabilidad global para $m_1/m_0 \simeq 10^{-2,7}$.

El mismo comportamiento se puede observar para otros valores de la masa planetaria y semieje mayor. Por lo tanto, parece que la inestabilidad global se puede estimar por la intersección de la separatriz interior (es decir, ubicada en $a > a_{\text{res}}$) de una determinada RMM de primer orden con la ubicación nominal de su conmensurabilidad de segundo orden adyacente (es decir, círculos negros en el gráfico superior izquierdo de la figura 4.8). De hecho, el ancho de libración de la resonancia de segundo orden no parece importante en absoluto. Este resultado simplifica enormemente los cálculos, ya que no necesitamos modelar la estructura de las resonancias de segundo orden; todo lo que necesitamos es estimar su ubicación en el dominio del semieje mayor para cualquier masa planetaria dada.

Estos resultados numéricos nos llevan a postular un nuevo criterio de superposición basado en la interacción entre RMMs de primer y segundo orden adyacentes. Para calcular este nuevo criterio, primero escribimos el movimiento medio promediado de una RMM genérica de primer orden y su conmensurabilidad adyacente de segundo orden como:

$$n_{\text{res}}^* = \frac{p+1}{p} n_1 \quad ; \quad n_{\text{res}}^{*'} = \frac{2p+3}{2p+1} n_1. \quad (4.25)$$

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

Esta expresión excluye “falsas” resonancias de segundo orden tales como la 4 : 2 o la 6 : 4, ya que tanto el numerador como el denominador presentes en n_{res}^* son números impares. La distancia entre ellas se puede calcular usando el mismo procedimiento que en la 4.3.2, que ahora da:

$$\Delta a_{\text{res}}^*(p_c) = a_1 \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^{1/3} \left[\left(\frac{2p_c + 1}{2p_c + 3} \right)^{2/3} - \left(\frac{p_c}{p_c + 1} \right)^{2/3} \right]. \quad (4.26)$$

Para el ancho mitad de libración de las conmensurabilidades de primer orden usamos la expresión (4.15), análogo a nuestra derivación del criterio de superposición clásico. Con las ecuaciones (4.26) y (4.15) podemos resolver para p_c tal que $\Delta a^*(p_c) = \Delta a_{\text{res}}^*(p_c)$. Después de transformar el resultado en términos del semieje mayor osculador a , obtenemos finalmente nuestra nueva condición de superposición:

$$a_{\text{superp}} \simeq a_1 \left[1 - 0,91 \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^{0,26} \right], \quad (4.27)$$

donde ambos coeficientes numéricos se determinan a partir de una regresión no lineal con valores $m_1/m_0 \in [10^{-7}, 10^{-1}]$. La figura 4.7 muestra, con una curva de color rosado, la predicción de este nuevo criterio. Dado que los cálculos no son exactos, existe una ligera diferencia con respecto a las intersecciones de resonancia reales. Es interesante observar que este resultado es muy similar al determinado mediante la condición clásica de superposición (es decir, la figura 4.6), aunque ambos se obtuvieron con suposiciones completamente diferentes.

Dado que el SMFR subestima el ancho de la separatriz (ver figura 3.6), las predicciones de la expresión (4.27) quedan por debajo del límite de inestabilidad como se muestra en la figura 4.8. Sin embargo, encontramos que es posible mejorar la estimación simplemente cambiando el factor numérico. La curva blanca en la figura 4.7 corresponde a la ecuación:

$$a_{\text{inestable}} \simeq a_1 \left[1 - 0,75 \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^{0,26} \right], \quad (4.28)$$

que tiene la misma dependencia funcional con la masa perturbadora como el nuevo criterio de superposición, pero con un coeficiente más pequeño. Aunque se trata de una corrección empírica de nuestro resultado analítico, se obtiene una estimación bastante exacta del valor del semieje mayor osculador que marca el comienzo de la región de inestabilidad global.

4.5. El criterio de estabilidad de Hill

Un criterio de estabilidad diferente puede definirse en términos del valor de la constante de Jacobi C_J de la partícula, en comparación con su valor C_{L_1} en el

4.5 El criterio de estabilidad de Hill

punto L_1 de Lagrange. Si $C_J > C_{L_1}$, entonces el cuerpo sin masa está atrapado para siempre en una curva de velocidad cero que abarca la masa central m_0 , pero que no contiene la masa perturbadora m_1 . En tal caso la condición inicial se dice que es estable en el sentido de Hill. Por el contrario, si las condiciones iniciales son tales que $C_J < C_{L_1}$, entonces su estabilidad no está garantizada, y pueden sufrir encuentros cercanos con m_1 y quedar atrapadas temporalmente por el primario más pequeño. Su movimiento alrededor de m_0 se caracterizará entonces por órbitas hiperbólicas y por lo tanto será catalogado como inestable.

La constante de Jacobi constituye entonces una valiosa herramienta con la que determinar la estabilidad (Hill) de una determinada partícula sin masa en el marco del P3CRC. Vamos a hacer uso de esta característica para desarrollar un criterio de estabilidad complementario que luego se comparará con las predicciones del criterio de superposición de resonancia.

4.5.1. Estabilidad de Hill en elementos orbitales

El principal problema con la aplicación práctica de este criterio es calcular tanto la constante de Jacobi para L_1 como su valor para cualquier condición inicial dada en elementos orbitales. Las ecuaciones usualmente encontradas en la literatura o bien usan expansiones en serie (que pueden o no dar resultados precisos para grandes masas planetarias) o requieren coordenadas cartesianas y velocidades en el marco de referencia rotante. En los próximos párrafos vamos a introducir una forma de superar ambas limitaciones.

Seidov (2004) introdujo fórmulas cerradas para calcular la posición y constante de Jacobi para L_1 . Llamemos r_{L_1} la distancia de m_0 a L_1 . Entonces podemos escribir:

$$r_{L_1} = a_1(1 - \delta_{L_1}), \quad (4.29)$$

donde la nueva cantidad auxiliar satisfaga $\delta_{L_1} \rightarrow 0$ cuando $m_1 \rightarrow 0$. Seidov (2004) encontró que δ_{L_1} y la masa planetaria están relacionadas a través de:

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{(1 - \delta_{L_1})^3(1 + \delta_{L_1} + \delta_{L_1}^2)}{\delta_{L_1}^3(3 - 3\delta_{L_1} + \delta_{L_1}^2)}. \quad (4.30)$$

Aunque esta ecuación es exacta para cualquier valor m_1 , es implícita en δ_{L_1} . Para determinar la posición de L_1 como función de la masa planetaria, debemos resolverla usando sucesivas aproximaciones. Dado que δ_{L_1} suele ser una cantidad pequeña, podemos reescribir (4.30) en una forma más adecuada para el proceso iterativo. Esto es:

$$\delta_{L_1}^3 = \frac{1}{3}(1 - \delta_{L_1})^3(1 + \delta_{L_1} + \delta_{L_1}^2) \left(\frac{m_1}{m_0} \right) + \delta_{L_1}^4 - \frac{1}{3}\delta_{L_1}^5. \quad (4.31)$$

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

Al elegir cero como suposición inicial en el lado derecho, esta expresión puede resolverse en pocas iteraciones y produce resultados muy precisos incluso para grandes valores de la masa perturbadora.

Una vez determinada la ubicación del punto de Lagrange, el valor de la constante de Jacobi C_{L_1} también se puede calcular usando una fórmula cerrada. Una vez más siguiendo a [Seidov \(2004\)](#), podemos escribir:

$$C_{L_1} = \frac{\mathcal{G}(m_0 + m_1)}{a_1} \left(\frac{3 - 12\epsilon + 15\epsilon^2 - 10\epsilon^3 - 4\epsilon^4}{(1 - 2\epsilon - \epsilon^2)^2} \right), \quad (4.32)$$

donde $\epsilon = \delta_{L_1}(1 - \delta_{L_1})$.

Nuestra siguiente tarea es obtener una ecuación explícita para C_J para cualquier partícula sin masa en términos de sus elementos orbitales. Aunque la constante de Jacobi se expresa generalmente en coordenadas cartesianas en el marco de referencia rotante, también es posible escribirlo en un marco inercial (por ejemplo, [Murray y Dermott, 1999](#)). Asumiendo las condiciones iniciales $\lambda = \lambda_1 = \varpi = 0$ (es decir, la partícula se encuentra en su pericentro y todos los cuerpos están alineados), entonces encontramos:

$$C_J = 2n_1 \left(\mathcal{G}m_0 a(1 - e^2) \right)^{1/2} + 2\mathcal{G} \left(\frac{m_0}{\Delta_0} + \frac{m_1}{\Delta_1} \right) - \frac{\mathcal{G}m_0}{a} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right), \quad (4.33)$$

donde n_1 es el movimiento medio del planeta perturbador, y Δ_i son las distancias desde el cuerpo sin masa a m_i , dada por:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= a(1 - e), \\ \Delta_1 &= a_1 - a(1 - e). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Con estas expresiones sencillas podemos ahora calcular el borde del límite de la estabilidad de Hill. Dado los valores de m_0 , m_1 y e , buscamos el valor del semieje mayor a_{Hill} tal que $C_J = C_{L_1}$. Este procedimiento se puede realizar para un rango de masas planetarias m_1 , a partir de la cual podemos construir nuestra curva de límite de estabilidad en el plano $(a/a_1, m_1/m_0)$.

Un punto importante es que, contrariamente al criterio de superposición de resonancia, todas las expresiones desarrolladas aquí se dan en términos de elementos orbitales osculadores. El único inconveniente es que este criterio no puede expresarse en una forma cerrada simple para valores arbitrarios de m_1 . Aunque algunas aproximaciones pueden encontrarse en la literatura (por ejemplo, [Gladman, 1993](#); [Deck et al., 2013](#)), generalmente basadas en la descripción de Hill del problema restringido de tres cuerpos, usualmente son precisas para pequeñas masas perturbadoras (del orden de $m_1/m_0 \sim 10^{-4}$ y menor), e incluso sólo en el caso circular. En comparación, el modelo desarrollado anteriormente sigue siendo puramente analítico y extremadamente rápido de usar una vez implemen-

4.5 El criterio de estabilidad de Hill

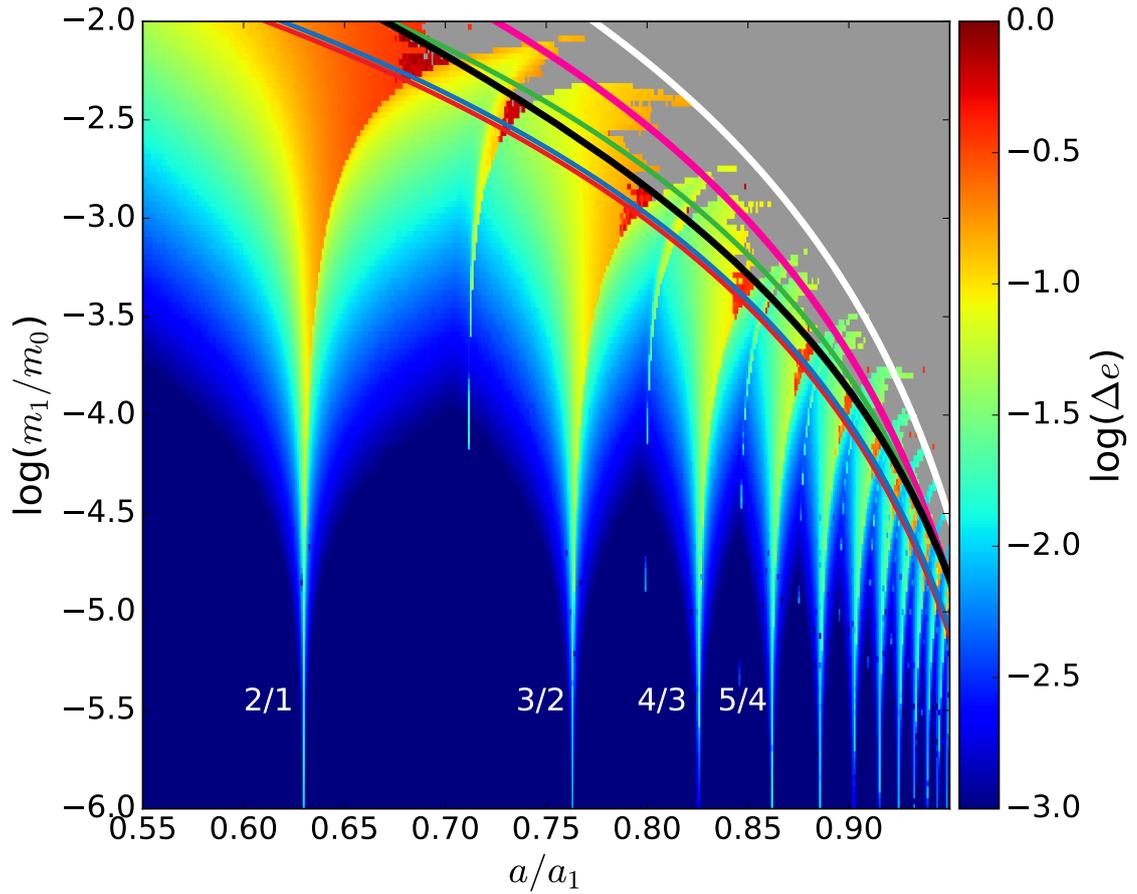


Figura 4.9: Mapa dinámico para órbitas inicialmente circulares (es decir, $e = 0$) y todas las variables angulares iguales a cero, para una grilla de condiciones iniciales en el plano $(a/a_1, m_1/m_0)$. Este mapa es equivalente al discutido ampliamente en la sección anterior, excepto que todas las condiciones iniciales inestables están resaltadas en gris. Las curvas más finas marcan las predicciones de los diferentes criterios de superposición de resonancia; en verde Wisdom (1980), en azul Deck *et al.* (2013), en rojo Duncan *et al.* (1989), en rosado el nuevo límite de superposición definido en la sección 4.3. La curva negra muestra las predicciones del criterio de estabilidad de Hill, mientras que la curva blanca es el límite de la inestabilidad global empírica $a_{\text{inestable}}(m_1/m_0)$ dada por la ecuación (4.28). Figura adaptada de Ramos *et al.* (2015).

tado en un código numérico.

4.5.2. Aplicación a órbitas circulares

Para comparar las predicciones de este criterio con las obtenidas de la superposición de resonancias, analizaremos primero el caso $e = 0$. Los resultados se muestran en la figura 4.9, de nuevo en primer plano del mismo mapa dinámico discutido en la sección anterior. Sin embargo, también hemos resaltado en gris todas las condiciones iniciales que son inestables dentro del tiempo de integración. Estos incluyen casos en los que la órbita final es hiperbólica, así como aquellos

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

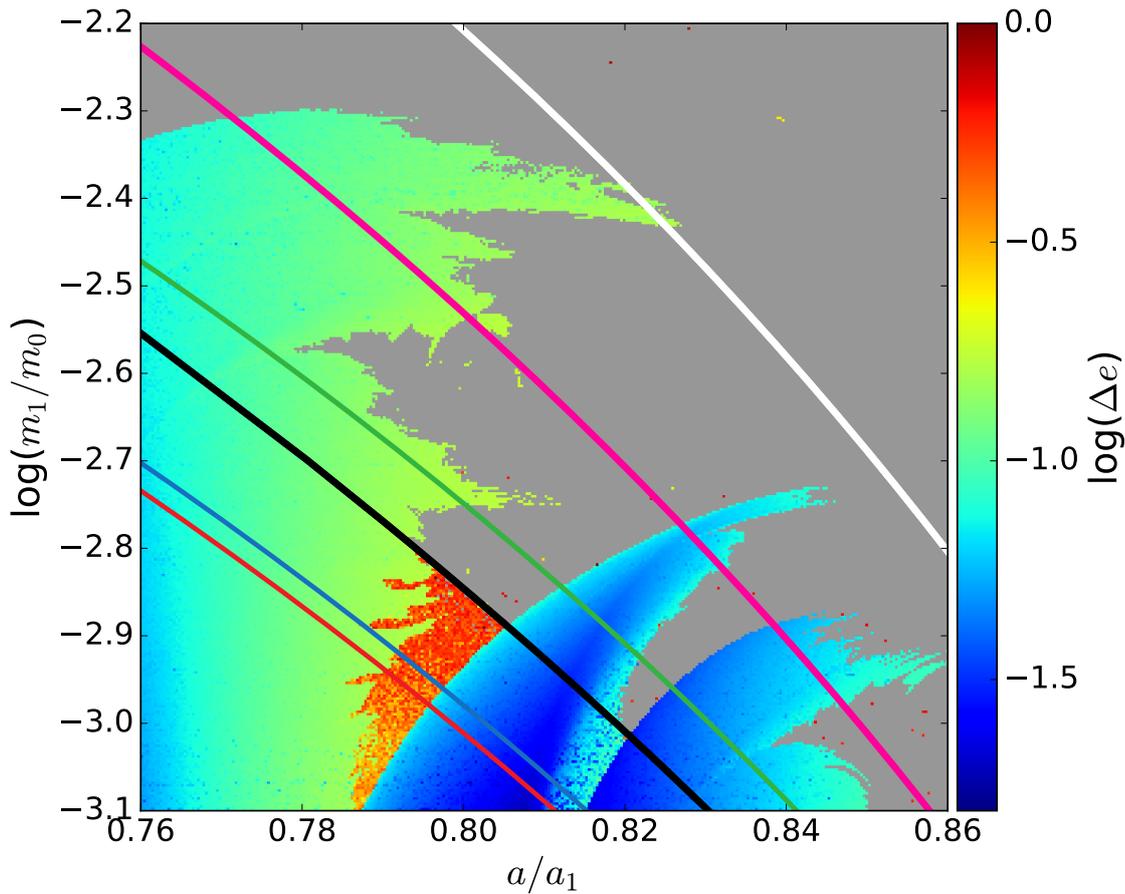


Figura 4.10: Lo mismo que en la figura anterior, pero ahora con un aumento en un pico centrado aproximadamente alrededor de la resonancia de movimiento medio 3 : 2. Observar el cambio en la estabilidad en ambos lados del límite de Hill. Figura adaptada de [Ramos et al. \(2015\)](#).

que cruzan la órbita del perturbador, manteniendo $e < 1$. La curva blanca es el valor empírico de $a_{\text{inestable}}$, mientras que la curva negra es la predicción del actual Criterio de Estabilidad de Hill a_{Hill} . Todas las versiones del criterio de superposición de resonancia se muestran en líneas continuas delgadas.

La figura 4.10 muestra un detalle de la región alrededor del pico cerca de la RMM 3 : 2. Este gráfico se construyó a partir de un nuevo conjunto de simulaciones numéricas que cubren una grilla de 300×300 en semieje mayor y relación de masa. Como antes, todos los ángulos fueron iniciados iguales a cero y el tiempo de integración para cada condición inicial fue de 10^5 órbitas del perturbador. Cada pico muestra una forma compleja en el lado izquierdo, pero un borde significativamente más suave en el lado derecho. El origen de esta dicotomía no es clara, aunque podría ser causada por las resonancias de alto orden que son sólo visibles en este nivel de detalle.

Como siempre, las líneas continuas delgadas muestran el resultado de los diferentes criterios de superposición de resonancia, mientras que la curva blanca es la encargada de comenzar la región de inestabilidad global. Excepto para un

4.5 El criterio de estabilidad de Hill

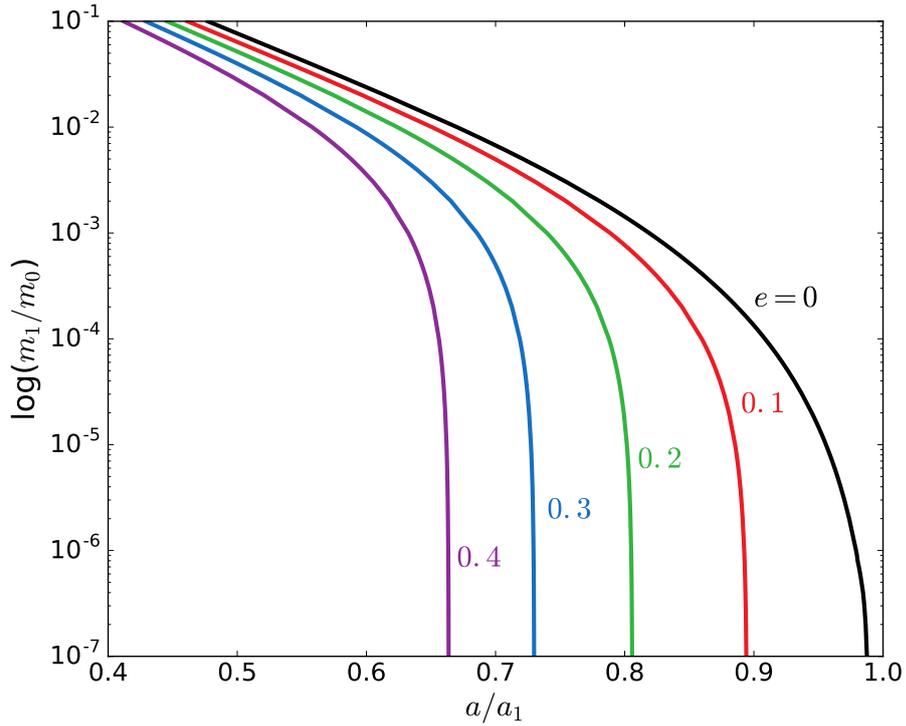


Figura 4.11: El límite de la estabilidad de Hill para valores diferentes de la excentricidad de la partícula (identificada por el número que acompaña cada curva). Figura adaptada de Ramos *et al.* (2015).

borde grande alrededor de $m_1/m_0 \simeq 10^{-2,4}$, esta predicción del comienzo de la zona caótica parece muy precisa. De vuelta, con la excepción del diente de sierra, todas las condiciones iniciales con $a > a_{\text{inestable}}$ (es decir, más allá de la curva blanca) son inestables.

La curva negra muestra los resultados del límite de estabilidad de Hill. Aunque la estructura de diente de sierra parece indiferente a la presencia de la curva límite, los valores de Δe son diferentes en ambos lados. Todas las órbitas que satisfacen la condición $a > a_{\text{Hill}}$ son de hecho inestables, dando credibilidad a nuestras expresiones en términos de los elementos orbitales. Sin embargo, para los semiejes mayores más pequeños, el aumento de la excentricidad es significativamente menor, lo que indica que, aunque hay una cierta excitación de la órbita, está limitada y no es suficiente para hacer que el movimiento sea inestable.

Es interesante observar que la región situada entre ambos criterios de estabilidad (es decir, $a_{\text{Hill}} < a < a_{\text{inestable}}$) también se caracteriza por bordes afilados entre órbitas estables e inestables. Más importante aún, la condición $C_J > C_{L_1}$ es suficiente pero no necesaria para la estabilidad. Existen condiciones iniciales para las cuales el movimiento está siempre limitado a la masa central aunque la superficie de velocidad cero incluya ambas primarias.

4.5.3. Aplicación a órbitas excéntricas

La figura 4.11 muestra los resultados del cálculo del límite de Estabilidad de Hill, en el plano $(a/a_1, m_1/m_0)$, para diferentes valores de e . El límite para las masas bajas es muy sensible a la excentricidad inicial, mientras que el cambio parece menos drástico para las masas más grandes. Aún así, incluso una baja excentricidad introduce un cambio significativo en el límite de estabilidad, que debería ser notorio en un mapa dinámico.

La figura 4.12 muestra cuatro mapas dinámicos de Δe donde, al contrario de la figura 4.9, no hemos resaltado las órbitas que son inestables manteniendo bajas excentricidades. Cada gráfico corresponde a una excentricidad inicial diferente de la partícula, como se indica en el texto blanco. A medida que aumenta la excentricidad, también lo hace la región de inestabilidad cercana al planeta, incluso para pequeñas masas perturbadoras. El ancho de libración de cada resonancia también aumenta, generando islas de movimiento muy regular inmersas en regiones de comportamiento altamente caótico. Muchas RMMs de alto grado son notorias para $a \rightarrow a_1$, así como para semieje mayor debajo de la correspondiente a la conmensurabilidad 2 : 1. La estructura de la resonancia se vuelve así cada vez más compleja, mucho más que la observada para las órbitas circulares.

La curva negra indica el límite de estabilidad de Hill, calculado para cada valor de la excentricidad. Podemos ver que sigue muy de cerca al borde interior del dominio caótico, y parece bastante claro que todas las condiciones iniciales con $a < a_{\text{Hill}}$ son estables (al menos para el tiempo de integración total, 10^5 órbitas de m_1). Las curvas blanca corresponden al valor empírico de $a_{\text{inestable}}$ desarrollado en este trabajo, calculado para las órbitas circulares. Sorprendentemente, la misma forma funcional muestra un muy buen acuerdo con el comienzo de la región caótica global, independientemente de la excentricidad de la partícula. Por lo tanto, parece que este límite de estabilidad superior es una función extremadamente débil de e , incluso hasta $e = 0,4$.

Por último, la línea azul discontinua muestra las predicciones del criterio de superposición desarrollado por Mustill y Wyatt (2012) para las órbitas excéntricas y posteriormente refinado por Deck *et al.* (2013). Utilizando un modelo analítico simple para el crecimiento del dominio de libración en función de la excentricidad, ambos trabajos deducen que el límite de superposición tiene una forma funcional proporcional a $(e(m_1/m_0))^{1/5}$, aunque difieren en el valor de la constante numérica. Aquí hemos adoptado la versión de Deck *et al.* (2013).

Tratar de extender el criterio de superposición a órbitas no circulares es complejo. Como hemos mostrado anteriormente, la separatriz externa de la resonancia de primer orden no existe para $e \sim 0$, pero sí aparece para un cierto valor mínimo, y por lo tanto debe tenerse en cuenta en algún momento. Las resonancias de tercer orden también se vuelven perceptibles para las órbitas excéntricas y empiezan a superponerse con conmensurabilidades de bajo orden para excen-

4.5 El criterio de estabilidad de Hill

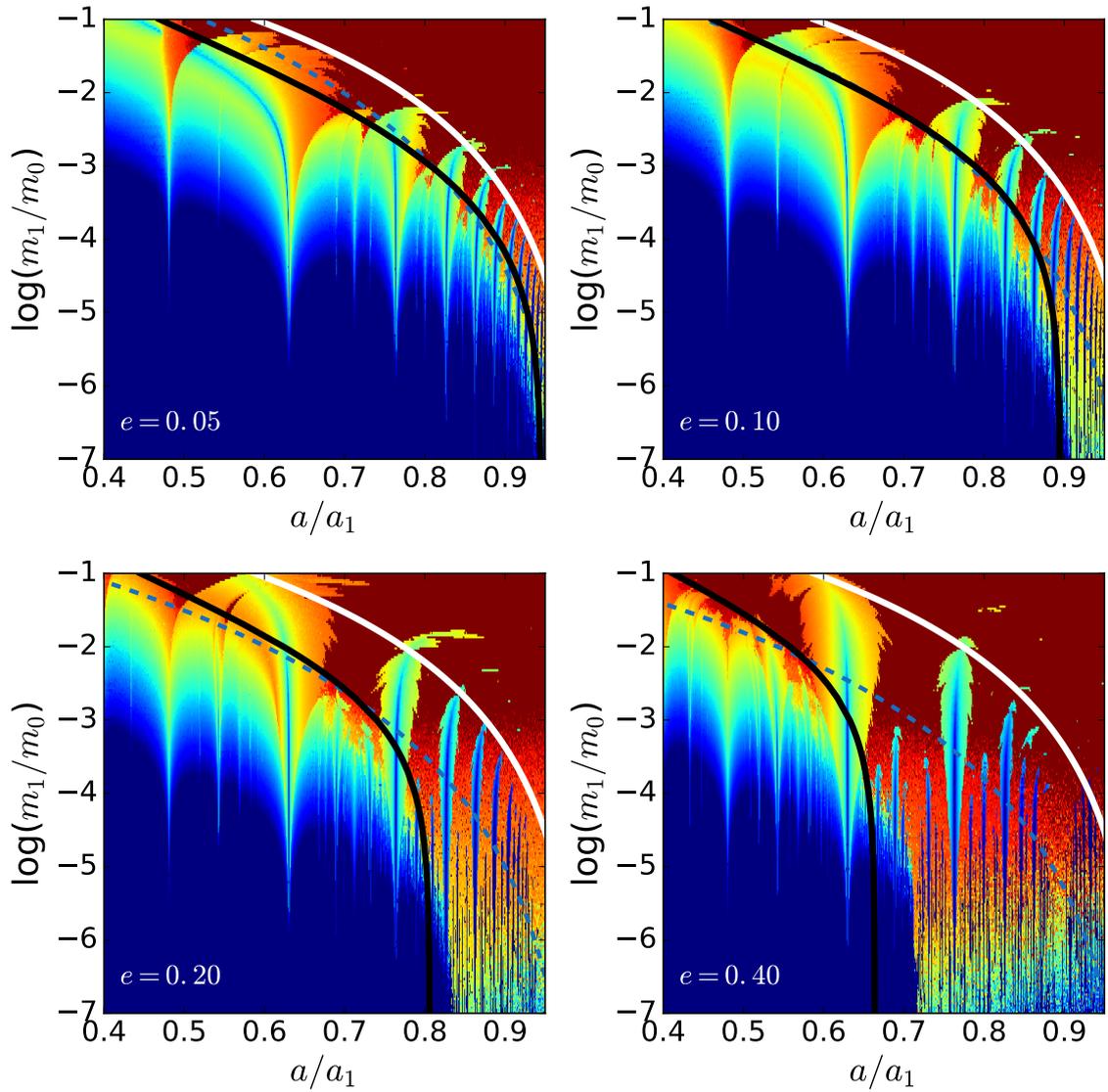


Figura 4.12: Mapas dinámicos de Δe en el plano $(a/a_1, m_1/m_0)$ de las condiciones iniciales para cuatro valores diferentes de las excentricidades de las partículas (indicadas dentro de cada gráfico). Pequeños cambios en la excentricidad después de 10^5 años de tiempo de integración se muestran en azul, mientras que las órbitas inestables que conducen a la eyección se muestran en rojo. En cada gráfico, $a_{\text{inestable}}$ se muestra con una curva de color blanco, mientras que el límite de estabilidad de Hill (calculado para el valor específico de e) se muestra en negro. La línea azul a trazos muestra la derivación analítica del criterio de superposición de las órbitas excéntricas desarrollado por [Deck et al. \(2013\)](#). Figura adaptada de [Ramos et al. \(2015\)](#).

triccidades suficientemente altas.

Dado que es difícil tener en cuenta todos estos factores, no es sorprendente que el modelo analítico no muestre un buen acuerdo con los mapas dinámicos. De hecho, parecen ser un “promedio” entre ambos límites: de superposición de resonancia circular y de la estabilidad de Hill. Sin embargo, para las excentricidades $e \leq 0,1$ hay una muy buena coincidencia con la curva de la estabilidad de

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

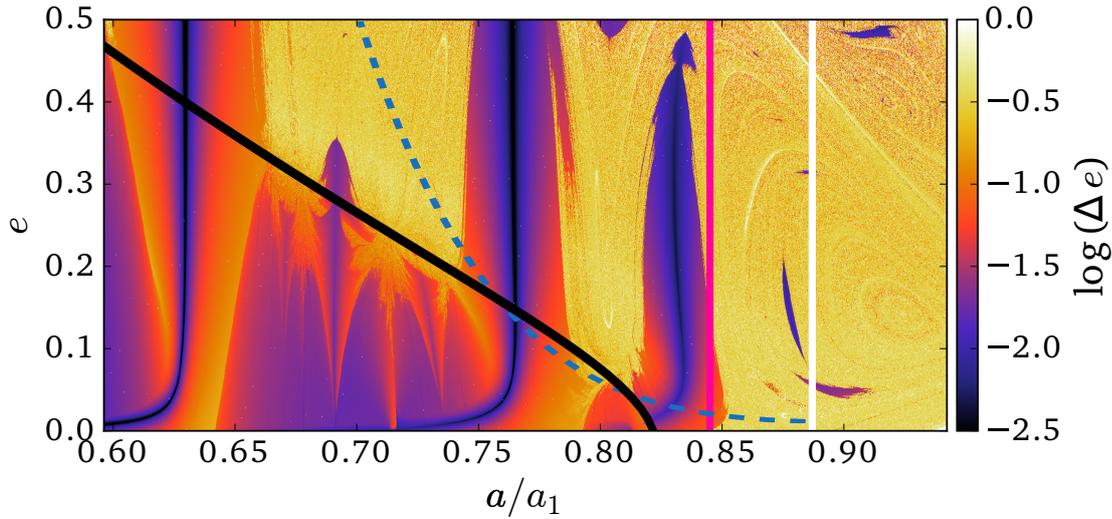


Figura 4.13: Mapa dinámico de Δe para una grilla de condiciones iniciales en el plano $(a/a_1, e)$ de los elementos osculadores (todos los ángulos son iguales a cero), con Júpiter como el perturbador. El tiempo de integración se estableció en 10^3 órbitas del perturbador. Las curvas continuas muestran el límite de estabilidad de Hill (negro), el límite de superposición deducido en este trabajo (rosado) y el valor de $a_{\text{inestable}}$ (blanco). La curva azul discontinua es la predicción del criterio de superposición excéntrica de [Deck et al. \(2013\)](#). Figura adaptada de [Ramos et al. \(2015\)](#).

Hill.

La figura 4.13 muestra un ejemplo diferente. Esta vez construimos un mapa dinámico Δe en el plano representativo $(a/a_1, e)$, considerando Júpiter (con masa actual y órbita circular) como el perturbador. Definimos una grilla de condiciones iniciales con 2048 valores de semieje mayor y 576 valores de la excentricidad inicial. Todos los ángulos se tomaron iguales a cero. El tiempo de integración total fue de 10^3 órbitas del perturbador, lo cual no es suficiente para expulsar órbitas inestables, pero suficiente para mostrar grandes aumentos en la excentricidad.

Aparte de las principales conmensurabilidades de primer orden (2 : 1, 3 : 2 y 4 : 3), hay evidencia distintiva de resonancias de segundo y tercer orden, particularmente la 7 : 4 en $a/a_1 \simeq 0,69$ y la 8 : 5 en $a/a_1 \simeq 0,73$. Éstas son insignificantes para las órbitas casi circulares, pero se vuelven cada vez más importantes para mayores excentricidades (por ejemplo, [Bodman y Quillen, 2014](#)). A $e \sim 0,2$ empiezan a superponerse y generan una gran región caótica cercana a la curva de estabilidad de Hill, mostrada aquí nuevamente como una curva negra.

[Gladman \(1993\)](#) también reportó, a partir del resultado de unas cuantas simulaciones numéricas, que algunas órbitas por encima de la curva de estabilidad de Hill pueden sobrevivir durante largos períodos de tiempo, siempre y cuando satisfagan la condición de Hill para las órbitas circulares. Como mostramos aquí, la relación entre la inestabilidad y el límite de Hill es más compleja.

La curva rosada muestra nuestra versión del criterio de superposición de resonancia, como se deduce para las órbitas circulares, mientras que la línea vertical

4.5 El criterio de estabilidad de Hill

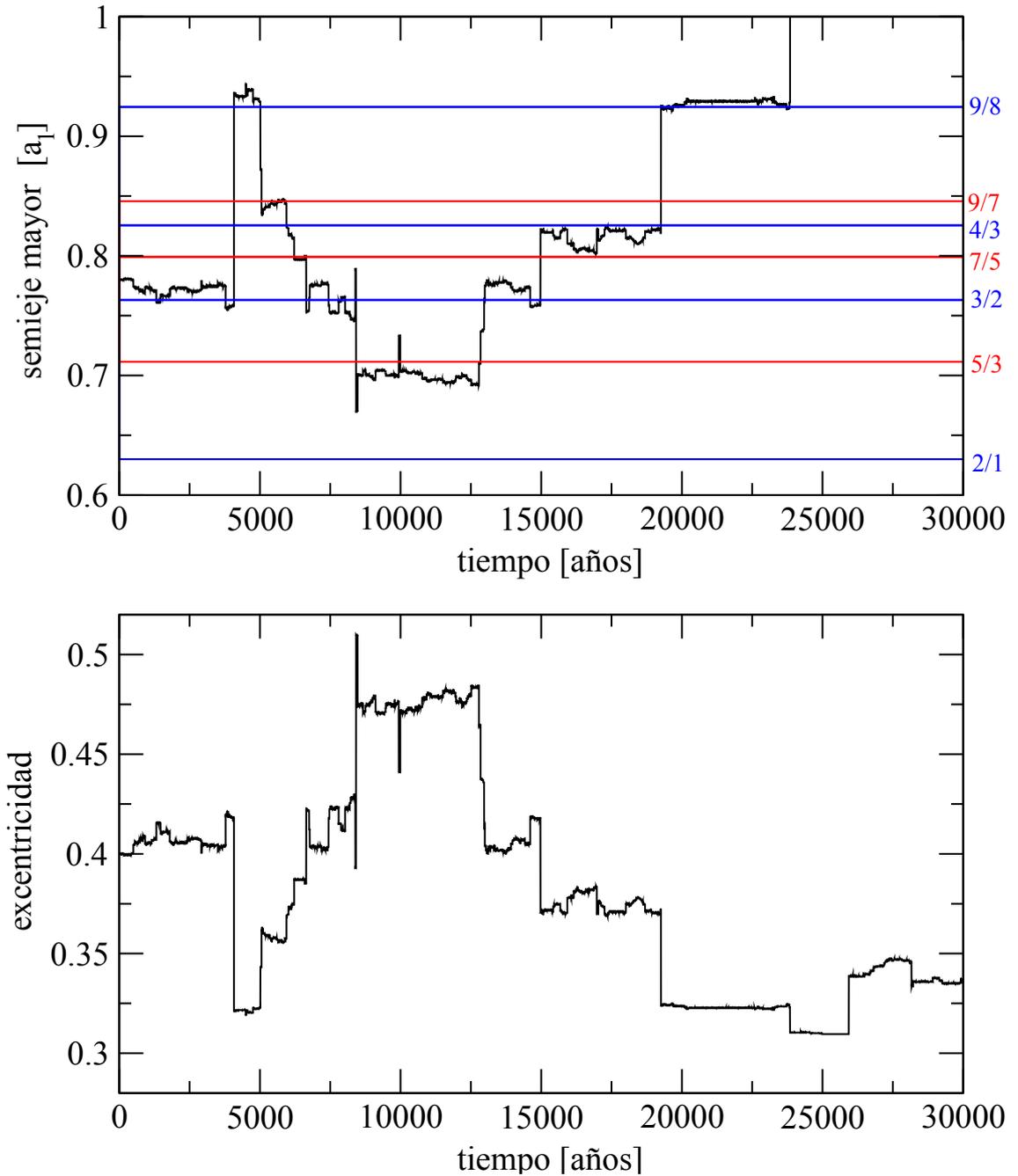


Figura 4.14: Integración numérica de una partícula con $a = 0,8$, $e = 0,4$ y todos los ángulos inicialmente establecidos a cero. La masa perturbadora se eligió igual a $m_1/m_0 = 10^{-6}$. La partícula exhibe un camino aleatorio entre RMMs de primer y segundo orden adyacentes antes de finalmente exceder la órbita del perturbador en $\approx 2,5 \times 10^4$ años. Durante la integración completa la excentricidad permanece cercana a su valor inicial con Δe del orden de 0,1. Figura adaptada de Ramos *et al.* (2015).

blanca muestra el valor de $a_{\text{inestable}}$. En particular, el valor de a_{superp} muestra un muy buen acuerdo con el comienzo de la región caótica global, y parece bastante independiente de la excentricidad. Finalmente, la curva azul discontinua corres-

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

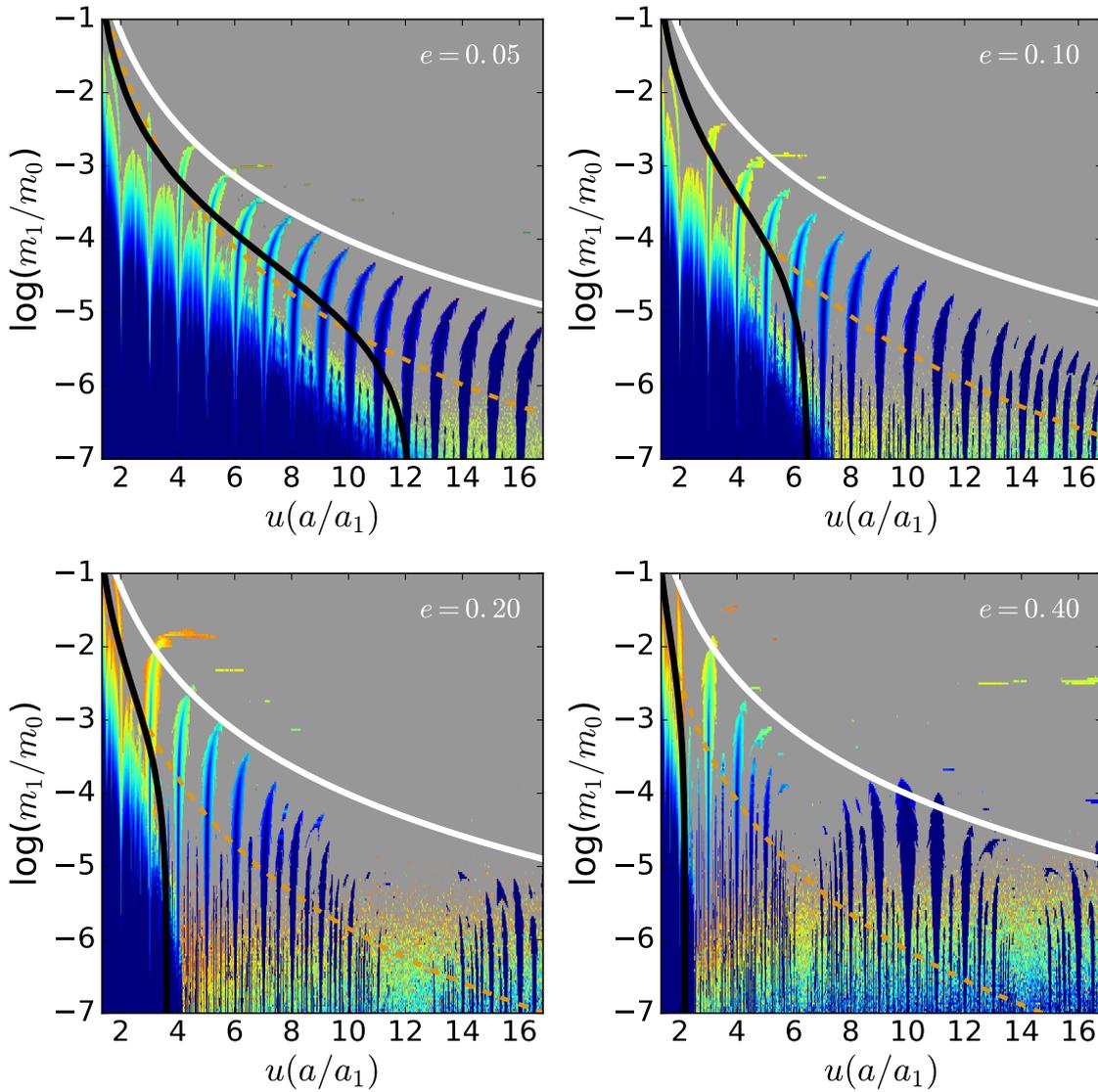


Figura 4.15: De manera similar que la figura 4.12, pero ahora la abscisa es una función de la relación de semieje mayor definida por: $u(a/a_1) = -[(a/a_1)^{3/2} - 1]^{-1}$. En esta nueva variable todas las resonancias de primer orden aparecen equidistantes, permitiendo así una mejor visualización de la estructura resonante más cercana al perturbador. Como antes, la curva negra muestra el límite de estabilidad de Hill, mientras que la blanca corresponde a $a_{\text{inestable}}$. El criterio de superposición excéntrica de [Deck et al. \(2013\)](#) se muestra con una curva naranja discontinua. Figura adaptada de [Ramos et al. \(2015\)](#).

ponde al criterio de superposición excéntrica tal como fue propuesta por [Deck et al. \(2013\)](#).

Las figuras 4.12 y 4.13 muestran que la región entre a_{Hill} y $a_{\text{inestable}}$ crece cuando el valor de e crece y los valores de m_1 decrecen. Esta región de transición se caracteriza por una estructura resonante compleja y muestra la existencia de órbitas estables e inestables. El movimiento estable se encuentra generalmente dentro del dominio de la libración de las resonancias de movimiento medio, mientras

4.6 Conclusiones

que las órbitas inestables abundan en otra parte.

Para las masas perturbadoras inferiores a $m_1/m_0 \sim 10^{-4} - 10^{-3}$, los resultados de la figura 4.12 parecen indicar que las partículas con $a > a_{\text{Hill}}$ no están muy excitadas y permanecen con excentricidades de baja a moderada. Para investigar esto con más detalle, la figura 4.14 muestra la evolución dinámica de una sola condición inicial para un tiempo de integración total de 3×10^4 años. La masa perturbadora se eligió igual a $m_1/m_0 = 10^{-6}$. Como se menciona en la leyenda de la figura, el cuerpo sufre varios saltos en el semieje mayor, quedando atrapado temporalmente entre resonancias de movimiento medio de primer y segundo orden adyacentes. Después de aproximadamente 25000 años la órbita finalmente sobrepasa el semieje mayor del perturbador y eventualmente difunde a las regiones exteriores del sistema. La excentricidad, sin embargo, permanece limitada a lo largo de la integración, con un incremento máximo (con respecto a su valor inicial) del orden de $\Delta e \simeq 0,1$.

Dado que la inestabilidad orbital no está necesariamente asociada a las órbitas hiperbólicas, la figura 4.15 repite los resultados de la figura 4.12, pero ahora la región gris muestra todas las órbitas que se volvieron inestables en 10^5 órbitas, alcanzando $e > 1$ o convirtiéndose en cruzadores de planetas. También trazamos los datos en términos de una función auxiliar $u(a/a_1)$ en lugar del semieje mayor. Esta función se define por:

$$u(a/a_1) = - \left[\left(\frac{a}{a_1} \right)^{3/2} - 1 \right]^{-1}. \quad (4.35)$$

En esta nueva variable todas las resonancias de primer orden aparecen equidistantes, permitiendo así una mejor visualización de la estructura del plano representativo más próximo a la masa perturbadora.

