UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Trabajo Final de la Licenciatura en Matemática

# Álgebras de vértices libres y álgebras de Lie conformes no lineales

Juan Gabriel Guzmán

Directora: Carina Boyallian



Córdoba, Argentina. Diciembre 2016

Clasificación

17B69 Vertex operators; vertex operator algebras and related structures.
81T40 Two-dimensional field theories, conformal field theories, etc.
16S30 Universal enveloping algebras of Lie algebras.

Palabras clave

Álgebras de vértices, álgebras conformes, álgebras de Lie, álgebra universal envolvente, teorema PBW.

Resumen

El presente trabajo constituye una revisión de la construcción del álgebra de vértices universal envolvente de un álgebra de Lie conforme. Comenzamos dando los resultados básicos relacionados con las álgebras conformes y de vértices, hasta llegar a la caracterización de las álgebras de vértices como álgebras de Lie conformes con una estructura compatible de álgebra diferencial unitaria. Luego construimos el álgebra de vértices universal en este caso (que llamamos lineal), y posteriormente retomamos esta construcción para el caso de las álgebras de Lie conformes no lineales, la cual fue realizada por primera vez por De Sole y Kac (2005). Para finalizar, presentamos una versión generalizada del teorema PBW dada por dichos autores.

Abstract

The present work constitutes a review on the construction of the universal enveloping vertex algebra of a Lie conformal algebra. We start by giving the basic results related to conformal and vertex algebras, up to the characterization of vertex algebras as Lie conformal algebras with a compatible structure of unitary differential algebra. Then we build the universal vertex algebra in this case (which we call linear), and subsequently we resume this task for the case of non-linear Lie conformal algebras, which was made firstly by De Sole and Kac (2005). In order to finish, we introduce a generalized version of the PBW theorem given by these authors.

# Agradecimientos

*A mi familia, quienes siempre estuvieron para brindarme su apoyo incondicional y soportar todas mis locuras.*

*A mi directora Carina, quien estuvo siempre dispuesta a guiarme y me ofreció muchísimas oportunidades para crecer como matemático.*

*A mis amigxs de la licenciatura, con quienes fui transitando todo lo que significa ser estudiante universitario, tanto dentro como fuera de las aulas. En especial quiero agradecerles a Azul, Jose, Aru, Dahy, Emi, Iván, Lean, Pocho, Gerson, Ale, Tefi, Rami, Manu, Mari, Lau y Juli.*

*A mis amigxs del profesorado, con quienes atravesé tantas experiencias transformadoras, en especial este año. En este sentido, quiero agradecer especialmente a Gabi por ser la mejor compañera de prácticas que habría podido tener. Asimismo, quiero mencionar a mis otrxs compañerxs de MOPE, como así también a Bren y Fede.*

*A mis amigas de la vida, Belén, Meli, Sofi y Yami, por acompañarme desde hace tantos años, y por todo lo que vivimos juntxs.*

*A todxs aquellxs que tuve el placer de tener como alumnxs en algún momento, en especial en alguna ayudantía y durante mis prácticas.*

*A aquellas personas que la vida en FaMAF me fue llevando a encontrar, y que siempre van a tener un lugar especial en mí. Entre ellas están lxs chicxs de física (en especial Belu y Javi), Ro, Pipi, Estefi, Lu, Tade, Clara, Franco, Nico B., Mari, Pao, Belu B., Ema, Andre, Gon, Luis, Nico J. y lxs chicxs del CEIMAF.*

*A aquellxs profes del secundario que me hicieron reafirmar mi vocación. Especialmente a Nelly B. y Mónica G., porque gracias a ellas me permití ampliar mis horizontes.*

*A mis profes de FaMAF, quienes me permitieron vislumbrar la enorme diversidad existente en la matemática. En particular a Adrián, Jorge L., Camper, Paulo, Leandro, Linda, Sonia, Silvina, Chino, Inés, Emilio, Guille, Rocío, Romi, Ramiro, Julia, Dilma, Cristina y toda la cátedra de MOPE.*

*A la universidad pública y gratuita, que me brindó acceso a muchísimas más cosas de las que hubiera podido soñar. Quiero resaltar en este sentido la labor de la SAE de FaMAF, porque gracias a ellxs pude llegar hasta este punto.*

# Índice

# 1. Introducción

En este trabajo estudiamos la relación existente entre las álgebras de Lie conformes y las álgebras de vértices, revisando los trabajos de Kac[1], Bakalov[2] y De Sole[3].

Las álgebras de vértices juegan con respecto a las álgebras de Lie conformes un rol similar al que tiene el álgebra universal de un álgebra de Lie con el álgebra de Lie, en el sentido de que permiten dar un cubrimiento asociativo universal de las mismas y vale el teorema PBW. Esto se cumple incluso si extendemos la definición de álgebra de Lie conforme para permitir que el $\lambda$-corchete, nombre por el cual se conoce la operación en esta clase de álgebras, admita coeficientes tensoriales (en este caso hablaremos de álgebras de Lie conformes no lineales).

En su libro *Chiral Algebras*[4], Beillinson y Drinfeld muestran que, vistas en el contexto de las categorías pseudo-tensoriales, las álgebras de vértices son categóricamente álgebras asociativas, y las álgebras de Lie conformes, álgebras de Lie, hecho que sustenta la relación que nos proponemos estudiar.

Para poder mostrar esta relación, presentaremos la noción de *álgebra de vértices universal envolvente* de un álgebra de Lie conforme $R$, la cual será denotada por $U(R)$. Recordemos que dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, su álgebra (asociativa) universal envolvente está dada por $U(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{M}(\mathfrak{g})$, donde

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\big\{A \otimes (b \otimes c - c \otimes b - [b,c]) \otimes D : A, D \in \mathcal{T}(\mathfrak{g}),\ b, c \in \mathfrak{g}\big\}.$$

Un gran problema que surge al intentar realizar este mismo abordaje para un álgebra de Lie conforme no lineal $R$ es que en este caso $\mathcal{M}(R)$ no es un ideal bilátero de $\mathcal{T}(R)$, haciendo que la prueba del teorema PBW sea mucho más difícil. Esto exige desarrollar nuevas herramientas para estudiar este caso.

[1] Ver [K]
[2] Ver [BK]
[3] Ver [DSK]
[4] Ver [BD]

# 2. Preliminares

En este capítulo realizaremos una presentación de los principales conceptos relacionados con las álgebras conformes y con las álgebras de vértices. Asimismo, enunciaremos y demostraremos los resultados básicos que se conocen en esta área, hasta llegar a contar con las herramientas suficientes como para abocarnos a la construcción del álgebra de vértices universal envolvente de un álgebra de Lie conforme (que haremos en el capítulo 3).

## 2.1. Distribuciones formales

Comenzaremos definiendo un objeto matemático que será utilizado de forma constante a lo largo de todo este trabajo. De aquí en adelante, haremos uso de la notación $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

**Definición 2.1.1.** Dado un espacio vectorial $U$, una *distribución formal* con coeficientes en $U$ es una expresión formal de la forma

$$\sum_{m,n,...\in\mathbb{Z}} a_{m,n,...} z^m w^n ...$$

con $a_{m,n,...} \in U$ para todo $m, n, ... \in \mathbb{Z}$. El conjunto de todas las distribuciones formales con coeficientes en $U$ posee una estructura de espacio vectorial y se denota por $U[[z, z^{-1}, w, w^{-1}, ...]]$.

En particular, $U[[z, z^{-1}]]$ denota al espacio de todas las series formales de potencias en $z$ con coeficientes en $U$.

Dada una distribución formal $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$, definimos su *residuo* como $\mathrm{Res}_z a(z) = a_{-1}$. Además, definimos su *derivada* (formal) como $\partial a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n z^{n-1}$. De esta manera, queda definido un operador lineal $\partial$ en el espacio vectorial $U[[z, z^{-1}]]$, y similarmente definimos operadores $\partial_z$, $\partial_w$,... en $U[[z, z^{-1}, w, w^{-1}, ...]]$, los cuales representarán las derivadas parciales de esas distribuciones formales respecto de las variables correspondientes.

*Observación* 2.1.2. $\mathrm{Res}_z \partial a(z) = 0$ para toda $a(z) \in U[[z, z^{-1}]]$.

En particular, si $U$ cuenta con un producto, vale la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\mathrm{Res}_z(\partial a(z))b(z) = -\mathrm{Res}_z a(z)(\partial b(z)). \tag{2.1.1}$$

Existe una distribución formal muy utilizada, llamada *distribución delta* o *delta de Dirac*, dada por $\delta(z - w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1} w^n \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]]$. La notación puede resultar engañosa, ya que en realidad $\delta(z - w)$ depende de $z$ y de $w$, no de $z - w$, pero es la notación más difundida.

La distribución delta está caracterizada por la siguiente propiedad:

**Proposición 2.1.3.** *Si* $f(z) \in U[[z, z^{-1}]]$*, entonces se cumple que* $Res_z f(z)\delta(z-w) = f(w)$.

*Demostración:* Basta probarlo para $f(z) = az^n$ con $a \in U$ y $n \in \mathbb{Z}$, y en este caso tenemos que

$$\mathrm{Res}_z f(z)\delta(z-w) = \mathrm{Res}_z \sum_{m\in\mathbb{Z}} az^{n-m-1}w^m = aw^n = f(w).$$

$\square$

En general, dado un operador $A$, denotaremos siempre por $A^{(j)}$ al operador $\frac{1}{j!}A^j$. Es fácil verificar por inducción que las derivadas de la distribución delta vienen dadas por

$$\partial_w^{(j)}\delta(z-w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \binom{m}{j} z^{-m-1}w^{m-j}, \tag{2.1.2}$$

donde $\binom{m}{j} = \frac{m\cdot(m-1)\cdots(m-j+1)}{j!}$ para $m \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ y $\binom{m}{0} = 1$.

Por otro lado, si realizamos la expansión en series de potencias de la función $\frac{1}{z-w}$ en el dominio $|z| > |w|$, obtenemos $\sum_{m=0}^{\infty} z^{-m-1}w^m$, y derivando $j$ veces con respecto a $w$ llegamos a lo siguiente:

$$i_{z,w}\frac{1}{(z-w)^{j+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{j} z^{-m-1}w^{m-j}. \tag{2.1.3}$$

De aquí en más, dada una función racional $f(z,w)$, la expresión $i_{z,w}f(z,w)$ representará la expansión en series de potencias de $f(z,w)$ en el dominio $|z| > |w|$. Similarmente, denotaremos por $i_{w,z}f(z,w)$ a su expansión en el dominio $|z| < |w|$. En el caso anterior, procediendo de manera análoga se llega a:

$$i_{w,z}\frac{1}{(z-w)^{j+1}} = -\sum_{m=-1}^{-\infty} \binom{m}{j} z^{-m-1}w^{m-j}. \tag{2.1.4}$$

De esta manera, obtenemos una fórmula que resultará muy útil:

$$\partial_w^{(j)}\delta(z-w) = i_{z,w}\frac{1}{(z-w)^{j+1}} - i_{w,z}\frac{1}{(z-w)^{j+1}}. \tag{2.1.5}$$

Algunas de las propiedades más utilizadas de la distribución delta son las siguientes:

**Proposición 2.1.4.**

*(a)* $\delta(z-w) = \delta(w-z)$

*(b)* $\partial_z\delta(z-w) = -\partial_w\delta(z-w)$

*(c)* $(z-w)\partial_w^{(j+1)}\delta(z-w) = \partial_w^{(j)}\delta(z-w) \quad \forall j \in \mathbb{N}$

*(d)* $(z-w)^{j+1}\partial_w^{(j)}\delta(z-w) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$

*Demostración.* Tanto (a) como (b) son inmediatos. Para ver (c), utilizamos (2.1.2):

$$(z-w)\partial_w^{(j+1)}\delta(z-w) = (z-w)\sum_{m\in\mathbb{Z}}\binom{m}{j+1}z^{-m-1}w^{m-j-1} =$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\binom{m+1}{j+1}-\binom{m}{j+1}\right)z^{-m-1}w^{m-j} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\binom{m}{j}z^{-m-1}w^{m-j} =$$
$$= \partial_w^{(j)}\delta(z-w)$$

Finalmente, (d) se sigue de (c) por inducción. □

Dada $a(z,w) \in U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]$, definimos (si es que tal expresión converge) $\pi a(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\mathrm{Res}_z a(z,w)(z-w)^j\right)\partial_w^{(j)}\delta(z-w)$. Denotamos por $U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]^0$ al espacio de todas las $a(z,w) \in U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]$ tales que $\pi a(z,w)$ converge. Además, definimos $a(z,w)^{+(z)} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}z^m w^n$, y diremos que $a(z,w)$ es *holomorfa en z* si se cumple que $a(z,w) = a(z,w)^{+(z)}$.

**Lema 2.1.5.**

*(a) $\pi$ es una proyección en $U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]^0$ (es decir, $\pi^2 = \pi$).*

*(b)* Ker $\pi = \{a(z,w) \in U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]^0$ holomorfas en z$\}$.

*(c) Toda distribución formal $a(z,w) \in U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]^0$ se representa de manera única como*

$$a(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} c^j(w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w) + b(z,w),$$

*donde $b(z,w)$ es una distribución formal holomorfa en $z$ con $c^n(w) = \mathrm{Res}_z a(z,w)(z-w)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.*

*Demostración.*

(a) Sea $a(z,w) \in U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]^0$. Escribimos $b(z,w) = \pi a(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} c^j(w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w)$, donde $c^j(w) = \mathrm{Res}_z a(z,w)(z-w)^j$. Luego $\pi b(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} d^j(w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w)$, donde

$$\begin{aligned} d^n(w) =& \mathrm{Res}_z b(z,w)(z-w)^n \\ =& \mathrm{Res}_z \left( \sum_{j=0}^{\infty} c^j(w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w) \right) (z-w)^n \\ =& c^n(w). \end{aligned}$$

Pero entonces $\pi b(z,w) = b(z,w)$, con lo cual vale que $\pi^2 = \pi$.

(b) Si $a(z,w)$ es holomorfa en z, es fácil ver que $\mathrm{Res}_z a(z,w)(z-w)^j = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}_+$. Recíprocamente, si vale esto último, escribimos $a(z,w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(w)z^n$, y puede probarse por inducción fuerte que $a_{-n}(w) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. De esta manera $a(z,w) = a(z,w)^{+(z)}$.

(c) Sea $a(z,w) \in U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]^0$. Tomando $b(z,w) = a(z,w) - \pi a(z,w)$, resulta por (a) que $\pi b(z,w) = 0$, así que gracias a (b) llegamos a que $b(z,w)$ es holomorfa en z, y por lo tanto $a(z,w)$ se escribe como queremos. La unicidad es inmediata. □

**Corolario 2.1.6.** *Sea $N \geq 1$. El núcleo del operador multiplicación por $(z-w)^N$ en $U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]$ es $\sum_{j=0}^{N-1} \partial_w^{(j)}\delta(z-w) \cdot U[[w,w^{-1}]]$.*

*Además, todo elemento de este conjunto se escribe de manera única como*

$$a(z,w) = \sum_{j=0}^{N-1} c^j(w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w), \tag{2.1.6}$$

*donde los $c^j(w)$ vienen dados por $c^j(w) = \mathrm{Res}_z a(z,w)(z-w)^j$ para todo $j \in \mathbb{Z}_+$.*

*Demostración.* Por la Proposición 2.1.3.e es claro que todo elemento de ese conjunto se encuentra en el núcleo del operador multiplicación por $(z-w)^N$.

Recíprocamente, si $(z-w)^N a(z,w) = 0$, entonces $\mathrm{Res}_z a(z,w)(z-w)^j = 0$ si $j \geq N$, y en particular $a(z,w) \in U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]^0$. Por el Lema anterior, podemos escribir $a(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} c^j(w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w) + b(z,w)$ con $b(z,w)$ holomorfa en z.

Ahora $0 = (z-w)^N a(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} c^{j+N}(w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w) + (z-w)^N b(z,w)$. Aplicando la unicidad de (c) en el Lema anterior (ya que $(z-w)^N b(z,w)$ sigue siendo holomorfa en z), llegamos a que $c^j(w) = 0 \ \forall j \geq N$ y a que $(z-w)^N b(z,w) = 0$.

Escribiendo $b(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(w) z^n$ y comparando los coeficientes de $z^k$ a ambos lados de $(z-w)^N b(z,w) = 0$, llegamos a las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{k} \binom{N}{j} b_{k-j}(w) w^{N-j} = 0, & \text{para } k = 0, ..., N. \\ \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} b_{k-j}(w) w^{N-j} = 0, & \text{para } k > N. \end{cases}$$

Inductivamente, estas ecuaciones muestran que $b_n(w) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, y así $b(z,w) = 0$. $\square$

**Definición 2.1.7.** Una distribución formal $a(z,w)$ se dice *local* si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(z-w)^N a(z,w) = 0.$$

Además, si $U$ es un álgebra, dos distribuciones formales $a(z), b(z) \in U[[z,z^{-1}]]$ se dicen *mutuamente locales* (o simplemente *locales*) si la distribución formal $a(z,w) = a(z)b(w)$ es local.

