

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA y COMPUTACIÓN

- UNIVERSIDAD NACIONAL de CÓRDOBA -



El Teorema de De Rham y Aplicaciones

TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

Dahyana Eugenia Farias Uncovich

Dirigido por:

Dr. Adrián Andrada

CÓRDOBA - ARGENTINA

8 septiembre - 2017



El Teorema de De Rham y Aplicaciones por Farias Uncovich, Dahyana Eugenia se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 2.5 Argentina](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/arg/).

Clasificación

[58A12] General Theory of differential manifolds, De Rham Theory.

[14F40] (Co)homology Theory, De Rham Theory.

Palabras claves

- Simplex,
- cadena,
- cohomología singular,
- cohomología de De Rham,
- variedades.

Resumen

El famoso Teorema de De Rham establece un isomorfismo entre los grupos de cohomología de De Rham y los grupos de cohomología singular de una variedad diferenciable M . Estos pueden ser “detectados” mediante formas diferenciales. En particular, la cohomología de De Rham de una variedad diferenciable es un invariante topológico. Este teorema fue propuesto como una conjetura por Élie Cartan en un artículo de 1928, y poco después fue probado por Georges De Rham.

En este trabajo se dará una demostración de dicho teorema, estudiando todos los conceptos necesarios de topología algebraica y variedades diferenciales para que esta demostración sea autocontenida. A continuación, daremos las siguientes aplicaciones de este teorema:

1. El grado de una función.
2. Expresión integral del “linking number” de un enlace de nudos (según Gauss).
3. El invariante de Hopf para funciones diferenciables de la 3-esfera a la 2-esfera.
4. El producto triple de Massey, y aplicaciones a la teoría de variedades formales.

Se darán ejemplos con sus cálculos correspondientes.

Abstract

The famous De Rham Theorem establishes an isomorphism between De Rham cohomology groups and groups of singular cohomology of a differentiable manifold M . These can be “detected” by differential forms. In particular, the De Rham cohomology of a differentiable manifold is a topological invariant. This theorem was conjectured by Eli Cartan in 1928, and shortly after it was proved by Georges De Rham.

In this work a demonstration of this theorem will be given, as well as the necessary background of algebraic topology and differentiable manifolds for this proof to be self-contained. Next, we will give the following applications of this theorem:

1. The degree of a function.
2. Integral expression of the “linking number” of a node link (according to Gauss).
3. The Hopf invariant for differentiable functions from the 3-sphere to the 2-sphere.
4. The Massey triple product and applications to the theory of formal manifolds.

Examples will be given with their corresponding calculations.

Agradecimientos

Primero y principal a *mi familia* que me acompañó en todo momento y soportaron los vaivenes emocionales en el transcurso la carrera.

Después a *mi director* que me ayudó en todo el proceso de este trabajo, fue un placer trabajar con él ya que es una gran persona además de un gran matemático.

Al tribunal que acepto de inmediato a pesar de los contratiempos de entrega.

Luego a *mis amigos de la facultad y de la vida* que son incondicionales y pilares fundamentales, ya que están en las buenas y las malas.

A *mis profes* ya que la mayoría de ellos fueron de gran ayuda para terminar la carrera.

También al *personal de despacho de alumnos* especialmente a María José que nos soluciona cualquier problema institucional.

Por último a *FaMAF y U.N.C.* que nos brinda el espacio y material necesario para aprender de manera gratuita.

Contenidos

1	Preliminares de Topología Algebraica	3
1.1	Homología singular	3
1.1.1	Subdivisión baricéntrica y Sucesión de Mayer-Vietoris	7
1.2	Cohomología singular	14
2	Cohomología de De Rham	15
2.1	Formas Diferenciales en variedades	15
2.2	Teorema de De Rham	27
3	Aplicaciones	35
3.1	Grado de una Función	35
3.1.1	Linking Number	40
3.2	El Invariante de Hopf	44
3.3	Cohomología de De Rham de Grupos de Lie y Cocientes Compactos	50
3.4	Productos Triples de Massey	55
4	Apéndice	61
4.1	Variedades Formales	61

Capítulo 1

Preliminares de Topología Algebraica

En este capítulo recordaremos algunos resultados importantes de Topología Algebraica que serán necesarios para la demostración del Teorema de De Rham.

1.1 Homología singular

Definición 1.1.1. El n -simplex standard es el subconjunto convexo $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ que consiste de las $(n+1)$ -uplas (t_0, t_1, \dots, t_n) tales que $t_i \geq 0$, $\sum t_i = 1$. Si $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} ,

$$\Delta_n = \left\{ \sum t_i e_i \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\}.$$

Nota 1. Si $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ denota la función $\Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por $e_i \rightarrow v_i$. En particular, $[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$ es la función $\Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ tal que $e_0 \rightarrow e_0, \dots, e_{i-1} \rightarrow e_{i-1}, e_i \rightarrow e_{i+1}, \dots, e_{n-1} \rightarrow e_n$. A esta función se la denomina i -ésima cara y se la denota F_i^n .

Notemos que $F_i^n(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_{n-1}) = (t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$. Además se satisface que para $j \leq i$, $F_j^{n+1} \circ F_i^n = F_{i+1}^{n+1} \circ F_j^n$.

Definición 1.1.2. Sea X espacio topológico. Un n -simplex singular es una función continua $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$. La i -ésima cara de un n -simplex singular es la función $\sigma \circ F_i^n : \Delta_{n-1} \rightarrow X$ y que denotamos $\sigma^{(i)}$. El grupo de cadenas $\Delta_n(X)$ es el grupo abeliano libre generado por los n -simplices singulares, es decir,

$$\Delta_n(X) = \left\{ \sum m_\sigma \sigma \mid m_\sigma \in \mathbb{Z}, \sigma \text{ } n\text{-simplex} \right\}.$$

La frontera de un n -simplex σ , denotada $\partial\sigma$, será $\partial\sigma = \sum (-1)^i \sigma^{(i)} \in \Delta_{n-1}(X)$.

A los elementos de $\Delta_n(X)$, es decir $\sum_\sigma m_\sigma \sigma$, con σ n -simplex, se los denomina n -cadenas. Si $c = \sum_\sigma m_\sigma \sigma$ es una n -cadena, entonces $\partial c = \sum_\sigma m_\sigma \partial\sigma$. En particular, $\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$ es un morfismo que se denomina morfismo frontera.

Lema 1.1.3 ([2], pág. 170–171). $\partial^2 = 0$.

Definición 1.1.4. A la cadena de grupos y homomorfismos

$$\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} \Delta_i(X) \xrightarrow{\partial_i} \Delta_{i-1}(X) \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

que cumple $\partial^2 = 0$ se lo llama *complejo de cadenas*.

Nota 2. Como $\partial^2 = 0$ tenemos $\text{Im}(\partial_i) \subseteq \text{Nu}(\partial_{i-1})$.

Definición 1.1.5. Una n -cadena $c = \sum_{\sigma} m_{\sigma} \partial \sigma$ es un n -ciclo si $\partial c = 0$; es una n -frontera si $c = \partial c'$ con $c' \in \Delta_{n+1}(X)$. Al grupo de los n -ciclos se lo denota $Z_n(X)$ y al grupo de las n -fronteras se lo denota $B_n(X)$. Por lo tanto

$$Z_n(X) = \text{Nu}(\partial_n) \quad y \quad B_n(X) = \text{Im}(\partial_{n+1}).$$

Luego por la Nota 2 tenemos que $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$. Definimos

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$

y lo llamamos el n -ésimo grupo de homología singular de X .

Proposición 1.1.6 ([2], pág. 176). Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos X e Y . Entonces f induce un morfismo $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y) \forall i \geq 0$. Esta correspondencia es natural, es decir satisface

1. si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$,
2. si $X \xrightarrow{\text{id}} X$ entonces $(\text{id})_* = \text{id}$.

Corolario 1.1.7. Si X e Y son homeomorfos entonces $H_i(X)$ es isomorfo a $H_i(Y)$, $i \geq 0$.

Definición 1.1.8. Un *complejo de cadenas* C es una sucesión de grupos abelianos $\{C_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ junto con homomorfismos $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$ tales que $\partial^2 = 0$. La homología del complejo está dada por $H_n(C) = \text{Nu} \partial_n / \text{Im} \partial_{n+1}$.

Dados dos complejos de cadenas A y B , un homomorfismo de complejos es una colección de homomorfismos $\{f_p : A_p \rightarrow B_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ tales que $f_{p-1} \circ \partial_p = \partial_p \circ f_p$ para cada $p \in \mathbb{Z}$, es decir el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} A_p & \xrightarrow{\partial_p} & A_{p-1} \\ \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} \\ B_p & \xrightarrow{\partial_p} & B_{p-1} \end{array}$$

Estos morfismos f_p inducen un morfismo $f_{p*} : H_p(A) \rightarrow H_p(B)$ mediante $f_*([a]) = [f(a)]$, de manera que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ y $\text{id}_* = \text{id}$.

Supongamos ahora que $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de complejos, o sea para cada $p \in \mathbb{Z}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_p & \xrightarrow{i_p} & B_p & \xrightarrow{j_p} & C_p & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_p & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{p-1} & \xrightarrow{i_{p-1}} & B_{p-1} & \xrightarrow{j_{p-1}} & C_{p-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Se sabe que esta sucesión exacta corta de complejos induce una sucesión exacta larga de homología

$$\cdots \rightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(B) \xrightarrow{j_*} H_p(C) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(B) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

El morfismo $\partial_* : H_p(C) \rightarrow H_{p-1}(A)$ está dado por $\partial_*[c] = [a]$ donde $a = i_*^{-1} \circ \partial_* \circ j_*^{-1}(c)$ (como en el diagrama). Luego se puede probar la exactitud en cada etapa.

$$\begin{array}{ccc} & b & \xrightarrow{j_*} c \\ & \downarrow \partial_* & \\ a & \xrightarrow{i_*} & \partial b \end{array}$$

Definición 1.1.9. Sea X espacio topológico, $A \subseteq X$, un subespacio. Definimos a continuación $H_n(X, A)$, $n \geq 0$ la *homología relativa*.

Consideremos los complejos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta_n(A) & \xrightarrow{i} & \Delta_n(X) & \longrightarrow & \Delta_n(X)/\Delta_n(A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \Delta_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & \Delta_{n-1}(X) & \longrightarrow & \Delta_{n-1}(X)/\Delta_{n-1}(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La inclusión $i : A \rightarrow X$ induce $i_\Delta : \Delta_n(A) \rightarrow \Delta_n(X)$ inyectiva y de la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n(A) & \xrightarrow{i} & \Delta_n(X) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ \Delta_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & \Delta_{n-1}(X) \end{array}$$

se sigue que es posible definir $\partial : \Delta_n(X)/\Delta_n(A) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)/\Delta_{n-1}(A)$ obteniendo así un complejo $\{\Delta_n(X)/\Delta_n(A), n \geq 0\}$, que denotamos $\Delta_n(X, A)$. Más aún,

$$0 \rightarrow \Delta(A) \xrightarrow{i} \Delta(X) \xrightarrow{j} \Delta(X, A) \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos. A la homología del complejo $\Delta(X, A)$ la denotamos $\{H_n(X, A), n \geq 0\}$.

Además tenemos la siguiente sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{p-1}(X) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

Definición 1.1.10. Sea G un grupo abeliano, X un espacio topológico y consideremos el complejo $\Delta(X) \otimes G$ donde $\partial(\sigma \otimes g) = (\partial\sigma) \otimes g$.

Podemos pensar que $\Delta_n(X) \otimes G = \{\sum_{\sigma} g_{\sigma} \sigma \mid \sigma \text{ } n\text{-simplex, } g_{\sigma} \in G\}$. En general cualquiera sea el complejo $\{C_p, \partial_p \mid p \in \mathbb{Z}\}$ podemos considerar $\{C_p \otimes G, \partial_p \mid p \in \mathbb{Z}\}$.

Definimos $H_n(X; G) = H_n(\Delta(X) \otimes G)$. Dado un subespacio $A \subseteq X$, a la sucesión exacta corta de complejos $0 \rightarrow \Delta(A) \otimes G \rightarrow \Delta(X) \otimes G \rightarrow \Delta(X)/(\Delta(A) \otimes G) \rightarrow 0$ la denotaremos $0 \rightarrow \Delta(A; G) \rightarrow \Delta(X; G) \rightarrow \Delta(X, A; G) \rightarrow 0$. Si definimos $H_n(X, A; G) = H_n(\Delta(X, A; G))$ obtenemos una sucesión exacta larga de homología con coeficientes en G

$$\cdots \rightarrow H_n(A; G) \rightarrow H_n(X; G) \rightarrow H_n(X, A; G) \rightarrow H_{n-1}(X, A; G) \rightarrow \cdots$$

Definición 1.1.11. Dos funciones continuas $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ se dicen *homotópicas* (y se denota $f \cong g$) si existe $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continua tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Un espacio topológico X es *contráctil* si existe $x_0 \in X$ tal que $c_{x_0} \cong \text{id}_X$ con $c_{x_0} : X \rightarrow \{x_0\}$

Definición 1.1.12. Dos espacios topológicos X e Y se dicen *homotópicamente equivalentes* si existe $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ continuas tal que $f \circ g \cong \text{id}_Y$ $g \circ f \cong \text{id}_X$.

Nota 3. Se prueba que si X e Y son homotópicamente equivalentes entonces $H_*(X)$ es isomorfo a $H_*(Y)$, donde $H_*(X)$ denota el *-ésimo grupo de homología singular de X

Definición 1.1.13. Sean A_*, B_* complejos y $f, g : A \rightarrow B$ homomorfismos de complejos. Se dice que f y g son *homotópicamente equivalentes* como homomorfismos de complejos, que se denota $f \cong g$, si existe una sucesión de homomorfismos $D = \{D_i : A_i \rightarrow B_{i+1}\}$ tales que $\partial \circ D + D \circ \partial = f - g$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_{i+1} & \xrightarrow{\partial} & A_i & \xrightarrow{\partial} & A_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \searrow D & \downarrow f-g & \swarrow D & & & \\ \cdots & \longrightarrow & B_{i+1} & \xrightarrow{\partial} & B_i & \xrightarrow{\partial} & B_{i-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Nota 4.

1. \cong es de equivalencia,
2. $f \cong g \Rightarrow f_* = g_* : H_*(A_*) \rightarrow H_*(B_*)$.

Definición 1.1.14. Un homomorfismo de complejos $f : A_* \rightarrow B_*$ es una *equivalencia homotópica* si existe $g : B_* \rightarrow A_*$ homomorfismo de complejos tal que $f \circ g \cong \text{id}, g \circ f \cong \text{id}$.

Teorema 1.1.15. X espacio topológico contráctil. Entonces $H_i(X) = 0$, si $i \neq 0$.

A continuación seguiremos la demostración realizada por Bredon en [2].

Demostración. Sea $F : X \times I \rightarrow X$ una función continua que satisface $F(x, 0) = x$ y $F(x, 1) = x_0$ para todo $x \in X$ y cierto punto base $x_0 \in X$.

Definimos $D\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ para cada simplex singular $\sigma : \Delta_{n-1} \rightarrow X$ por

$$(D\sigma) \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \right) = F \left(\sigma \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i / \lambda) e_{i-1} \right), \lambda_0 \right),$$

donde $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ y $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 - \lambda_0$. Si $\lambda_0 = 1$ se define $(D\sigma)(e_0) = x_0$. Como D está definida en una base del grupo abeliano libre $\Delta_{n-1}(X)$, se extiende unívocamente a un homomorfismo $D : \Delta_{n-1}(X) \rightarrow \Delta_n(X)$.

Las caras de $D\sigma$ están dadas de la siguiente manera: $(D\sigma)^{(i)} = D(\sigma^{(i-1)})$ si $i > 0$ y $(D\sigma)^{(0)} = \sigma$. En efecto, para $i > 0$, $(D\sigma)^{(i)} = D\sigma \circ F_{i-1}^{n-1} : [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{n-1}] \rightarrow X$, y así

$$\begin{aligned} (D\sigma)^{(i)} (\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}) &= F(\sigma((\lambda_1/\lambda)e_0 + \dots + 0_i e_i + \dots + (\lambda_{n-1}/\lambda)e_{n-2}), \lambda_0) \\ &= (D\sigma) \circ F_{i-1}^{n-1} (\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}) \\ &= (D\sigma^{(i-1)}) (\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}). \end{aligned}$$

En el caso $i = 0$ tenemos $(D\sigma)^{(0)} = D\sigma \circ F_0^{n-1} : [e_1, \dots, e_{n-1}] \rightarrow X$

$$\begin{aligned} (D\sigma)^{(0)} (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}) &= F(\sigma((\lambda_1/\lambda)e_0 + \dots + (\lambda_{n-1}/\lambda)e_{n-2}), \lambda_0) \\ &= (D\sigma) \circ F_0^{n-1} (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}) \\ &= \sigma(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}). \end{aligned}$$

Calculemos $\partial(D\sigma)$ para $n > 1$

$$\partial(D\sigma) = (D\sigma)^{(0)} - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (D\sigma)^{(i)} = (D\sigma)^{(0)} - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j D(\sigma^{(j)}) = \sigma - D(\partial\sigma).$$

Para $n = 1$, i.e. σ es un 0-simplex, tenemos $\partial(D\sigma) = \sigma - \sigma_0$ donde $\sigma_0 : \Delta_0 \rightarrow x_0$ y $D(\partial\sigma) = 0$ por definición. Luego $\partial D + D\partial = \text{Id} - \epsilon$ donde $\epsilon : \Delta_i(X) \rightarrow \Delta_i(X)$ es $\epsilon = 0$ para $i \neq 0$ y $\epsilon(\sum n_\sigma \sigma) = (\sum n_\sigma) \sigma_0$ para $i = 0$, σ_0 es el 0-simplex x_0 . Así en homología $\text{Id} = \text{Id}_* = \epsilon_*$, que es cero en dimensiones mayores que cero. \square

1.1.1 Subdivisión baricéntrica y Sucesión de Mayer-Vietoris

Definición 1.1.16. Sea X un espacio topológico y \mathcal{U} una familia de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^\circ$. Si $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ es un n -simplex decimos que σ es un \mathcal{U} - n -simplex si $\text{Im } \sigma \subseteq U$ para algún $U \in \mathcal{U}$.

Definición 1.1.17. $\Delta_n^{\mathcal{U}}(X)$ es el subgrupo de $\Delta_n(X)$ generado por los \mathcal{U} - n -simplex.

Si $\sigma : \Delta_n \rightarrow U \in \mathcal{U}$, entonces $\sigma \circ F_i^n : \Delta_{n-1} \rightarrow X$ tiene su imagen en U . Por lo tanto sus caras son \mathcal{U} - $(n-1)$ -simplex. Entonces $\partial : \Delta_n^{\mathcal{U}} \rightarrow \Delta_{n-1}^{\mathcal{U}}$, y así obtenemos que $(\Delta_*(X), \partial)$ es un complejo de cadenas, y más aún, $\iota : \Delta_*^{\mathcal{U}} \hookrightarrow \Delta_*$ es un homomorfismo de complejos.

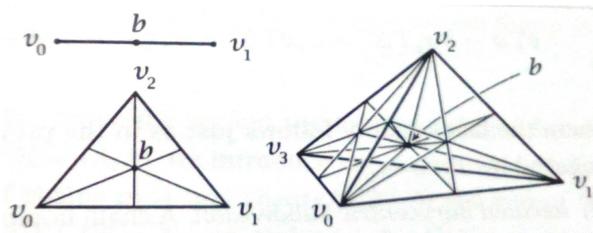
Teorema 1.1.18. *La inclusión $\iota : \Delta_n^U \hookrightarrow \Delta_n$ es una equivalencia homotópica de cadenas, i.e., existe $\rho : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_n^U$ morfismo de cadenas talque $\iota \circ \rho$ y $\rho \circ \iota$ son homotópicas a las correspondientes identidades. Por lo tanto ι induce un isomorfismo $H_n^U(X) \cong H_n(X)$.*

A continuación seguiremos la demostración realizada por Hatcher en [6].

Demostración. Para demostrar este teorema se utilizará una construcción técnica conocida como la subdivisión baricéntrica.

1. Subdivisión baricéntrica de símplices

Los puntos de un simplex $[v_0, \dots, v_n]$ son las combinaciones lineales $\sum_i t_i v_i$ tales que $\sum_i t_i = 1$ y $t_i \geq 0$ para todo i . El baricentro de un simplex $[v_0, \dots, v_n]$ es el punto $b = \sum_i t_i v_i$ cuyas “coordenadas baricéntricas” t_i son todas iguales, es decir, $t_i = 1/(n+1)$ para todo i . La subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, v_n]$ es la descomposición de $[v_0, \dots, v_n]$ en n -símplices $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$ donde, inductivamente, $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ es un $(n-1)$ -simplex en la subdivisión baricéntrica de la cara $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$. La inducción comienza con el caso $n=0$, cuando la subdivisión baricéntrica de $[v_0]$ está bien definida y es simplemente $[v_0]$. Los siguientes $n=1, 2, 3$ se muestran en la figura:



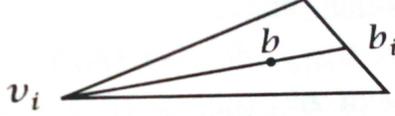
Sigue de manera inductiva de la definición que los vértices de símplices en la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, v_n]$ son exactamente los baricentros de todas las caras k -dimensionales $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ de $[v_0, \dots, v_n]$ para $0 \leq k \leq n$. Cuando $k=0$ esto da uno de los v_i originales, ya que el baricentro de un 0-simplex es él mismo. El baricentro de $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ tiene coordenadas baricéntricas $t_i = 1/(k+1)$ para $i = i_0, \dots, i_k$ y $t_i = 0$ en los otros casos.

Un hecho que necesitaremos es que el diámetro de cada simplex de la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, v_n]$ es a lo sumo el diámetro de $[v_0, \dots, v_n]$ multiplicado por $n/(n+1)$. Recordemos que el diámetro de un simplex es por definición la máxima distancia entre dos puntos, donde usamos la métrica del espacio euclidiano ambiente \mathbb{R}^m que contiene a $[v_0, \dots, v_n]$. El diámetro de un simplex es igual a la distancia máxima entre dos vértices, porque la distancia entre dos puntos v y $\sum t_i v_i$ de $[v_0, \dots, v_n]$ satisface la desigualdad

$$\left| v - \sum t_i v_i \right| = \left| \sum t_i (v - v_i) \right| \leq \sum t_i |v - v_i| \leq \sum t_i \max_i |v - v_i| = \max_i |v - v_i|.$$

Para obtener la cota $n/(n+1)$ mencionada anteriormente, debemos verificar que la distancia entre dos vértices w_j y w_k de un simplex $[w_0, \dots, w_n]$ de la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, v_n]$ es a lo sumo $n/(n+1)$ por el diámetro de $[v_0, \dots, v_n]$. Si ningún w_j ni w_k es el baricentro b de

$[v_0, \dots, v_n]$, entonces estos puntos están en una cara propia de $[v_0, \dots, v_n]$, y el resultado sigue por inducción en n . Luego, podemos suponer que el vértice w_j es el baricentro b de $[v_0, \dots, v_n]$, luego por la desigualdad anterior tenemos que w_k es un vértice v_i . Sea b_i el baricentro de $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ con coordenadas baricéntricas iguales a $1/n$ excepto para $t_i = 0$. Entonces tenemos que $b = (1/(n+1))v_i + (n/(n+1))b_i$.