Como antes, el límite inferior de la región caótica está muy bien representado por la estimación circular de $a_{\text{inestable}}$, mientras que la estabilidad de Hill delimita correctamente la apariencia de la gran región de resonancia. La fórmula excéntrica de superposición de [Deck et al. \(2013\)](#) se ve en líneas naranja discontinuas. Además, este criterio muestra nuevamente un buen acuerdo con el límite de Hill para excentricidades bajas y masas planetarias por encima de $m_1/m_0 \sim 10^{-4}$, pero se desplaza rápidamente tanto para las masas inferiores como para las excentricidades más altas.

4.6. Conclusiones

En este capítulo presentamos los resultados de una serie de mapas dinámicos Δe de muy alta resolución en un plano representativo del problema restringido de los tres cuerpos circular y planar, cuyos objetivos fueron dos: (i) obtener una visualización detallada del límite entre órbitas estables e inestables (en el sen-

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

tido de Hill) y (ii) estimar la estructura resonante de las conmensurabilidades de movimiento medio y su relación con el límite de estabilidad. Estos resultados se utilizaron para probar las predicciones del límite de estabilidad de Hill y diferentes versiones del criterio de superposición de resonancia (caso circular y elíptico).

En particular, utilizando el SMFR (Henrard y Lemaître, 1983), obtuvimos una derivación alternativa del criterio de superposición basado en la interacción entre conmensurabilidades de primer y segundo orden que parecen ser responsables de la transición entre el movimiento caótico local y global. La expresión resultante recuerda la presentada por Wisdom (1980), aunque con un coeficiente numérico más pequeño y una dependencia funcional ligeramente diferente con la masa perturbadora.

La postulación de Chirikov del criterio de superposición se construyó para sistemas en los que las resonancias interactuantes se producían en el mismo conjunto de variables canónicas e , implícitamente, con las mismas expresiones para las integrales del movimiento. Estas condiciones no se aplican al problema en cuestión, donde cada resonancia de movimiento medio se caracteriza por expresiones distintas de la integral de N^* , y en consecuencia, el conjunto de variables canónicas son diferentes. Los estudios clásicos han eludido este problema evitando variables canónicas y analizando su interacción en el plano (a, e) , que son comunes a todas las RMMs. Sin embargo, como se vió a lo largo de este capítulo, estos elementos orbitales no son adecuados y la separatriz externa no aparece para el movimiento casi-circular, dando lugar a una serie de suposiciones que no siempre han sido justificadas. Por lo tanto, aunque el criterio de superposición de Chirikov ha sido ampliamente utilizado en el problema circular de tres cuerpos restringido, su aplicabilidad no siempre ha sido adecuadamente verificada.

Es importante destacar que el objetivo de este estudio no ha sido introducir una nueva teoría rigurosa para la superposición de las resonancias, sino presentar un criterio cualitativo que preserve los principios de la formulación clásica y que reproduzca las características dinámicas observadas en las simulaciones numéricas.

Mostramos que no es posible caracterizar el límite de estabilidad usando un solo criterio. El criterio de estabilidad de Hill define el valor máximo del semieje mayor (para una excentricidad dada) para el cual todas las condiciones iniciales son estables (Hill). Por otro lado, una variación empírica de nuestro límite de superposición de resonancias (4.28) es útil para estimar el semieje mayor mínimo para el cual todas las condiciones iniciales son inestables. Entre estas posiciones se encuentra un dominio de transición caracterizado por muchas islas resonantes y rico en movimiento estable e inestable. El tamaño de esta región aumenta con la excentricidad, y decrece con la masa perturbadora, y puede ocupar una porción significativa del espacio de fase.

Para terminar, estos resultados pueden extenderse al caso de dos planetas con

4.6 Conclusiones

dos cambios: (i) reemplazar las variables del SMFR por la expresión dada en el capítulo 3, y (ii) utilizar el criterio de Hill de [Marchal y Bozis \(1982\)](#) en vez de su expresión usual desarrollada para el P3CR.

4. Estabilidad de sistemas planetarios: P3CR

Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

La creciente cantidad de datos observacionales sobre planetas extrasolares y discos protoplanetarios ha estimulado en los últimos años intensas investigaciones sobre la formación y evolución de los planetas. Las características físicas y orbitales de los exoplanetas extremadamente diversas, a veces inesperadas, llevan a actualizaciones frecuentes en los escenarios principales para la formación y evolución, pero también a la exploración de caminos alternativos.

La migración planetaria es producida por las interacciones gravitacionales entre los planetas y el disco, y conduce a que los planetas se muevan desde zonas muy alejadas del disco hasta regiones muy cercanas a la estrella central. Para que este proceso se lleve a cabo, se necesita de un gran rango radial y de un tiempo suficientemente largo para que se mueva en dicha zona.

Con el fin de obtener simulaciones que caractericen de la mejor forma posible a los sistemas múltiples observables, en particular los confirmados por la misión Kepler, nos enfocaremos en las posibles configuraciones resonantes bajo los efectos de la migración, cuando los planetas están embebidos en un disco protoplanetario.

Este capítulo fue desarrollado expandiendo las ideas planteadas en [Benítez-Llambay *et al.* \(2016\)](#), luego de una introducción a un posible entorno de formación y evolución de un sistema planetario siguiendo principalmente las ideas de [Baruteau *et al.* \(2014, 2016\)](#), entre otros. Los resultados obtenidos en las últimas secciones de este capítulo aún no han sido publicados, pero se estima que lo será pronto.

5.1. Formación y evolución de los planetas

La formación y evolución de los planetas es un campo de investigación de rápido movimiento, estimulado por el constante aumento del número de exopla-

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

netas observados y su gran diversidad. A pesar de la abundancia de los datos observacionales sobre los sistemas planetarios, incluyendo el nuestro, es difícil tener una teoría general para la formación y evolución de los planetas, ya que implica un gran rango de procesos físicos que suceden a diferentes escalas de tiempo y espacio. Las teorías sobre el disco protoplanetario donde se forman los planetas tienen muchas de las dificultades e incertidumbres relacionadas con la formación y evolución de los planetas. Los discos protoplanetarios están compuestos de polvo y gas pobremente ionizado gobernado por la magnetohidrodinámica no ideal. Las propiedades estructurales y turbulentas del disco se ven influenciadas por procesos complejos radiativos y químicos que establecen el comportamiento termodinámico y el estado de ionización del gas. Estos mecanismos tienen implicaciones críticas en cada parte de la formación y evolución de los planetas: (i) condicionan la ubicación en los discos protoplanetarios donde los granos de polvo crecen a planetesimales y a planetas, (ii) desempeñan un rol prominente en la evolución orbital temprana de sistemas planetarios de baja masa cambiando la dirección y la velocidad de la migración planetaria, (iii) impactan en la evolución interna temprana de los planetas determinando la cantidad de calor retenido del proceso de formación. La formación y la evolución de sistemas planetarios están obviamente afectadas por la gravedad y por el entorno estelar local. Este amplio rango de procesos físicos hacen eco de la diversidad de sistemas planetarios extrasolares, y sugieren que probablemente no haya una teoría única para la formación y la evolución del planeta, sino varias.

El progreso dramático en la comprensión de la formación y evolución de los planetas en los últimos años ha mostrado una serie de revisiones recientes (por ejemplo, [Baruteau *et al.*, 2014, 2016](#)). Algunas de ellas incluyen la formación, la evolución orbital y la evolución interna de los sistemas planetarios jóvenes, ya que los tres están íntimamente ligados. Por ejemplo, el radio y la luminosidad de un planeta joven depende de su escenario de formación, al igual que su migración orbital. La energía liberada por un planeta en formación a medida que se enfría y se contrae puede cambiar las propiedades del disco protoplanetario en la vecindad del planeta y así afectar su migración orbital y su crecimiento. A lo largo de este capítulo sólo nos enfocaremos en la evolución orbital, teniendo en cuenta los modelos más simples de formación y evolución interna de los planetas.

5.2. Evolución orbital de planetas en su disco protoplanetario

A medida que los planetas se forman en un disco protoplanetario, las interacciones gravitacionales entre el disco y los planetas cambian el semieje mayor, la excentricidad y la inclinación de los planetas. La interacción entre el planeta y el disco suelen amortiguar las excentricidades y las inclinaciones de manera

5.2 Evolución orbital de planetas en su disco protoplanetario

eficiente, pero pueden disminuir o aumentar los semiejes mayores de los planetas, un efecto generalmente denominado **migración planetaria**. Las interacciones planeta-planeta tienden a impulsar las excentricidades e inclinaciones, y pueden cambiar significativamente el semieje mayor durante la vida del disco, por ejemplo, a través de eventos de dispersión debido a la migración del disco de dos o más planetas. Después de que el disco protoplanetario se limpia por fotoevaporación, la evolución orbital de los planetas puede continuar a través de la interacción con la estrella central (a través de mareas), con estrellas distantes (por ejemplo a través de ciclos de Kozai), con un disco de planetesimales remanentes (discos de escombros), o a través de las interacciones planeta-planeta.

5.2.1. Migración planetaria

Puesto que la migración planetaria es impulsada por la interacción gravitatoria entre un planeta y su disco protoplanetario primitivo, los fundamentos de la migración planetaria se pueden extraer a través de la inspección de la perturbación de la densidad de gas causado por un protoplaneta. La figura 5.1 muestra la perturbación relativa de la densidad superficial del gas de un disco protoplanetario donde se forma un planeta de 5 masas terrestres. La figura se toma de una simulación hidrodinámica 2D con interacción planeta-disco. Como se puede ver en la figura, el planeta induce dos tipos de perturbaciones de la densidad en el disco: (i) ondas de densidad espiral, llamadas *estelas del planeta*, que se propagan a través del disco, y (ii) perturbación de la densidad muy cercana a la órbita del planeta, llamada *perturbación de la densidad coorbital*, que está confinada en la región de herradura relativa al planeta (ver panel derecho).

La idea básica fundamental de la interacción planeta-disco es la ley de acción y reacción: el disco reacciona a la gravedad del planeta al ejercer una fuerza gravitatoria en el planeta que cambia el semieje mayor del planeta, su excentricidad y su inclinación. Considerando el caso más simple de un planeta en una órbita circular y coplanar (con excentricidad e inclinación nulas), el momento angular del planeta es $L_p = m_p \sqrt{\mathcal{G} m_0 r_p}$, donde m_p es la masa del planeta, m_0 la masa de la estrella, \mathcal{G} es la constante gravitatoria y r_p es la distancia entre la estrella y el planeta. Denotando Γ al torque ejercido por el disco en el planeta, y asumiendo además que la masa planetaria es constante,

$$\Gamma = \frac{dL_p}{dt} \rightarrow \frac{dr_p}{dt} = \frac{\Gamma \times 2r_p}{|L_p|}. \quad (5.1)$$

Esta relación significa simplemente que, para conocer la dirección y la velocidad de la migración planetaria, es necesario determinar el signo y la magnitud del torque del disco. Ésta es la razón por la cual la mayoría de los estudios numéricos de la interacción planeta-disco toman planetas sobre órbitas fijas y calculan el torque del disco en el planeta. Sin embargo, el torque del disco puede ser en

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

realidad una función de la tasa de migración y de la historia de la migración, con la consecuencia de que, en algunas circunstancias, la migración pueda invertirse o, incluso detenerse, por ejemplo a través de trampas planetarias. Las trampas planetarias son regiones del espacio en donde la suma de los torques de ambas perturbaciones de la densidad del disco es nula, y por ende el planeta queda atrapado en esta región.

A partir de la ecuación anterior, se define la tasa de migración como:

$$\tau_{\text{mig}} = \frac{r_p}{dr_p/dt} = \frac{L_p}{2|\Gamma|} = \frac{m_p \sqrt{\mathcal{G} m_0 r_p}}{2|\Gamma|} \quad (5.2)$$

Si conocemos Γ , podemos determinar las escalas de tiempo típicas de migración.

En este capítulo, suponemos que las perturbaciones debidas al planeta son pequeñas, de modo que la estructura del disco no cambia significativamente debido al planeta, y que la migración es lenta, de modo que cualquier efecto del movimiento radial del planeta puede ser despreciado. Si estos supuestos son válidos, estamos en el régimen de **migración de tipo I**, y estamos tratando con planetas de baja masa (típicamente hasta la masa de Neptuno). En este régimen, por lo general, la suma de los torques de las dos perturbaciones de la densidad del disco es negativa y por lo tanto el planeta migra hacia la estrella central.

A continuación, describiremos brevemente las dos componentes del torque del disco producidas por las perturbaciones de la densidad del disco.

5.2.1.1. Torque de la estela

Primero, existe el torque debido a la estela interna, que es la estela que se propaga entre el planeta y la estrella. La mayor parte del torque de la estela interna proviene del exceso de gas justo enfrente del planeta en la dirección azimutal. Este exceso de gas ejerce una fuerza gravitacional en el planeta cuya componente azimutal F_ϕ es positiva, lo que corresponde a un torque $\sim r_p F_\phi$ sobre el planeta que es por tanto positivo. Del mismo modo, el torque de la estela exterior se debe principalmente al exceso de gas inmediatamente detrás del planeta en la dirección azimutal. Este exceso de gas local tiene ahora $F_\phi < 0$, y por tanto ejerce un torque negativo en el planeta. El torque total tiene entonces dos contribuciones: el torque (positivo) debido a la estela interna que tiende a mover al planeta hacia afuera, y el torque (negativo) debido a la estela exterior que tiende a mover el planeta hacia adentro. El zoom realizado en el gráfico de la izquierda de la figura 5.1 muestra que la perturbación de la densidad de gas en la estela exterior es ligeramente mayor y más cercana al planeta, lo que indica que el torque de la estela exterior es más fuerte. El torque de la estela total es por lo tanto negativo y en ese caso favorece la migración hacia el interior. Si bien esto es de hecho la expectativa general, somos conscientes de que este resultado depende de los gradientes radiales de la temperatura y de la densidad del gas cerca de la ubicación

5.2 Evolución orbital de planetas en su disco protoplanetario

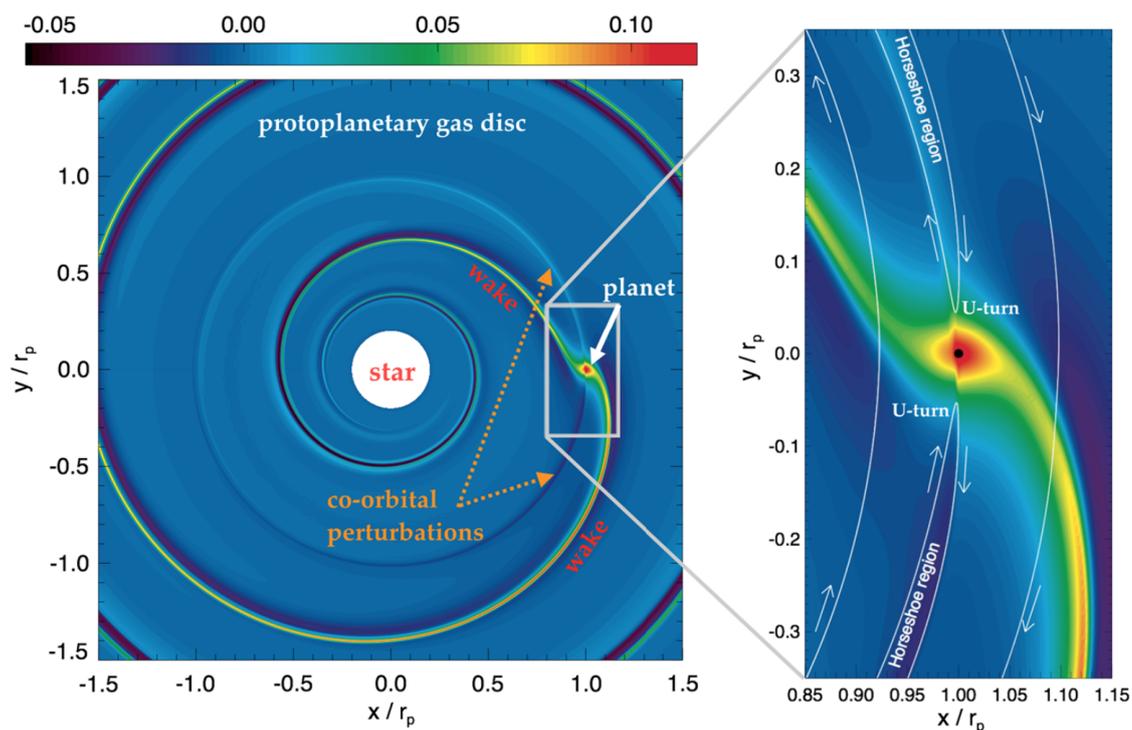


Figura 5.1: Perturbación relativa de la densidad superficial del gas de un disco protoplanetario perturbado por un planeta de 5 masas terrestres. La ubicación del planeta está señalada con una flecha blanca en el gráfico izquierdo. El planeta genera una onda de densidad espiral de un solo brazo que se propaga a través del disco, así como las perturbaciones de la densidad coorbital dentro de la región de herradura del planeta. Las trayectorias de gas con respecto al planeta se representan mediante curvas y flechas blancas en el gráfico derecho. Figura extraída de [Baruteau et al. \(2016\)](#).

del planeta, ya que afectan la ubicación de las estelas en relación con el planeta, así como también al comportamiento de su densidad. Estas dependencias se pueden encontrar resolviendo numéricamente las ecuaciones lineales de la perturbación, tanto en 2D ([Ward, 1997](#); [Paardekooper et al., 2010](#); [Masset, 2011](#)) o en 3D ([Tanaka et al., 2002](#)).

El torque de la estela también es conocido como Torque de Lindblad, ya que las estelas que se generan debido a la interacción entre el planeta y el disco suelen estar en resonancias de Lindblad ([Goldreich y Tremaine, 1979](#)). Estas resonancias son un caso particular de las resonancias de movimientos medios entre el potencial gravitatorio del planeta y el gas.

5.2.1.2. Torque de corrotación

El gas del disco en la región de herradura del planeta sigue trayectorias de herradura como se ve desde el planeta. En su acercamiento más próximo al planeta, el gas sufre un retroceso gravitatorio del planeta. El gas justo detrás del planeta en la dirección azimutal y dentro del radio orbital del planeta se mueve

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

radialmente hacia afuera tomando el momento angular del planeta. Este gas retorna hacia el exterior en relación con el planeta y ejerce un torque negativo en el planeta. Mientras tanto, el gas justo enfrente sobre el planeta en la dirección azimutal y fuera del radio orbital del planeta se mueve radialmente hacia adentro dando un momento angular al planeta. Ese gas se embarca en un retorno hacia adentro y ejerce un torque positivo sobre el planeta. Al igual que el torque de la estela, el torque ejercido por la región de herradura, que se llama torque de corrotación o de herradura, tiene dos contribuciones opuestas. El signo y la magnitud del torque de corrotación dependen entonces de la diferencia del momento angular entre el gas que realiza retornos hacia adentro y hacia afuera.

La complejidad surge cuando el momento angular del gas en la región de herradura del planeta evoluciona en el tiempo debido a la advección-difusión de dos cantidades hidrodinámicas: (i) la vortencidad específica del gas que en 2D es la componente vertical de la onda de la velocidad dividida por la densidad superficial, y (ii) la entropía específica del gas, que en 2D es básicamente la cantidad $P\Sigma^{-\gamma}$ donde P es la presión térmica, Σ la densidad superficial y γ el índice adiabático. La advección de la vortencidad y de la entropía específica a lo largo de las líneas de corrientes de la herradura implica que el signo y la magnitud del torque de corrotación depende de los gradientes de densidad y temperatura a través de la región de herradura. La difusión de ambas cantidades implica que el torque de corrotación también depende de la naturaleza y eficiencia de los mecanismos de difusión turbulenta que tiene lugar cerca o dentro de la región de herradura. El modelado de la turbulencia por una viscosidad y una difusividad térmica muestra que el torque de corrotación es muy sensible a ambos parámetros de difusión. De ahí la importancia de comprender mejor cómo el transporte turbulento del momento angular opera en regiones de formación planetaria (por ejemplo, [Bai, 2015](#); [Gressel *et al.*, 2015](#)). Los modelos 2D y 3D de discos viscosos muestran que el torque de corrotación es usualmente positivo y por lo tanto favorece la migración hacia afuera (por ejemplo, [Baruteau y Masset, 2008a](#); [Paardekooper y Papaloizou, 2008](#)).

5.2.2. Modelo del disco

En los apartados anteriores hemos hablado de un disco protoplanetario en donde se forma un planeta, y hemos explicado que la formación, el crecimiento, la composición química y el tamaño del planeta formado dependen fuertemente de las propiedades de dicho disco. Entonces, tomaremos esta sección para describir brevemente las propiedades básicas de estos discos. Para un resumen ver por ejemplo, [Armitage \(2010\)](#).

Desafortunadamente, y al menos en su mayoría, no podemos observar los discos protoplanetarios directamente. En lugar de eso, podemos unir piezas para el entendimiento de sus propiedades considerando discos protoplanetarios alrede-

5.2 Evolución orbital de planetas en su disco protoplanetario

dor de estrellas jóvenes recién formadas, denominadas T Tauri. Ellas se encuentran antes de la secuencia principal con masas correspondientes a tipos espectrales G, K y M, y suelen estar rodeadas de discos compuestos de un 99% de material gaseoso y 1% de polvo formados a partir del colapso gravitatorio que da nacimiento a la estrella. Las edades de sus discos rondan entre $10^6 - 10^7$ años con tamaños entre $50 \sim 1000$ UA y masas entre $\sim 0,01 - 0,1$ masas solares (Williams y Cieza, 2011).

Al ser un disco compuesto en su mayoría por hidrógeno y helio (con muy poca cantidad de elementos pesados) podemos utilizar para su caracterización las ecuaciones para un gas ideal. Además, al ser un disco poco masivo podemos despreciar la fuerza de gravedad ejercida por el gas sobre sí mismo. También, adoptamos que las ondas excitadas por un perturbador en un disco son suficientemente débiles para que la teoría lineal sea válida y consideramos que los discos son verticalmente isoterms, por lo que habrá perturbaciones isotermas. Entonces, la ecuación de estado para nuestro disco de gas viene dada por la presión del gas P , y que se escribe como:

$$P = c_s^2 \rho \quad (5.3)$$

donde ρ es la densidad volumétrica del gas y c_s es la velocidad del sonido. c_s está relacionada con la temperatura del disco T a través de $c_s^2 = k_B T / \mu m_H$; k_B es la constante de Boltzmann, m_H es la masa del hidrógeno y μ el peso molecular del medio. Con estas suposiciones podemos decir que la estructura del disco está bien aproximada si consideramos equilibrio hidrostático, térmico y de ionización local. Asumiendo que es un disco geoméricamente delgado (es decir, $z \ll r$) y axisimétrico (no depende de ϕ), puede verse que la ecuación de equilibrio hidrostático vertical (balance de fuerzas de presión y gravedad) conduce a una distribución de densidad expresada como:

$$\rho(r, z) = \frac{\Sigma(r)}{\sqrt{2\pi}H} \exp\left(-\frac{z^2}{2H^2}\right), \quad (5.4)$$

donde $\Sigma(r)$ es la densidad superficial en el plano ecuatorial y $H = c_s / \Omega_k$ es la escala de altura donde $\Omega_k = \sqrt{Gm_0/r^3}$. H mide el espesor característico del disco y está relacionado con la relación de aspecto h del disco por $h(r) = H(r)/r$. Como el disco es delgado, la relación de aspecto toma valores bajos, del orden de $\sim 0,01$ a $0,1$.

En un modelo de disco simple y laminar, tanto el perfil de densidad superficial Σ como la relación de aspecto h se comportan como leyes de potencia:

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 r^{-\alpha'} \quad ; \quad h(r) = h_0 r^f, \quad (5.5)$$

donde Σ_0 y h_0 son valores a $r = 1$ UA. El exponente f se relaciona normalmente a la forma del disco, esto es si el disco es acampanado o no, y nosotros aquí lo

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

llamaremos “índice de forma”. f toma el valor cero para los discos planos donde la relación de aspecto es constante, y por tanto $H(r)$ crece linealmente con r . Notar que la relación de aspecto depende de la temperatura, por lo que ésta será también una ley de potencia con exponente $\beta = 2f - 1$. Sin embargo, vemos más ventajoso utilizar la relación de aspecto que la temperatura ya que podemos caracterizar geométrica y rápidamente al disco.

Un modelo de disco aceptado que incluye todos estos aspectos es la Masa Mínima de la Nebulosa Solar (MMSN) propuesta en [Hayashi \(1981\)](#). Aquí, los valores mínimos necesarios para formar los planetas de nuestro Sistema Solar si éstos hubieran estado siempre donde los observamos son: $\Sigma(r = 1\text{UA}) = 1700 \text{ gr/cm}^2$, $T(r = 1\text{UA}) = 280 \text{ K}$ ($h_0 = 0,05$), $\alpha' = 1,5$ y $\beta \in [-1; 0]$. A pesar de que en los últimos años tanto las leyes de potencia para la densidad superficial y para la relación de aspecto como los valores de sus exponentes han sido cuestionados, la MMSN sigue siendo una muy buena aproximación con la cual comparar.

Supongamos ahora un planeta de masa m_p que orbita la estrella central y siente el potencial gravitatorio del disco. El planeta tiene un potencial suavizado de la forma:

$$\phi_p = -\frac{\mathcal{G}m_0}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|^2 + \epsilon^2}}, \quad (5.6)$$

donde ϵ es la longitud de suavizado. Utilizamos una longitud de suavizado parametrizado por la escala de altura de la presión en la forma $\epsilon = 0,6H$ ([Müller et al., 2012](#)). Despreciamos los términos indirectos, ya que no son relevantes para nuestro asunto. Este potencial es de suma importancia debido a que refleja directamente la influencia que tiene el planeta en el disco, y viceversa.

Los modelos de un disco de gas se pueden hacer más realistas suponiendo en principio que el disco no sea isoterma, en este caso la ecuación de estado dependerá del índice adiabático y las diferentes cantidades aquí expuestas cambiarán sus dependencias y sus formas. Además, se puede agregar que el disco sea viscoso, en ese caso afectará directamente a las tasas típicas de acreción de la estrella central. Y así, se pueden ir agregando o suprimiendo diferentes efectos. Por ejemplo, [Migaszewski \(2015\)](#) considera un disco geoméricamente delgado, viscoso y con simetría axial. Asume que los planetas no afectan la evolución del disco y que las estructuras verticales y radiales del disco son independientes. Agrega efectos de radiación estelar, fotoevaporación y opacidad, obteniendo un disco realmente complejo.

5.3. Simulando la migración planetaria

Sabemos entonces que los planetas se forman en entornos gaseosos, de los cuales adquieren la mayor parte de su masa. La interacción entre ambos componentes, sólidos y gases, es extremadamente compleja y uno de los aspectos clave

5.3 Simulando la migración planetaria

en cualquier teoría de la formación planetaria. Un planeta sumergido en un disco acumulará gas y experimentará cambios en su masa, temperatura y composición química. Sin embargo, las interacciones gravitacionales también son importantes, ya que ejercen una fuerza sobre el planeta que altera dramáticamente su órbita a través de un intercambio de energía y momento angular entre el disco y el planeta.

El torque gravitacional total entre el disco de gas y un planeta de baja masa se puede estimar analíticamente bajo ciertas simplificaciones, dando importantes ideas sobre los mecanismos físicos involucrados en la migración (por ejemplo [Goldreich y Tremaine, 1979](#); [Tanaka *et al.*, 2002](#); [Baruteau y Masset, 2008a](#); [Paardekooper y Papaloizou, 2009](#)). Sin embargo, en las dos últimas décadas ha sido cada vez más claro que los experimentos numéricos son indispensables para avanzar en las teorías de migración planetaria. Es por eso que tomaremos la siguiente sección para definir a qué nos referimos con simulaciones numéricas y cuál es su importancia.

5.3.1. Simulaciones numéricas

Una simulación numérica es una herramienta poderosísima que nos permite estudiar casos muy complejos y perfeccionar nuestra comprensión del problema que se estudia. Podemos pensar que una simulación numérica consiste esencialmente en la resolución numérica de las ecuaciones que determinan el estado de un dado sistema, ya sea un conjunto de ecuaciones diferenciales, el cálculo de una función potencial, entre muchos otros. No obstante, ya sea por limitaciones en las capacidades de las computadoras disponibles o bien por las características del problema en sí, en general resulta necesario introducir nuevos modelos o métodos a fin de elaborar un algoritmo que permita resolver numéricamente las ecuaciones correspondientes.

Las simulaciones numéricas de planetas embebidos en discos gaseosos protoplanetarios, en particular, son una valiosa herramienta para estudiar la migración planetaria. Sin embargo, hay que hacer varias aproximaciones muchas de las cuales no son triviales.

La teoría de la migración planetaria se propuso antes de la evidencia observacional ([Goldreich y Tremaine, 1979](#); [Lin y Papaloizou, 1979](#)) por lo que existe una gran cantidad de estudios numéricos sobre la migración planetaria en la literatura. Por ejemplo, [de Val-Borro *et al.* \(2006\)](#) han comparado los resultados de varios códigos hidrodinámicos (Nirvana, Fargo, Genesis, flash, entre otros) y han encontrado una consistencia global entre ellos. Sin embargo, todavía quedan algunos problemas numéricos y físicos que tratar con más cuidado. En particular, uno de los principales problemas de la migración planetaria ha sido la imposibilidad de realizar simulaciones hidrodinámicas de planetas resonantes por períodos largos de tiempo, necesarios para estabilizar al sistema, y a gran escala, de manera de

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

cubrir todo el espectro de distancias astrocéntricas. Recientemente, en [Benítez-Llambay et al. \(2016\)](#) presentamos un novedoso método numérico que permite simulaciones hidrodinámicas de este tipo. Esta herramienta la explicaremos en las siguientes secciones y nos permite, por primera vez, realizar experimentos numéricos por intervalos de tiempo y escalas de distancias realistas, sin la necesidad de apelar a aproximaciones analíticas.

¿Por qué utilizar simulaciones hidrodinámicas y no simplemente N-cuerpos? Las simulaciones N-cuerpos consideran sólo efectos gravitatorios de los cuerpos integrantes, y se puede incluir diferentes efectos ad hoc provenientes de modelos para tener un problema más completo. Para diferentes situaciones un estudio de este estilo suele ser rápido y suficientemente preciso para ciertos propósitos. Debido a que queremos estudiar el comportamiento de planetas embebidos en su disco primordial, el cual está compuesto en su 99% de gas, el disco protoplanetario obedece las ecuaciones de un fluido. Por lo que, para describir correctamente la física involucrada en nuestro escenario debemos utilizar simulaciones hidrodinámicas. Sin embargo, el cálculo de las ecuaciones hidrodinámicas suele ser muy costoso computacionalmente y es por eso que su física puede ser bien representada con modelos 1D e integradas con simulaciones N-cuerpos.

5.3.2. Simulaciones hidrodinámicas

Las simulaciones hidrodinámicas son exigentes desde el punto de vista computacional y extremadamente costosas, ya que deben: (i) resolver la estrecha región cercana a la órbita del planeta para un cálculo adecuado del torque de corrotación, (ii) mantener una buena resolución lejos del planeta para resolver la estela espiral excitada por el planeta, y (iii) considerar toda la extensión azimutal de la órbita para describir adecuadamente el movimiento en la herradura.

Se han hecho esfuerzos significativos para ganar en eficiencia y realismo, ya sea desarrollando nuevos algoritmos para mejorar la advección orbital ([Masset, 2000](#)) y/o considerando una evolución de disco autoconsistente durante la migración ([Crida et al., 2007](#)). La primera característica ha logrado reducir aproximadamente diez veces el costo computacional de una simulación hidrodinámica típica con un solo planeta. La segunda característica ha demostrado ser crucial en los estudios de la llamada *migración de tipo II*, que ocurre cuando el planeta es lo suficientemente masivo como para abrir una brecha alrededor de su región de herradura.

Las recientes detecciones exoplanetarias, particularmente por la misión Kepler, muestran la existencia de muchos sistemas planetarios múltiples cercanos a su estrella central, algunos de los cuales se localizan cerca de las resonancias de movimientos medios (RMMs) ([Lissauer et al., 2011](#); [Fabrycky et al., 2014](#)). Las simulaciones hidrodinámicas de estos sistemas se enfrentan a dos desafíos. Por un lado, deben ser capaces de seguir el decaimiento orbital desde los semiejes mayo-

5.4 Método de remapeo

res iniciales lejos de la estrella hasta sus configuraciones finales cerca (muy cerca) de la estrella. Por ejemplo, desde $a \sim 8$ UA hasta $a \sim 0,1$ UA. En otras palabras, las simulaciones deben ser de gran escala. Por otro lado, incluso después de que los cuerpos alcancen la región cercana a la estrella central, su evolución orbital debe extenderse sobre una escala temporal suficientemente larga para permitir que la dinámica resonante actúe y garantice que el resultado corresponda realmente a una solución estacionaria. Por lo tanto, las simulaciones no sólo deben ser a gran escala sino también a largo plazo.

Hasta ahora, los códigos hidrodinámicos no han podido cumplir con estos requisitos. Una de las principales dificultades se debe a la condición de Courant-Friedrich-Levy (CFL), una restricción de estabilidad inherente a todos los algoritmos que solucionan las ecuaciones hidrodinámicas explícitas. En una malla cilíndrica o esférica, la condición CFL limita generalmente el paso de tiempo de integración a través del tamaño de la celda más interna en cada instante. Como resultado, un disco de gas que está modelado para incluir las regiones cercanas a la estrella tendrá un tamaño de paso muy pequeño, aún si los planetas se localizan inicialmente en semiejes mayores grandes, incluso si se usa un algoritmo de advección orbital. Por lo tanto, los experimentos numéricos radialmente extensos y de largo plazo han sido prácticamente imposibles, y todas las simulaciones de la migración planetaria han sido locales, tanto espacial como temporalmente, con algunas excepciones particulares (por ejemplo [Martin *et al.*, 2007](#); [Crida *et al.*, 2009](#)).

En el gráfico de la izquierda de la figura 5.2 mostramos esquemáticamente la situación planteada en el párrafo anterior. Se representa a un disco dividido uniformemente en radio y en azimut rodeando a una estrella central (punto negro en el centro). Podemos ver que las celdas de este grillado se hacen cada vez más pequeñas a medida que nos acercamos a la estrella central. Por lo que si el borde interno se encuentra muy cerca de la estrella el planeta que migra le tomará un tiempo casi infinito en llegar a sus posiciones finales, en particular si el planeta inicialmente se encuentra lejos de la estrella. En el gráfico del medio se marca en color rojo una región del disco que utilizaremos más adelante para explicar nuestro método.

5.4. Método de remapeo

En esta sección presentamos un nuevo método numérico que hemos desarrollado y que supera las limitaciones expuestas antes. Básicamente consiste en una técnica de remapeo, que actualiza los límites de la malla del disco según la ubicación de los planetas durante su migración. La redefinición de los límites es automática, dando lugar a simulaciones hidrodinámicas de alta resolución que son independientes de la evolución orbital del sistema. Además, tomamos sólo la región de la malla en donde se encuentran los planetas (gráfico del medio de la

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

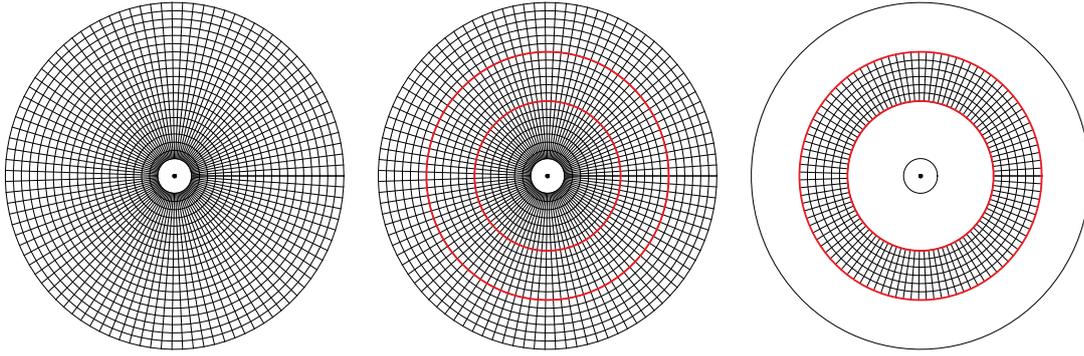


Figura 5.2: **Izq.:** Esquema del grillado de un disco alrededor de una estrella central (punto negro). **Medio:** Remarcado en rojo la porción del disco necesario para integrar. **Der.:** Esquema básico del método de remapeo, sólo se integra el anillo necesario y no todo el disco.

figura 5.2), y por tanto no utilizamos la malla completa como se utiliza hasta ahora en todas las simulaciones hidrodinámicas de planetas que migran (gráfico de la izquierda). Dado que en nuestro método la malla no está definida en regiones que no son necesarias (gráfico de la derecha), el código gana en eficiencia y precisión, permitiendo simulaciones virtualmente infinitas en tiempo y en espacio. El anillo que tomaremos como la región necesaria ya que contiene a los planetas que migran, además de la información completa del disco, la llamaremos “malla activa”.

Una versión preliminar de este método ha sido presentada en la tesis doctoral [Benítez-Llambay \(2015\)](#). En este trabajo presentamos la versión final del método de remapeo, la cual ha sido publicada en [Benítez-Llambay *et al.* \(2016\)](#). Aquí presentamos una nueva forma de definir los bordes de las diferentes regiones consideradas en una simulación hidrodinámica con sus respectivas pruebas de convergencia, y ejemplos acordes.

5.4.1. Ecuaciones y código utilizados

Describimos el problema usando las ecuaciones de Navier-Stokes en un marco de referencia inercial no rotante. Estas ecuaciones son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Para ser consistentes con el modelo de disco expuesto en la sección 5.2.2, resolvemos estas ecuaciones integradas sobre z , asumiendo un disco de gas bidimensional sin autogravedad orbitando una estrella central de masa m_0 . La ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\Sigma \mathbf{v}) = 0, \quad (5.7)$$

donde Σ es la densidad superficial, y \mathbf{v} es el campo de velocidad del fluido. La ecuación del momento es:

5.4 Método de remapeo

$$\Sigma \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla P - \Sigma \nabla \phi + \nabla \cdot \mathbf{\Pi}, \quad (5.8)$$

donde P es la presión térmica del gas, ϕ es el potencial gravitatorio, el cual incluye la contribución de la estrella y de los planetas. $\mathbf{\Pi}$ es el tensor de tensión, dado por

$$\mathbf{\Pi} = \Sigma \nu \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right], \quad (5.9)$$

con ν la viscosidad cinemática e \mathbf{I} el tensor identidad.

Asumimos un disco laminar cuya densidad superficial Σ y relación de aspecto h tienen una ley de potencia dependiente con la distancia a la estrella tal como expresan las ecuaciones (5.5). El potencial gravitatorio que siente el disco debido al planeta ϕ_p y la presión P , vienen dadas por las ecuaciones (5.6) y (5.3), respectivamente, y la masa del planeta viene dada por m_p .

En nuestro modelo, usamos condiciones de borde de amortiguación (de Val-Borro *et al.*, 2006), con un ancho relativo fijo con respecto a la extensión radial de la malla. Éstos se necesitan para tener un mejor comportamiento a gran escala y a largo plazo del disco, dado ya sea por leyes de potencia o por un cálculo unidimensional auxiliar. Utilizamos el código hidrodinámico FARGO3D (Benítez-Llambay y Masset, 2016) debido a que su principal desarrollador es parte de nuestro grupo, por lo que el acceso es directo. FARGO3D es un código versátil que corre tanto en CPU como en GPU, y fue desarrollado poniendo especial énfasis en discos protoplanetarios¹. Para resolver todo el sistema, por lo general, se utiliza una malla polar uniformemente espaciada en radio y azimut usando n_r y n_ϕ zonas radiales y azimutales, respectivamente, tal como se muestra en la figura 5.2.

Es importante mencionar aquí que la utilización de GPU para realizar simulaciones hidrodinámicas es de especial interés para la reducción del tiempo de cómputo. Benítez-Llambay y Masset (2016) presentan la eficiencia de utilizar el algoritmo mejorado para la advección orbital junto con GPU, reduciendo aproximadamente 400 veces el tiempo computacional.

5.4.2. Método e implementación numérica

La idea principal detrás de nuestro método es tomar un estado anterior como una condición inicial espacialmente re-muestreada para avanzar el sistema a un nuevo estado. Hay dos maneras posibles de hacer esto. Una forma es integrando el sistema a un estado específico para luego volver a muestrear las cantidades físicas y reiniciar la simulación. Una segunda posibilidad es utilizar una “receta” continua, donde para cada paso de tiempo la malla se vuelve a muestrear. Elegimos la segunda opción ya que permite cambios suaves de todas las cantidades.

¹<http://fargo.in2p3.fr/>

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

Puesto que estamos interesados en seguir planetas mientras migran, el remuestreo debe realizarse exclusivamente de forma radial. El algoritmo que hemos desarrollado tiene tres pasos básicos: una receta adecuada para calcular los nuevos bordes radiales de la malla, un método para rellenar la malla con valores apropiados para las cantidades hidrodinámicas y, finalmente, una actualización de las condiciones de contorno y zonas de amortiguación.

Para encontrar los bordes radiales para la nueva malla, usamos la ubicación de los planetas. El anillo de gas más alejado del planeta que es capaz de ejercer un torque se localiza en la RMM interna (externa) 2 : 1 (1 : 2) con el planeta (Goldreich y Tremaine, 1979), que son las resonancias de Lindblad más lejanas con respecto al planeta. Por lo tanto, las nuevas posiciones fronterizas se deben calcular como una función de las RMMs o razones de períodos con el planeta más cercano a ellos. De esta manera nos aseguramos de incorporar todos los ingredientes de la migración de tipo I durante toda la simulación.

Una vez que hemos calculado las nuevas posiciones de la frontera, dividimos radialmente la malla utilizando el mismo número de celdas que en el paso anterior. Esta elección está motivada por la simplicidad de la implementación.

Finalmente, realizamos una interpolación lineal, utilizando los campos antiguos, para calcular los valores en la posición de las nuevas celdas. Si las nuevas celdas caen fuera del dominio antiguo, extrapolamos los campos usando prescripciones analíticas dadas ya sea por condiciones iniciales o por un modelo de evolución viscosa auxiliar (ver sección 5.4.2.3).

En la figura 5.3 presentamos un simple diagrama de flujo que muestra cómo el algoritmo de remapeo es implementado en FARGO3D.

5.4.2.1. Definiendo los nuevos bordes

En esta sección presentamos un algoritmo particular para la determinación de los bordes de la malla en función de la posición de los planetas. Para definir dichos bordes de la malla tenemos que considerar dos zonas diferentes: (i) la malla activa (donde no hay amortiguación), y (ii) las zonas de amortiguación.

Definimos la malla activa en términos de relaciones de períodos con respecto a los planetas situados en la malla:

$$r_d^\pm = r_p^\pm \mathcal{R}_d^{\pm 2/3}, \quad (5.10)$$

donde r_p^\pm es el semieje mayor del planeta más cercano al borde \pm y \mathcal{R}_d es un número real positivo mayor a uno, lo que representa la relación de períodos entre el planeta y el gas en el borde de la malla activa (sin considerar las zonas de amortiguación).

Una vez que hemos determinado la ubicación de la malla activa, procedemos a calcular la extensión total de la malla. Dado que el tiempo característico de amortiguamiento se elige normalmente proporcional al período orbital local de

5.4 Método de remapeo

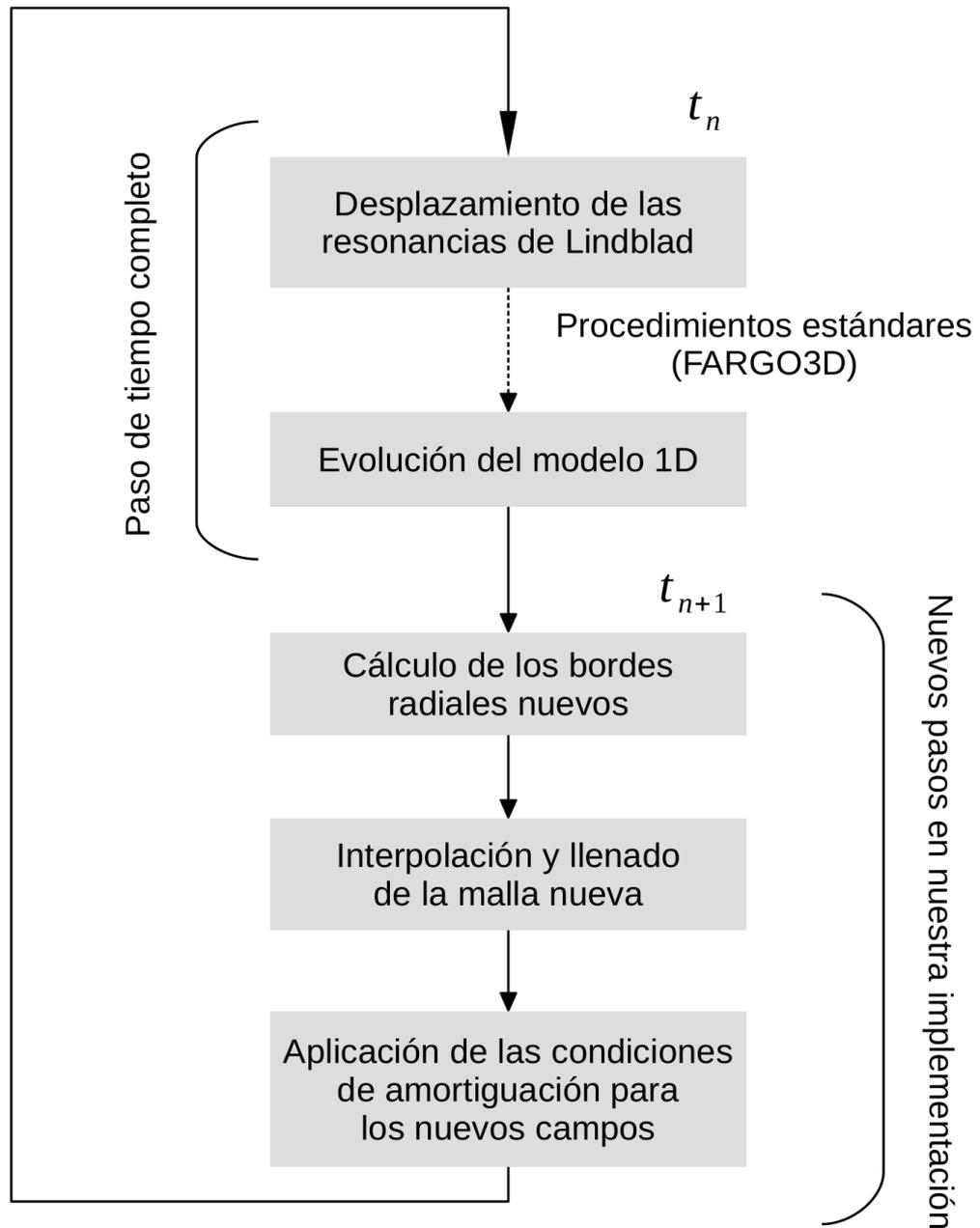


Figura 5.3: Diagrama de flujo que muestra cómo nuestra implementación se combina con el flujo estándar de FARGO3D. Por simplicidad mostramos sólo la parte correspondiente a una actualización completa (ver la figura 2 en Benítez-Llambay y Masset (2016) para más detalles). En el interior del bucle principal, seguimos el método descrito en la sección 5.4.2.4 para desplazar las resonancias de Lindblad y usamos el paso de tiempo ya calculado por la condición CFL para avanzar un modelo 1D para la densidad superficial bajo el efecto de la evolución viscosa del disco (ver sección 5.4.2.3). Después de eso hemos avanzado un paso de tiempo completo para todos los campos. Ahora, recalculamos los nuevos bordes de la malla. Finalmente, antes de avanzar otro paso de tiempo, actualizamos las zonas de amortiguamiento. Todos los campos se vierten hacia los valores de referencia actualizados, dados por las prescripciones detalladas en la sección 5.4.2.2. Figura adaptada de Benítez-Llambay *et al.* (2016).