Por el Corolario 2.1.5., toda distribución formal local posee una expansión de la forma (2.1.6), la cual se denomina *expansión OPE* de $a(z,w)$. Los coeficientes $c^j(w)$ de dicha expansión se llaman *coeficientes OPE* de $a(z,w)$.

Dada $a(z) \in U[[z,z^{-1}]]$, utilizaremos la notación $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$. Similarmente dada $a(z,w) \in U[[z,z^{-1},w,w^{-1}]]$, la escribiremos como $a(z,w) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(m,n)} z^{-m-1} w^{-n-1}$, y así sucesivamente.

*Observación* 2.1.8. Si $a(z,w) = \sum_{j=0}^{N-1} c^j(w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w)$, entonces comparando los coeficientes de $z^{-m-1}w^{-n-1}$ a ambos lados de esa expresión obtenemos las siguientes relaciones:

$$a_{(m,n)} = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{m}{j} c^j_{(m+n-j)} \quad \forall\, m, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1.7}$$

Recíprocamente, si $a(z,w)$ es una distribución formal para la cual existen distribuciones formales $\{c^j(w) \,:\, j = 0, ..., N-1\}$ tales que vale (2.1.7), entonces se cumple que $a(z,w) = \sum_{j=0}^{N-1} c^j(w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w)$, y en particular $a(z,w)$ es local.

## 2.2. Álgebras conformes

A partir de este momento necesitaremos trabajar sobre espacios vectoriales con más estructura. En general, asumiremos que $U$ es un *álgebra* sobre $\mathbb{C}$, es decir que posee una forma $\mathbb{C}$-bilineal $\cdot : U \times U \to U$, $(a,b) \mapsto ab$, a la cual llamamos producto. Sin embargo, algunas veces necesitaremos pedir más que esto.

**Definición 2.2.1.** Sea $U$ un álgebra sobre $\mathbb{C}$ con producto $[\,,] : U \times U \to U$, $(a,b) \mapsto [a,b]$.

1. Diremos que $(U, [\,,])$ es un *álgebra de Leibniz* si se cumple lo siguiente (condición de Jacobi):

$$[a,[b,c]] = [[a,b],c] + [b,[a,c]] \quad \forall a,b,c \in U. \tag{2.2.1}$$

2. Diremos que $(U, [\,,])$ es un *álgebra de Lie* si es un álgebra de Leibniz y además cumple lo siguiente (antisimetría):

$$[a,b] = -[b,a] \quad \forall a,b \in U. \tag{2.2.2}$$

Observemos que (2.2.2) es equivalente a $[a,a] = 0$ para todo $a \in U$. De aquí en adelante, la letra $\mathfrak{g}$ denotará un álgebra de Lie, y su producto $[\,,]$ se denominará *corchete de Lie*.

Es claro que si $U$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$, su producto se puede extender a $U[[z, z^{-1}, w, w^{-1}, ...]]$ de manera natural.

**Definición 2.2.2.** Sea $U$ un álgebra sobre $\mathbb{C}$. Definimos para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ el *producto $n$-ésimo* en $U[[w, w^{-1}]]$ como

$$a(w)_{(n)}b(w) = \mathrm{Res}_z a(z)b(w)(z-w)^n. \tag{2.2.3}$$

Muchas veces suele ser útil considerar todos los productos $n$-ésimos juntos, lo cual motiva la siguiente definición:

**Definición 2.2.3.** Sea $U$ un álgebra sobre $\mathbb{C}$. Definimos el $\lambda$-*producto* de distribuciones formales en $U[[w, w^{-1}]]$ como

$$a(w)_\lambda b(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} \left( a(w)_{(n)} b(w) \right). \tag{2.2.4}$$

*Observación* 2.2.4. El $\lambda$-producto de dos distribuciones formales en $U[[w, w^{-1}]]$ es una nueva distribución formal en $U[[w, w^{-1}]][[\lambda]]$, y puede ser definido de manera equivalente como $a(w)_\lambda b(w) = \mathrm{Res}_z e^{\lambda(z-w)} a(z) b(w)$.

Si $U$ es un álgebra de Leibniz con producto $[\,,]$, el $\lambda$-producto se suele denotar como $[a(w)_\lambda b(w)]$, y se denomina $\lambda$-*corchete*.

Las propiedades de los $\lambda$-productos y $\lambda$-corchetes pueden resumirse de la siguiente forma:

**Teorema 2.2.5.** *1. Sea $U$ un álgebra sobre $\mathbb{C}$. Si $a(w)$ y $b(w)$ son distribuciones formales en $U[[w, w^{-1}]]$, entonces*

$$\left(\partial_w a(w)\right)_\lambda b(w) = -\lambda a(w)_\lambda b(w), \tag{2.2.5}$$

$$a(w)_\lambda \partial_w b(w) = \left(\lambda + \partial_w\right) a(w)_\lambda b(w). \tag{2.2.6}$$

*En particular, $\partial_w$ es una derivación del $\lambda$-producto.*

*2. Sea $U$ un álgebra de Leibniz. Si $a(w)$, $b(w)$ y $c(w)$ son distribuciones formales en $U[[w, w^{-1}]]$, entonces*

$$[a(w)_\lambda [b(w)_\mu c(w)]] = [[a(w)_\lambda b(w)]_{\lambda+\mu} c(w)] + [b(w)_\mu [a(w)_\lambda c(w)]]. \tag{2.2.7}$$

*3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Si $a(w)$ y $b(w)$ son distribuciones formales locales en $\mathfrak{g}[[w, w^{-1}]]$, entonces*

$$[b(w)_\lambda a(w)] = -[a(w)_{-\lambda-\partial_w} b(w)]. \tag{2.2.8}$$

*Demostración.*

1. Por un lado

$$\begin{aligned}
\partial_w a(w)_\lambda b(w) =& \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} \mathrm{Res}_z \partial_z a(z) b(w) (z-w)^n \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} \left( -\mathrm{Res}_z a(z) \partial_z \left( b(w)(z-w)^n \right) \right) \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} \left( -\mathrm{Res}_z a(z) b(w) n (z-w)^{n-1} \right) \\
=& -\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(m)} \mathrm{Res}_z a(z) b(w) (z-w)^m \\
=& -\lambda a(w)_\lambda b(w).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
a(w)_\lambda \partial_w b(w) =& \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} \mathrm{Res}_z a(z) \partial_w b(w) (z-w)^n \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} \mathrm{Res}_z a(z) \left( -b(w) \partial_w (z-w)^n + \partial_w \left( b(w)(z-w)^n \right) \right) \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} \mathrm{Res}_z a(z) b(w) n (z-w)^{n-1} \\
& \qquad + \partial_w \left( \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} \mathrm{Res}_z a(z) b(w) (z-w)^n \right) \\
=& \lambda a(w)_\lambda b(w) + \partial_w \left( a(w)_\lambda b(w) \right) \\
=& \left( \lambda + \partial_w \right) \left( a(w)_\lambda b(w) \right).
\end{aligned}
$$

2. Para probar esto utilizaremos la observación 2.2.4.

$$
\begin{aligned}
[a(w)_\lambda [b(w)_\mu c(w)]] =& [a(w)_\lambda \mathrm{Res}_x e^{\mu(x-w)} [b(x), c(w)]] \\
=& \mathrm{Res}_z \mathrm{Res}_x e^{\lambda(z-w)} e^{\mu(x-w)} [a(z), [b(x), c(w)]] \\
=& \mathrm{Res}_z \mathrm{Res}_x e^{\lambda(z-w)} e^{\mu(x-w)} \left( [[a(z), b(x)], c(w)] + [b(x), [a(z), c(w)]] \right) \\
=& \mathrm{Res}_z \mathrm{Res}_x e^{\lambda(z-x)} e^{(\lambda+\mu)(x-w)} [[a(z), b(x)], c(w)] \\
& \qquad + \mathrm{Res}_z \mathrm{Res}_x e^{\lambda(z-w)} e^{\mu(x-w)} [b(x), [a(z), c(w)]] \\
=& \mathrm{Res}_x e^{(\lambda+\mu)(x-w)} [[a(x)_\lambda b(x)], c(w)] \\
& \qquad + \mathrm{Res}_x e^{\mu(x-w)} [b(x), [a(w)_\lambda c(w)]] \\
=& [[a(w)_\lambda b(w)]_{\lambda+\mu} c(w)] + [b(w)_\mu [a(w)_\lambda c(w)]].
\end{aligned}
$$

3. Debido a la localidad, vale que $[a(z), b(w)] = \sum_{j=0}^{N-1} c^j(w) \partial_w^{(j)} \delta(z-w)$, donde $c^j(w) = a(w)_{(j)} b(w)$ para todo $j \in \mathbb{Z}_+$ y $c^j(w) = 0$ para $j \geq N$. Luego

$$
\begin{aligned}
[b(w)_\lambda a(w)] =& \mathrm{Res}_z e^{\lambda(z-w)} [b(z), a(w)] \\
=& - \mathrm{Res}_z e^{\lambda(z-w)} [a(w), b(z)] \\
=& - \mathrm{Res}_z e^{\lambda(z-w)} \sum_{j=0}^{N-1} c^j(z) \partial_z^{(j)} \delta(w-z) \\
=& - \mathrm{Res}_z \sum_{j=0}^{N-1} c^j(z) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} (z-w)^n \left( -\partial_w \right)^{(j)} \delta(w-z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= - \operatorname{Res}_z \sum_{j=0}^{N-1} c^j(z)(-1)^j \left( \sum_{n=0}^{j} \frac{1}{n!} \lambda^n \partial_w^{(j-n)} \delta(z-w) \right) \\
&= - \operatorname{Res}_z \sum_{j=0}^{N-1} c^j(z)(-1)^j \left( \frac{1}{j!} \sum_{n=0}^{j} \binom{j}{n} \lambda^n \partial_w^{j-n} \delta(z-w) \right) \\
&= - \operatorname{Res}_z \sum_{j=0}^{N-1} c^j(z)(-1)^j \left(\lambda + \partial_w\right)^{(j)} \delta(z-w) \\
&= - \sum_{j=0}^{N-1} (-\lambda - \partial_w)^{(j)} \operatorname{Res}_z c^j(z) \delta(z-w) \\
&= - \sum_{j=0}^{N-1} (-\lambda - \partial_w)^{(j)} c^j(w) \\
&= - \left[ a(w)_{-\lambda-\partial_w} b(w) \right].
\end{aligned}
$$

□

Observemos que si $U$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$, entonces la acción de $\partial_w$ en $U[[w,w^{-1}]]$ le confiere una estructura de $\mathbb{C}[T]$-módulo a izquierda, donde la acción de un polinomio $p(T) \in \mathbb{C}[T]$ en una distribución formal $a(w)$ está dada por $p(T)a(w) = p(\partial_w)a(w)$.

**Definición 2.2.6.** Sea $F$ un subconjunto de $U[[w,w^{-1}]]$ tal que todos los pares de distribuciones formales en $F$ son mutuamente locales. Definimos la *clausura* de $F$ como el $\mathbb{C}[T]$-submódulo minimal de $U[[w,w^{-1}]]$ cerrado bajo todos los productos $n$-ésimos. La denotaremos como $\overline{F}$.

Es importante destacar que los pares de distribuciones formales en $\overline{F}$ siguen siendo locales, debido al siguiente lema (cuya demostración se puede leer sin dificultad en [K]).

**Lema 2.2.7.** ***(Lema de Dong)*** *Si $a(w)$, $b(w)$ y $c(w)$ son distribuciones formales mutuamente locales de a pares, entonces $a(w)_{(n)}b(w)$ y $c(w)$ son distribuciones formales locales para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Observemos que si $F \subseteq U[[w,w^{-1}]]$, entonces el $\lambda$-producto de dos distribuciones formales $a(w), b(w) \in \overline{F}$ es un polinomio en $\lambda$ (por la localidad de $a(w)$ y $b(w)$) cuyos coeficientes vuelven a estar en $\overline{F}$ ya que es cerrado bajo los productos $n$-ésimos. De esta manera, el $\lambda$-corchete en $\overline{F}$ define una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $\overline{F} \otimes \overline{F} \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes \overline{F}$, la cual sigue cumpliendo las propiedades del Teorema 2.2.5.

Todo lo visto anteriormente motiva las siguientes definiciones:

**Definición 2.2.8.** Un *álgebra conforme* es un $\mathbb{C}[T]$-módulo a izquierda $R$ junto con una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $R \otimes R \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes R$, $a \otimes b \mapsto a_\lambda b$, llamada $\lambda$-*producto*, tal que se cumplen los siguientes axiomas:

$$(Ta)_\lambda b = -\lambda a_\lambda b \quad \forall a, b \in R, \tag{2.2.9}$$

$$a_\lambda(Tb) = (\lambda + T)(a_\lambda b) \quad \forall a, b \in R. \tag{2.2.10}$$

**Definición 2.2.9.** Un *álgebra de Leibniz conforme* es un álgebra conforme $R$ con $\lambda$-producto dado por $R \otimes R \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes R$, $a \otimes b \mapsto [a_\lambda b]$, tal que se cumple la siguiente *condición de Jacobi*:

$$[a_\lambda[b_\mu c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] + [b_\mu[a_\lambda c]] \quad \forall a, b, c \in R. \tag{2.2.11}$$

Si además de esto se cumple la relación de *antisimetría* dada por

$$[b_\lambda a] = -[a_{-\lambda-T} b] \quad \forall a, b \in R, \tag{2.2.12}$$

entonces decimos que $R$ es un *álgebra de Lie conforme*.

*Observación* 2.2.10. Gracias al Teorema 2.2.5, tenemos que si $U$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$ y F es un subconjunto de $U[[w, w^{-1}]]$ formado por distribuciones formales mutuamente locales de a pares, entonces su clausura $\overline{F}$ es un álgebra conforme con el $\lambda$-producto dado por (2.2.4). Más aún, también nos permite afirmar que si $U$ es un álgebra de Leibniz (resp. de Lie), entonces $\overline{F}$ es un álgebra de Leibnitz (resp. de Lie) conforme.

Si $R$ es un álgebra conforme y $a, b \in R$, el $\lambda$-producto entre $a$ y $b$ es un polinomio en $\lambda$ con coeficientes en $R$, y lo denotaremos como

$$a_\lambda b = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} a_{(n)} b.$$

Además, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_{(n)}b$ se llama *producto n-ésimo* entre $a$ y $b$.

Es importante observar que como $a_\lambda b$ es un polinomio en $\lambda$, vale que para todos $a, b \in R$ existe un $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $a_{(n)}b = 0$ para todo $n \geq N$.

**Proposición 2.2.11.** *Los axiomas expresados anteriomente para el $\lambda$-producto de un álgebra conforme $R$ pueden ser reformulados en términos de los productos $n$-ésimos, de la siguiente forma:*

1. *Las igualdades (2.2.9) y (2.2.10) se traducen como*

$$(Ta)_{(n)} b = -n a_{(n-1)} b, \tag{2.2.13}$$

$$a_{(n)}(Tb) = T(a_{(n)} b) + n a_{(n-1)} b, \tag{2.2.14}$$

*para todos $a, b \in R$ y $n \in \mathbb{N}$.*

*2. La igualdad (2.2.11) significa*

$$a_{(m)}(b_{(n)}c) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (a_{(j)}b)_{(m+n-j)}c + b_{(n)}(a_{(m)}c), \tag{2.2.15}$$

*para todos $a, b, c \in R$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$.*

*3. La igualdad (2.2.12) significa*

$$b_{(n)}a = -\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+n} T^{(j)}(a_{(n+j)}b), \tag{2.2.16}$$

*para todos $a, b \in R$ y $n \in \mathbb{Z}_+$.*

*Demostración.* Todas las equivalencias se obtienen al comparar los coeficientes de $\lambda^{(n)}$ (o bien de $\lambda^{(m)}\mu^{(n)}$) a ambos lados de las igualdades originales. Por ejemplo, tenemos por un lado que

$$[b_\lambda a] = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)}(b_{(n)}a).$$

Por otro lado, vale que

$$\begin{aligned}
-[a_{-\lambda-T}b] &= -\sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda - t)^{(k)}(a_{(k)}b) \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (-\lambda)^n (-T)^{k-n}(a_{(k)}b) \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!(k-n)!} (-1)^k \lambda^n T^{k-n}(a_{(k)}b) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \lambda^{(n)} T^{(k-n)}(a_{(k)}b) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} \left( -\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+n} T^{(j)}(a_{(j+n)}b) \right).
\end{aligned}$$

Esto prueba 3, y las demás afirmaciones se tratan de manera análoga. □

Si $R$ es un álgebra conforme, entonces sumando (2.2.9) y (2.2.10) obtenemos que

$$T(a_\lambda b) = (Ta)_\lambda b + a_\lambda(Tb) \quad \forall a, b \in R. \tag{2.2.17}$$

Comparando coeficientes de $\lambda^{(n)}$ en esta igualdad, llegamos a que el operador $T \in \mathrm{End}(R)$ inducido por la acción de $\mathbb{C}[T]$ en $R$ es una derivación de todos los productos $n$-ésimos con $n \in \mathbb{Z}_+$.