La suma de los coeficientes es 1, así que b está en el segmento $[v_i, b_i]$ de v_i a b_i y la distancia de b a v_i es $n/(n+1)$ veces la longitud de $[v_i, b_i]$. Luego la distancia de b a v_i está acotada por $n/(n+1)$ veces el diámetro de $[v_0, \dots, v_n]$.

La importancia del factor $n/(n+1)$ es que al repetir la subdivisión baricéntrica podemos producir símplexes de diámetros arbitrariamente pequeños pues $(n/(n+1))^r \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Es importante notar que la cota $n/(n+1)$ no depende de la forma del símplex ya que cuando repetimos la subdivisión baricéntrica obtenemos símplexes de muchas formas diferentes.

2. Subdivisión baricéntrica de cadenas lineales

La parte principal de la prueba consistirá en construir un operador $S : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_n(X)$, llamado operador de subdivisión, y mostrar que da una homotopía de cadenas con la identidad. Primero lo construimos para el caso de cadenas lineales.

Para un conjunto convexo Y en un espacio euclideo, las funciones lineales $\Delta_n \rightarrow Y$ generan un subgrupo de $\Delta_n(Y)$ denotado $L\Delta_n(Y)$, el subgrupo de las cadenas lineales. La función borde $\partial : \Delta_n(Y) \rightarrow \Delta_{n-1}(Y)$ lleva $L\Delta_n(Y)$ a $L\Delta_{n-1}(Y)$, por lo que las cadenas lineales forman un subcomplejo del complejo de cadenas singulares de Y . Podemos designar unívocamente a una función lineal $\lambda : \Delta_n \rightarrow Y$ como $[w_0, \dots, w_n]$, donde w_i es la imagen del i -ésimo vértice de Δ_n . Para evitar tener que hacer excepciones para 0-símplexes, es conveniente extender el complejo $L\Delta(Y)$ definiendo $L\Delta_{-1}(Y) = \mathbb{Z}$ generado por el símplex $[\emptyset]$, donde $\partial[w_0] = [\emptyset]$ para todo 0-símplex $[w_0]$.

Cada punto $b \in Y$ determina un homomorfismo $b : L\Delta_n(Y) \rightarrow L\Delta_{n+1}(Y)$ definido en la base de elementos por $b([w_0, \dots, w_n]) = [b, w_0, \dots, w_n]$. Geométricamente, el homomorfismo b puede ser considerado como un operador cono, que envía una cadena lineal al cono que tiene como base dicha cadena lineal y el punto b como punta. Aplicando la fórmula usual para ∂ , obtenemos la relación

$$\partial b([w_0, \dots, w_n]) = [w_0, \dots, w_n] - b(\partial[w_0, \dots, w_n]).$$

Por linealidad tenemos que $\partial b(\alpha) = \alpha - b(\partial\alpha)$ para toda $\alpha \in L\Delta_n(Y)$. Esto puede ser reescrito como $\partial b + b\partial = \text{Id}$, es decir, b es una homotopía de cadenas entre la identidad y la función cero en $L\Delta(Y)$.

Ahora definimos un morfismo de subdivisión $S : L\Delta_n(Y) \rightarrow L\Delta_n(Y)$ por inducción en n . Sea $\lambda : \Delta_n \rightarrow Y$ un generador de $L\Delta_n(Y)$ y sea b_λ la imagen del baricentro de Δ_n por λ .

Entonces la fórmula inductiva de S es $S(\lambda) = b_\lambda(S\partial\lambda)$ donde $b_\lambda : L\Delta_{n-1}(Y) \rightarrow L\Delta_n(Y)$ es el operador como definido anteriormente. La inducción comienza con $S([\emptyset]) = [\emptyset]$, por lo que S es la identidad en $L\Delta_{-1}(Y)$. También es la identidad en $L\Delta_0(Y)$, ya que cuando $n = 0$ se tiene

$$S([w_0]) = w_0(S\partial[w_0]) = w_0(S([\emptyset])) = w_0([\emptyset]) = [w_0].$$

Cuando λ es un “embedding” con imagen un n -simplex genuino $[w_0, \dots, w_n]$ entonces $S(\lambda)$ es la suma de los n -símplices en la subdivisión baricéntrica de $[w_0, \dots, w_n]$, con ciertos signos que pueden ser calculados de forma explícita. Esto resulta de la definición inductiva de la S como así también de la definición inductiva del baricentro.

Queda chequear que la función S satisface $\partial S = S\partial$, es decir, es un morfismo de complejos de $L\Delta(Y)$ en sí mismo. Como $S = \text{Id}$ en $L\Delta_0(Y)$ y en $L\Delta_{-1}(Y)$, es claro que $\partial S = S\partial$ en $L\Delta_0(Y)$. Para $n > 0$ se puede mostrar inductivamente de la siguiente manera:

$$\partial S\lambda = \partial b_\lambda(S\partial\lambda) = S\partial\lambda - b_\lambda\partial(S\partial\lambda) = S\partial\lambda - b_\lambda S(\partial\partial\lambda) = S\partial\lambda.$$

A continuación construimos una homotopía de cadenas $T : L\Delta_n(Y) \rightarrow L\Delta_{n+1}(Y)$ entre S y la Id , reflejada en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & L\Delta_2(Y) & \longrightarrow & L\Delta_1(Y) & \longrightarrow & L\Delta_0(Y) & \longrightarrow & L\Delta_{-1}(Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow S & \nearrow T & \downarrow S & \nearrow T & \downarrow S \text{Id} & \nearrow T_0 & \downarrow S \text{Id} & & \\ \cdots & \longrightarrow & L\Delta_2(Y) & \longrightarrow & L\Delta_1(Y) & \longrightarrow & L\Delta_0(Y) & \longrightarrow & L\Delta_{-1}(Y) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Definimos T en $L\Delta_n(Y)$ inductivamente por: $T = 0$ para $n = -1$ y $T\lambda = b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)$ para $n \geq 0$. La fórmula de homotopía de cadenas $\partial T + T\partial = \text{Id} - S$ se cumple trivialmente en $L\Delta_{-1}(Y)$, pues allí $T = 0$ y $S = \text{Id}$. Verifiquemos ahora dicha fórmula inductivamente en $L\Delta_n(Y)$ con $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \partial T\lambda &= \partial b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda) = \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda\partial(\lambda - T\partial\lambda) \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda[\partial\lambda - \partial T\partial\lambda] \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda[S\partial\lambda + T\partial\partial\lambda] \\ &= \lambda - T\partial\lambda - S\lambda. \end{aligned}$$

Ahora podemos descartar el grupo $L\Delta_{-1}(Y)$ (que fue introducido por conveniencia) y la relación $\partial T + T\partial = \text{Id} - S$ sigue valiendo, ya que T es cero en $L\Delta_{-1}(Y)$.

3. Subdivisión baricéntrica de cadenas en general

Definimos $S : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_n(X)$ de la siguiente manera: la identidad $\text{Id}_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ está en $L\Delta_n(X)$, y por el caso anterior podemos definir $S\sigma = \sigma_\# S(\text{Id}_n)$ para un n -simplex singular $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$. Aquí $\sigma_\#$ es el operador inducido por σ a nivel de complejos. Como $S(\text{Id}_n)$ es la suma de los n -símplices en la subdivisión baricéntrica de Δ_n , con ciertos signos, se tiene que $S\sigma$

es la correspondiente suma signada de las restricciones de σ a los n -símplices en la subdivisión baricéntrica de Δ_n . Veremos a continuación que S es un homomorfismo de complejos:

$$\begin{aligned}
\partial S\sigma &= \partial\sigma_{\#}S(\text{Id}_n) = \sigma_{\#}\partial S(\text{Id}_n) = \sigma_{\#}S\partial(\text{Id}_n) \\
&= \sigma_{\#}S\left(\sum_i (-1)^i (\text{Id}_n^i)\right) = \sum (-1)^i \sigma_{\#}S(\text{Id}_n^i) \\
&= \sum (-1)^i S\left(\sigma|_{\Delta_n^{(i)}}\right) = S\left(\sum_i (-1)^i \sigma|_{\Delta_n^{(i)}}\right) \\
&= S(\partial\sigma),
\end{aligned}$$

donde $\Delta_n^{(i)}$ es la i -ésima cara de Δ_n y Id_n^i es la identidad en $\Delta_n^{(i)}$.

De manera similar definimos $T : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n+1}(X)$ por $T\sigma = \sigma_{\#}T(\text{Id}_n)$, y verifiquemos que es una homotopía entre S y la Id . En efecto, sabemos que $\partial T + T\partial = \text{Id} - S$ vale para cadenas lineales, y entonces calculamos:

$$\begin{aligned}
\partial T\sigma &= \partial\sigma_{\#}T(\text{Id}_n) = \sigma_{\#}\partial T(\text{Id}_n) = \sigma_{\#}(\text{Id}_n - S(\text{Id}_n) - T\partial(\text{Id}_n)) \\
&= \sigma - S\sigma - \sigma_{\#}T\partial(\text{Id}_n) = \sigma - S\sigma - T\partial\sigma,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene como en las cuentas anteriores para S .

4. Subdivisión baricéntrica iterada

Definimos una homotopía de cadenas D_m entre la identidad Id y la iteración S^m . El operador D_m está dado por $D_m = \sum_{0 \leq i < m} TS^i$. En efecto, vemos que

$$\begin{aligned}
\partial D_m + D_m\partial &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + TS^i\partial) = \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + T\partial S^i) = \sum_{0 \leq i < m} (\partial T + T\partial)S^i \\
&= \sum_{0 \leq i < m} (\text{Id} - S)S^i = \sum_{0 \leq i < m} (S^i - S^{i+1}) \\
&= \text{Id} - S^m.
\end{aligned}$$

5. Demostración del Teorema

Para cada n -simplex singular $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ existe un m tal que $S^m(\sigma)$ está en $\Delta_n^{\mathcal{U}}(X)$. En efecto, si consideramos el cubrimiento de Δ_n por los abiertos $\sigma^{-1}(U^\circ)$ con $U \in \mathcal{U}$, basta tomar un m suficientemente grande de modo que el diámetro de los símplices de $S^m(\sigma)$ sea menor que el correspondiente número de Lebesgue del cubrimiento, (recordemos que el número de Lebesgue para un cubrimiento abierto de un espacio métrico compacto es un $\epsilon > 0$ tal que todo conjunto de diámetro menor a ϵ está contenido en algún conjunto del cubrimiento). Definimos $m(\sigma)$ el menor m tal que $S^m(\sigma)$ está en $\Delta_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Definimos ahora $D : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n+1}(X)$ por $D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma$. Para este D nos gustaría encontrar un morfismo de complejos $\rho : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_n(X)$ con imagen en $\Delta_n^{\mathcal{U}}(X)$ satisfaciendo la ecuación de homotopía de cadenas

$$\partial D + D\partial = \text{Id} - \rho. \tag{1.1}$$

Una manera rápida de hacer esto es simplemente considerar esta ecuación como la definición de ρ , i.e, sea $\rho = \text{Id} - \partial D - D\partial$. Sigue fácilmente que ρ es un morfismo de complejos:

$$\begin{aligned}\partial\rho\sigma &= \partial\sigma - \partial^2 D\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma, \\ \rho\partial\sigma &= \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial^2\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma.\end{aligned}$$

Para comprobar que ρ lleva $\Delta_n(X)$ a $\Delta_n^{\mathcal{U}}(X)$, calculamos, para $\sigma \in \Delta_n(X)$,

$$\begin{aligned}\rho\sigma &= \sigma - \partial D\sigma - D\partial\sigma = \sigma - \partial D_{m(\sigma)}\sigma - D\partial\sigma \\ &= S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma,\end{aligned}$$

pues $\partial D_m + D_m\partial = \text{Id} - S^m$.

Los términos $S^{m(\sigma)}\sigma$ están en $\Delta_n^{\mathcal{U}}(X)$ por definición de $m(\sigma)$. Para el resto de los términos $D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma$, notemos primero que si σ_j denota la restricción de σ a la j -ésima cara de Δ_n , entonces $m(\sigma_j) \leq m(\sigma)$, por lo que cada sumando $TS^i\sigma_j$ en $D(\partial\sigma)$ también aparece en $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma)$. Luego, $D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma$ es una suma de términos $TS^i\sigma_j$ con $i \geq m(\sigma_j)$, y estos términos se encuentran en $\Delta_n^{\mathcal{U}}(X)$ ya que T lleva $\Delta_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ a $\Delta_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Considerando a ρ como un morfismo de complejos $\Delta_n(X) \rightarrow \Delta_n^{\mathcal{U}}(X)$, la ecuación (1.1) dice que $\partial D + D\partial = \text{Id} - \iota\rho$ donde $\iota : \Delta_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow \Delta_n(X)$ es la inclusión.

Además $\rho\iota = \text{Id}$ ya que D es idénticamente cero en $\Delta_n^{\mathcal{U}}(X)$, pues $m(\sigma) = 0$ si σ está en $\Delta_n^{\mathcal{U}}(X)$ y entonces la suma que define $D\sigma$ es vacía. Así demostramos que ρ es una homotopía de cadenas inversas para ι . Esto prueba que ι induce un isomorfismo entre las homología de estos complejos. \square

Teorema 1.1.19 (Mayer-Vietoris). Sean $A, B \subseteq X$ y supongamos que $X = A^\circ \cup B^\circ$. Sean $\mathcal{U} = \{A, B\}$, $i^A : A \cap B \hookrightarrow A$, $i^B : A \cap B \hookrightarrow B$, $j^A : A \hookrightarrow A \cup B$ y $j^B : B \hookrightarrow A \cup B$ las inclusiones. Entonces la sucesión

$$0 \rightarrow \Delta_p(A \cap B) \xrightarrow{i^A \oplus i^B} \Delta_p(A) \oplus \Delta_p(B) \xrightarrow{j^A - j^B} \Delta_p^{\mathcal{U}}(A \cup B) \rightarrow 0$$

es exacta y por lo tanto induce una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow H_p(A \cap B) \xrightarrow{i_*^A \oplus i_*^B} H_p(A) \oplus H_p(B) \xrightarrow{j_*^A - j_*^B} H_p(A \cup B) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots,$$

llamada la sucesión de "Mayer-Vietoris".

Demostración. Recordemos que $\Delta_p^{\mathcal{U}}(X)$ es el subgrupo de $\Delta_p(X)$ que consiste de sumas de cadenas en A y de cadenas en B , y el morfismo de borde $\partial : \Delta_p(X) \rightarrow \Delta_{p-1}(X)$ cumple que lleva $\Delta_p^{\mathcal{U}}(X)$ a $\Delta_{p-1}^{\mathcal{U}}(X)$. Luego los $\Delta_p^{\mathcal{U}}(X)$ forman un complejo de cadenas. Por Teorema 1.1.18 tenemos que la inclusión $\Delta_p^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow \Delta_p(X)$ induce un isomorfismo en homología.

Probemos la exactitud de la sucesión del enunciado:

a) Inyectividad de $\varphi = i^A \oplus i^B$.

Sea $\sigma \in \text{Nu } \varphi$, es decir, $\varphi(\sigma) = (i^A(\sigma), i^B(\sigma)) = (0, 0)$. Entonces $\sigma = 0$ en A , $\sigma = 0$ en B . Por lo tanto $\sigma = 0$.

b) $\text{Nu}(j^A - j^B) = \text{Im } \varphi$, donde $\psi = j^A - j^B$.

Primero veamos que $\text{Nu}(j^A - j^B) \supseteq \text{Im } \varphi$. Dado $\varphi(\sigma)$, queremos ver que $\psi(\varphi(\sigma)) = 0$.

$$\psi(\varphi(\sigma)) = \psi(i^A(\sigma), i^B(\sigma)) = j^A \circ i^A(\sigma) - j^B \circ i^B(\sigma) = 0.$$

Ahora veamos que $\text{Nu}(j^A - j^B) \subseteq \text{Im } \varphi$. Si $\psi(\alpha, \beta) = 0$, entonces $j^A(\alpha) - j^B(\beta) = 0$, es decir que $j^A(\alpha) = j^B(\beta)$. Luego $j^A(\alpha)$ es cadena de A y B , obtenemos que $j^A(\alpha) \in \Delta_p(A \cap B)$, por lo tanto $(j^A(\alpha), j^B(\alpha)) \in \text{Im } \varphi$.

c) Suryectividad de $\psi = j^A - j^B$.

Queremos ver que para todo $\sigma \in \Delta_p^U(A \cup B)$ existe $(\alpha, \beta) \in \Delta_p(A) \oplus \Delta_p(B)$ tal que $\sigma = \psi(\alpha, \beta)$.

Recordemos que por definición $\Delta_p^U(A \cup B) = \{\text{suma de } n\text{-ciclos que están en } A \text{ o en } B\}$, por lo tanto $\sigma = \alpha + \beta$, donde $\alpha \in \Delta_p(A)$ y $\beta \in \Delta_p(B)$.

$$\text{Es decir que, } \psi(\alpha, \beta) = j^A(\alpha) - j^B(\beta) = \sigma.$$

Por lo tanto tenemos la siguiente sucesión exacta larga:

$$\cdots \rightarrow H_p(A \cap B) \xrightarrow{i_*^A \oplus i_*^B} H_p(A) \oplus H_p(B) \xrightarrow{j_*^A - j_*^B} H_p^U(A \cup B) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

Como $H_p^U(A \cup B) \cong H_p(A \cup B)$, obtenemos la sucesión de Mayer-Vietoris. \square

Definición 1.1.20. Una teoría de homología en la categoría de todos los espacios topológicos (X, A) y funciones continuas $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, donde A es un subespacio de X , B es un subespacio de Y y $f(A) \subseteq B$, es un funtor a la categoría de grupos abelianos graduados y homomorfismos $(H_p(X, A), p \in \mathbb{Z})$ junto con una transformación natural

$\partial_* : H_p(X, A) \rightarrow H_{p-1}(A, \emptyset) = H_{p-1}(A)$ tal que se verifican:

1. *Homotopía:* Si $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ homotópicas entonces

$$f_* = g_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B).$$

2. *Exactitud:* Para las inclusiones $i : A \hookrightarrow X$ y $j : B \hookrightarrow Y$ la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots \text{ es exacta.}$$

3. *Escisión:* Dados el par (X, A) y un abierto U de X tal que $\bar{U} \subseteq A$, entonces

$(X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo en homología. Es decir:

$$i_* : H_j(X - U, A - U) \rightarrow H_j(X, A) \text{ es isomorfismo } \forall j.$$

4. *Dimensión:* Si $X = \{*\}$, entonces $H_i(X) = 0, i > 0$ y $H_0(X) = G$ con G grupo abeliano, denominado grupo de coeficientes de la teoría de homología.

5. *Aditividad:* Sea $X = +_\alpha X_\alpha$ un espacio topológico (unión disjunta), entonces el homomorfismo $\bigoplus (i_\alpha)_* : \bigoplus H_n(X_\alpha) \rightarrow H_n(X)$ es un isomorfismo, donde $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ es la inclusión.

Se verifica que la homología singular es efectivamente una teoría de homología. Por ejemplo, el Teorema 1.1.15 prueba el Axioma de Dimensión, mientras que la subdivisión baricéntrica que aparece en la demostración del Teorema 1.1.18 es utilizada para probar el Axioma de Escisión.

1.2 Cohomología singular

Definición 1.2.1. Sea G un grupo abeliano y sea $\Delta^n(X; G) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_n(X), G)$. Sea $\delta : \Delta^n(X; G) \rightarrow \Delta^{n+1}(X; G)$ dada por $\delta(f) = f \circ \partial$ (recordemos $\Delta_{n+1} \xrightarrow{\partial} \Delta_n \xrightarrow{f} G$). Como $\delta^2 = 0$, se dice que $(\Delta^n(X; G), \delta)$ es un complejo de cocadenas.

Tenemos así

$$0 \rightarrow \Delta^0(X, G) \xrightarrow{\delta} \Delta^1(X, G) \xrightarrow{\delta} \Delta^2(X, G) \xrightarrow{\delta} \dots$$

y entonces podemos definir

$$H^n(X, G) = \frac{\{\text{Nu } \delta : \Delta^n(X; G) \rightarrow \Delta^{n+1}(X; G)\}}{\{\text{Im } \delta : \Delta^{n-1}(X; G) \rightarrow \Delta^n(X; G)\}},$$

llamado el n -ésimo grupo de cohomología singular de X con coeficientes en G .

La sucesión exacta corta $0 \rightarrow \Delta_*(A) \rightarrow \Delta_*(X) \rightarrow \Delta_*(X, A) \rightarrow 0$ induce

$$0 \rightarrow \Delta^*(X, A) \rightarrow \Delta^*(X) \rightarrow \Delta^*(A) \rightarrow 0,$$

que también es una sucesión exacta corta. En efecto, usaremos el siguiente resultado: si $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de R -módulos y M_3 es libre, entonces

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M_3, M) \rightarrow \text{Hom}_R(M_2, M) \rightarrow \text{Hom}_R(M_1, M) \rightarrow 0$$

es exacta.

Veamos que $\Delta_*(X, A)$ es libre. Podemos identificar $\Delta_p(X)/\Delta_p(A)$, $p \geq 0$, con el grupo abeliano libre generado por los símlices de X que no están completamente contenidos en A . Ahora, dado $c \in \Delta_p(X)$, podemos descomponerlo como $c = \sum_{\sigma_i \subseteq A} m_i \sigma_i + \sum_{\sigma_j \not\subseteq A} m'_j \sigma'_j$, y definimos $\varphi(c) = \sum_{\sigma} m'_j \sigma'_j$. Luego, $\frac{\Delta_p(X)}{\text{Nu } \varphi} \cong \Delta_p(X - A)$, y éste es un grupo libre.

De la exactitud de $0 \rightarrow \Delta^*(X, A) \rightarrow \Delta^*(X) \rightarrow \Delta^*(A) \rightarrow 0$ obtenemos la sucesión exacta larga en cohomología

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^n(X, A; G) \xrightarrow{\delta} H^n(X) \xrightarrow{\delta} H^n(A) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X, A; G) \xrightarrow{\delta} \dots$$

Capítulo 2

Cohomología de De Rham

En este capítulo recordamos la cohomología de De Rham en variedades diferenciables, y luego probamos el Teorema de De Rham, que establece una relación con la cohomología singular de la variedad. Todas las variedades consideradas en este trabajo satisfacen el segundo axioma de numerabilidad.