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

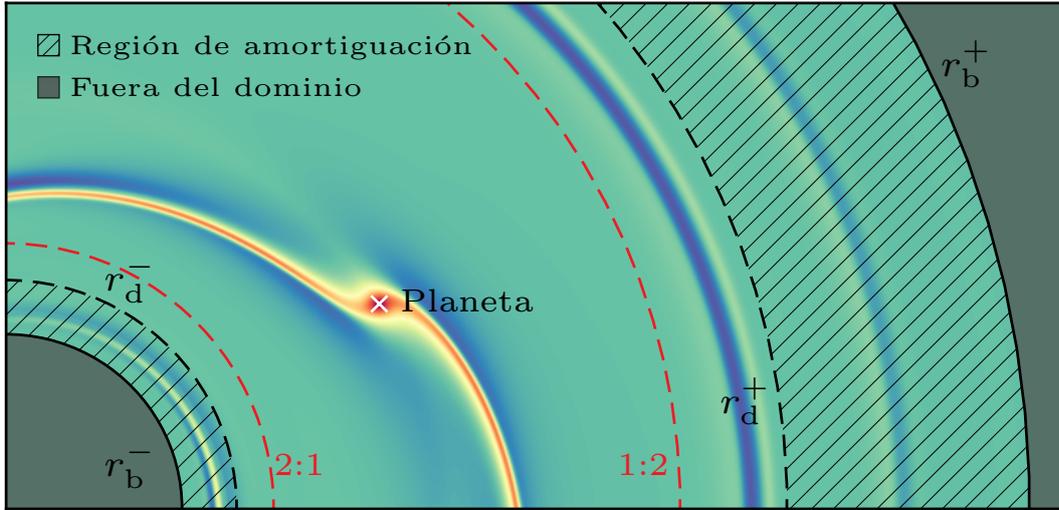


Figura 5.4: Una porción de una perturbación típica de la densidad superficial en un plano cartesiano. La estrella central se ubica en la esquina inferior izquierda. La zona gris marca la región del disco donde la malla 2D no está definida. Las líneas negras continuas representan el borde de la malla activa. Las zonas rayadas muestran dónde se aplican las condiciones de borde de la amortiguación a los campos, y están limitadas por las líneas discontinuas negras. La parte de la malla que se extiende desde la línea discontinua negra interior a la externa se denomina en este trabajo malla activa. En el caso que se muestra aquí, establecemos las líneas discontinuas usando la ecuación (5.10) con $\mathcal{R}_d = 2,5$. Para las zonas de amortiguación, la distancia desde el primer anillo al borde correspondiente de la malla se calcula usando la ecuación (5.12) con $\mathcal{R}_b = 1,5$. En líneas rojas discontinuas, mostramos la ubicación de las RMMs 2 : 1 / 1 : 2 con el planeta, que son lugares importantes porque sólo entre ellas el gas ejerce un torque efectivo sobre el planeta. La ubicación del planeta está marcada con una cruz blanca. Figura adaptada de [Benítez-Llambay et al. \(2016\)](#).

las celdas de amortiguación ([de Val-Borro et al., 2006](#)), es natural definir su ancho de manera que abarque una extensión fija en períodos orbitales, de la misma forma que se hizo para definir \mathcal{R}_d :

$$r_b^\pm = r_d^\pm \mathcal{R}_b^{\pm 2/3}, \quad (5.11)$$

donde \mathcal{R}_b es un número real positivo mayor a uno, el cual representa la relación de períodos entre el primer anillo de amortiguamiento y el borde de la malla.

Usando las ecuaciones (5.10) y (5.11) obtenemos la ubicación de los bordes que mantienen un tamaño constante en períodos con respecto al planeta, dado por:

$$r_b^\pm = r_p^\pm (\mathcal{R}_d \mathcal{R}_b)^{\pm 2/3}. \quad (5.12)$$

En la figura 5.4, mostramos un esquema de una porción de una simulación típica de un planeta sumergido en un disco de gas. Las regiones de amortiguamiento están representadas por zonas rayadas y sus límites están indicados con

5.4 Método de remapeo

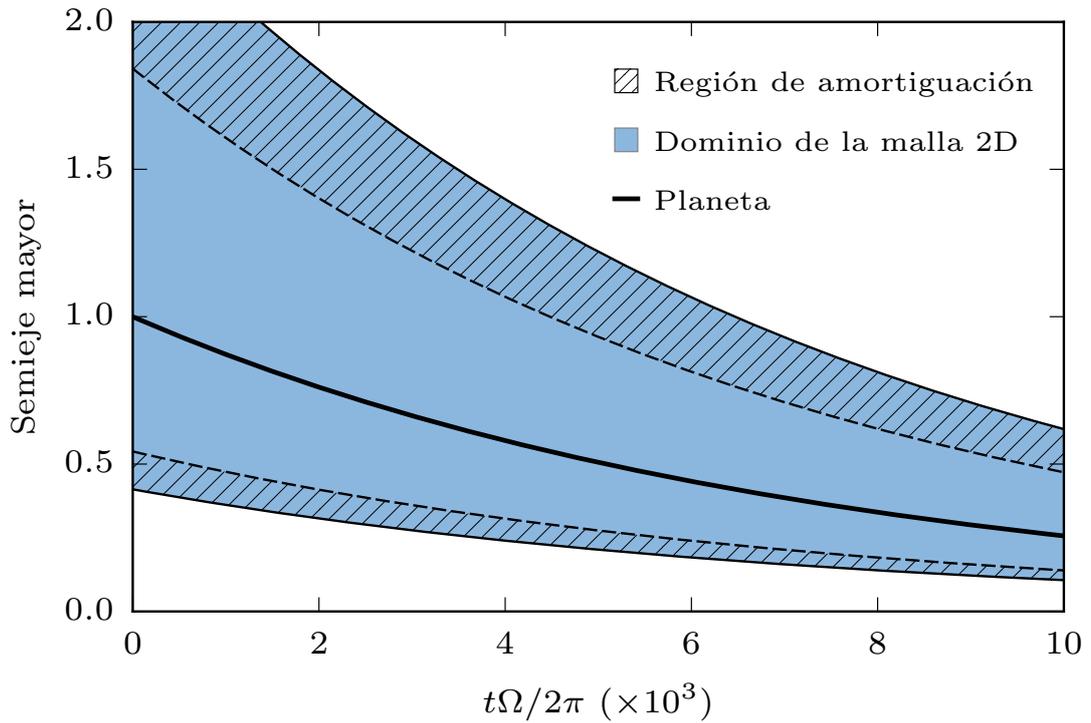


Figura 5.5: Evolución del semieje mayor de un planeta (línea negra gruesa) usando el método de remapeo. La región azul corresponde a la extensión de la malla 2D. Las regiones de amortiguamiento están en las zonas rayadas. Figura adaptada de [Benítez-Llambay et al. \(2016\)](#).

líneas negras a trazos, cuya ubicación está determinada por la ecuación (5.10). Los límites de la malla 2D (líneas negras continuas) vienen dadas por la ecuación (5.12). Las líneas rojas a trazos muestran la ubicación de la RMM 2 : 1/1 : 2 entre el gas y el planeta. En este caso particular, hemos elegido los valores $\mathcal{R}_b = 1,5$ y $\mathcal{R}_d = 2,5$.

La figura 5.5 muestra la evolución del semieje mayor de un planeta de baja masa para una simulación típica de migración planetaria, realizada con el algoritmo propuesto aquí. La malla es modificada continuamente a lo largo del tiempo de ejecución para mantener los bordes en una relación de períodos fijos con el planeta, para poder rastrearlo. La malla es mostrada por la región azul, y su extensión se puede calcular usando la ecuación (5.12). Se utilizaron los mismos valores de \mathcal{R}_b y \mathcal{R}_d que para la figura 5.4.

5.4.2.2. Llenando la malla

Una vez que hemos calculado las nuevas fronteras, dividimos radialmente la malla usando el mismo número n_r de celdas radiales como en el estado anterior. En este trabajo se utiliza un espaciado uniforme entre las celdas, pero cualquier otro espaciado es posible, como un espaciado logarítmico. Una discusión

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

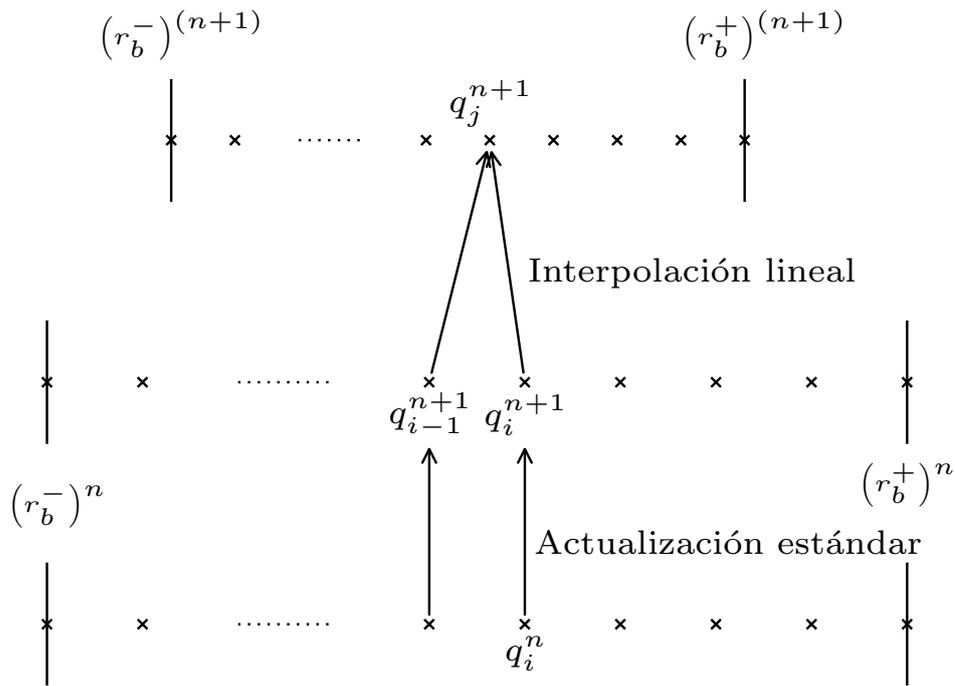


Figura 5.6: Diagrama que muestra cómo se obtiene una cantidad q_j^{n+1} en la malla remapeada a partir de valores antiguos. En la parte inferior comenzamos en el momento t_n y actualizamos la cantidad q_i^n a un nuevo valor q_i^{n+1} (paso medio) mediante la evolución de las ecuaciones hidrodinámicas. Finalmente, en la parte superior calculamos las nuevas fronteras de la malla y la llenamos en la ubicación r_j interpolando el campo recientemente actualizado. Figura adaptada de Benítez-Llambay *et al.* (2016).

adicional sobre esta elección se da en la sección 5.5.5.

Para cada nueva celda, calculamos sus vecinos en la malla antigua y los usamos para estimar los nuevos valores mediante interpolación lineal.

Si dos vecinos no están disponibles, o si la celda actualizada cae sobre los anillos de amortiguamiento, utilizamos prescripciones analíticas para calcular los valores correspondientes. Estas prescripciones pueden darse por las condiciones iniciales para la velocidad del sonido (o temperatura) y la velocidad azimutal. De forma similar, las condiciones iniciales se usan para prescribir la densidad superficial y la velocidad radial si no se tiene en cuenta la evolución viscosa del disco; de otra manera, como veremos en la sección 5.4.2.3, utilizamos la ecuación (5.16) para actualizar la densidad superficial y la ecuación (5.17) para obtener la velocidad radial.

Ahora discutiremos el algoritmo básico para el caso en donde la malla está linealmente espaciada. Comenzamos desde una cantidad q en la ubicación r_i al tiempo t_n , estado inicial que denotamos por q_i^n . Después de un paso de tiempo, el nuevo valor actualizado q_i^{n+1} se obtiene resolviendo las ecuaciones hidrodinámicas utilizando diferencias finitas, método de separación dimensional, combina-

5.4 Método de remapeo

dos con el algoritmo FARGO (Masset, 2000) para la advección orbital y un integrador Runge-Kutta de quinto orden para avanzar los planetas (Benítez-Llambay y Masset, 2016).

Las ubicaciones de la frontera se actualizan, desde $(r_b^-)^n, (r_b^+)^n$ a $(r_b^-)^{n+1}, (r_b^+)^{n+1}$ siguiendo la receta descrita por la ecuación (5.12). Después de eso, necesitamos calcular las nuevas posiciones radiales r_j para cada celda. En el caso del espaciado uniforme (o lineal), esto se puede hacer usando la relación simple $r_j = (r_b^-)^{n+1} + j\Delta$, $j = 0 \dots n_r - 1$, y $\Delta = [(r_b^+)^{n+1} - (r_b^-)^{n+1}] / n_r$. Asumiremos que q es una cantidad centrada en la cara de una celda, tal como v_r , la velocidad radial. Su valor después del remapeo está dado por:

$$q_j^{n+1} = q_{k_j}^{n+1} + \frac{q_{k_{j+1}} - q_{k_j}}{r_{k_{j+1}} - r_{k_j}} \Big|^{n+1} (r_j - r_{k_j}), \quad (5.13)$$

con k_j una función del espaciado de la malla en el paso de tiempo anterior. En el caso linealmente espaciado, el índice k_j está dado por:

$$k_j = \text{int} \left[\frac{r_j - (r_b^-)^n}{(r_b^+)^n - (r_b^-)^n} n_r \right], \quad (5.14)$$

donde $\text{int}(x)$ representa la parte entera de x . En la figura 5.6 representamos este algoritmo, y ponemos en contexto todas las cantidades importantes.

5.4.2.3. Evolución de la viscosidad del disco

Dado que el método de remapeo nos permite realizar simulaciones a largo plazo en un amplio rango espacial, deben tenerse en cuenta consideraciones especiales con respecto a la evolución global del disco. Describir un disco con una ley de potencia para simulaciones a largo plazo puede no ser una opción apropiada. Desde el tercer término en el lado derecho de la ecuación (5.8), se espera que el disco entero derive en una escala de tiempo $\tau_v \propto r^2/\nu$ denominada tiempo de deriva viscosa (Pringle, 1981). Por otro lado, la escala de tiempo característica para la migración ($\tau_a = r_p/\dot{r}_p$) en el régimen de tipo I viene dada por $\tau_a \propto m_0^2 (h/r)^2 (m_p \Sigma)^{-1} \Omega^{-1}$ (Ward, 1986).

Por lo tanto, la relación entre ambas escalas de tiempo está dada por:

$$\frac{\tau_a}{\tau_v} \propto \frac{m_0^2 h^2 \nu}{m_p \Omega \Sigma r^4}. \quad (5.15)$$

Para $r = R_0 = 5,2$ UA, los parámetros típicos son $h = 0,05$, $\nu = 10^{-5} R_0^2 \Omega_0$ y $\Sigma \sim 6 \times 10^{-4} M_\odot R_0^{-2}$, y asumiendo $m_0 = 1 M_\odot$, $m_p = 10^{-5} M_\odot$ esto da una relación igual a ~ 4 . Este valor depende de r como $r^{-(2,5+\alpha')}$ (asumiendo $f = 0$), donde α' y f están definidas por la ecuación (5.5), y en la práctica, por lo general ese ex-

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

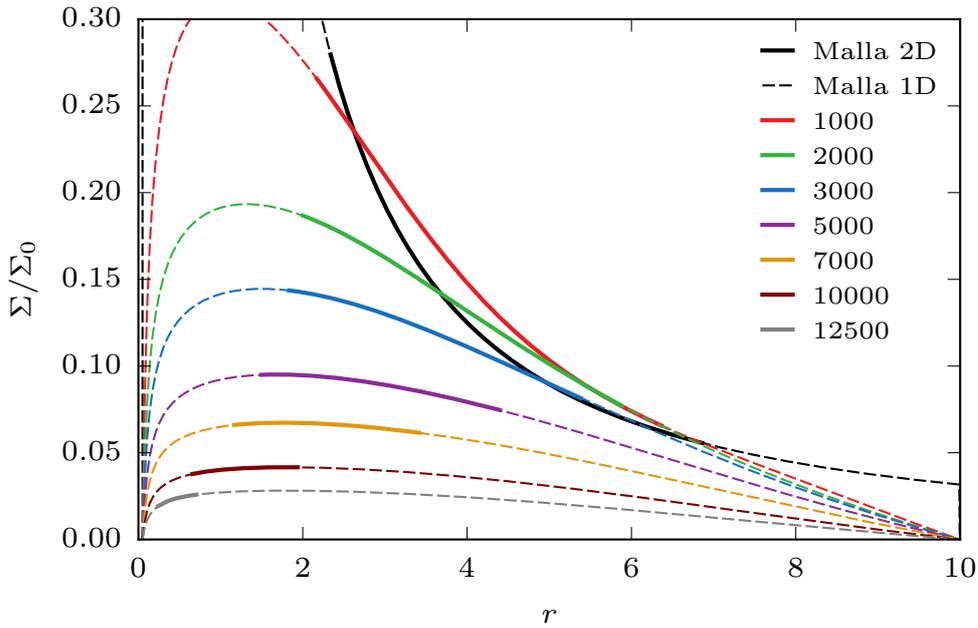


Figura 5.7: Evolución viscosa de un perfil de densidad superficial inicialmente dado por una ley de potencia $\Sigma/\Sigma_0 \propto r^{-1,5}$ sin planeta. El número de celdas usadas para el modelo 1D viscoso (ec. (5.16), líneas discontinuas) es 2048 mientras que la malla 2D (líneas gruesas) tiene 256 zonas radiales. La viscosidad ν es constante en todo el dominio y una condición de borde de densidad superficial nula se aplica a $r = 0,05$ y $r = 10$. La malla 2D tiene una tasa de migración constante, con el fin de observar el acople entre el módulo de deriva viscosa y el algoritmo de remapeo. Las leyendas de las curvas están dadas en períodos orbitales a $r = 1$. La condición inicial se representa en color negro mientras que los colores muestran el perfil de densidad para diferentes períodos orbitales. Figura adaptada de [Benítez-Llambay et al. \(2016\)](#).

ponente es un número negativo mayor que $-1,5$. Por lo que, la tasa de migración se hace insignificante en comparación al tiempo viscoso cuando el planeta migra a la estrella. Este sencillo análisis muestra que para realizar una simulación consistente de planetas migrando en régimen de tipo I a largo plazo (en espacio y tiempo), debe considerarse una evolución viscosa autoconsistente del disco. Abordamos este problema resolviendo un modelo unidimensional simplificado para la conservación del momento angular del disco bajo los efectos de la viscosidad y despreciando la presión del gas y los torques planetarios ([Pringle, 1981](#)). La densidad del gas evoluciona como:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma \sqrt{r}) \right]. \quad (5.16)$$

Evolucionamos explícitamente la ecuación (5.16) sobre una malla radialmente extendida unidimensional suficientemente grande en tiempo de ejecución durante la simulación bidimensional completa (es decir, integramos las dos mallas

5.4 Método de remapeo

al mismo tiempo). Utilizamos la densidad superficial avanzada para actualizar los límites en las regiones de amortiguación. Una vez calculada la densidad superficial, la velocidad radial puede inferirse por la relación cerrada:

$$v_r = -\frac{3}{\Sigma\sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial r} (v\Sigma\sqrt{r}). \quad (5.17)$$

Esta implementación de la evolución viscosa para el disco mediante el uso de una malla unidimensional puede compararse con la implementación de [Crida et al. \(2007\)](#). En nuestro caso tratamos las reflexiones utilizando las conocidas zonas de amortiguación ([de Val-Borro et al., 2006](#)) y no abordamos el problema de la conservación del momento angular porque suponemos que los planetas no alteran fuertemente la densidad superficial lejos de su ubicación actual. Este enfoque no es tan sofisticado como el de [Crida et al. \(2007\)](#), pero veremos en las siguientes secciones que podemos lograr resultados muy limpios y precisos. Una diferencia importante con su implementación es que la malla 2D fue fija, de modo que los planetas podrían acercarse a los bordes. Aquí nuestra prescripción de la ecuación (5.12) permite a los planetas mantenerse fuera de los bordes, y nuestra prescripción de límite de amortiguación es suficiente para asegurar una transición suave entre las mallas 2D y 1D.

La figura 5.7 muestra un ejemplo de cómo la malla 2D (utilizando el método de remapeo) puede ser alterada considerando simulaciones a largo plazo. En esta figura se puede comparar cada una de las líneas continuas con la solución esperada dada por la correspondiente línea discontinua. Esta figura corresponde a la prueba que se muestra en la sección 5.5.3.

5.4.2.4. Desplazamiento de las resonancias de Lindblad

[Baruteau y Masset \(2008b\)](#) muestran que se necesita un tratamiento especial para calcular el torque cuando la autogravedad no está incluida en simulaciones de planetas que migran. Demuestran que, debido a un desplazamiento espurio de las resonancias de Lindblad, un planeta migrando en un disco sin autogravedad migra más rápido que las predicciones teóricas y en simulaciones completas con autogravedad.

Este desplazamiento espúreo ocurre porque el planeta y el disco orbitan un potencial efectivo diferente, ya que el planeta siente la gravedad del disco pero el disco no se siente a sí mismo.

El desplazamiento espurio se puede resolver fácilmente restando la densidad media azimutal antes del cálculo de la fuerza. Este método no afecta al torque neto, sino que cambia la frecuencia orbital del planeta, corrigiendo el desplazamiento y asegurando la obtención de una tasa de migración precisa. La frecuencia orbital del planeta cambia debido a que la cantidad de masa que el planeta siente en el interior del disco es alterada a medida que avanza en el disco.

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

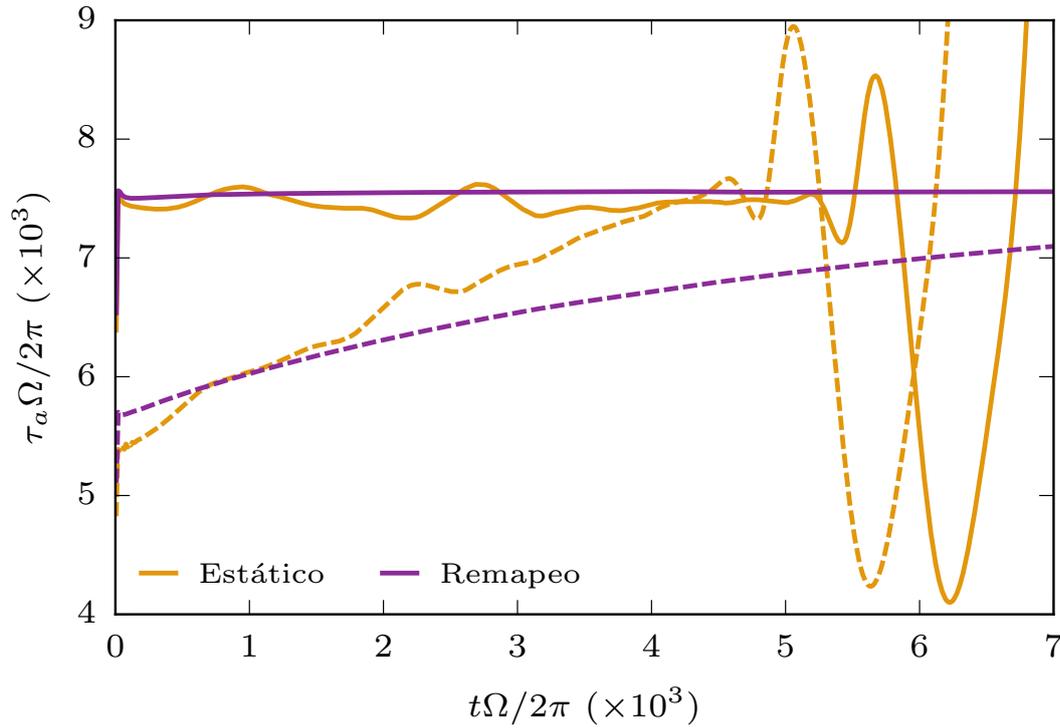


Figura 5.8: Tiempo de migración característico para el caso estacionario (naranja) y remapeo (púrpura). Las líneas continuas y discontinuas corresponden a resultados con y sin corrección para el desplazamiento espurio de las resonancias de Lindblad respectivamente. De acuerdo con [Baruteau y Masset \(2008b\)](#), la escala de tiempo de migración es más corta cuando el planeta y el disco no orbitan el mismo potencial. Figura adaptada de [Benítez-Llambay et al. \(2016\)](#).

Para calcular la fuerza gravitacional, restamos la densidad superficial media en el tiempo t_n :

$$\delta\Sigma(r, \varphi) = \Sigma(r, \varphi) - \langle \Sigma \rangle_{\varphi}, \quad (5.18)$$

donde φ es la coordenada azimutal y $\langle \Sigma \rangle_{\varphi}$ está definido como:

$$\langle \Sigma \rangle_{\varphi} = \frac{1}{n_{\varphi}} \sum_{i=0}^{n_{\varphi}-1} \Sigma(r, \varphi_i), \quad (5.19)$$

y calculamos la fuerza gravitacional usando $\delta\Sigma$.

Para nuestras preocupaciones, este desplazamiento es extremadamente importante para obtener tasas de migración convergentes, como se puede ver en la figura 5.8, correspondiente a la prueba explicada en la sección 5.5.4. Considerando diferentes extensiones radiales para la malla (en una resolución fija), estamos incluyendo artificialmente una cantidad diferente de masa en las regiones internas del disco. Esto cambia la frecuencia orbital del planeta con respecto al disco e impacta directamente el torque neto ejercido sobre el planeta. Este efecto es

5.5 Pruebas numéricas

claramente mostrado por la línea púrpura discontinua de la figura 5.8, donde el valor asintótico, el cual corresponde a una malla estrecha y de baja masa, tiende al valor obtenido al corregir tal efecto (línea continua púrpura).

5.5. Pruebas numéricas

En esta sección mostramos un conjunto de pruebas para validar el método de remapeo. Las simulaciones presentadas aquí incluyen todas las características ya descritas: (i) el método de remapeo, (ii) la evolución viscosa global y (iii) la corrección del desplazamiento de las resonancias de Lindblad. Para fines comparativos, en algunas pruebas no incluimos algunas de estas características, las cuales serán mencionadas de forma explícita en cada caso.

Utilizamos el código FARGO3D adaptado para incluir nuestro método usando el modelo de disco presentado en la sección 5.4.1. Nuestra unidad de masa es $m_0 = 1$, nuestra unidad de longitud es R_0 , el radio orbital inicial del planeta, y nuestra unidad de tiempo es $t = \Omega_k^{-1}$ (en este sistema unitario tenemos por lo tanto $\mathcal{G} = 1$). Consideramos un planeta de masa $m_p = 2 \times 10^{-5} m_0$ y un disco gaseoso de parámetros $\Sigma(R_0) = 10^{-3}$, $\alpha' = 0,5$, $h(R_0) = 0,05$, $f = 0$. Usamos la prescripción de Shakura y Sunyaev (1973) para la viscosidad, definida por $\nu = \alpha_\nu H^2 \Omega$, con un valor constante $\alpha_\nu = 4 \times 10^{-3}$. El dominio azimutal es $[0; 2\pi]$. El dominio radial se describirá para cada caso particular. En las pruebas sin remapeo, las regiones de amortiguación abarcan una extensión de período igual a 1,5 de cada borde activo, usando una prescripción similar a la empleada para el caso de remapeo (ecuación (5.11)).

5.5.1. Pruebas sin el método de remapeo

En esta sección medimos la tasa de migración de un solo planeta, considerando un disco estático (no remapeado). Tanto los bordes como las regiones de amortiguación se asumen fijos. Un parámetro importante involucrado en esta prueba es el tiempo de amortiguación característico. A través de experimentos numéricos se encontró que un buen valor para minimizar las reflexiones considerando la extensión adoptada para la zona de amortiguación es $0,3\Omega^{-1}$. Los límites de la malla fueron escogidos como $R_{min} = 0,37$ y $R_{max} = 2,08$, y consideramos tres resoluciones diferentes: $n_r \times n_\phi = 462 \times 512$, 924×1024 y 1386×1536 .

En la figura 5.9 se muestra la evolución del tiempo de migración característico para los tres casos diferentes. Un resultado convergente es completamente alcanzado por el caso de resolución media, como lo muestran las curvas azules y rojas.

Observamos pequeñas oscilaciones en la tasa de migración para los tres casos, los cuales no dependen fuertemente de la resolución y pueden ser explicados como una reflexión de la onda por los bordes de la malla. Hemos verificado esta suposición a través del rendimiento de simulaciones con diferente extensión

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

radial pero a igual resolución. Hemos observado un cambio de estas oscilaciones cuando la extensión radial cambia. Como veremos en las secciones siguientes, estas oscilaciones no están presentes cuando usamos el método de remapeo para un planeta aislado y con un disco plano (es decir, líneas púrpuras de la figura 5.8). Esto no significa que el método de remapeo permita mejorar el valor de la tasa de migración con respecto al caso estándar para una resolución comparable. Esto sólo significa que la onda reflectada mantiene una posición fija con respecto al planeta para toda la simulación. Esta afirmación puede ser fácilmente probada usando la expresión para la posición azimutal de la onda provista por [Ogilvie y Lubow \(2002\)](#). De acuerdo con estos autores, el ángulo azimutal de la onda escala linealmente con la distancia del planeta y h . Dado que nuestro método ajusta los bordes a una distancia proporcional al radio orbital planetario, este ángulo permanece constante.

Finalmente, a partir de la amplitud de estas oscilaciones, podemos obtener una idea de la precisión para la medida de las tasas de migración (no mejor que el 3% en este caso, el cual es extremadamente bueno). En principio, la precisión obtenida depende de cómo se pueda evitar la reflexión, por lo que podríamos modificar la prescripción de amortiguación para disminuir aún más la reflexión y así mejorar las medidas.

Al tiempo de $\sim 5,5 \times 10^3$ órbitas, todas las curvas alcanzan el borde interno de la malla, la migración se detiene y las tasas de migración divergen.

5.5.2. Pruebas con el método de remapeo

El algoritmo de remapeo necesita dos extensiones radiales diferentes para ser definido: (i) la malla activa y (ii) las zonas de amortiguamiento, controladas por los parámetros adimensionales $\mathcal{R}_{d,b}$. En esta sección realizamos dos pruebas para verificar cuán bien se miden las tasas de migración variando ambos parámetros. En todos los casos el tiempo característico para el amortiguamiento fue elegido como $0,3\Omega_k^{-1}$.

La primera prueba consiste en simular un planeta aislado en un disco con los mismos parámetros ya descritos, pero variando tanto la resolución efectiva como \mathcal{R}_d en una malla. Utilizamos tres resoluciones diferentes, referidas por el número de zonas azimutales: 512, 1024, 1536, que corresponden a las mismas resoluciones utilizadas en las simulaciones realizadas sin el algoritmo de remapeo. Variamos \mathcal{R}_d linealmente de 1,5 a 3 por pasos de 0,1. Hemos realizado cada prueba para al menos 10^3 órbitas, y los valores reportados aquí son un promedio del tiempo de migración característico en el último centenar de órbitas (que es constante para estos parámetros).

La figura 5.10 muestra los resultados de esta prueba. El caso de menor resolución (en rojo) muestra un aumento sistemático del tiempo de migración, evidenciando que esta resolución no es suficiente para resolver los procesos físicos

5.5 Pruebas numéricas

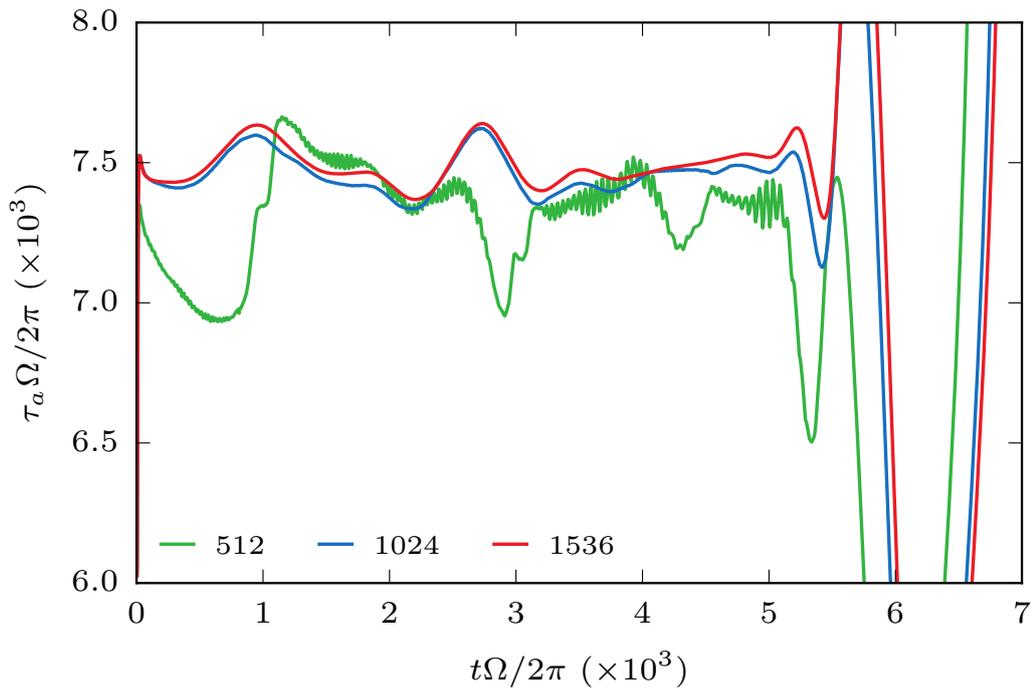


Figura 5.9: Tiempo de migración característica τ_a para tres simulaciones diferentes considerando una malla fija (sin el método de remapeo) pero considerando diferentes resoluciones: la línea continua verde corresponde al caso de resolución más baja, la línea continua azul al doble y la roja al triple de dicha resolución. En general, las tres curvas muestran un comportamiento similar. Las oscilaciones más altas están presentes en el caso de más baja resolución. Al tiempo de $\sim 5,5 \times 10^3$ órbitas las curvas divergen debido a que el planeta alcanza el límite interno de la malla, deteniendo la migración. Como es descrito en el texto, las oscilaciones pueden ser atribuidas a las reflexiones de la onda sobre ambos bordes de la malla considerada. Figura adaptada de [Benítez-Llambay et al. \(2016\)](#).

involucrados. Los casos intermedios y de alta resolución (verde y azul respectivamente) muestran una tasa casi convergente. En esta prueba podemos ver que las oscilaciones observadas en el caso fijo siguen presentes cuando se mide la tasa de migración considerando diferentes extensiones radiales de la malla. Esta característica es una evidencia de reflexiones de la estela en los límites, produciendo una tasa de migración variable. La amplitud de estas oscilaciones da una estimación de la precisión alcanzada (no mejor que 3% en este caso particular). Para todas las simulaciones presentadas en este gráfico hemos utilizado $R_b = 1,5$. Sorprendentemente, no observamos una variación importante de la tasa de migración al considerar $\mathcal{R}_d < 2,0$, probablemente debido a las regiones de amortiguación suaves y grandes utilizadas. Sin embargo, este parámetro debe ser mayor que 2 para capturar todas las resonancias de Lindblad. Para probar esta idea hemos realizado un conjunto de simulaciones similares pero definiendo una condición de amortiguación muy fuerte sobre una región estrecha, mostrada por

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

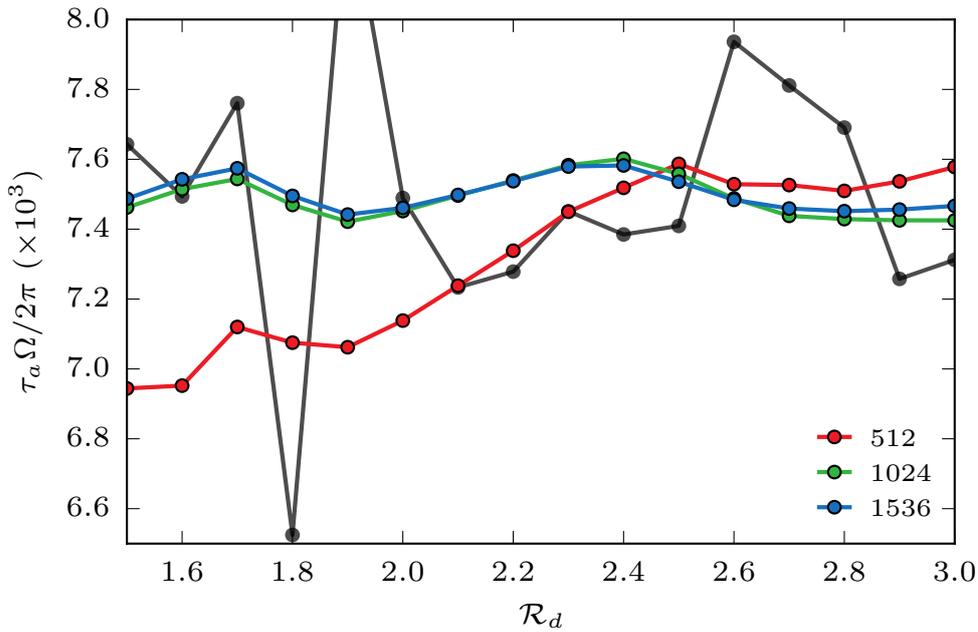


Figura 5.10: Tiempo característico de migración como función de \mathcal{R}_d para el caso de remapeo. Se muestra un conjunto de simulaciones con tres resoluciones diferentes (denominadas 512, 1024 y 1536) e igual valor de $\mathcal{R}_b = 1,5$. La curva negra muestra un conjunto de resolución intermedia con una amortiguación fuerte. Esta figura proporciona información respecto al tamaño del dominio activo de la malla 2D. Figura adaptada de Benítez-Llambay *et al.* (2016).

la curva negra. En este caso podemos ver rápidas y fuertes variaciones en la tasa de migración para $\mathcal{R}_d < 2,0$. Para $\mathcal{R}_d > 2,0$ todavía observamos oscilaciones con amplitudes inferiores, atribuibles a la reflexión de la estela como se muestra a continuación.

La segunda prueba fue diseñada para demostrar que las oscilaciones observadas en la tasa de migración para diferentes valores de \mathcal{R}_d son consistentes con las reflexiones de la estela. Para probar esta afirmación hemos variado el valor del parámetro \mathcal{R}_b , tomando 1,5, 5, 2,0 y 2,5 para la simulación de resolución intermedia (curva verde de la figura 5.10). Los resultados se presentan en la figura 5.11. Es notable cómo todas las curvas devuelven valores similares para la tasa de migración media, pero los valores extremos se desplazan. Otra característica interesante es que la amplitud de las oscilaciones disminuye cuando \mathcal{R}_b aumenta. Esto es natural si asumimos que estas oscilaciones son debidas a reflexiones, ya que las regiones de amortiguación mayores naturalmente mejoran las perturbaciones.

Es importante observar que estas pruebas se han hecho para un planeta en una órbita circular. En el caso de que se consideren planetas con una excentricidad finita, el tamaño de la malla activa debe ser validado por una prueba de convergencia similar, ya que en tales casos las resonancias de Lindblad de orden

5.5 Pruebas numéricas

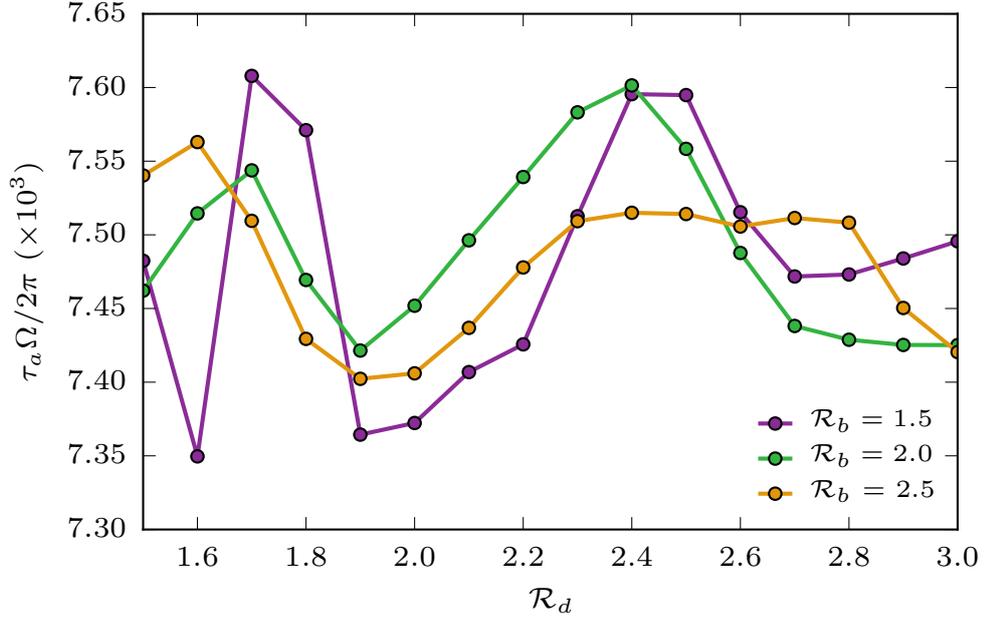


Figura 5.11: Tiempo característico de migración como función de \mathcal{R}_d para el caso de remapeo. Se muestra un conjunto de simulaciones con tres valores diferentes para \mathcal{R}_b (1,5, 2,0 y 2,5) para el conjunto de resolución intermedia (1024). Es notable cómo la amplitud de las curvas decrece para mayores \mathcal{R}_b . Esta figura proporciona información respecto al tamaño del dominio de amortiguación. Figura adaptada de [Benítez-Llambay et al. \(2016\)](#).

superior (como la RMM 3 : 1), situadas aún más lejos del planeta pueden desempeñar un papel no despreciable en la migración planetaria. Además, podría ser importante en algunos casos específicos tener en cuenta el tamaño físico de las resonancias, que tienen un ancho efectivo que no debe ser despreciado. Este tamaño depende del número de onda azimutal y alcanza un máximo para valores bajos de dicho número de onda ([Artymowicz, 1993](#)).

5.5.3. Prueba de evolución viscosa

Realizamos una prueba de evolución viscosa para un disco axisimétrico sin planeta. Inicializamos un disco plano ($f = 0$) localmente isoterma y una densidad superficial con una ley de potencia. Hemos utilizado una viscosidad uniforme $\nu = 10^{-4} R_0^2 \Omega_0$.

El modelo viscoso 1D, dado por la ecuación (5.16), se desarrolla utilizando 2048 zonas radiales uniformes entre $r = 0,05$ y $r = 10$, con condiciones de frontera de densidad superficial nula. La malla 2D tiene 256 zonas radiales y la extensión radial completa se extiende sobre 3 períodos en el espacio ($\mathcal{R}_{d,b} = 1,5$). Movemos radialmente la malla a una velocidad constante para probar cómo el método viscoso se acopla con el método de remapeo.

La figura 5.7 muestra la evolución de la densidad superficial en diferentes

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

momentos. En líneas continuas se muestra la densidad superficial 2D. Las líneas discontinuas corresponden a la solución de la ecuación (5.16), usada para actualizar los límites y zonas de amortiguación, para diferentes tiempos. En negro, se muestran las condiciones iniciales, mientras que la evolución de la densidad superficial, bajo los efectos de la viscosidad, se presenta en líneas coloreadas.

También hemos comprobado que somos capaces de obtener una solución estable considerando un modelo de disco α_ν , con $\alpha' = 0,5$ y $f = 0$, configuración usada en todas las pruebas considerando planetas.

Los resultados obtenidos son notablemente limpios, lo que permite realizar una migración a gran escala de planetas considerando la evolución del disco viscoso global, e incluso abrir la posibilidad de simulaciones a largo plazo de la migración de tipo II.

5.5.4. Corrigiendo las frecuencias orbitales

Una característica importante que hemos incluido en nuestro método es la corrección del desplazamiento espurio de las resonancias de Lindblad. Es un componente crucial para tener simulaciones convergentes usando el método de remapeo, como ya se describió en la sección 5.4.2.4.

Hemos revisado nuestra implementación usando dos simulaciones diferentes, una sin el método de remapeo y la otra considerando todos los ingredientes. Los parámetros utilizados son los mismos que los utilizados en los casos fijos (ver sección 5.5.1), pero en el caso de remapeo consideramos $\mathcal{R}_d = 2,0$ y $\mathcal{R}_b = 1,5$. Ambos casos tienen la misma resolución inicial. Hemos calculado la fuerza gravitatoria incluyendo la densidad media de fondo y restándola, siguiendo la ecuación (5.18).

La figura 5.8 muestra la evolución para el tiempo de migración característica para estas cuatro simulaciones. En líneas naranjas mostramos las simulaciones que no incluyen el método de remapeo mientras que las líneas púrpuras muestran las simulaciones que lo incluyen. Las líneas discontinuas corresponden a los casos no corregidos y las líneas continuas corresponden a las fijas. Como evidenciamos en la sección 5.4.2.4, y en acuerdo con Baruteau y Masset (2008b), los casos desplazados (no corregidos) tienen una escala de tiempo de migración más corta. Es interesante observar que el caso no corregido utilizando el método de remapeo, tiene una pendiente no nula. Es posible probar mediante cálculos lineales (Tanaka *et al.*, 2002, por ejemplo), que esta pendiente debería ser de hecho plana para este conjunto de parámetros. Por lo tanto, muestra claramente que la tasa de migración lograda sin la corrección no es correcta. Lo mismo ocurre con el caso estático.