**Definición 2.2.12.** Un *homomorfismo de álgebras conformes* es una aplicación $f : R \to R'$ entre dos álgebras conformes $R$ y $R'$ que es un homomorfismo de $\mathbb{C}[T]$-módulos a izquierda, y que también cumple que

$$f(a_{(n)}b) = f(a)_{(n)}f(b) \quad \forall a, b \in R, \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Si $f$ es además biyectiva, entonces $f^{-1}$ también resulta un homomorfismo de álgebras conformes. En este caso $f$ se dice *isomorfismo*, y $R$ y $R'$ se dicen isomorfas. Denotaremos esto por $R \simeq R'$.

**Definición 2.2.13.** Si $R$ es un álgebra conforme, diremos que $I \subseteq R$ es un *ideal a izquierda* de $R$ si para todos $a \in R$, $b \in I$ y $n \in \mathbb{Z}_+$ vale que $a_{(n)}b \in I$.

Similarmente, $I$ es un *ideal a derecha* si cumple lo mismo pero para todo $a \in I$ y $b \in R$. Finalmente, $I$ se dice *ideal* (o *ideal bilátero*) si es un ideal tanto a izquierda como a derecha.

**Ejemplo 2.2.14.** Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Definimos el *álgebra loop* asociada a $\mathfrak{g}$ como $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$.

Dados $a \in \mathfrak{g}$ y $n \in \mathbb{Z}$, denotamos $a_n = at^n = a \otimes t^n \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Ahora definimos un corchete de Lie en $\tilde{\mathfrak{g}}$ mediante

$$[a_n, b_m] = [a, b]_{n+m}$$

para todo $a, b \in \mathfrak{g}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$.

Consideremos las distribuciones formales $\tilde{\mathfrak{g}}$-valuadas definidas por $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$ para cada $a \in \mathfrak{g}$. Es fácil corroborar que

$$[a(z), b(w)] = [a, b](w)\delta(z - w) \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

Resulta así que la familia $F = \{a(z) : a \in \mathfrak{g}\} \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}[[z, z^{-1}]]$ está compuesta por distribuciones formales locales de a pares, por lo cual su clausura $\overline{F}$ es un álgebra de Lie conforme. Esta álgebra de Lie conforme se suele llamar *álgebra de corrientes* y se denota $\mathrm{Cur}(\mathfrak{g})$. Además las distribuciones formales $a(z)$ con $a \in \mathfrak{g}$ se denominan *corrientes.*

Notemos que $\mathrm{Cur}(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{C}[T] \otimes \mathfrak{g}$, donde la estructura de álgebra conforme de la segunda viene dada por

$$a_{(0)}b = [a, b], \quad a_{(m)}b = 0 \quad \forall m \geq 1,$$

para todos $a, b \in \mathfrak{g}$ (aquí estamos identificando $\mathfrak{g} \simeq 1 \otimes \mathfrak{g} \subseteq \mathbb{C}[T] \otimes \mathfrak{g}$).

**Ejemplo 2.2.15.** Consideremos el *álgebra de Lie de Virasoro* $\mathfrak{g}$, cuya base es $\{L_m : m \in \mathbb{Z}\}$, y cuyo corchete de Lie viene dado por:

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Sea $L(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} L_m z^{-m-2} \in \mathfrak{g}[[z, z^{-1}]]$. Puede probarse que

$$[L(z), L(w)] = (\partial_w L(w))\delta(z-w) + 2L(w)\partial_w \delta(z-w).$$

Esto dice que $L(z)$ es local consigo misma, por lo cual a partir de la familia $F = \{L(z)\}$ obtenemos un álgebra de Lie conforme $\overline{F}$ que se denomina *álgebra conforme de Virasoro*, y se denota por Vir.

Observemos que Vir $\simeq \mathbb{C}[T]L$, donde la estructura de álgebra conforme de $\mathbb{C}[T]L$ se define mediante

$$[L_\lambda L] = TL + 2\lambda L.$$

Si tomamos una extensión central $\mathfrak{g} \oplus C\mathbb{C}$ de $\mathfrak{g}$ con relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12} C\delta_{m,-n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, \\
[C, L_m] &= 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

y consideramos la misma distribución $L(z)$ de recién, puede verse que

$$[L(z), L(w)] = (\partial_w L(w))\delta(z-w) + 2L(w)\partial_w \delta(z-w) + \frac{1}{2} C \partial_w^{(2)} \delta(z-w).$$

De esta manera obtenemos una nueva álgebra de Lie conforme, llamada *álgebra conforme de Virasoro con carga central C*. Ésta es isomorfa al álgebra de Lie conforme $\mathbb{C}[T] \otimes L \oplus \mathbb{C}[T] \otimes C$, cuyo $\lambda$-corchete está dado por

$$[L_\lambda L] = TL + 2\lambda L + \frac{1}{2}\lambda^2 C, \qquad [L_\lambda C] = [C_\lambda C] = 0.$$

Los dos ejemplos anteriores indican que ciertas álgebras de Lie poseen una estrecha relación con las álgebras de Lie conformes, y esto motiva la siguiente definición:

**Definición 2.2.16.** Un *álgebra de Lie de distribuciones formales* es un par $(\mathfrak{g}, F)$, donde $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, $F \subseteq \mathfrak{g}[[z, z^{-1}]]$, y se cumple que los coeficientes de las distribuciones formales en $F$ generan todo $\mathfrak{g}$.

Definimos ahora un *homomorfismo de álgebras de Lie de distribuciones formales* $f : (\mathfrak{g}, F) \to (\mathfrak{g}', F')$ como un homomorfismo de álgebras de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ tal que $f(F) \subseteq \overline{F'}$ (donde $f(a(z))$ se define aplicando $f$ en cada coeficiente de $a(z)$ para toda $a(z) \in F$).

Con esta definición, las álgebras de Lie de distribuciones formales forman una categoría. También las álgebras de Lie conformes forman una categoría, cuyos morfismos son los homomorfismos de álgebras conformes.

Como hemos visto, a cada álgebra de Lie de distribuciones formales $(\mathfrak{g}, F)$ le podemos asignar un álgebra de Lie conforme $\overline{F}$. Llevando esto al lenguaje categórico, resulta que hemos definido un funtor de la categoría de álgebras de Lie de distribuciones formales en la categoría de álgebras de Lie conformes, el cual denominaremos Conf.

Es posible también realizar la construcción inversa, como veremos a continuación. Si $R$ es un álgebra de Lie conforme, definimos su *afinización* como $\tilde{R} = R[t, t^{-1}] = R \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Definimos una estructura de $\mathbb{C}[T]$-módulo a izquierda sobre $\tilde{R}$ mediante $T(a \otimes f) = Ta \otimes f + a \otimes \partial_t f$ para $a \in R$ y $f \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$.

**Proposición 2.2.17.** *Sea $R$ un álgebra de Lie conforme y sea $\tilde{R}$ su afinización. Definimos los productos $n$-ésimos en $\tilde{R}$ para $n \in \mathbb{Z}_+$ como*

$$(a \otimes f)_{(n)}(b \otimes g) = \sum_{j=0}^{\infty}(a_{(n+j)}b) \otimes ((\partial_t^{(j)} f)g) \quad \forall a, b \in R, \ \forall f, g \in \mathbb{C}[t, t^{-1}].$$

*Entonces $\tilde{R}$ munido del $\lambda$-corchete definido por estos productos $n$-ésimos es un álgebra de Lie conforme.*

*Demostración.* Primero observemos que el $\lambda$-corchete en $\tilde{R}$ está dado por

$$[(a \otimes f)_\lambda(b \otimes g)] = [a_{\lambda+\partial_t}b] \otimes f(t)g(t')\big|_{t'=t} \quad \forall a, b \in R, \ \forall f, g \in \mathbb{C}[t, t^{-1}].$$

Esto es así por lo siguiente:

$$\begin{aligned}
[a_{\lambda+\partial_t}b] \otimes f(t)g(t')\big|_{t'=t} =& \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda + \partial_t)^{(k)}(a_{(k)}b) \otimes f(t)g(t')\big|_{t'=t} \\
=& \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\lambda^{k-j}(a_{(k)}b) \otimes (\partial_t^j f(t)g(t'))\big|_{t'=t} \\
=& \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\lambda^{(k-j)}(a_{(k)}b) \otimes ((\partial_t^{(j)} f)g) \\
=& \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{(n)}(a_{(n+j)}b) \otimes ((\partial_t^{(j)} f)g) \\
=& [(a \otimes f)_\lambda(b \otimes g)].
\end{aligned}$$

Ahora resta verificar los axiomas.

$$\begin{aligned}
[(T(a \otimes f))_\lambda(b \otimes g)] =& [(Ta \otimes f)_\lambda(b \otimes g)] + [(a \otimes (\partial_t f))_\lambda(b \otimes g)] \\
=& [Ta_{\lambda+\partial_t}b] \otimes f(t)g(t')\big|_{t'=t} + [a_{\lambda+\partial_t}b] \otimes (\partial_t f(t))g(t')\big|_{t'=t} \\
=& (-\lambda - \partial_t)[a_{\lambda+\partial_t}b] \otimes f(t)g(t')\big|_{t'=t} + \partial_t\left([a_{\lambda+\partial_t}b] \otimes f(t)g(t')\right)\big|_{t'=t} \\
=& -\lambda[a_{\lambda+\partial_t}b] \otimes f(t)g(t')\big|_{t'=t} \\
=& -\lambda[(a \otimes f)_\lambda(b \otimes g)].
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[(a\otimes f)_\lambda(T(b\otimes g))] =&[(a\otimes f)_\lambda(Tb\otimes g)] + [(a\otimes f)_\lambda(b\otimes \partial_t g)]\\
=&[a_{\lambda+\partial_t}Tb]\otimes f(t)g(t')\big|_{t'=t} + [a_{\lambda+\partial_t}b]\otimes f(t)\partial_{t'}g(t')\big|_{t'=t}\\
=&(\lambda+\partial_t+T)[a_{\lambda+\partial_t}b]\otimes f(t)g(t')\big|_{t'=t}\\
&\qquad + [a_{\lambda+\partial_t}b]\otimes f(t)\partial_{t'}g(t')\big|_{t'=t}\\
=&(\lambda+T)[a_{\lambda+\partial_t}b]\otimes f(t)g(t')\big|_{t'=t}\\
&\qquad + [a_{\lambda+\partial_t}b]\otimes (\partial_t f(t)g(t') + f(t)\partial_{t'}g(t'))\big|_{t'=t}\\
=&\lambda[(a\otimes f)_\lambda(b\otimes g)] + (T[a_{\lambda+\partial_t}b])\otimes f(t)g(t')\big|_{t'=t}\\
&\qquad + [a_{\lambda+\partial_t}b]\otimes (\partial_t(f(t)g(t')\big|_{t'=t}))\\
=&(\lambda+T)[(a\otimes f)_\lambda(b\otimes g)].
\end{aligned}
$$

Esto muestra que $\tilde{R}$ es un álgebra conforme. Las propiedades (2.2.11) y (2.2.12) pueden probarse de forma análoga. □

Ahora realizaremos una construcción más general, que nos servirá en este caso para construir el álgebra de Lie de distribuciones formales que asociaremos a $R$.

**Proposición 2.2.18.** *Sea $R$ un álgebra conforme. Entonces $TR$ es un ideal bilátero de $R$ con respecto al producto 0-ésimo, por lo cual el producto 0-ésimo define un producto en $R/TR$. Con respecto a este producto, $R/TR$ es un álgebra de Lie.*

*Demostración.* Debido a (2.2.13) y (2.2.14), vale que $(TR)_{(0)}R = 0$ y $R_{(0)}TR \subseteq TR$, con lo cual $TR$ es en efecto un ideal bilátero de $R$ con respecto al producto 0-ésimo.

Gracias a esto, el producto $[\,,]: R/TR\otimes R/TR \to R/TR$ dado por $[a+TR, b+TR] = a_{(0)}b + TR$ para todos $a,b\in R$ está bien definido.

Ahora observemos que (2.2.15) para $m=n=0$ se convierte en

$$a_{(0)}(b_{(0)}c) = (a_{(0)}b)_{(0)}c + b_{(0)}(a_{(0)}c).$$

Esto llevado al cociente significa que $(R/TR, [\,,])$ es un álgebra de Leibniz. Por último, (2.2.16) para $n=0$ dice que

$$b_{(0)}a = -\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j T^{(j)}(a_{(j)}b).$$

Como todos los sumandos en el miembro derecho pertenecen a $TR$ salvo el correspondiente a $j=0$, cocientando esta expresión obtenemos que $(R/TR, [\,,])$ es un álgebra de Lie. □

Volvamos a considerar ahora la afinización $\tilde{R}$ de un álgebra conforme $R$. Aplicando la Proposición anterior a $\tilde{R}$, obtenemos que $\tilde{R}/T\tilde{R}$ es un álgebra de Lie cuyo corchete viene dado por

$$[\overline{a_{(m)}}, \overline{b_{(n)}}] = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} \overline{(a_{(j)}b)_{(m+n-j)}} \quad \forall a, b \in R,\ \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.2.18}$$

En esta expresión, $\overline{a_{(m)}}$ denota a $a \otimes t^m + T\tilde{R}$ para todos $a \in R$ y $m \in \mathbb{Z}$. El álgebra de Lie $(\tilde{R}/T\tilde{R}, [,])$ se denota Lie$R$.

Definimos ahora una familia de distribuciones formales Lie$R$-valuadas mediante

$$F(R) = \left\{ a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{a_{(m)}} z^{-m-1} \ :\ a \in R \right\}. \tag{2.2.19}$$

Ahora gracias a (2.2.18), podemos aplicar la Observación 2.1.8 (la recíproca, puesto que $a_{(j)}b = 0$ para $j \gg 0$), y resulta que

$$[a(z), b(w)] = \sum_{j=0}^{\infty} (a_{(j)}b)(w) \partial_w^{(j)} \delta(z - w) \tag{2.2.20}$$

para todos $a, b \in R$. Por lo tanto, $F$ resulta ser una familia de distribuciones formales mutuamente locales de a pares, y esto dice que (Lie$R, F$) es un álgebra de Lie de distribuciones formales.

De esta manera, así como habíamos definido un funtor Conf de la categoría de álgebras de Lie de distribuciones formales en la categoría de álgebras de Lie conformes, dado por Conf$(\mathfrak{g}, F) = \overline{F}$, ahora hemos construido un funtor que llamaremos Lie en la dirección opuesta, definido por Lie$(R) = ($Lie$R, F(R))$.

**Lema 2.2.19.** *Si $R$ es un álgebra de Lie conforme, entonces $F(R)$ también lo es.*

*Demostración.* Basta ver que $F(R) = \overline{F(R)}$, es decir que $F(R)$ es cerrada bajo $\partial_z$ y bajo todos los productos $n$-ésimos con $n \in \mathbb{Z}_+$.

Primero observemos que

$$\overline{(Ta)_{(m)}} = Ta \otimes t^m + T\tilde{R} = -a \otimes \partial_t t^m + T\tilde{R} = -m\overline{a_{(m-1)}}.$$

Pero entonces $F(R)$ es cerrada bajo $\partial_z$, ya que

$$\partial_z a(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} -m\overline{a_{(m-1)}} z^{-m-1} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{(Ta)_{(m)}} z^{-m-1} = (Ta)(z).$$

Por otro lado, debido a (2.2.20) tenemos que

$$a(z)_{(n)}b(z) = (a_{(n)}b)(z) \quad \forall a, b \in R,\ \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.2.21}$$

Esto muestra que $F(R)$ también es cerrada bajo los productos $n$-ésimos con $n \in \mathbb{Z}_+$, y ya está. $\square$

Dada un álgebra de Lie conforme $R$, $(\mathrm{Lie}(R), F(R))$ es el *álgebra de Lie de distribuciones formales maximal asociada a $R$.*

**Proposición 2.2.20.** *Sea $R$ un álgebra de Lie conforme. Sea $\varphi : R \to F(R)$ definida como $\varphi(a) = a(z)$ para todo $a \in R$.*

*Entonces $\varphi$ es un isomorfismo de álgebras de Lie conformes.*

*Demostración.* Es claro que $\varphi$ es $\mathbb{C}$-lineal y sobreyectiva. Además, en la demostración del Lema anterior vimos que $\partial_z a(z) = (Ta)(z)$ para todo $a \in R$, lo cual dice que $\varphi$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}[T]$-módulos a izquierda. Como además vale (2.2.21), resulta que $\varphi$ es un epimorfismo de álgebras de Lie conformes.

Para ver la inyectividad, supongamos que $a(z) = 0$ para algún $a \in R$. En particular, $\overline{a_{(-1)}} = 0$. Consideremos ahora la función $\tilde{\psi} : \tilde{R} \to R$ dada por $\tilde{\psi}(a \otimes t^j) = T^{(-j-1)}a$ para $j < 0$ y $\tilde{\psi}(a \otimes t^j) = 0$ para $j \geq 0$.