2.1 Formas Diferenciales en variedades

Definición 2.1.1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, y sea

$$T^k(V^*) = \{\sigma : \underbrace{V \times \cdots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R} \mid \sigma \text{ es multilineal}\}.$$

- En $T(V^*) = \bigoplus_{i=0}^n T^i(V^*)$ se define el siguiente producto: para $\sigma \in T^k(V^*)$, $\tau \in T^l(V^*)$, $\sigma \otimes \tau \in T^{k+l}(V^*)$ está dado por

$$(\sigma \otimes \tau)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sigma(v_1, \dots, v_k) \tau(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}), \quad v_j \in V \quad j = 1, \dots, k+l.$$

- Un tensor $\sigma \in T^k(V^*)$ se dice *alternante* o *antisimétrico* si su signo cambia cuando se permutan dos de sus variables

$$\sigma(v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k) = -\sigma(v_1, v_2, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_k)$$

Esto es equivalente a decir

$$\sigma(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = (\text{sgn}(\pi)) \sigma(v_1, \dots, v_k) \quad \forall \pi \in S_k,$$

donde S_k es el grupo simétrico en k letras y $\text{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi \text{ par} \\ -1 & \text{si } \pi \text{ impar} \end{cases}$

- Se define $\Lambda^k(V^*) = \{\sigma \in T^k(V^*) \mid \sigma \text{ es alternante}\}$. Es fácil ver que $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{\dim V}{k}$, y por lo tanto $\Lambda^k(V^*) = 0$ si $k > \dim V$.

- Sea $\text{Alt} : T^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$ la aplicación lineal definida por

$$\text{Alt} \sigma(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \text{sgn}(\pi) \sigma(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}), \quad \sigma \in T^k(V^*).$$

- Dados $\sigma \in \Lambda^k(V^*)$ y $\tau \in \Lambda^l(V^*)$, se define el producto \wedge por

$$\sigma \wedge \tau = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\sigma \otimes \tau) \in \Lambda^{k+l}(V^*).$$

Propiedades 2.1.2 ([7], pág. 356-357). Sean ω, ω_1 y $\omega_2 \in \Lambda^k(V^*)$, η, η_1 y $\eta_2 \in \Lambda^l(V^*)$, $\theta \in \Lambda^s(V^*)$ y $a \in \mathbb{R}$:

1. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$,
2. $\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$,
3. $a(\omega \wedge \eta) = (a\omega) \wedge = \omega \wedge (a\eta)$,
4. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$,
5. $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$.

Definición 2.1.3. Extendemos \wedge a $\Lambda(V^*) := \bigoplus_{i=0}^n \Lambda^i(V^*)$ bilinealmente, donde $c \wedge \sigma = c\sigma$ con $c \in \Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$ y $\sigma \in \Lambda^k(V^*)$. Luego $(\Lambda(V^*), \wedge)$ es un álgebra asociativa, no conmutativa, con unidad $1 \in \Lambda^0(V^*)$. $\Lambda(V^*)$ se llama el *álgebra exterior de V^** , donde los elementos de $\Lambda(V^*)$ son *formas* y los de $\Lambda^k(V^*)$ son *k-formas*.

Pasamos ahora a considerar formas en variedades diferenciables.

Definición 2.1.4.

- Dada M una variedad diferenciable de dimensión n , definimos $\Lambda^k(M) = \coprod_{p \in M} \Lambda^k(T_p^*M)$ y $\Lambda(M) = \coprod_{p \in M} \Lambda(T_p^*M)$. Las proyecciones canónicas se definen por

$$\pi : \Lambda^k(M) \rightarrow M, \quad \omega \rightarrow p \quad \text{si } \omega \in \Lambda^k(T_p^*M),$$

$$\pi : \Lambda(M) \rightarrow M, \quad \omega \rightarrow p \quad \text{si } \omega \in \Lambda(T_p^*M).$$

$\Lambda(M), \Lambda^k(M)$ admiten una estructura de variedad diferenciable tal que las proyecciones anteriores son C^∞ . Más aún, $\Lambda(M)$ y $\Lambda^k(M)$ son fibrados vectoriales sobre M .

- Una *k-forma* en M es una función $\omega : M \rightarrow \Lambda^k(M)$ tal que $\omega_p \in \Lambda^k(T_p^*M) \forall p \in M$, es decir $\pi \circ \omega = \text{id}_M$.
- Una *k-forma* ω se dice C^∞ si, para X_1, \dots, X_k campos vectoriales C^∞ arbitrarios en M , la función $\omega(X_1, \dots, X_k)$ definida por $\omega(X_1, \dots, X_k)(p) = \omega_p(X_1|_p, \dots, X_k|_p)$ es C^∞ .

- Una *forma diferencial* es $\omega : M \rightarrow \Lambda(M)$ tal que $\omega_p \in \Lambda(T_p^*M)$, o bien, $\pi \circ \omega = \text{id}_M$. La forma ω se dice C^∞ si su componente en $\Lambda^k(M)$ es C^∞ para todo k .
- Definimos $\Omega^k(M) = \{k\text{-formas } C^\infty \text{ en } M\}$, $\Omega(M) = \{\text{formas diferenciales } C^\infty \text{ en } M\}$. Es fácil ver que Ω^k y Ω son espacios vectoriales reales y $C^\infty(M)$ -módulos, donde la acción de $C^\infty(M)$ está dada por $(f\omega)_p = f(p)\omega_p$ con $f \in C^\infty(M)$, $\omega \in \Omega(M)$. Notemos que $\Omega(M) = \bigoplus_{i=1}^n \Omega^i(M)$.
- El producto \wedge definido para formas en espacios vectoriales se generaliza a formas diferenciales sobre M de la siguiente manera: si $\omega, \eta \in \Omega(M)$ y $p \in M$, entonces $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$.

Lema 2.1.5. *Si ω es una k -forma en M las siguientes son equivalentes:*

1. ω es C^∞ ,
2. Si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ es un entorno coordinado en M entonces

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad \text{con } a_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U).$$

Nota 5. Hay una identificación natural $\Omega^0(M) \equiv C^\infty(M)$. En efecto, $\Lambda^0(M) = M \times \mathbb{R}$ y toda 0-forma $\sigma : M \rightarrow \Lambda^0(M) = M \times \mathbb{R}$ puede escribirse como $\sigma(p) = (p, f(p))$ para una única $f \in C^\infty(M)$. Recíprocamente si tenemos $f \in C^\infty(M)$ podemos definir $\sigma : M \rightarrow \Lambda^0(M)$ como $\sigma(p) = (p, f(p))$.

Teorema 2.1.6 ([7], pág. 365-366). *Dada una variedad diferenciable M , entonces existe una única aplicación lineal $d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ que satisface:*

1. $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M) \quad \forall k \geq 0$,
2. $d(f) = df \quad \forall f \in \Omega^0(M)$,
3. $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M) \Rightarrow d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$,
4. $d^2 = 0$.

Este operador se denomina la derivada exterior en M .

Si $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ es un sistema coordinado de M , entonces la expresión local de la derivada exterior en coordenadas está dada por: si ω es una k -forma en M , con $\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, entonces

$$d\omega|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_j \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Definición 2.1.7.

- Del teorema anterior obtenemos una sucesión

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \rightarrow 0$$

Esta sucesión es denominada el *complejo de De Rham de M*.

- Una forma ω se dice *cerrada* si $d\omega = 0$, y se dice *exacta* si $\omega = d\eta$ para alguna $\eta \in \Omega(M)$. Notar que exacta implica cerrada, pues $d^2 = 0$.
- Definimos a continuación los siguientes subespacios de $\Omega^k(M)$:

$$Z^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\} = \text{Nu}(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)),$$

$$B^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega = d\eta \text{ para alguna } \eta \in \Omega^{k-1}(M)\} = \text{Im}(d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)).$$

Notar que $B^k(M) \subseteq Z^k(M)$.

- El espacio cociente $H_{DR}^k(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}$ se denomina el *k-ésimo grupo de cohomología de De Rham de M*. La dimensión de estos grupos es conocida como *k-ésimo número de Betti*
- Para toda *k*-forma cerrada ω en *M*, $[\omega]$ denota la clase de equivalencia de ω en $H_{DR}^k(M)$, y es llamada la *clase de cohomología de ω* . Se tiene que $[\omega] = [\omega']$ si y sólo si $\omega - \omega' = d\eta$ para alguna forma η . Diremos que ω y ω' son *cohomólogas*.
- Toda función $F : M \rightarrow N$ C^∞ entre variedades diferenciables induce una aplicación lineal $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ mediante:

$$F^*(\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega_{F(p)}((dF)_p v_1, \dots, (dF)_p v_k),$$

donde $p \in M$ y $v_1, \dots, v_k \in T_p M$. El operador F^* se llama el *“pull-back”* de formas, y se verifica que $F^* \circ d = d \circ F^*$. Se deduce que $F^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M)$ y $F^*(B^k(N)) \subset B^k(M)$. Esto nos permite definir una aplicación lineal $F^* : H_{DR}^k(N) \rightarrow H_{DR}^k(M)$ mediante

$$F^*([\omega]) = [F^*(\omega)].$$

Se satisface que $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ y $\text{id}^* = \text{id}$, de donde resulta que variedades difeomorfas poseen grupos de cohomología de De Rham isomorfos. Se puede encontrar una demostración en [13] pág. 154

Proposición 2.1.8. *Sea U un subconjunto conexo entonces tenemos que $H_{DR}^0(U; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$*

Nota 6. Cuando *M* es compacta se tiene que $\dim(H^k(M)) < \infty$. Una demostración de este resultado se encuentra en [13] pág. 266.

A continuación probamos un resultado fundamental en el estudio de la cohomología de De Rham, denominado el Lema de Poincaré.

Teorema 2.1.9 (Lema de Poincaré). *Sea U un subconjunto abierto convexo de \mathbb{R}^n entonces $H_{DR}^k(U) = 0$ para todo $k \geq 1$.*

Demostración. Podemos asumir que $0 \in U$.

Probaremos que existen funciones lineales h_{k-1}, h_k como nos indica el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^{k-1}(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^k(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}(U) \\ & \swarrow h_{k-1} & & \swarrow h_k & \end{array},$$

tales que $h_k d + dh_{k-1} = \text{id}_{\Omega^k(U)}$. Con esto el teorema estaría probado, pues si $\omega \in \Omega^k(U)$ cumple que $d\omega = 0$, entonces

$$\omega = (h_k d + dh_{k-1})(\omega) = h_k(d\omega) + d(h_{k-1}\omega) = d(h_{k-1}\omega).$$

Por lo tanto ω es exacta y entonces $H_{DR}^k(U) = 0$.

Para definir h_{k-1} basta considerar k -formas de la forma:

$$\omega = g dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad g \in C^\infty(U), \quad \omega \in \Omega^k(U).$$

Para $x \in U$ se define $h_{k-1}(\omega)(x) = \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) \mu_\omega$, donde $\mu_\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ está dada por

$$\mu_\omega = x_{i_1} dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} - x_{i_2} dx_{i_1} \wedge dx_{i_3} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \dots + (-1)^{k-1} x_{i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}.$$

Notar que $d\mu_\omega = k dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, la h_k se define de manera similar.

Ahora verificamos $h_k d + dh_{k-1} = \text{id}$

$$\begin{aligned} (d \circ h_{k-1})(\omega)(x) &= d \left[\left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) \mu \right] \\ &= d \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) \wedge \mu + \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) d\mu \\ &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) dx_j \wedge \mu + \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) d\mu \\ &= \sum_j \left(\int_0^1 t^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_j} (g(tx)) dt \right) dx_j \wedge \mu + \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) d\mu \\ &= \sum_j \left(\int_0^1 t^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x_j} (tx) dt \right) dx_j \wedge \mu + k \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Por otro lado, $(h_k \circ d)(\omega)(x) = h_k(d\omega)(x)$. De $\omega = g dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, se obtiene

$$d\omega = dg \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$\begin{aligned}
(h_k \circ d)(\omega)(x) &= \sum_j h_k \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) \\
&= \sum_j \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial g}{\partial x_j}(tx) dt \right) (x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} - x_{i_1} dx_j \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad + \dots + (-1)^{k-1} x_{i_k} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}) \\
&= \sum_j \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial g}{\partial x_j}(tx) dt \right) (x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} - dx_j \wedge \mu_\omega).
\end{aligned}$$

Sumando los dos términos anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}
(d \circ h_{k-1} + h_k \circ d)(\omega)(x) &= k \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad + \sum_j \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial g}{\partial x_j}(tx) dt \right) (x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \\
&= k \left(\int_0^1 t^{k-1} g(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \\
&\quad + \left(\int_0^1 t^k \frac{d}{dt}(g(tx)) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= \left(\int_0^1 \left[kt^{k-1} g(tx) + t^k \frac{d}{dt}(g(tx)) \right] dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} [t^k g(tx)] dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= g(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
&= \omega(x).
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.1.10. *La cohomología de De Rham del espacio euclídeo \mathbb{R}^n está dada por:*

$$H_{DR}^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } k = 0, \\ 0, & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Recordemos que una variedad diferenciable conexa M de dimensión n se dice *orientable* si existe un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ con $\varphi_\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ tal que

$$\det \left(\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta} \right)_{ij} > 0 \text{ en } U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \quad \forall \alpha, \beta \in I, \text{ donde } \left(\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial x_j^\beta} \right)_{ij} = [d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})].$$

Fijado un atlas con esta propiedad se dice que M está *orientada*. Dado $p \in M$, la orientación en $T_p M$ está dada por la clase de equivalencia de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \Big|_p \right\}$ para cualquier $\alpha \in I$.

Una condición necesaria y suficiente para que una variedad M sea orientable es la existencia de una n -forma diferenciable (o continua) nunca nula.

Definición 2.1.11.

- Sean M y M' variedades diferenciables conexas orientadas de dimensión n con n -formas nunca nulas ω y ω' respectivamente. Si $\varphi : M \rightarrow M'$ es un difeomorfismo entonces $\varphi^*\omega'$ es una forma nunca nula en M , y así $\varphi^*\omega' = f\omega$ con $f \in C^\infty$ nunca nula, por lo que f tiene signo constante en M . Si $f > 0$ se dice que φ *preserva orientación*, mientras que si $f < 0$ se dice que φ *revierte orientación*.
- Sea M una variedad de dimensión n ; definimos

$$\Omega_c^n(M) = \{\omega \in \Omega^n(M) \mid \text{sop}(\omega) \text{ es compacto}\} \quad \text{donde} \quad \text{sop}(\omega) = \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}.$$

Definiremos a continuación un operador lineal llamado *integral*, $\int_M : \Omega_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$, donde M es una variedad conexas orientada de dimensión n .

Comenzamos con el caso $M = \mathbb{R}^n$, con la orientación canónica (i.e., si (r_1, r_2, \dots, r_n) son las coordenadas usuales de \mathbb{R}^n , la orientación positiva está dada por la n -forma $dr_1 \wedge dr_2 \wedge \dots \wedge dr_n$). Sea $\omega \in \Omega_c^n(M)$, entonces $\omega = f dr_1 \wedge dr_2 \wedge \dots \wedge dr_n$, para cierta $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto.

Definimos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f dr_1 \wedge dr_2 \wedge \dots \wedge dr_n = \int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f dr_1 dr_2 \dots dr_n.$$

Podemos dar la misma definición para $\omega \in \Omega_c^n(V)$, donde V es un abierto de \mathbb{R}^n . Extendemos ω y f diferenciablemente a todo \mathbb{R}^n definiéndolos como cero en $\mathbb{R}^n - \text{sop}(\omega)$.

Lema 2.1.12 ([7], pág. 403-404). *Sea $\varphi : V \rightarrow W$ un difeomorfismo entre abiertos V y W de \mathbb{R}^n y supongamos que $\det((d\varphi)_x)$ tiene signo constante $\delta = \pm 1 \forall x \in V$. Para $\omega \in \Omega_c^n(W)$ se tiene*

$$\int_V \varphi^*\omega = \delta \int_W \omega = \delta \int_{\varphi(V)} \omega.$$

Con la ayuda del Lema 2.1.12 podremos integrar n -formas con soporte compacto en una variedad orientada de dimensión n . En efecto, sea $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Supongamos que existe (U, φ) sistema coordenado positivo de M tal que $\text{sop}(\omega) \subseteq U$, entonces definimos $\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*\omega$. Del Lema 2.1.12 se deduce la buena definición.

En general sea $\omega \in \Omega_c^n(M)$ arbitraria y tomemos un atlas positivo $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ y $\{\rho_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Definimos

$$\int_M \omega = \sum_{\alpha \in I} \int_M \rho_\alpha \omega.$$

Se verifica que esta definición no depende del atlas positivo elegido y de la partición de la unidad subordinada.

A continuación enumeramos algunas propiedades de la integral:

Propiedades 2.1.13 ([7], pág. 407-408). Sean M, N variedades diferenciables orientadas y ω una n -forma con soporte compacto satisfacen las siguientes:

1. $\int_M : \Omega_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathbb{R} -lineal,
2. Si \overline{M} denota a M con la orientación opuesta entonces $\int_{\overline{M}} \omega = -\int_M \omega \quad \forall \omega \in \Omega_c^n(M)$,
3. Si ω es una n -forma nunca nula positiva entonces $\int_M \omega > 0$,
4. Si $F : N \rightarrow M$ es un difeomorfismo que preserva orientación entonces $\int_M \omega = \int_N F^* \omega \quad \forall \omega \in \Omega_c^n(M)$.

Definición 2.1.14. Sea M una variedad diferenciable orientada de dimensión n . Diremos que $\omega \in \Omega_c^n(M)$ es una *forma de volumen* si ω es nunca nula y $\int_M \omega = 1$.

Definición 2.1.15. Sea $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n \geq 0\}$ el semiespacio superior cerrado de \mathbb{R}^n . El interior y el borde de \mathbb{H}^n son $\text{Int } \mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$, $\partial \mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\}$. Para obtener los abiertos en \mathbb{H}^n utilizamos la topología relativa.

Una *variedad topológica M de dimensión n con borde* es un espacio N_2 y Hausdorff, donde los entornos coordenados están dados por (U, φ) con U un subconjunto abierto de M y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{H}^n$ un homeomorfismo a un subconjunto abierto de $\text{Int } \mathbb{H}^n$ ó \mathbb{H}^n .

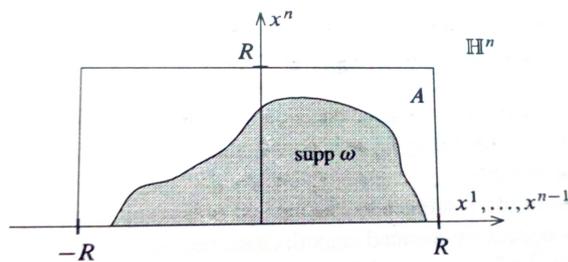
Un punto $p \in M$ se dice *punto interior de M* si está en un entorno coordenado del interior de M , es decir que $\varphi(U) \subseteq \text{Int } \mathbb{H}^n$. El punto p se dice un *punto borde de M* si está en un entorno coordenado del borde de M , es decir que $\varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n \neq \emptyset$. El *borde de M* es denotado por ∂M y similarmente el *interior de M* por $\text{Int } M$.

Teorema 2.1.16 (Stokes). Sea M una variedad orientada C^∞ de dimensión n con borde ∂M , y sea ω una $(n-1)$ -forma C^∞ de soporte compacto en M . Entonces

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

A continuación seguiremos la demostración realizada por Lee en [7].

Demostración. Empezaremos con un caso especial, suponiendo que M es el espacio \mathbb{H}^n . Sea ω una $(n-1)$ -forma en \mathbb{H}^n con soporte compacto. Luego existe un $R > 0$ tal que $\text{sop}(\omega) \subset A$, donde $A = [-R, R] \times \dots \times [-R, R] \times [0, R]$.



Podemos escribir a ω en coordenadas como $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$ donde $\widehat{dx^i}$ significa que omitimos el término dx^i . Por lo tanto

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n d\omega_i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Así calculamos

$$\int_{\mathbb{H}^n} d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_A \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^n.$$

Podemos elegir el orden de integración tal que x^i sea primero. Por el Teorema Fundamental del Cálculo podemos reducir los términos cuando $i \neq n$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x) dx^1 \dots dx^n &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}(x) dx^i dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int_0^R \dots \int_{-R}^R [\omega_i(x)]_{x^i=-R}^{x^i=R} dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

pues podemos elegir $R > 0$ suficientemente grande de modo que $\omega = 0$ cuando $x^i = \pm R$. El único término que puede no ser cero es el $i = n$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \int_{-R}^R \dots \int_0^R \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n}(x) dx^n dx^1 \dots dx^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R [\omega_n(x)]_{x^n=0}^{x^n=R} dx^1 \dots dx^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}, \end{aligned}$$

pues $\omega_n = 0$ cuando $x^n = R$.

Comparamos este resultado con lo que queremos obtener, realizando el siguiente cálculo:

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega = \sum_i \int_{A \cap \partial\mathbb{H}^n} \omega_i(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Como la coordenada x^n se anula en $\partial\mathbb{H}^n$, el pullback de dx^n en el borde es idénticamente cero. Luego sólo nos queda el término $i = n$, y así

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega = \int_{A \cap \mathbb{H}^n} \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.$$

Vemos que las coordenadas (x^1, \dots, x^{n-1}) tienen orientación positiva en $\partial\mathbb{H}^n$ cuando n es par y orientación negativa cuando n es impar, y entonces vale la igualdad.

El siguiente caso es cuando M es \mathbb{R}^n . En este caso, el soporte de ω está contenido en un cubo de la forma $A = [-R, R]^n$. El cálculo es exactamente igual al anterior excepto cuando $i = n$ donde las coordenadas se anulan al igual que las otras. Luego $\int_M d\omega = 0$, y como M no tiene borde en este caso tenemos que $\int_{\partial M} \omega = 0$.

Ahora sea M una variedad arbitraria con borde, pero consideremos una $(n-1)$ -forma ω con soporte compacto en el dominio de una carta (U, φ) que tiene orientación positiva o negativa. Asumiendo que preserva orientación tenemos

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^* d\omega = \int_{\mathbb{H}^n} d((\varphi^{-1})^* \omega).$$

Esto es igual a $\int_{\partial\mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^* \omega$, donde $\partial\mathbb{H}^n$ tiene la orientación inducida. Resulta que $\varphi|_{U \cap \partial M}$ es un difeomorfismo que preserva orientación de $U \cap \partial M$ en $\varphi(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$. Luego obtenemos que $\int_{\partial\mathbb{H}^n} (\varphi^{-1})^* \omega = \int_{\partial M} \omega$.

Para una carta que revierta orientación, el argumento es similar. Si tenemos un sistema coordenado interior realizamos el mismo cálculo reemplazando \mathbb{H}^n por \mathbb{R}^n .