Otra característica importante de la figura es que tanto los casos estáticos como los de remapeo tienden hacia el corregido en un tiempo mayor. Esto es una consecuencia de tener un disco estrecho y virtualmente sin masa en las regiones

interiores.

Finalmente remarcamos que en el caso de remapeo no observamos oscilaciones para la tasa de migración (para un caso de un planeta). Esta característica puede ser explicada como un cambio constante entre la estela reflejada y el planeta, como ya se discutió en la sección 5.5.1.

5.5.5. Resolviendo la presión de escala del disco

Una dificultad con el método de remapeo en la forma presentada aquí es el requisito de mantener una resolución global suficiente para un modelo de disco dado. La longitud de la escala de presión del disco debe estar bien resuelta al menos cerca del planeta, lo que implica también resolver las resonancias de Lindblad más cercanas, acumulándose a $r \simeq \pm H$ (Artymowicz, 1993).

En las pruebas presentadas en este trabajo sólo hemos considerado un disco no acampanado, lo que implica $H \propto r$. En una malla uniformemente espaciada, un método uniforme de remapeo del muestreo tiene una resolución linealmente creciente con r_p , y el número de celdas por unidad de H será el mismo para toda la simulación, garantizando así resultados convergentes para las tasas de migración. Sin embargo, cuando consideramos un disco acampanado, el número de celdas por unidad de H es $\propto r^{-f}$, que es una función decreciente para los discos acampanados ($f > 0$). Por lo tanto, un número creciente de celdas por unidad de H se necesita cuando el planeta migra a la estrella.

Esto pone de manifiesto la necesidad de una malla no uniforme para simular la migración de planetas en un disco acampanado, que idealmente debería espaciarse radialmente como $\propto r^{f+1}$.

Sin embargo, en casos reales los discos no pueden ser acampanados sobre un rango radial grande, limitando el índice de forma máximo permitido. Por lo tanto, en la práctica, una malla de migración logarítmica suficientemente resuelta acoplada con un modelo de disco realista, como una ley de potencia no global para la densidad y/o la temperatura, podría ser lo suficientemente buena para capturar todos los detalles importantes de la migración planetaria para la migración a gran escala.

5.5.6. Mejoras y propiedades de conservación

Si las cantidades son leyes de potencia del radio, como la densidad superficial, la temperatura y la velocidad de rotación, un procedimiento para minimizar los errores durante las interpolaciones podría ser realizarlas en un espacio log-log (que es en realidad una reconstrucción exacta en el caso no perturbado). Puede hacerse definiendo $\chi = \log(r)$, $\xi = \log(q)$ y reemplazando $r \rightarrow \chi$ y $q \rightarrow \xi$ en la ecuación (5.13). Sin embargo, todos los resultados presentados en este trabajo se realizaron utilizando interpolaciones en el espacio lineal. Para fines comparativos, hemos realizado algunos de ellos utilizando un método de interpolación

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

logarítmica para las magnitudes definidas como ley de potencia, que muestran diferencias mínimas ($\sim 0,2\%$) en las tasas de migración medidas durante todo el tiempo. En casos más realistas, en los que el disco no puede ser modelado como una ley de potencia global, no esperamos tener una diferencia significativa entre la interpolación lineal o logarítmica.

Otro método para desplazar las resonancias de Lindblad fue propuesto por Baruteau y Masset (2008b), y consiste en añadir al potencial estelar el potencial de un disco axisimétrico que tiene el mismo perfil de densidad que el disco. Este método es ligeramente más complejo de implementar, y en teoría un poco más preciso que el utilizado en este trabajo, ya que coincide más estrechamente con las frecuencias orbitales reales. No obstante, el método utilizado aquí es en gran medida suficiente para obtener tasas de migración dentro de un cierto porcentaje de precisión.

Con respecto a las propiedades de conservación, nuestro método no puede asegurar la conservación de la masa (y consecuentemente ni del momento angular) ya que una nueva escala de las celdas más un procedimiento de interpolación altera la cantidad de masa dentro de una celda dada. A pesar de ello, el error total acumulado durante una simulación completa al realizar interpolaciones consecutivas es realmente pequeño. Nuestras pruebas muestran que el error total (en comparación con las expectativas analíticas) en los peores casos, como una con baja resolución y migración a gran escala, es de hasta $\sim 1\%$ para todas las cantidades. En la mayoría de los casos los errores serán realmente mucho más pequeños.

5.6. Simulaciones de sistemas planetarios múltiples

Como se señaló al principio de este capítulo, parte de la motivación para desarrollar este método es capturar los grandes intervalos temporales y espaciales involucrados en sistemas con múltiples planetas.

En este caso multiplanetario, los bordes de la malla se calculan de forma similar tal como se hizo en el caso de un solo planeta. Obtenemos el semieje mayor para todos ellos y luego calculamos r_d^- y r_b^- con las ecuaciones (5.10) y (5.12) usando el semieje mayor del planeta más interno, mientras se sigue el mismo procedimiento para r_d^+ y r_b^+ , usando el planeta más externo.

La figura 5.12 y la figura 5.13 muestran dos ejemplos, el primero corresponde a un sistema de dos planetas, mientras que el segundo explora un caso con tres planetas. Las condiciones iniciales para los cuerpos y el disco se detallan en las descripciones de las figuras. En ambos casos la evolución dinámica se lleva a cabo para largas escalas de tiempo de tal manera que los semiejes mayores finales se encuentran muy cerca de la estrella central. Los sistemas evolucionan naturalmente a configuraciones resonantes, como lo demuestra el comportamiento de los ángulos resonantes.

5.6 Simulaciones de sistemas planetarios múltiples

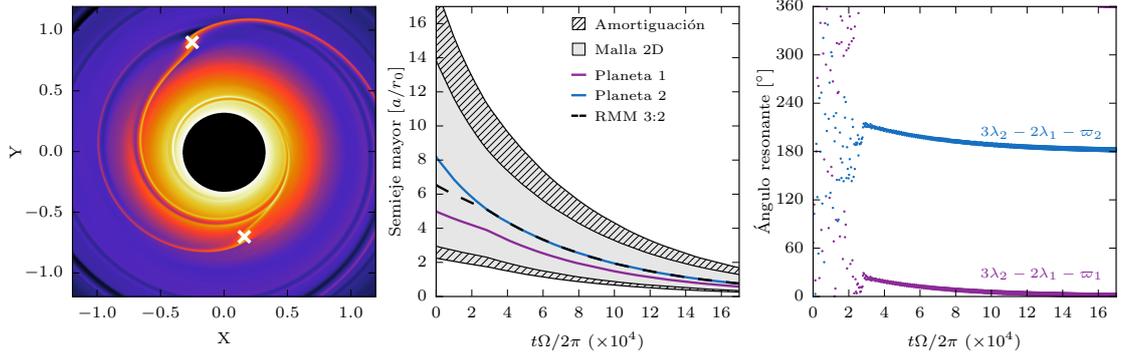


Figura 5.12: Simulación hidrodinámica para un sistema de dos planetas con masas $m_1 = 10m_{\oplus}$ y $m_2 = 20m_{\oplus}$. Los semiejes mayores iniciales son $a_1 = 5$ UA y $a_2 = 8,19$ UA, y las excentricidades iniciales iguales a 0,05. Los parámetros del disco son $\Sigma_0 = 400$ gr/cm², $f = 0$, $\alpha' = 0,5$, $h_0 = 0,05$ y $\alpha_v = 4 \times 10^{-3}$. El gráfico izquierdo muestra la densidad superficial del disco en el instante $t = 15,53 \times 10^4$ órbitas, donde los planetas están indicados con cruces blancas. El gráfico del medio muestra la evolución en el tiempo de los semiejes mayores. La región de color gris clara corresponde a la malla activa y la región rayada a la zona de amortiguación. Aproximadamente en $t = 3 \times 10^4$ órbitas, ambos planetas están atrapados en la RMM 3 : 2, después de que ambos ángulos resonantes comiencen a librar alrededor de los valores que lentamente evolucionan con el tiempo (gráfico de la derecha) Figura adaptada de Benítez-Llambay *et al.* (2016)..

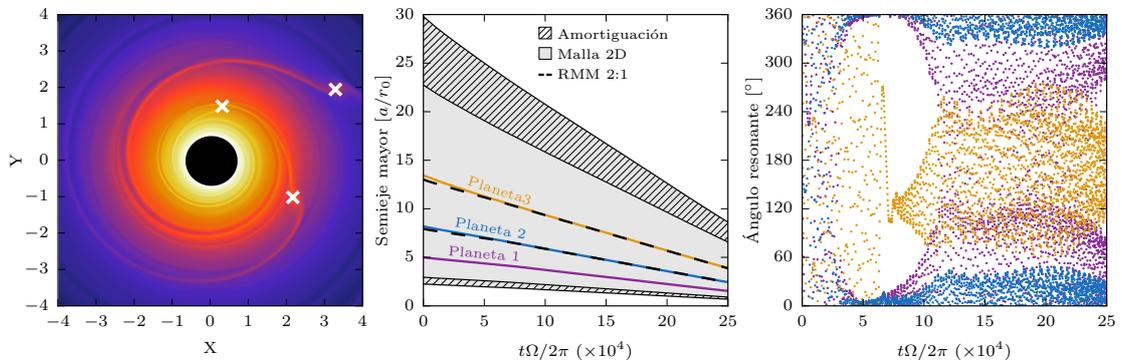


Figura 5.13: Simulación hidrodinámica para un sistema de tres planetas con masas $m_1 = 10m_{\oplus}$, $m_2 = 20m_{\oplus}$ y $m_3 = 40m_{\oplus}$. Los semiejes mayores iniciales son $a_1 = 5$ UA, $a_2 = 8,19$ UA y $a_3 = 13,44$ UA, y sus excentricidades son iguales a 0,05. Los parámetros del disco son $\Sigma_0 = 400$ gr/cm², $f = 0,25$, $\alpha' = 1,0$, $h_0 = 0,05$ y $\alpha_v = 4 \times 10^{-3}$. El gráfico izquierdo muestra la densidad superficial del disco en el instante $t = 25 \times 10^4$ órbitas, y los planetas están marcados con cruces blancas. El gráfico del medio muestra la evolución en el tiempo de los semiejes mayores. La región de color gris clara corresponde a la malla activa y la región rayada a la zona de amortiguación. Todos los planetas son capturados en RMMs 2 : 1 sucesivas conduciendo a una configuración resonante múltiple que se mantiene a través de la simulación. El gráfico de la derecha muestra el comportamiento del ángulo resonante principal del par interno $2\lambda_2 - \lambda_1 - \omega_1$ (púrpura), el ángulo correspondiente al par externo $2\lambda_3 - \lambda_2 - \omega_2$ (azul), y el ángulo resonante de Laplace $\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3$ en naranja. Figura adaptada de Benítez-Llambay *et al.* (2016).

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

5.6.1. Testeando parámetros

En esta sección presentamos una serie de simulaciones hidrodinámicas con el método de remapeo variando el índice de forma del disco f , la potencia de la densidad superficial α' , las masas planetarias, y los semiejes mayores iniciales de cada planeta. El objetivo de estas pruebas es saber cuán sensible son los sistemas planetarios a estos parámetros. En la tabla 5.1 presentamos las características de nuestro conjunto de simulaciones. Los parámetros del disco son $\Sigma_0 = 400\text{gr/cm}^2$, $h_0 = 0,05$, $\alpha_v = 4 \times 10^{-3}$ y tomamos un disco plano, $f = 0$, o acampanado, $f = 0,25$. Las excentricidades iniciales de los planetas se tomaron iguales a 0,05, los semiejes mayores iniciales de los planetas internos comienzan en 1 UA ó 5 UA, mientras que los de los planetas externos comienzan a una distancia tal que $P_2/P_1 = 2,1$; es decir, cerca pero fuera de la RMM considerada más fuerte, 2 : 1. Finalmente, las masas de los planetas internos se tomaron como $m_1 = 2m_\oplus$ o $m_1 = 10m_\oplus$, mientras que los externos son dos veces más grandes que los internos, $m_2 = 4m_\oplus$ y $m_2 = 20m_\oplus$.

Simulación	f	α'	a_1 [UA]	a_2 [UA]	m_1 [m_\oplus]	m_2 [m_\oplus]	a_{1f} [UA]	$(P_2/P_1)_f$
sim1	0	0.5	1.0	1.63	2	4	0.30	1.5
sim2	0	0.5	1.0	1.63	10	20	0.35	2.0
sim3	0	0.5	5.0	8.19	2	4	1.15	4/3
sim4	0	0.5	5.0	8.19	10	20	0.16	1.5
sim5	0.25	1.0	1.0	1.63	2	4	0.15	2.0
sim6	0.25	1.0	1.0	1.63	10	20	0.30	2.0
sim7	0.25	1.0	5.0	8.19	2	4	0.37	1.5
sim8	0.25	1.0	5.0	8.19	10	20	0.74	2.0

Tabla 5.1: Características del conjunto de simulaciones realizadas en este capítulo. En todos los casos los parámetros del disco son $\Sigma_0 = 400\text{gr/cm}^2$, $h_0 = 0,05$, $\alpha_v = 4 \times 10^{-3}$, y las excentricidades iniciales son $e_1 = e_2 = 0,05$.

Los resultados de la **sim1** y **sim2** se muestran en la figura 5.14, los de la **sim3** y **sim4** en la figura 5.15, **sim5** y **sim6** en la figura 5.16 y **sim7** y **sim8** en la figura 5.17. En todos los casos de izquierda a derecha, se muestran la evolución en el tiempo de los semiejes mayores, del cociente de períodos orbitales, de las excentricidades y de los ángulos resonantes. También en todos los casos, en color púrpura se representa la evolución del planeta interno y en azul al externo. Los ángulos resonantes θ_1, θ_2 (ver ecuación 2.14) también se indican con color púrpura y azul, respectivamente. Las configuraciones finales de todas las pruebas resultaron estar en resonancia, principalmente 2 : 1 y 3 : 2, salvo **sim3** que quedó capturada en la 4 : 3.

Notar que los tiempos totales de integración fueron diferentes en todas las simulaciones. Este tiempo es inherente a cada sistema particular que se simula. Lo importante es poder integrarlo el tiempo necesario para que llegue a una con-

5.6 Simulaciones de sistemas planetarios múltiples

figuración final estable y, en la medida que se pueda, a distancias muy cercanas a la estrella. En todos los casos parecen haber llegado a configuraciones finales estables.

Un comportamiento peculiar se da en la **sim5** y **sim6**. Los pares de planetas entran rápidamente en resonancia 2 : 1 en los tiempos $\sim 5 \times 10^4$ órbitas y $\sim 1,4 \times 10^4$ órbitas, respectivamente. Los planetas de **sim5** permanecen allí con libraciones de alta amplitud de sus ángulos resonantes θ_1 y θ_2 , salvo un intervalo pequeño de su evolución (~ 50000 órbitas) justo después de la captura en resonancia. Como es de esperar, en este intervalo de captura, las excentricidades se excitan levemente sin superar valores de 0,03. El desplazamiento de resonancia comienza alrededor de 25×10^4 órbitas, en donde las excentricidades se amortiguan rápidamente a cero. Por otro lado, los ángulos resonantes de la **sim5** permanecen con libraciones de baja amplitud durante su intervalo en la configuración resonante, elevándose suavemente alrededor de 5×10^4 órbitas en donde comienza el desplazamiento de la RMM. Esto muestra un primer indicio de que las simulaciones hidrodinámicas pueden llegar a explicar la separación de la resonancia nominal existente en los sistemas exoplanetarios observados por Kepler (ver capítulo 1).

La simulación **sim1** y **sim5** se realizaron con dos densidades superficiales iniciales diferentes $\Sigma_0 = 1768, 5304 \text{ gr/cm}^2$. Todas llegaron a semiejes mayores finales del planeta interior menor a 0,5, algunas incluso menores que 0,21. En ambas simulaciones la densidad superficial inicial más grande resultó afectar la configuración final de los planetas, cayendo a una RMM de mayor grado. Para **sim1** 4 : 3 y para **sim2** 3 : 2. Mientras que para la densidad superficial inicial más baja las capturas en resonancias fueron similares a las ya encontradas. A raíz de este experimento hemos continuado todas las simulaciones de la tabla 5.1 con densidad superficial inicial 10 veces más grande para que la evolución hidrodinámica sea más rápida. Notablemente, la densidad superficial inicial sólo cambia la escala de migración y no las configuraciones resonantes finales, permitiendo así disminuir significativamente el tiempo de cómputo. Sin embargo, este punto hay que tomarlo con cuidado y analizarlo para cada caso particular.

Un dato importante de mencionar es el costo computacional de nuestras simulaciones multiplanetarias. Cada simulación hidrodinámica presentada en este trabajo demoró aproximadamente 90 días utilizando una GPU de Mendieta. Es importante resaltar que este tiempo puede disminuir significativamente si se utilizan las últimas GPUs del mercado.

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

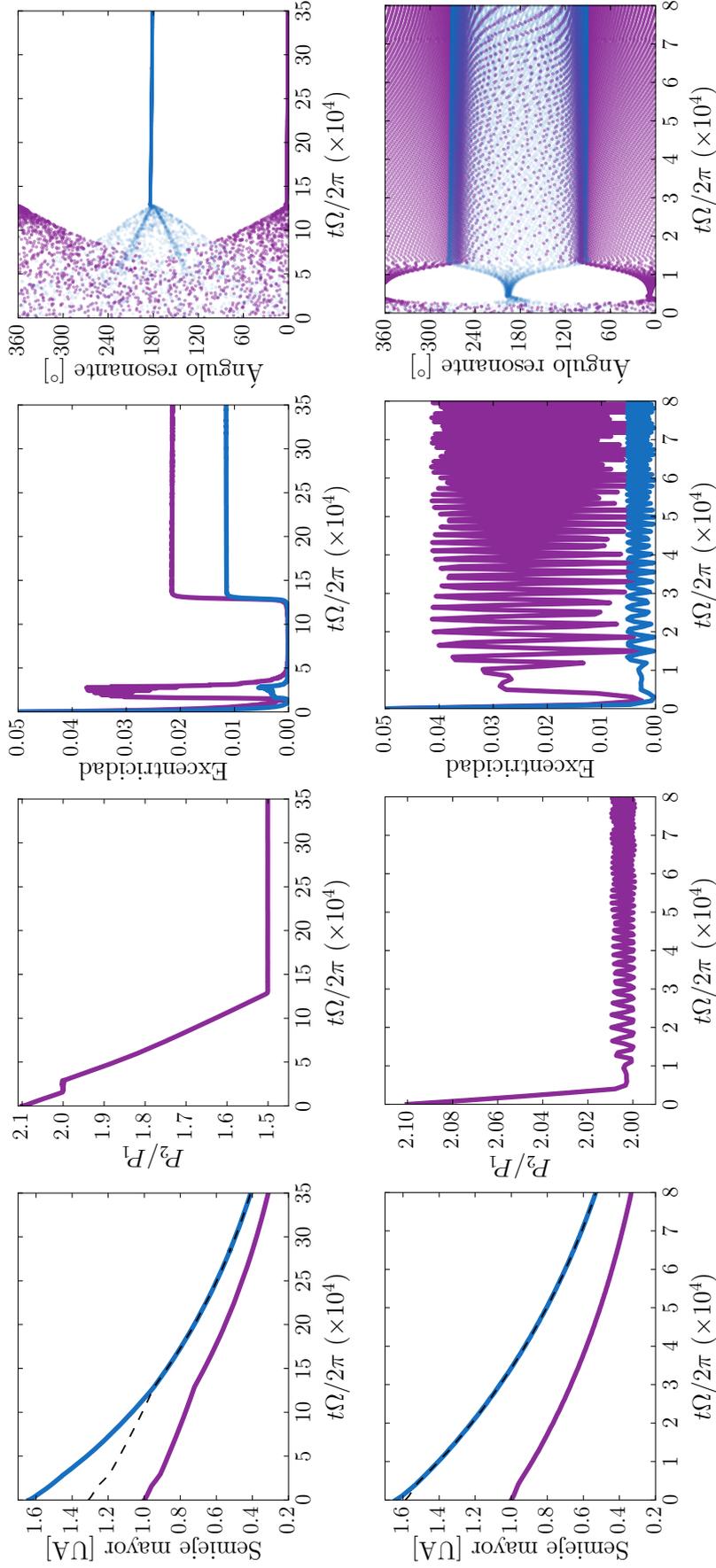


Figura 5.14: Simulaciones hidrodinámicas para un sistema de dos planetas con el método de remapeo. Los cuatro gráficos de arriba corresponden a la simulación **sim1** y los cuatro de abajo a la **sim2**. Los gráficos de izquierda a derecha muestran la evolución en el tiempo de los semiejes mayores, del cociente de periodos orbitales, de las excentricidades y de los ángulos resonantes. Los planetas de la **sim1** quedan atrapados en RMM 3 : 2 mientras que los de la **sim2** en RMM 2 : 1. En color púrpura se representa la evolución del planeta interno y en color azul al externo. Los ángulos resonantes θ_1, θ_2 , también se indican con color púrpura y azul, respectivamente. La línea discontinua negra indica la RMM nominal en la que los planetas quedan capturados. Observar que para la simulación de los gráficos superiores se tomaron masas planetarias 5 veces menores que para la simulación de los gráficos inferiores. Para más detalles ver tabla 5.1.

5.6 Simulaciones de sistemas planetarios múltiples

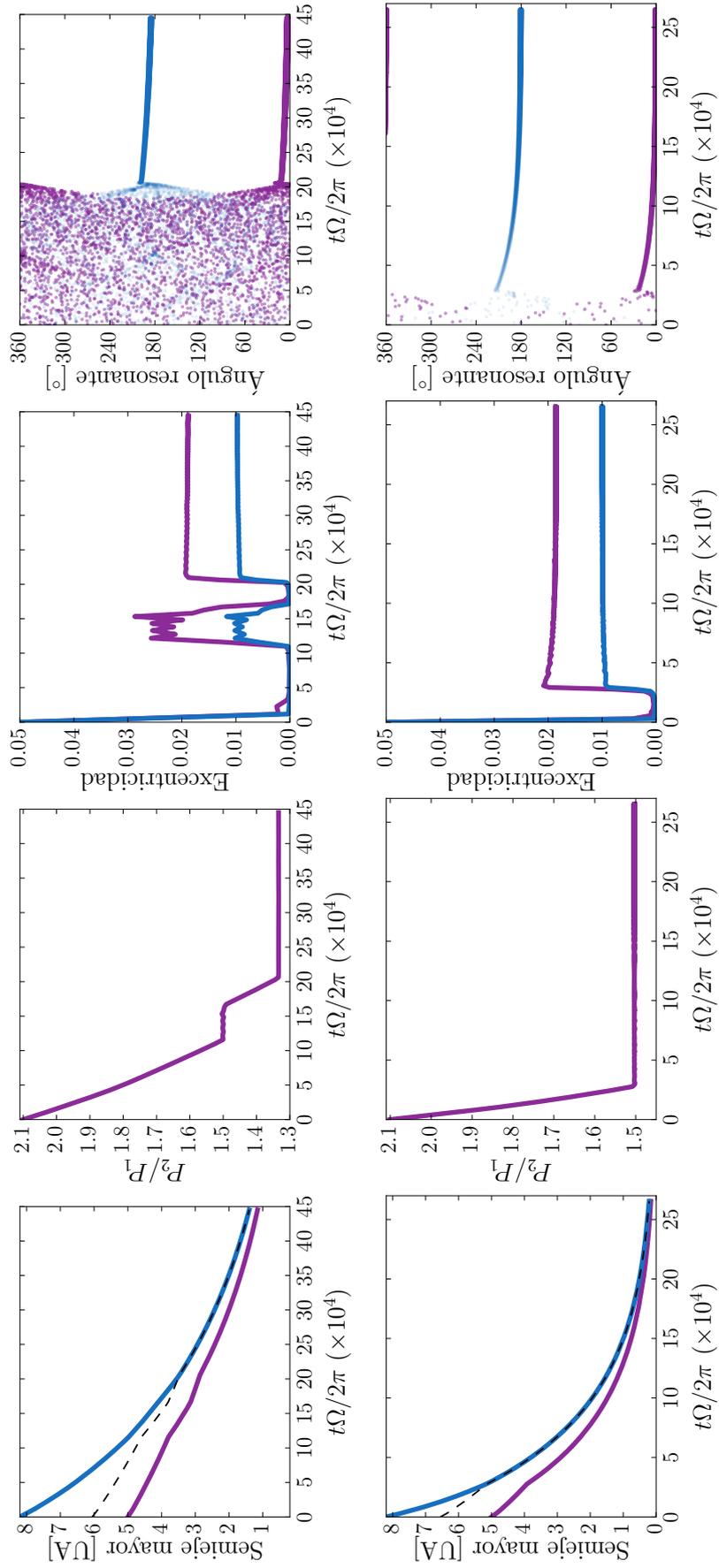


Figura 5.15: Lo mismo que la figura anterior pero para *sim3* y *sim4*. Los planetas de la *sim3* quedan atrapados en RMM 4 : 3 mientras que los de la *sim4* en RMM 3 : 2.

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

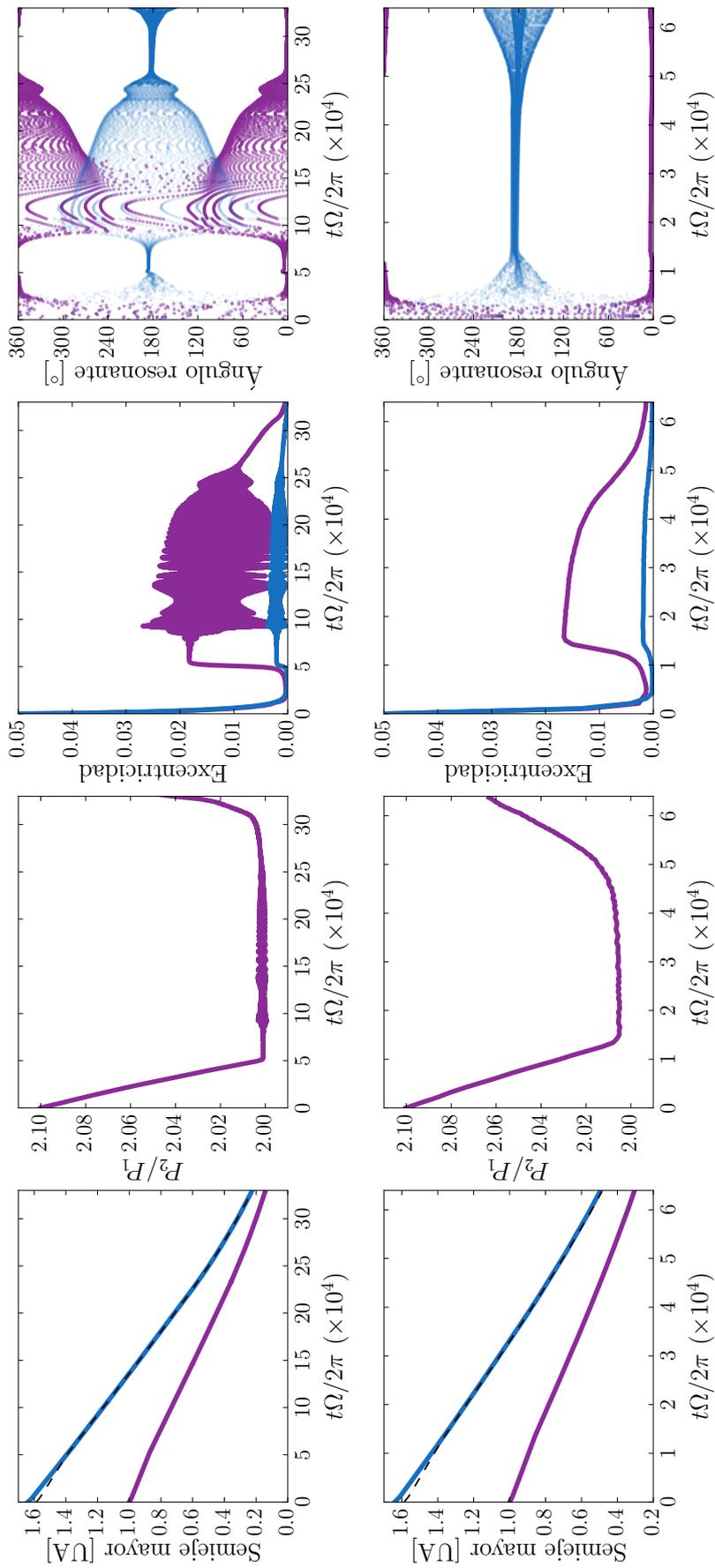


Figura 5.16: Lo mismo que la figura anterior pero para **sim5** y **sim6**. Los planetas de ambas simulaciones quedan atrapados en RMM 2 : 1.

5.6 Simulaciones de sistemas planetarios múltiples

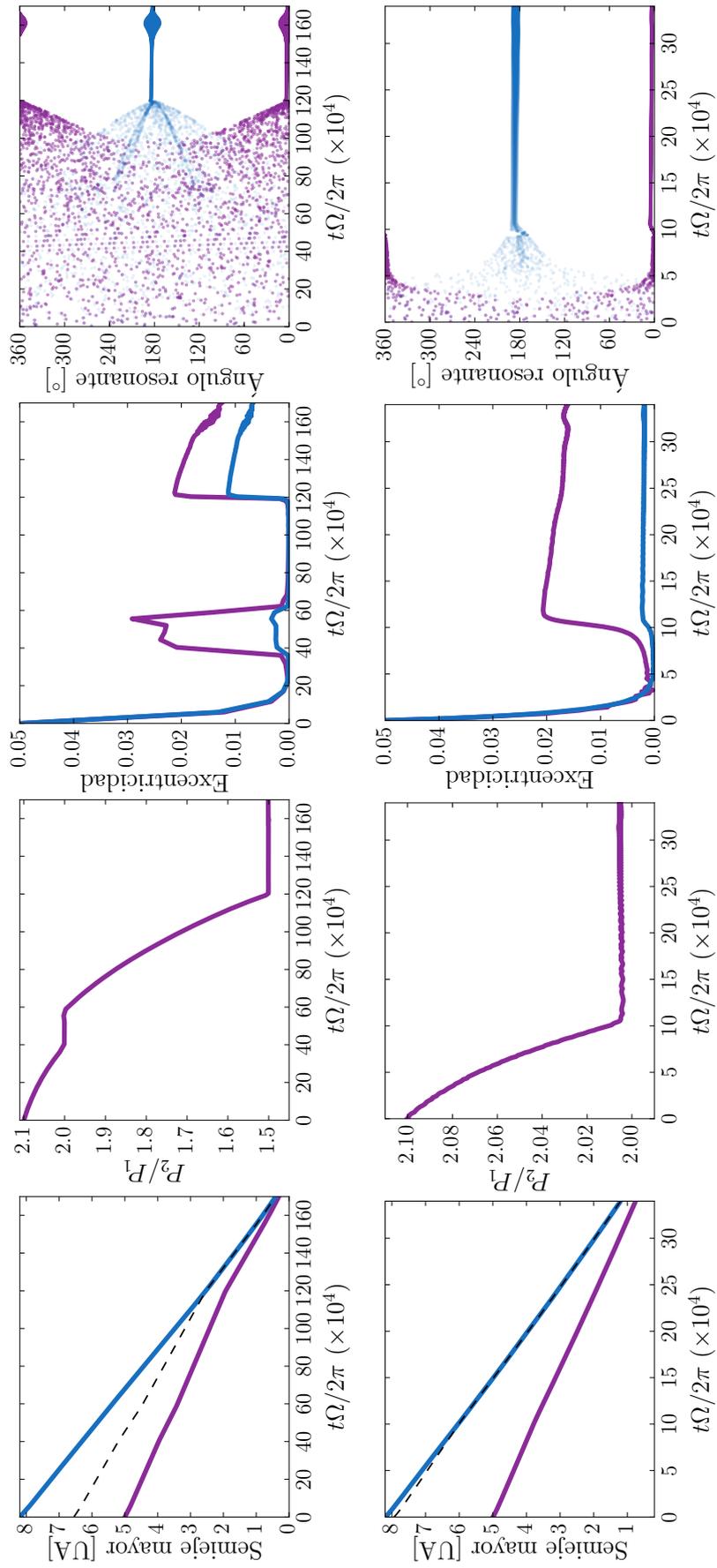


Figura 5.17: Lo mismo que la figura anterior pero para **sim7** y **sim8**. Los planetas de la **sim7** quedan atrapados en RMM 3 : 2 mientras que los de la **sim8** en RMM 2 : 1.

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

5.6.2. Variando la distancia inicial

La figura 5.18 muestra nuevamente los resultados de **sim6** y **sim8**, ambas con valores idénticos para las masas planetarias, parámetros de disco y excentricidades iniciales, pero difiriendo en el semieje mayor inicial. Mientras que para **sim6** colocamos el planeta interior en $a_1 = 1$ UA, en **sim8** este valor se elevó a $a_1 = 5$ UA. El tiempo total de integración también fue diferente. La evolución orbital de **sim8** se siguió durante casi $3,5 \times 10^5$ órbitas, hasta que el semieje mayor final del planeta interior fue de $\sim 0,74$ UA, por lo tanto inferior al valor inicial utilizado para **sim6**. A su vez, esta segunda simulación se siguió hasta que el valor de a_1 alcanzó 0,3 UA.

Como ya hemos visto, ambas simulaciones condujeron a la captura en la RMM 2 : 1 con libraciones de baja amplitud de los ángulos resonantes θ_1 y θ_2 , correspondiente a soluciones ACR (ver capítulo 2). Sin embargo, mientras que la relación de períodos orbitales P_2/P_1 en **sim8** mostró muy poca separación de la resonancia nominal, la simulación **sim6** expuso un fuerte incremento en dicha separación.

Finalmente, el gráfico inferior derecho de la figura 5.18 muestra la evolución de la relación de períodos orbitales como función de P_1 , lo que da información de dos características importantes. En primer lugar, descontando la fase inicial antes del bloqueo resonante, los resultados de ambas simulaciones se superponen suavemente, indicando que el valor de la superposición de la resonancia no es una función de las condiciones iniciales sino de la distancia del sistema a la estrella central. En segundo lugar, la separación de la resonancia nominal es muy cercana a cero lejos de la estrella, pero rápidamente aumenta a 0,06 para los períodos orbitales del orden de 50 días. Esta tendencia la intentaremos explicar en el capítulo siguiente.

Realizando un experimento similar para la captura en RMM 3 : 2, en la figura 5.19 mostramos nuevamente el resultado de la **sim7** y una nueva simulación **sim5'** con $\Sigma_0 = 4000$ gr/cm². La **sim7** fue reescalada para poder comparar con la **sim5'**. Ambas simulaciones conservaron los mismos parámetros del sistema excepto la densidad superficial inicial. El planeta interior de **sim7** comenzó en $a_1 = 5$ UA y en **sim5'** en $a_1 = 0,42$ UA. Igual que antes, la evolución orbital de **sim7** se siguió hasta que el semieje mayor final del planeta interior fue de $\sim 0,37$ UA, inferior al valor obtenido para **sim5'**.

De forma similar que para el caso de captura en RMM 2 : 1, la relación de períodos orbitales P_2/P_1 en **sim7** mostró muy poca variación de la resonancia exacta mientras que **sim5'** fue lo contrario. La figura 5.19 demuestra nuevamente que el desplazamiento de la resonancia exacta no depende de las condiciones iniciales del sistema sino de la distancia de éste a la estrella central. Notar que esta conclusión no se logra mirando sólo la evolución temporal del cociente de períodos, es decir, el tiempo no nos da información de la dinámica. Esta pro-

5.6 Simulaciones de sistemas planetarios múltiples

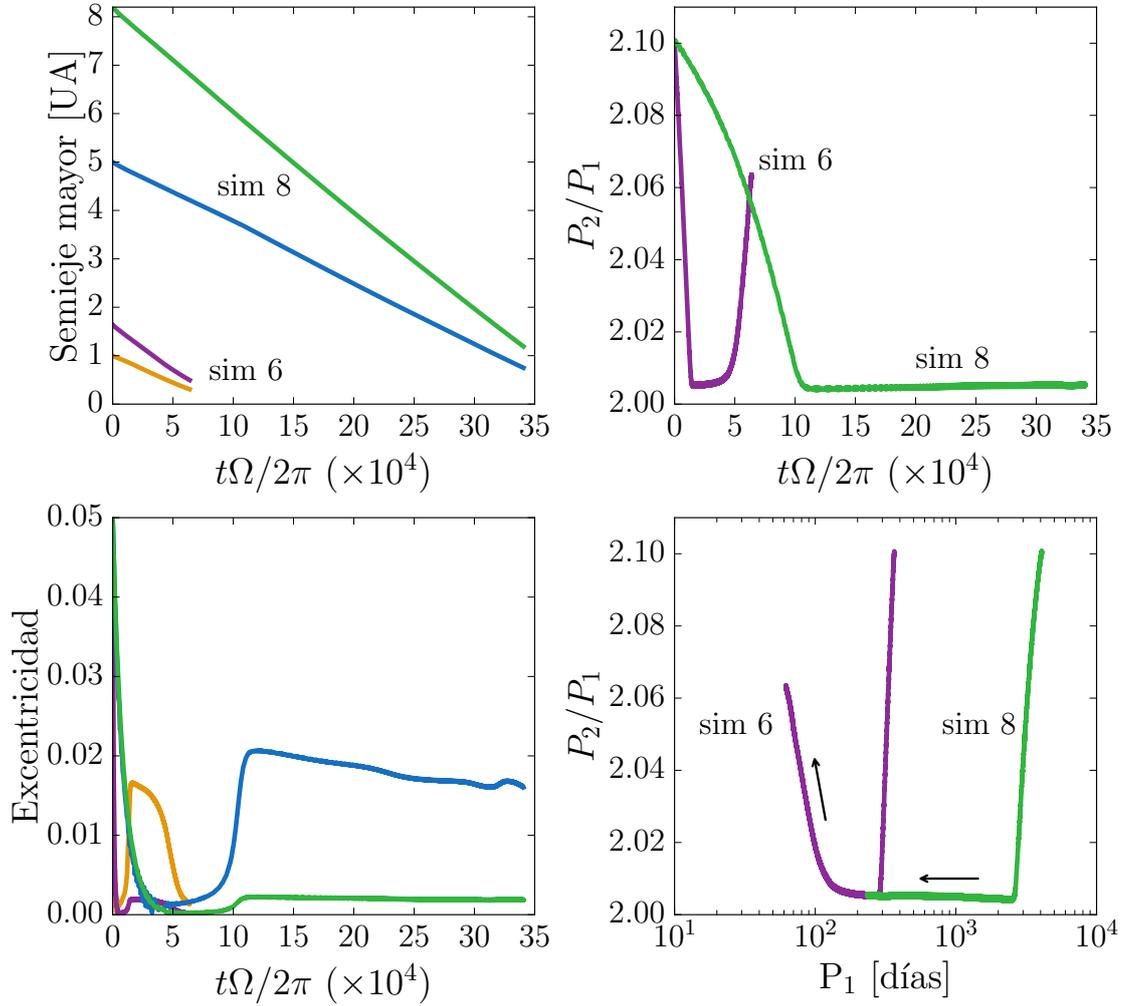


Figura 5.18: Resultados de dos simulaciones hidrodinámicas que muestran la captura en la RMM 2 : 1, cada una caracterizada por diferentes semiejes mayores iniciales (gráfico superior izquierda). Todos los demás parámetros se mantuvieron sin cambios: $m_1 = 10m_\oplus$, $m_2 = 20m_\oplus$, $e_1 = e_2 = 0,05$, $\Sigma_0 = 400 \text{ gr/cm}^2$ y $f = 0,25$. El gráfico en la parte superior derecha muestra que **sim8** se mantiene con muy poca separación de la resonancia nominal, mientras que para **sim6** dicha separación aumenta rápidamente obteniendo valores grandes. Estas separaciones grandes se acompañan de excentricidades pequeñas (gráfico inferior izquierdo), bien de acuerdo con las predicciones de la ecuación 6.7. El último gráfico presenta la relación del períodos orbitales P_2/P_1 en función del período orbital del planeta interno P_1 (evolución del sistema de derecha a izquierda). La superposición de ambas curvas nos muestra que el valor de la separación de la resonancia exacta no depende de la condición inicial sino de la proximidad a la estrella central.

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

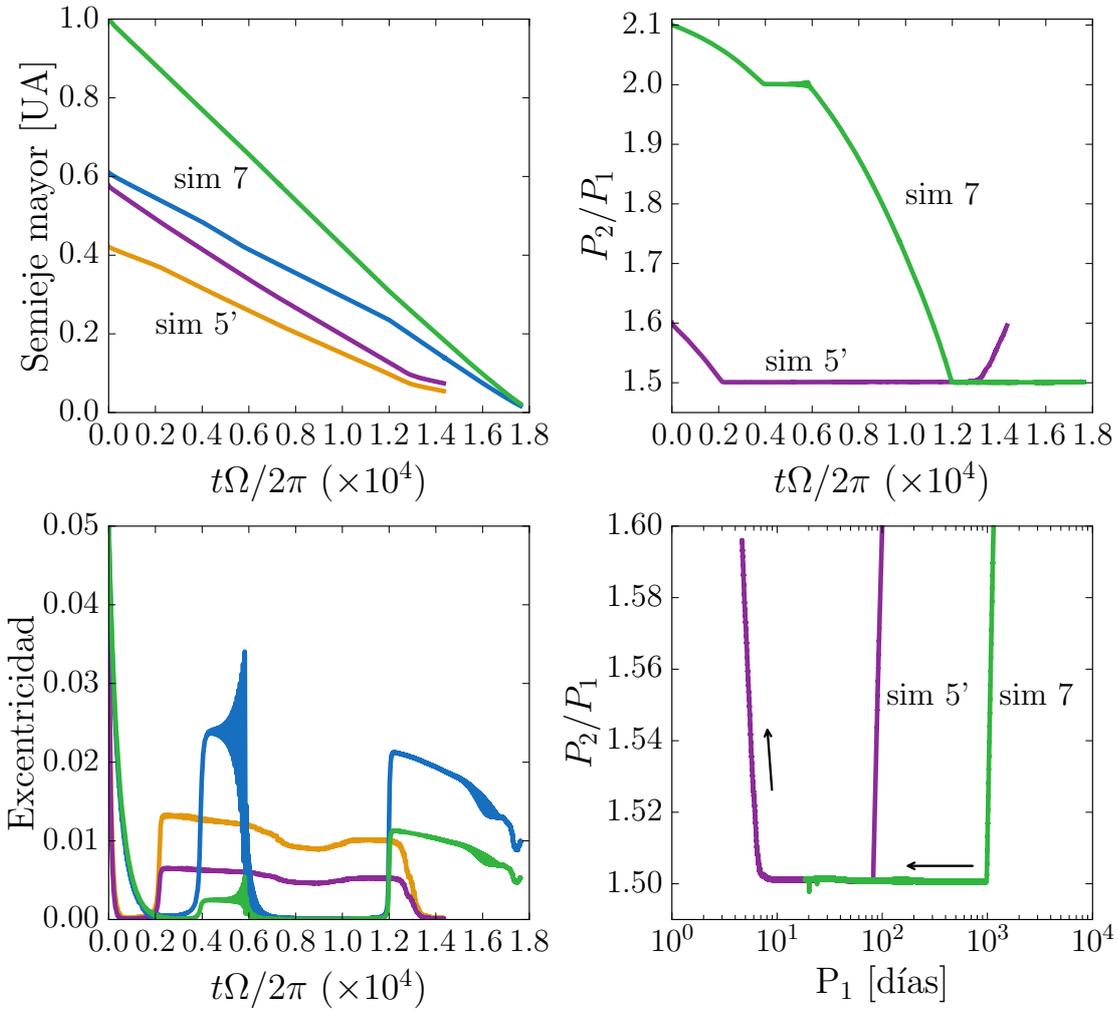


Figura 5.19: Lo mismo que en el gráfico anterior pero para dos simulaciones hidrodinámicas que muestran la captura en la RMM 3 : 2, cada una caracterizada por diferentes semiejes mayores iniciales (gráfico superior izquierda) y diferentes Σ_0 . Todos los demás parámetros se mantuvieron sin cambios: $m_1 = 2m_\oplus$, $m_2 = 4m_\oplus$, $e_1 = e_2 = 0,05$, y $f = 0,25$.

5.6 Simulaciones de sistemas planetarios múltiples

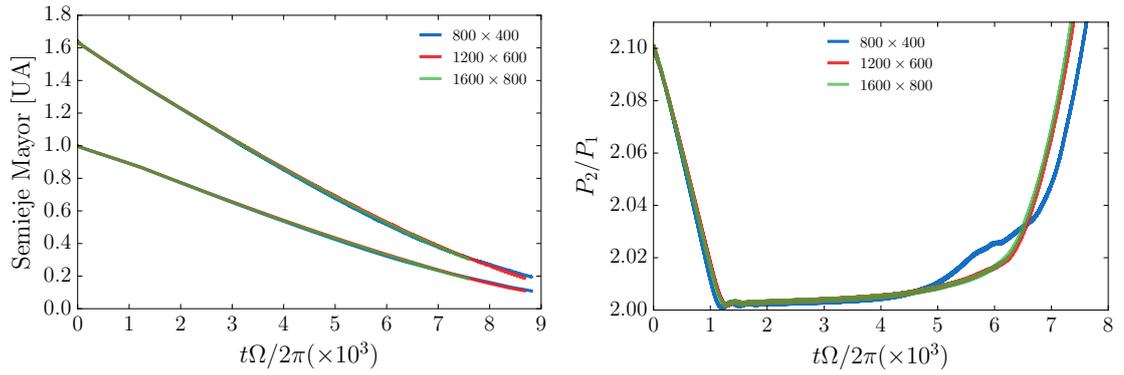


Figura 5.20: Simulación **sim6** considerando tres resoluciones diferentes. **Izq.:** Evolución del semieje mayor en el tiempo. **Der.:** Evolución de la relación de períodos en el tiempo.

iedad es de suma importancia para poder explicar los sistemas confirmados de Kepler alrededor de estas resonancias.

5.6.3. Variando la resolución

En este apartado discutiremos brevemente cómo cambia la evolución de los planetas con el método de remapeo si cambiamos la resolución de la malla. Consideramos tres resoluciones diferentes: $n_r \times n_\phi = 800 \times 400$, 1200×600 y 1600×800 , para la simulación **sim6** con $\Sigma_0 = 4000 \text{ gr/cm}^2$.