Puede chequearse de forma inmediata que $\tilde{\psi}(T\tilde{R}) = 0$, por lo que $\tilde{\psi}$ induce una transformación $\mathbb{C}$-lineal $\psi : \mathrm{Lie}R \to R$, y ésta cumple lo siguiente:

$$0 = \psi(\overline{a_{(-1)}}) = \tilde{\psi}(a \otimes t^{-1}) = T^{(0)}a = a.$$

Por lo tanto, $\varphi$ resulta también inyectiva, es decir que es un isomorfismo de álgebras conformes. $\square$

La Proposición anterior muestra que $\mathrm{Conf}(\mathrm{Lie}(R)) \simeq R$. Por otro lado, tenemos que $\mathrm{Lie}(\mathrm{Conf}(\mathfrak{g}, F)) = (\mathrm{Lie}\overline{F}, \overline{F})$.

Debido a la maximalidad de $(\mathrm{Lie}(R), F(R))$, cualquier otra álgebra de distribuciones formales $(\mathfrak{g}, F)$ con $\bar{F} = R$ es imagen de $(\mathrm{Lie}(R), F(R))$ por un homomorfismo de álgebras de Lie de distribuciones formales. El núcleo de este homomorfismo de $\mathrm{Lie}(R)$ a $\mathfrak{g}$ es un ideal $I$, llamado *ideal irregular*. Si un álgebra de Lie de distribuciones formales es obtenida como el cociente del álgebra de Lie de distribuciones formales maximal por un ideal irregular, se dice que es *equivalente al álgebra de Lie de distribuciones formales maximal.* Así, tenemos una equivalencia de categorías entre la categoría de álgebras de Lie conformes y la categoría de clases de equivalencia de álgebras de Lie de distribuciones formales.

**Definición 2.2.21.** Un álgebra de Lie conforme $R$ se dice *finita* si es finitamente generada como $\mathbb{C}[T]$-módulo a izquierda.

**Definición 2.2.22.** Un álgebra de Lie conforme $R$ se dice *simple* si no es conmutativa y no contiene ideales no triviales (cf. definición 2.2.13).

Las álgebras de Lie conformes finitas simples han sido clasificadas por D'Andrea y Kac [1998], llegando al siguiente resultado:

**Teorema 2.2.23.** *Toda álgebra de Lie conforme finita simple es isomorfa o bien a* Vir *o bien a* $\mathrm{Cur}(\mathfrak{g})$ *para algún álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *simple de dimensión finita.*

## 2.3. Correspondencias estado-campo

De aquí en adelante, la letra $V$ denotará un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

**Definición 2.3.1.** Un *campo* en $V$ es una distribución formal $\mathrm{End}(V)$-valuada $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$ tal que para cada $v \in V$ existe un $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $a_{(n)}v = 0$ para todo $n \geq N$. Es decir, para cada $v \in V$ vale que $a(z)v \in V[[z]][z^{-1}]$ para $n \gg 0$. El conjunto de todos los campos en $V$ vuelve a ser un espacio vectorial, que denotaremos por $glf(V)$.

Dada una distribución formal $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}$ con coeficientes en cualquier espacio vectorial $U$, denotaremos

$$a(z)_+ = \sum_{n<0} a_{(n)} z^{-n-1} \quad , \quad a(z)_- = \sum_{n\geq 0} a_{(n)} z^{-n-1}.$$

De esta forma, obtenemos una descomposición $a(z) = a(z)_+ + a(z)_-$ en la cual se cumple que $\partial(a(z)_\pm) = (\partial a(z))_\pm$.

**Definición 2.3.2.** Dados dos campos $a(z), b(z) \in glf(V)$, definimos su *producto normalmente ordenado* como

$$:a(z)b(z): = a(z)_+ b(z) + b(z)a(z)_- \tag{2.3.1}$$

*Observación* 2.3.3. Para ver que el producto normalmente ordenado de dos campos $a(z)$ y $b(z)$ en $V$ está bien definido, observemos primero que para todo $n \in \mathbb{Z}$ vale que

$$:a(z)b(z):_{(n)} = \sum_{j<0} a_{(j)} b_{(n-j-1)} + \sum_{j\geq 0} b_{(n-j-1)} a_{(j)}.$$

Ahora dado $v \in V$, cada una de estas sumas aplicadas a $v$ resulta en una cantidad finita de sumandos, por lo cual $:a(z)b(z):$ es una distribución formal bien definida.

Más aún, es fácil ver que $:a(z)b(z):$ es un campo, con lo cual el producto normalmente ordenado le otorga a $glf(V)$ una estructura de álgebra sobre $\mathbb{C}$ (la cual en general no es ni asociativa ni conmutativa).

La derivada de un campo $a(z)$ es nuevamente un campo. Además, gracias a que $\partial(a(z)_\pm) = (\partial a(z))_\pm$, es inmediato ver que

$$\partial(:a(z)b(z):) = :\partial a(z) b(z): + :a(z)\partial b(z):,$$

es decir que $\partial$ es una derivación del producto normalmente ordenado.

**Definición 2.3.4.** Dados dos campos $a(z)$ y $b(z)$ en $V$ y $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < 0$, definimos el *producto $n$-ésimo* entre $a(z)$ y $b(z)$ como

$$a(z)_{(n)}b(z) =: \partial^{(-n-1)}a(z)b(z):. \tag{2.3.2}$$

Así, en $glf(V)$ se encuentran definidos no sólo los productos $n$-ésimos para $n \in \mathbb{Z}_+$ (cf. definición 2.2.2), sino para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Es posible dar una fórmula general para $a(z)_{(n)}b(z)$, válida tanto para los $n$ positivos como para los negativos.

**Proposición 2.3.5.** *Sean $a(z)$ y $b(z)$ campos en $V$, y sea $n \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$a(w)_{(n)}b(w) = Res_z(a(z)b(w)i_{z,w}(z-w)^n - b(w)a(z)i_{w,z}(z-w)^n). \tag{2.3.3}$$

*Demostración.* Es claro que esta fórmula es válida para el caso $n \geq 0$, ya que entonces $i_{z,w}(z-w)^n = (z-w)^n = i_{w,z}(z-w)^n$.

El caso $n < 0$ se sigue de las siguientes fórmulas de Cauchy formales: para toda distribución formal $c(z)$ y todo $k \in \mathbb{Z}_+$ vale que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_z c(z) i_{z,w}\frac{1}{(z-w)^{k+1}} &= \partial_w^{(k)}c(w)_+ \,,\\
\mathrm{Res}_z c(z) i_{w,z}\frac{1}{(z-w)^{k+1}} &= -\, \partial_w^{(k)}c(w)_- .
\end{aligned}$$

Ambas fórmulas pueden probarse por inducción sobre $k$. Por ejemplo, para ver la primera tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_z c(z) i_{z,w}\frac{1}{z-w} &= \mathrm{Res}_z c(z)\sum_{m=0}^{\infty} z^{-m-1}w^m\\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{(j)}\mathrm{Res}_z \sum_{m=0}^{\infty} z^{-j-m-2}w^m\\
&= \sum_{j<0} c_{(j)}w^{-j-1}\\
&= c(w)_+ .
\end{aligned}$$

Esto muestra que la primer fórmula vale para $k = 0$. Si suponemos que vale para cierto $k \in \mathbb{Z}_+$, entonces usando (2.1.3) resulta que

$$\begin{aligned}
\partial_w^{(k+1)}a(w)_+ =& \frac{k!}{(k+1)!}\partial_w(\partial_w^{(k)}a(w)) \\
=& \frac{1}{k+1}\partial_w\left(\mathrm{Res}_z a(z) i_{z,w}\frac{1}{(z-w)^{k+1}}\right) \\
=& \frac{1}{k+1}\mathrm{Res}_z a(z)\partial_w\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m}{k} z^{-m-1}w^{m-k}\right) \\
=& \mathrm{Res}_z a(z)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}z^{-m-1}w^{m-k-1} \\
=& \mathrm{Res}_z a(z) i_{z,w}\frac{1}{(z-w)^{(k+1)+1}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto vale la primer fórmula para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, y de manera análoga se prueba la segunda.

Ahora las utilizaremos para probar (2.3.3) para todo $n < 0$:

$$\begin{aligned}
a(w)_{(n)}b(w) = & :\partial_w^{(-n-1)}a(w)b(w): \\
=& \partial_w^{(-n-1)}a(w)_+ b(w) + b(w)\partial_w^{(-n-1)}a(w)_- \\
=& \left(\mathrm{Res}_z a(z) i_{z,w}\frac{1}{(z-w)^{(-n-1)+1}}\right) b(w) \\
& - b(w)\left(\mathrm{Res}_z a(z) i_{w,z}\frac{1}{(z-w)^{(-n-1)+1}}\right) \\
=& \mathrm{Res}_z(a(z)b(w)i_{z,w}(z-w)^n - b(w)a(z)i_{w,z}(z-w)^n).
\end{aligned}$$

□

**Definición 2.3.6.** Un subespacio $F$ de $glf(V)$ que contiene al operador identidad $I_V$ y es cerrado bajo todos los productos $n$-ésimos con $n \in \mathbb{Z}$ es llamado un *álgebra de campos lineal*. Además, $glf(V)$ se denomina *álgebra de campos lineal general*.

Observemos que si $F$ es un álgebra de campos lineal, entonces automáticamente vale que $\partial_z F \subseteq F$, puesto que si $a(z) \in F$, entonces

$$a(z)_{(-2)}I_V =: (\partial_z a(z))I_V := (\partial_z a(z))_+ I_V + I_V(\partial_z a(z))_- = \partial_z a(z). \quad (2.3.4)$$

De hecho vale lo siguiente:

**Proposición 2.3.7.** *Sea $F$ un subespacio de $glf(V)$. Entonces $F$ es un álgebra de campos lineal si y sólo si $I_V \in F$, $\partial_z F \subseteq F$, $F$ es cerrado bajo el producto normalmente ordenado y $F$ es cerrado bajo los productos $n$-ésimos con $n \in \mathbb{Z}_+$.*

*Demostración.* Si $F$ es un álgebra de campos lineal, vimos que $\partial_z F \subseteq F$. Además, $F$ es cerrada bajo el producto normalmente ordenado dado que éste coincide con el producto $(-1)$-ésimo.

Recíprocamente, si $I_V \in F$ y $F$ es cerrada bajo derivación, producto normalmente ordenado y productos $n$-ésimos no negativos, entonces también es cerrada bajo los productos $n$-ésimos negativos, puesto que si $n < 0$, entonces

$$a(z)_{(n)}b(z) =: \partial_z^{(-n-1)}a(z)b(z) :\in F$$

para todos $a(z), b(z) \in F$, por lo que $F$ es un álgebra de campos lineal. □

Si $F$ es un álgebra de campos lineal, a cada $a(z) \in F$ podemos asociarle una distribución formal con valores en $\mathrm{End}(F)$ dada por

$$Y(a(z), x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(z)_{(n)}x^{-n-1}, \tag{2.3.5}$$

donde $a(z)_{(n)} : F \to F$ se define como $b(z) \mapsto a(z)_{(n)}b(z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

La correspondencia $F \to \mathrm{End}(F)[[x, x^{-1}]]$, $a(z) \mapsto Y(a(z), x)$ cumple las siguientes propiedades:

**Proposición 2.3.8.** *Sea $F$ un álgebra de campos lineal. Entonces vale que:*

*(a)* $Y(I_V, z) = I_F$, $Y(a(z), x)I_V = a(z) + \partial_z a(z)x + \cdots \in F[[x]]$.

*(b)* $[\partial_z, Y(a(z), x)] = Y(\partial_z a(z), x) = \partial_x Y(a(z), x)$.

*Demostración.*

(a) Para ver lo primero, simplemente tomamos $b(z) \in F$ y observamos que

· Si $n < -1$, entonces $I_{V(n)}b(z) =: (\partial_z^{(-n-1)}I_V)b(z) := 0$.

· Si $n \geq 0$, entonces $I_{V(n)}b(z) = \mathrm{Res}_w[I_V, b(z)](w-z)^n = 0$.

Por lo tanto, resulta que

$$Y(I_V, z)b(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_{V(n)}b(z)x^{-n-1} = I_{V(-1)}b(z) =: I_V b(z) := b(z).$$

Por otro lado, para ver lo segundo tenemos que probar que para todo $a(z) \in F$ vale que $a(z)_{(n)}I_V = 0$ para $n \in \mathbb{Z}_+$, que $a(z)_{(-1)}I_V = a(z)$, y que $a(z)_{(-2)}I_V = \partial_z a(z)$.

Pero si $n \in \mathbb{Z}_+$, entonces $a(z)_{(n)}I_V = \mathrm{Res}_w[a(w), I_V](w-z)^{(n)} = 0$, $a(z)_{(-1)}I_V =: a(z)I_V := a(z)$, y la última igualdad es (2.3.4).

(b) Para probar estas igualdades, primero veamos que las fórmulas

$$\begin{aligned}(\partial_z a(z))_{(n)}b(z) =& - na(z)_{(n-1)}b(z),\\ a(z)_{(n)}(\partial_z b(z)) =& \partial_z(a(z)_{(n)}b(z)) + na(z)_{(n-1)}b(z),\end{aligned}$$

valen para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todos $a(z), b(z) \in F$. Ya sabíamos por la Proposición (2.2.11) que valían para $n \in \mathbb{Z}_+$. Para ver su validez en el caso $n < 0$, calculamos por un lado que

$$\begin{aligned}(\partial_z a(z))_{(n)}b(z) =& : \partial_z^{(-n-1)}(\partial_z a(z))b(z) :\\ =& \frac{(-n)!}{(-n-1)!} : (\partial_z^{(-n)}a(z))b(z) :\\ =& - na(z)_{(n-1)}b(z).\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}\partial_z(a(z)_{(n)}b(z)) =& \partial_z(: (\partial_z^{(-n-1)}a(z))b(z) :)\\ =& \partial_z(\partial_z^{(-n-1)}a(z)_+b(z)) + \partial_z(b(z)\partial_z^{(-n-1)}a(z)_-)\\ =& - n\partial_z^{(-n)}a(z)_+b(z) + \partial_z^{(-n-1)}a(z)_+\partial_z b(z)\\ & + \partial_z b(z)\partial_z^{(-n-1)}a(z)_- - nb(z)\partial_z^{(-n)}a(z)_-\\ =& : (\partial_z^{(-n-1)}a(z))\partial_z b(z) : - n : (\partial_z^{(-n)}a(z))b(z) :\\ =& a(z)_{(n)}(\partial_z b(z)) - na(z)_{(n-1)}b(z).\end{aligned}$$

Ahora usamos esto para probar las igualdades. Primero tenemos que

$$\begin{aligned}[\partial_z, Y(a(z), x)]b(z) =& \partial_z\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(z)_{(n)}b(z)x^{-n-1}\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(z)_{(n)}\partial_z b(z)x^{-n-1}\\ =& \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\partial_z(a(z)_{(n)}b(z)) - a(z)_{(n)}(\partial_z b(z)))x^{-n-1}\\ =& \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\partial_z a(z))_{(n)}b(z)x^{-n-1}\\ =& Y(\partial_z a(z), x)b(z).\end{aligned}$$

Finalmente, la segunda igualdad vale porque

$$\begin{aligned}\partial_x Y(a(z), x)b(z) =& \sum_{n\in\mathbb{Z}} -na(z)_{(n-1)}b(z)x^{-n-1}\\ =& \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\partial_z a(z))_{(n)}b(z)x^{-n-1}\\ =& Y(\partial_z a(z), x)b(z).\end{aligned}$$

□

La proposición anterior motiva la siguiente definición:

**Definición 2.3.9.** Sea $(V, |0\rangle)$ un espacio vectorial punteado (es decir, un espacio vectorial $V$ junto con un elemento distinguido $|0\rangle \in V$, al cual denominaremos *vector vacío*). Una *correspodencia estado-campo* es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$Y : V \to glf(V), \quad a \mapsto Y(a, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1},$$

tal que valen los siguientes axiomas:

1. (Axiomas del vacío)

$$Y(|0\rangle, z) = I_V, \tag{2.3.6}$$
$$Y(a, z)|0\rangle = a + T(a)z + \cdots \in V[[z]] \quad \forall a \in V, \tag{2.3.7}$$

   donde $I_V$ es el operador identidad, y $T \in \mathrm{End}(V)$ es un operador que llamaremos *operador de traslación.*

2. (Invariancia de la traslación)

$$[T, Y(a, z)] = Y(Ta, z) = \partial_z Y(a, z) \quad \forall a \in V. \tag{2.3.8}$$

**Ejemplo 2.3.10.** Sea $F$ un álgebra de campos tal que

$$a(z)_{(n)} b(z) = 0 \quad \text{para } n \gg 0 \tag{2.3.9}$$

para todo $a(z), b(z) \in F$ . Entonces las distribuciones formales $Y(a(z), x)$ son en realidad campos en $F$, por lo cual podemos definir un mapa $Y : V \to glf(V)$, $a(z) \mapsto Y(a(z), x)$, el cual resulta ser una correspondencia estado-campo gracias a la Proposición (2.3.8).