Por último sea ω una $(n-1)$ -forma arbitraria con soporte compacto. Elegimos un cubrimiento del soporte de ω por una cantidad finita de sistemas coordenados positivamente orientados $\{(U_i, \varphi_i)\}$, y tomamos una partición de la unidad $\{\psi_i\}$ subordinada a este cubrimiento. Luego

podemos aplicar el argumento anterior a cada $\psi_i \omega$ obteniendo

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \omega &= \sum_i \int_{\partial M} \psi_i \omega \\
&= \sum_i \int_M d\psi_i \wedge \omega + \psi_i d\omega \\
&= \int_M d\left(\sum_i \psi_i\right) \wedge \omega + \int_M \left(\sum_i \psi_i\right) d\omega \\
&= 0 + \int_M d\omega,
\end{aligned}$$

pues $\sum_i \psi_i = 1$. □

Definición 2.1.17. Denotamos por $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ al subconjunto de \mathbb{R}^n donde todas las coordenadas son no negativas, es decir $\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \geq 0, \dots, x^n \geq 0\}$. Este es el típico espacio con *esquinas*. Para obtener los abiertos en $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ utilizamos la topología relativa.

Sea M una variedad de dimensión n con borde. Un *sistema coordenado con esquinas* es un par (U, φ) , donde U es un subconjunto abierto de M y φ es un homeomorfismo de U a un subconjunto abierto \hat{U} de $\overline{\mathbb{R}}_+^n$.

Proposición 2.1.18 ([7], pág. 408-409). *Sea ∂M el borde de una variedad compacta orientada C^∞ de dimensión n con esquinas, y $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Supongamos que D_1, \dots, D_k son dominios abiertos de integración en \mathbb{R}^n , y que para $i = 1, \dots, k$ existen funciones $F_i : \overline{D}_i \rightarrow M$ que satisfacen*

1. $F_i|_{D_i}$ es un difeomorfismo que preserva la orientación sobre un subconjunto abierto $W_i \subseteq M$, para todo i ,
2. $W_i \cap W_j = \emptyset$ si $i \neq j$,
3. $\text{sop}(\omega) \subseteq \overline{W}_1 \cup \dots \cup \overline{W}_k$.

Entonces $\int_M \omega = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} F_i^* \omega$

Teorema 2.1.19 (Stokes para variedades con esquinas). *Sea M una variedad diferenciable con esquinas y sea ω una $(n-1)$ -forma diferenciable de soporte compacto en M . Entonces*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Para ver una demostración de este Teorema ver [7], pág. 419. Es muy similar a la demostración del Teorema 2.1.16.

A continuación definimos otra integral sobre una variedad diferenciable; en este caso integramos p -formas sobre p -cadenas diferenciables. No es necesario que la variedad esté orientada, sólo influye la orientación del p -simplex Δ_p .

Definición 2.1.20. Sea M una variedad diferenciable, ω una p -forma en M y σ un p -simplex C^∞ en M . Definimos la *integral de ω sobre σ* por

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta_p} \sigma^* \omega.$$

Esto tiene sentido porque Δ_p es una p -subvariedad diferenciable con esquinas incrustada en \mathbb{R}^n , que hereda la orientación de \mathbb{R}^p . Observamos que cuando $p = 1$, esto es lo mismo que la integral de línea de ω sobre la curva $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$. Si $c = \sum_{i=1}^k c_i \sigma_i$ es una p -cadena, se define $\int_c \omega = \sum_{i=1}^k c_i \int_{\sigma_i} \omega$.

Teorema 2.1.21 (Stokes para cadenas). *Si c es una p -cadena C^∞ en una variedad diferenciable M , y una ω es una $(p-1)$ -forma C^∞ en M , entonces*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

Demostración. Es suficiente probar el teorema cuando c es un p -simplex diferenciable σ . Dado que Δ_p es una variedad con esquinas, el Teorema 2.1.19 dice que

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\Delta_p} \sigma^* d\omega = \int_{\Delta_p} d\sigma^* \omega = \int_{\partial \Delta_p} \sigma^* \omega.$$

Las funciones $\{F_i^p \mid i = 0, \dots, p\}$ (ver Nota 1) son parametrizaciones de las caras de Δ_p que satisfacen las condiciones de la Proposición 2.1.18, salvo posiblemente la de preservar la orientación. Veamos cuándo cumplen esta condición.

Notemos que F_i^p es la restricción a $\Delta_p \cap \partial \mathbb{H}^p$ de los difeomorfismos afines que llevan el simplex $[e_0, \dots, e_p] \rightarrow [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p, e_i]$. Es fácil ver que estos difeomorfismos preservan orientación si y sólo si $(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p, e_i)$ es una permutación par de (e_0, \dots, e_p) , y esto sucede si y sólo si $p-i$ es par. Ya que las coordenadas de $\partial \mathbb{H}^p$ están positivamente orientadas si y sólo si p es par, se tiene que F_i^p preserva orientación en $\partial \Delta_p$ si y sólo si p es par.

Luego por Proposición 2.1.18 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Delta_p} \sigma^* \omega &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} (F_i^p)^* \sigma^* \omega \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} (\sigma \circ F_i^p)^* \omega \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\sigma \circ F_i^p} \omega \\ &= \int_{\partial \sigma} \omega. \end{aligned}$$

□

2.2 Teorema de De Rham

Sea $\Delta_p^{dif}(M)$ el grupo abeliano libre generado por $\{\sigma : \Delta_p \rightarrow M \mid \sigma \text{ es diferenciable}\}$, es claro que $\{\Delta_*^{dif}(M)\}$ es un subcomplejo de $\{\Delta_*(M)\}$, que da origen a la homología $H_*^{dif}(M, \mathbb{R})$.

Sea σ un p -simplex diferenciable, es decir, una función $\sigma : \Delta_p \rightarrow M$ que es diferenciable en un entorno de Δ_p . Sea ω una p -forma diferenciable en un entorno de $\text{Im } \sigma$. Entonces está definida $\int_\sigma \omega$, y la extendemos a cadenas de la siguiente manera: si $c = \sum m_i \sigma_i$ entonces $\int_c \omega = \sum m_i \int_{\sigma_i} \omega$.

La integración de p -formas sobre p -cadenas (diferenciables) define un homomorfismo

$$\Psi : \Omega^p(M) \rightarrow \text{Hom}(\Delta_p^{dif}(M), \mathbb{R}), \quad \Psi(\omega)(\sigma) = \int_\sigma \omega.$$

Si denotamos $\Delta_{dif}^p(M) := \text{Hom}(\Delta_p^{dif}(M), \mathbb{R})$, obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \Omega^p(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1}(M) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi & & \\ \cdots & \longrightarrow & \Delta_{dif}^p(M) & \xrightarrow{\delta} & \Delta_{dif}^{p+1}(M) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

donde cada cuadrado es conmutativo por el Teorema de Stokes 2.1.21. El homomorfismo Ψ induce así un homomorfismo

$$\Psi^* : H_{DR}^p(M) \rightarrow H_{dif}^p(M, \mathbb{R}), \quad \Psi^*([\omega]) = [\Psi(\omega)],$$

denominado el *homomorfismo de De Rham*.

En esta sección esbozaremos una demostración de las siguientes afirmaciones:

Afirmación (A) El homomorfismo $\Psi^* : H_{DR}^p(M) \rightarrow H_{dif}^p(M, \mathbb{R})$ es un isomorfismo.

Afirmación (B) Existe un isomorfismo natural $H_{dif}^p(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^p(M, \mathbb{R})$ entre la cohomología singular diferenciable y la cohomología singular usual.

Combinando estos dos resultados, obtendremos el famoso teorema de De Rham:

Teorema 2.2.1 (De Rham). *Existe un isomorfismo natural $H_{DR}^p(M) \xrightarrow{\cong} H^p(M, \mathbb{R})$ entre la cohomología de De Rham de M y la cohomología singular de M .*

Este teorema fue probado por G. De Rham en su tesis doctoral en 1931. A continuación daremos una demostración más moderna de este resultado, basada en [2]. Probaremos primero algunos resultados auxiliares.

Teorema 2.2.2 (Sucesión de Mayer-Vietoris para la cohomología de De Rham). *Sean U, V abiertos en M tales que $M = U \cup V$. Entonces se tiene la siguiente sucesión exacta larga en cohomología:*

$$\cdots \rightarrow H_{DR}^p(U \cup V) \rightarrow H_{DR}^p(U) \oplus H_{DR}^p(V) \rightarrow H_{DR}^p(U \cap V) \rightarrow H_{DR}^{p+1}(U \cup V) \rightarrow \cdots$$

Demostración. Sean $\psi : \Omega^p(U \cup V) \rightarrow \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V)$ y $\varphi : \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U \cap V)$ las funciones definidas por:

$$\psi(\omega) = (\omega|_U, -\omega|_V), \quad \varphi(\alpha, \beta) = \alpha|_{U \cap V} + \beta|_{U \cap V}.$$

Probaremos a continuación que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \rightarrow \Omega^p(U \cup V) \xrightarrow{\psi} \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \xrightarrow{\varphi} \Omega^p(U \cap V) \rightarrow 0.$$

En efecto, vemos que:

1. ψ es inyectiva.

$$\psi(\omega) = 0 \Rightarrow (\omega|_U, -\omega|_V) = 0 \Rightarrow \omega|_U = -\omega|_V = 0 \Rightarrow \omega = 0.$$

2. $\text{Nu } \varphi = \text{Im } \psi$.

Para probar que $\text{Im } \psi \subseteq \text{Nu } \varphi$, sea $\omega \in \Omega^p(U \cup V)$, y calculamos:

$$\varphi(\psi(\omega)) = \varphi(\omega|_U, -\omega|_V) = (\omega|_U)|_{U \cap V} - (\omega|_V)|_{U \cap V} = \omega|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V} = 0.$$

Para probar que $\text{Nu } \varphi \subseteq \text{Im } \psi$, sean $\alpha \in \Omega^p(U)$ y $\beta \in \Omega^p(V)$ tales que $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, es decir,

$$\alpha|_{U \cap V} + \beta|_{U \cap V} = 0. \quad (2.1)$$

Busco $\omega \in \Omega^p(U \cup V)$ tal que $\psi(\omega) = (\alpha, \beta)$. Basta definir ω como $\omega|_U = \alpha$ y $\omega|_V = -\beta$, que está bien definida, pues $\omega|_{U \cap V} = \begin{cases} \alpha|_{U \cap V}, \\ -\beta|_{U \cap V} \end{cases}$ que son iguales por la ecuación (2.1).

3. φ es suryectiva.

Sea $\omega \in \Omega^p(U \cap V)$, y sean $f, g : U \cup V \rightarrow \mathbb{R}$ funciones C^∞ tal que $\text{sop } f \subseteq U$, $\text{sop } g \subseteq V$ y $f + g \equiv 1$. Entonces $\omega = f\omega + g\omega$. Como $f = 0$ en un entorno de $V - U$ y $g = 0$ en un entorno de $U - V$, podemos definir

$$\alpha = \begin{cases} f\omega & \text{en } U \cap V, \\ 0 & \text{en } V - U \end{cases}; \quad \alpha \text{ es } p\text{-forma diferenciable en } U; \text{ y}$$

$$\beta = \begin{cases} g\omega & \text{en } U \cap V, \\ 0 & \text{en } U - V \end{cases}; \quad \beta \text{ es } p\text{-forma diferenciable en } V.$$

Luego $\omega = f\omega + g\omega = \alpha|_{U \cap V} + \beta|_{U \cap V}$. Esto completa la prueba de la exactitud de la sucesión.

Esta sucesión exacta corta induce entonces una sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \rightarrow H_{DR}^p(U \cup V) \rightarrow H_{DR}^p(U) \oplus H_{DR}^p(V) \rightarrow H_{DR}^p(U \cap V) \rightarrow H_{DR}^{p+1}(U \cup V) \rightarrow \cdots.$$

□

Recordemos el siguiente Lema que utilizaremos para las demostraciones posteriores.

Lema 2.2.3 (Lema de los 5). *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de módulos y funciones lineales:*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}$$

Si las filas horizontales son exactas y además f_1, f_2, f_4 y f_5 son isomorfismos, entonces f_3 es un isomorfismo.

Si M es una variedad diferenciable y \mathcal{U} es un cubrimiento de M tal que $M = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^\circ$, podemos considerar

$$\Delta_p^{\mathcal{U}, dif}(M) = \{\sigma : \Delta_p \rightarrow M \text{ diferenciable} \mid \sigma(\Delta_p) \subseteq U \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\}.$$

Es fácil ver que la sucesión $0 \rightarrow \Delta_p^{dif}(U \cap V) \rightarrow \Delta_p^{dif}(U) \oplus \Delta_p^{dif}(V) \rightarrow \Delta_p^{\mathcal{U}, dif}(U \cup V) \rightarrow 0$ es exacta (se prueba igual que para Mayer - Vietoris original).

Si ahora definimos $\Delta_{\mathcal{U}, dif}^p(U \cup V) = \text{Hom}(\Delta_p^{\mathcal{U}, dif}(U \cup V), \mathbb{R})$ entonces la sucesión

$$0 \rightarrow \Delta_{\mathcal{U}, dif}^p(U \cup V) \rightarrow \Delta_{dif}^p(U) \oplus \Delta_{dif}^p(V) \rightarrow \Delta_{dif}^p(U \cap V) \rightarrow 0$$

también es exacta, y ella induce la sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \rightarrow H_{dif}^p(U \cup V, \mathbb{R}) \rightarrow H_{dif}^p(U, \mathbb{R}) \oplus H_{dif}^p(V, \mathbb{R}) \rightarrow H_{dif}^p(U \cap V, \mathbb{R}) \rightarrow H_{dif}^{p+1}(U \cup V, \mathbb{R}) \rightarrow \cdots$$

De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^p(U \cup V) & \longrightarrow & \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) & \longrightarrow & \Omega^p(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Delta_p^{\mathcal{U}, dif}(U \cup V) & \longrightarrow & \Delta_{dif}^p(U) \oplus \Delta_{dif}^p(V) & \longrightarrow & \Delta_{dif}^p(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

resulta la conmutatividad del siguiente diagrama (*)

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{DR}^p(U \cup V) & \longrightarrow & H_{DR}^p(U) \oplus H_{DR}^p(V) & \longrightarrow & H_{DR}^p(U \cap V) & \longrightarrow & H_{DR}^{p+1}(U \cup V) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{dif}^p(U \cup V, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{dif}^p(U, \mathbb{R}) \oplus H_{dif}^p(V, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{dif}^p(U \cap V, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H_{dif}^{p+1}(U \cup V, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Recordemos la siguiente definición topológica: Una función continua $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es *propia* si la preimagen de cada conjunto compacto de Y es un conjunto compacto de X .

Proposición 2.2.4. *Para toda variedad diferenciable M existe una función $f : M \rightarrow [0, \infty)$ propia.*

Demostración. Usaremos dos resultados vistos en topología diferencial, donde X^* denota la compactificación de Alexandroff de un espacio topológico X .

1. Sean X, Y espacios topológicos localmente compactos y $g : X \rightarrow Y$ una función continua. Entonces g es propia si y sólo si g se extiende a una función continua $g^* : X^* \rightarrow Y^*$.
2. Si un espacio topológico X es localmente compacto, T_2 y N_2 entonces X^* es metrizable.

Sea ahora M variedad diferenciable. Entonces M^* es metrizable por (2), y si d denota la distancia en M^* , se tiene que $g : M^* \rightarrow [0, \infty)$ dada por $g(x) = d(x, \infty)$ es continua. Sea $f : M \rightarrow [0, \infty)$ dada por $f(x) = 1/g(x)$, que se extiende a $f^* : M^* \rightarrow [0, \infty)^*$ continua, donde $f(\infty) = \infty$. Por lo tanto f es propia por (1). \square

El siguiente lema es el paso principal para la demostración del Teorema de De Rham. Es una “inducción” en los abiertos de una variedad diferenciable.

Lema 2.2.5. *Sea M una variedad diferenciable y $P(U)$ un enunciado sobre abiertos U de M que satisface:*

1. $P(U)$ es Verdadero si U es difeomorfo a un abierto convexo de \mathbb{R}^n ,
2. Si $P(U), P(V), P(U \cap V)$ son Verdaderos entonces $P(U \cup V)$ es Verdadero,
3. Si U_α es una colección de abiertos disjuntos y $P(U_\alpha)$ es Verdadero para todo α , entonces $P(\bigcup_\alpha U_\alpha)$ es Verdadero.

Entonces $P(M)$ es Verdadero.

Demostración.

1. Caso $M = W$ con W abierto de \mathbb{R}^n .

Observemos primero que $P(U_1 \cup \dots \cup U_n)$ es Verdadero si U_i es un abiertos convexos de M , $i = 1, \dots, n$.

El caso $n = 2$ vale por hipótesis. Para $n = 3$, notar que $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = (U_1 \cup U_2) \cup U_3$ donde $P(U_1 \cup U_2)$ y $P(U_3)$ son Verdaderos. Como $(U_1 \cup U_2) \cap U_3 = (U_1 \cap U_3) \cup (U_2 \cap U_3)$ y por hipótesis tenemos que $P(U_1 \cap U_3), P(U_2 \cap U_3)$ y $P((U_1 \cap U_2) \cap U_3)$ son Verdaderos, resulta que $P(U_1 \cup U_2 \cup U_3)$ es Verdadero. Para $n \in \mathbb{N}$ se usa el mismo argumento.

Por Proposición 2.2.4 sabemos que existe $f : M \rightarrow [0, \infty)$ propia. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $A_n = f^{-1}([n, n+1])$, que es un compacto en M . Sea \mathcal{U}_n un cubrimiento abierto de A_n por abiertos convexos contenidos en $\tilde{A}_n = f^{-1}(n-1/2, n+3/2)$. Por compacidad existe un cubrimiento finito de A_n por abiertos convexos, que llamaremos A_n^* ($A_n \subset A_n^* \subset \tilde{A}_n$).

Notar que $A_i^* \cap A_j^* = \emptyset$ si i, j ambos son pares o impares. Por (3), tenemos entonces que $P(\bigcup_i A_{2i}^*)$ es Verdadero y $P(\bigcup_i A_{2i+1}^*)$ también es Verdadero.

Veamos que $P(\bigcup_i A_{2i}^* \cap \bigcup_i A_{2i+1}^*)$ es Verdadero. Notemos que

$$\bigcup_i A_{2i}^* \cap \bigcup_i A_{2i+1}^* = \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} (A_j^* \cap A_{j+1}^*),$$

donde cada $A_j^* \cap A_{j+1}^*$ es un abierto convexo pues A_j^* y A_{j+1}^* lo son.

Además $A_i^* \cap A_{i+1}^*$ es familia de abiertos convexos disjuntos para los cuales P es Verdadero, entonces por (3) se tiene que $P\left(\bigcup_i A_{2i}^* \cap \bigcup_i A_{2i+1}^*\right)$ resulta Verdadero.

Por (2) $P(M) = P\left(\bigcup_i A_{2i}^* \cup \bigcup_i A_{2i+1}^*\right)$ es Verdadero.

2. Caso general.

Acabamos de probar que $P(U)$ es Verdadero si U es un abierto de M difeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n . En el caso general, reemplacemos en el enunciado y la demostración del Caso 1 las palabras “abierto convexo” por “abierto”. La demostración sigue valiendo, y esto prueba que el enunciado $P(M)$ es Verdadero. \square

En este punto podemos dar la demostración de la Afirmación (A).

Enunciamos primero un lema sobre la homología singular diferenciable.

Lema 2.2.6. *Para todo $i > 0$, se tiene $H_i^{dif}(U, \mathbb{R}) = 0$, donde U es un abierto convexo de \mathbb{R}^n .*

Una demostración de este Lema se puede obtener modificando la prueba del Teorema 1.1.15, utilizando aproximaciones diferenciables de funciones continuas.

Demostración de la Afirmación (A).

Consideremos el siguiente enunciado sobre abiertos de M :

$P(U)$: El homomorfismo de De Rham $\Psi^* : H_{DR}^p(U) \rightarrow H_{dif}^p(U; \mathbb{R})$ es un isomorfismo en U .

Entonces:

1. Cuando U es difeomorfo a un abierto convexo de \mathbb{R}^n debido al Lema de Poincaré tenemos que $H_{DR}^p(U) = 0$ cuando $p > 0$ y $H_{DR}^p(U) = \mathbb{R}$ cuando $p = 0$. Por otro lado por el Lema 2.2.6 tenemos que $H_{dif}^p(U; \mathbb{R}) = 0$ cuando $p > 0$ y sabemos que por ser conexo $H_{dif}^p(U; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ cuando $p = 0$

2. Si $P(U)$, $P(V)$, $P(U \cap V)$ son Verdaderos entonces $P(U \cup V)$ es Verdadero: esto se deduce de el diagrama (*), usando el Lema de los 5.

3. Supongamos que $\{U_\alpha\}$ es una familia disjunta de abiertos tales que $P(U_\alpha)$ es Verdadero. Queremos ver que el enunciado P es Verdadero para $\bigcup_\alpha U_\alpha$.

En efecto, $\Omega^p(\bigcup_\alpha U_\alpha) = \bigoplus_\alpha \Omega^p(U_\alpha)$ y $\Delta_{dif}^p(\bigcup_\alpha U_\alpha, \mathbb{R}) = \bigoplus_\alpha \Delta_{dif}^p(U_\alpha)$, y estas relaciones inducen, en cohomología,

$$H_{DR}^p\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) = \bigoplus_\alpha H_{DR}^p(U_\alpha), \quad H_{dif}^p\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) = \bigoplus_\alpha H_{dif}^p(U_\alpha).$$

Como el homomorfismo de De Rham es un isomorfismo en cada U_α , resulta que es también un isomorfismo en $\bigcup_\alpha U_\alpha$.

La Afirmación (A) es consecuencia del Lema 2.2.5. \square

Hasta ahora hemos probado que la cohomología de De Rham es isomorfa a la cohomología singular diferenciable, $H_{DR}^*(M) \cong H_{dif}^*(M, \mathbb{R})$. A continuación empezaremos a estudiar la relación con la cohomología singular usual.

Teorema 2.2.7. $H_i^{dif}(M, \mathbb{R}) \cong H_i(M, \mathbb{R})$

Demostración. Ya sabemos que $\Delta_*^{dif}(M)$ es un subcomplejo de $\Delta_*(M)$, por lo que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \Delta_i^{dif}(M) & \xrightarrow{\partial} & \Delta_{i-1}^{dif}(M) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow i & & \downarrow i & & \\ \cdots & \longrightarrow & \Delta_i(M) & \xrightarrow{\partial} & \Delta_{i-1}(M) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

donde i es la inclusión, que es un morfismo de complejos. Luego i induce un homomorfismo $i_* : H_i^{dif}(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_i(M, \mathbb{R})$. Probaremos ahora que i_* es un isomorfismo, utilizando el Lema 2.2.5.