A la izquierda de la figura 5.20 se muestra la evolución en el tiempo del semieje mayor para los tres casos diferentes. Aparentemente, no existe diferencia alguna entre las tres simulaciones, resultando ser la simulación de menor resolución más eficiente y menos costosa que las otras dos. Por este motivo, la simulación con mayor resolución no pudo ser integrada el tiempo suficiente para alcanzar los mismos valores de semiejes mayores que alcanzaron las otras dos simulaciones, sin embargo la tendencia es exactamente la misma.

A la derecha de la misma figura se muestra la evolución de la relación de períodos en el tiempo para los tres casos considerados aquí. De nuevo, la concordancia entre las tres simulaciones es muy buena, a pesar de que ahora sí se puede ver pequeñas diferencias en el caso de resolución más baja (curva de color azul) a partir de $\sim 5 \times 10^3$ órbitas (que corresponden a períodos del planeta interno menores a 100 días). Un resultado convergente es completamente alcanzado por el caso de la resolución media, como lo muestran las curvas roja y verde. Sin embargo, en primera instancia se puede tomar los resultados de la simulación de baja resolución para obtener una primera aproximación.

Notar que el valor del cociente de períodos aumenta significativamente al pasar el tiempo.

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

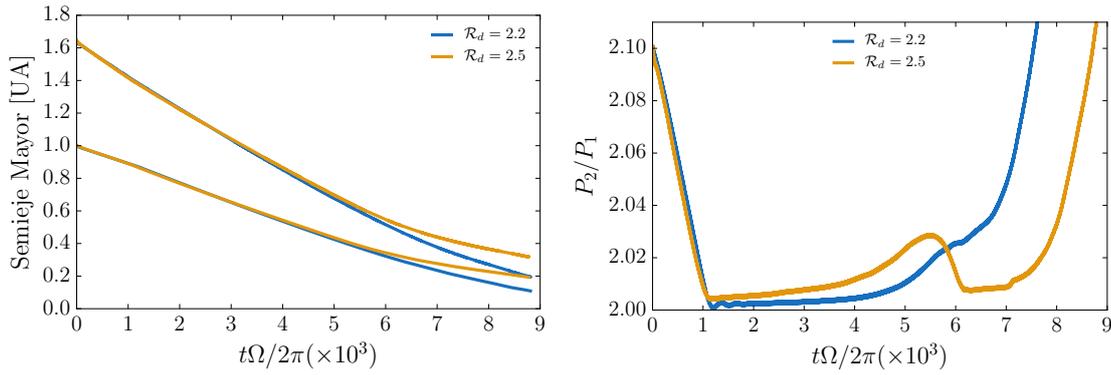


Figura 5.21: Simulación **sim6** considerando dos valores distintos de \mathcal{R}_d . **Izq.:** Evolución del semieje mayor en el tiempo. **Der.:** Evolución de la relación de períodos en el tiempo.

5.6.4. Variando \mathcal{R}_d

En la sección 5.5.2 hemos realizado pruebas con el método de remapeo buscando su convergencia con el tamaño del dominio activo y de amortiguación. Y además, hemos aclarado que todas esas pruebas fueron realizadas para excentricidades iniciales de los planetas iguales a cero. Como los planetas de nuestro conjunto de simulaciones realizadas en esta sección (tabla 5.1) poseen una pequeña excentricidad, deberíamos estrictamente realizar la misma prueba de convergencia para nuestro conjunto. Hemos comenzado a realizarlo pero el alto costo computacional de nuestras simulaciones no nos permitieron terminar estas pruebas. Sin embargo, hemos alcanzado a realizar una única comparación que mostramos en la figura 5.21. Integramos la simulación **sim6** para dos valores diferentes de \mathcal{R}_d , 2,2 y 2,5. A la izquierda mostramos la evolución temporal de los semiejes mayores de los planetas para ambos casos, y a la derecha la evolución temporal del cociente de períodos. En la evolución de los semiejes se puede ver que a partir de $\sim 3,2 \times 10^3$ órbitas las curvas comienzan a separarse notoriamente una de la otra sin tener, aparentemente, un efecto negativo en sus evoluciones. Sin embargo, en la evolución del cociente de períodos esta diferencia se hace más significativa desde el inicio de la captura en la resonancia. Para $\mathcal{R}_d = 2,5$ la evolución de cociente de períodos tiene un salto imprevisto alrededor de $\sim 6 \times 10^3$ órbitas, y sigue su desvío aparentemente con la misma pendiente que para $\mathcal{R}_d = 2,2$. Este salto nos da un indicio de que las simulaciones hidrodinámicas con nuestro método de remapeo deben ser integradas cuidadosamente y debemos realizar las correspondientes pruebas de convergencia para obtener resultados concluyentes. Es probable que este salto se deba a errores numéricos debido a que tienen el mismo comportamiento que las integraciones con malla fija (ver figura 5.23), pero no lo hemos podido comprobar hasta el momento.

Tal como aclaramos en el apartado anterior, la evolución temporal del cociente de períodos no nos da información sobre la dinámica del sistema. Por el contrario, esta información si nos la da un gráfico de relación de períodos vs. el

5.6 Simulaciones de sistemas planetarios múltiples

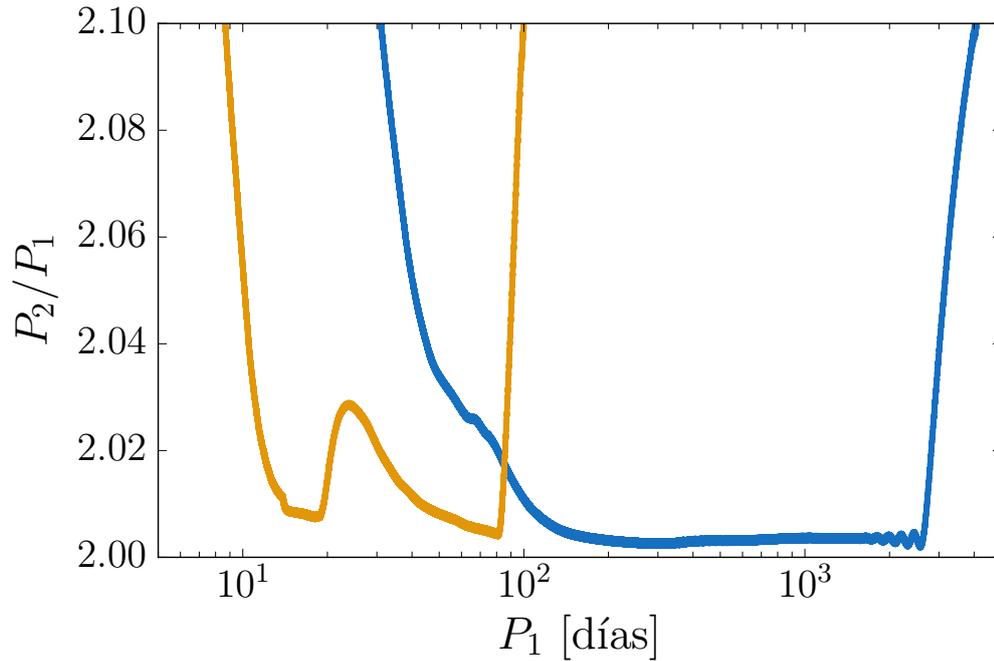


Figura 5.22: Simulación **sim6** considerando dos valores distintos de \mathcal{R}_d . Evolución de la relación de períodos vs. el período orbital del planeta interno.

período orbital del planeta interno como mostramos en la figura 5.22. La primera característica que sobresale en este gráfico es que no se observa el mismo comportamiento que el expuesto por las simulaciones **sim6** y **sim8** en la figura 5.18, en donde ambas simulaciones se superponían. La segunda característica que sobresale es que el apartamiento del sistema de la resonancia exacta se produce a diferentes períodos orbitales, quizás debido al comportamiento descrito anteriormente. De nuevo, este es un claro indicio de que nuestras simulaciones deben tener sus correspondientes pruebas de convergencia.

Finalmente, como un estudio complementario, en la figura 5.23 mostramos una comparación de una simulación con nuestro algoritmo (curva de color negra) y dos simulaciones sin él (curvas de color azul y roja). Todas ellas tienen los mismos parámetros. Tal como se observa, la simulación con nuestro método es muy suave y continua, al contrario que las dos sin nuestro algoritmo. Los comportamientos de las curvas sin el método de remapeo son similares a los ya descritos en las secciones anteriores. Poseen oscilaciones probablemente debidas a reflexiones de las estelas espirales que deben ser minimizadas mejorando, quizás, las recetas para la amortiguación de estas ondas. También, quizás se mejore extendiendo los bordes de la malla fija. Por ejemplo, la curva roja diverge en $\sim 35 \times 10^3$ órbitas debido probablemente a que alcanza el límite interno de la malla deteniendo la evolución orbital del sistema.

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

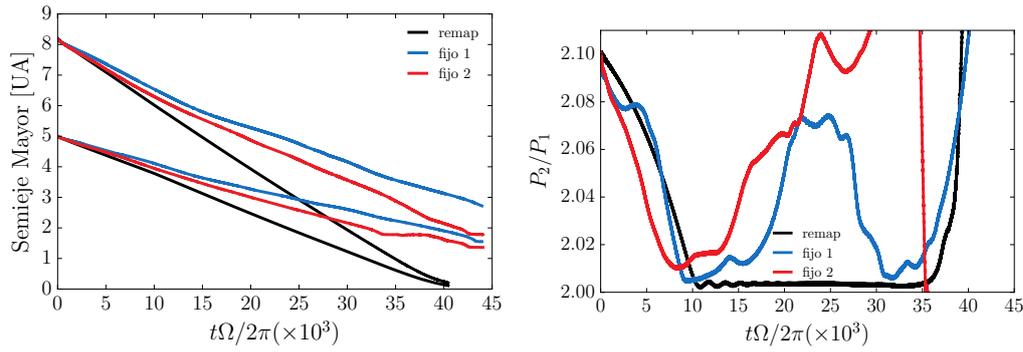


Figura 5.23: Evolución temporal del semieje mayor (izq.) y del cociente de períodos (der.) para la simulación **sim8** con el método de remapeo (curva negra) y con el estándar (curvas azul y roja). La diferencia entre ambas simulaciones con la malla fija es el límite de los bordes de la malla.

5.7. Conclusiones y Discusiones

En este capítulo hemos presentado un nuevo método que permite simulaciones hidrodinámicas a largo plazo y a gran escala de sistemas planetarios múltiples que migran. Nuestro método consiste en los siguientes pasos:

1. Una prescripción para calcular los nuevos bordes radiales de la malla (ver sección 5.4.2.1)
2. Un método de interpolación para el llenado de la nueva malla (ver sección 5.4.2.2).
3. Límites de amortiguación para evitar reflexiones y partir los perfiles de gran escala (ecuación (5.10)).
4. Un método de desplazamiento de las resonancias de Lindblad (ver sección 5.4.2.4).
5. Un método para permitir la evolución viscosa global del disco (opcional, ver sección 5.4.2.3).

Hemos validado nuestro método con un conjunto de pruebas usando el código público FARGO3D y comparado sus resultados con los obtenidos usando cálculos clásicos con una malla fija.

La técnica de remapeo permite obtener resultados más limpios en comparación con el caso estándar con un menor costo computacional. Debido a la propiedad adaptativa del algoritmo descrito para calcular el borde de la malla, la resolución se adapta naturalmente cuando los planetas migran, permitiendo un comportamiento auto-similar del sistema.

Nuestro método permite por primera vez realizar simulaciones no limitadas por la extensión radial de la malla. Esta característica permite la posibilidad de

5.7 Conclusiones y Discusiones

realizar simulaciones hidrodinámicas a largo plazo y a gran escala de sistemas planetarios, durante un tiempo comparable a la vida del disco.

Hemos realizado una serie de simulaciones hidrodinámicas aplicando nuestro método de remapeo por períodos de tiempo más largos que los considerados hasta ahora y para un gran rango de semiejes mayores. Encontramos que estas simulaciones no dependen fuertemente de la densidad superficial inicial, pero sí de las masas planetarias y del índice de forma.

Los resultados de estas simulaciones hidrodinámicas nos da una clara evidencia de que existe una migración suave en discos laminares acampanados y delgados tal como experimentan muchos de los sistemas Kepler observados. Además, nos dan un primer indicio de que sistemas con discos acampanados pueden llegar a explicar la separación de la resonancia nominal existente en algunos sistemas Kepler. Por este gran motivo, es necesario explorar de una forma sistemática nuestro espacio de parámetros. A pesar de que con nuestro método de remapeo hemos reducido significativamente el costo computacional de las simulaciones hidrodinámicas para sistemas planetarios múltiples (aproximadamente 8000 veces menos que una simulación de hace 15 años atrás), siguen siendo muy costosas para explorar adecuadamente los muchos parámetros que tiene nuestro sistema, siendo un objetivo inalcanzable a corto plazo. Es por esto, que dejamos aquí nuestras simulaciones hidrodinámicas e intentamos en el próximo capítulo entender las configuraciones resonantes de los sistemas observables con simulaciones más rápidas.

Finalmente, es importante resaltar que, gracias a las continuas mejoras en los algoritmos y en la utilización de recursos computacionales actuales, hoy, por primera vez en la historia, estamos muy cerca de realizar simulaciones hidrodinámicas de planetas en discos por tiempos comparables a los tiempos de formación de los planetas.

5. Migración planetaria a largo plazo y a gran escala

Migración planetaria y exoplanetas observables

La gran cantidad y diversidad de datos observacionales sobre planetas extrasolares ha estimulado innumerables trabajos sobre su formación y evolución. Muchos de estos sistemas exoplanetarios han sido encontrados por el estudio de tránsito de Kepler y varios revelamientos de velocidad radial (VR). Los planetas de Kepler muestran una característica asimétrica: hay pequeños pero significativos déficits/excesos de pares de planetas con espaciamiento del período orbital ligeramente estrecho/ancho de la resonancia exacta, particularmente cerca de resonancias de movimientos medios (RMMs) de primer orden, como la 2 : 1 y la 3 : 2. Del mismo modo, una característica asimétrica cerca de la RMM 2 : 1 también se ve en planetas detectados por VR, pero sólo para planetas masivos.

Con el fin de avanzar en la comprensión de la distribución observada de los sistemas Kepler casi resonantes, en este capítulo estudiaremos analítica y numéricamente las propiedades dinámicas de dichos sistemas. Nuestra mayor primicia es el resultado obtenido a partir de simulaciones hidrodinámicas: sistemas planetarios que migran en discos acampanados pueden llegar a explicar la asimetría observada en los sistemas Kepler.

Este capítulo fue desarrollado expandiendo las ideas planteadas en [Ramos *et al.* \(2017\)](#) y en [Charalambous *et al.* \(2017\)](#). Algunos resultados expuestos aquí no han sido publicados aún.

6.1. Arquitectura de planetas extrasolares

En esta sección discutiremos la relevancia de las interacciones planeta-disco para la arquitectura casi y no resonante de muchos de los sistemas multi-planetarios descubiertos por el telescopio espacial Kepler. Tal como revisamos en el capítulo 1, Kepler ha descubierto una gran población de planetas de masa de la Tierra a

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

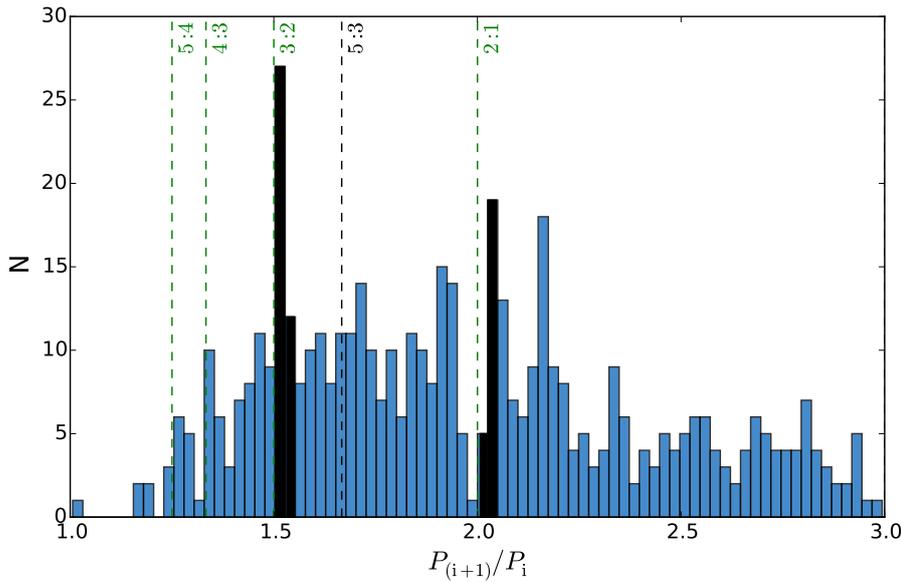


Figura 6.1: Histograma de los cocientes de períodos de sistemas multiplanetarios con 2, 3, 4 y 5 planetas detectados por la misión Kepler. Se toman en cuenta aquellos pares de planetas consecutivos con períodos orbitales menores a 100 días. En líneas discontinuas se marca la ubicación de las RMMs nominales. En el histograma se resalta en color negro aquellos pares de planetas que poseen un desplazamiento pequeño de la RMM de primer orden 2 : 1 y 3 : 2.

Neptuno en sistemas multiplanetarios compactos con períodos orbitales entre 1 a 100 días (Lissauer *et al.*, 2014a). La distribución de la relación de períodos entre todos los pares de planetas consecutivos de un sistema se muestra en la figura 6.1 para los sistemas con 2+3+4+5 planetas confirmados de Kepler. Hay dos puntos que sobresalen. En primer lugar, hay muchos pares de planetas lejos de las RMMs nominales, es decir la mayoría de los sistemas no son resonantes, mientras que la expectativa habitual de los modelos de migración de disco es que los planetas de masa de Kepler deben formar pares de planetas resonantes, es decir, uno a priori sólo esperaría picos en la distribución en la ubicación de la relación de períodos resonantes como 2 : 1, 3 : 2, etc. En segundo lugar, los pares de planetas cerca de resonancias tienden a tener relaciones de períodos algo más grandes que las resonantes (columnas en negro de la figura). Aunque tal desfase sea esperado de la dinámica resonante, particularmente para excentricidades bajas, los valores observados son mucho mayores que los obtenidos a partir de simulaciones de captura de resonancia. Se cree generalmente que estos sistemas son casi resonantes y están situados fuera del dominio de libración.

También es bueno señalar que algunas características de la distribución de la relación de períodos pueden ser afectadas por compañeros adicionales no visibles (Steffen, 2013). Por ejemplo, un sistema de dos planetas con una relación de períodos de $\sim 1,9$ podría ser en realidad un sistema resonante de tres planetas donde el planeta del medio, perdido por la observación de tránsito, está en RMM 4 : 5 con el planeta más interno y en 3 : 2 con el planeta más externo.

6.1 Arquitectura de planetas extrasolares

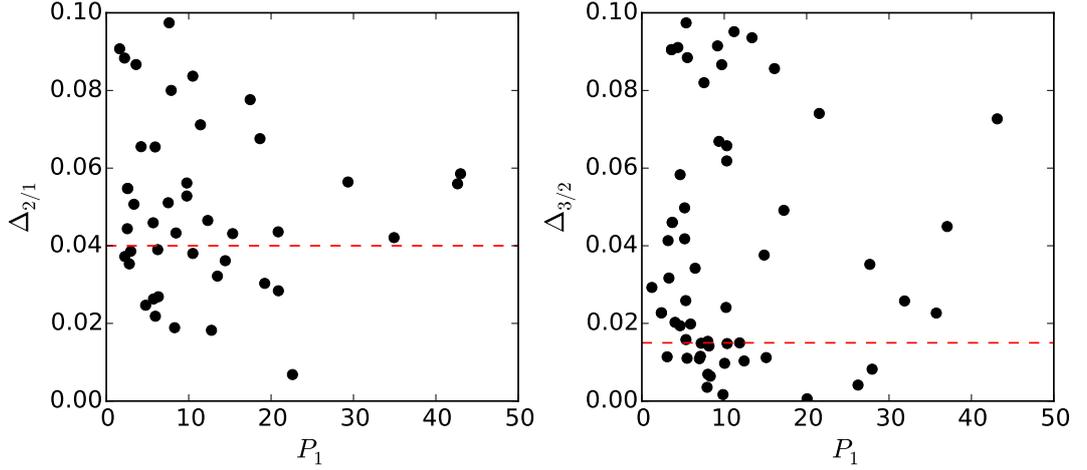


Figura 6.2: Distribución de desplazamientos de resonancia entorno de la RMM 2 : 1 y 3 : 2 en función del período orbital del planeta interno. En línea discontinua roja se señala el valor de la mediana de cada distribución.

Supongamos dos planetas de masas m_1 y m_2 orbitando una estrella m_0 , con períodos orbitales $P_1 < P_2$ y en la proximidad de una RMM de primer orden $(p + 1)/p$. Podemos entonces definir el llamado **desplazamiento de resonancia** como:

$$\Delta_{(p+1)/p} = \frac{P_2}{P_1} - \frac{(p+1)}{p}, \quad (6.1)$$

cuyo valor indica la distancia desde la resonancia exacta. Aunque el valor esperado dependerá de las masas planetarias y de las excentricidades, las simulaciones de N-cuerpos y hidrodinámicas de captura resonante en la RMM 2 : 1 generalmente conducen a $\Delta_{2/1} \simeq 10^{-3}$ (por ejemplo, [Silburt y Rein, 2015](#)) y valores similares para la resonancia 3 : 2. Sin embargo, una proporción significativa de los sistemas de Kepler exhiben valores mucho mayores, es decir, $\Delta_{2/1} \sim 0,04$ y $\Delta_{3/2} \sim 0,01$ (ver figura 6.2), aparentemente colocándolos fuera del dominio de la resonancia.

¿Cómo explicar estas características observadas? Un modelo que se ha presentado recientemente es el crecimiento *in situ*. Aquí, es importante destacar que no se trata de un crecimiento *in situ* de granos — de tamaño micrométrico a objetos de tamaño planetario, sino de un crecimiento *in situ* de embriones pre-formados y pre-evolucionados de tamaño de Marte a Tierra en un disco sin gas, y que estos embriones bien pueden haber sido entregados previamente por migración del disco, antes de que el disco protoplanetario desaparezca. La distribución de la relación de períodos pronosticada por el modelo de crecimiento *in situ* de [Hansen y Murray \(2013\)](#) tiende a reproducir muy pocos pares de planetas casi y resonantes en comparación con las observaciones. El reciente trabajo de [Ogihara et al. \(2015\)](#) muestra que los embriones planetarios se forman realmente más rápido en las partes internas de los discos protoplanetarios, y que por lo tanto la migración

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

del disco no puede ser despreciada. La inclusión de la migración del disco en los cálculos de crecimiento *in situ* de [Ogihara et al. \(2015\)](#) muestra que la migración del disco lleva este tiempo a un exceso de pares de planetas en comparación con las observaciones.

Otro modelo que se ha destacado es la evolución fuera de la resonancia de un par de planetas resonantes debido a las interacciones de las mareas estrella-planeta, que tienden a aumentar lentamente la relación de períodos de los planetas a lo largo del tiempo ([Papaloizou, 2011](#); [Lithwick y Wu, 2012](#)). El movimiento de las órbitas de los planetas que inicialmente estaban en RMM y comienzan a separarse hacia afuera de la resonancia es lo que se suele llamar migración divergente. La migración divergente a través de la evolución de las mareas (por ejemplo, [Lithwick y Wu, 2012](#); [Batygin y Morbidelli, 2013b](#); [Delisle y Laskar, 2014](#)) puede reproducir algunas de las propiedades dinámicas de estos sistemas, aunque la magnitud de los parámetros de las mareas requeridos en muchos casos no son consistentes con los modelos actuales ([Lee et al., 2013](#)). Debemos señalar que una tendencia similar se observa para los pares de planetas por encima de 10 días, para los cuales las mareas no son eficientes ([Baruteau y Papaloizou, 2013](#)).

La migración planetaria en un disco turbulento es otra manera de explicar por qué muchos sistemas planetarios de baja masa son casi o no resonantes ([Pierens et al., 2011](#); [Rein, 2012](#)), y pueden desempeñar un papel prominente en la formación de sistemas muy compactos ([Paardekooper et al., 2013](#)). Sin embargo, no está del todo claro si este mecanismo puede de hecho reproducir la distribución casi resonante observada (por ejemplo, [Quillen et al., 2013](#)).

Más recientemente, [Migaszewski \(2015, 2016\)](#) estudiaron el efecto de modelos de disco más complejos sobre la migración de pares planetarios, incluyendo fotoevaporación y diferentes leyes de opacidad. Ellos encontraron que varias regiones de migración divergentes aparecen en el disco lo que puede conducir a la salida de la resonancia exacta e incluso la eyección de las conmensurabilidades. Sin embargo, encontraron poca correlación entre su modelo y la distribución observada de los cuerpos.

El origen de las distribuciones asimétricas de los planetas de Kepler ha sido estudiado por [Xie \(2014\)](#) tanto analítica como numéricamente, lo que sugiere que el desplazamiento podría explicarse independientemente de la disipación. Sin embargo, concluyen que la disipación u otros mecanismos pueden desempeñar un papel más importante en la RMM 2 : 1 que en la 3 : 2.

Tal vez una pregunta más básica sería ¿cómo sabemos que estos sistemas son realmente no resonantes? Los cálculos del ancho de libración requieren información de las masas planetarias, un lujo que normalmente no está disponible en los sistemas de Kepler. Las estimaciones de las excentricidades también son importantes, ya que los anchos de libración son una función fuerte de este elemento. Sin embargo, se cree que el desplazamiento de resonancia observado es mayor que el dominio de libración, especialmente para Super-Tierras y cuerpos de tamaño de

6.2 El desplazamiento de resonancia

Neptuno.

A continuación presentamos un estudio analítico simple y de N-cuerpos de la dinámica de sistemas con dos planetas de baja masa que conduce a la captura en la RMM 2:1 y 3:2 en un disco laminar. Nos enfocaremos en los sistemas Kepler y otros cercanos detectados principalmente a través de tránsitos y TTV. Aunque en la mayoría de los casos hay poca información sobre las masas planetarias, se cree que ellos son cuerpos relativamente pequeños (en el rango de masas de Tierras y Neptunos) y que habrían experimentado una migración planetaria sin haber cavado significativamente un gap en el disco. Luego, usaremos modelos analíticos para la migración de Tipo I en un intento de entender la distribución observada y su tendencia general.

6.2. El desplazamiento de resonancia

6.2.1. Definición y modelo analítico

En principio, hay dos maneras para explicar la estructura casi resonante de los sistemas exoplanetarios y su dependencia con la distancia a la estrella central. En el primero, los planetas fueron inicialmente atrapados dentro de la resonancia (exhibiendo pequeños valores de su desplazamiento), pero más tarde fueron expulsados del dominio de libración a través de los efectos de las mareas. Esto parece razonable para algunos sistemas en la resonancia 2 : 1, aunque no explica por qué el desplazamiento observado en la conmensurabilidad 3 : 2 es mucho menor. Además, los efectos de las mareas no parecen explicar la tendencia observada en la RMM 2 : 1 para los planetas más distantes (por ejemplo, [Lee et al., 2013](#)).

Una segunda posibilidad es que la captura de resonancia, debido a las interacciones planeta-disco, llevó a diferentes valores de $\Delta_{(p+1)/p}$ en diferentes partes del disco. Por lo tanto, una migración planetaria que se detuvo lejos de la estrella central se caracterizaría por bajos desplazamientos, mientras que este valor aumentó a partir de distancias orbitales más pequeñas. Éste es el mecanismo que analizaremos en el presente trabajo. Sin embargo, antes de simular el proceso de migración, es importante revisar la estructura dinámica de las resonancias planetarias y analizar los tipos de movimiento esperados para diferentes valores de $\Delta_{(p+1)/p}$.

La figura 6.3 muestra dos mapas dinámicos, el gráfico izquierdo para la resonancia 2 : 1 y el de la derecha para la conmensurabilidad 3 : 2. En cada caso se integró una serie de sistemas de dos planetas con condiciones iniciales en una grilla definida en el plano $(P_2/P_1, e_1)$. Las masas de los planetas fueron elegidas iguales a $m_1 = 16m_\oplus$ y $m_2 = 32m_\oplus$, y la estrella central asumida de masa solar. Elegimos específicamente una razón de masa $m_2/m_1 > 1$ para garantizar puntos simétricos fijos para los ángulos resonantes (por ejemplo, [Beaugé et al., 2006](#); [Michtchenko et al., 2008b](#)). La órbita del planeta exterior fue considerada inicialmente circular

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

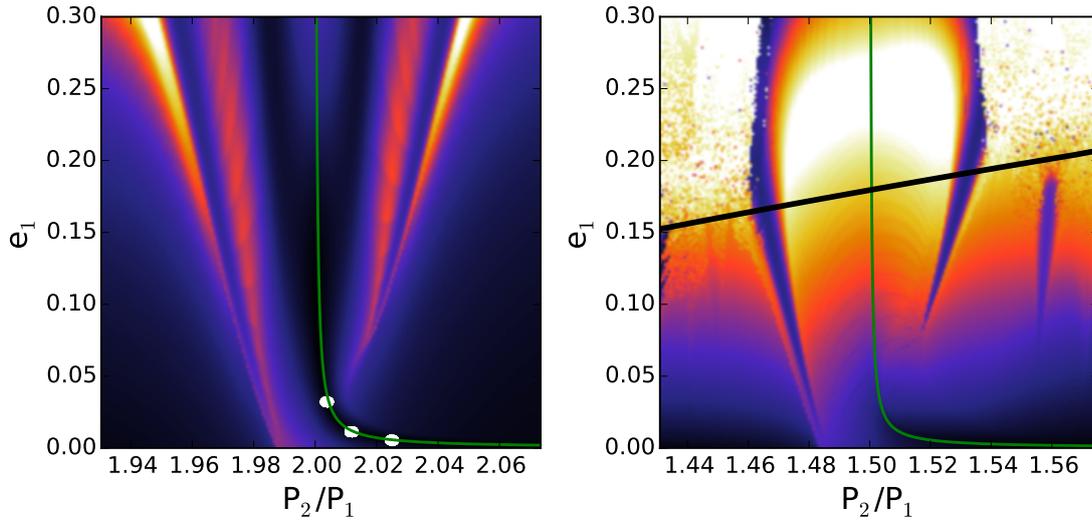


Figura 6.3: Mapas dinámicos de $\max(\Delta e)$ para la RMM 2 : 1 (izquierda) y la 3 : 2 (derecha) para sistemas de dos planetas ficticios con $m_1 = 16m_\oplus$ y $m_2 = 32m_\oplus$ orbitando una estrella central con masa $m_0 = 1m_\odot$. La órbita del planeta externo fue inicialmente circular con $a_2 = 1$ UA, y todas las variables angulares son elegidas igual a cero. El tiempo total de integración fue de 10^3 años. Las líneas verdes señalan la ubicación de las soluciones libracionales de tipo ACR y amplitud cero, estimadas a partir del modelo analítico simple dado por la ecuación (6.18). Los puntos blancos en el marco izquierdo son el resultado de tres simulaciones de N-cuerpos de captura de resonancia en la resonancia 2 : 1. La curva negra en el gráfico de la derecha corresponde al límite de estabilidad de Marchal-Bozis. Ver el texto para más detalles. Figura adaptada de Ramos *et al.* (2017).

con $a_2 = 1$ UA y todos los ángulos iguales a cero.

El color corresponde a los valores máximos de $|e_1(t) - e_1(t = 0)|$ (indicados aquí como $\max(\Delta e)$) alcanzados durante un intervalo de tiempo de integración de 10^3 años. Los tonos oscuros (claros) están asociados con pequeñas (grandes) variaciones en la excentricidad del planeta interior. Para la resonancia 3 : 2, la curva negra marca el límite de estabilidad calculado usando el criterio de Marchal-Bozis (Marchal y Bozis, 1982). Aunque el indicador $\max(\Delta e)$ no mide el movimiento caótico, es una herramienta importante para investigar la estructura de resonancias y ayudar a identificar la ubicación de soluciones estacionarias, conocidas como soluciones ACR (ver Beaugé *et al.*, 2003, 2006), y la separatriz que delimita los dominios de libración del dominio de circulación (por ejemplo, Ramos *et al.*, 2015), y tal como vimos en los capítulos 2, 3 y 4.

En la misma figura, las líneas verdes muestran la localización aproximada de la familia de soluciones de ACR de amplitud cero (Beaugé *et al.*, 2003, 2006), caracterizada por la libración simultánea de ambos ángulos resonantes θ_1 y θ_2 definidos en el capítulo 2. Utilizando una simple aproximación de tipo Sessin para el Hamiltoniano resonante (por ejemplo, Sessin y Ferraz-Mello, 1984, ver capítulo 2), que desprecia las perturbaciones seculares y es válido sólo para excentricidades e_i bajas, podemos escribir al Hamiltoniano F de un sistema de dos

6.2 El desplazamiento de resonancia

planetas casi resonantes como la suma de un término no perturbativo F_0 y otro perturbativo F_1 . Estos términos tienen la siguiente forma:

$$F_0 = -\frac{\mu_1}{2L_1^2} - \frac{\mu_2}{2L_2^2} ; \quad F_1 = A'_1 e_1 \cos \theta_1 - A'_2 e_2 \cos \theta_2 \quad (6.2)$$

donde recordemos que μ_i y L_i en la formulación Jacobiana están definidas por la ecuación (2.12) y (2.9), y los coeficientes A'_1 y A'_2 son:

$$A'_1 = \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{2a_2} g_1(\alpha) ; \quad A'_2 = \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{2a_2} g_2(\alpha) \quad (6.3)$$

donde $g_1(\alpha)$ y $g_2(\alpha)$ son una combinación de coeficientes de Laplace y sus derivadas y $\alpha = a_1/a_2$. Luego, utilizando que $e_i^2 \approx 2S_i/L_i$, el término perturbativo queda expresado de la siguiente manera:

$$F_1 = A_1 \sqrt{2S_1} \cos \theta_1 - A_2 \sqrt{2S_2} \cos \theta_2 \quad (6.4)$$

donde $A_i = \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{2a_2 \sqrt{L_i}} g_i(\alpha)$.

Ahora buscamos los puntos fijos de nuestro Hamiltoniano resultante, los cuales deben cumplir con:

$$\frac{\partial F}{\partial S_i} = 0 ; \quad \frac{\partial F}{\partial \theta_i} = 0 \quad (6.5)$$

encontramos que θ_i debe valer 0 ó $\pm\pi$ para que se cumpla la relación anterior y que $(p+1)n_2 - pn_1 + 0,5A'_i \cos \theta_i / \sqrt{2S_i} = 0$. Luego, se cumple que

$$\frac{A_1 \cos \theta_1}{\sqrt{2S_1}} = \frac{A_2 \cos \theta_2}{\sqrt{2S_2}} \quad (6.6)$$

Finalmente, teniendo en cuenta las soluciones posibles de θ_i , la definición del desplazamiento de resonancia dada por la ecuación (6.1), y reemplazando $S_i \approx L_i e_i^2 / 2$ y los A_i , podemos estimar el valor del desplazamiento de la resonancia como función de e_1 , así como una relación entre las excentricidades de ambos planetas. Éstos vienen dados por:

$$\Delta_{(p+1)/p} = C_1 \frac{m_2}{m_0} \frac{1}{e_1} ; \quad e_2 = C_2 \frac{m_1}{m_2} e_1 \quad (6.7)$$

donde,

$$C_1 = \frac{1}{2p} \frac{g_1(\alpha)}{\sqrt{\alpha}} ; \quad C_2 = \frac{g_2(\alpha)}{g_1(\alpha)} \sqrt{\alpha} \quad (6.8)$$

(ver también Lee, 2004). Para las RMMs consideradas aquí, los coeficientes C_i toman los siguientes valores: $C_1 \approx 1,5$, $C_2 \approx 0,29$ para la resonancia 2 : 1, y $C_1 \approx 1,2$, $C_2 \approx 1$ para el caso 3 : 2.

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

Para una resonancia dada y masas planetarias, el valor del desplazamiento es inversamente proporcional a las excentricidades de equilibrio; por lo tanto, son muy bajos los valores de e_i necesarios para obtener una desviación significativa de una resonancia exacta. Como un ejemplo, la reproducción de un desplazamiento resonante de $\Delta_{2/1} \simeq 0,05$, requeriría que las excentricidades permanezcan tan bajas como $e_1 \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ durante las etapas finales de la migración planetaria.

Si la migración planetaria impulsada por el disco es suficientemente lenta y suave, y si las órbitas siguen siendo casi circulares, esperamos que la evolución orbital siga la rama ACR hacia el dominio libracional y muestre oscilaciones de baja amplitud de los ángulos resonantes. En este escenario ideal, las excentricidades finales y el desplazamiento resonante $\Delta_{(p+1)/p}$ dependerán de la fuerza relativa entre los tiempos de amortiguación de la excentricidad y la migración orbital (Beaugé *et al.*, 2003, 2006), normalmente denotados por τ_{e_i} y τ_{a_i} , respectivamente. Por lo tanto, en el límite adiabático, el resultado final de una trampa de resonancia dependerá fundamentalmente de las relaciones $\mathcal{K}_i = \tau_{a_i}/\tau_{e_i}$, que aquí denominamos como *Factores K*.

Papaloizou y Szuszkiewicz (2005) dedujeron una relación cerrada entre las excentricidades de equilibrio y los tiempos orbitales y de amortiguamiento que, después de algunas manipulaciones algebraicas simples, adquiere la forma:

$$e_2^2 \mathcal{K}_2 (1 - D) + e_1^2 \mathcal{K}_1 B \left(\frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right) = \frac{D}{2} \left(1 - \frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right), \quad (6.9)$$

donde los nuevos coeficientes

$$D = \frac{1}{(p+1)} \left(1 + \frac{a_1 m_2}{a_2 m_1} \right)^{-1} ; \quad B = \frac{m_1 n_2 a_2}{m_2 n_1 a_1} + D \quad (6.10)$$

dependen únicamente de la resonancia y de la relación de las masas de los planetas. Usando las ecuaciones (6.7)-(6.9), obtenemos finalmente una expresión para el desplazamiento de la resonancia en términos de los tiempos de migración como:

$$\Delta_{(p+1)/p}^2 = \frac{2}{D} \left(C_1 \frac{m_2}{m_0} \right)^2 \frac{\left[(1 - D) \mathcal{K}_2 \left(C_2 \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + B \mathcal{K}_1 \left(\frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right) \right]}{1 - \left(\frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right)}. \quad (6.11)$$

Una expresión similar ha sido encontrada por Xie (2014). Dado que la captura de resonancia sólo ocurrirá en los casos de migración convergente (es decir, $\tau_{a_1} > \tau_{a_2}$), el denominador es siempre positivo y libre de singularidades. La migración convergente puede conducir a la formación de una RMM de primer orden.

6.2.2. El desplazamiento y el factor K

Suponiendo una relación constante m_2/m_1 , la expresión (6.11) muestra que el valor del desplazamiento es una función lineal de m_2 que indica que, para los valores fijos de los tiempos de migración, esperaríamos desplazamientos más grandes para pares de planetas más masivos. Puesto que esto no parece ser el caso, entonces los valores observados de $\Delta_{(p+1)/p}$, particularmente para sistemas cercanos, deben estar dominados por las características de las interacciones planeta-disco.

Para probar nuestro modelo definido por las expresiones (6.7)-(6.11), podemos realizar pruebas sencillas con un integrador N-cuerpos incluyendo una aceleración externa ad-hoc que experimentan los planetas debido al disco (por ejemplo, [Cresswell y Nelson, 2008](#)):

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{1}{\tau_{a_i}} \left[\frac{\mathbf{v}_i}{2} + 2\mathcal{K}_i \frac{(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i}{r_i^2} \right], \quad (6.12)$$

donde \mathbf{r}_i es el vector radial del planeta y \mathbf{v}_i su vector velocidad. Ajustando los valores de τ_{a_i} a ciertos valores prefijados, podemos variar los valores \mathcal{K}_i y analizar su efecto en el desplazamiento de la resonancia.

Realizamos tres simulaciones de N-cuerpos de migración planetaria usando esta simple receta. Las masas y la órbita inicial del planeta exterior fueron las mismas que las utilizadas para construir los mapas dinámicos. El valor inicial de a_1 fue elegido fuera de la RMM 2 : 1 y todos los ángulos iguales a cero. Los tiempos de decaimiento orbital fueron $\tau_{a_1} = 10^5$ y $\tau_{a_2} = 7 \times 10^4$ años para garantizar la migración convergente y adiabática. Los valores de los tiempos de amortiguación de la excentricidad τ_{e_i} fueron elegidos para que los factores K sean iguales para ambos planetas (es decir, $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$). Cada simulación consideró un valor diferente del factor K: $\mathcal{K} = 10^2$, $\mathcal{K} = 10^3$ y $\mathcal{K} = 10^4$.

Las condiciones iniciales fueron integradas por 10^5 años. Asumimos que el disco comenzó a dispersarse en $T_{\text{disp}} = 7 \times 10^4$ años y su densidad superficial alcanzó el cero en $T_{\text{disp}} = 8 \times 10^4$ años. Este proceso fue modelado reduciendo la magnitud de la fuerza disipativa suavemente con una función tangente hiperbólica y su escala de tiempo fue suficientemente lenta para permitir que la solución de equilibrio del sistema se adapte adiabáticamente. El último 10% de las salidas se utilizaron para calcular los valores promediados de los movimientos medios y excentricidades. Los símbolos blancos en el gráfico izquierdo de la figura 6.3 muestran los resultados finales.

La simulación con $\mathcal{K} = 10^2$ finalizó con $e_1 \simeq 0,03$ y $P_2/P_1 \simeq 2,004$, muy cerca de la resonancia exacta y parecido a los pares individuales de HR 8799. La segunda simulación, con $\mathcal{K} = 10^3$ produjo una excentricidad de equilibrio más baja ($e_1 \simeq 0,01$) y un desplazamiento ligeramente mayor ($P_2/P_1 \simeq 2,01$), similar a la de varios de los planetas resonantes de VR (por ejemplo, HD 82943). Finalmente, la simulación con $\mathcal{K} = 10^4$ mostró la excentricidad final más baja y el despla-

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

miento más grande: $P_2/P_1 \simeq 2,03$, del orden del observado para GJ 876. Todos estos valores tienen un perfecto acuerdo con las estimaciones deducidas de las expresiones (6.7) y (6.11).

Los factores K del orden de 10^4 son aún mucho más altos que los predichos por los modelos lineales de la migración de Tipo I (por ejemplo, [Papaloizou y Larwood, 2000](#); [Tanaka y Ward, 2004](#); [Cresswell y Nelson, 2008](#)). De estos trabajos, en el límite de las excentricidades bajas, podemos escribir

$$\tau_{a_i} = Q_a \frac{t_{w_i}}{h_i^2} \quad ; \quad \tau_{e_i} = Q_e \frac{t_{w_i}}{0,780}, \quad (6.13)$$

donde h es la relación de aspecto del disco que ya definimos antes. Q_e es una constante y $Q_a = Q_a(\alpha')$ es una función de la potencia α' del perfil de la densidad de superficie. El modelo lineal de [Tanaka *et al.* \(2002\)](#) encontró $Q_a^{-1} \simeq 2,7 + 1,1\alpha'$, mientras que ajustes numéricos con simulaciones hidrodinámicas usualmente conducen a formas funcionales ligeramente diferentes (por ejemplo, [D'Angelo y Lubow, 2010](#)). Finalmente,

$$t_{w_i} = \frac{m_0}{m_i} \frac{m_0}{\Sigma(a_i)a_i^2} \frac{h_i^4}{\Omega(a_i)}, \quad (6.14)$$

es la escala de tiempo característica para la migración planetaria.

Asumimos un disco laminar cuya densidad superficial Σ y relación de aspecto h tienen una ley de potencia dependiente con la distancia a la estrella tal como expresan las ecuaciones (5.5). Finalmente, la cantidad Q_e en la expresión (6.13) es un parámetro constante ad-hoc artificial introducido por [Cresswell y Nelson \(2006\)](#) a través de ajustes de resultados de simulaciones hidrodinámicas. Encontraron que los mejores resultados se obtuvieron con $Q_e \simeq 0,1$, un valor que nosotros también adoptaremos aquí.

De las ecuaciones (5.5) y (6.13) podemos ahora obtener una forma explícita del factor \mathcal{K} como:

$$\mathcal{K}_i \equiv \frac{\tau_{a_i}}{\tau_{e_i}} = \frac{0,78Q_a}{h_0^2 Q_e} r_i^{-2f}. \quad (6.15)$$

Asumiendo discos planos ($f = 0$) y valores típicos de $h_0 \sim 0,05$, $\alpha' \sim 1,5$ y $Q_e = 0,1$, obtenemos factores del orden de $\mathcal{K}_i \sim 700$ para cualquier distancia a la estrella, que son los valores habitualmente empleados en las simulaciones N-cuerpos de la migración planetaria y de la captura en resonancia (por ejemplo, [Quillen *et al.*, 2013](#); [Silburt y Rein, 2015](#)). Un disco acampanado ($f > 0$) no sólo conducirá a una dependencia de \mathcal{K}_i con el semieje mayor, sino que también aumenta su valor para planetas cercanos. Adoptando $f = 0,25$ obtenemos valores similares como antes para $a = 1$ UA pero significativamente más grandes ($\mathcal{K}_i \sim 10^3$) para $a = 0,05$ UA.

Aunque este camino parece prometedor, el aumento del factor K no es suficiente. Un desplazamiento de la resonancia de $\Delta_{2/1} \simeq 0,05$, como los observa-

6.2 El desplazamiento de resonancia

dos en sistemas cercanos, requeriría $\mathcal{K}_i \sim 10^5$, lo cual parece improbable. [Xiang-Gruess y Papaloizou \(2015\)](#) propusieron que las trampas planetarias cercanas a la estrella central pudieran detener la migración planetaria sin afectar la escala de tiempo de amortiguación de la excentricidad, lo que conduciría a un aumento artificial de la magnitud correspondiente de \mathcal{K} . Incluso si tal idea parece posible, no explicaría la tendencia observada de la disminución del desplazamiento en función del semieje mayor, ni se espera que funcione para los períodos orbitales del orden de 100 días.