Observemos además que (2.3.9) se cumple en el caso en que los campos en $F$ son todos locales de a pares.

**Ejemplo 2.3.11.** Sea $V$ un álgebra unitaria con producto $(a, b) \mapsto ab$ y unidad $|0\rangle$, y sea $T$ una derivación de $V$. Definimos

$$Y : V \to glf(v), \quad Y(a, z)b = (e^{zT} a)b \quad \forall a, b \in V.$$

Entonces $Y$ es una correspondencia estado-campo en $(V, |0\rangle)$. Para ver esto, sólo debemos chequear los axiomas. Tenemos que

$$Y(|0\rangle, z)b = \left(e^{zT}|0\rangle\right) b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(T^n|0\rangle\right) bz^n = |0\rangle b = b.$$

$$\begin{aligned}Y(a,z)|0\rangle = \left(e^{zT}a\right)|0\rangle = e^{zT}a =& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}T^n a\, z^n \\ =& a + Ta\, z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}T^n a\, z^n \in V[[z]].\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumplen los axiomas del vacío.
Además vale que

$$\begin{aligned}[T, Y(a,z)]b =& T\left(e^{zT}a\right)b - \left(e^{zT}a\right)(Tb) \\ =& T\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(T^n a)b\, z^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(T^n a)(Tb)z^n \\ =& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(T((T^n a)b) - (T^n a)(Tb))z^n \\ =& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(T(T^n a))b\, z^n \\ =& \left(Te^{zT}a\right)b \\ =& \left(\partial_z e^{zT}a\right)b \\ =& \partial_z Y(a,z)b.\end{aligned}$$

$$Y(Ta,z)b = \left(e^{zT}Ta\right)b = \left(Te^{zT}a\right)b = \partial_z Y(a,z)b.$$

Esto muestra que se cumple la invariancia de la traslación.

Observemos que si $Y$ es una correspondencia estado-campo en $(V, |0\rangle)$, entonces tenemos definidos un producto en $V$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, dado por

$$(a,b) \mapsto a_{(n)}b = \mathrm{Res}_z z^n Y(a,z)b. \tag{2.3.10}$$

Estos productos serán llamados *productos $n$-ésimos* en $V$.

Los axiomas del vacío y de invariancia de la traslación que definen a una correspondencia estado campo pueden ser reformulados en términos de los productos $n$-ésimos, de la siguiente forma:

**Proposición 2.3.12.** *Sea $(V, |0\rangle)$ un espacio vectorial punteado, y sea $Y : V \to (\mathrm{End}(V))[[z, z^{-1}]]$ una aplicación $\mathbb{C}$-lineal. Definimos los productos $n$-ésimos en $V$ mediante (2.3.10) para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces vale que $Y$ es una correspondencia estado-campo en $(V, |0\rangle)$ si y sólo si los productos $n$-ésimos en $V$ satisfacen las siguientes propiedades para todos $a, b \in V$:*

1. *$a_{(n)}b = 0$ para $n \gg 0$.*

*2.* $a_{(-1)}|0\rangle = |0\rangle_{(-1)}a = a$.

*3.* $[T, a_{(n)}] = (Ta)_{(n)} = -na_{(n-1)}$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

*Demostración:* Primero observemos que la primer condición enunciada es equivalente a que $Y(a,z) \in glf(V)$ para todo $a \in V$.

Por otro lado, comparando los coeficientes de $z^n$ a ambos lados de (2.3.6), (2.3.7) y (2.3.8) vemos que estos axiomas son equivalentes a las otras dos condiciones del enunciado, junto con $|0\rangle_{(n)}a = 0$ para $n \neq -1$, $Ta = a_{(-2)}|0\rangle$ y $a_{(n)}|0\rangle = 0$ para $n \geq 0$, para todo $a \in V$.

Ahora asumiremos 2. y 3. del enunciado, y probaremos los restantes axiomas que debe satisfacer una correspondencia estado-campo. En primer lugar, tenemos que $Ta = (Ta)_{(-1)}|0\rangle = a_{(-2)}|0\rangle$, y además vale que

$$\begin{aligned} T|0\rangle =& T(|0\rangle_{(-1)}|0\rangle) \\ =& [T, |0\rangle_{(-1)}]|0\rangle + |0\rangle_{(-1)}(T|0\rangle) \\ =& (T|0\rangle)_{(-1)}|0\rangle + |0\rangle_{(-1)}(T|0\rangle) \\ =& 2T|0\rangle, \end{aligned}$$

por lo que $T|0\rangle = 0$. Aplicando esto a $(T|0\rangle)_{(n)} = -n|0\rangle_{(n-1)}$, resulta que $|0\rangle_{(n-1)} = 0$ para todo $n \neq 0$.

Finalmente, como $T(a_{(n)}|0\rangle) = -na_{(n-1)}|0\rangle$ y $a_{(N)}b = 0$ para $N \gg 0$, llegamos a $a_{(n)}|0\rangle = 0$ para $n \geq 0$. $\square$

El siguiente lema respecto a la unicidad de ecuaciones diferenciales formales será muy útil para establecer identidades.

**Lema 2.3.13.** *Sea* $U$ *un espacio vectorial y sea* $R(z) \in (\mathrm{End}(U))[[z]]$. *Entonces la ecuación diferencial*

$$\partial_z f(z) = R(z)f(z) \tag{2.3.11}$$

*tiene una única solución de la forma* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ *con* $f_n \in U$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}_+$, *con la condición inicial* $f(0) = f_0$.

*Demostración:* Sustituyendo $f(z)$ y $R(z)$ por sus expansiones como series de potencias en $z$ en (2.3.11) y comparando los coeficientes de $z^n$ a ambos lados, obtenemos las relaciones

$$(n+1)f_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} R_j f_{n-j} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Mediante estas ecuaciones podemos calcular recursivamente los $f_n$ a partir de los $R_j$ y $f_0$. $\square$

**Proposición 2.3.14.** *Sea $Y$ una correspondencia estado-campo en $(V, |0\rangle)$. Entonces vale que*

1. $Y(a,z)|0\rangle = e^{zT}a$ *para todo* $a \in V$.
2. $e^{wT}Y(a,z)e^{-wT} = Y(e^{wT}a,z) = i_{z,w}Y(a,z+w)$ *para todo* $a \in V$.
3. $(Y(a,z)_{(n)}Y(b,z))|0\rangle = Y(a_{(n)}b,z)|0\rangle$ *para todos* $a,b \in V$, $n \in \mathbb{Z}$.

*Demostración:* Todas las afirmaciones se pueden probar utilizando el Lema (2.3.13).

Las afirmaciones 1. y 3. pueden verificarse sin dificultad aplicando el Lema con $U = V$ y $R = R_0 = T$, puesto que en cada caso los miembros izquierdo y derecho de la igualdad son soluciones de (2.3.11).

Por otro lado, la expresión 2. es una igualdad en $\mathrm{End}(V)[[z,z^{-1}]][[w]]$ (pues recordemos que $i_{z,w}(z+w)^n \in \mathbb{C}[[z,z^{-1}]][[w]]$). Entonces, tomando $U = \mathrm{End}(V)[[z,z^{-1}]]$ y $R = R_0 = \mathrm{ad}\ T \in \mathrm{End}(U)$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\partial_w(e^{wT}Y(a,z)e^{-wT}) =& (\partial_w e^{wT})Y(a,z)e^{-wT} + e^{wT}\partial_w(Y(a,z)e^{-wT}) \\
=& Te^{wT}Y(a,z)e^{-wT} - e^{wT}Y(a,z)e^{-wT}T \\
=& [T, e^{wT}Y(a,z)e^{-wT}] \\
=& (\mathrm{ad}\ T)(e^{wT}Y(a,z)e^{-wT}) \\
=& R(e^{wT}Y(a,z)e^{-wT}).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\partial_w(Y(e^{wT}a,z)) =& Y(\partial_w e^{wT}a,z) \\
=& Y(Te^{wT}a,z) \\
=& [T, Y(e^{wT}a,z)] \\
=& R(Y(e^{wT}a,z)).
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que para todo $n \geq 0$ vale que

$$\begin{aligned}
\partial_w(i_{z,w}(z+w)^{-n-1}) =& \partial_w\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m}{n}z^{-m-1}(-w)^{m-n}\right) \\
=& -\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m}{n}z^{-m-1}(m-n)(-w)^{m-n-1} \\
=& (-n-1)\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m}{n+1}z^{-m-1}(-w)^{m-n-1} \\
=& (-n-1)i_{z,w}(z+w)^{-n-2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $\partial_w(i_{z,w}(z+w)^{-n-1}) = (-n-1)i_{z,w}(z+w)^{-n-2}$ vale para todo $n \in \mathbb{Z}$ (pues es claro que también vale para $n < 0$). Usando esto junto con la Proposición (2.3.12), resulta que

$$\begin{aligned}
\partial_w(i_{z,w}Y(a, z + w)) =& \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)}\partial_w(i_{z,w}(z + w)^{-n-1}) \\
=& \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n - 1)a_{(n)}i_{z,w}(z + w)^{-n-2} \\
=& \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n)a_{(n-1)}i_{z,w}(z + w)^{-n-1} \\
=& \sum_{n\in\mathbb{Z}} [T, a_{(n)}]i_{z,w}(z + w)^{-n-1} \\
=& R(i_{z,w}Y(a, z + w)).
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de 2. $\square$

La demostración del siguiente resultado no requiere más que un sencillo chequeo de los axiomas correspondientes.

**Proposición 2.3.15.** *Sea $Y$ una correspondencia estado-campo en $(V, |0\rangle)$. Entonces*

$$Y^{\mathrm{op}}(a, z)b = e^{zT}Y(b, -z)a$$

*define otra correspondencia estado-campo $Y^{\mathrm{op}}$ en $(V, |0\rangle)$, que llamaremos* opuesta *a $Y$.*

*Además, se cumple que $(Y^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = Y$.*

A partir de este momento necesitaremos contar con nociones más sofisticadas de localidad que la que teníamos hasta ahora (cf. definición 2.1.7).

**Definición 2.3.16.** Sean $a(z)$ y $b(z)$ dos campos en $V$. Diremos que el par $(a(z), b(z))$ es:

1. *Local*: Si existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que
$$(z - w)^N[a(z), b(w)] = 0.$$
2. *Local en $v \in V$*: Si existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que
$$(z - w)^N[a(z), b(w)]v = 0.$$
3. *Débilmente local*: Si existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que
$$\mathrm{Res}_z(z - w)^N[a(z), b(w)] = 0.$$

Observemos que si $(a(z), b(z))$ es local, entonces es débilmente local. Sin embargo, no siempre es cierto que $(a(z), b(z))$ es local si y sólo si es local en $v$ para todo $v \in V$ (puesto que en el segundo caso hay un $N$ para cada $v$, mientras que en el primer caso es el mismo $N$ para todos los $v \in V$).

La siguiente proposición nos brinda una caracterización muy útil de $Y^{\mathrm{op}}$.

**Proposición 2.3.17.** *Sean $X$ e $Y$ dos correspondencias estado-campo. Entonces $X = Y^{\mathrm{op}}$ si y sólo si todos los pares $(Y(a, z), X(b, z))$ con $a, b \in V$ son locales en $|0\rangle$.*

*Demostración:* Sean $a, b \in V$ fijos, y supongamos que $(Y(a, z), X(b, z))$ es local en $|0\rangle$. Es decir:

$$(z - w)^N Y(a, z)X(b, w)|0\rangle = (z - w)^N X(b, w)Y(a, z)|0\rangle, \quad N \gg 0.$$

Por la Proposición 2.3.14, esto es equivalente a

$$(z - w)^N e^{wT} i_{z,w} Y(a, z - w)b = (z - w)^N e^{zT} i_{w,z} X(b, w - z)a, \quad N \gg 0.$$

Tomando un $N$ lo suficientemente grande, en ambos lados de esta última igualdad sólo ocurren potencias no negativas de $z - w$, y por lo tanto sólo hay potencias no negativas de $z$ y de $w$.

Por lo tanto, para un tal $N$ podemos evaluar esta expresión en $z = 0$, y luego de cancelar $(-w)^N$ a ambos lados, llegamos a $X(b, w)a = e^{wT} Y(a, -w)b$. Como esto ocurre para todos $a, b \in V$, resulta que $X = Y^{\mathrm{op}}$.

Recíprocamente, si $X = Y^{\mathrm{op}}$, entonces para todos $a, b \in V$ y para $N \gg 0$ vale que

$$\begin{aligned}
(z - w)^N&[Y(a, z), X(b, w)]|0\rangle = \\
&=(z - w)^N \left(Y(a, z)e^{wT} Y(|0\rangle, -w)b - Y^{\mathrm{op}}(b, w)e^{zT} a\right) \\
&=(z - w)^N Y(a, z)e^{wT} b - e^{zT} i_{w,z}(z - w)^N Y^{\mathrm{op}}(b, w - z)a \\
&=(z - w)^N Y(a, z)e^{wT} b - e^{zT} (z - w)^N Y^{\mathrm{op}}(b, w - z)a \\
&=(z - w)^N Y(a, z)e^{wT} b - e^{zT} e^{(w-z)T} i_{z,w}(z - w)^N Y(a, z - w)b \\
&=(z - w)^N (Y(a, z)e^{wT} - e^{wT} i_{z,w} Y(a, z - w))b \\
&=0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(Y(a, z), X(b, w))$ es local en $|0\rangle$ para todos $a, b \in V$. $\square$

**Proposición 2.3.18.** *Sea $Y$ una correspondencia estado-campo en $(V, |0\rangle)$. Sean $B_1(z)$ y $B_2(z)$ dos campos en $V$ tales que $B_1(z)|0\rangle = B_2(z)|0\rangle$ y tales que todos los pares $(Y(a, z), B_i(z))$ con $a \in V$, $i = 1, 2$, son locales en $|0\rangle$.*

*Entonces $B_1(z) = B_2(z)$.*

*Demostración:* Sea $B(z) = B_1(z) - B_2(z)$. Entonces todos los pares $(Y(a,z), B(z))$ con $a \in V$ son locales en $|0\rangle$.

Luego $(z-w)^N[B(z), Y(a,w)]|0\rangle = 0$, y como además $B(z)|0\rangle = 0$, vale que $(z-w)^N B(z)Y(a,w)|0\rangle = 0$. Luego por la Proposición 2.3.14, vale que $(z-w)^N B(z)e^{wT}a = 0$. Finalmente, tomando $w = 0$ en esta expresión resulta que $B(z)a = 0$ para todo $a \in V$. □

A continuación se presenta un resultado que necesitaremos utilizar, cuya demostración no daremos puesto que no aporta mucha información nueva. No obstante, el lector que quiera interiorizarse al respecto de la misma puede consultarla en [B, Lemma 2.7].

**Lema 2.3.19.** *Sean $X$ e $Y$ dos correspondencias estado-campo en $(V, |0\rangle)$, y sean $a, b, c \in V$ tales que*

1. *El par $(Y(a,z), Y(b,z))$ es débilmente local.*
2. *El par $(Y(a,z), X(c,z))$ es local en $|0\rangle$ y en $b$.*
3. *El par $(Y(b,z), X(c,z))$ es local en $|0\rangle$ y en $a$.*

*Entonces $(Y(a,z)_{(n)}Y(b,z), X(c,z))$ es local en $|0\rangle$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Ahora utilizaremos estos dos últimos resultados para demostrar la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.20.** *Sean $X$ e $Y$ dos correspondencias estado-campo en $(V, |0\rangle)$ tales que*

1. *Todos los pares $(Y(a,z), Y(b,z))$ con $a, b \in V$ son débilmente locales.*
2. *Todos los pares $(Y(a,z), X(b,z))$ con $a, b \in V$ son locales en $v$ para cualquier $v \in V$.*

*Entonces $Y(a,z)_{(n)}Y(b,z) = Y(a_{(n)}b, z)$ para todos $a, b \in V$, $n \in \mathbb{Z}$.*

*Demostración:* Fijemos $a, b \in V$ y $n \in \mathbb{Z}$, y consideremos los campos $B_1(z) = Y(a,z)_{(n)}Y(b,z)$ y $B_2(z) = Y(a_{(n)}b, z)$.

Ahora por la Proposición 2.3.14 tenemos que $B_1(z)|0\rangle = B_2(z)|0\rangle$. Por otro lado, debido al Lema 2.3.19 resulta que $(B_i(z), Y(c,z))$ es local en $|0\rangle$ para todo $c \in V$, $i = 1, 2$. Por lo tanto, podemos aplicar la Proposición 2.3.18 y concluir que $B_1(z) = B_2(z)$. □

## 2.4. Álgebras de campos y álgebras de campos fuertes

En esta sección comenzaremos a trabajar con ciertos tipos particulares de correspondencias estado-campo.