Sea $P(U)$ el siguiente enunciado sobre los abiertos de M :

$$P(U) = i_* : H_i^{dif}(U, \mathbb{R}) \rightarrow H_i(U, \mathbb{R}) \text{ es un isomorfismo.}$$

Veamos que se satisfacen las hipótesis del Lema 2.2.5:

(1) Sea U un abierto de M difeomorfo a un abierto convexo de \mathbb{R}^n . Sabemos del Lema 2.2.6 que $H_i^{dif}(U, \mathbb{R}) = 0$ para $i > 0$ y es fácil ver que $H_0^{dif}(U, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Vale lo mismo si cambiamos la homología diferenciable por la usual, y resulta que $H_0^{dif}(U, \mathbb{R}) \xrightarrow{i_*} H_0(U, \mathbb{R})$ es isomorfismo. Luego, $P(U)$ es Verdadero.

(2) Sean U y V abiertos de M tales que $P(U)$, $P(V)$ y $P(U \cap V)$ son verdaderos. Denotamos \mathcal{U} al cubrimiento de $U \cup V$ dado por $\{U, V\}$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta_i^{dif}(U \cap V) & \longrightarrow & \Delta_i^{dif}(U) \oplus \Delta_i^{dif}(V) & \longrightarrow & \Delta_i^{\mathcal{U}, dif}(U \cup V) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Delta_p(U \cap V) & \longrightarrow & \Delta_p(U) \oplus \Delta_p(V) & \longrightarrow & \Delta_p^{\mathcal{U}}(U \cup V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Este diagrama induce el correspondiente diagrama conmutativo en homología:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_i^{dif}(U \cap V) & \longrightarrow & H_i^{dif}(U) \oplus H_i^{dif}(V) & \longrightarrow & H_i^{\mathcal{U}, dif}(U \cup V) \longrightarrow H_{i-1}^{dif}(U \cap V) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow i_* & & \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\ \cdots & \longrightarrow & H_i(U \cap V) & \longrightarrow & H_i(U) \oplus H_i(V) & \longrightarrow & H_i^{\mathcal{U}}(U \cup V) \longrightarrow H_{i-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Utilizando el Teorema 1.1.18 obtenemos que:

$$\iota_* : H_i^{\mathcal{U}}(M) \rightarrow H_i(M) \text{ es un isomorfismo.}$$

Por otro lado se puede probar, adecuando la demostración del Lema 1.1.18, que:

$$\iota_* : H_i^{\mathcal{U}, dif}(M) \rightarrow H_i^{dif}(M) \text{ es un isomorfismo.}$$

Reemplazando estos isomorfismos en el diagrama anterior y usando el Lema de los 5 resulta que $P(U \cup V)$ es Verdadero.

(3) Sea ahora $\{U_\alpha\}$ una colección de abiertos disjuntos de M , tales que $P(U_\alpha)$ es Verdadero para todo α . Observemos que

$$\Delta_i^{dif} \left(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \right) = \bigoplus_{\alpha} \Delta_i^{dif}(U_{\alpha}), \quad \Delta_i \left(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \right) = \bigoplus_{\alpha} \Delta_i(U_{\alpha}).$$

Por lo tanto $H_i^{dif}(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}, \mathbb{R}) = \bigoplus_{\alpha} H_i^{dif}(U_{\alpha}, \mathbb{R})$, $H_i(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}, \mathbb{R}) = \bigoplus_{\alpha} H_i(U_{\alpha}, \mathbb{R})$. Como sabemos que $(i_{\alpha})_* : H_i^{dif}(U_{\alpha}) \rightarrow H_i(U_{\alpha})$ es isomorfismo para todo α , se tiene que

$$\bigoplus_{\alpha} (i_{\alpha})_* : \bigoplus_{\alpha} H_i^{dif}(U_{\alpha}) \rightarrow \bigoplus_{\alpha} H_i(U_{\alpha}) \text{ es isomorfismo.}$$

De acuerdo al Lema 2.2.5, resulta que $P(M)$ es Verdadero, lo que finaliza la prueba. \square

En este punto podemos dar la demostración de la Afirmación (B).

Demostración de la Afirmación (B).

Es consecuencia inmediata del Teorema 2.2.7 y del Corolario 7.8 en [2], que establece que un isomorfismo en homología induce un isomorfismo en cohomología. \square

Esto concluye la demostración del Teorema de De Rham 2.2.1.

Capítulo 3

Aplicaciones

3.1 Grado de una Función

Definición 3.1.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y supongamos que $S \subseteq M$ es una subvariedad compacta y orientada de dimensión p incrustada en M . Una *triangulación* C^∞ de S es una p -cadena C^∞ denotada por $c_0 = \sum_i \sigma_i$ en M con las siguientes propiedades:

1. $\sigma_i : \Delta_p \rightarrow S$ es una incrustación C^∞ que preserva orientación, $i = 1, \dots, n$,
2. Si $i \neq j$, entonces $\sigma_i(\text{Int}(\Delta_p)) \cap \sigma_j(\text{Int}(\Delta_p)) = \phi$,
3. $S = \bigcup_i \sigma_i(\Delta_p)$,
4. $\partial c_0 = 0$.

La clase $[c_0] \in H_n(M; \mathbb{Z})$ se denomina la clase fundamental de M y se denota $[M]$. Si se revierte la orientación de M , la clase fundamental cambia de signo y así se tiene $[-M] = -[M]$.

El siguiente es un teorema importante sobre triangulaciones C^∞ de variedades, pero no incluimos su demostración ya que escapa de los contenidos de este trabajo.

Teorema 3.1.2 (Cairns [3], Whitehead [14]). *Toda variedad diferenciable compacta tiene una triangulación C^∞ , y cualquier triangulación del borde de una variedad con borde puede ser extendida a una triangulación C^∞ de toda la variedad.*

Teorema 3.1.3 ([10], pág. 101). *Sea M una variedad diferenciable cerrada de dimensión n y asumamos que es conexa y orientable. Entonces $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Por lo tanto la clase fundamental $[M]$, que está determinada si se especifica una orientación en M , es el generador de este grupo.*

Nota 7. Sea $[M]$ la clase fundamental de M , representada por la cadena $c_0 = \sum_i \sigma_i$. Para una n -forma ω en M , obtenemos que

$$\int_{c_0} \omega = \sum_i \int_{\sigma_i} \omega = \sum_i \int_{\Delta_p} \sigma_i^* \omega = \sum_i \int_{\sigma_i(\Delta_p)} \omega = \int_M \omega.$$

Definición 3.1.4. Sean M, N variedades conexas cerradas orientadas de la misma dimensión n , y sea $f : M \rightarrow N$ una función C^∞ . Sea $f_* : H_n(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(N; \mathbb{Z})$ el homomorfismo inducido por f ; por lo tanto existe un entero d tal que $f_*([M]) = d[N]$. Este entero es llamado *el grado de f* y es denotado por $\deg(f)$. Intuitivamente el grado cuenta el número de vueltas que da M alrededor de N vía f .

En la siguiente proposición mostraremos una manera de calcular el grado de una función en términos de formas diferenciales.

Proposición 3.1.5. Sean M, N variedades de dimensión n orientadas conexas y cerradas, y sea $f : M \rightarrow N$ una función C^∞ . Sea $\omega \in \Omega^n(N)$ arbitraria. Entonces $\int_M f^*\omega = \deg(f) \int_N \omega$.
En particular, si ω es una forma de volumen en N entonces $\deg(f) = \int_M f^*\omega$.

Demostración. Consideremos el siguiente “pairing” entre la homología singular y la cohomología de De Rham:

$$H_n(M; \mathbb{Z}) \times H_{DR}^n(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle [\sigma], [\omega] \rangle \rightarrow \int_\sigma \omega.$$

Es fácil ver, usando el Teorema 2.1.21, que esta aplicación está bien definida.

Probaremos a continuación que se satisface la siguiente relación:

$$\langle f_*[M], [\omega] \rangle = \langle [M], [f^*\omega] \rangle.$$

Primero lo vemos para un p -simplex σ y una n -forma ω , es decir,

$$\langle f_*[\sigma], [\omega] \rangle = \langle [\sigma], f^*[\omega] \rangle, \quad (3.1)$$

Calculamos ambos miembros de (3.1), obteniendo:

$$\begin{aligned} \langle f_*[\sigma], [\omega] \rangle &= \langle [f_*\sigma], [\omega] \rangle = \int_{f_*\sigma} \omega, \\ \langle [\sigma], f^*[\omega] \rangle &= \langle [\sigma], [f^*\omega] \rangle = \int_\sigma f^*\omega. \end{aligned}$$

Entonces nos queda

$$\int_{f_*\sigma} \omega = \int_{\Delta_n} (f_*\sigma)^*\omega = \int_{\Delta_n} (f \circ \sigma)^*\omega = \int_{\Delta_n} \sigma^*(f^*\omega) = \int_\sigma f^*\omega.$$

Ahora realizando una cuenta análoga con la cadena c_0 tenemos

$$\int_{f_*c_0} \omega = \sum_i \int_{f_*\sigma_i} \omega = \sum_i \int_{\sigma_i} f^*\omega = \int_{c_0} f^*\omega.$$

Utilizando la Nota 7, resulta $\langle f_*[M], [\omega] \rangle = \langle [M], [f^*\omega] \rangle$.

Recordando la definición de grado, se tiene:

$$\langle [M], f^*[\omega] \rangle = \langle \deg(f)[N], [\omega] \rangle$$

Es decir $\int_M f^*\omega = \deg(f) \int_N \omega$. □

Otra forma de definir la función grado es la siguiente. Supongamos que M y N son variedades n -dimensionales compactas, conexas, orientadas y sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Si $q \in N$ es un valor regular de f se sabe que $f^{-1}(q)$ es un subconjunto finito de M y entonces se define el grado de f como el entero $k = \sum_{x \in f^{-1}(q)} \text{sgn}(x)$, donde $\text{sgn}(x) = +1$, si $(df)_x$ preserva orientación y $\text{sgn}(x) = -1$, si $(df)_x$ revierte orientación. Se verifica que esta definición no depende del valor regular elegido y que es equivalente a la dada anteriormente (para la demostración de esta afirmación, ver [7], páginas 457–458).

Ejemplo 3.1.6. Sea $S^1 = \{z = \exp(i\theta) \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ y definimos $f_n : S^1 \rightarrow S^1$, $f_n(z) = z^n$ donde $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que $\deg(f) = n$ utilizando el Teorema 3.1.5.

Identificamos a \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , y consideremos $\iota : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función inclusión. Entonces es claro que f_n está dada por $f_n(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\cos(n\theta), \sin(n\theta))$. Sea $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ dada por $\omega(x_1, x_2) = x_1 dx_2 - x_2 dx_1$, luego $\iota^* \omega \in \Omega^1(S^1)$. Notemos que

$$d\omega = d(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = dx_1 \wedge dx_2 - dx_2 \wedge dx_1 = 2dx_1 \wedge dx_2.$$

Calculamos $\int_{S^1} \iota^* \omega$ usando el Teorema de Stokes 2.1.16:

$$\int_{S^1} \iota^* \omega = \int_{\partial D^2} \iota^* \omega = \int_{D^2} d\omega = \int_{D^2} 2dx_1 \wedge dx_2 = 2 \text{vol}(D^2) = 2\pi.$$

Definimos $\tilde{\omega} = \frac{1}{2\pi} \iota^* \omega$, que resulta ser una forma de volumen en $\Omega(S^1)$. Calculemos $\int_{S^1} f^* \tilde{\omega}$, para ello determinamos primero quién es $f^* \tilde{\omega}$:

$$\begin{aligned} f^* \tilde{\omega} &= \frac{1}{2\pi} (\cos(n\theta) d(\sin(n\theta)) - \sin(n\theta) d(\cos(n\theta))) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\cos(n\theta) \cos(n\theta) n d\theta - \sin(n\theta) (-\sin(n\theta)) n d\theta) \\ &= \frac{n}{2\pi} (\cos(n\theta)^2 + \sin(n\theta)^2) d\theta = \frac{n}{2\pi} d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\deg(f) = \int_{S^1} f^* \tilde{\omega} = \int_{S^1} \frac{n}{2\pi} d\theta = n$.

A continuación determinaremos el grado de una función de la esfera S^{2n+1} a un espacio cociente, llamado el espacio lente. Consideraremos a la esfera S^{2n+1} como un subconjunto de \mathbb{C}^{n+1} de la siguiente manera: $S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$.

Definición 3.1.7. Dados $p \in \mathbb{N}$ y $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Z}$ coprimos con p , definimos el *espacio lente* $L(p; q_1, \dots, q_n)$ como el cociente S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p , donde \mathbb{Z}_p actúa en S^{2n+1} de la siguiente manera: $a(z_0, \dots, z_n) = (\zeta z_0, \zeta^{q_1} z_1, \dots, \zeta^{q_n} z_n)$, donde a es el generador de \mathbb{Z}_p y $\zeta = \exp(2\pi i/p)$.

Los espacios lentes tridimensionales fueron introducidos por Tietze en 1908. Fueron los primeros ejemplos conocidos de 3-variedades que no quedan determinadas por su homología y grupo fundamental, y los ejemplos más simples de variedades cerradas donde el tipo de

ho meo mor fis mo no está determinado por su tipo de homotopía. J.W. Alexander en 1919 demostró que los espacios lentes $L(5; 1)$ y $L(5; 2)$ no son homeomorfos aunque tuvieran los grupos fundamentales isomorfos y la misma homología, no tienen el mismo tipo de homotopía. Otros de los espacios lentes tienen incluso el mismo tipo de homotopía (y por lo tanto los grupos fundamentales y de homología son isomorfos).

Ejemplo 3.1.8. Sea $\pi : S^{2n+1} \rightarrow L(p; q_1, \dots, q_n)$ la proyección canónica. Probaremos que $\deg(\pi) = p$.

Sean $\iota : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ la función inclusión y $\omega \in \Omega^{2n+1}(\mathbb{R}^{2n+2})$ dada por

$$\omega = \sum_{i=1}^{2n+2} (-1)^{i+1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{2n+2},$$

que induce $\iota^* \omega \in \Omega^{2n+1}(S^{2n+1})$. Notar que $d\omega = (2n+2)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_{2n+2}$.

Sea $L_a(z_0, z_1, \dots, z_n) = a(z_0, z_1, \dots, z_n)$ la acción de \mathbb{Z}_p en S^{2n+1} , con a un generador de \mathbb{Z}_p . Podemos extender esta acción a \mathbb{R}^{2n+2} , la que será denotada por \tilde{L}_a . Se cumple la siguiente relación: $\tilde{L}_a \circ \iota = \iota \circ L_a$.

Afirmación: $L_a^*(\iota^* \omega) = \iota^* \omega$.

Para demostrar esta afirmación, probaremos primero que $\tilde{L}_a^*(\omega) = \omega$. Notemos primero que

$$\tilde{L}_a^*(\omega) = \sum_{i=1}^{2n+2} (-1)^{i+1} (x_i \circ \tilde{L}_a) d(x_1 \circ \tilde{L}_a) \wedge \dots \wedge d(\widehat{x_i \circ \tilde{L}_a}) \wedge \dots \wedge d(x_{2n+2} \circ \tilde{L}_a).$$

A continuación analizamos la acción de \mathbb{Z}_p en \mathbb{R}^{2n+2} en coordenadas:

$$\begin{aligned} \zeta z_0 &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}\right) \right) (x_1 + ix_2) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) x_1 - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}\right) x_2 + i \left(\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) x_2 + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}\right) x_1 \right). \end{aligned}$$

Para $j = 1, \dots, n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \zeta^{q_j} z_j &= \left(\cos\left(\frac{2q_j\pi}{p}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2q_j\pi}{p}\right) \right) (x_{2j+1} + ix_{2j+2}) \\ &= \cos\left(\frac{2q_j\pi}{p}\right) x_{2j+1} - \operatorname{sen}\left(\frac{2q_j\pi}{p}\right) x_{2j+2} + i \left(\cos\left(\frac{2q_j\pi}{p}\right) x_{2j+2} + \operatorname{sen}\left(\frac{2q_j\pi}{p}\right) x_{2j+1} \right). \end{aligned}$$

Obtenemos

$$x_1 \circ \tilde{L}_a = c_0 x_1 - s_0 x_2, \quad x_2 \circ \tilde{L}_a = c_0 x_2 + s_0 x_1.$$

con $c_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)$ y $s_0 = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}\right)$

Para $j = 1, \dots, n$

$$x_{2j+1} \circ \tilde{L}_a = c_j x_{2j+1} - s_j x_{2j+2}, \quad x_{2j+2} \circ \tilde{L}_a = s_j x_{2j+1} + c_j x_{2j+2},$$

donde $c_j = \cos\left(\frac{2q_j\pi}{p}\right)$ y $s_j = \sin\left(\frac{2q_j\pi}{p}\right)$.

Además vemos

$$\begin{aligned}
d(x_{2j+1} \circ \tilde{L}_a) \wedge d(x_{2j+2} \circ \tilde{L}_a) &= d(c_j x_{2j+1} - s_j x_{2j+2}) \wedge d(s_j x_{2j+1} + c_j x_{2j+2}) \\
&= (c_j dx_{2j+1} - s_j dx_{2j+2}) \wedge (s_j dx_{2j+1} + c_j dx_{2j+2}) \\
&= c_j^2 dx_{2j+1} \wedge dx_{2j+2} - s_j^2 dx_{2j+2} \wedge dx_{2j+1} \\
&= dx_{2j+1} \wedge dx_{2j+2}.
\end{aligned}$$

Así resulta para $i = 2j + 1$ que

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_a^*(x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{2n+2}) &= (x_i \circ \tilde{L}_a) d(x_1 \circ \tilde{L}_a) \wedge \dots \wedge d(\widehat{x_i \circ \tilde{L}_a}) \wedge \dots \wedge d(x_{2n+2} \circ \tilde{L}_a) \\
&= (c_j x_{2j+1} - s_j x_{2j+2}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \\
&\quad \wedge dx_{2j} \wedge (s_j dx_{2j+1} + c_j dx_{2j+2}) \wedge \dots \wedge dx_{2n+2} \\
&= (c_j s_j x_{2j+1} - s_j^2 x_{2j+2}) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_{2j+2} \wedge \dots \wedge dx_{2n+2} \\
&\quad + (c_j^2 x_{2j+1} - s_j c_j x_{2j+2}) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_{2j+1} \wedge \dots \wedge dx_{2n+2}
\end{aligned}$$

Ahora para $i = 2j + 2$

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_a^*(x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{2n+2}) &= (x_i \circ \tilde{L}_a) d(x_1 \circ \tilde{L}_a) \wedge \dots \wedge d(\widehat{x_i \circ \tilde{L}_a}) \wedge \dots \wedge d(x_{2n+2} \circ \tilde{L}_a) \\
&= (s_j x_{2j+1} + c_j x_{2j+2}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \\
&\quad \wedge dx_{2j} \wedge (c_j x_{2j+1} - s_j x_{2j+2}) \wedge \dots \wedge dx_{2n+2} \\
&= (s_j c_j x_{2j+1} + c_j^2 x_{2j+2}) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_{2j+2} \wedge \dots \wedge dx_{2n+2} \\
&\quad - (s_j^2 x_{2j+1} + c_j s_j x_{2j+2}) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_{2j+1} \wedge \dots \wedge dx_{2n+2}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_a^*(\omega) &= \sum_{i \text{ par}} (-1)(x_i \circ \tilde{L}_a) d(x_1 \circ \tilde{L}_a) \wedge \dots \wedge d(\widehat{x_i \circ \tilde{L}_a}) \wedge \dots \wedge d(x_{2n+2} \circ \tilde{L}_a) \\
&\quad + \sum_{i \text{ impar}} (x_i \circ \tilde{L}_a) d(x_1 \circ \tilde{L}_a) \wedge \dots \wedge d(\widehat{x_i \circ \tilde{L}_a}) \wedge \dots \wedge d(x_{2n+2} \circ \tilde{L}_a) \\
&= \sum_{i \text{ par}} -x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{2n+2} \\
&\quad + \sum_{i \text{ impar}} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_{2n+2} \\
&= \omega.
\end{aligned}$$

Luego, $L_a^*(\iota^*\omega) = (\iota \circ L_a)^*\omega = (\tilde{L}_a \circ \iota)^*\omega = \iota^*(\tilde{L}_a^*\omega) = \iota^*\omega$, lo que prueba la Afirmación.

La Afirmación nos asegura que $\iota^*\omega$ pasa al cociente $L(p; q_1, \dots, q_n)$, es decir que $\iota^*\omega$ induce una $\eta \in \Omega^{2n+1}(L(p; q_1, \dots, q_n))$ tal que $\pi^*\eta = \iota^*\omega$.

Por último debemos comparar esta integral con $\int_{L(p; q_1, \dots, q_n)} \eta$. Como \mathbb{Z}_p actúa libremente en S^{2n+1} , esto nos dice que $\pi : S^{2n+1} \rightarrow L(p; q_1, \dots, q_n)$ es un espacio de cubrimiento de p hojas. Denotaremos por $\{C_1, \dots, C_p\}$ a un cubrimiento de S^{2n+1} que satisface lo siguiente:

1. Si $j \neq i$, entonces $(C_j)^\circ \cap (C_i)^\circ = \emptyset$,
2. $S^{2n+1} = \bigcup_j (C_j)$,
3. $\pi : (C_i)^\circ \rightarrow \pi((C_i)^\circ)$ es un difeomorfismo y $\pi(C_i) = L(p; q_1, \dots, q_n)$ para todo $i = 1, \dots, p$.

Obtenemos así que

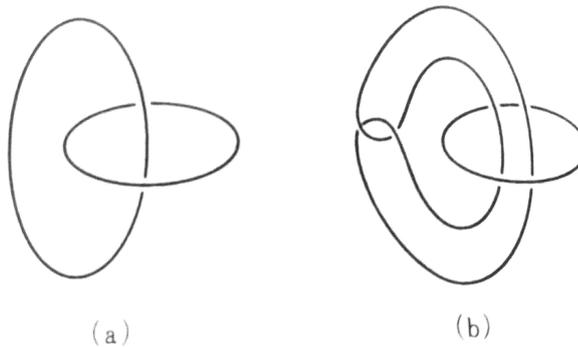
$$\begin{aligned} \int_{S^{2n+1}} \pi^* \circ \eta &= \sum_{i=1}^p \int_{C_i} \pi^* \circ \eta \\ &= \sum_{i=1}^p \int_{\pi(C_i)} \eta \\ &= p \int_{L(p; q_1, \dots, q_n)} \eta. \end{aligned}$$

Resulta de la Proposición 3.1.5 que $\deg(\pi) = p$.

3.1.1 Linking Number

Definición 3.1.9. Un *nudo* es una incrustación (“embedding”) de S^1 en \mathbb{R}^3 .

Asumamos que tenemos dos nudos disjuntos K, L en \mathbb{R}^3 . Se denomina *enlace con dos componentes* a una configuración como en la siguiente figura



Si queremos diferenciar (a) de (b) intuitivamente vemos que en el caso (a) las dos copias de S^1 están entrelazados, en cambio en (b) no.

Matemáticamente hablando sean $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ las parametrizaciones de K , L con las orientaciones correspondientes, luego definimos la función $F : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(s, t) = g(t) - f(s) \quad s, t \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

donde $g(t) - f(s)$ lo podemos expresar como vectores de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, luego la imagen de F está contenida en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Por simplicidad, asumiremos que $s, t \in \mathbb{R}$ y que f y g son funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ periódicas de período 1.