6.2.3. La prescripción de Goldreich y Schlichting

[Goldreich y Schlichting \(2014\)](#) propusieron modificar las expresiones (6.13) para explicar la contribución de la amortiguación de la excentricidad a los cambios en el semieje mayor asociados a la conservación parcial del momento angular. Por lo tanto, la escala de tiempo característica efectiva para la migración orbital debería ser dada actualmente por:

$$\frac{1}{\tau_{a_{ef_i}}} = \frac{1}{\tau_{a_i}} + 2\beta' \frac{e_i^2}{\tau_{e_i}}, \quad (6.16)$$

donde τ_{a_i} y τ_{e_i} mantienen la misma forma que las ecuaciones (6.13) y β' es un factor que cuantifica la fracción del momento angular orbital conservado durante la migración. $\beta' = 1$ si el momento angular orbital es completamente conservado (por ejemplo, los efectos tidales para las órbitas síncronas), mientras $\beta' < 1$ en otros casos. [Goldreich y Schlichting \(2014\)](#) refieren a las estimaciones de [Tanaka y Ward \(2004\)](#) que sugieren $\beta' \simeq 0,3$ para interacciones planeta-disco de tipo I.

Por supuesto, el tiempo de migración modificado también cambiará el valor del factor K , dando lugar a una nueva forma “efectiva”:

$$\mathcal{K}_{ef_i} \equiv \frac{\tau_{a_{ef_i}}}{\tau_{e_i}} = \frac{\mathcal{K}_i}{1 + 2\beta' e_i^2 \mathcal{K}_i}, \quad (6.17)$$

donde \mathcal{K}_i viene dado por la ecuación (6.15). Dado que las excentricidades de equilibrio dentro de una resonancia usualmente son del orden de $e_i \sim 1/\mathcal{K}_i$, al menos en el orden de magnitud, esperamos que el nuevo valor del factor K no sea muy diferente de su original, tal como se demuestra en la figura 6.4. En ella mostramos en escala logarítmica el comportamiento de \mathcal{K}_i (gráficos de arriba) y \mathcal{K}_{ef_i} (gráficos de abajo) para ambos planetas en la RMM 2 : 1. Los parámetros del disco son $h_0 = 0,05$, $\alpha' = 0,5$ y $Q_e = 0,1$. Variamos el índice de forma entre $[-1,5; 1,5]$ y el semieje mayor del planeta interior entre $[0,01; 3]$ UA. Podemos ver que existe una zona bastante extensa alrededor de $a = 1$ UA y $f = 0$ en donde ambos factores (\mathcal{K}_i y \mathcal{K}_{ef_i}) permanecen constantes. Esta zona es esperable ya que si inspeccionamos bien las expresiones de ambos factores notamos que la relación

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

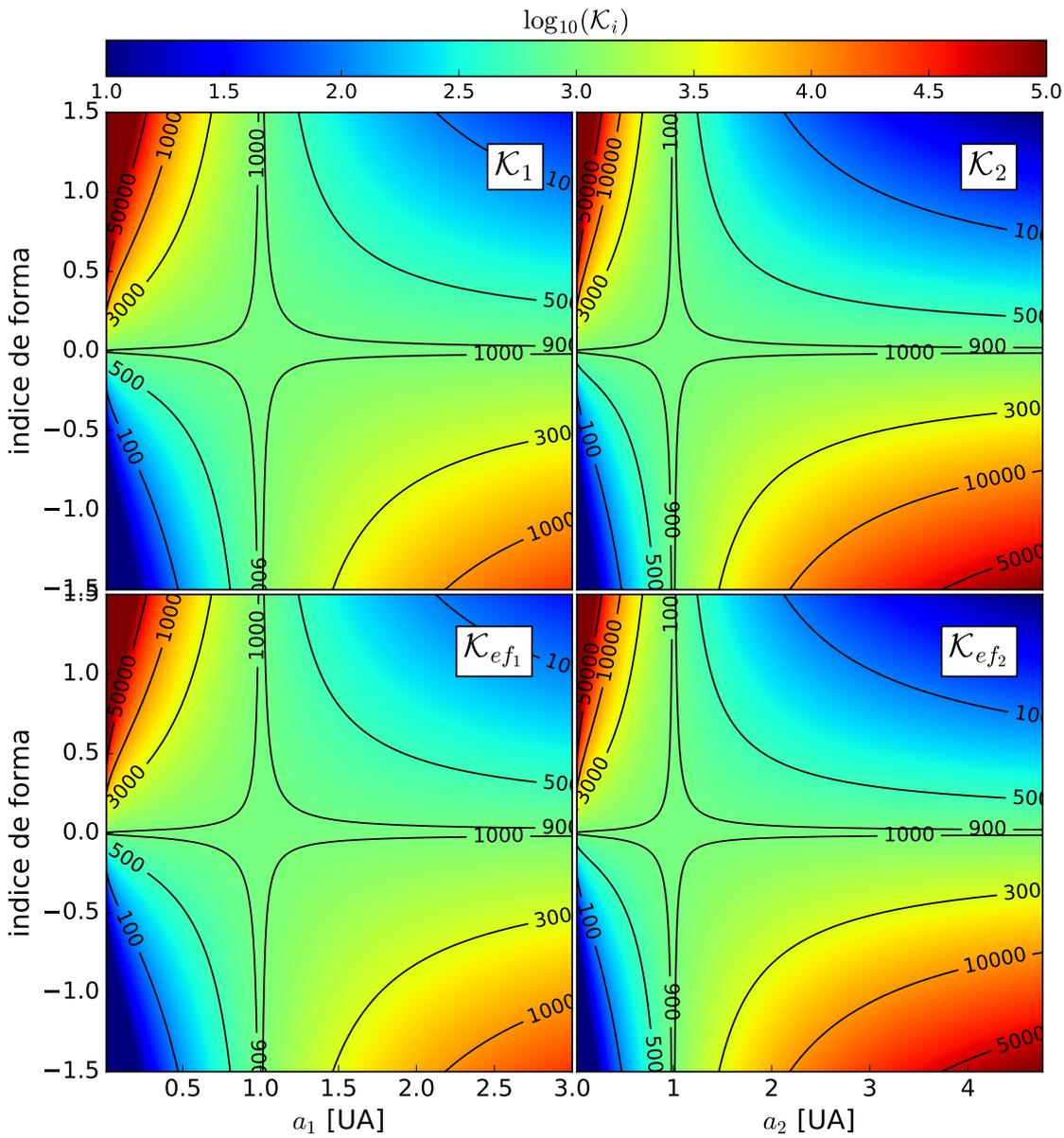


Figura 6.4: Mapas comparativos de los factores \mathcal{K}_i y \mathcal{K}_{ef_i} para ambos planetas en RMM 2 : 1 a medida que cambia el índice de forma del disco y sus distancias a la estrella central.

de aspecto viene dada para valores $a = 1$ UA. Es decir, el comportamiento es similar para cualquier valor de pivoteo (normalización) que se tome en cuenta. Además, queda explícito que ambos factores aumentan a medida que se acercan a la estrella central para valores positivos del índice de forma y sucede exactamente lo contrario para $f < 0$. Cabe aclarar que los valores negativos del índice de forma se muestran para un estudio completo del espacio sin necesidad de que sean físicamente posibles. Otra característica a resaltar es que el planeta exterior posee siempre factores menores que el planeta interior para $f > 0$. Esto está en concordancia con la dependencia de la distancia a la estrella central dada por las ecuaciones, es decir, cuando el planeta interno se encuentre en, por ejemplo, 1

6.3 Migración diferencial y desplazamiento de la resonancia

UA (con $\mathcal{K}_1 \approx 1000$), el planeta externo estará siempre más alejado según en qué RMM se encuentre con el interno, y por tanto los factores tendrán $\mathcal{K}_2 < 1000$ si $f \neq 0$. Más específicamente, si $f = 0,1$, $a_1 = 1$ UA y ambos planetas se encuentran en RMM 2 : 1, $\mathcal{K}_1 = 960$ y $\mathcal{K}_2 = 875$.

Por otra parte, puesto que el denominador en (6.17) es siempre mayor que la unidad, debe ser verificado que $\mathcal{K}_{ef_i} < \mathcal{K}_i$. En consecuencia, las consideraciones de momento angular en la prescripción de migración no cambian la imagen significativamente y no pueden definir los factores K necesarios para explicar los desplazamientos resonantes observados.

El cambio en la escala de tiempo efectiva de migración también afecta a la ecuación (6.11) para el desplazamiento de la resonancia. Después de algunas manipulaciones algebraicas, encontramos una nueva versión dada por:

$$\Delta_{(p+1)/p}^2 = \frac{2}{D} \left(C_1 \frac{m_2}{m_0} \right)^2 \frac{\left[(1 - D(1 + \beta')) \mathcal{K}_2 \left(C_2 \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + (B + D\beta') \mathcal{K}_1 \left(\frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right) \right]}{1 - \left(\frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right)} \quad (6.18)$$

donde las expresiones para τ_{a_i} y \mathcal{K}_i están definidas en (6.13) y (6.15).

6.3. Migración diferencial y desplazamiento de la resonancia

Incluso si la migración planetaria ocurre con valores limitados de los factores K, puede obtenerse un valor significativo para el desplazamiento de la resonancia si el denominador en la expresión (6.18) es suficientemente pequeño. Como se mencionó anteriormente, este factor mide la diferencia temporal de migración entre ambos planetas. Para que la captura de resonancia sea posible, el planeta externo debe migrar más rápido que su compañero interno, es decir $\tau_{a_2} < \tau_{a_1}$ (ver figura 6.4), llevando a valores positivos de $(1 - \tau_{a_2}/\tau_{a_1})$ y, en consecuencia, los valores reales de $\Delta_{(p+1)/p}$.

De las expresiones para τ_{a_i} , la condición para la migración convergente implica que la razón de masa m_2/m_1 entre los planetas debe satisfacer la condición:

$$\frac{m_2}{m_1} \geq \left(\frac{m_2}{m_1} \right)_{\min} \equiv \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{2}{3}(2f + \alpha' - 0,5)}. \quad (6.19)$$

Para condiciones iniciales dadas, esta ecuación define la relación de masa límite que conduce a la captura en diferentes conmensurabilidades. En el caso general de los discos acampanados, la posibilidad de atrapar en una resonancia dada no sólo depende de la relación de masas en sí sino también de la separación orbital inicial entre los planetas. En la figura 6.5 mostramos la variación del cociente de masas mínimo en función del índice de forma y de la potencia del perfil de

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

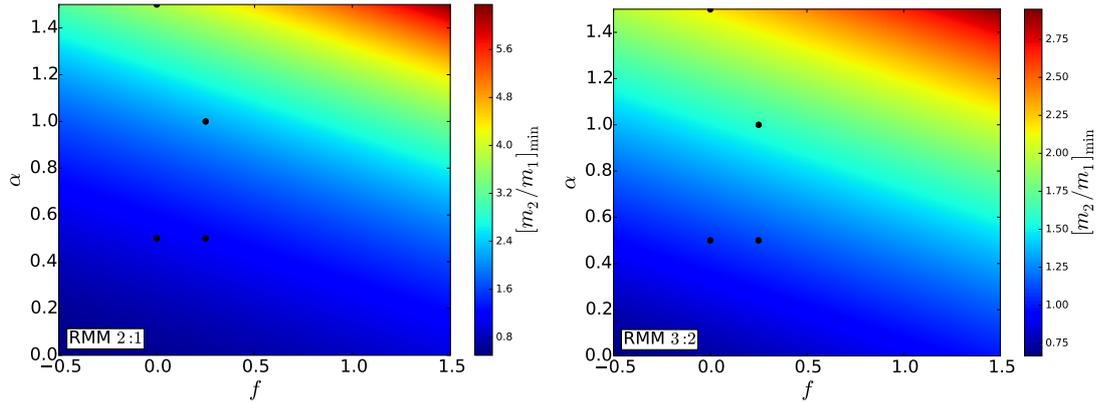


Figura 6.5: Cociente de masas mínimas necesarias para que haya captura en resonancia según nuestro modelo. Variamos tanto índice de forma como la potencia del perfil de densidad. **Izq.:** Para la RMM 2 : 1. **Der.:** Para la RMM 3 : 2. En puntos negros identificamos algunos pares de valores utilizados a lo largo de este trabajo.

densidad superficial si los planetas se encuentran en las RMM nominales 2 : 1 (izquierda) y 3 : 2 (derecha). Se ve claramente que los cocientes de masas mínimos necesarios para obtener migraciones convergentes deben ser relativamente bajos, es decir que los planetas interactuantes deben ser comparables entre sí. Notemos que para la RMM 3 : 2 ese cociente disminuye significativamente (casi a la mitad). Marcamos en estos mapas los cocientes de masas mínimos para diferentes valores que usamos a lo largo de este trabajo, por ejemplo para $(f = 0, \alpha' = 0,5)$ se necesita como mínimo valores de $m_2/m_1 = 1$ para ambas resonancias nominales.

Cumpliendo con la condición (6.19), la siguiente pregunta es cómo el valor del desplazamiento varía en función de la relación de masa y de la distancia orbital. En particular, deseamos analizar si existe algún conjunto de parámetros que parezcan consistentes con la distribución observacional de sistemas resonantes y casi resonantes.

La figura 6.6 muestra una aplicación de la expresión (6.18) para $h_0 = 0,05$, $\alpha' = 1$ y $f = 0,25$, en la forma de los valores de equilibrio previstos de la relación del período orbital $P_2/P_1 = (p + 1)/p + \Delta_{(p+1)/p}$ en función de P_1 . Los resultados para la RMM 2 : 1 se muestran en los gráficos superiores, mientras que los de las 3 : 2 se presentan en los gráficos inferiores. Los datos de observación se muestran en círculos negros abiertos. Cada gráfico corresponde a un valor diferente de m_1 , mientras que cada curva de color a valores diferentes de la relación de masa m_2/m_1 .

En todos los casos, el desplazamiento aumenta con los semiejes mayores más pequeños, aunque su magnitud es una función fuerte de m_1 y m_2/m_1 . Como se espera de la ecuación (6.19), las relaciones de masa cercanas a $(m_2/m_1)_{\min}$ muestran valores grandes de $\Delta_{(p+1)/p}$, su valor aumenta linealmente con m_1 . Para la RMM 2 : 1, y para estos valores de los parámetros del disco, la distribución observada de desplazamientos de resonancia entre pares exoplanetarios no parece

6.3 Migración diferencial y desplazamiento de la resonancia

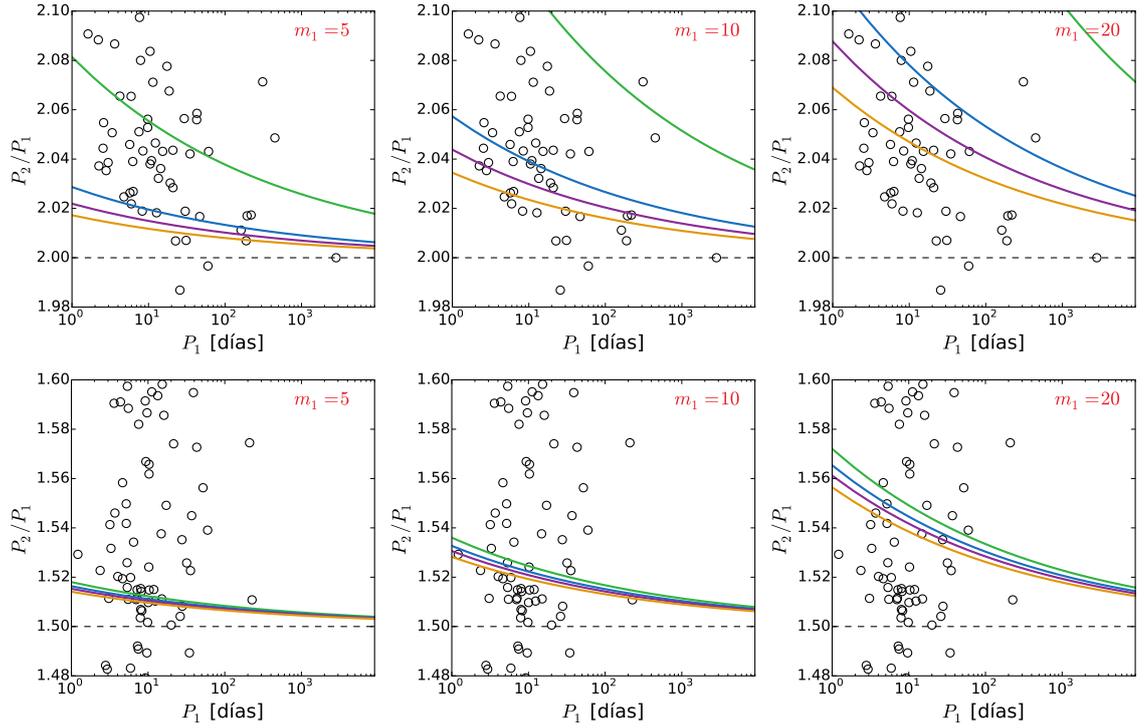


Figura 6.6: La relación del período orbital $(p+1)/p + \Delta_{(p+1)/p}$ como función del período del planeta interior, como se predice por la expresión (6.18) para discos acampanados con $h_0 = 0,05$, $\alpha' = 1$ y $f = 0,25$. En los gráficos superiores se dibujan para la RMM 2 : 1 mientras que los gráficos inferiores para la resonancia 3 : 2. Cada gráfico asume un valor diferente para la masa (en unidades de m_{\oplus}) del planeta interior, cuyo valor se indica en la esquina superior derecha. Las curvas de color corresponden a diferentes proporciones de masa: $m_2/m_1 = 1,6$ (verde), $m_2/m_1 = 1,7$ (azul), $m_2/m_1 = 1,8$ (púrpura) y $m_2/m_1 = 2$ (naranja). Los círculos negros abiertos marcan la distribución de los planetas confirmados. Figura adaptada de Ramos *et al.* (2017).

compatible con masas internas mucho más pequeñas que $m_1 \sim 5m_{\oplus}$. Aunque este caso limitante es marginalmente adecuado, se obtiene una diversidad de valores mucho mayor suponiendo $m_1 = 10m_{\oplus}$ donde prácticamente todos los desplazamientos observados están incluidos en el modelo, incluso si las relaciones de masa no están restringidas a valores muy cercanos a la unidad. Sin embargo, para $m_1 > 10m_{\oplus}$ los desplazamientos son extremadamente grandes de modo tal que sólo para los valores de las razones de masas más grandes serían compatibles con aquellos valores observados sesgados de la acumulación media.

Los gráficos inferiores, correspondientes a la RMM 3 : 2, muestran un comportamiento similar que para la resonancia anterior. En todos los casos los desplazamientos aumentan con distancias más pequeñas a la estrella mostrando una gran dependencia con m_1 , pero poca con la relación de masa (respecto a la resonancia anterior). Los mejores resultados se obtienen asumiendo $m_1 \sim 5m_{\oplus}$ (al menos para estos parámetros de disco). La menor dispersión en $\Delta_{3/2}$, con respecto a $\Delta_{2/1}$, también está en buen acuerdo con las observaciones.

En la figura 6.7 se analiza la dependencia con el índice de forma, cuyo valor

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

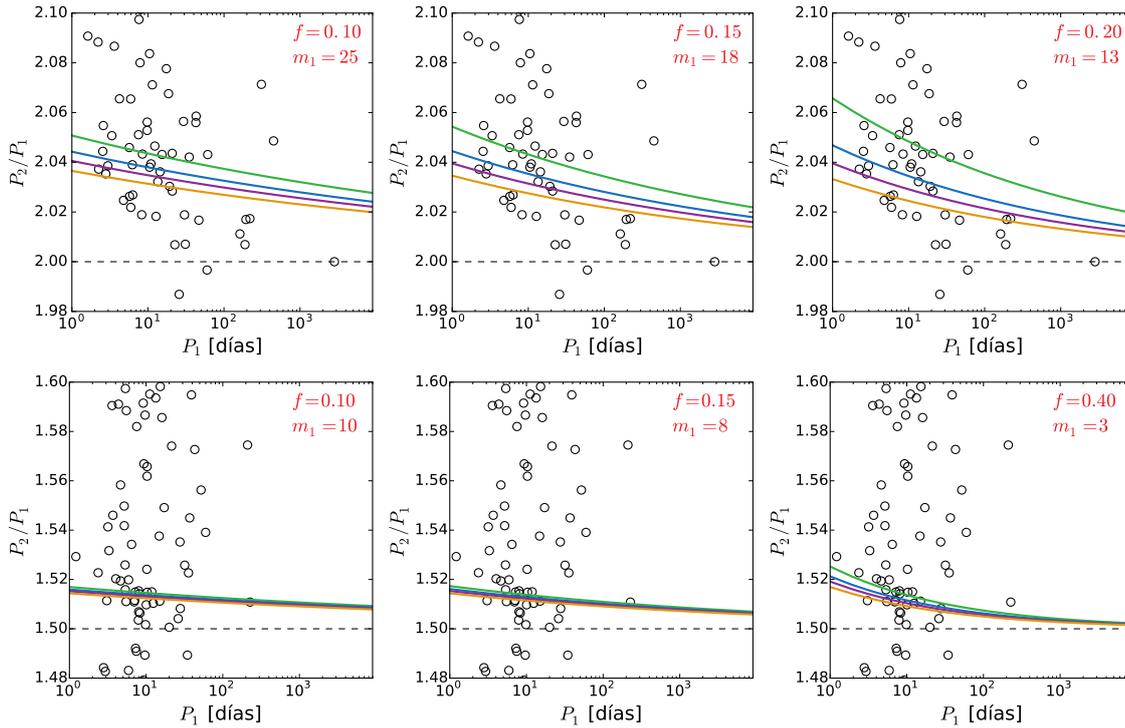


Figura 6.7: Igual que la figura anterior, pero ahora cada gráfico asume diferentes valores del índice de forma f y masa del planeta interno. En cada caso el valor de m_1 fue elegido para obtener el mejor acuerdo posible con los datos observacionales. Figura adaptada de Ramos *et al.* (2017).

se indica en la esquina superior derecha de cada gráfico. Como antes, los gráficos superiores corresponden a la resonancia 2 : 1 mientras que los gráficos inferiores a la 3 : 2. En cada caso, se buscaron los valores de m_1 que mejor se ajustaban a los datos observacionales. Para la resonancia 3 : 2, el mejor ajuste implica pasar a través del centro de la distribución casi resonante con $\Delta_{3/2} \sim 0,015$ a $P_1 = 10$ días. Para valores más bajos del índice de forma, tales desplazamientos sólo pueden alcanzarse asumiendo masas planetarias cada vez más grandes. Como ya se ha señalado en la figura 6.6, el desplazamiento es sólo débilmente dependiente de la relación de masa, lo que conduce a distribuciones concentradas de $\Delta_{3/2}$, incluso para valores muy diferentes de m_2/m_1 . Es importante recalcar que en todos estos casos extremos de valores del índice de forma, las masas planetarias son del orden de las que observa la misión Kepler.

En el caso de la RMM 2 : 1 (gráficos superiores), los cambios asociados al índice de forma bajos son más notorios. En primer lugar, las masas planetarias necesarias para los desplazamientos observados son mayores que las de la RMM 3 : 2, alcanzando escalas de planeta gigante para discos planos. Sin embargo, debemos resaltar que las masas planetarias que se necesitan para reproducir la acumulación alrededor de $P_1 = 10$ días son del orden de las esperadas para estos sistemas. En segundo lugar, el índice de forma bajo aumenta el nivel de concentración de desplazamientos con respecto a la relación de masa. Por lo tanto, la diversidad

6.3 Migración diferencial y desplazamiento de la resonancia

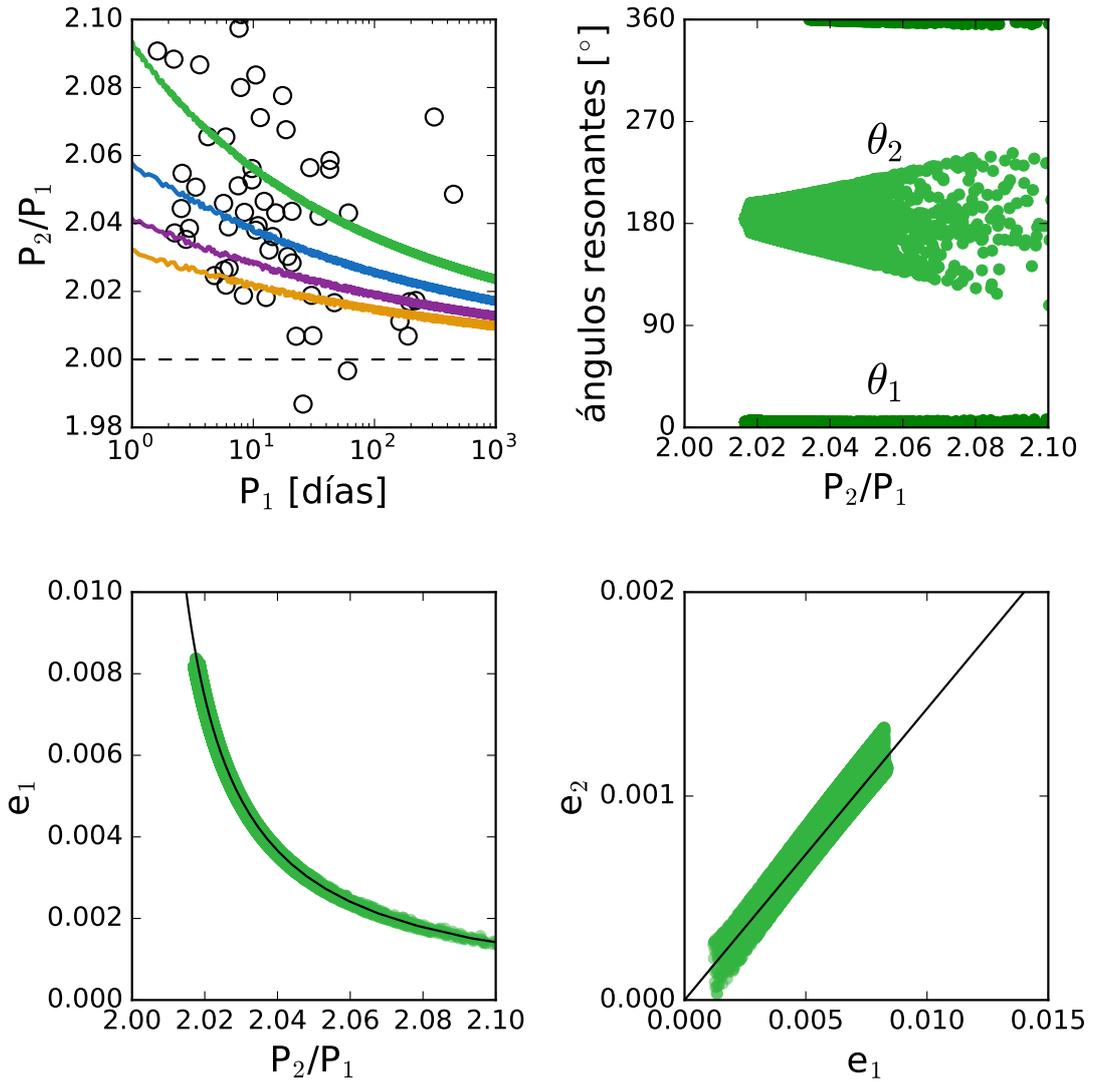


Figura 6.8: El gráfico superior izquierdo muestra el resultado de simulaciones de N-cuerpos conduciendo a capturas en la RMM 2 : 1. En todos los casos $m_1 = 20m_{\oplus}$. Las líneas de colores indican diferentes relaciones de masas: $m_2/m_1 = 2$ (naranja), $m_2/m_1 = 1,8$ (púrpura), $m_2/m_1 = 1,7$ (azul), y $m_2/m_1 = 1,6$ (verde). Los gráficos restantes muestran diferentes características dinámicas de la evolución orbital en resonancia de la simulación con $m_2/m_1 = 1,6$. Las líneas negras continuas en los gráficos de abajo son predicciones analíticas dadas por las expresiones (6.7). Figura adaptada de Ramos *et al.* (2017).

de desplazamientos observados para sistemas reales, y al menos reproducidos cualitativamente para $f = 0,25$, no parece alcanzable en discos planos.

Finalmente, la dependencia funcional de $\Delta_{2/1}$ con el semieje mayor también sufre cambios significativos, tendiendo a valores constantes para discos planos. En consecuencia, la dicotomía observada de desplazamientos grandes/pequeños cercanos/lejanos a la estrella central parece requerir discos con un índice de forma significativo, en algunos casos del orden de $f = 0,25$.

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

Estos resultados se han obtenido de nuestro modelo analítico que llevan a la expresión (6.18) y todavía requieren confirmación numérica. Con el fin de analizar los desplazamientos de resonancias con simulaciones N-cuerpos y hidrodinámicas, en los siguientes apartados presentamos un pequeño estudio al respecto.

6.3.1. Desplazamiento de resonancia con simulaciones N-cuerpos

El gráfico superior izquierdo de la figura 6.8 muestra cuatro simulaciones de N-cuerpos, donde la migración planetaria fue modelada de acuerdo con la ecuación (6.12), incorporando la prescripción de Goldreich-Schlichting a través de las expresiones (6.16) y (6.17). Asumimos $\beta' = 0,3$, $h_0 = 0,05$ y $f = 0,25$. Los factores Q_a y Q_e fueron elegidos como se describe en la sección anterior. En todos los casos simulamos la captura en la RMM 2 : 1 con $m_1 = 8m_\oplus$ y valores diferentes para la relación de masas m_2/m_1 . Como se predijo, el desplazamiento aumenta efectivamente más cerca de la estrella, mostrando un muy buen acuerdo con el modelo analítico y las observaciones.

Los otros tres gráficos muestran diferentes aspectos de la simulación con $m_2/m_1 = 1,6$, valor para la relación de masa que conduce al mayor desplazamiento. El gráfico de la parte superior derecha muestra la evolución de ambos ángulos críticos como función de P_2/P_1 , donde hemos despreciado los puntos de datos antes del bloqueo de resonancia. El ángulo de resonancia principal θ_1 exhibe una libración de baja amplitud alrededor de cero, incluso para los desplazamientos $\Delta_{2/1} \simeq 0,1$, valores que normalmente se asocian al movimiento no resonante. El ángulo auxiliar de resonancia θ_2 también libra en toda la evolución del sistema, aunque con amplitud creciente. Por lo tanto, incluso en este ejemplo numérico extremo, el sistema de dos planetas permanece atrapado en una solución de tipo ACR independientemente de su proximidad a (o separación de) la resonancia exacta.

Los dos gráficos inferiores de la figura 6.8 muestran información complementaria: la excentricidad del planeta interior en función de P_2/P_1 (izquierda) y la relación entre ambas excentricidades planetarias (derecha). Las líneas continuas negras indican la forma funcional esperada dada por las expresiones (6.7) obtenidas para las soluciones de ACR con el Hamiltoniano resonante de Sessin. El acuerdo con el resultado de N-cuerpos es excelente, indicando que el aumento en el desplazamiento de resonancia sigue de cerca la ubicación de las soluciones ACR de baja amplitud y la evolución del sistema sigue siendo dominada por la conmensurabilidad, incluso para grandes valores de $\Delta_{2/1}$.

Hemos realizado una gran serie de simulaciones de N-cuerpos que cubren diferentes valores de las masas planetarias y el índice de forma, observando la misma evolución dinámica que la descrita en la figura 6.8. Por lo tanto, contrariamente a lo que se espera, los grandes desplazamientos pueden estar todavía

6.3 Migración diferencial y desplazamiento de la resonancia

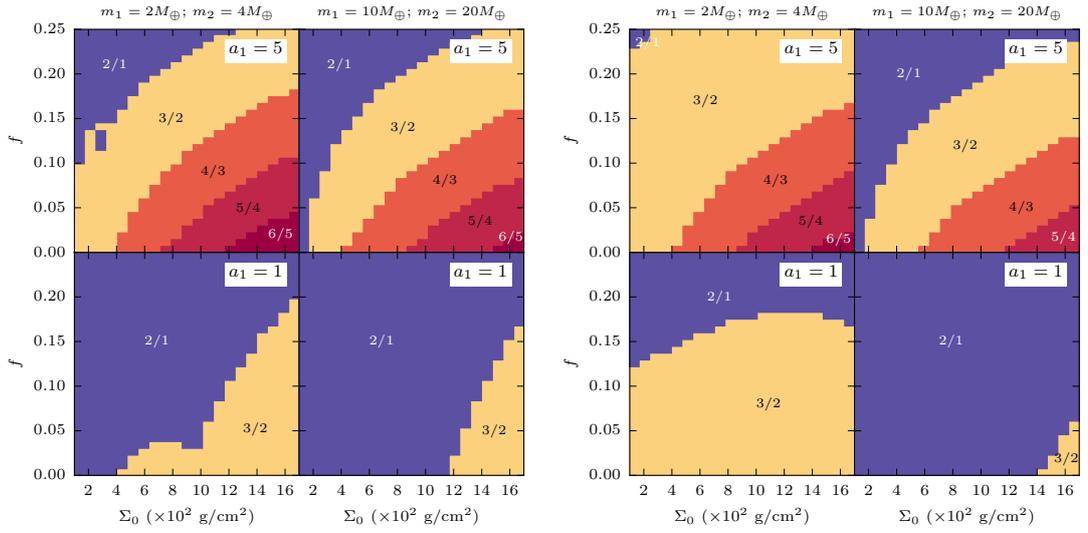


Figura 6.9: Configuración resonante final de un sistema con dos planetas simulado con un código N-cuerpo, como función de la densidad superficial inicial y el índice de forma. En cada gráfico variamos las masas planetarias, el semieje mayor inicial y el parámetro Q_e .

ligados a la captura resonante, incluso si la solución de ACR resultante corresponde a un dominio de libración cinemático (y no dinámico) (por ejemplo, [Hennard y Lemaître, 1983](#)).

6.3.1.1. Dependencia con la densidad superficial inicial

Como podemos ver de la ecuación (4.13), nuestro modelo de desplazamiento de resonancia no depende de la densidad superficial inicial Σ_0 . Sin embargo, si consideramos la evolución temporal de los planetas involucrados en nuestro problema, esta cantidad será un factor importante para calcular el tiempo de captura en las resonancias. Por este motivo, en este apartado discutiremos su importancia en la captura permanente en las conmensurabilidades de primer orden. Para esto utilizamos simulaciones de N-cuerpos. Cada condición inicial se integró incorporando la fuerza exterior ad hoc dada por la ecuación (6.12) con la migración y el tiempo de amortiguamiento determinado por expresiones (5.5), (6.13) y (6.14). Las integraciones se detuvieron sólo después de que el semieje mayor del planeta interior llegara a 0,05 UA.

Se realizaron dos series de simulaciones con diferentes masas planetarias: una con $m_1 = 2m_\oplus$, $m_2 = 4m_\oplus$, y una segunda con $m_1 = 10m_\oplus$, $m_2 = 20m_\oplus$. En ambos casos, la relación de masa fue de $m_2/m_1 = 2$, garantizando así que las soluciones ACR serían simétricas y se caracterizarían por $\theta_1 = 0$. Además, consideramos dos valores diferentes de los semiejes mayores iniciales: en el primero elegimos $a_1 = 1$, $a_2 = 1,64$ UA, mientras que en un conjunto adicional de simulaciones hemos adoptado $a_1 = 5$, $a_2 = 8,2$ UA. En ambos casos los planetas se lanzaron fuera pero cerca de la RMM 2 : 1. Las excentricidades iniciales se escogieron iguales

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

a $e_i = 0,05$ y todos los ángulos tomados como cero. El índice de forma del disco lo variamos en el intervalo $f \in [0;0,25]$ y la potencia del perfil de densidad superficial en el intervalo $\alpha' \in [0,5;1,5]$. Los resultados se muestran en la figura 6.9 en forma de mapas de color en términos f y Σ_0 . Cada gráfico consta de cuatro gráficos diferentes: el izquierdo y el derecho difieren en las masas planetarias (valores especificados en la parte superior), mientras que los superiores e inferiores asumen diferentes semiejes mayores iniciales. Los resultados mostrados en el conjunto de gráficos izquierdo corresponden a $Q_e = 0,2$ mientras que para el derecho asumimos $Q_e = 0,4$.

Como era de esperar, las densidades superficiales iniciales más grandes favorecen la captura en resonancias de mayor grado y separaciones orbitales más pequeñas entre los planetas. Mientras que los planetas inicialmente situados lejos de la estrella pueden llegar hasta las RMMs 4 : 3, 5 : 4 y 6 : 5, los sistemas iniciados con $a_1 = 1$ UA están dominados por las resonancias 2 : 1 y 3 : 2, al menos para los valores de Σ_0 considerados aquí. También hay una dependencia con el índice de forma del disco; los discos planos vuelven a favorecer la captura en conmensurabilidades de alto grado (especialmente para $a_1 = 5$ UA), mientras que las resonancias 2 : 1 y 3 : 2 son prácticamente los únicos resultados posibles en discos altamente acampanados.

Un resultado algo inesperado es la sensibilidad de los resultados con respecto al factor de amortiguación Q_e . Incluso pequeños cambios en este parámetro ad-hoc conducen a mapas de resonancia muy diferentes, como se puede ver comparando los gráficos izquierdo y derecho. Por ejemplo, para $Q_e \geq 0,4$ es casi imposible encontrar sistemas en RMM 2 : 1 con $m_1 = 2m_\oplus$, $m_1 = 4m_\oplus$ y $a_1 = 5$ UA, mientras que un resultado más probable sería adoptando $Q_e = 0,3$.

Los valores aquí tomados de los diferentes parámetros libres de nuestro sistema son totalmente arbitrarios debido a la incertidumbre ocasionada en la literatura. Sin embargo, siempre cumplen con la migración convergente y configuraciones finales estables. Estamos en total acuerdo que estos parámetros deberían ser mejor ajustados pero es tan difícil como tener una teoría unificada de formación planetaria.

6.3.2. Desplazamiento de resonancia con simulaciones hidrodinámicas

En esta sección discutimos la influencia del desplazamiento de resonancia existente en los sistemas exoplanetarios a través de simulaciones hidrodinámicas a largo plazo y de gran rango visto en el capítulo 5.

Realizamos las mismas simulaciones que las presentadas en la tabla 5.1 pero con $\Sigma_0 = 4000$ gr/cm², e incluimos una simulación extra, **sim8a**, con $f = 0,2$ y $\alpha' = 0,9$ manteniendo los demás parámetros iguales a **sim8**.

Los resultados son presentados en la figura 6.10 donde se muestra la relación

6.3 Migración diferencial y desplazamiento de la resonancia

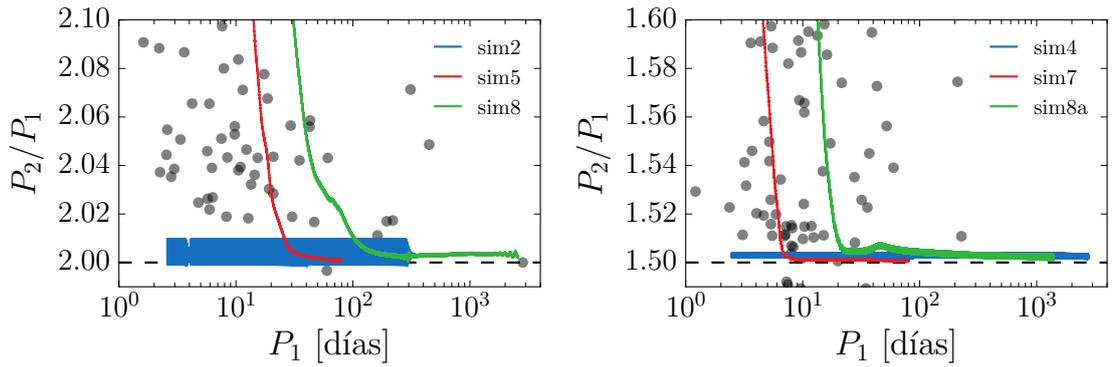


Figura 6.10: Desplazamiento de resonancia con simulaciones hidrodinámicas. Se muestra la relación de período orbital P_2/P_1 como función del período del planeta interno P_1 de algunas de las simulaciones detalladas en la tabla 5.1 pero con $\Sigma_0 = 4000 \text{ gr/cm}^2$. **Izq.:** Para la RMM 2 : 1. **Der.:** Para la RMM 3 : 2. Los círculos grises marcan la distribución de los planetas confirmados por Kepler y VR.

de período orbital P_2/P_1 como función del período del planeta interno P_1 . Los círculos grises marcan la distribución de los planetas detectados a través de Kepler y VR. El gráfico de la izquierda muestra los resultados para la captura en RMM 2 : 1. Se observa claramente que para discos planos (**sim2**) no existe prácticamente desplazamiento de resonancia, $\Delta_{2/1}^{\text{sim2}} = 0,005$, mientras que para discos acampanados (**sim5** y **sim8**) ocurre totalmente lo contrario. Esto sugiere que los discos planos no deberían conducir a ninguna separación notable de la resonancia exacta, permaneciendo inalterables con la distancia a la estrella central. Es decir, un sistema que migra en un disco plano, tendrá durante toda su evolución el mismo valor de desplazamiento de resonancia, y de hecho muy cerca del valor nominal.

La diferencia entre **sim5** y **sim8** son los semiejes iniciales y las masas planetarias consideradas. Los primeros no parecen ser la razón de que **sim5** comience su desplazamiento de resonancia a pequeños P_1 (~ 30 días). Sí en cambio, parece que las masas consideradas juegan un papel fundamental en el comienzo del desplazamiento según P_1 . **sim8** posee masas planetarias 5 veces más grandes que **sim5**, indicando una posible correlación entre las masas planetarias del sistema y el P_1 para los desplazamientos de resonancias. A mayores masas se obtiene desplazamiento a mayores P_1 .

Conclusiones similares se presentan en las simulaciones que quedan capturadas en la la RMM 3 : 2 (gráfico de la derecha). Para discos planos (**sim1** y **sim4**) no existe prácticamente desplazamiento de resonancia $\Delta_{3/2}^{\text{sim4}} = 0,002$. Para discos acampanados (**sim7** y **sim8a**) se rectifica el gran desplazamiento de resonancia y su temprana aparición con masas más grandes.

Comparando la **sim8** y **sim7** para las dos densidades superficiales iniciales consideradas $\Sigma_0 = 400, 4000 \text{ gr/cm}^2$, en las figuras 5.18-6.10, respectivamente, po-

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

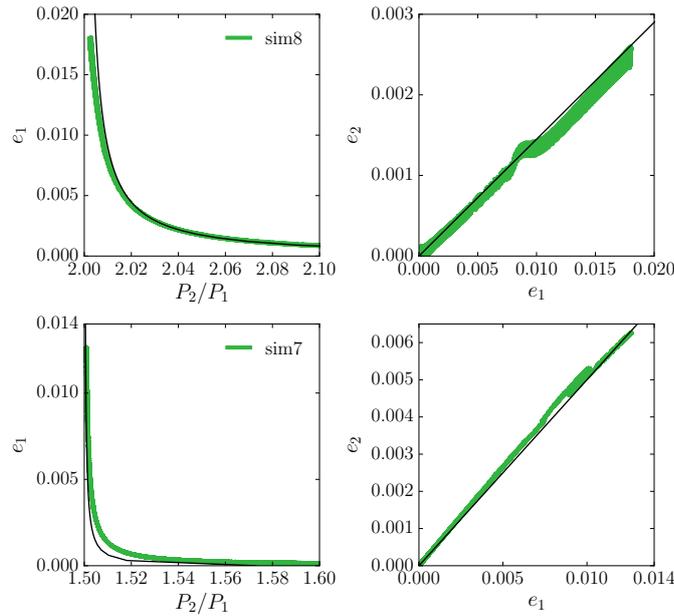


Figura 6.11: Comparación de dos simulaciones hidrodinámicas, **sim8** (arriba) y **sim7** (abajo), con $\Sigma_0 = 4000 \text{ gr/cm}^2$ con las predicciones analíticas dadas por las ecuaciones (6.7). En líneas negras se muestran las soluciones ACR analíticas y en verde los resultados de las simulaciones hidrodinámicas.

demostrar que la evolución del desplazamiento de resonancia son similares. Por lo tanto, el fuerte aumento de $\Delta_{2/1}$ y $\Delta_{3/2}$ no sólo se confirma, sino que parece ser una función débil de la densidad superficial del disco de gas, en concordancia con lo hallado en nuestro modelo analítico. Más importante aún, sin embargo, todas estas simulaciones hidrodinámicas de largo alcance demuestran que es posible conseguir desplazamientos muy grandes dentro de un disco gaseoso laminar no turbulento sin necesidad de apelar a efectos externos adicionales tales como interacciones de mareas o discos planetesimales.

Las ecuaciones (6.7) dieron relaciones entre el desplazamiento y las excentricidades planetarias en el caso de una solución ACR. Estas predicciones analíticas se trazan como líneas negras en los gráficos de la figura 6.11, mientras que las curvas verdes muestran los resultados de la simulación hidrodinámica **sim8** y **sim7** (gráficos de arriba y de abajo respectivamente). En ambos casos el acuerdo es muy bueno, demostrando que estas características de las soluciones ACR siguen siendo válidas incluso para desplazamientos muy grandes, y donde incluso la idea de movimiento resonante parece dudosa.

Mientras que $\Delta_{2/1}$ y $\Delta_{3/2}$ para **sim8** y **sim7** sigue sobrepasando los valores observados, la ecuación (6.11) predice que $\Delta_{p+1/p} \propto m_i/m_0$, suponiendo valores constantes para la razón de masa m_2/m_1 . Y por lo expuesto en párrafos anteriores, **sim5** muestra claramente un desplazamiento mucho menor que el obtenido para masas mayores. Por lo que, indica que nuestro modelo analítico resumido (ecuación (6.18)) parece ser una muy buena representación de la dinámica de

6.4 Aplicación a sistemas individuales

captura desde el punto de vista de la hidrodinámica.

Finalmente, y lo que es quizás más importante, la distribución observada de $\Delta_{2/1}$ aparece muy bien contenida dentro de los límites definidos por la **sim8**, y para $\Delta_{3/2}$ es excelente el acuerdo encontrado con el núcleo de los exoplanetas Kepler desplazados. En consecuencia, el desplazamiento de resonancia alrededor la RMM 2 : 1 y $\Delta_{3/2}$ para sistemas exoplanetarios es consistente con la migración planetaria suave en un disco laminar. Entonces, una conclusión que parece ser obvia es que para reproducir la distribución de sistemas cercanos, como los detectados por Kepler, se requiere de un disco acampanado ($f \sim 0,25$) con densidades superficiales iniciales en el intervalo $\Sigma_0 = [400, 4000]$ gr/cm² y masas planetarias en el rango de las masas de la Tierra a Neptuno.