**Definición 2.4.1.** Sea $Y$ una correspondencia estado-campo en $(V, |0\rangle)$. Diremos que $(V, |0\rangle, Y)$ es un *álgebra de campos* si satisface el siguiente *axioma de asociatividad* para todos $a, b, c \in V$:

$$(z-w)^N Y(Y(a,z)b, -w)c = (z-w)^N i_{z,w} Y(a, z-w) Y(b, -w)c, \quad N \gg 0. \tag{2.4.1}$$

Por otro lado, diremos que $(V, |0\rangle, Y)$ es un *álgebra de campos fuerte* si satisface el siguiente *axioma del producto $n$-ésimo* para todos $a, b \in V$ y $n \in \mathbb{Z}$:

$$Y(a_{(n)}b, z) = Y(a,z)_{(n)} Y(b,z), \quad N \gg 0. \tag{2.4.2}$$

**Ejemplo 2.4.2.** Sea $U$ un espacio vectorial y sea $F \subseteq glf(U)$ un álgebra de campos lineal (cf. definición 2.3.6).

Supongamos ahora que todos los pares $(a(z), b(z))$ con $a(z), b(z) \in F$ son locales. En particular, esto implica que todos los operadores $Y(a(z), x) \in \mathrm{End}(F)[[x, x^{-1}]]$ definidos por la ecuación (2.3.5) son campos, y vimos en el ejemplo 2.3.10 que esto permite definir una correspondencia estado campo $Y$ en $(F, I_V)$.

Veamos que $(F, I_V, Y)$ es un álgebra de campos fuerte con la definición que acabamos de dar (y ésta es la razón del nombre álgebra de campos lineal).

Para ver esto, basta con demostrar que los pares $(Y(a(z), x), Y(b(z), x))$ con $a(z), b(z) \in F$ son locales. Primero observemos que

$$\begin{aligned}
Y(a(w), x)b(w) =& \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(w)_{(n)} b(w) x^{-n-1} \\
=& \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Res}_z \left( a(z)b(w) i_{z,w}(z-w)^n - b(w)a(z) i_{w,z}(z-w)^n \right) x^{-n-1} \\
=& \mathrm{Res}_z \left( a(z)b(w) i_{z,w} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z-w)^n x^{-n-1} \right) \right. \\
& \qquad \left. - b(w)a(z) i_{w,z} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z-w)^n x^{-n-1} \right) \right) \\
=& \mathrm{Res}_z (a(z)b(w) i_{z,w} - b(w)a(z) i_{w,z}) \delta((z-w) - x).
\end{aligned}$$

Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\mathrm{Res}_z (z-w)^N [a(z), b(w)] = 0$. Entonces dado $c(z) \in F$ vale que

$$
\begin{aligned}
&[Y(a(w),x),Y(b(w),y)]c(w) =\\
&= Y(a(w),x)Y(b(w),y)c(w) - Y(b(w),y)Y(a(w),x)c(w)\\
&= Y(a(w),x)\mathrm{Res}_{z_2}\,(b(z_2)c(w)i_{z_2,w} - c(w)b(z_2)i_{w,z_2})\,\delta((z_2-w)-x)\\
&\qquad\qquad - Y(b(w),y)\mathrm{Res}_{z_1}\,(a(z_1)c(w)i_{z_1,w} - c(w)a(z_1)i_{w,z_1})\,\delta((z_1-w)-y)\\
&= \mathrm{Res}_{z_1}\,(a(z_1)\mathrm{Res}_{z_2}(b(z_2)c(w)i_{z_2,w} - c(w)b(z_2)i_{w,z_2})\delta((z_2-w)-y)i_{z_1,w}\delta((z_1-w)-x)\\
&\qquad - \mathrm{Res}_{z_2}(b(z_2)c(w)i_{z_2,w} - c(w)b(z_2)i_{w,z_2})\delta((z_2-w)-y)a(z_1)i_{w,z_1}\delta((z_1-w)-x)\,)-\\
&- \mathrm{Res}_{z_2}\,(b(z_2)\mathrm{Res}_{z_1}(a(z_1)c(w)i_{z_1,w} - c(w)a(z_1)i_{w,z_1})\delta((z_1-w)-x)i_{z_2,w}\delta((z_2-w)-y)\\
&\qquad + \mathrm{Res}_{z_1}(a(z_1)c(w)i_{z_1,w} - c(w)a(z_1)i_{w,z_1})\delta((z_1-w)-x)b(z_2)i_{w,z_2}\delta((z_2-w)-y)\,)\\
&= \mathrm{Res}_{z_1}\mathrm{Res}_{z_2}[a(z_1),b(z_2)]c(w)i_{z_1,w}\delta((z_1-w)-x)i_{z_2,w}\delta((z_2-w)-y)\\
&\qquad - \mathrm{Res}_{z_1}\mathrm{Res}_{z_2}c(w)[a(z_1),b(z_2)]i_{w,z_1}\delta((z_1-w)-x)i_{w,z_2}\delta((z_2-w)-y).
\end{aligned}
$$

Ahora observemos que

$$
\begin{aligned}
&(x-y)\delta((z_1-w)-x)\delta((z_2-w)-y) =\\
&= (((z_2-w)-y) - ((z_1-w)-x) + (z_1-z_2))\delta((z_1-w)-x)\delta((z_2-w)-y)\\
&= ((z_2-w)-y)\delta((z_2-w)-y)\delta((z_1-w)-x)\\
&\qquad - ((z_1-w)-x)\delta((z_1-w)-x)\delta((z_2-w)-y)\\
&\qquad + (z_1-z_2)\delta((z_1-w)-x)\delta((z_2-w)-y)\\
&= (z_1-z_2)\delta((z_1-w)-x)\delta((z_2-w)-y).
\end{aligned}
$$

Gracias a esto, resulta que

$$
\begin{aligned}
&(x-y)^N[Y(a(w),x),Y(b(w),y)]c(w) =\\
&= \mathrm{Res}_{z_1}\mathrm{Res}_{z_2}[a(z_1),b(z_2)]c(w)i_{z_1,w}(x-y)^N\delta((z_1-w)-x)i_{z_2,w}\delta((z_2-w)-y)\\
&\qquad - \mathrm{Res}_{z_1}\mathrm{Res}_{z_2}c(w)[a(z_1),b(z_2)]i_{w,z_1}(x-y)^N\delta((z_1-w)-x)i_{w,z_2}\delta((z_2-w)-y)\\
&= \mathrm{Res}_{z_1}\mathrm{Res}_{z_2}[a(z_1),b(z_2)]c(w)i_{z_1,w}(z_1-z_2)^N\delta((z_1-w)-x)i_{z_2,w}\delta((z_2-w)-y)\\
&\qquad - \mathrm{Res}_{z_1}\mathrm{Res}_{z_2}c(w)[a(z_1),b(z_2)]i_{w,z_1}(z_1-z_2)^N\delta((z_1-w)-x)i_{w,z_2}\delta((z_2-w)-y)\\
&= \mathrm{Res}_{z_2}\mathrm{Res}_{z_1}(z_1-z_2)^N[a(z_1),b(z_2)]c(w)i_{z_1,w}\delta((z_1-w)-x)i_{z_2,w}\delta((z_2-w)-y)\\
&\qquad - \mathrm{Res}_{z_2}c(w)\mathrm{Res}_{z_1}(z_1-z_2)^N[a(z_1),b(z_2)]i_{w,z_1}\delta((z_1-w)-x)i_{w,z_2}\delta((z_2-w)-y)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Así, todos los pares $(Y(a(z),x),Y(b(z),x))$ con $a(z),b(z)\in F$ son locales. En particular, por la Proposición 2.3.20 obtenemos que $Y$ satisface el axioma del producto $n$-ésimo para todo $n\in\mathbb{Z}$, con lo cual llegamos a que $(F,I_V,Y)$ es un álgebra de campos fuerte.

Ahora veremos un teorema que establece condiciones necesarias y suficientes para que una correspondencia estado campo $Y$ en $(V, |0\rangle)$ le otorgue a $V$ una estructura de álgebra de campos (o de álgebra de campos fuerte).

**Teorema 2.4.3.** *Sea $Y$ una correspondencia estado-campo en $(V, |0\rangle)$. Entonces:*

*(a) $(V, |0\rangle, Y)$ es un álgebra de campos fuerte si y sólo si para todos $a, b \in V$ vale que*

$$[Y(a,z), Y^{\mathrm{op}}(b,w)] = \sum_{\substack{j\geq 0 \\ \text{finita}}} Y^{\mathrm{op}}(a_{(j)}b, w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w). \tag{2.4.3}$$

*(b) $(V, |0\rangle, Y)$ es un álgebra de campos si y sólo si todos los pares de campos $(Y(a,z), Y^{\mathrm{op}}(b,z))$ con $a, b \in V$ son locales en $v \in V$ para todo $v \in V$.*

*Demostración:* Supongamos que $Y$ satisface el axioma del producto $n$-ésimo para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces vale (2.4.2), y si reemplazamos $z$ por $-w$, multiplicamos por $z^{-n-1}$ y sumamos sobre $n \in \mathbb{Z}$, llegamos a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} Y(a_{(n)}b, -w)z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Y(a,-w)_{(n)}Y(b,-w)z^{-n-1}. \tag{2.4.4}$$

Es claro que esta expresión es equivalente a (2.4.2), y a su vez resulta ser equivalente a la siguiente:

$$Y(Y(a,z)b,-w)c = i_{z,w}Y(a,z-w)Y(b,w)c - Y(b,-w)\sum_{j\geq 0}(a_{(j)}c)\partial_w^{(j)}\delta(z-w). \tag{2.4.5}$$

Aplicando $e^{wT}$ a ambos lados, obtenemos en el lado izquierdo $Y^{\mathrm{op}}(c,w)Y(a,z)b$. Por otro lado, en el lado derecho tenemos

$$\begin{aligned} &e^{wT}(i_{z,w}Y(a,z-w)Y(b,w)c - Y(b,-w)\sum_{j\geq 0}(a_{(j)}c)\partial_w^{(j)}\delta(z-w)) = \\ &= Y(a,z)e^{wT}Y(b,-w)c - \sum_{j\geq 0} e^{wT}Y(b,-w)(a_{(j)}c)\partial_w^{(j)}\delta(z-w) \\ &= Y(a,z)Y^{\mathrm{op}}(c,w)b - \sum_{j\geq 0} Y^{\mathrm{op}}(a_{(j)}c,w)\partial_w^{(j)}\delta(z-w). \end{aligned}$$

Por lo tanto, (2.4.3) resulta ser equivalente a (2.4.5), por lo que también es equivalente al axioma del producto $n$-ésimo.

Esto demuestra la parte (a). La parte (b) se demuestra de manera similar, aplicando $e^{wT}$ a ambos lados de (2.4.1). □

Este teorema tiene el siguiente corolario inmediato:

**Corolario 2.4.4.** *Si* $(V, |0\rangle, Y)$ *es un álgebra de campos fuerte, entonces es un álgebra de campos.*

El siguiente resultado ofrece una caracterización de las álgebras de campos y de las álgebras de campos fuertes que será muy útil en la próxima sección.

**Teorema 2.4.5.** *Sea* $Y$ *una correspondencia estado-campo en* $(V, |0\rangle)$*. Entonces:*

*(a)* $(V, |0\rangle, Y)$ *es un álgebra de campos si y sólo si existe una correspondencia estado-campo* $X$ *en* $(V, |0\rangle)$ *tal que todos los pares* $(Y(a, z), X(b, z))$ *con* $a, b \in V$ *son locales en* $v$ *para todo* $v \in V$*.*

   *En este caso, vale que* $X = Y^{\mathrm{op}}$*.*

*(b)* $(V, |0\rangle, Y)$ *es un álgebra de campos fuerte si y sólo si* $(V, |0\rangle, Y)$ *es un álgebra de campos y todos los pares* $(Y(a, z), Y(b, z))$ *con* $a, b \in V$ *son débilmente locales.*

*Demostración:*

(a) Si $(V, |0\rangle)$ es un álgebra de campos, entonces $X = Y^{\mathrm{op}}$ cumple lo requerido debido a la parte (b) del Teorema 2.4.3.

   Recíprocamente, si $X$ es una correspondencia estado-campo que es local con $Y$ en todo vector $v \in V$, entonces en particular vale que $(Y(a, z), X(b, z))$ es local en $|0\rangle$ para todos $a, b \in V$. Luego por la Proposición 2.3.17 resulta que $X = Y^{\mathrm{op}}$, así que podemos aplicar nuevamente la segunda parte del Teorema 2.4.3 para concluir que $(V, |0\rangle, Y)$ es un álgebra de campos.

(b) Si $(V, |0\rangle)$ es un álgebra de campos fuerte, ya vimos que en particular es un álgebra de campos, y la localidad débil de los pares $(Y(a, z), Y(b, z))$ se sigue de (2.4.2), pues $a_{(n)}b = 0$ para $n \gg 0$.

   La recíproca resulta de la parte (a) y de la Proposición 2.3.20. $\square$

## 2.5. Álgebras de campos fuertes y álgebras conformes

Sea $(V, |0\rangle)$ un espacio vectorial punteado. Dada una correspondencia estado-campo $Y$ en $(V, |0\rangle)$, entonces tenemos definidos los productos $n$-ésimos en $V$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, a través de (2.3.10). En particular, usando sólo los productos $n$-ésimos no negativos podemos definir un $\lambda$-producto en $V$, mediante la fórmula

$$a_\lambda b = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} a_{(n)} b \qquad \forall a, b \in V. \tag{2.5.1}$$

Este $\lambda$-producto le confiere a $V$ una estructura de álgebra conforme, ya que los axiomas (2.2.13) y (2.2.14) se satisfacen debido a la Proposición 2.3.12 (y además $a_\lambda b$ es un polinomio en $\lambda$ gracias a esta misma proposición).

Por otro lado, observemos que V munido del producto $(-1)$-ésimo es un álgebra unitaria, con unidad $|0\rangle$ (gracias a la parte 2 de la Proposición 2.3.12). Además, por esta misma proposición vale que $[T, a_{(-1)}]b = (Ta)_{(-1)}b$ para todos $a, b \in V$, es decir que el operador $T$ es una derivación del producto $(-1)$-ésimo. Un álgebra junto con una derivación $T$ destacada es llamada *álgebra diferencial.*

Por analogía con (2.3.2), llamaremos *producto normalmente ordenado* al producto $(-1)$-ésimo en $V$, y lo denotaremos por

$$:ab: = a_{(-1)}b. \tag{2.5.2}$$

La siguiente proposición muestra que tener una correspondencia estado-campo $Y$ en $(V, |0\rangle)$ es equivalente a tener una estructura de álgebra conforme sobre $V$ junto con un producto normalmente ordenado que cumpla las propiedades recién observadas.

**Proposición 2.5.1.** *Dar una correspondencia estado-campo sobre un espacio vectorial punteado $(V, |0\rangle)$ es equivalente a darle a $V$ una estructura de álgebra conforme y una estructura de álgebra diferencial unitaria, con unidad $|0\rangle$ y derivación $T$.*

*Demostración:* Por las observaciones hechas arriba, a partir de una correspondencia estado-campo $Y$ podemos definir un $\lambda$-producto y un producto normalmente ordenado que cumplen lo requerido.

Recíprocamente, dados un $\lambda$-producto y un producto normalmente ordenado en $V$, podemos construir una correspondencia estado-campo $Y$ en $(V, |0\rangle)$ de la siguiente manera:

$$Y(a,z)b =: \left(e^{zT}a\right)b: + \left(a_{-\partial_z}b\right)(z^{-1}), \quad \forall a, b \in V.$$

Para ver que efectivamente es una correspondencia estado-campo, primero observemos que $(-\partial_z)^{(n)}(z^{-1}) = z^{-n-1}$ para todo $n \geq 0$ (lo cual puede comprobarse fácilmente por inducción). Por lo tanto, vale que

$$\left(a_{-\partial_z}b\right)(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{(n)}b\,(-\partial_z)^{(n)}(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{(n)}b\, z^{-n-1}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$:\left(e^{zT}a\right)b: = \sum_{n=0}^{\infty} :(T^{(n)}a)b:z^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} :(T^{(-n-1)}a)b:z^{-n-1}.$$

Es decir, los productos $n$-ésimos en $V$ definidos a partir de la aplicación $Y$ a través de la fórmula (2.3.10) coinciden con los productos $n$-ésimos definidos por el $\lambda$-producto en $V$ para todo $n \geq 0$, mientras que para $n < 0$ vienen dados por $a_{(n)}b = :(T^{(-n-1)}a)b:$. En particular, vale que $a_{(-1)}b = :ab:$.

Ahora podemos probar que $Y$ es una correspondencia estado-campo mostrando que estos productos $n$-ésimos verifican las propiedades listadas en la Proposición 2.3.12:

La primer condición se satisface debido a que $a_\lambda b \in \mathbb{C}[\lambda] \otimes V$ para todos $a, b \in V$. La segunda vale porque $|0\rangle$ es la unidad de $V$ con respecto al producto normalmente ordenado.