Ahora definimos la proyección $\pi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow S^2$ por $\pi(x) = x / \|x\|$, y $\bar{F} = \pi \circ F$. Entonces se define

$$Lk(K, L) = \deg(\bar{F})$$

y este entero es llamado el *linking number* de K y L .

Se puede ver que el grado es un invariante homotópico y que este número es independiente de la elección de las parametrizaciones de K y L .

El siguiente Teorema relaciona la definición de linking number y la integral de Gauss.

Teorema 3.1.10. *El linking number de dos nudos disjuntos orientados K , L en \mathbb{R}^3 está dado por la integral*

$$Lk(K, L) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 ds \int_0^1 dt \frac{1}{\|g(t) - f(s)\|^3} \det(g(t) - f(s), f'(s), g'(t)) dt,$$

donde f , g son las parametrizaciones de K , L respectivamente, y son periódicas de período 1.

Demostración. Sea $\omega = \frac{1}{\|x\|^3} (x_1 dx_2 \wedge dx_3 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2)$ una 2-forma en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Si $\iota : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}$ denota la función inclusión, se define $\omega_0 = \iota^* \omega$. Usando el Teorema de Stokes 2.1.16 vemos lo siguiente

$$\int_{S^2} \omega_0 = \int_{\partial D^3} \omega_0 = \int_{D^3} d\omega_0 = \int_{D^3} 3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 3 \frac{4\pi}{3} = 4\pi. \quad (3.2)$$

Aquí utilizamos que

$$\begin{aligned} d\omega_0 &= d(x_1 dx_2 \wedge dx_3) - d(x_2 dx_1 \wedge dx_3) + d(x_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= 3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{1}{4\pi} \omega_0$ es una forma de volumen en S^2 . Por otro lado, se puede ver fácilmente que para cualquier $x \in S^2$ vale $\omega_{0x}(v_1, v_2) = \det(x, v_1, v_2)$. Luego por la Proposición 3.1.5 tenemos que el grado de la función $\bar{F} : S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ está dado por

$$\deg \bar{F} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^1 \times S^1} \bar{F}^* \omega_0. \quad (3.3)$$

Sea $\varphi^{-1} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times S^1$ dada por $(s, t) \mapsto (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t})$.

Reemplazando en 3.3 se tiene que

$$\int_{S^1 \times S^1} \bar{F}^* \omega_0 = \int_{[0,1] \times [0,1]} \varphi^* \bar{F}^* \omega_0 = \int_{[0,1] \times [0,1]} (\bar{F} \circ \varphi)^* \omega_0.$$

Sean $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por $\tilde{f}(s) = f(e^{2\pi is})$, $\tilde{g}(t) = g(e^{2\pi it})$. Estas funciones son diferenciables y tienen período 1.

Con estas nuevas funciones definimos la siguiente:

$$G(s, t) = \bar{F} \circ \varphi^{-1}(s, t) = \pi(g(e^{2\pi it}) - f(e^{2\pi is})) = \frac{\tilde{g}(t) - \tilde{f}(s)}{\|\tilde{g}(t) - \tilde{f}(s)\|}.$$

Ahora calculemos $G^* \omega_0$:

$$(G^* \omega_0)_{(s,t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{(s,t)}, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_{(s,t)} \right) = (\pi^* \omega_0)_{F \circ \varphi^{-1}(s,t)} \left(d(F \circ \varphi^{-1})_{(s,t)} \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{(s,t)}, d(F \circ \varphi^{-1})_{(s,t)} \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_{(s,t)} \right) \quad (3.4)$$

$$\text{Notemos primero que } d(F \circ \varphi^{-1})_{(s,t)} = \begin{pmatrix} -\tilde{f}'_1(s) & \tilde{g}'_1(t) \\ -\tilde{f}'_2(s) & \tilde{g}'_2(t) \\ -\tilde{f}'_3(s) & \tilde{g}'_3(t) \end{pmatrix}.$$

Calculemos ahora en general $\pi^* \omega_0$, para lo cual necesitamos una expresión para $(d\pi)_x v$. Para $v \in \mathbb{R}x$ tenemos

$$(d\pi)_x x = \frac{d}{dt} \Big|_0 \pi(xt + x) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \pi((t+1)x) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \frac{(t+1)x}{\|(t+1)x\|} = \frac{d}{dt} \Big|_0 \frac{x}{\|x\|} = 0.$$

Para $v \in (\mathbb{R}x)^\perp$

$$\begin{aligned} (d\pi)_x v &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \pi(vt + x) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \frac{vt + x}{\|vt + x\|} \\ &= \frac{v(t^2 \|v\|^2 + \|x\|^2)^{1/2} - (t^2 \|v\|^2 + \|x\|^2)^{-1/2} t \|v\|^2 (vt + x)}{(t^2 \|v\|^2 + \|x\|^2)} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\|x\| v}{\|x\|^2} = \frac{1}{\|x\|} v. \end{aligned}$$

Entonces si v_i son vectores tangentes en $T_x(\mathbb{R}^3 - \{0\})$ y w_i son las proyecciones ortogonales a $(\mathbb{R}x)^\perp$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} (\pi^* \omega_0)_x(v_1, v_2) &= \omega_{0\pi(x)}((d\pi)_x v_1, (d\pi)_x v_2) \\ &= \|x\|^{-1} \det(x, w_1 \|x\|^{-1}, w_2 \|x\|^{-1}) \\ &= \|x\|^{-3} \det(x, w_1, w_2) \\ &= \|x\|^{-3} \det(x, v_1, v_2) \\ &= \|x\|^{-3} \omega_{0\pi(x)}(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Volviendo a (3.4), se tiene que:

$$(G^* \omega_0)_{(s,t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{(s,t)}, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_{(s,t)} \right) = \det \left(\frac{\tilde{g}(t) - \tilde{f}(s)}{\|\tilde{g}(t) - \tilde{f}(s)\|}, -\frac{\tilde{f}'(s)}{\|\tilde{g}(t) - \tilde{f}(s)\|}, \frac{\tilde{g}'(t)}{\|\tilde{g}(t) - \tilde{f}(s)\|} \right).$$

Esto prueba el teorema, identificando f con \tilde{f} y g con \tilde{g} .

□

3.2 El Invariante de Hopf

Para una función C^∞ arbitraria $f : S^3 \rightarrow S^2$, definimos un número real $H(f) \in \mathbb{R}$ de la siguiente manera. Primero elegimos una 2-forma $\theta \in \Omega^2(S^2)$ tal que $\int_{S^2} \theta = 1$. Resulta $d(f^*\theta) = f^*(d\theta) = 0$, es decir que $f^*\theta$ es una 2-forma cerrada en S^3 . Como $H^2(S^3; \mathbb{R}) = 0$, por el Teorema de De Rham 2.2.1 tenemos que $H_{DR}^2(S^3) = 0$, luego $f^*\theta$ es exacta por lo tanto existe una 1-forma $\eta \in \Omega^1(S^3)$ tal que $f^*\theta = d\eta$. Entonces definimos

$$H(f) = \int_{S^3} \eta \wedge d\eta.$$

$H(f)$ es llamado *el invariante de Hopf*.

Teorema 3.2.1.

1. El valor $H(f)$ es independiente de la elección de θ y η , y sólo depende de f .
2. El valor $H(f)$ depende únicamente de la clase de homotopía de f . Es decir, si dos funciones C^∞ $f_0, f_1 : S^3 \rightarrow S^2$ son homotópicas, entonces $H(f_0) = H(f_1)$.

Demostración.

1) Sea θ' una 2-forma en S^2 tal que $\int_{S^2} \theta' = 1$ y $f^*\theta' = d\eta'$ donde η' es una 1-forma en S^3 . Veamos que

$$\int_{S^3} \eta \wedge d\eta = \int_{S^3} \eta' \wedge d\eta'. \quad (3.5)$$

Como $H^2(S^2; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, por el Teorema de De Rham 2.2.1 tenemos que $H_{DR}^2(S^2) = \mathbb{R}$ entonces al tener dimensión 1 si tomamos dos clases $[\theta'], [\theta] \in H_{DR}^2(S^2)$, vemos que $[\theta'] = c[\theta] = [c\theta]$ donde $c \in \mathbb{R}$, es decir que existe una $\tau \in \Omega^1(S^2)$ tal que $\theta' = c\theta + d\tau$. Como θ, θ' son formas de volumen en S^2 utilizando el Teorema de Stokes 2.1.16 obtenemos que $\int_{S^2} \theta' = c \int_{S^2} \theta = 1$, es decir que $c = 1$.

Por otro lado, $d(\eta' - \eta - f^*\tau) = f^*(\theta' - \theta - d\tau) = 0$ y además $H^1(S^2; \mathbb{R}) = 0$, nuevamente usando el Teorema de De Rham 2.2.1 tenemos que $H_{DR}^1(S^2) = 0$, entonces obtenemos que $\eta' - \eta - f^*\tau$ es exacta, es decir que existe una $g \in \Omega^0(S^3)$ tal que $\eta' = \eta + f^*\tau + dg$.

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \eta' \wedge d\eta' &= (\eta + f^*\tau + dg) \wedge (d\eta + f^*d\tau) \\ &= \eta \wedge d\eta + \eta \wedge (f^*d\tau) + f^*\tau \wedge d\eta + f^*\tau \wedge (f^*d\tau) + dg \wedge d\eta + dg \wedge f^*d\tau \\ &= \eta \wedge d\eta + \eta \wedge d(f^*\tau) + f^*(\tau \wedge (\theta + d\tau)) + d(g(d\eta + f^*d\tau)) \\ &= \eta \wedge d\eta + \eta \wedge d(f^*\tau) + d(g(d\eta + f^*d\tau)), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\tau \wedge (\theta + d\tau) = \tau \wedge \theta' = 0$ pues es una 3-forma en S^2 . Por otro lado vemos que $d(-\eta \wedge f^*\tau) = -d\eta \wedge f^*\tau + \eta \wedge f^*(d\tau)$, y entonces $\eta \wedge d(f^*\tau) = -d(\eta \wedge f^*\tau) + d\eta \wedge f^*\tau = -d(\eta \wedge f^*\tau) + f^*(\theta \wedge \tau) = -d(\eta \wedge f^*\tau)$.

Obtenemos $\eta' \wedge d\eta' = \eta \wedge d\eta + d(-\eta \wedge f^*\tau + g(d\eta + f^*d\tau))$. Entonces utilizando el Teorema de Stokes 2.1.16 nuevamente queda demostrado (3.5).

2) Asumimos que existe una función continua $F : S^3 \times \mathbb{R} \rightarrow S^2$ tal que $F(p, 0) = f_0(p)$, $F(p, 1) = f_1(p)$ para todo $p \in S^3$. Es sabido que toda función continua puede ser aproximada por una función C^∞ , entonces podemos suponer que F es C^∞ .

Tomemos θ una 2-forma de volumen en S^2 , luego $F^*\theta$ es una 2-forma cerrada en $S^3 \times \mathbb{R}$. Como $H^2(S^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) = 0$, por el Teorema de De Rham 2.2.1 se tiene que $H_{DR}^2(S^3 \times \mathbb{R}) = 0$, entonces obtenemos que $F^*\theta$ es exacta, es decir que existe una 1-forma $\tilde{\eta} \in \Omega^1(S^3 \times \mathbb{R})$ tal que $d\tilde{\eta} = F^*\theta$.

Sean $\iota_0 : S^3 \times \{0\} \rightarrow S^3 \times \mathbb{R}$, $\iota_1 : S^3 \times \{1\} \rightarrow S^3 \times \mathbb{R}$ las funciones inclusiones tal que $\iota_0^*\tilde{\eta} = \eta_0$, $\iota_1^*\tilde{\eta} = \eta_1$. Entonces

$$d\eta_0 = d(\iota_0^*\tilde{\eta}) = \iota_0^*d\tilde{\eta} = \iota_0^*F^*\theta = f_0^*\theta,$$

$$d\eta_1 = d(\iota_1^*\tilde{\eta}) = \iota_1^*d\tilde{\eta} = \iota_1^*F^*\theta = f_1^*\theta.$$

Si aplicamos el Teorema de Stokes 2.1.16 a la 3-forma $\tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta}$ en la variedad con borde $M = S^3 \times [0, 1]$, tenemos

$$\int_M d(\tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta}) = \int_{\partial M} \tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta} = \int_{S^3 \times \{1\}} \eta_1 \wedge d\eta_1 - \int_{S^3 \times \{0\}} \eta_0 \wedge d\eta_0$$

Como $d(\tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta}) = 0$, obtenemos $\int_{S^3 \times \{1\}} \eta_1 \wedge d\eta_1 = \int_{S^3 \times \{0\}} \eta_0 \wedge d\eta_0$. Así queda probado (2). \square

Ejemplo 3.2.2. Sea $h : S^3 \rightarrow S^2$ la función de Hopf, definida de la siguiente manera. Considerando a S^3 como la esfera unidad en \mathbb{C}^2 e identificando S^2 con el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^1$, la función de Hopf $h : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ está dada por $h(z_0, z_1) = [z_0, z_1]$. Mostraremos que $H(h) = 1$.

Para probar este punto realizaremos los siguientes pasos:

- Buscaremos una forma de volumen ω en S^2 .
- Determinaremos un difeomorfismo $g : \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$.
- Veremos que el pull back vía g del generador ω de $H^2(S^2; \mathbb{R})$ da un generador θ de $H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{R})$.
- Calcularemos el pull back de θ vía h y encontraremos una 1-forma η en S^3 tal que $h^*\theta = d\eta$.
- Calcularemos $\int_{S^3} \eta \wedge d\eta$.

a) Sean x_1, x_2 y x_3 las coordenadas estandar de \mathbb{R}^3 . Sabemos por cálculos anteriores que $\omega = \frac{1}{4\pi}(x_1dx_2 \wedge dx_3 - x_2dx_1 \wedge dx_3 + x_3dx_1 \wedge dx_2)$ es una forma de volumen en S^2 . Como $\dim(H^2(S^2; \mathbb{R})) = 1$ obtenemos que cualquier otra es un múltiplo de ω .

Consideremos un subconjunto abierto de S^2 donde $x_3 \neq 0$. Como $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ tenemos que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, y derivando esta igualdad obtenemos que $x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3 = 0$.

Como $x_3 \neq 0$ podemos despejar dx_3 y resulta que $dx_3 = -\left(\frac{x_1dx_1 + x_2dx_2}{x_3}\right)$.

Ahora reemplazando en ω obtenemos:

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{4\pi} \left(-x_1 dx_2 \wedge \left(\frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2}{x_3} \right) + x_2 dx_1 \wedge \left(\frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2}{x_3} \right) + x_3 dx_1 \wedge dx_2 \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{x_1^2}{x_3} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{x_2^2}{x_3} dx_1 \wedge dx_2 + x_3 dx_1 \wedge dx_2 \right) \\
&= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{4\pi x_3} dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \frac{1}{4\pi x_3} dx_1 \wedge dx_2.
\end{aligned}$$

b) Proyección estereográfica de S^2 a $\mathbb{C}P^1$. En las coordenadas homogéneas $[z_0, z_1]$ de $\mathbb{C}P^1$, el punto $[z_0, 0]$ es llamado el *punto en el infinito*. En un subconjunto abierto donde $z_1 \neq 0$, podemos usar $z = z_0/z_1$ como la coordenada e identificamos el punto $z = x + iy$ en $\mathbb{C}P^1 - \{[1, 0]\}$ con el punto $(x, y, 0)$ en el (x_1, x_2) -plano en \mathbb{R}^3 . Entonces la proyección estereográfica desde el polo norte $(0, 0, 1)$ es una función de S^2 a $\mathbb{C}P^1$, que envía el polo norte al punto en el infinito. Buscamos la función inversa $g : \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$; notemos que la recta que pasa por $(0, 0, 1)$ y $(x, y, 0)$, parametrizada por $(0, 0, 1) + t(x, y, -1)$, interseca a la esfera unidad cuando $t^2 x^2 + t^2 y^2 + (1 - t)^2 = 1$, es decir $t = 0$ o $t = \frac{2}{1+x^2+y^2}$.

Luego la inversa $g : \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$ está dada por

$$z = x + iy \rightarrow \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right)$$

c) El pull back del generador ω en $H^2(S^2; \mathbb{R})$ vía g nos da un generador $g^*\omega$ en $H^2(\mathbb{C}P^1)$. De las expresiones para ω y g obtenidas en a) y b) resulta que

$$\begin{aligned}
g^*\omega &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1+x^2+y^2}{-1+x^2+y^2} \right) \left(\frac{2(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} dx - \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} dy \right) \wedge \\
&\quad \wedge \left(-\frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} dx + \frac{2(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} dy \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4(1-x^2+y^2)(1+x^2-y^2) - 16x^2y^2}{(1+x^2+y^2)^4} \right) \left(\frac{1+x^2+y^2}{-1+x^2+y^2} \right) dx \wedge dy \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{-4((x^2+y^2)^2 - 1)}{(1+x^2+y^2)^2((x^2+y^2)^2 - 1)} \right) dx \wedge dy \\
&= -\frac{1}{\pi} \frac{dx \wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

En términos de la coordenada compleja $z = x + iy$, obtenemos $g^*\omega = -\frac{i}{2\pi} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$, donde $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$ y $|z|^2 = x^2 + y^2$.

Definimos $\theta = -g^*\omega$; como $z = z_0/z_1$ en términos de las coordenadas homogéneas resulta que

$$\theta = \frac{i}{2\pi} \frac{(z_1 dz_0 - z_0 dz_1) \wedge (\bar{z}_1 d\bar{z}_0 - \bar{z}_0 d\bar{z}_1)}{(|z_0|^2 + |z_1|^2)^2}.$$

d) Buscamos una η tal que $h^*\theta = d\eta$ en S^3 .

Sean $z_0 = y_1 + iy_2$ y $z_1 = y_3 + iy_4$ las coordenadas en \mathbb{C}^2 . Sabemos que si (z_0, z_1) es un punto en la esfera unidad S^3 se cumple que $|z_0|^2 + |z_1|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1$.

Damos ahora una expresi3n para θ en t3rminos de las coordenadas (y_1, \dots, y_4) :

$$\begin{aligned}
h^*\theta &= \frac{i}{2\pi} [(y_3 + iy_4)d(y_1 + iy_2) - (y_1 + iy_2)d(y_3 + iy_4)] \wedge \\
&\quad \wedge [(y_3 - iy_4)d(y_1 - iy_2) - (y_1 - iy_2)d(y_3 - iy_4)] \\
&= \frac{i}{2\pi} [(y_3 + iy_4)dy_1 + (iy_3 - y_4)dy_2 + (-y_1 - iy_2)dy_3 + (-iy_1 + y_2)dy_4] \wedge \\
&\quad \wedge [(y_3 - iy_4)dy_1 + (-iy_3 - y_4)dy_2 + (-y_1 + iy_2)dy_3 + (iy_1 + y_2)dy_4] \\
&= \frac{i}{2\pi} [(y_3 + iy_4)(-iy_3 - y_4) - (iy_3 - y_4)(y_3 - iy_4)]dy_1 \wedge dy_2 \\
&\quad + \frac{i}{2\pi} [(y_3 + iy_4)(-y_1 + iy_2) - (-y_1 - iy_2)(y_3 - iy_4)]dy_1 \wedge dy_3 \\
&\quad + \frac{i}{2\pi} [(y_3 + iy_4)(iy_1 + y_2) - (-iy_1 + y_2)(y_3 - iy_4)]dy_1 \wedge dy_4 \\
&\quad + \frac{i}{2\pi} [(iy_3 - y_4)(-y_1 + iy_2) - (-y_1 - iy_2)(-iy_3 - y_4)]dy_2 \wedge dy_3 \\
&\quad + \frac{i}{2\pi} [(iy_3 - y_4)(iy_1 + y_2) - (-iy_1 + y_2)(-iy_3 - y_4)]dy_2 \wedge dy_4 \\
&\quad + \frac{i}{2\pi} [(-y_1 - iy_2)(iy_1 + y_2) - (-iy_1 + y_2)(-y_1 + iy_2)]dy_3 \wedge dy_4 \\
&= \frac{1}{\pi} [(y_3^2 + y_4^2)dy_1 \wedge dy_2 + (y_4y_1 - y_2y_3)dy_1 \wedge dy_3 \\
&\quad - (y_3y_1 + y_4y_2)dy_1 \wedge dy_4 + (y_3y_1 + y_2y_4)dy_2 \wedge dy_3 \\
&\quad + (y_4y_1 - y_3y_2)dy_2 \wedge dy_4 + (y_1^2 + y_2^2)dy_3 \wedge dy_4].
\end{aligned}$$

Como $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in S^3$ se cumple que $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1$, de donde se deduce que $y_1dy_1 + y_2dy_2 + y_3dy_3 + y_4dy_4 = 0$. Consideramos un subconjunto abierto de S^3 donde $y_3 \neq 0$; all3 podemos despejar dy_3 y resulta que $dy_3 = -\frac{y_1dy_1 + y_2dy_2 + y_4dy_4}{y_3}$.

Ahora reemplazando en $h^*\theta$ nos queda

$$\begin{aligned}
h^*\theta &= \frac{1}{\pi} \left[[(y_3^2 + y_4^2) - (y_4y_1 - y_2y_3)\frac{y_2}{y_3} + (y_3y_1 + y_4y_2)\frac{y_1}{y_3}]dy_1 \wedge dy_2 \right. \\
&\quad + [-(y_4y_1 - y_2y_3)\frac{y_4}{y_3} - (y_3y_1 + y_4y_2) - (y_1^2 + y_2^2)\frac{y_1}{y_3}]dy_1 \wedge dy_4 \\
&\quad \left. + [-(y_3y_1 + y_4y_2)\frac{y_4}{y_3} + (y_4y_1 - y_2y_3) - (y_1^2 + y_2^2)\frac{y_2}{y_3}]dy_2 \wedge dy_4 \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[dy_1 \wedge dy_2 - \frac{y_1}{y_3}dy_1 \wedge dy_4 - \frac{y_2}{y_3}dy_2 \wedge dy_4 \right].
\end{aligned}$$

Queremos ver que $\pi h^*\theta = d\eta$ para alguna 1-forma η en S^3 . Notemos que

$$\pi h^*\theta = d(y_1 \wedge dy_2) + d\alpha,$$

donde $d\alpha = -\frac{y_1}{y_3}dy_1 \wedge dy_4 - \frac{y_2}{y_3}dy_2 \wedge dy_4 = (-\frac{y_1}{y_3}dy_1 - \frac{y_2}{y_3}dy_2) \wedge dy_4$. Entonces podemos escribir la 1-forma α en S^3 como $\alpha = G(y_1, y_2, y_4)dy_4$ para cierta función diferenciable $G(y_1, y_2, y_4)$. Comparando $d\alpha = dG \wedge dy_4$ con la expresión anterior para $d\alpha$, obtenemos que $\frac{\partial G}{\partial y_1} = -\frac{y_1}{y_3}$ y $\frac{\partial G}{\partial y_2} = -\frac{y_2}{y_3}$, donde $y_3 = (1 - y_1^2 - y_2^2 - y_4^2)^{1/2}$.