6.4. Aplicación a sistemas individuales

El mecanismo que hemos propuesto en este estudio depende en gran medida de las masas individuales y de la relación de masa de los planetas situados en las proximidades de la RMM 2 : 1 y 3 : 2. El aumento en el desplazamiento de la resonancia cercano a la estrella es más prominente cuando la relación de masa es cercana a la unidad y m_1 al menos del orden de $10m_{\oplus}$. Más importante aún, para que tenga lugar la migración convergente, el planeta exterior debe ser más masivo que su compañero interior por un factor fuertemente dependiente del índice de forma asumido para el disco.

Sin embargo, no es fácil evaluar si los exoplanetas observados en configuraciones casi resonantes validan este escenario. La mayoría de los sistemas donde la migración de Tipo I es aplicable han sido detectados por tránsito, haciendo que las mediciones precisas de las masas sean datos raros.

Con el fin de tener al menos una cierta validación estadística, analizamos la conocida población exoplanetaria de planetas confirmados, tal como se publicó en la página web de exoplanet.eu a mediados de diciembre de 2016. Los resultados se muestran en la figura 6.12. En el gráfico superior representamos la distribución de los radios (R_2 vs. R_1) para todos los pares planetarios en la vecindad de las resonancias 2 : 1 (azul) y 3 : 2 (rojo). Con R_1 representamos el radio del planeta interior y con R_2 el radio del exterior. Sólo se consideraron aquellos cuerpos para los cuales las incertidumbres en el radio son menores al 40% y los desplazamientos de resonancia en el intervalo (0;0,1]. La mayoría de los pares planetarios tienen radios por debajo de $4R_{\oplus}$, aunque algunos pertenecen al dominio de planeta gigante teniendo hasta y más allá el radio de Júpiter R_{Jup} . Aunque en la mayoría de los casos $R_2/R_1 > 1$, algunos se caracterizan por planetas internos más grandes. Sin embargo, sin estimaciones de la densidad del planeta, no es posible decir si las masas también cumplen con esta condición y no serían posibles que sean candidatos para la captura de resonancia a través de la migración planetaria hacia el interior.

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

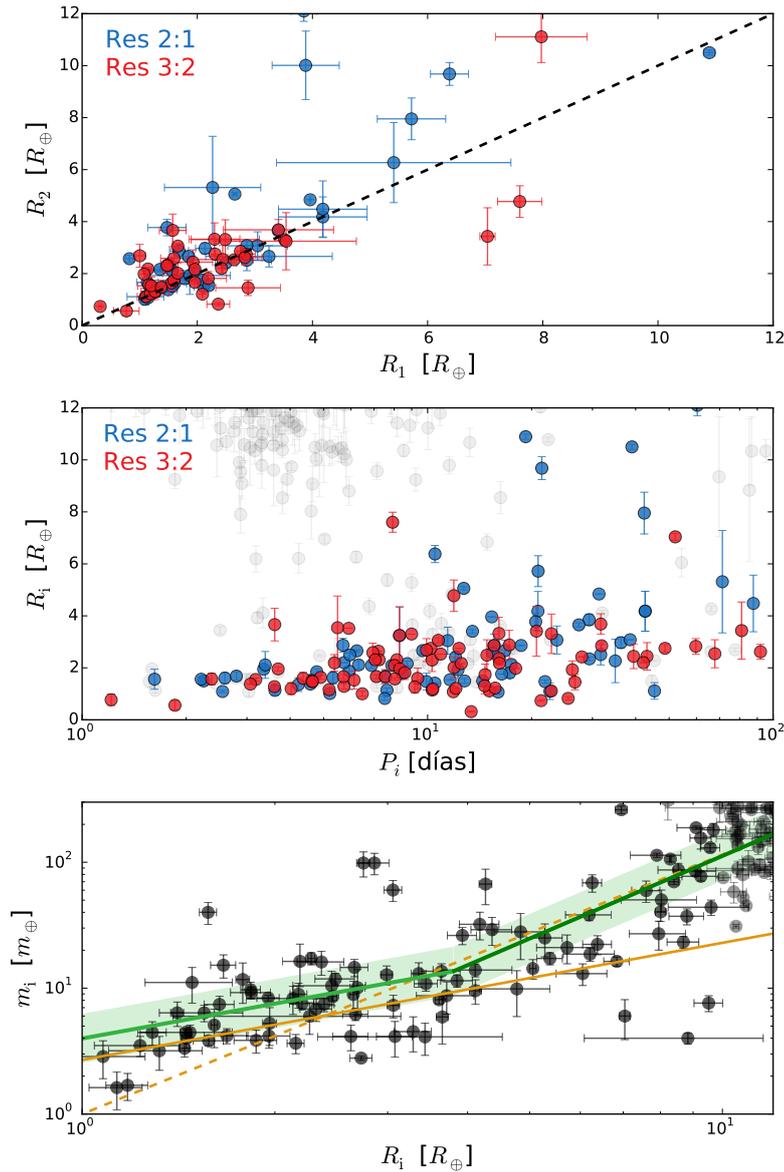


Figura 6.12: Arriba: Distribución de los radios entre los planetas confirmados en las proximidades de la RMM 2 : 1 (azul) y 3 : 2 (rojo). La línea discontinua corresponde a cuerpos de igual tamaño ($R_1 = R_2$). **Medio:** Radio en función del período orbital. Los círculos grises claros indican los valores de los planetas fuera de ambas resonancias. **Abajo:** Masa planetaria m_i vs. radio R_i para todos los planetas (cuerpos mayores que Júpiter mostrados en gris). La línea discontinua de color naranja se corresponde con la llamada ley de potencia $R^{2,06}$ de [Lissauer et al. \(2011\)](#), mientras que el ajuste propuesto por [Weiss y Marcy \(2014\)](#) se muestra como una línea naranja continua. Nuestro propio ajuste, que se calcula para todos los planetas más pequeños que Júpiter, se presenta como una línea verde gruesa. Los valores dentro de $1\sigma_{\text{dis}}$ dispersión están contenidos dentro de la región verde clara. Figura adaptada de [Ramos et al. \(2017\)](#).

El gráfico intermedio de la figura 6.12 muestra la distribución de los radios en función del período orbital. Los colores representan lo mismo que en el gráfico anterior, mientras que todos los cuerpos fuera de las RMM 2 : 1 y 3 : 2 están indi-

6.4 Aplicación a sistemas individuales

cados por círculos grises claros. Mientras que la población de ambas resonancias muestran radios decrecientes cerca de la estrella central, esto es particularmente evidente para la conmensurabilidad 2 : 1 donde $R_i \sim 2R_\oplus$ para $P_i < 10$ días, en contraste con distancias mayores donde abundan los planetas más grandes. La disminución en R_i más cercana a la estrella, donde el desplazamiento de resonancia observado es mayor, aparece contraria a las expectativas de nuestro modelo (6.18), lo que indica que $\Delta_{(p+q)} \propto m_i/m_0$. Como veremos más adelante, este problema puede ser parcialmente superado considerando la evolución de las mareas durante la vida del sistema.

Finalmente, dado que nuestro modelo requiere estimaciones de las masas, el gráfico inferior muestra la distribución de radios y masas de todos los planetas conocidos (resonantes o no) cuyos valores tienen errores por debajo de 40%. Usualmente se emplean dos ajustes empíricos diferentes para esta relación. La ley de potencia $R_i^{2,06}$ de [Lissauer et al. \(2011\)](#) se muestra como una curva discontinua naranja, y se dedujo de los valores de la Tierra y Saturno. Como se puede deducir de la figura, muestra un buen ajuste para cuerpos con $R_i > 5R_\oplus$ pero subestima la masa de exoplanetas con radios más pequeños. Por el contrario, el ajuste presentado por [Weiss y Marcy \(2014\)](#) muestra un mejor acuerdo para cuerpos más pequeños, pero aún no alcanza los valores medios incluso en este dominio. Es importante señalar que muchos pequeños planetas se han confirmado desde [Weiss y Marcy \(2014\)](#), y un análisis similar hecho hoy conduciría a un conjunto diferente de valores numéricos.

Para obtener una relación empírica actualizada, buscamos dos mejores ajustes, uno para $R < R_{\text{crit}}$ y otro para cuerpos más grandes, donde el valor de R_{crit} fue escogido cerca de $4R_\oplus$, pero con cierta libertad para reducir la varianza general. El resultado se muestra como dos líneas verdes gruesas. Debido a que también necesitamos modelar la dispersión alrededor de los valores medios, las áreas sombreadas de color verde claro corresponden a las regiones dentro de $1\sigma_m$. Explícitamente, obtuvimos

$$\log\left(\frac{m_i}{m_\oplus}\right) \simeq \begin{cases} 0,60 + 0,92 \log\left(\frac{R_i}{R_\oplus}\right) & \text{si } R \leq 3,8R_\oplus \\ -0,13 + 2,18 \log\left(\frac{R_i}{R_\oplus}\right) & \text{si } R > 3,8R_\oplus \end{cases} \quad (6.20)$$

más una distribución normal centrada alrededor de este valor de dispersión $\sigma_m \simeq 0,42$. Ambas pendientes son muy similares a aquellas propuestas por [Weiss y Marcy \(2014\)](#) (0,94) y por [Lissauer et al. \(2011\)](#) (2,06). El valor de R_{crit} fue ajustado para obtener una transición suave entre ambos segmentos. Ahora, la ecuación (6.20) nos permitirá realizar simulaciones de Monte Carlo asignando masas a diferentes sistemas observados con valores dados de R_i .

Para aplicar nuestro modelo estadísticamente todavía necesitamos conocer los parámetros del disco. Los valores esperados también están débilmente limitados.

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

Se espera que el índice de forma sea fuertemente dependiente de las eficiencias de calentamiento y enfriamiento y de las propiedades radiativas del disco. Las simulaciones hidrodinámicas tienen valores registrados del orden de $f \sim 0,3$ (por ejemplo, [Bitsch et al., 2013](#)). De manera similar, aunque las estimaciones clásicas de la MMSN apuntan hacia valores de $\alpha' \sim 1,5$, no hay razón para creer que dicho valor debería ser universal. La distribución observada de los sistemas exoplanetarios muestra una amplia diversidad del índice de la ley de potencia (por ejemplo, [Raymond y Cossou, 2014](#)), aunque la ubicación actual puede no ser indicativa de sus sitios de formación si la migración planetaria estaba muy extendida o avanzada. De forma similar, la altura de la escala h_0 se cree que es $h_0 \in [0,01, 0,1]$ y la mayoría de los estudios asumen valores $h_0 \simeq 0,05$. Sin embargo, dado que el desplazamiento de resonancia es una función fuerte de h_0 (de hecho, $\Delta_{(p+q),p} \propto 1/h_0$, vea la ecuación (6.18)), hemos mantenido su valor como un parámetro libre.

Nuestras simulaciones de Monte Carlo se realizaron de la siguiente manera. Para cada sistema exoplanetario en la vecindad de las RMM 2 : 1 y 3 : 2, asignamos a cada planeta un radio físico R_i de acuerdo con los valores estimados y errores dados en el conjunto de datos. Las masas fueron generadas a partir de la expresión (6.20) incluyendo una distribución normal con varianza σ_m . En cada ejecución, las propiedades de disco (f, α', h_0) también se eligieron aleatoriamente suponiendo distribuciones normales con la media ($f_{\text{med}}, \alpha'_{\text{med}}, h_{0\text{med}}$) y las variaciones ($\sigma, \sigma_{\alpha'}, \sigma_{h_0}$). Los parámetros resultantes se introdujeron entonces en la ecuación (6.18) para obtener un valor del desplazamiento de resonancia. Si el conjunto de parámetros no condujo a la migración convergente y a una configuración de resonancia estable (como se describe por las condiciones deducidas en [Deck y Batygin, 2015](#)), repetimos el proceso. Un total de 400 casos exitosos fueron ejecutados para cada sistema y se trazó la distribución de P_2/P_1 como histogramas.

La figura 6.13 muestra resultados para 36 sistemas en las proximidades de la resonancia 2 : 1. Las columnas azules indican el valor observado de la relación del período orbital, mientras que los histogramas grises corresponden a nuestras simulaciones de Monte Carlo con $f = 0,25 \pm 0,05$, $\alpha' = 1,0 \pm 0,5$ y $h_0 = 0,03 \pm 0,02$. Los valores medios fueron elegidos cerca de los estimados de la figura 6.6, excepto para la altura de la escala del disco que se tomó ligeramente inferior. Las varianzas se eligieron para incluir los valores normalmente presentes en la literatura (por ejemplo, $h_0 = 0,05$ y $\alpha' = 1,5$ para la MMSN). Aunque estos valores pueden considerarse arbitrarios, son consistentes con nuestro conocimiento actual de los discos protoplanetarios.

Aunque los resultados parecen prometedores, algunos de los mayores desplazamientos, como los observados para Kepler-126, Kepler-154 y Kepler-55, aparecen como eventos de baja probabilidad. Sin embargo, también debemos permitir la divergencia de resonancia a través de la evolución de las mareas. Adoptamos la prescripción analítica descrita en [Papaloizou \(2011\)](#) que incluye distorsiones

6.4 Aplicación a sistemas individuales

Sistema	$R_1 [R_{\oplus}]$	$R_2 [R_{\oplus}]$	$P_1 [d]$	P_2/P_1	$m_0 [M_{\odot}]$	$R_0 [R_{\odot}]$
HIP-41378	2,86000	2,50800	15,57120	2,03567	1,150	1,400
KE-24	5,72000	7,95300	20,88510	2,02840	1,120	1,210
Kepler-104	3,04700	3,06900	11,42755	2,07115	0,810	1,350
Kepler-120	2,11200	1,49600	6,31250	2,02686	0,654	0,530
Kepler-126	1,41240	1,46960	10,49563	2,08369	1,110	1,360
Kepler-127	1,49600	2,34410	14,43577	2,03615	1,270	1,360
Kepler-1530	1,60600	1,61700	2,59044	2,05476	0,920	0,880
Kepler-154	1,47400	3,77300	9,91936	2,07169	0,890	1,000
Kepler-221	1,68300	2,87100	2,79591	2,03533	0,720	0,820
Kepler-245	2,13400	2,97000	17,46081	2,07763	0,800	0,800
Kepler-25	2,65210	5,05780	6,23854	2,03900	1,220	1,360
Kepler-256	1,56200	2,11200	1,62049	2,09073	1,020	1,300
Kepler-267	1,94700	2,09000	3,35373	2,05069	0,560	0,560
Kepler-27	3,96000	4,84000	15,33480	2,04312	0,650	0,590
Kepler-305	3,24500	2,66200	8,29100	2,01890	0,830	0,870
Kepler-31	4,18000	4,18000	20,86130	2,04358	1,210	1,220
Kepler-31	4,18000	4,47700	42,63180	2,05595	1,210	1,220
Kepler-326	1,49600	1,37500	2,24833	2,03723	0,980	0,800
Kepler-327	1,08900	1,01200	2,54957	2,04439	0,550	0,490
Kepler-328	2,26600	5,31300	34,92100	2,04210	0,980	0,970
Kepler-331	1,78200	1,80400	8,45750	2,04329	0,510	0,490
Kepler-332	1,14400	1,06700	7,62632	2,09742	0,800	0,720
Kepler-349	1,87000	1,92500	5,92978	2,06544	0,970	0,930
Kepler-363	1,13300	1,66100	3,61457	2,08667	1,230	1,490
Kepler-384	1,10000	1,11100	22,59705	2,00682	0,760	0,880
Kepler-450	0,82170	2,57400	7,51464	2,05108	1,346	1,570
Kepler-48	1,84800	2,66200	4,77800	2,02468	0,880	0,890
Kepler-52	2,09000	1,76000	7,87736	2,08001	0,540	0,520
Kepler-53	2,86000	3,08000	18,64895	2,06759	0,980	0,890
Kepler-55	1,56200	1,51800	2,21110	2,08834	0,620	0,580
Kepler-56	6,38000	9,68000	10,50160	2,03801	1,320	4,230
Kepler-57	2,20000	1,54000	5,72932	2,02629	0,830	0,730
Kepler-79	3,40525	3,65200	13,48450	2,03218	1,165	1,302
Kepler-81	2,49590	2,40680	5,95489	2,02185	0,648	0,578
Kepler-84	1,35300	2,16150	4,22454	2,06552	1,022	1,035
Kepler-9	10,89305	10,50051	19,22418	2,03031	1,000	1,100

Tabla 6.1: Radios y períodos orbitales de los 36 pares de exoplanetas en la vecindad de la resonancia 2 : 1, y masas y radios de sus correspondientes estrellas considerados en nuestras simulaciones Monte Carlo.

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

Sistema	$R_1 [R_\oplus]$	$R_2 [R_\oplus]$	$P_1 [d]$	P_2/P_1	$m_0 [M_\odot]$	$R_0 [R_\odot]$
EPIC-205071	3,4100	3,6850	20,65614	1,53558	0,870	0,870
Kepler-102	1,1440	2,1780	10,31170	1,56576	0,810	0,760
Kepler-1065	1,5730	3,6630	2,37031	1,52272	0,940	0,930
Kepler-107	1,5510	1,6335	3,18003	1,54132	1,180	1,410
Kepler-114	1,1580	1,5730	5,18855	1,54976	0,710	0,650
Kepler-123	2,8820	1,4520	17,23237	1,54912	1,030	1,260
Kepler-128	1,1110	1,1110	15,09000	1,51120	1,170	1,550
Kepler-131	2,3650	0,8250	16,09200	1,58563	1,020	1,030
Kepler-192	1,0010	2,6840	6,47028	1,53421	0,910	1,010
Kepler-197	1,1858	1,2210	10,34971	1,51481	0,860	1,120
Kepler-215	1,5950	1,7380	9,36067	1,56689	0,770	1,030
Kepler-23	1,6621	3,0580	7,10700	1,51153	1,110	1,520
Kepler-24	2,3100	2,7500	8,14530	1,51419	1,030	1,070
Kepler-265	2,4420	2,5410	43,13062	1,57269	1,030	1,100
Kepler-275	2,2990	3,3220	10,30068	1,56185	1,240	1,380
Kepler-276	2,8490	2,7500	31,88400	1,52578	0,960	0,950
Kepler-28	3,5200	3,3000	5,91230	1,51985	0,750	0,700
Kepler-305	3,5420	3,2450	5,48700	1,51103	0,830	0,870
Kepler-306	1,4960	2,3100	4,64619	1,55831	0,820	0,720
Kepler-340	2,4860	3,3110	14,84439	1,53760	2,110	1,850
Kepler-342	1,9250	2,4420	26,23414	1,50412	1,130	1,470
Kepler-363	1,6610	2,0130	7,54243	1,58200	1,230	1,490
Kepler-393	1,2650	1,3090	9,18242	1,59148	1,320	1,380
Kepler-402	1,1990	1,5290	4,02875	1,52028	1,000	1,260
Kepler-42	0,7700	0,5610	1,21377	1,52926	0,130	0,170
Kepler-49	2,6400	2,5300	7,20379	1,51489	0,550	0,530
Kepler-54	2,0900	1,2100	8,01094	1,50690	0,510	0,500
Kepler-55	2,4200	2,2000	27,94811	1,50821	0,620	0,580
Kepler-58	2,7500	2,8600	10,21850	1,52411	0,950	1,030
Kepler-59	1,0780	1,9800	11,86817	1,51499	1,040	0,940
Kepler-79	7,0400	3,4320	52,09020	1,55626	1,165	1,302
Kepler-80	1,3750	1,4740	3,07000	1,51140	0,772	0,738
Kepler-80	1,4740	2,3100	4,64000	1,51940	0,772	0,738
Kepler-85	1,9580	2,1670	8,30599	1,50640	0,950	0,840
Kepler-90	2,8270	2,6180	59,73667	1,53907	1,130	1,200
Kepler-968	1,9580	1,6610	3,69298	1,54601	0,760	0,700

Tabla 6.2: Radios y períodos orbitales de los 36 pares de exoplanetas en la vecindad de la resonancia 3 : 2, y masas y radios de sus correspondientes estrellas considerados en nuestras simulaciones Monte Carlo.

6.4 Aplicación a sistemas individuales

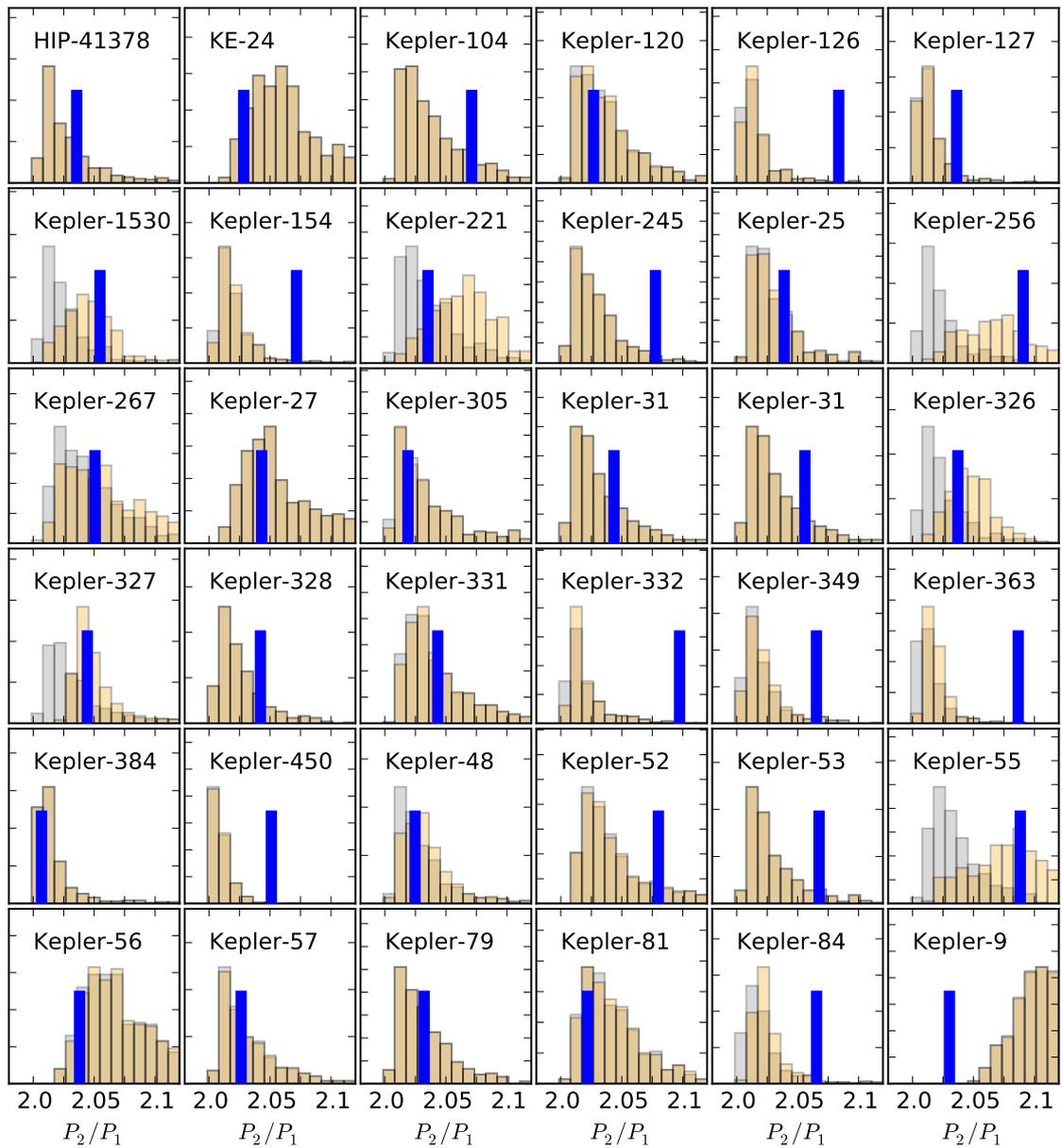


Figura 6.13: Las columnas azules indican la relación de periodos orbitales observados P_2/P_1 para 36 pares exoplanetarios en la vecindad de la resonancia 2 : 1. Los histogramas en gris son el resultado de 400 simulaciones Monte Carlo tal como se obtuvo de la ecuación (6.7) con valores aleatorios para las masas y los parámetros del disco (ver el texto para más detalles). Los histogramas naranjas representan valores previos a ser evolucionados a través de los efectos de mareas durante la duración de la vida de los sistemas. Figura adaptada de [Ramos et al. \(2017\)](#).

de las mareas tanto en los planetas como en la estrella central. Sin embargo, esto introduce parámetros adicionales libres en nuestro modelo. Sin ninguna información sobre su estructura interna o composición química, no es posible dar valores confiables para el coeficiente de marea planetario Q_p . Incluso dentro de nuestro propio Sistema Solar, estos parámetros todavía están en discusión (por ejemplo, [Lainey, 2016](#)), aunque generalmente se acuerda un cierto orden de magnitud.

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

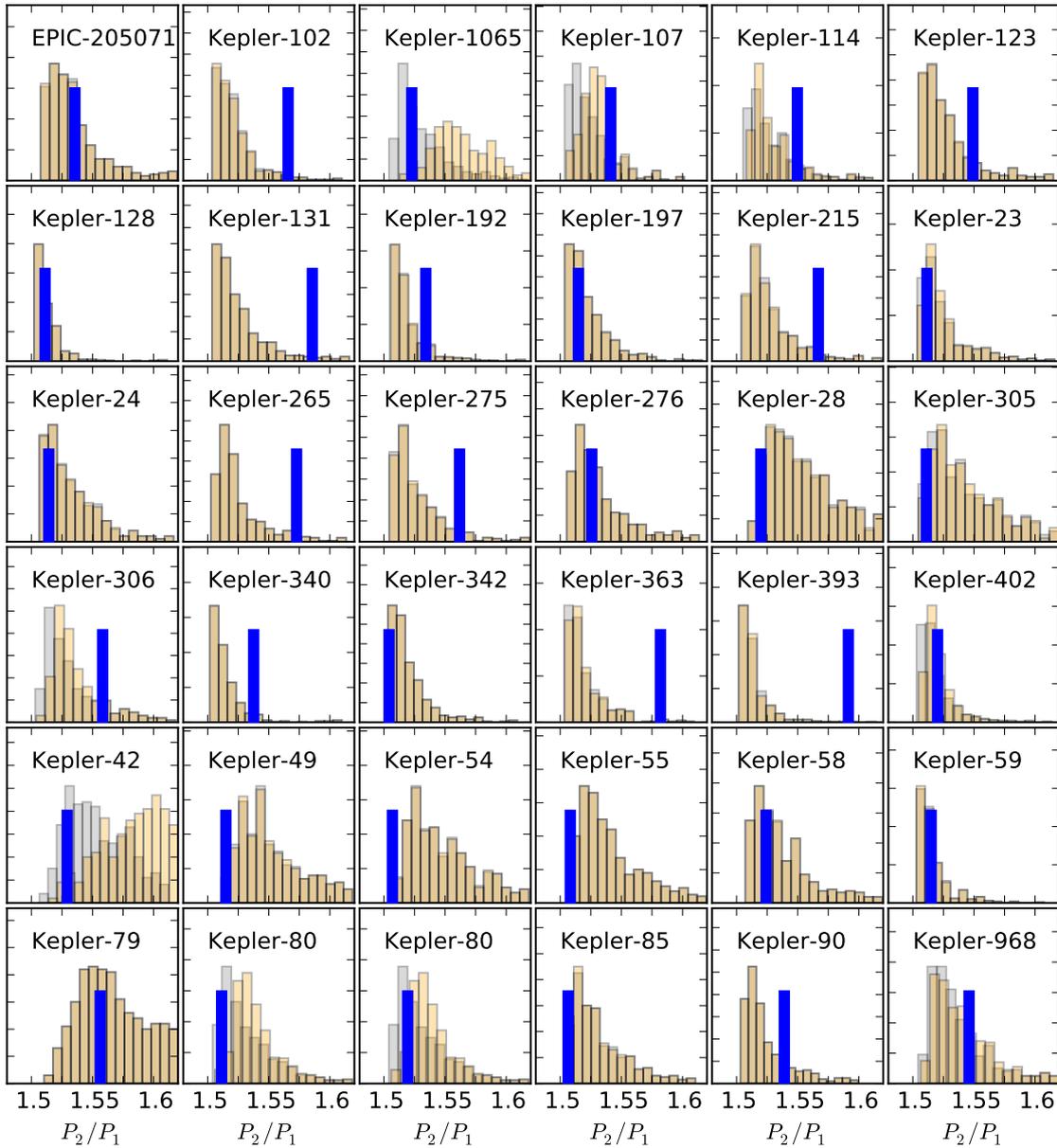


Figura 6.14: Igual que la figura anterior pero para sistemas en la vecindad de la resonancia 3 : 2. Figura adaptada de [Ramos *et al.* \(2017\)](#).

Como queríamos evitar fijar un valor único para Q_p , introdujimos la siguiente fórmula empírica:

$$\log(Q_p) = \max(2, 6 - 0,7\rho_p), \quad (6.21)$$

donde ρ es la densidad volumétrica del planeta, en unidades de gr/cm^3 . A pesar de que esta relación no se basa en ninguna evidencia física, produce resultados cualitativamente correctos en el caso de la Tierra ($Q_p \sim 10^2$) y Júpiter ($Q_p \sim 10^4$), además de una transición suave entre ambos extremos.

Siguiendo a [Benítez-Llambay *et al.* \(2011\)](#) adoptamos un coeficiente estelar de las mareas $Q_* = 10^6$, mientras que la rotación estelar fue tomada como $P_* =$

6.4 Aplicación a sistemas individuales

15 ± 5 días. Sin embargo, las mareas estelares demostraron ser insignificantes en todos los casos, y los resultados resultaron ser virtualmente insensibles tanto a Q_* como a P_* . Finalmente, pocos sistemas tienen edades estimadas T_{edad} , por lo que asumimos valores aleatorios siguiendo una distribución normal con $T_{\text{edad}} \in [2,5;7,5]$ giga-años. Todos los planetas se colocaron inicialmente en equilibrio de órbita-rotación (rotación pseudo-síncrona) independientemente de su distancia desde la estrella.

Los nuevos valores finales de los desplazamientos, que incorporan la evolución de las mareas, se muestran como histogramas anaranjados en la figura 6.13. Cuando los efectos de marea son insignificantes, los valores naranja parecen superponerse a los histogramas grises originales (por ejemplo, HIP-41378, KE-24). En otros sistemas, tales como Kepler-256, Kepler-327, o Kepler-55, la evolución de la marea provoca un aumento significativo en el desplazamiento que conduce a valores finales que son mucho más cercanos a los observados actualmente. Sin embargo, otros sistemas siguen siendo difíciles de explicar por este mecanismo (por ejemplo, Kepler-126, Kepler-154, Kepler-332 y Kepler-363). La mayoría de éstos se caracterizan por desplazamientos muy grandes del orden de $\Delta_{2/1} \simeq 0,08$, y podrían de hecho constituir parte de la población secular de fondo, que aparecen superpuestos a los sistemas casi resonantes.

Cabe mencionar otros tres sistemas problemáticos. Kepler-450 tiene una relación $R_2/R_1 \simeq 3$ que conduce en la mayoría de las simulaciones de Monte Carlo a $m_2/m_1 \simeq 10$. Como se ve por la ecuación (6.18), para tales sistemas nuestro modelo predice inexorablemente desplazamientos muy pequeños, mucho más pequeños que el valor observado de $\Delta_{2/1} \simeq 0,04$. Un resultado opuesto es percibido para Kepler-9, donde nuestro modelo siempre parece predecir mayores desplazamientos de lo observado. Esto no es sorprendente ya que los cuerpos en este sistema tienen masas en el rango de los planetas gigantes, y por tanto, deberían haber sido sometidos a la migración de Tipo II. La incapacidad de nuestro modelo para predecir valores compatibles es esperada. Otro sistema complicado es Kepler-84, que tiene un error $\sim 48\%$ en la determinación del radio estelar. Este error puede conducir a un error enorme en el proceso de medición de radios planetarios.

Sin embargo, en términos generales, nuestro modelo parece funcionar bien. Para la mayoría de los sistemas reales predice desplazamientos similares a los valores observados, incluso si el acuerdo no ocurre para el pico de la distribución simulada. No creemos que este sea un tema importante, ya que no conocemos los parámetros de disco reales que alojaban a cada uno de los planetas. En consecuencia, el hecho de que podamos modelar la diversidad y la magnitud aproximada de $\Delta_{2/1}$ para tantos casos reales es, en nuestra opinión, un resultado muy positivo. Es importante mencionar que, tal como propuso [Silburt y Rein \(2015\)](#), los efectos de las mareas no pueden por sí solos explicar las configuraciones casi resonantes. Sin embargo, son un mecanismo adicional importante, al menos en

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

Sistema	$m_1 [m_{\oplus}]$	$m_2 [m_{\oplus}]$	$P_1 [d]$	P_2/P_1	$m_0 [M_{\odot}]$	Referencia
Kepler-25	$9,6 \pm 4,2$	$24,6 \pm 5,7$	6,24	2,0390	$1,22 \pm 0,06$	Marcy et al. (2014)
K2-24	$21,0 \pm 5,4$	$27,0 \pm 7,0$	20,89	2,0284	$1,12 \pm 0,05$	Petigura et al. (2016)

Tabla 6.3: Masas y períodos orbitales para Kepler-25 b,c y K2-24 b,c.

algunos planetas.

La figura 6.14 muestra resultados para 36 sistemas en la proximidad de la resonancia de movimiento medio 3 : 2. Como antes, nuestro modelo subestima el desplazamiento para algunos sistemas (por ejemplo, Kepler-102, Kepler-131, Kepler-363 y Kepler-393), pero de nuevo podrían ser objetos de fondo cuya posición en la vecindad del dominio resonante es simplemente coincidencia. La gran mayoría de los casos, sin embargo, están bien reproducidos por el modelo y en varios ejemplos el valor observado coincide estrechamente con el pico de los histogramas.

Como una prueba adicional, analizamos la sensibilidad de estos resultados con respecto a los parámetros del modelo. Se encontró que la distribución de los desplazamientos era sólo débilmente dependiente de la forma del disco y el perfil de densidad de superficie, aunque sí mostraron una relación más fuerte con ambos h_0 y Q_e . Valores más altos de ambas cantidades condujeron a un menor $\Delta_{(p+q)/p}$, por lo que estimaciones más precisas en el futuro podrían ayudar a evaluar aún más los méritos de este enfoque.

Finalmente, aunque en este trabajo nos concentramos en la población casi resonante de exoplanetas alrededor de las RMMs 2 : 1 y 3 : 2, es importante tener en cuenta que la mayoría de los sistemas cercanos se encuentran en configuraciones seculares. Aunque explicar el origen de tales sistemas está más allá del alcance del presente trabajo, es posible que al menos algunos de ellos pudieran ser el resultado de capturas de resonancia fallidas o el resultado de eventos de colisión o de dispersión planetaria. No todas las relaciones de masa o parámetros del disco necesariamente conducen a una trampa de resonancia estable (por ejemplo, [Deck y Batygin, 2015](#)), y la consiguiente reordenación caótica de las órbitas podría explicar al menos parte de nuestro resultados.

6.4.1. Kepler-25 y K2-24

De 165 pares planetarios situados en la vecindad de la resonancia 2 : 1 y con $P_1 \leq 100$ días, sólo en 18 casos se han medido o estimado las masas de ambos cuerpos con exactitud. De éstos, sólo 10 tienen razones de período orbital en el intervalo $P_2/P_1 \in [2,0; 2,10]$, y pueden catalogarse así como miembros de la región (casi)-resonante. Este número continúa disminuyendo cuando observamos que 7 pares planetarios tienen al menos uno de sus miembros con $m_i > 50m_{\oplus}$, más que suficiente para abrir un hueco en el disco y migrar siguiendo un escenario de tipo II. Dado que nuestro modelo se basa en prescripciones analíticas para

6.4 Aplicación a sistemas individuales

la migración laminar tipo I, estos sistemas están fuera del alcance de nuestro modelo.

De los tres sistemas restantes, HD 219134 ha sido percibido recientemente como problemático. La primera referencia a este sistema aparece en [Motalebi et al. \(2015\)](#), quienes analizaron un total de 98 observaciones en VR obtenidas con HARPS-N y encontraron evidencia de 4 planetas de baja masa. El miembro externo del par (casi)-resonante no fue detectado. Más tarde en el mismo año, [Vogt et al. \(2015\)](#) analizaron un total de 276 mediciones en VR e identificaron un total de 6 planetas en este sistema. Más recientemente, sin embargo, [Johnson et al. \(2016\)](#) encontraron una periodicidad sustancial en los datos de VR debido a la rotación estelar con un período de 22,8 días, un valor prácticamente igual a $P_1/2$. Aunque los autores no creen que haya pruebas suficientes para descartar la existencia del planeta interior, la amplitud generada por el planeta en la señal de VR puede verse afectada por la rotación estelar y, por lo tanto, la masa deducida para m_1 podría de hecho ser sustancialmente inferior.

Si la configuración orbital y las relaciones de masa del sistema HD 219134 son confirmadas por observaciones futuras, entonces el problema persistirá. Sin embargo, la cuestión se centraría más en el escenario de migración planetaria en sí y no tanto en el valor del desplazamiento de resonancia. En este caso, este sistema podría considerarse un buen candidato para la formación in-situ o el resultado de la dispersión planetaria y la evolución de la colisión (por ejemplo, [Ogihara et al., 2015](#)).

Esto nos deja con dos sistemas restantes, Kepler-25 y K2-24. La tabla 6.3 da las masas y los períodos orbitales de ambos sistemas, junto a las masas estelares y sus respectivas desviaciones estándar. Ambos sistemas tienen cocientes de masa $m_2/m_1 > 1$ y son, por tanto, candidatos para la captura resonante en la conmensurabilidad 2 : 1. El punto clave ahora es comprobar si el valor observado del desplazamiento de resonancia $\Delta_{2/1}$ puede lograrse usando nuestro modelo con la suposición de un disco laminar y acampanado.

La figura 6.15 muestra, en círculos coloreados llenos, la posición de Kepler-25 (izquierda) y K2-24 (derecha) en el plano $(P_2/P_1, P_1)$. En cada caso, las curvas de color muestran el resultado de simulaciones de N-cuerpo donde la migración planetaria fue modelada de acuerdo con la ecuación (6.12), incorporando la prescripción de Goldreich-Schlichting a través de la expresión (6.18). Asumimos $\beta' = 0,3$, $h_0 = 0,05$ y $Q_e = 0,1$.

Como los valores de m_1 y m_2 tienen incertidumbres significativas, les permitimos variar dentro de sus barras de error respectivas para obtener el mejor ajuste posible con el desplazamiento observado. En el caso de Kepler-25, sin embargo, el valor presente de $\Delta_{2/1}$ se puede reproducir suponiendo $f = 0,25$ y prácticamente ningún cambio en las masas planetarias. K2-24, que se muestra en el marco de la derecha, requiere un poco más de trabajo. La fijación del índice de forma a $f = 0,25$ requirió que las masas fuesen ajustadas a $m_1 : 21m_{\oplus} \rightarrow 18m_{\oplus}$ y

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

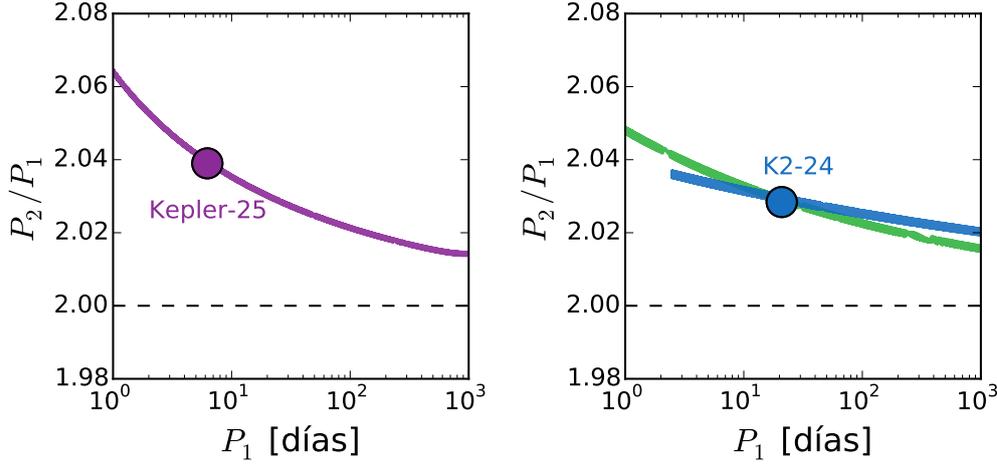


Figura 6.15: **Izq.:** Desplazamiento resonante resultante de una simulación de N-cuerpos de un sistema de dos planetas similar a Kepler-25. Las masas planetarias adoptadas para la simulación fueron $m_1 = 8,83m_\oplus$ y $m_2 = 14,3m_\oplus$. El índice de forma del disco fue tomado igual a $f = 0,25$. El círculo púrpura muestra el valor actual para el sistema real. **Der.:** Resultados de dos simulaciones similares para el sistema K2-24. Para la curva verde asumimos $f = 0,25$ y las masas iguales a $m_1 = 18m_\oplus$ y $m_2 = 31m_\oplus$. La curva azul corresponde a $f = 0,15$ y masas $m_1 = 20m_\oplus$ y $m_2 = 27m_\oplus$.

$m_2 : 27m_\oplus \rightarrow 31m_\oplus$ (ver curva verde), ya que se requería una relación de masa mayor m_2/m_1 para ajustar el valor correcto de $\Delta_{2/1}$. También se puede lograr un resultado igualmente bueno modificando el índice de forma. La curva azul muestra resultados en el caso de $f = 0,15$ y masas planetarias muy cercanas a los valores nominales. Por consiguiente, los desplazamientos de resonancia tanto de Kepler-25 como de K2-24, aunque significativamente grandes en valor, se pueden explicar adecuadamente con nuestro modelo sin requerir efectos adicionales ad-hoc.

Ahora bien, siguiendo nuestro modelo propuesto en este trabajo y dado que el valor del desplazamiento de resonancia es conocido, podemos invertir la ecuación (6.18) para obtener explícitamente el valor de h_0 como función de las masas y el índice de forma del disco:

$$h_0^2 = \frac{2}{D\Delta_{\text{obs}}^2} \left(C_1 \frac{m_2}{m_0} \right)^2 \frac{\left[(1 - D(1 + \beta')) \mathcal{K}_2^* \left(C_2 \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + (B + D\beta') \mathcal{K}_1^* \left(\frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right) \right]}{1 - \left(\frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right)}, \quad (6.22)$$

donde Δ_{obs} es el valor observado del desplazamiento y $\mathcal{K}_i^* = 0,78(Q_a/Q_e)a_i^{-2f}$ son expresiones normalizadas a h_0 para los factores K de cada planeta. Si las masas planetarias son conocidas con alguna precisión, entonces es posible estimar relaciones entre f y h_0 conduciendo a valores observados del desplazamiento. Dado que las incertidumbres en estos valores pueden ser significativas, se optó por un enfoque estadístico Monte Carlo incorporando los errores en las masas en

6.4 Aplicación a sistemas individuales

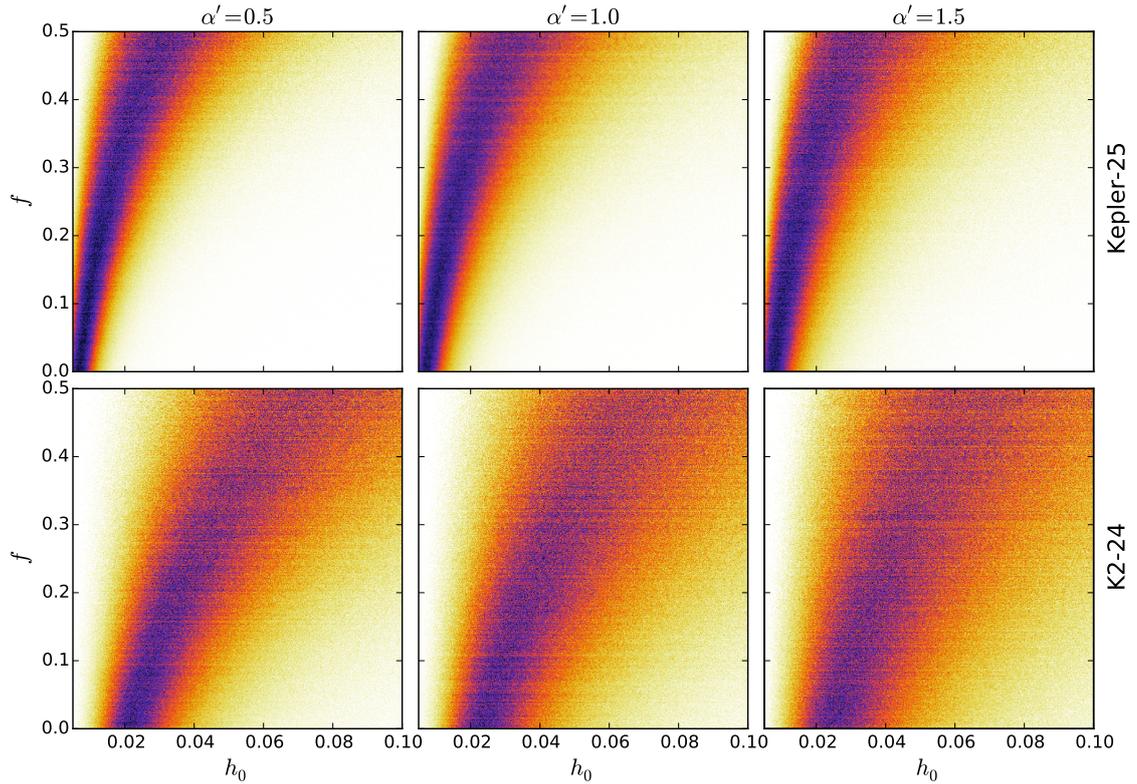


Figura 6.16: Resultados de simulaciones de Monte Carlo para Kepler-25 (arriba) y K2-24 (abajo) para diferentes valores de la potencia de la densidad superficial. Los gráficos de la izquierda mostramos con $\alpha' = 0,5$, al medio con $\alpha' = 1,0$, mientras que a la derecha con $\alpha' = 1,5$. El color negro indica mejores pares posibles de (h_0, f) para un $\Delta_{2/1}$ observado que los valores blancos, mientras que el color rojo representan la mitad de las posibilidades.

el cálculo tal como hicimos en el apartado anterior.