Por último, la tercer propiedad se satisface automáticamente para $n \geq 0$ debido a (2.2.13) y (2.2.14), y para $n < 0$ vale debido a que

$$\tilde{Y}(a,z)b = :\left(e^{zT}a\right)b:$$

es otra correspondencia estado-campo en $(V, |0\rangle)$ (ver ejemplo 2.3.11). $\square$

Las condiciones para que una correspondencia estado-campo $Y$ en $(V, |0\rangle)$ lo convierta en un álgebra de campos fuerte pueden ser caracterizadas en términos de ciertas propiedades que deben cumplir el $\lambda$-producto y del producto normalmente ordenado en $V$, como veremos en el siguiente teorema.

**Teorema 2.5.2.** *Sea $Y$ una correspondencia estado-campo en $(V, |0\rangle)$. Consideremos el $\lambda$-producto y el producto normalmente ordenado en $V$ dados por (2.5.1) y (2.5.2).*

*Entonces $(V, |0\rangle, Y)$ es un álgebra de campos fuerte si y sólo si $V$ es un álgebra de Leibniz conforme con respecto al $\lambda$-producto, $V$ es un álgebra diferencial unitaria con respecto al producto normalmente ordenado con unidad $|0\rangle$ y derivación $T$, y además se satisfacen las siguientes condiciones de compatibilidad:*

*(1) Fórmula de Wick a izquierda.*

$$[a\,{}_\lambda :bc:] = :[a_\lambda b]\,c: + :b\,[a_\lambda c]: + \int_0^\lambda [[a_\lambda b]_\mu c]d\mu. \tag{2.5.3}$$

*(2) Fórmula de Wick a derecha.*

$$[:ab:_\lambda c] = :\left(e^{T\partial_\lambda}a\right)[b_\lambda c]: + :\left(e^{T\partial_\lambda}b\right)[a_\lambda c]: + \int_0^\lambda [b_\mu[a_{\lambda-\mu}c]]d\mu. \tag{2.5.4}$$

*(3) Cuasi-asociatividad.*

$$:(:ab:)c: - :a(:bc:): = :\left(\int_0^T d\lambda a\right)[b_\lambda c]: + :\left(\int_0^T d\lambda b\right)[a_\lambda c]: \tag{2.5.5}$$

*Observación* 2.5.3. La notación utilizada en el teorema anterior requiere ser explicada con mayor detalle. Las integrales que aparecen en las fórmulas de Wick son formales, y de esta manera la integral en (1) debe entenderse como

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\lambda}\mu^{(n)}d\mu\right)\lambda^{(m)}(a_{(m)}b)_{(n)}c=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{(n+1)}\lambda^{(m)}(a_{(m)}b)_{(n)}c.$$

Por otro lado, las integrales de la fórmula de cuasi-asociatividad no deben tomarse en forma literal, puesto que aunque la variable $\lambda$ no se encuentre dentro de la integral, sí está siendo afectada por ella (el paréntesis hace referencia a cómo debe entenderse el producto normalmente ordenado). De esta forma, la primer integral de la fórmula significa lo siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty}:\left(T^{(n+1)}a\right)\left(b_{(n)}c\right):.$$

*Demostración del Teorema:* Supongamos que $(V,|0\rangle,Y)$ es un álgebra de campos fuerte, es decir que se cumple el axioma de los productos $n$-ésimos para todo $n\in\mathbb{Z}$.

Observemos que dicho axioma para $n\geq 0$ es equivalente a

$$Y([a_\lambda b],w)c=e^{-\lambda w}[a_\lambda,Y(b,w)]c. \tag{2.5.6}$$

Esto es así porque si vale el axioma, tenemos que

$$\begin{aligned}
Y([a_\lambda b],w)c&=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{(n)}Y(a_{(n)}b,w)c\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{(n)}\left(Y(a,w)_{(n)}Y(b,w)\right)c.\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{(n)}\mathrm{Res}_z(z-w)^n[Y(a,z),Y(b,w)]c\\
&=\mathrm{Res}_z e^{\lambda(z-w)}[Y(a,z),Y(b,w)]c\\
&=e^{-\lambda w}[\mathrm{Res}_z e^{\lambda z}Y(a,z),Y(b,w)]c\\
&=e^{-\lambda w}\left[\mathrm{Res}_z\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{(m)}z^m\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_{(n)}z^{-n-1},Y(b,w)\right]c\\
&=e^{-\lambda w}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{(m)}a_{(m)},Y(b,w)\right]c\\
&=e^{-\lambda w}[a_\lambda,Y(b,w)]c.
\end{aligned}$$

Además, comparando los coeficientes de $\lambda^{(m)}$ a ambos lados de (2.5.6) recuperamos el axioma de los productos $n$-ésimos del cual partimos.

Aplicando ahora $\mathrm{Res}_w e^{(\lambda+\mu)w}$ a ambos lados de (2.5.6) tenemos en el lado izquierdo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_w e^{(\lambda+\mu)w} Y([a_\lambda b], w)c &= \mathrm{Res}_w \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda+\mu)^{(m)} w^m \sum_{n\in\mathbb{Z}} [a_\lambda b]_{(n)} c\, w^{-n-1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda+\mu)^{(m)} [a_\lambda b]_{(m)} c \\
&= [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c].
\end{aligned}$$

Mientras tanto, en el lado derecho resulta que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_w e^{(\lambda+\mu)w} e^{-\lambda w} [a_\lambda, Y(b,w)]c &= \mathrm{Res}_w \sum_{m=0} \mu^{(m)} w^m \sum_{n\in\mathbb{Z}} [a_\lambda, b_{(n)}] c\, w^{-n-1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{(m)} [a_\lambda, b_{(n)}] c \\
&= [a_\lambda, b_\mu] c.
\end{aligned}$$

De esta manera vemos cómo el axioma para los productos $n$-ésimos para $n \geq 0$ implica la condición de Jacobi para el $\lambda$-producto, con lo cual $V$ es un álgebra de Leibniz.

Por otro lado, si aplicamos $\mathrm{Res}_w w^{-1}$ en (2.5.6), obtenemos en el lado izquierdo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_w w^{-1} Y([a_\lambda b], w)c &= \mathrm{Res}_w w^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [a_\lambda b]_{(n)} c\, w^{-n-1} \\
&= [a_\lambda b]_{(-1)} c \\
&=: [a_\lambda b] c : .
\end{aligned}$$

Para ver qué sucede en el lado derecho, primero observemos que

$$\int_0^{-\lambda} e^{\mu w} d\mu = \frac{1}{w} e^{\mu w} \Big|_0^{-\lambda} = w^{-1} e^{-\lambda w} - w^{-1}.$$

Ahora usando esto, llegamos a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_w w^{-1}e^{-\lambda w}[a_\lambda, Y(b,w)]c &= \mathrm{Res}_w \left(w^{-1} + \int_0^{-\lambda} e^{\mu w} d\mu\right)[a_\lambda, Y(b,w)]c \\
&= \mathrm{Res}_w w^{-1}[a_\lambda, Y(b,w)]c + \int_0^{-\lambda} \mathrm{Res}_w e^{\mu w}[a_\lambda, Y(b,w)]c\, d\mu \\
&= \mathrm{Res}_w w^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}[a_\lambda, b_{(n)}]c\, w^{-n-1} \\
&\qquad + \int_0^{-\lambda} \mathrm{Res}_w \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{(m)} w^m \sum_{n\in\mathbb{Z}}[a_\lambda, b_{(n)}]c\; w^{-n-1}\, d\mu \\
&= [a_\lambda, b_{(-1)}]c + \int_0^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{(m)}[a_\lambda, b_{(m)}]c\, d\mu \\
&= [a_\lambda \left(b_{(-1)}c\right)] - b_{(-1)}[a_\lambda c] + \int_0^{-\lambda} [a_\lambda, b_\mu]c\, d\mu \\
&= [a_\lambda :bc:] - :b[a_\lambda c]: + \int_0^{-\lambda} [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]\, d\mu \\
&= [a_\lambda :bc:] - :b[a_\lambda c]: - \int_0^{\lambda} [[a_\lambda b]_{\mu} c]\, d\mu.
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que se cumple la fórmula de Wick a izquierda.

Ahora observemos que el axioma del producto $n$-ésimo para $n = -1$ es equivalente a

$$
Y(:ab:, z)c =: \left(e^{zT}a\right)(Y(b,z)c) : + Y(b,z)[a_{-\partial_z} c](z^{-1}). \tag{2.5.7}
$$

Esto es así porque

$$
\begin{aligned}
Y(:ab:, z) &= Y(a_{(-1)}b, z)c \\
&= (Y(a,z)_{(-1)}Y(b,z))c \\
&= :Y(a,z)Y(b,z):c \\
&= Y(a,z)_+ Y(b,z)c - Y(b,z)Y(a,z)c \\
&=: \left(e^{zT}a\right)(Y(b,z)c) : + Y(b,z)[a_{-\partial_z} c](z^{-1}).
\end{aligned}
$$

Tomando $\mathrm{Res}_z e^{\lambda z}$ en la igualdad (2.5.7), obtenemos en el lado izquierdo que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_z e^{\lambda z} Y(:ab:, z)c &= \mathrm{Res}_z \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(m)} z^m \sum_{n\in\mathbb{Z}} :ab:_{(n)}\; c\, z^{-n-1} \\
&= \sum_{m=0} \lambda^{(m)} :ab:_{(m)}\; c \\
&= [:ab:_\lambda\, c].
\end{aligned}
$$

En el lado derecho ocurre lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_z e^{\lambda z}\big(:\big(e^{zT}a\big)\,(Y(b,z)c):+\,Y(b,z)[a_{-\partial_z}c](z^{-1}\big) = \\
&= \mathrm{Res}_z \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{(n)}z^n : \left(\sum_{m=0}^{\infty}T^{(m)}a\,z^m\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}b_{(k)}c\,z^{-k-1}\right): \\
&\qquad\qquad\qquad + \mathrm{Res}_z e^{\lambda z}Y(b,z)\sum_{n=0}^{\infty}a_{(n)}c\,z^{-n-1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{(n)} : (T^{(m)}a)(b_{(n+m)}c) : + \,\mathrm{Res}_z Y(b,z)\sum_{n=0}^{\infty}a_{(n)}c\,e^{\lambda z}z^{-n-1}
\end{aligned}
$$

Podemos reescribir cada uno de estos últimos dos sumandos observando que $e^{\lambda z}z^{-n-1} = (\lambda - \partial_z)^{(n)}(e^{\lambda z}z^{-1})$ (lo cual puede verse fácilmente por inducción), y que

$$
\begin{aligned}
:\left(e^{T\partial_\lambda}a\right)[b_\lambda c]: &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\partial_\lambda^m(\lambda^{(n)}) : (T^{(m)}a)(b_{(n)}c) : \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\lambda^{(m-n)} : (T^{(m)}a)(b_{(n)}c) : \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{(n)} : (T^{(m)}a)(b_{(n+m)}c) :
\end{aligned}
$$

De esta manera, queda probado que

$$
[:ab:_\lambda c] = :\left(e^{T\partial_\lambda}a\right)[b_\lambda c]: + \mathrm{Res}_z Y(b,z)[a_{\lambda-\partial_z}c](e^{\lambda z}z^{-1}). \tag{2.5.8}
$$

En el segundo sumando del miembro derecho de (2.5.8) podemos hacer lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_z Y(b,z)[a_{\lambda-\partial_z}c](e^{\lambda z}z^{-1}) = \\
&= \mathrm{Res}_z Y(b,z)[a_{\lambda-\partial_z}c]\left(z^{-1} + \int_0^\lambda e^{\mu z}d\mu\right) \\
&= \mathrm{Res}_z Y(b,z)[a_{\lambda-\partial_z}c](z^{-1}) + \int_0^\lambda \mathrm{Res}_z Y(b,z)[a_{\lambda-\partial_z}c](e^{\mu z})d\mu \\
&= \mathrm{Res}_z Y(b,z)[a_{\lambda-\partial_z}c](z^{-1}) + \int_0^\lambda \mathrm{Res}_z Y(b,z)[a_{\lambda-\mu}c]e^{\mu z}d\mu \\
&= \mathrm{Res}_z Y(b,z)[a_{\lambda-\partial_z}c](z^{-1}) + \int_0^\lambda [b_\mu[a_{\lambda-\mu}c]]d\mu.
\end{aligned} \tag{2.5.9}
$$

Trabajando con el primer término de la expresión (2.5.9), tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_z Y(b,z)[a_{\lambda-\partial_z}c](z^{-1}) &= \mathrm{Res}_z \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_{(k)} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_{(n)}c(\lambda-\partial_z)^{(n)}(z^{-1}) \right) z^{-k-1} \\
&= \mathrm{Res}_z \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \lambda^{(n-r)} b_{(k)}(a_{(n)}c)(-\partial_z)^{(r)}(z^{-1}) z^{-k-1} \\
&= \mathrm{Res}_z \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \lambda^{(n-r)} b_{(k)}(a_{(n)}c) z^{-r-1-k-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \lambda^{(n-r)} b_{(-r-1)}(a_{(n)}c).
\end{aligned}
$$

Pero por otro lado también vale que

$$
\begin{aligned}
:\left(e^{T\partial_\lambda} b\right)[a_\lambda c]: &= \sum_{r=0}^{\infty} \partial_\lambda^r : (T^{(r)}b)[a_\lambda c]: \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \partial_\lambda^r \mathrm{Res}_z Y(T^{(r)}b,z)[a_\lambda c] z^{-1} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \partial_\lambda^r \mathrm{Res}_z \partial_z^{(r)} Y(b,z)[a_\lambda c] z^{-1} \\
&= \mathrm{Res}_z \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \partial_\lambda^r(\lambda^{(n)}) \partial_z^{(r)}(z^{-k-1}) b_{(k)}(a_{(n)}c) z^{-1} \\
&= \mathrm{Res}_z \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda^{(n-r)} b_{(k)}(a_{(n)}c) \frac{(-k-1)\cdots(-k-r)}{r!} z^{-r-k-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \lambda^{(n-r)} b_{(-r-1)}(a_{(n)}c).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, resulta que

$$
\mathrm{Res}_z Y(b,z)[a_{\lambda-\partial_z}c](z^{-1}) = :\left(e^{T\partial_\lambda} b\right)[a_\lambda c]: . \qquad (2.5.10)
$$

Uniendo la información que nos dan (2.5.8), (2.5.9) y (2.5.10), obtenemos la fórmula de Wick a derecha.

Si aplicamos $\mathrm{Res}_z z^{-1}$ en el axioma del producto $n$-ésimo para $n=-1$, obtenemos por un lado

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_z z^{-1} Y(a_{(-1)}b,z)c &= \mathrm{Res}_z \sum_{n\in\mathbb{Z}} (a_{(-1)}b)_{(n)} c\, z^{-n-2} \\
&= (a_{(-1)}b)_{(-1)}c \\
&= :(:ab:)c:,
\end{aligned}
$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_z z^{-1}(Y(a,z)_{(-1)}Y(b,z))c &= \mathrm{Res}_z z^{-1} :Y(a,z)Y(b,z): c\\ &= \mathrm{Res}_z z^{-1}(Y(a,z)_+Y(b,z)c - Y(b,z)Y(a,z)_-c)\\ &= \mathrm{Res}_z z^{-1}(Y(a,z)_+Y(b,z)_+c + Y(a,z)_+Y(b,z)_-c -\\ &\qquad - Y(b,z)_+Y(a,z)_-c - Y(b,z)_-Y(a,z)_-c).\end{aligned}$$

Es fácil ver que $\mathrm{Res}_z z^{-1}Y(a,z)_+Y(b,z)_+c =: a(:bc:):$, y también que $\mathrm{Res}_z z^{-1}Y(b,z)_-Y(b,z)_-c = 0$, con lo cual llegamos a

$$:(:ab:)c: =: a(:bc:): + \mathrm{Res}_z z^{-1}Y(a,z)_+Y(b,z)_-c + \mathrm{Res}_z z^{-1}Y(b,z)_+Y(a,z)_-c. \tag{2.5.11}$$

Pero además vale que

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_z z^{-1}Y(a,z)_+Y(b,z)_-c &= \mathrm{Res}_z z^{-1} :(e^{zT}a)(Y(b,z)_-c):\\ &= \mathrm{Res}_z z^{-1} :((e^{zT}-1)a)(Y(b,z)_-c):\\ &= \mathrm{Res}_z :\left(\left(\int_0^T e^{\lambda z} d\lambda\right) a\right)(Y(b,z)_-c):\\ &= \mathrm{Res}_z :\left(\left(\int_0^T \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{(m)} z^m d\lambda\right) a\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_{(k)}c\, z^{-k-1}\right):\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} :\left(\left(\int_0^T \lambda^{(k)} d\lambda\right) a\right)(b_{(k)}c):\\ &=: \left(\int_0^T d\lambda a\right)[b_\lambda c]: .\end{aligned}$$

Reemplazando esto en (2.5.11) obtenemos la fórmula de cuasi-asociatividad.

Ahora para probar la recíproca, supongamos que $(V, |0\rangle)$ posee una estructura de álgebra de Leibniz conforme con respecto al $\lambda$-producto y de álgebra diferencial unitaria con respecto al producto normalmente ordenado, tales que se cumplen (2.5.3), (2.5.4) y (2.5.5).