Por lo tanto es fácil ver que $G(y_1, y_2, y_4) = (1 - y_1^2 - y_2^2 - y_4^2)^{1/2} = y_3$, es decir que $\alpha = y_3 dy_4$ y $\eta = \frac{1}{\pi}(y_1 dy_2 + y_3 dy_4)$.

e) Ahora calculemos $\eta \wedge d\eta$:

$$\begin{aligned}\eta \wedge d\eta &= \frac{1}{\pi^2}(y_1 dy_2 + y_3 dy_4) \wedge d(y_1 dy_2 + y_3 dy_4) \\ &= \frac{1}{\pi^2}(y_1 dy_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4 + y_3 dy_4 \wedge dy_1 \wedge dy_2) \\ &= \frac{1}{\pi^2}(y_1 dy_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4 + y_3 dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_4).\end{aligned}$$

Como el subconjunto donde no está definida η tiene medida nula en S^3 , tenemos que

$$H(h) = \int_{S^3} \eta \wedge d\eta = \int_{S^3} \frac{1}{\pi^2}(y_1 dy_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4 + y_3 dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_4).$$

Utilizaremos el difeomorfismo $f : S^3 \rightarrow S^3$ dado por $f(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_3, y_2, y_1, y_4)$ para llevar a través del pullback la 3-forma $y_1 dy_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4$ a la 3-forma $-y_3 dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_4$. Ya que f revierte orientación obtenemos la siguiente igualdad:

$$H(h) = \frac{2}{\pi^2} \int_{S^3} y_1 dy_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4. \quad (3.6)$$

Para calcular esta integral utilizamos coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} y_1 = \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \cos(\gamma) \\ y_2 = \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma) \\ y_3 = \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) \\ y_4 = \cos(\alpha), \end{cases}$$

donde $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$ y $0 \leq \gamma \leq 2\pi$. Entonces la integral (3.6) resulta

$$\frac{2}{\pi^2} \int_{S^3} y_1 dy_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{sen}^4(\alpha) \text{sen}^3(\beta) \cos^2(\gamma) d\gamma d\beta d\alpha.$$

Recordemos las siguientes fórmulas para n par:

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^n(x) dx &= -\frac{1}{n} \text{sen}^{n-1}(x) \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \text{sen}^{n-2}(x) dx, \\ \int \cos^n(x) dx &= \frac{1}{n} \cos^{n-1}(x) \text{sen}(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx.\end{aligned}$$

Para el caso n impar usamos que $\text{sen}^n(x) = \text{sen}^{2k+1}(x) = (\text{sen}^2(x))^k(\text{sen}(x))$, y análogamente para $\text{cos}^n(x)$.

Podemos calcular ahora la integral en (3.6)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \text{sen}^4(\alpha) d\alpha &= \frac{3}{4} \int_0^\pi \text{sen}^2(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{3}{4} \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} d\alpha \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi 1 d\alpha \right) \\ &= \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \text{sen}^3(\beta) d\beta &= \int_0^\pi \text{sen}^2(\beta) \text{sen}(\beta) d\beta \\ &= \int_0^\pi (1 - \cos^2(\beta)) \text{sen}(\beta) d\beta \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{cos}^2(\gamma) d\gamma &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 d\gamma \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que la integral (3.6) es igual a 1, y así $H(h) = 1$.

3.3 Cohomología de De Rham de Grupos de Lie y Cocientes Compactos

Un *grupo de Lie* G es una variedad C^∞ que admite una estructura de grupo tal que las operaciones de grupo

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad m(g, h) = gh, \quad i : G \rightarrow G, \quad i(g) = g^{-1},$$

son funciones diferenciables.

Un *álgebra de Lie* \mathfrak{g} (real) es un \mathbb{R} -espacio vectorial junto con una operación llamada *corchete* $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que es bilineal, antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi. Es bien sabido que todo grupo de Lie G tiene asociada un álgebra de Lie \mathfrak{g} de la misma dimensión. En efecto, \mathfrak{g} es el espacio vectorial formado por todos los campos invariantes a izquierda en G , equipado con el corchete de Lie de campos vectoriales.

Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Sabemos que se puede identificar el espacio dual \mathfrak{g}^* de \mathfrak{g} con el conjunto de todas las 1-formas invariantes a izquierda en G . Tenemos naturalmente la función inclusión $i : \mathfrak{g}^* \rightarrow \Omega^1(G)$. Tomando el producto exterior de 1-formas invariantes a izquierda, se puede ver que i induce un homomorfismo $i : \Lambda^* \mathfrak{g}^* \rightarrow \Omega^*(G)$. Es fácil ver que i es inyectiva y por lo tanto su imagen coincide con el conjunto de todas las formas diferenciales invariantes a izquierda en G . Luego obtenemos la identificación

$$\Lambda^* \mathfrak{g}^* = \{\text{formas diferenciales invariantes a izquierda en } G\}.$$

La derivada exterior de formas diferenciales invariantes a izquierda es nuevamente invariante a izquierda. Por lo tanto $\Lambda^* \mathfrak{g}^*$ es cerrado en el complejo de De Rham $\Omega^*(G)$ de G con respecto a la derivada exterior, es decir, resulta ser un subcomplejo.

Obtenemos el siguiente diagrama conmutativo donde i es la inclusión

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d} & \Omega^k(G) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}(G) & \xrightarrow{d} & \dots \\ & & \uparrow i & & \uparrow i & & \\ \dots & \xrightarrow{d} & \Lambda^k(\mathfrak{g}^*) & \xrightarrow{d} & \Lambda^{k+1}(\mathfrak{g}^*) & \xrightarrow{d} & \dots \end{array}$$

En general el homomorfismo $i^* : H^*(\Lambda^* \mathfrak{g}^*) \rightarrow H^*(\Omega^*(G)) \cong H^*(G; \mathbb{R})$ inducido por i no es una inyección ni una suryección. Sin embargo, cuando G es compacto, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.1 (Cartan-Eilenberg). *Sea G un grupo de Lie conexo y compacto. Entonces la inclusión natural $i : \Lambda^* \mathfrak{g}^* \rightarrow \Omega^*(G)$ induce un isomorfismo $H^*(\Lambda^* \mathfrak{g}^*) \cong H^*(G; \mathbb{R})$.*

La cohomología $H^*(\Lambda^* \mathfrak{g}^*)$ del complejo $\Lambda^* \mathfrak{g}$ es denominada la cohomología del álgebra de Lie \mathfrak{g} , y se la denota simplemente por $H^*(\mathfrak{g})$.

Ejemplo 3.3.2. Sea $SU(2)$ el grupo unitario especial de dimensión 3 dado por

$$SU(2) = \{A \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid AA^* = \text{Id}, \det(A) = 1\}.$$

Se puede ver que es un grupo de Lie conexo y compacto.

Sea $\mathfrak{su}(2)$ su álgebra de Lie, dada por $\mathfrak{su}(2) = \{A \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid A + A^* = 0, \text{tr}(A) = 0\}$. Podemos elegir una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, donde los corchetes de Lie no nulos son

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = e_2. \quad (3.7)$$

Sea $\mathcal{B}' = \{e^1, e^2, e^3\}$ la base dual de \mathcal{B} . Entonces (3.7) implica que la diferencial $d^1 : \mathfrak{su}(2)^* \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{su}(2)^*$ está dada por

$$d^1 e^1 = -e^2 \wedge e^3, \quad d^1 e^2 = -e^3 \wedge e^1, \quad d^1 e^3 = -e^1 \wedge e^2. \quad (3.8)$$

Por lo tanto el primer grupo de cohomología es

$$H^1(\mathfrak{su}(2)) = \frac{\text{Nu}(d^1)}{\text{Im}(d^0)} = \frac{\langle 0 \rangle}{\langle 0 \rangle} = 0.$$

Usando (3.8) vemos que la diferencial $d^2 : \Lambda^2 \mathfrak{su}(2)^* \rightarrow \Lambda^3 \mathfrak{su}(2)^*$ es

$$d^2(e^1 \wedge e^2) = d^2(e^1 \wedge e^3) = d^2(e^2 \wedge e^3) = 0.$$

El segundo grupo de cohomología es entonces

$$H^2(\mathfrak{su}(2)) = \frac{\text{Nu}(d^2)}{\text{Im}(d^1)} = \frac{\langle e^1 \wedge e^2, e^1 \wedge e^3, e^2 \wedge e^3 \rangle}{\langle -e^2 \wedge e^3, -e^3 \wedge e^1, -e^1 \wedge e^2 \rangle} = 0.$$

Claramente la diferencial $d^3 : \Lambda^3 \mathfrak{su}(2)^* \rightarrow \Lambda^4 \mathfrak{su}(2)^* = \{0\}$ es nula, de donde resulta que el tercer grupo de cohomología es

$$H^3(\mathfrak{su}(2)) = \frac{\text{Nu}(d^3)}{\text{Im}(d^2)} = \frac{\langle e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \rangle}{\langle 0 \rangle} = \langle e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \rangle.$$

Entonces utilizando el Teorema 3.3.1 tenemos que los grupos de cohomología de De Rham de $SU(2)$ son isomorfos a los grupos de cohomología del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Así obtenemos que los números de Betti de $SU(2)$ son $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ y $b_3 = 1$. Esto está de acuerdo con el hecho de que $SU(2)$ es difeomorfo a la esfera S^3 .

Pasamos a continuación a considerar otra familia de grupos de Lie, los *nilpotentes*.

Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , se define la *serie central descendente* recursivamente de la siguiente manera: $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, ..., $\mathfrak{g}_{j+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j]$. Diremos que el álgebra de Lie \mathfrak{g} es *nilpotente*, si existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}_j = 0$. Si k es el menor natural para el cual $\mathfrak{g}_k = 0$, se dice que \mathfrak{g} es k -pasos nilpotente. Un grupo de Lie es *nilpotente* si su álgebra de Lie lo es.

Es sabido que un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo es difeomorfo a un espacio euclídeo, por lo que es imposible tener un análogo del Teorema 3.3.1 para esta clase de grupos. Sin embargo, la cohomología de un álgebra de Lie nilpotente sí nos permite determinar la cohomología de De Rham de ciertas variedades compactas obtenidas como cociente del grupo de Lie nilpotente asociado.

Recordemos que una variedad compacta M es una *nilvariedad* si es de la forma $M = G/\Gamma$, donde G es un grupo de Lie simplemente conexo, nilpotente y Γ es un subgrupo discreto cocompacto (retículo). El siguiente criterio caracteriza los grupos de Lie nilpotentes que admiten retículos.

Teorema 3.3.3 (Criterio de Malcev [9]). *Un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo contiene un subgrupo discreto co-compacto si y sólo si su álgebra de Lie admite una base tal que las constantes de estructura asociadas son números racionales.*

El siguiente teorema relaciona la cohomología de De Rham de una nilvariedad con la cohomología del álgebra de Lie nilpotente correspondiente. Notemos primero que toda forma diferenciable invariante a izquierda ω en un grupo nilpotente G induce una única forma diferenciable $\tilde{\omega}$ en G/Γ tal que $\pi^*\tilde{\omega} = \omega$. Esto induce una inclusión natural $i : \Lambda^*\mathfrak{g}^* \hookrightarrow \Omega^*(G/\Gamma)$.

Teorema 3.3.4 (Nomizu [11]). *Sea $M = G/\Gamma$ una nilvariedad; entonces $i : \Lambda^*\mathfrak{g}^* \hookrightarrow \Omega^*(G/\Gamma)$ induce un isomorfismo en cohomología $i^* : H^k(\mathfrak{g}) \rightarrow H_{DR}^k(M)$.*

Observar que la cohomología real de una nilvariedad no depende del retículo considerado.

Como una aplicación, determinaremos la cohomología de De Rham de una nilvariedad asociada al grupo de Heisenberg H_5 . Por simplicidad, utilizaremos la notación e^{i_1, i_2, \dots, i_k} para representar al producto exterior $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$.

Ejemplo 3.3.5. Sea H_5 el grupo de Heisenberg de dimensión 5 dado por

$$H_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & I & y^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(4, \mathbb{R}) \mid x, y \in \mathbb{R}^2, \quad z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Consideramos el subgrupo Γ de H_5 formado por todas las matrices de H_{2n+1} con coeficientes enteros. Se puede ver que Γ es un subgrupo discreto co-compacto de H_5 .

Si \mathfrak{h}_5 es el álgebra de Lie de H_5 , entonces se tiene que

$$\mathfrak{h}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(4, \mathbb{R}) \mid x, y \in \mathbb{R}^2, \quad z \in \mathbb{R} \right\},$$

y el corchete de Lie está dado por

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \tilde{x} & \tilde{z} \\ 0 & 0 & \tilde{y}^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] &= [X, Y] = XY - YX \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle x, \tilde{y} \rangle - \langle \tilde{x}, y \rangle \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definimos $E_{i,j}$ como un elemento de $\text{Mat}(4, \mathbb{R})$ donde la entrada (i, j) es igual a 1 y las restantes son 0. Entonces es fácil ver que $\mathcal{B} = \{e_1 = E_{1,2}, e_2 = E_{1,3}, e_3 = E_{2,4}, e_4 = E_{3,4}, e_5 = E_{1,4}\}$ es una base de \mathfrak{h}_5 . Luego los corchetes de Lie no nulos son

$$[e_1, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_4] = e_5. \quad (3.9)$$

Sea $\mathcal{B}' = \{e^1, e^2, e^3, e^4, e^5\}$ la base dual de \mathcal{B} . Entonces (3.9) implica que la diferencial $d^1 : \mathfrak{h}_5^* \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{h}_5^*$ está dada por

$$d^1 e^i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad d^1 e^5 = -e^{1,3} - e^{2,4}. \quad (3.10)$$

Por lo tanto el primer grupo de cohomología es

$$H^1(\mathfrak{h}_5) = \frac{\text{Nu}\{d^1\}}{\text{Im}\{d^0\}} = \frac{\langle e^1, e^2, e^3, e^4 \rangle}{\langle 0 \rangle} = \langle [e^1], [e^2], [e^3], [e^4] \rangle.$$

Ahora, por (3.10), la diferencial $d^2 : \Lambda^2 \mathfrak{h}_5^* \rightarrow \Lambda^3 \mathfrak{h}_5^*$ está dada por:

$$d^2(e^1 \wedge e^5) = e^{1,2,4}, \quad d^2(e^2 \wedge e^5) = e^{2,1,3}, \quad d^2(e^3 \wedge e^5) = e^{3,2,4}, \quad d^2(e^4 \wedge e^5) = e^{4,1,3},$$

y las demás son cero. Luego, el segundo grupo de cohomología es

$$\begin{aligned} H^2(\mathfrak{h}_5) &= \frac{\text{Nu}\{d^2\}}{\text{Im}\{d^1\}} = \frac{\langle e^{1,2}, e^{1,3}, e^{1,4}, e^{2,3}, e^{2,4}, e^{3,4} \rangle}{\langle -e^{1,3} - e^{2,4} \rangle} \\ &= \frac{\langle e^{1,2}, e^{1,3}, e^{1,4}, e^{2,3}, e^{3,4}, e^{1,3} + e^{2,4} \rangle}{\langle -e^{1,3} - e^{2,4} \rangle} \\ &= \langle [e^{1,2}], [e^{1,3}], [e^{1,4}], [e^{2,3}], [e^{3,4}] \rangle. \end{aligned}$$

La diferencial $d^3 : \Lambda^3 \mathfrak{h}_5^* \rightarrow \Lambda^4 \mathfrak{h}_5^*$ queda

$$d^3(e^1 \wedge e^3 \wedge e^5) = -e^{1,3,2,4}, \quad d^3(e^2 \wedge e^4 \wedge e^5) = -e^{2,4,1,3},$$

y las demás son cero. Por lo tanto el tercer grupo de cohomología es

$$\begin{aligned} H^3(\mathfrak{h}_5) &= \frac{\text{Nu}\{d^3\}}{\text{Im}\{d^2\}} = \frac{\langle e^{1,2,3}, e^{1,2,4}, e^{1,2,5}, e^{1,3,4}, e^{1,4,5}, e^{2,3,4}, e^{2,3,5}, e^{3,4,5}, e^{1,3,5} - e^{2,4,5} \rangle}{\langle e^{1,2,4}, e^{2,1,3}, e^{3,2,4}, e^{4,1,3} \rangle} \\ &= \langle [e^{1,2,5}], [e^{1,4,5}], [e^{2,3,5}], [e^{3,4,5}], [e^{1,3,5} - e^{2,4,5}] \rangle. \end{aligned}$$

Es fácil ver que la diferencial $d^4 : \Lambda^4 \mathfrak{h}_5^* \rightarrow \Lambda^5 \mathfrak{h}_5^*$ es idénticamente 0, por lo que el cuarto grupo de cohomología es

$$H^4(\mathfrak{h}_5) = \frac{\text{Nu}\{d^4\}}{\text{Im}\{d^3\}} = \frac{\langle e^{1,2,3,4}, e^{1,2,3,5}, e^{1,2,4,5}, e^{1,3,4,5}, e^{2,3,4,5} \rangle}{\langle -e^{1,3,2,4} \rangle} = \langle [e^{1,2,3,5}], [e^{1,2,4,5}], [e^{1,3,4,5}], [e^{2,3,4,5}] \rangle.$$

Por último $d^5(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \wedge e^5) = 0$ y así tenemos que el quinto grupo de cohomología es

$$H^5(\mathfrak{h}_5) = \frac{\text{Nu}\{d^5\}}{\text{Im}\{d^4\}} = \frac{\langle e^{1,2,3,4,5} \rangle}{\langle 0 \rangle} = \langle [e^{1,2,3,4,5}] \rangle.$$

Si M es la nilvariedad $M = H_5/\Gamma$, entonces utilizando el Teorema 3.3.4 tenemos que los grupos de cohomología de De Rham de M son isomorfos a los grupos de cohomología del álgebra de Lie \mathfrak{h}_5 . En particular, los números de Betti de M son

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 4, \quad b_2 = 5, \quad b_3 = 5, \quad b_4 = 4, \quad b_5 = 1.$$

Ahora veamos la correspondencia con las formas invariantes a izquierda. Consideramos la siguiente correspondencia de H_5 con \mathbb{R}^5

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & z \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix}$$

Se puede ver que $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ es una base de \mathfrak{h}_5 , considerada como el conjunto de campos invariantes a izquierda de H_5 . Luego

$$\mathcal{B}' = \{dx_1, dx_2, dy_1, dy_2, -x_1 dy_1 - x_2 dy_2 + dz\}$$

es una base de \mathfrak{h}_5 formada por 1-formas invariantes a izquierda. Estas 1-formas en H_5 inducen 1-formas en la nilvariedad M , a las que seguiremos llamando con el mismo nombre.

Entonces podemos dar los generadores de los grupos de cohomología de De Rham de M de acuerdo a esta base:

$$H_{DR}^1(M) = \langle [dx_1], [dx_2], [dy_1], [dy_2] \rangle$$

$$H_{DR}^2(M) = \langle [dx_1 \wedge dx_2], [dx_1 \wedge dy_1], [dx_1 \wedge dy_2], [dx_2 \wedge dy_2], [dy_1 \wedge dy_2] \rangle$$

$$H_{DR}^3(M) = \langle [dx_1 \wedge dx_2 \wedge (-x_1 dy_1 - x_2 dy_2 + dz)], [dx_1 \wedge dy_2 \wedge (-x_1 dy_1 - x_2 dy_2 + dz)], \\ [dx_2 \wedge dy_1 \wedge (-x_1 dy_1 - x_2 dy_2 + dz)], [dy_1 \wedge dy_2 \wedge (-x_1 dy_1 - x_2 dy_2 + dz)], \\ [dx_1 \wedge dy_1 \wedge (-x_1 dy_1 - x_2 dy_2 + dz) - dx_2 \wedge dy_2 \wedge (-x_1 dy_1 - x_2 dy_2 + dz)] \rangle$$

$$H_{DR}^4(M) = \langle [dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge (-x_1 dy_1 - x_2 dy_2 + dz)], [dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \wedge (-x_1 dy_1 - x_2 dy_2 + dz)], \\ [dx_1 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \wedge (-x_1 dy_1 - x_2 dy_2 + dz)], [dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \wedge (-x_1 dy_1 - x_2 dy_2 + dz)] \rangle$$

$$H_{DR}^5(M) = \langle [dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \wedge (-x_1 dy_1 - x_2 dy_2 + dz)] \rangle.$$

3.4 Productos Triples de Massey

Las formas diferenciales contienen información completa sobre la cohomología de variedades, como muestra el Teorema de De Rham 2.2.1. Más precisamente, esta información incluye tanto la estructura espacio vectorial de la cohomología real y la estructura de álgebra definida por el producto exterior. En esta sección veremos que las formas diferenciales miden también una estructura más profunda definida en la cohomología. Esta estructura contiene una sucesión infinita de productos de grado superior llamados *productos de Massey*, de los cuales veremos los más simples.

Sea M una variedad diferenciable, consideremos clases x, y, z en la cohomología de De Rham de M , de grado k, l, m respectivamente, tales que satisfacen la siguiente relación:

$$x \wedge y = y \wedge z = 0.$$

Elegimos formas cerradas $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^*(M)$ en M que son los representantes de las clases x, y, z respectivamente. Estas cumplen lo siguiente $\alpha \wedge \beta = d\lambda$ y $\beta \wedge \gamma = d\mu$ donde $\lambda \in \Omega^{k+l-1}(M)$ y $\mu \in \Omega^{l+m-1}(M)$.

Entonces obtenemos $d(\lambda \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \mu) = \alpha \wedge \beta \wedge \gamma - \alpha \wedge \beta \wedge \gamma = 0$, pues α y γ son cerradas. Por lo tanto $\lambda \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \mu$ es una forma cerrada.

Luego se define el *producto triple de Massey* de x, y, z como

$$\langle x, y, z \rangle = [[\lambda \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \mu]] \in H^{k+l+m-1}(M)/I(x, z),$$

donde $I(x, z) = x \wedge H_{DR}^{l+m-1}(M) + z \wedge H_{DR}^{k+l-1}(M)$ es el subespacio de $H^{k+l+m-1}(M)$ que consiste de todas las clases de cohomología de la forma $x \wedge u + z \wedge v$, donde $u \in H_{DR}^{l+m-1}(M)$ y $v \in H_{DR}^{k+l-1}(M)$.

Verificaremos a continuación la buena definición de este producto, es decir, que no depende de la elección de las formas diferenciales usadas en la definición.

Sean $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ y $\tilde{\gamma}$ formas en M de grado k, l, m respectivamente tales que $[\tilde{\alpha}] = x = [\alpha]$, $[\tilde{\beta}] = y = [\beta]$ y $[\tilde{\gamma}] = z = [\gamma]$.