Para cada sistema ejecutamos una serie de 1000 conjuntos de (m_1, m_2) de una distribución normal con media y varianza como se muestra en la tabla 6.3. A partir de los valores de cada ejecución, se determinó la distribución de los valores de (h_0, f) de acuerdo con (6.22), para valores fijos de α' . Los resultados se muestran en escalas de color en la figura 6.16, donde los paneles superior (inferior) corresponden a Kepler-25 (K2-24), respectivamente. Los gráficos de la izquierda asumen $\alpha' = 0,5$, del medio $\alpha' = 1,0$ y de la derecha son los resultados obtenidos considerando $\alpha' = 1,5$. Como se puede observar, los resultados parecen ser débilmente dependientes del perfil de densidad superficial. El código de color corresponde a la posibilidad de que un par (h_0, f) sea una solución de la ecuación (6.22). Los colores blancos significan bajas posibilidades, mientras que el azul se asocia a una mayor posibilidad en los resultados. Las posibilidades más probables toman valores de 0.9 a 1, mientras que las menos probables toman valores de 0 a 0.1.

Para Kepler-25, la mayoría de los resultados positivos se producen a lo largo de una curva ancha con valores bajos de h_0 y valores grandes del índice de forma del disco f . Esto es consistente con las simulaciones de Monte Carlo presenta-

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

das en en la sección anterior para la población casi resonante global y sistemas con masas subdeterminadas. Observar que la gran incertidumbre en m_1 no afecta significativamente al resultado y a los valores de (h_0, f) consistentes con el desplazamiento observado permanecen bastante restringidos.

Los resultados para K2-24 aparecen menos definidos lo que implica que una amplia gama de parámetros del disco conduciría al desplazamiento de resonancia observada. En parte, esto se debe al valor menor, y más fácilmente alcanzado, de $\Delta_{2/1}$ pero también a las masas planetarias particulares. Por un lado, las masas individuales son más grandes que para Kepler-25, lo que en sí conduce a un dominio de resonancia más amplio. Por otra parte, la relación de m_2/m_1 es casi la unidad que, como se ve de la ecuación (6.18) también implica un desplazamiento mayor incluso para valores de índice de forma bajos y/o grandes h_0 .

6.5. Conclusiones

La interacción gravitatoria entre los planetas y su disco protoplanetario desempeña un papel prominente en la evolución orbital temprana de los sistemas planetarios. Las interacciones planeta-disco normalmente excitan la excentricidad y la inclinación, pero pueden conducir a una migración interna o externa dependiendo de la masa del planeta y, fundamentalmente, de las propiedades físicas del disco cerca del planeta (perfiles radiales de la densidad y temperatura del disco). Si bien en los últimos años se han logrado enormes progresos en la comprensión de la física de la migración planetaria, especialmente de los planetas de baja masa, los escenarios predictivos de la migración planetaria requieren un mayor conocimiento de los discos protoplanetarios en las regiones de formación de los planetas. La búsqueda de observaciones detalladas de discos protoplanetarios, así como de modelos integrales de la dinámica de dichos discos, ayudará a que las teorías de la migración del disco sean mejores.

En este capítulo hemos presentado un modelo muy simple para el desplazamiento de resonancia $\Delta_{(p+1)/p}$ generado por la migración de Tipo I en un disco acampanado y aplicable a las resonancias de primer orden. Describimos la migración planetaria usando prescripciones analíticas con factores de corrección que fueron ajustados con simulaciones hidrodinámicas de sistemas resonantes de dos planetas. También incluimos la evolución orbital post-formación a partir de los efectos de las mareas, tanto en los cuerpos estelares como planetarios.

Encontramos que la distribución observada de los sistemas exoplanetarios en las proximidades de la resonancia 2 : 1 presenta evidencia convincente de un aumento en el valor de $\Delta_{2/1}$ más cerca de la estrella central. Los pares planetarios cerca de la resonancia 3 : 2 muestran una dependencia mucho más débil y distancias mucho menores para todas las distancias. Nuestro modelo reproduce adecuadamente ambas propiedades y la distribución general de los sistemas casi resonantes es coherente con la migración suave en un delgado disco laminar

6.5 Conclusiones

acampanado con un índice de forma significativa (tal vez hasta $f \sim 0,25$) y discos muy delgados ($h_0 \sim 0,03$).

Hemos confirmado nuestro modelo analítico con simulaciones N-cuerpos y hidrodinámicas en el rango de masas de la Tierra a Neptuno. No obstante, la validación de este modelo resultó difícil ya que la mayoría de los sistemas observados carecen de estimaciones confiables de las masas planetarias. Sin embargo, en la mayoría de los casos las simulaciones de Monte Carlo con una relación empírica actualizada de razón de masa y valores aleatorios para los parámetros de disco, llevaron a distribuciones de los desplazamientos de resonancia similares a los valores observados. Aunque algunos casos no fueron adecuadamente explicados, lo que indica que nuestro modelo es aún insuficiente, pudimos reproducir valores de $\Delta_{(p+1)/p}$ que eran al menos cualitativamente similares y, en algunos casos, muy cercanos a las magnitudes detectadas.

Encontramos que los grandes desplazamientos, incluso del orden de $\Delta_{2/1} \simeq 0,1$, todavía están asociados con la libración de uno o ambos argumentos críticos. Sin un modelo de resonancia más sofisticado no podemos decir si esta libración es dinámica (es decir, dentro de la separatriz) o cinemática (es decir, fuera del dominio de resonancia principal). Sin embargo, es posible que varios de estos sistemas casi resonantes puedan ser resonantes después de todo.

Finalmente, presentamos una aplicación explícita de nuestro modelo para el desplazamiento de resonancia a sistemas planetarios con pares de planetas casi resonantes que poseen masas planetarias determinadas. Encontramos que los parámetros del disco necesarios para explicar los desplazamientos de resonancia bajo una migración laminar de tipo I son similares a los encontrados en el estudio estadístico hecho anteriormente para muchos más de estos sistemas. Este acuerdo indica que el mecanismo propuesto podría haber desempeñado un papel dominante en la determinación de la distribución observada de los exoplanetas casi resonantes.

6. Migración planetaria y exoplanetas observables

Conclusiones y perspectivas

En este capítulo final haremos un resumen de los resultados generales desarrollados a lo largo de esta Tesis. También, discutiremos ciertas líneas de trabajo que pretendemos continuar a nuestro estudio acerca de la evolución y formación de los sistemas planetarios.

7.1. Conclusiones

Los sistemas planetarios compuestos por varios planetas han sido objeto de estudio de muchos trabajos en años recientes. La gran cantidad de datos observacionales de sistemas exoplanetarios múltiples resonantes han hecho retomar su atención a la gran parte de la comunidad científica, siendo abordados por diferentes frentes no triviales.

Que dos cuerpos posean períodos orbitales exactamente conmensurables, es decir, que guarden una relación sencilla como $2 : 1$, puede parecer un caso improbable. Sin embargo, hemos demostrado que parece ser más común de lo pensado. Quizás esto se pueda entender porque algunas configuraciones resonantes son muy estables generando una acumulación de objetos evolucionando en este tipo de movimientos. Podemos decir que las resonancias generan cierta atracción o fuerza de estados no resonantes hacia estados resonantes. De hecho en nuestro sistema planetario existen muchos cuerpos menores que evolucionan la mayor parte de su tiempo saltando de resonancia en resonancia.

Por lo dicho anteriormente, podemos decir que nuestra preferencia en el estudio de la dinámica orbital de sistemas resonantes compuestos por dos planetas no es casual. La dinámica resonante nos da las claves para resolver la compleja topología presente en estos sistemas, además de guiarnos a sus regiones de estabilidad.

A partir de la formulación Hamiltoniana hemos podido caracterizar la base de nuestro problema de interés, sin perder la generalidad, a través del Hamilto-

7. Conclusiones y perspectivas

niano resonante reducido equivalente a su par en el SMFR. En los capítulos 3 y 4 hicimos un exhaustivo estudio de la dinámica orbital del P3CR. Nuestro objetivo fue estudiar la estabilidad de las configuraciones resonantes o casi resonantes de estos sistemas. Presentamos un nuevo criterio de superposición de resonancias utilizando resonancias de movimientos medios de primer y segundo orden, debido principalmente a que la separatriz externa no aparece para el movimiento casi-circular. Demostramos que los criterios de estabilidad dados por Hill o por la superposición de resonancias no pueden ser tomados individualmente sino que son complementarios. Mientras que el criterio de estabilidad de Hill define el valor máximo del semieje mayor para una excentricidad dada, para el cual todas las condiciones iniciales son estables, el criterio de superposición de resonancias define un límite inferior para estimar el semieje mayor mínimo para el cual todas las condiciones iniciales serán inestables.

Para definir los criterios de estabilidad hemos hecho por primera vez mapas dinámicos de muy alta resolución, en donde se puede observar que el tamaño de la región de transición crece a medida que la excentricidad del cuerpo perturbado crece. Esta región de transición es la definida por el límite superior dado por Hill y el inferior dado por la superposición de resonancias y está caracterizado por una riqueza de movimiento estable e inestable.

Con el fin de extender la investigación inicial, y para avanzar en nuestra comprensión de cómo y cuándo los sistemas planetarios llegan (o no) a configuraciones estables, en los capítulos 5 y 6 nos enfocamos en estudiar cómo los sistemas de dos planetas evolucionan dinámicamente. Más exactamente, hemos estado investigando posibles configuraciones bajo los efectos de la migración, cuando ambos planetas están embebidos en un disco protoplanetario. Realizamos simulaciones de N-cuerpos y hidrodinámicas para estudiar las posibles configuraciones resonantes logradas por el sistema real. Para ello, necesitamos que las simulaciones hidrodinámicas cumplan con dos requisitos: (i) seguir el decaimiento orbital de los planetas desde regiones lejanas a cercanas de la estrella principal, y (ii) proporcionar suficiente tiempo para que actúe la dinámica resonante. Decimos entonces que las simulaciones no sólo deben ser a gran escala sino también a largo plazo. Para cumplir ambos requisitos, desarrollamos un nuevo método para realizar simulaciones hidrodinámicas a largo plazo y de largo alcance de planetas que migran embebidos en discos gaseosos. Esto consiste en una técnica de reasignación donde las cantidades hidrodinámicas primitivas son remapeadas en una nueva malla, y así, el disco evoluciona junto con los planetas que migran en su interior. El método de remapeo nos permitió reducir drásticamente el costo de cálculo de las simulaciones hidrodinámicas.

Uno de los principales resultados que obtuvimos de las simulaciones hidrodinámicas en sistemas que migran en discos acampanados es que la configuración de este disco puede llegar a explicar la asimetría observada en los sistemas Kepler. Debido a que necesitamos explorar de forma sistemática nuestro espacio

de parámetros y que nuestro método de remapeo aún sigue siendo muy costoso computacionalmente es que decidimos desarrollar un modelo analítico simple para corroborarlos con simulaciones numéricas mucho más rápidas. Entonces, por esto, en el capítulo 6 desarrollamos un modelo analítico que explica la dinámica casi resonante observada en muchos sistemas exoplanetarios de Kepler que migran en discos protoplanetarios delgados y acampanados, logrando una aplicación impecable a algunos sistemas observados.

7.2. Perspectivas

El desarrollo del método de remapeo nos dió una herramienta invaluable a nivel internacional para el estudio completo de la formación y evolución de los sistemas planetarios múltiples. Es por este motivo que es una herramienta para seguir explotando desde varias perspectivas.

En primer lugar, y luego de las respectivas pruebas de convergencia, su aplicación a sistemas planetarios observables de Kepler. Una primera simulación al sistema Kepler-31 compuesto por tres planetas nos dió una primera aproximación que vamos por un excelente camino. Hemos logrado obtener la configuración resonante de Laplace que se observa entre sus planetas. Es decir que nuestras simulaciones hidrodinámicas a largo plazo espacial y temporal son válidas.

En segundo lugar, el método de remapeo nos permite estudiar la migración a gran escala y a largo plazo por tiempos comparables al tiempo de formación de los planetas. Al considerar estas grandes escalas temporales y espaciales, es obligatorio incluir modelos autoconsistentes para la estructura del disco y su evolución temporal. La mayoría de los trabajos que se han hecho hasta ahora utilizan tiempos de amortiguación de la excentricidad y de migración orbital que vienen de estudios de planeta único. Es evidente que necesitamos una teoría de la migración de los sistemas multi-planetarios para comprender mejor las observaciones. Nuestras simulaciones hidrodinámicas indican que múltiples planetas afectan la evolución de la migración y diferentes desplazamientos de resonancia. Sin embargo, no está claro si ésto se debe sólo a la interacción gravitatoria entre los planetas o también existe una competencia entre ondas de densidad primaria y secundaria. Por lo que estudiaremos el efecto de las ondas espirales en las diferentes arquitecturas resonantes de los sistemas planetarios.

En tercer lugar, y como complemento de lo descrito en el párrafo anterior, incluiremos modelos de discos más realistas para el índice de forma del disco tal como los propuestos por [Bitsch *et al.* \(2013\)](#); [Brasser *et al.* \(2017\)](#).

En cuarto lugar, dado que tenemos una herramienta que nos permite realizar simulaciones hidrodinámicas con múltiples planetas, en especial más de dos, necesitamos complementarla con un estudio analítico de su estabilidad, su caoticidad y si es que existe de su difusión. Por este motivo, el año pasado comenzamos una colaboración con el grupo de Dinámica de Sistemas Estelares de la Facultad

7. Conclusiones y perspectivas

de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de La Plata para llevar a cabo este objetivo.

Bibliografía

- Armitage, P. J. (2010). *Astrophysics of Planet Formation*.
- Artymowicz, P. (1993). On the Wave Excitation and a Generalized Torque Formula for Lindblad Resonances Excited by External Potential. *ApJ*, 419:155.
- Bai, X.-N. (2015). Hall Effect Controlled Gas Dynamics in Protoplanetary Disks. II. Full 3D Simulations toward the Outer Disk. *ApJ*, 798:84.
- Baluev, R. V. (2011). Orbital structure of the GJ876 extrasolar planetary system based on the latest Keck and HARPS radial velocity data. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111:235–266.
- Baluev, R. V. y Beaugé, C. (2014). Possible solution to the riddle of HD 82943 multiplanet system: the three-planet resonance 1:2:5? *MNRAS*, 439:673–689.
- Baruteau, C., Bai, X., Mordasini, C., y Mollière, P. (2016). Formation, Orbital and Internal Evolutions of Young Planetary Systems. *Space Sci. Rev.*, 205:77–124.
- Baruteau, C., Crida, A., Paardekooper, S.-J., Masset, F., Guilet, J., Bitsch, B., Nelson, R., Kley, W., y Papaloizou, J. (2014). Planet-Disk Interactions and Early Evolution of Planetary Systems. *Protostars and Planets VI*, pp. 667–689.
- Baruteau, C. y Masset, F. (2008a). On the Corotation Torque in a Radiatively Inefficient Disk. *ApJ*, 672:1054–1067.
- Baruteau, C. y Masset, F. (2008b). Type I Planetary Migration in a Self-Gravitating Disk. *ApJ*, 678:483–497.
- Baruteau, C. y Papaloizou, J. C. B. (2013). Disk-Planets Interactions and the Diversity of Period Ratios in Kepler’s Multi-planetary Systems. *ApJ*, 778:7.
- Batygin, K., Deck, K. M., y Holman, M. J. (2015). Dynamical Evolution of Multi-resonant Systems: The Case of GJ876. *AJ*, 149:167.
- Batygin, K. y Morbidelli, A. (2013a). Analytical treatment of planetary resonances. *A&A*, 556:A28.

7. Bibliografía

- Batygin, K. y Morbidelli, A. (2013b). Dissipative Divergence of Resonant Orbits. *AJ*, 145:1.
- Beauge, C. (1994). Asymmetric liberations in exterior resonances. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 60:225–248.
- Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., y Michtchenko, T. A. (2003). Extrasolar Planets in Mean-Motion Resonance: Apses Alignment and Asymmetric Stationary Solutions. *ApJ*, 593:1124–1133.
- Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., y Michtchenko, T. A. (2007). *Planetary Masses and Orbital Parameters from Radial Velocity Measurements*, p. 1.
- Beaugé, C., Michtchenko, T. A., y Ferraz-Mello, S. (2006). Planetary migration and extrasolar planets in the 2/1 mean-motion resonance. *MNRAS*, 365:1160–1170.
- Benítez-Llambay, P. (2015). *Interacciones Planeta-Disco. Desarrollo y utilización de un código numérico*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba.
- Benítez-Llambay, P., Masset, F., y Beaugé, C. (2011). The mass-period distribution of close-in exoplanets. *A&A*, 528:A2.
- Benítez-Llambay, P. y Masset, F. S. (2016). FARGO3D: A New GPU-oriented MHD Code. *ApJS*, 223:11.
- Benítez-Llambay, P., Ramos, X. S., Beaugé, C., y Masset, F. S. (2016). Long-term and Large-scale Hydrodynamical Simulations of Migrating Planets. *ApJ*, 826:13.
- Bitsch, B., Crida, A., Morbidelli, A., Kley, W., y Dobbs-Dixon, I. (2013). Stellar irradiated discs and implications on migration of embedded planets. I. Equilibrium discs. *A&A*, 549:A124.
- Bodman, E. H. L. y Quillen, A. C. (2014). Stability boundaries for resonant migrating planet pairs. *MNRAS*, 440:1753–1762.
- Borucki, W. J. (2017). Kepler: A Brief Discussion of the Mission and Exoplanet Results. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 161:38–65.
- Brasser, R., Bitsch, B., y Matsumura, S. (2017). Saving Super-Earths: Interplay between Pebble Accretion and Type I Migration. *AJ*, 153:222.
- Brouwer, D. y Clemence, G. M. (1961). *Methods of celestial mechanics*.
- Brown, T. M. (2003). Expected Detection and False Alarm Rates for Transiting Jovian Planets. *ApJ*, 593:L125–L128.

- Charalambous, C., Ramos, X. S., Benítez-Llambay, P., y Beaugé, C. (2017). Orbital migration and resonance offset of the kepler-25 and k2-24 systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 911(1):012027.
- Chirikov, B. V. (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5):263 – 379.
- Correia, A. C. M., Udry, S., Mayor, M., Benz, W., Bertaux, J.-L., Bouchy, F., Laskar, J., Lovis, C., Mordasini, C., Pepe, F., y Queloz, D. (2009). The HARPS search for southern extra-solar planets. XVI. HD 45364, a pair of planets in a 3:2 mean motion resonance. *A&A*, 496:521–526.
- Correia, A. C. M., Udry, S., Mayor, M., Laskar, J., Naef, D., Pepe, F., Queloz, D., y Santos, N. C. (2005). The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XIII. A pair of planets around HD202206 or a circumbinary planet? *A&A*, 440:751–758.
- Cresswell, P. y Nelson, R. P. (2006). On the evolution of multiple protoplanets embedded in a protostellar disc. *A&A*, 450:833–853.
- Cresswell, P. y Nelson, R. P. (2008). Three-dimensional simulations of multiple protoplanets embedded in a protostellar disc. *A&A*, 482:677–690.
- Crida, A., Masset, F., y Morbidelli, A. (2009). Long Range Outward Migration of Giant Planets, with Application to Fomalhaut b. *ApJ*, 705:L148–L152.
- Crida, A., Morbidelli, A., y Masset, F. (2007). Simulating planet migration in globally evolving disks. *A&A*, 461:1173–1183.
- D’Angelo, G. y Lubow, S. H. (2010). Three-dimensional Disk-Planet Torques in a Locally Isothermal Disk. *ApJ*, 724:730–747.
- de Val-Borro, M., Edgar, R. G., Artymowicz, P., Cieliegi, P., Cresswell, P., D’Angelo, G., Delgado-Donate, E. J., Dirksen, G., Fromang, S., Gawryszczak, A., Klahr, H., Kley, W., Lyra, W., Masset, F., Mellema, G., Nelson, R. P., Paardekooper, S.-J., Peplinski, A., Pierens, A., Plewa, T., Rice, K., Schäfer, C., y Speith, R. (2006). A comparative study of disc-planet interaction. *MNRAS*, 370:529–558.
- Deck, K. M. y Batygin, K. (2015). Migration of Two Massive Planets into (and out of) First Order Mean Motion Resonances. *ApJ*, 810:119.
- Deck, K. M., Payne, M., y Holman, M. J. (2013). First-order Resonance Overlap and the Stability of Close Two-planet Systems. *ApJ*, 774:129.
- Delisle, J.-B. y Laskar, J. (2014). Tidal dissipation and the formation of Kepler near-resonant planets. *A&A*, 570:L7.

7. Bibliografía

- Duncan, M., Quinn, T., y Tremaine, S. (1989). The long-term evolution of orbits in the solar system - A mapping approach. *Icarus*, 82:402–418.
- Dvorak, R., Pilat-Lohinger, E., Schwarz, R., y Freistetter, F. (2004). Extrasolar Trojan planets close to habitable zones. *A&A*, 426:L37–L40.
- Fabrycky, D. C., Lissauer, J. J., Ragozzine, D., Rowe, J. F., Steffen, J. H., Agol, E., Barclay, T., Batalha, N., Borucki, W., Ciardi, D. R., Ford, E. B., Gautier, T. N., Geary, J. C., Holman, M. J., Jenkins, J. M., Li, J., Morehead, R. C., Morris, R. L., Shporer, A., Smith, J. C., Still, M., y Van Cleve, J. (2014). Architecture of Kepler’s Multi-transiting Systems. II. New Investigations with Twice as Many Candidates. *ApJ*, 790:146.
- Ferraz-Mello, S. (1979). *Dynamics of the Galilean satellites - an introductory treatise*.
- Ferraz-Mello, S. (1987). Expansion of the disturbing force-function for the study of high-eccentricity librations. *A&A*, 183:397–402.
- Ferraz-Mello, S. (1988). The high-eccentricity libration of the Hildas. *AJ*, 96:400–408.
- Ferraz-Mello, S., editor (2007). *Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance*, volumen 345 de *Astrophysics and Space Science Library*.
- Ferraz-Mello, S., Beaugé, C., y Michtchenko, T. A. (2011). *Extra-solar multiplanet systems*, p. 211. CRC Press.
- Ferraz-Mello, S., Beaugé, C., y Michtchenko, T. A. (2003). Evolution of Migrating Planet Pairs in Resonance. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 87:99–112.
- Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., Beaugé, C., y Callegari, N. (2005). Extrasolar Planetary Systems. En Dvorak, R., Freistetter, F., y Kurths, J., editores, *Chaos and Stability in Planetary Systems*, volumen 683 de *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, pp. 219–271.
- Fischer, D. A., Howard, A. W., Laughlin, G. P., Macintosh, B., Mahadevan, S., Sahlmann, J., y Yee, J. C. (2014). Exoplanet Detection Techniques. *Protostars and Planets VI*, pp. 715–737.
- Ford, E. B. (2014). Architectures of planetary systems and implications for their formation. *Proceedings of the National Academy of Science*, 111:12616–12621.
- Giguere, M. J., Fischer, D. A., Payne, M. J., Brewer, J. M., Johnson, J. A., Howard, A. W., y Isaacson, H. T. (2015). Newly Discovered Planets Orbiting HD 5319, HD 11506, HD 75784 and HD 10442 from the N2K Consortium. *ApJ*, 799:89.

- Gillon, M., Triaud, A. H. M. J., Demory, B.-O., Jehin, E., Agol, E., Deck, K. M., Lederer, S. M., de Wit, J., Burdanov, A., Ingalls, J. G., Bolmont, E., Leconte, J., Raymond, S. N., Selsis, F., Turbet, M., Barkaoui, K., Burgasser, A., Burleigh, M. R., Carey, S. J., Chaushev, A., Copperwheat, C. M., Delrez, L., Fernandes, C. S., Holdsworth, D. L., Kotze, E. J., Van Grootel, V., Almléay, Y., Benkhaldoun, Z., Magain, P., y Queloz, D. (2017). Seven temperate terrestrial planets around the nearby ultracool dwarf star TRAPPIST-1. *Nature*, 542:456–460.
- Gladman, B. (1993). Dynamics of systems of two close planets. *Icarus*, 106:247.
- Goldreich, P. y Schlichting, H. E. (2014). Overstable Librations can Account for the Paucity of Mean Motion Resonances among Exoplanet Pairs. *AJ*, 147:32.
- Goldreich, P. y Tremaine, S. (1979). The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential. *ApJ*, 233:857–871.
- Goldreich, P. y Tremaine, S. (1980). Disk-satellite interactions. *ApJ*, 241:425–441.
- Golubev, V. G. (1968). Hill Stability in the Unrestricted Three-Body Problem. *Soviet Physics Doklady*, 13:373.
- Goździewski, K. y Migaszewski, C. (2014). Multiple mean motion resonances in the HR 8799 planetary system. *MNRAS*, 440:3140–3171.
- Gressel, O., Turner, N. J., Nelson, R. P., y McNally, C. P. (2015). Global Simulations of Protoplanetary Disks With Ohmic Resistivity and Ambipolar Diffusion. *ApJ*, 801:84.
- Hansen, B. M. S. y Murray, N. (2013). Testing in Situ Assembly with the Kepler Planet Candidate Sample. *ApJ*, 775:53.
- Hayashi, C. (1981). Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 70:35–53.
- Henrard, J. y Lemaître, A. (1983). A second fundamental model for resonance. *Celestial Mechanics*, 30:197–218.
- Henrard, J., Milani, A., Murray, C. D., y Lemaître, A. (1986). The reducing transformation and apocentric librators. *Celestial Mechanics*, 38:335–344.
- Hill, G. (1878). Collected mathematical works iii. *Am. J. Math*, 1:129–147.
- Hori, G. (1966). Theory of General Perturbation with Unspecified Canonical Variable. *PASJ*, 18:287.

7. Bibliografía

- Howard, A. W., Marcy, G. W., Johnson, J. A., Fischer, D. A., Wright, J. T., Isaacson, H., Valenti, J. A., Anderson, J., Lin, D. N. C., y Ida, S. (2010). The Occurrence and Mass Distribution of Close-in Super-Earths, Neptunes, and Jupiters. *Science*, 330:653.
- Johnson, M. C., Endl, M., Cochran, W. D., Meschiari, S., Robertson, P., MacQueen, P. J., Brugamy, E. J., Caldwell, C., Hatzes, A. P., Ramírez, I., y Wittenmyer, R. A. (2016). A 12-Year Activity Cycle for HD 219134. *ArXiv e-prints*.
- Lainey, V. (2016). Quantification of tidal parameters from Solar System data. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 126:145–156.
- Laskar, J. y Correia, A. C. M. (2009). HD 60532, a planetary system in a 3:1 mean motion resonance. *A&A*, 496:L5–L8.
- Laughlin, G., Butler, R. P., Fischer, D. A., Marcy, G. W., Vogt, S. S., y Wolf, A. S. (2005). The GJ 876 Planetary System: A Progress Report. *ApJ*, 622:1182–1190.
- Lee, M. H. (2004). Diversity and Origin of 2:1 Orbital Resonances in Extrasolar Planetary Systems. *ApJ*, 611:517–527.
- Lee, M. H., Butler, R. P., Fischer, D. A., Marcy, G. W., y Vogt, S. S. (2006). On the 2:1 orbital resonance in the hd 82943 planetary system. *The Astrophysical Journal*, 641(2):1178.
- Lee, M. H., Fabrycky, D., y Lin, D. N. C. (2013). Are the Kepler Near-resonance Planet Pairs due to Tidal Dissipation? *ApJ*, 774:52.
- Lee, M. H. y Peale, S. J. (2002). Dynamics and Origin of the 2:1 Orbital Resonances of the GJ 876 Planets. *ApJ*, 567:596–609.
- Lee, M. H. y Peale, S. J. (2003). Secular Evolution of Hierarchical Planetary Systems. *ApJ*, 592:1201–1216.
- Lin, D. N. C. y Papaloizou, J. (1979). Tidal torques on accretion discs in binary systems with extreme mass ratios. *MNRAS*, 186:799–812.
- Lissauer, J. J., Dawson, R. I., y Tremaine, S. (2014a). Advances in exoplanet science from Kepler. *Nature*, 513:336–344.
- Lissauer, J. J., Marcy, G. W., Bryson, S. T., Rowe, J. F., Jontof-Hutter, D., Agol, E., Borucki, W. J., Carter, J. A., Ford, E. B., Gilliland, R. L., Kolbl, R., Star, K. M., Steffen, J. H., y Torres, G. (2014b). Validation of Kepler’s Multiple Planet Candidates. II. Refined Statistical Framework and Descriptions of Systems of Special Interest. *ApJ*, 784:44.

- Lissauer, J. J., Marcy, G. W., Rowe, J. F., Bryson, S. T., Adams, E., Buchhave, L. A., Ciardi, D. R., Cochran, W. D., Fabrycky, D. C., Ford, E. B., Fressin, F., Geary, J., Gilliland, R. L., Holman, M. J., Howell, S. B., Jenkins, J. M., Kinemuchi, K., Koch, D. G., Morehead, R. C., Ragozzine, D., Seader, S. E., Tanenbaum, P. G., Torres, G., y Twicken, J. D. (2012). Almost All of Kepler's Multiple-planet Candidates Are Planets. *ApJ*, 750:112.
- Lissauer, J. J., Ragozzine, D., Fabrycky, D. C., Steffen, J. H., Ford, E. B., Jenkins, J. M., Shporer, A., Holman, M. J., Rowe, J. F., Quintana, E. V., Batalha, N. M., Borucki, W. J., Bryson, S. T., Caldwell, D. A., Carter, J. A., Ciardi, D., Dunham, E. W., Fortney, J. J., Gautier, III, T. N., Howell, S. B., Koch, D. G., Latham, D. W., Marcy, G. W., Morehead, R. C., y Sasselov, D. (2011). Architecture and Dynamics of Kepler's Candidate Multiple Transiting Planet Systems. *ApJS*, 197:8.
- Lithwick, Y. y Wu, Y. (2012). Resonant Repulsion of Kepler Planet Pairs. *ApJ*, 756:L11.
- Lithwick, Y., Xie, J., y Wu, Y. (2012). Extracting Planet Mass and Eccentricity from TTV Data. *ApJ*, 761:122.
- Lovis, C. y Fischer, D. (2010). *Radial Velocity Techniques for Exoplanets*, pp. 27–53.
- Malhotra, R. (1998). Orbital Resonances and Chaos in the Solar System. En Lazzaro, D., Vieira Martins, R., Ferraz-Mello, S., y Fernandez, J., editores, *Solar System Formation and Evolution*, volumen 149 de *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, p. 37.
- Malhotra, R., Black, D., Eck, A., y Jackson, A. (1992). Resonant orbital evolution in the putative planetary system of PSR1257 + 12. *Nature*, 356:583–585.
- Marchal, C. y Bozis, G. (1982). Hill Stability and Distance Curves for the General Three-Body Problem. *Celestial Mechanics*, 26:311–333.
- Marcy, G. W. y Butler, R. P. (1998). Detection of Extrasolar Giant Planets. *ARA&A*, 36:57–98.
- Marcy, G. W., Isaacson, H., Howard, A. W., Rowe, J. F., Jenkins, J. M., Bryson, S. T., Latham, D. W., Howell, S. B., Gautier, III, T. N., Batalha, N. M., Rogers, L., Ciardi, D., Fischer, D. A., Gilliland, R. L., Kjeldsen, H., Christensen-Dalsgaard, J., Huber, D., Chaplin, W. J., Basu, S., Buchhave, L. A., Quinn, S. N., Borucki, W. J., Koch, D. G., Hunter, R., Caldwell, D. A., Van Cleve, J., Kolbl, R., Weiss, L. M., Petigura, E., Seager, S., Morton, T., Johnson, J. A., Ballard, S., Burke, C., Cochran, W. D., Endl, M., MacQueen, P., Everett, M. E., Lissauer, J. J., Ford, E. B., Torres, G., Fressin, F., Brown, T. M., Steffen, J. H., Charbonneau, D., Basri, G. S., Sasselov, D. D., Winn, J., Sanchis-Ojeda, R., Christiansen, J., Adams, E., Henze, C., Dupree, A., Fabrycky, D. C., Fortney, J. J., Tarter, J., Holman, M. J.,

7. Bibliografía

- Tenenbaum, P., Shporer, A., Lucas, P. W., Welsh, W. F., Orosz, J. A., Bedding, T. R., Campante, T. L., Davies, G. R., Elsworth, Y., Handberg, R., Hekker, S., Karoff, C., Kawaler, S. D., Lund, M. N., Lundkvist, M., Metcalfe, T. S., Miglio, A., Silva Aguirre, V., Stello, D., White, T. R., Boss, A., Devore, E., Gould, A., Prsa, A., Agol, E., Barclay, T., Coughlin, J., Brugamyer, E., Mullally, F., Quintana, E. V., Still, M., Thompson, S. E., Morrison, D., Twicken, J. D., Désert, J.-M., Carter, J., Crepp, J. R., Hébrard, G., Santerne, A., Moutou, C., Sobeck, C., Hudgins, D., Haas, M. R., Robertson, P., Lillo-Box, J., y Barrado, D. (2014). Masses, Radii, and Orbits of Small Kepler Planets: The Transition from Gaseous to Rocky Planets. *ApJS*, 210:20.
- Martí, J. G., Cincotta, P. M., y Beaugé, C. (2016). Chaotic diffusion in the Gliese-876 planetary system. *MNRAS*, 460:1094–1105.
- Martí, J. G., Giuppone, C. A., y Beaugé, C. (2013). Dynamical analysis of the Gliese-876 Laplace resonance. *MNRAS*, 433:928–934.
- Martin, R. G., Lubow, S. H., Pringle, J. E., y Wyatt, M. C. (2007). Planetary migration to large radii. *MNRAS*, 378:1589–1600.
- Masset, F. (2000). FARGO: A fast eulerian transport algorithm for differentially rotating disks. *A&AS*, 141:165–173.
- Masset, F. S. (2011). On type-I migration near opacity transitions. A generalized Lindblad torque formula for planetary population synthesis. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111:131–160.
- Mayor, M. y Queloz, D. (1995). A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378:355–359.
- McArthur, B. E., Benedict, G. F., Henry, G. W., Hatzes, A., Cochran, W. D., Harrison, T. E., Johns-Krull, C., y Nelan, E. (2014). Astrometry, Radial Velocity, and Photometry: The HD 128311 System Remixed with Data from HST, HET, and APT. *ApJ*, 795:41.
- Michtchenko, T. A., Beaugé, C., y Ferraz-Mello, S. (2008a). Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - I. Systems with a more massive outer planet. *MNRAS*, 387:747–758.
- Michtchenko, T. A., Beaugé, C., y Ferraz-Mello, S. (2008b). Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - II. Systems with a more massive inner planet. *MNRAS*, 391:215–227.
- Michtchenko, T. A. y Ferraz-Mello, S. (2001). Modeling the 5 : 2 Mean-Motion Resonance in the Jupiter-Saturn Planetary System. *Icarus*, 149:357–374.

- Migaszewski, C. (2015). On the migration of two planets in a disc and the formation of mean motion resonances. *MNRAS*, 453:1632–1643.
- Migaszewski, C. (2016). On the migration of three planets in a protoplanetary disc and the formation of chains of mean motion resonances. *MNRAS*, 458:2051–2060.
- Moons, M. y Morbidelli, A. (1993). The main mean motion commensurabilities in the planar circular and elliptic problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 57:99–108.
- Morbidelli, A. (2002). *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics*.
- Morton, T. D., Bryson, S. T., Coughlin, J. L., Rowe, J. F., Ravichandran, G., Petigura, E. A., Haas, M. R., y Batalha, N. M. (2016). False Positive Probabilities for all Kepler Objects of Interest: 1284 Newly Validated Planets and 428 Likely False Positives. *ApJ*, 822:86.
- Moser, J., editor (1973). *Stable and random motions in dynamical systems. With special emphasis on celestial mechanics*.
- Motalebi, F., Udry, S., Gillon, M., Lovis, C., Ségransan, D., Buchhave, L. A., Demory, B. O., Malavolta, L., Dressing, C. D., Sasselov, D., Rice, K., Charbonneau, D., Collier Cameron, A., Latham, D., Molinari, E., Pepe, F., Affer, L., Bonomo, A. S., Cosentino, R., Dumusque, X., Figueira, P., Fiorenzano, A. F. M., Gettel, S., Harutyunyan, A., Haywood, R. D., Johnson, J., Lopez, E., Lopez-Morales, M., Mayor, M., Micela, G., Mortier, A., Nascimbeni, V., Philips, D., Piotto, G., Pollacco, D., Queloz, D., Sozzetti, A., Vanderburg, A., y Watson, C. A. (2015). The HARPS-N Rocky Planet Search. I. HD 219134 b: A transiting rocky planet in a multi-planet system at 6.5 pc from the Sun. *A&A*, 584:A72.
- Müller, T. W. A., Kley, W., y Meru, F. (2012). Treating gravity in thin-disk simulations. *A&A*, 541:A123.
- Murray, C. D. y Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*.
- Mustill, A. J. y Wyatt, M. C. (2012). Dependence of a planet’s chaotic zone on particle eccentricity: the shape of debris disc inner edges. *MNRAS*, 419:3074–3080.
- Nelson, B. E., Robertson, P. M., Payne, M. J., Pritchard, S. M., Deck, K. M., Ford, E. B., Wright, J. T., y Isaacson, H. T. (2016). An empirically derived three-dimensional Laplace resonance in the Gliese 876 planetary system. *MNRAS*, 455:2484–2499.
- Ogihara, M., Morbidelli, A., y Guillot, T. (2015). A reassessment of the in situ formation of close-in super-Earths. *A&A*, 578:A36.

7. Bibliografía

- Ogilvie, G. I. y Lubow, S. H. (2002). On the wake generated by a planet in a disc. *MNRAS*, 330:950–954.
- Paardekooper, S.-J., Baruteau, C., Crida, A., y Kley, W. (2010). A torque formula for non-isothermal type I planetary migration - I. Unsaturated horseshoe drag. *MNRAS*, 401:1950–1964.
- Paardekooper, S.-J. y Papaloizou, J. C. B. (2008). On disc protoplanet interactions in a non-barotropic disc with thermal diffusion. *A&A*, 485:877–895.
- Paardekooper, S.-J. y Papaloizou, J. C. B. (2009). On corotation torques, horseshoe drag and the possibility of sustained stalled or outward protoplanetary migration. *MNRAS*, 394:2283–2296.
- Paardekooper, S.-J., Rein, H., y Kley, W. (2013). The formation of systems with closely spaced low-mass planets and the application to Kepler-36. *MNRAS*, 434:3018–3029.
- Papaloizou, J. C. B. (2011). Tidal interactions in multi-planet systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111:83–103.
- Papaloizou, J. C. B. y Larwood, J. D. (2000). On the orbital evolution and growth of protoplanets embedded in a gaseous disc. *MNRAS*, 315:823–833.
- Papaloizou, J. C. B. y Szuszkiewicz, E. (2005). On the migration-induced resonances in a system of two planets with masses in the Earth mass range. *MNRAS*, 363:153–176.
- Perryman, M. A. C. (2000). Extra-solar planets. *Reports on Progress in Physics*, 63:1209–1272.
- Petigura, E. A., Howard, A. W., Lopez, E. D., Deck, K. M., Fulton, B. J., Crossfield, I. J. M., Ciardi, D. R., Chiang, E., Lee, E. J., Isaacson, H., Beichman, C. A., Hansen, B. M. S., Schlieder, J. E., y Sinukoff, E. (2016). Two Transiting Low Density Sub-Saturns from K2. *ApJ*, 818:36.
- Pierens, A., Baruteau, C., y Hersant, F. (2011). On the dynamics of resonant super-Earths in disks with turbulence driven by stochastic forcing. *A&A*, 531:A5.
- Pringle, J. E. (1981). Accretion discs in astrophysics. *ARA&A*, 19:137–162.
- Quillen, A. C., Bodman, E., y Moore, A. (2013). Origin scenarios for the Kepler 36 planetary system. *MNRAS*, 435:2256–2267.
- Quillen, A. C. y Faber, P. (2006). Chaotic zone boundary for low free eccentricity particles near an eccentric planet. *MNRAS*, 373:1245–1250.

- Ramos, X. S., Charalambous, C., Benítez-Llambay, P., y Beaugé, C. (2017). Planetary migration and the origin of the 2:1 and 3:2 (near)-resonant population of close-in exoplanets. *A&A*, 602:A101.
- Ramos, X. S., Correa-Otto, J. A., y Beaugé, C. (2015). The resonance overlap and Hill stability criteria revisited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 123:453–479.
- Rasio, F. A., Nicholson, P. D., Shapiro, S. L., y Teukolsky, S. A. (1992). A observational test for the existence of a planetary system orbiting PSR1257 + 12. *Nature*, 355:325.
- Raymond, S. N. y Cossou, C. (2014). No universal minimum-mass extrasolar nebula: evidence against in situ accretion of systems of hot super-Earths. *MNRAS*, 440:L11–L15.
- Rein, H. (2012). Period ratios in multiplanetary systems discovered by Kepler are consistent with planet migration. *MNRAS*, 427:L21–L24.
- Rein, H. (2015). Reanalysis of radial velocity data from the resonant planetary system HD128311. *MNRAS*, 448:L58–L61.
- Rivera, E. J., Laughlin, G., Butler, R. P., Vogt, S. S., Haghighipour, N., y Meschiari, S. (2010). The Lick-Carnegie Exoplanet Survey: a Uranus-Mass Fourth Planet for GJ 876 in an Extrasolar Laplace Configuration. *ApJ*, 719:890–899.
- Roy, A. E. y Ovenden, M. W. (1954). On the occurrence of commensurable mean motions in the solar system. *MNRAS*, 114:232.
- Seidov, Z. F. (2004). The Roche Problem: Some Analytics. *ApJ*, 603:283–284.
- Sessin, W. y Ferraz-Mello, S. (1984). Motion of two planets with periods commensurable in the ratio 2:1 solutions of the Hori auxiliary system. *Celestial Mechanics*, 32:307–332.
- Shakura, N. I. y Sunyaev, R. A. (1973). Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24:337–355.
- Silburt, A. y Rein, H. (2015). Tides alone cannot explain Kepler planets close to 2:1 MMR. *MNRAS*, 453:4089–4096.
- Steffen, J. H. (2013). Kepler’s missing planets. *MNRAS*, 433:3246–3255.
- Szebehely, V. (1967). *Theory of orbits. The restricted problem of three bodies.*
- Tanaka, H., Takeuchi, T., y Ward, W. R. (2002). Three-Dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. I. Corotation and Lindblad Torques and Planet Migration. *ApJ*, 565:1257–1274.

7. Bibliografía

- Tanaka, H. y Ward, W. R. (2004). Three-dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. II. Eccentricity Waves and Bending Waves. *ApJ*, 602:388–395.
- Terquem, C. y Papaloizou, J. C. B. (2007). Migration and the Formation of Systems of Hot Super-Earths and Neptunes. *ApJ*, 654:1110–1120.
- Tinney, C. G., Butler, R. P., Marcy, G. W., Jones, H. R. A., Laughlin, G., Carter, B. D., Bailey, J. A., y O’Toole, S. (2006). The 2:1 Resonant Exoplanetary System Orbiting HD 73526. *ApJ*, 647:594–599.
- Vogt, S. S., Burt, J., Meschiari, S., Butler, R. P., Henry, G. W., Wang, S., Holden, B., Gapp, C., Hanson, R., Arriagada, P., Keiser, S., Teske, J., y Laughlin, G. (2015). Six Planets Orbiting HD 219134. *ApJ*, 814:12.
- Vogt, S. S., Butler, R. P., Marcy, G. W., Fischer, D. A., Henry, G. W., Laughlin, G., Wright, J. T., y Johnson, J. A. (2005). Five New Multicomponent Planetary Systems. *ApJ*, 632:638–658.
- Walker, G. H. y Ford, J. (1969). Amplitude instability and ergodic behavior for conservative nonlinear oscillator systems. *Phys. Rev.*, 188:416–432.
- Wang, S. y Ji, J. (2014). Near 3:2 and 2:1 Mean Motion Resonance Formation in the Systems Observed by Kepler. *ApJ*, 795:85.
- Ward, W. R. (1986). Density waves in the solar nebula - Differential Lindblad torque. *Icarus*, 67:164–180.
- Ward, W. R. (1997). Protoplanet Migration by Nebula Tides. *Icarus*, 126:261–281.
- Weiss, L. M. y Marcy, G. W. (2014). The Mass-Radius Relation for 65 Exoplanets Smaller than 4 Earth Radii. *ApJ*, 783:L6.
- Williams, J. P. y Cieza, L. A. (2011). Protoplanetary Disks and Their Evolution. *ARA&A*, 49:67–117.
- Winn, J. N. y Fabrycky, D. C. (2015). The Occurrence and Architecture of Exoplanetary Systems. *ARA&A*, 53:409–447.
- Wisdom, J. (1980). The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem. *AJ*, 85:1122–1133.
- Wisdom, J. (1986). Canonical solution of the two critical argument problem. *Celestial Mechanics*, 38:175–180.
- Wittenmyer, R. A., Johnson, J. A., Butler, R. P., Horner, J., Wang, L., Robertson, P., Jones, M. I., Jenkins, J. S., Brahm, R., Tinney, C. G., Mengel, M. W., y Clark, J. (2016). The Pan-Pacific Planet Search. IV. Two Super-Jupiters in a 3:5 Resonance Orbiting the Giant Star HD 33844. *ApJ*, 818:35.

- Wittenmyer, R. A., Tan, X., Lee, M. H., Horner, J., Tinney, C. G., Butler, R. P., Salter, G. S., Carter, B. D., Jones, H. R. A., O'Toole, S. J., Bailey, J., Wright, D., Crane, J. D., Schectman, S. A., Arriagada, P., Thompson, I., Minniti, D., y Diaz, M. (2014). A Detailed Analysis of the HD 73526 2:1 Resonant Planetary System. *ApJ*, 780:140.
- Wolszczan, A. y Frail, D. A. (1992). A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12. *Nature*, 355:145–147.
- Wright, J. T., Fakhouri, O., Marcy, G. W., Han, E., Feng, Y., Johnson, J. A., Howard, A. W., Fischer, D. A., Valenti, J. A., Anderson, J., y Piskunov, N. (2011). The Exoplanet Orbit Database. *PASP*, 123:412.
- Xiang-Gruess, M. y Papaloizou, J. C. B. (2015). Evolutionary outcomes for pairs of planets undergoing orbital migration and circularization: second-order resonances and observed period ratios in Kepler's planetary systems. *MNRAS*, 449:3043–3056.
- Xie, J.-W. (2014). Asymmetric Orbital Distribution near Mean Motion Resonance: Application to Planets Observed by Kepler and Radial Velocities. *ApJ*, 786:153.
- Yoder, C. F. (1973). *On the Establishment and Evolution of Orbit-Orbit Resonances*. Tesis doctoral, UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA BARBARA.