Esto nos dice que $\tilde{\alpha} = \alpha + d\theta$, $\tilde{\beta} = \beta + d\tau$ y $\tilde{\gamma} = \gamma + d\eta$ donde θ, τ y η son formas en M de grado $k-1, l-1, m-1$ respectivamente.

Calculemos $\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}$ y $\tilde{\beta} \wedge \tilde{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} &= (\alpha + d\theta) \wedge (\beta + d\tau) \\ &= \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d\tau + d\theta \wedge \beta + d\theta \wedge d\tau \\ &= d\lambda + d((-1)^k \alpha \wedge \tau + \theta \wedge \beta + \theta \wedge \tau) \\ &= d(\lambda + (-1)^k \alpha \wedge \tau + \theta \wedge \beta + \theta \wedge d\tau). \end{aligned}$$

Obtenemos que $\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta} = d\tilde{\lambda}$, donde $\tilde{\lambda} = \lambda + (-1)^k \alpha \wedge \tau + \theta \wedge \beta + \theta \wedge d\tau$. Similarmente se verifica que $\tilde{\beta} \wedge \tilde{\gamma} = d\tilde{\mu}$, donde $\tilde{\mu} = \mu + (-1)^l \beta \wedge \eta + \tau \wedge \gamma + \tau \wedge d\eta$.

Calculamos ahora $\tilde{\lambda} \wedge \tilde{\gamma} - (-1)^k \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\mu}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda} \wedge \tilde{\gamma} - (-1)^k \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\mu} &= (\lambda + (-1)^k \alpha \wedge \tau + \theta \wedge \beta + \theta \wedge d\tau) \wedge (\gamma + d\eta) \\
&\quad - (-1)^k (\alpha + d\theta) \wedge (\mu + (-1)^l \beta \wedge \eta + \tau \wedge \gamma + \tau \wedge d\eta) \\
&= (\lambda \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \mu) + \lambda \wedge d\eta + (-1)^k \alpha \wedge \tau \wedge \gamma \\
&\quad + (-1)^k \alpha \wedge \tau \wedge d\eta + \theta \wedge \beta \wedge \gamma + \theta \wedge \beta \wedge d\eta \\
&\quad + \theta \wedge d\tau \wedge \gamma + \theta \wedge d\tau \wedge d\eta - (-1)^k (-1)^l \alpha \wedge \beta \wedge \eta \\
&\quad - (-1)^k \alpha \wedge \tau \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \tau \wedge d\eta - (-1)^k d\theta \wedge \mu \\
&\quad - (-1)^k (-1)^l d\theta \wedge \beta \wedge \eta - (-1)^k d\theta \wedge \tau \wedge \gamma - (-1)^k d\theta \wedge \tau \wedge d\eta \\
&= (\lambda \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \mu) + (-1)^{k-1} d(\theta \wedge \mu) + (-1)^{k+l-1} d(\lambda \wedge \eta) \\
&\quad + (-1)^{k+l-1} d(\theta \wedge \beta \wedge \eta) + (-1)^{k-1} d(\theta \wedge \tau \wedge \gamma) + (-1)^{k-1} d(\theta \wedge \tau \wedge d\eta).
\end{aligned}$$

Por lo tanto cuando cambiamos los representantes de las clases x, y, z vemos que

$$[\tilde{\lambda} \wedge \tilde{\gamma} - (-1)^k \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\mu}] = [\lambda \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \mu] \in H^{k+l+m-1}(M).$$

Obtenemos así que $[[\tilde{\lambda} \wedge \tilde{\gamma} - (-1)^k \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\mu}]] = [[\lambda \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \mu]]$ en $H^{k+l+m-1}(M)/I(x, z)$.

Por otro lado si nos quedamos con las clases $[\alpha]$, $[\beta]$ y $[\gamma]$, pero cambiamos λ y μ por $\tilde{\lambda} = \lambda + \omega_1$, $\tilde{\mu} = \mu + \omega_2$, donde $d\omega_1 = 0$ y $d\omega_2 = 0$, y calculamos $[\tilde{\lambda} \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \tilde{\mu}]$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda} \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \tilde{\mu} &= (\lambda + \omega_1) \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge (\mu + \omega_2) \\
&= \lambda \wedge \gamma + \omega_1 \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \mu - (-1)^k \alpha \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

Tomando clase de cohomología vemos que $[\tilde{\lambda} \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \tilde{\mu}] \neq [\lambda \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \mu]$ en $H^{k+l+m-1}(M)$, pero al cocientar por $I(x, z)$ tenemos que

$$[[\tilde{\lambda} \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \tilde{\mu}]] = [[\lambda \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \mu]],$$

ya que $[\omega_1 \wedge \gamma - (-1)^k \alpha \wedge \omega_2]$ está en $I(x, z)$.

Los productos de Massey fueron introducidos en [12] y proveen una obstrucción para la formalidad de variedades diferenciables (ver el Apéndice para las definiciones correspondientes). En efecto, se sabe que en toda variedad formal, los productos triples de Massey son nulos. En consecuencia, si una variedad posee algún producto triple de Massey no nulo, no puede ser formal. Recordamos los siguientes resultados importantes:

1. Toda variedad de Kähler compacta es formal [4].
2. Si una nilvariedad es formal entonces es difeomorfa a un toro [5].

En los ejemplos a continuación determinaremos algunos productos triples de Massey no nulos en ciertas familias de nilvariedades: las correspondientes a las álgebras de Heisenberg \mathfrak{h}_{2n+1} y a las álgebras de Lie filiformes standard \mathfrak{g}_n .

Ejemplo 3.4.1. Sea H_{2n+1} el grupo de Heisenberg de dimensión $2n + 1$, dado por

$$H_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & c \\ 0 & I & y^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n+2, \mathbb{R}) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R} \right\},$$

y consideramos el subgrupo Γ de H_{2n+1} formado por todas las matrices de H_{2n+1} con coeficientes enteros. Se puede ver que Γ es un subgrupo discreto co-compacto de H_{2n+1} , y denotaremos por $M = H_{2n+1}/\Gamma$ a la nilvariedad asociada.

A continuación vamos a usar el Teorema 3.3.4 para encontrar un producto triple de Massey no nulo en la cohomología de De Rham de M .

Si \mathfrak{h}_{2n+1} es el álgebra de Lie de H_{2n+1} , entonces se tiene que

$$\mathfrak{h}_{2n+1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & c \\ 0 & 0 & y^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n+2, \mathbb{R}) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R} \right\},$$

y el corchete de Lie está dado por

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 0 & x & c \\ 0 & 0 & y^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \tilde{x} & \tilde{c} \\ 0 & 0 & \tilde{y}^t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] &= [X, Y] = XY - YX \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle x, \tilde{y} \rangle - \langle \tilde{x}, y \rangle \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definimos $E_{i,j}$ como un elemento de $\text{Mat}(n+2, \mathbb{R})$ donde la entrada (i, j) es igual a 1 y las restantes son 0. Entonces es fácil ver que

$$\mathcal{B} = \{e_i = E_{1,i+1}, \quad e_{i+n} = E_{i+1,n+2}, \quad e_{2n+1} = E_{1,n+2} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

es una base de \mathfrak{h}_{2n+1} . Luego los corchetes de Lie no nulos son

$$[e_i, e_{n+i}] = e_{2n+1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Sea $\mathcal{B}' = \{e^i \mid 1 \leq i \leq 2n+1\}$ la base dual de \mathcal{B} . Entonces (3.11) implica que la diferencial $d: \mathfrak{h}_{2n+1}^* \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{h}_{2n+1}^*$ está dada por

$$de^i = 0, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad de^{2n+1} = - \sum_{i=1}^n e^i \wedge e^{n+i}. \quad (3.12)$$

Elegimos

$$\alpha = e^1, \quad \beta = e^{2,3,\dots,n+1} \quad y \quad \gamma = e^1.$$

Luego $\alpha \wedge \beta = e^1 \wedge e^{2,3,\dots,n+1} = d\lambda$ y $\beta \wedge \gamma = e^{2,3,\dots,n+1} \wedge e^1 = d\mu$, donde $\lambda = \nu$, $\mu = (-1)^n \nu$ y $\nu = -e^{2,3,\dots,n,2n+1}$. Entonces

$$[[\lambda \wedge \gamma + \alpha \wedge \mu]] = [[2(-1)^{n+1} e^{1,2,\dots,n,2n+1}]] \in H^{n+1}(\mathfrak{h}_{2n+1})/I([\alpha], [\gamma]),$$

donde $I([\alpha], [\gamma]) = [\alpha] \wedge H^n(\mathfrak{h}_{2n+1}) + [\gamma] \wedge H^n(\mathfrak{h}_{2n+1}) = [e^1] \wedge H^n(\mathfrak{h}_{2n+1})$. Veamos que esta clase es no nula, o equivalentemente que $[e^{1,2,\dots,n,2n+1}]$ no pertenece al ideal $I([\alpha], [\gamma])$.

Denotaremos $\mathfrak{u} = \text{span}\{e_1, \dots, e_{2n}\}$, un subespacio que aparecerá en los cálculos siguientes. Supongamos que $[e^{1,2,\dots,n,2n+1}] \in [e^1] \wedge H^n(\mathfrak{h}_{2n+1})$, es decir que

$$e^{1,2,\dots,n,2n+1} = e^1 \wedge \eta + d\tau, \quad (3.13)$$

donde $\eta, \tau \in \Lambda^n(\mathfrak{h}_{2n+1}^*)$ con $d\eta = 0$.

Por otro lado podemos escribir a $\eta = \omega \wedge e^{2n+1} + \varphi$ y $\tau = \theta \wedge e^{2n+1} + \sigma$, donde $\omega, \theta \in \Lambda^{n-1}(\mathfrak{u}^*)$ y $\varphi, \sigma \in \Lambda^n(\mathfrak{u}^*)$. Obtenemos que $d\eta = (-1)^{n-1} \omega \wedge de^{2n+1}$ y $d\tau = (-1)^{n-1} \theta \wedge de^{2n+1}$. Para realizar el cálculo en (3.13) necesitamos ver ω como una combinación lineal en el respectivo espacio, es decir, $\omega = \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq 2n} a_{i_1, \dots, i_{n-1}} e^{i_1, \dots, i_{n-1}}$. Reemplazando en (3.13) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} e^{1,2,\dots,n,2n+1} &= \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq 2n} a_{i_1, \dots, i_{n-1}} e^1 \wedge e^{i_1, \dots, i_{n-1}} \wedge e^{2n+1} + \\ &+ e^1 \wedge \varphi + (-1)^n \sum_{i=1}^n \theta \wedge e^i \wedge e^{n+i}. \end{aligned}$$

Como $e^1 \wedge \varphi, \sum_{i=1}^n \theta \wedge e^i \wedge e^{n+i} \in \Lambda^{n+1}(\mathfrak{u}^*)$ y $e_{2n+1} \notin \mathfrak{u}$, vemos que no aparece el factor e^{2n+1} al escribir estas formas como combinación lineal de la base, y esto implica que $a_{2,3,\dots,n} = 1$ y los demás $a_{i_1, \dots, i_{n-1}} = 0$. Por lo tanto $\omega = e^{2,3,\dots,n}$. Luego

$$d\eta = (-1)^{n-1} \omega \wedge de^{2n+1} = (-1)^n e^{2,3,\dots,n} \wedge \sum_{i=1}^n e^i \wedge e^{n+i} = -e^{1,2,3,\dots,n,n+1} \neq 0,$$

que es un absurdo pues η es cerrada.

Así probamos que $[e^{1,2,\dots,n,2n+1}] \notin I([\alpha], [\gamma])$.

Ejemplo 3.4.2. Sea \mathfrak{g}_n el álgebra Lie de dimensión n con base $\mathcal{B} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ y corchete de Lie definido por

$$[x_0, x_j] = x_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-2. \quad (3.14)$$

Ésta es la llamada *álgebra de Lie nilpotente filiforme standard de dimensión n* . Recordemos que un álgebra de Lie nilpotente de dimensión n se dice filiforme si su grado de nilpotencia es $n-1$.

Sea $\mathcal{B}' = \{x^i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ la base dual de \mathcal{B} . Entonces (3.14) implica que la diferencial $d: \mathfrak{g}_n^* \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}_n^*$ está dada por

$$dx^0 = 0, \quad dx^1 = 0, \quad dx^j = -x^0 \wedge x^{j-1}, \quad j = 2, \dots, n-1. \quad (3.15)$$

Por el criterio de Malcev 3.3.3, el grupo de Lie simplemente conexo nilpotente G_n asociado a \mathfrak{g}_n admite un retículo Γ . Vamos a usar el Teorema 3.3.4 para encontrar un producto triple de Massey no nulo en la cohomología de De Rham de G_n/Γ para $n \geq 4$.

Elegimos

$$\alpha = x^0, \quad \beta = x^{0,3,4,\dots,n-1} \quad y \quad \gamma = x^1.$$

Como $\alpha \wedge \beta = 0$ entonces podemos elegir $\lambda = 0$; por otro lado, $\beta \wedge \gamma = (-1)^{n-1} x^{0,1,3,4,\dots,n-1} = d\mu$, donde $\mu = (-1)^n x^{2,3,\dots,n-1}$. Entonces

$$[[\lambda \wedge \gamma + \alpha \wedge \mu]] = [(-1)^n x^{0,2,3,\dots,n-1}] \in H^{n-1}(\mathfrak{g}_n)/I([\alpha], [\gamma]),$$

donde $I([\alpha], [\gamma]) = [\alpha] \wedge H^{n-2}(\mathfrak{g}_n) + [\gamma] \wedge H^{n-2}(\mathfrak{g}_n)$. Veamos que esta clase es no nula, o equivalentemente, que $[x^{0,2,3,\dots,n-1}]$ no pertenece al ideal $I([\alpha], [\gamma])$.

En efecto, probaremos que $I([\alpha], [\gamma]) = 0$. En primer lugar caracterizaremos las $(n-2)$ -formas cerradas en \mathfrak{g}_n . Sea $\mathfrak{u} = \text{span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Si $\eta = x^0 \wedge \omega \in \Lambda^{n-2} \mathfrak{g}_n^*$, donde $\omega \in \Lambda^{n-3} \mathfrak{u}^*$, entonces $d\eta = -x^0 \wedge d\omega$. Pero de (3.15) se deduce que $d\omega = x^0 \wedge \tau$ para cierta $(n-4)$ -forma τ en \mathfrak{u} . Luego, resulta $d\eta = 0$.

Si consideramos ahora $\eta \in \Lambda^{n-2} \mathfrak{u}^*$, entonces podemos escribir $\eta = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \eta_j$, donde $\eta_j = x^{1,2,\dots,\widehat{j},\dots,n-1} \in \Lambda^{n-2} \mathfrak{u}^*$. Luego, $d\eta = \sum_{j=1}^{n-1} c_j d\eta_j$. Notemos que, para $j = 1, \dots, n-2$, se tiene

$$\begin{aligned} d\eta_j &= d(x^{1,2,\dots,\widehat{j},\dots,n-1}) \\ &= (-1)^{j-1} x^{1,2,\dots,j-1} \wedge d(x^{j+1,\dots,n-1}) \\ &= (-1)^{j-1} x^{1,2,\dots,j-1} \wedge (-x^{0,j} \wedge x^{j+2,\dots,n-1}) \\ &= -x^{0,1,2,\dots,\widehat{j+1},\dots,n-1}, \end{aligned}$$

mientras que $d\eta_{n-1} = 0$. En particular, $\{d\eta_j \mid 1 \leq j \leq n-2\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\Lambda^{n-1} \mathfrak{g}_n^*$. Por lo tanto, si $d\eta = 0$, se tiene que $\sum_{j=1}^{n-2} c_j d\eta_j = 0$ y así resulta $c_j = 0$ para $j = 1, \dots, n-2$.

Entonces $\eta \in \Lambda^{n-2} \mathfrak{g}_n^*$ es cerrada si y sólo si es de la forma $\eta = ax^0 \wedge \omega + c\eta_{n-1}$, con $\omega \in \Lambda^{n-3} \mathfrak{u}^*$ y $a, c \in \mathbb{R}$.

Por un lado tenemos $[x^0] \wedge [\eta] = c[x^{0,1,2,\dots,n-2}] = -c[d\eta_{n-1}] = 0$. Por otro lado, calculemos $[x^1] \wedge [\eta] = -a[x^{0,1} \wedge \omega]$, con $\omega \in \Lambda^{n-3} \mathfrak{u}^*$. Entonces podemos descomponer a ω como $\omega = x^1 \wedge \sigma + \sum_{j=2}^{n-1} b_j x^{2,3,\dots,\widehat{j},\dots,n-1}$, para ciertos $\sigma \in \Lambda^{n-4}(\text{span}\{x_2, \dots, x_n\})^*$ y $b_j \in \mathbb{R}$. Luego $x^1 \wedge \omega = x^1 \wedge \sum_{j=2}^{n-1} b_j x^{2,3,\dots,\widehat{j},\dots,n-1} = \sum_{j=2}^{n-1} b_j \eta_j$, entonces por la cuenta anterior con los η_j obtenemos que $[x^{0,1} \wedge \omega] = \sum_{j=2}^{n-1} b_j [d\eta_{j-1}] = 0$.

Así queda probado que $I([\alpha], [\gamma]) = 0$. A continuación veremos que $[x^{0,2,3,\dots,n-1}] \neq 0$. Si fuera $[x^{0,2,3,\dots,n-1}] = 0$ tendríamos que $x^{0,2,3,\dots,n-1} = d\varphi$, para alguna $\varphi \in \Lambda^{n-2} \mathfrak{g}_n^*$. De manera similar a lo hecho anteriormente podemos descomponer a φ como $\varphi = x^0 \wedge \eta + \zeta$, donde $\eta \in \Lambda^{n-3} \mathfrak{u}^*$ y $\zeta \in \Lambda^{n-2} \mathfrak{u}^*$. Utilizando la diferencial (3.15) se tiene que $d\varphi = d\zeta$. Podemos escribir a ζ como $\zeta = \sum_{j=1}^{n-1} c_j \eta_j$, con $\eta_j = x^{1,2,\dots,\widehat{j},\dots,n-1}$ como antes. Así, vemos que

$$x^{0,2,3,\dots,n-1} = d\zeta = - \sum_{j=1}^{n-1} c_j x^{0,1,2,\dots,\widehat{j+1},\dots,n-1},$$

que es un absurdo. Por lo tanto se tiene que el producto triple de Massey $\langle [x^0], [x^{0,3,4,\dots,n-1}], [x^1] \rangle$ es no nulo.

Capítulo 4

Apéndice

4.1 Variedades Formales

Intuitivamente, una variedad simplemente conexa es formal si su tipo de homotopía racional está determinado por su álgebra de cohomología racional. Por ejemplo, se sabe que las variedades simplemente conexas compactas de dimensión menor o igual a 6 son formales. Recordemos las definiciones relevantes.

Trabajaremos sobre el cuerpo \mathbb{R} . Un *álgebra diferencial graduada conmutativa* (A, d) (adgc) es un álgebra graduada $A = \bigoplus_{k \geq 0} A^k$, donde el producto es conmutativo en el siguiente sentido: $x \cdot y = (-1)^{|x||y|} y \cdot x$ para elementos homogéneos x e y , junto con una diferencial $d : A^k \rightarrow A^{k+1}$ que satisface $d^2 = 0$ y $d(x \cdot y) = dx \cdot y + (-1)^{|x|} x \cdot dy$, donde $|x|$ denota el grado del elemento homogéneo x .

Los morfismos de adgcs son morfismos de álgebras que preservan el grado y conmutan con las diferenciales. Notemos que la cohomología de una adgc $H^*(A, d)$ es un álgebra graduada que se convertirá en una adgc dotándola con la diferencial cero. Una adgc se dice conexa si $H^0(A, d) \cong \mathbb{R}$. El ejemplo principal de una adgc es el complejo de De Rham de M una variedad diferenciable, $(\Omega^*(M), d)$, donde d es la diferencial exterior.

Una adgc (A, d) es *minimal* (en el sentido de Sullivan) si sucede lo siguiente:

1. $A = \Lambda V$ es el álgebra conmutativa libre generada por un espacio vectorial graduado (real) $V = \bigoplus_k V_k$;
2. existe una base $\{x_i \mid i \in \mathcal{J}\}$ de V , para un conjunto ordenado de índices \mathcal{J} , tal que $|x_i| < |x_j|$ si $i < j$ y la diferencial de un generador x_j se expresa en términos de los anteriores x_i ($i < j$).

Se conoce el siguiente resultado fundamental:

Proposición 4.1.1. *Toda adgc conexa (A, d) tiene un modelo minimal, es decir, existe un álgebra minimal $(\Lambda V, d)$ junto con un morfismo de adgcs $\varphi : (\Lambda V, d) \rightarrow (A, d)$ que induce un isomorfismo $\varphi : H^*(\Lambda V, d) \rightarrow H^*(A, d)$. El modelo minimal es único.*

El modelo minimal (real) de la variedad diferenciable M es por definición el modelo minimal de su álgebra de De Rham, $(\Omega^*(M), d)$.

Una adgc minimal $(\Lambda V, d)$ es *formal* si existe un morfismo de álgebras diferenciales $\Psi : (\Lambda V, d) \rightarrow (H^*(\Lambda V), 0)$ que induce la identidad en cohomología. Se dice que una variedad diferenciable M es *formal* si su modelo minimal es formal.

Se conocen muchos ejemplos de variedades formales: esferas, espacios proyectivos, grupos de Lie compactos, espacios homogéneos y variedades Kähler compactas.

Es sabido que la existencia de productos de Massey no nulos es una obstrucción para la formalidad.

Referencias

- [1] R. Bott, L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, (1982).
- [2] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, (1993).
- [3] Stewart S. Cairns, *Triangulation of the manifold of class one*, Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 549–552.
- [4] P. Deligne, Ph. A. Griffiths, J. Morgan, D. P. Sullivan, *Real homotopy theory of Kähler manifolds*, Invent. Math. **29** (1975), 245–274.
- [5] K. Hasegawa, *Minimal models of nilmanifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 65–71.
- [6] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, New York, (2002).
- [7] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, (2003), (segunda edición).
- [8] Ib. Henning Madsen, J. Tornehave, *From Calculus to Cohomology: De Rham cohomology and characteristic class*. Cambridge University Press, New York, (1997).
- [9] A. I. Malcev, *On a class of homogeneous spaces*. American Mathematical Society Translation. **39** (1951).
- [10] S. Morita, *Geometry of Differential Forms*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, (2001).
- [11] K. Nomizu, *On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups*. Ann. of Math, (1954) 531–538.
- [12] H. Uehara, W. S. Massey, *The Jacobi identity for Whitehead products*. Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz, 361–377 p. Princeton University Press, Princeton, N. J., (1957).
- [13] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott. Foresman and Co. (1971).
- [14] J. H. C. Whitehead, *On C^1 -complexes*, Ann. of Math. **41** (1940), 809–824.

“Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación de tesis, damos Fe que el presente ejemplar impreso, se corresponde con el aprobado por éste Tribunal”