En la demostración dada recién de que vale la condición de Jacobi, vimos que la misma es equivalente a

$$\mathrm{Res}_z e^{(\lambda+\mu)z} Y([a_\lambda b], z) = \mathrm{Res}_z e^{(\lambda+\mu)z} e^{-\lambda z}[a_\lambda, Y(b,z)].$$

Reemplazando $\lambda+\mu$ por $\mu$, haciendo las expansiones correspondientes y comparando los coeficientes de $\mu^{(m)}\lambda^{(n)}$ a ambos lados, llegamos a que esto es equivalente a

$$\mathrm{Res}_z(Y(a_{(n)}b, z) - Y(a,z)_{(n)}Y(b,z))z^m = 0 \qquad \forall m \in \mathbb{Z}_+, \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.5.12}$$

De manera análoga, es posible usar los cálculos hechos arriba para probar que (2.5.3), (2.5.4) y (2.5.5) son equivalentes respectivamente a

$$\begin{cases} \mathrm{Res}_z \big(Y(a_{(n)}b,z) - Y(a,z)_{(n)}Y(b,z)\big)\, z^{-1} = 0, & \forall\, n \in \mathbb{Z}_+ \\ \mathrm{Res}_z \big(Y(a_{(-1)}b,z) - Y(a,z)_{(-1)}Y(b,z)\big)\, z^{m} = 0, & \forall\, m \in \mathbb{Z}_+ \\ \mathrm{Res}_z \big(Y(a_{(-1)}b,z) - Y(a,z)_{(-1)}Y(b,z)\big)\, z^{-1} = 0, & \end{cases}$$

Por lo tanto, la ecuación (2.5.12) es válida para todo $m \geq -1$ y para todo $n \geq -1$.

Si ahora fijamos un $n \geq -1$ y tomamos un $c(z) \in V[[z,z^{-1}]]$ tal que $\mathrm{Res}_z \big(Y(a_{(n)}b,z) - Y(a,z)_{(n)}Y(b,z)\big)\, c(z) = 0$ para todos $a, b \in V$, entonces vale que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_z \big(Y(a_{(n)}b,z) - Y(a,z)_{(n)}Y(b,z)\big)\, \partial_z c(z) = \\
&= -\mathrm{Res}_z\, \partial_z \big(Y(a_{(n)}b,z) - Y(a,z)_{(n)}Y(b,z)\big)\, c(z) \\
&= -\mathrm{Res}_z \big(Y(T(a_{(n)}b),z) - (\partial_z Y(a,z))_{(n)}Y(b,z) - Y(a,z)_{(n)}(\partial_z Y(b,z))\big)\, c(z) \\
&= -\mathrm{Res}_z \big(Y((Ta)_{(n)}b,z) + Y(a_{(n)}(Tb)) - Y(Ta,z)_{(n)}Y(b,z) - Y(a,z)_{(n)}Y(Tb,z)\big)\, c(z) \\
&= -\mathrm{Res}_z \big(Y((Ta)_{(n)}b,z) - Y(Ta,z)_{(n)}Y(b,z)\big)\, c(z) \\
&\qquad - \mathrm{Res}_z \big(Y(a_{(n)}(Tb)) - Y(a,z)_{(n)}Y(Tb,z)\big)\, c(z) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto puede usarse para probar inductivamente que la ecuación (2.5.12) vale también para todo $m \leq -1$, y por lo tanto vale para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, obtenemos que el axioma de los productos $n$-ésimos

$$Y(a_{(n)}b,z) = Y(a,z)_{(n)}Y(b,z) \tag{2.5.13}$$

vale para todo $n \geq -1$. Sin embargo, a partir de allí puede probarse también que vale para los $n \leq -1$ por inducción: si vale (2.5.13) para algún $n \leq -1$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= Y((Ta)_{(n)}b,z) - Y(Ta,z)_{(n)}Y(b,z) \\
&= Y(-na_{(n-1)}b,z) - (\partial_z Y(a,z))_{(n)}Y(b,z) \\
&= -nY(a_{(n-1)}b,z) - :(\partial_z^{(-n-1)}(\partial_z Y(a,z)))Y(b,z): \\
&= -nY(a_{(n-1)}b,z) + n :(\partial_z^{(-n)}Y(a,z))Y(b,z): \\
&= -nY(a_{(n-1)}b,z) + nY(a,z)_{(n-1)}Y(b,z).
\end{aligned}$$

De esta manera resulta que $(V, |0\rangle, Y)$ es un álgebra de campos fuerte. $\square$

## 2.6. Álgebras de vértices

En esta sección introduciremos el principal objeto de estudio de este trabajo.

**Definición 2.6.1.** Un *álgebra de vértices* es un espacio vectorial punteado $(V, |0\rangle)$ junto con una correspondencia estado-campo $Y$ tal que todos los pares $(Y(a,z), Y(b,z))$ con $a, b \in V$ son locales.

*Observación* 2.6.2. Debido al Teorema 2.4.5, toda álgebra de vértices es un álgebra de campos fuerte, con $Y = Y^{\mathrm{op}}$.

En el siguiente resultado veremos que esto es de hecho una caracterización de las álgebras de vértices.

**Proposición 2.6.3.** *Un álgebra de vértices es lo mismo que un álgebra de campos $(V, |0\rangle, Y)$ tal que $Y = Y^{\mathrm{op}}$.*

*Demostración:* Sea $(V, |0\rangle, Y)$ un álgebra de campos con $Y = Y^{\mathrm{op}}$. Por el Teorema 2.4.3, el axioma de asociatividad (2.4.1) es equivalente a que para todos $a, b, c \in V$ exista un $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$(z-w)^N [Y(a,z), Y^{\mathrm{op}}(c,w)]b = 0.$$

Dado que es posible probar que esta relación también vale reemplazando $b$ por $Tb$ (ver [B, Lemma 2.8]), resulta que (2.4.1) también se satisface reemplazando $b$ por $e^{uT}b$, es decir que

$$(z-w)^N Y(Y(a,z)e^{uT}b, -w)c = (z-w)^N i_{z,w} Y(a, z-w) Y(e^{uT}b, -w)c.$$

Usando la Proposición 2.3.14, esto se convierte en

$$(z-w)^N i_{z,u} i_{w,u} Y(Y(a, z-u)b, u-w)c = (z-w)^N i_{z,w} i_{w,u} Y(a, z-w) Y(b, u-w)c. \tag{2.6.1}$$

Por otro lado, sabemos que existe $P \in \mathbb{Z}_+$ tal que $b_{(k)}c = 0$ para $k \geq P$. Por lo tanto el lado derecho de (2.6.1) multiplicado por $(u-w)^P$ contiene sólo potencias no negativas de $u - w$, y en particular contiene sólo potencias no negativas de w. Esto permite evaluar tal expresión en $w = 0$, con lo cual obtenemos que

$$Y(a,z)Y(b,u)c = z^{-N} u^{-P} (z-w)^N (u-w)^P i_{z,u} i_{w,u} Y(Y(a, z-u)b, u-w)c\big|_{w=0}. \tag{2.6.2}$$

Utilizando nuevamente la Proposición 2.3.14 junto con el hecho de que $Y = Y^{\mathrm{op}}$, resulta que

$$\begin{aligned} i_{z,u} Y(a, z-u)b &= Y(e^{-uT}a, z)b \\ &= e^{zT} Y(b, -z) e^{-uT} a \\ &= i_{z,u} e^{(z-u)T} Y(b, u-z)a. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$i_{z,u}i_{w,u}Y(Y(a,z-u)b,u-w) = i_{z,u}i_{w,z}Y(Y(b,u-z)a,z-w). \qquad (2.6.3)$$

Tomemos $N = P \geq 0$ en (2.6.2). Comparando (2.6.2) y (2.6.3), vemos que $Y(b,u)Y(a,z)c$ está dado por el lado derecho de (2.6.2) con $i_{z,u}$ reemplazado por $i_{u,z}$. Por lo tanto, si $K \in \mathbb{Z}_+$ cumple que $a_{(k)}b = 0$ para $k \geq K$, tenemos que

$$(z-u)^K Y(a,z)Y(b,u)c = (z-u)^K Y(b,u)Y(a,z)c,$$

lo cual es la localidad de $Y(a,z)$ e $Y(b,z)$. Esto prueba que $(V, |0\rangle, Y)$ es un álgebra de vértices. $\square$

*Observación* 2.6.4. Dada una correspondencia estado-campo $Y$, vimos en la Proposición 2.5.1 que podemos asociarle un $\lambda$-producto y un producto normalmente ordenado (y viceversa). Si hacemos esto con la correspondencia opuesta $Y^{\mathrm{op}}$, obtenemos los productos

$$[a_\lambda^{\mathrm{op}} b] = \mathrm{Res}_z e^{\lambda z} Y^{\mathrm{op}}(a,z)b, \qquad :ab:^{\mathrm{op}} = \mathrm{Res}_z z^{-1} Y^{\mathrm{op}}(a,z)b.$$

Sin embargo, estos productos pueden expresarse en términos del $\lambda$-producto y $(-1)$-producto con respecto a $Y$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
[a_\lambda^{\mathrm{op}} b] &= \mathrm{Res}_z e^{\lambda z} e^{zT} Y(b,-z)a \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{-m-1} (\lambda + T)^{(m)} b_{(m)} a \\
&= -\mathrm{Res}_z e^{-(\lambda+T)z} Y(b,z)a \\
&= -[b_{-\lambda-T} a].
\end{aligned}$$

Por otro lado, recordando que $z^{-1}e^{zT} = z^{-1} - \int_0^{-T} e^{-\lambda z} d\lambda$, resulta que

$$\begin{aligned}
:ab:^{\mathrm{op}} &= \mathrm{Res}_z z^{-1} e^{zT} Y(b,-z)a \\
&= \mathrm{Res}_z z^{-1} Y(b,-z)a - \int_0^{-T} \mathrm{Res}_z e^{-\lambda z} Y(b,-z)a \, d\lambda \\
&= :ba: + \int_0^{-T} \mathrm{Res}_z e^{\lambda z} Y(b,z)a \, d\lambda \\
&= :ba: + \int_0^{-T} [b_\lambda a] \, d\lambda.
\end{aligned}$$

Ahora veremos uno de los resultados más importantes con respecto a las álgebras de vértices, análogo al Teorema 2.4.5 para álgebras de campos fuertes.

**Teorema 2.6.5.** *Sea $Y$ una correspondencia estado-campo en $(V, |0\rangle)$. Consideremos el $\lambda$-producto y el producto normalmente ordenado en $V$ dados por (2.5.1) y (2.5.2).*

*Entonces $(V, |0\rangle, Y)$ es un álgebra de vértices si y sólo si $V$ es un álgebra de Lie conforme con respecto al $\lambda$-producto, $V$ es un álgebra diferencial unitaria con respecto al producto normalmente ordenado con unidad $|0\rangle$ y derivación $T$, y además se satisfacen las siguientes condiciones de compatibilidad:*

*(1) Fórmula de Wick a izquierda.*

$$[a\,_\lambda : bc :] =: [a_\lambda b]\, c : + : b\, [a_\lambda c] : + \int_0^\lambda [[a_\lambda b]_\mu c] d\mu. \tag{2.6.4}$$

*(2) Antisimetría del producto normalmente ordenado.*

$$: ab : - : ba := \int_{-T}^0 [a_\lambda b] d\lambda. \tag{2.6.5}$$

*(3) Cuasi-asociatividad.*

$$: (: ab :)c : - : a(: bc :) : =: \left(\int_0^T d\lambda a\right) [b_\lambda c] : + : \left(\int_0^T d\lambda b\right) [a_\lambda c] : \tag{2.6.6}$$

*Demostración:* Si $(V, |0\rangle, Y)$ es un álgebra de vértices, entonces por ser un álgebra de campos fuerte satisface automáticamente todos los requerimientos del enunciado, salvo quizás las antisimetrías del $\lambda$-producto (2.2.12) y del producto normalmente ordenado (2.6.5).

Pero gracias a que $Y = Y^{\mathrm{op}}$, tenemos que $[a_\lambda b] = [a_\lambda^{\mathrm{op}} b] = -[b_{-\lambda-T} a]$, es decir que $\lambda$-producto le otorga a $V$ una estructura de álgebra de Lie conforme. Más aún, vale que

$$\begin{aligned}
: ab : &=: ab :^{\mathrm{op}} \\
&=: ba : + \int_0^{-T} [b_\lambda a] d\lambda \\
&=: ba : - \int_0^{-T} [a_{-\lambda-T} b] d\lambda \\
&=: ba : + \int_{-T}^0 [a_\lambda b] d\lambda.
\end{aligned}$$

Por lo tanto vale (2), que era lo único que faltaba probar.

Para ver la recíproca, observemos que si el $\lambda$-producto y producto normalmente ordenado en $V$ cumplen todas las condiciones del enunciado, entonces por sus repectivas antisimetrías resulta que

$$[a_\lambda b] = [a_\lambda^{\mathrm{op}} b] \qquad \text{y} \qquad : ab :=: ab :^{\mathrm{op}} .$$

Entonces por el Teorema 2.5.1 resulta que $Y = Y^{\mathrm{op}}$. Por lo tanto, la Proposición 2.6.3 nos asegura que basta con probar que $(V, |0\rangle, Y)$ es un álgebra de campos fuerte. Finalmente, gracias al Teorema 2.4.5, lo único que falta por demostrar es que vale la fórmula de Wick a derecha (2.5.4).

Observemos primero que gracias a (2.6.5) podemos escribir la fórmula de Wick a izquierda como

$$\begin{aligned}
[a\,{}_\lambda : bc :] &= : [a_\lambda b]\, c : + : b\, [a_\lambda c] : + \int_0^\lambda [[a_\lambda b]_\mu c] d\mu \\
&= : c\, [a_\lambda b] : + \int_{-T}^0 [[a_\lambda b]_\mu c] d\mu + : b\, [a_\lambda c] : + \int_0^\lambda [[a_\lambda b]_\mu c] d\mu \\
&= : c\, [a_\lambda b] : + : b\, [a_\lambda c] : + \int_{-T}^\lambda [[a_\lambda b]_\mu c] d\mu. \qquad (2.6.7)
\end{aligned}$$

Reemplazando $\lambda$ por $-\lambda$ y aplicando $e^{T\partial_\lambda}$ a ambos lados de (2.6.7), tenemos que el lado izquierdo es

$$\begin{aligned}
e^{T\partial_\lambda}([a_{-\lambda} : bc :]) &= \sum_{m=0}^{\infty} T^{(m)} \partial_\lambda^m \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^{(n)} a_{(n)} : bc : \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (-\lambda)^{(n-m)} (-1)^m T^{(m)} (a_{(n)} : bc :) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda - T)^{(n)} (a_{(n)} : bc :) \\
&= [a_{-\lambda - T} : bc :].
\end{aligned}$$

Por otro lado, el lado derecho está formado por tres términos:

$$e^{T\partial_\lambda}(: c[a_{-\lambda} b] :) + e^{T\partial_\lambda}(: b[a_{-\lambda} c] :) + e^{T\partial_\lambda} \left( \int_{-T}^{-\lambda} [[a_{-\lambda} b]_\mu c] d\mu \right).$$

El primero de ellos puede calcularse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
e^{T\partial_\lambda}(: c[a_{-\lambda} b] :) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \partial_\lambda^{(m)} (-\lambda)^{(n)} T^m (: c(a_{(n)} b) :) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \partial_\lambda^{(m)} (-\lambda)^{(n)} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} : (T^j c)(T^{m-j}(a_{(n)} b)) : \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=j}^{\infty} \partial_\lambda^m (-\lambda)^{(n)} : (T^{(j)} c)(T^{(m-j)}(a_{(n)} b)) : \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \partial_\lambda^{j+m} (-\lambda)^{(n)} : (T^{(j)} c)(T^{(m)}(a_{(n)} b)) :
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \partial_\lambda^j(-\lambda)^{(n-m)}(-1)^m :(T^{(j)}c)(T^{(m)}(a_{(n)}b)):$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} : \left(\sum_{j=0}^{\infty} T^{(j)}\partial_\lambda^j c\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda - T)^{(n)}(a_{(n)}b)\right):$$

$$= :(e^{T\partial_\lambda}c)[a_{-\lambda-T}b]:.$$

Intercambiando $b$ con $c$ en esta expresión conseguimos el segundo término. Finalmente, el tercer término es

$$e^{T\partial_\lambda}\left(\int_{-T}^{-\lambda}[[a_{-\lambda}b]_\mu c]d\mu\right) =$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} T^{(m)}\partial_\lambda^m\right)\left(\int_{-T}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\mu^{(n)}[a_{-\lambda}b]_{(n)}c\,d\mu\right)$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} T^{(m)}\partial_\lambda^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}((-\lambda)^{(n+1)} - (-T)^{(n+1)})[a_{-\lambda}b]_{(n)}c\,d\mu\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T^{(m)}\partial_\lambda^m((-\lambda)^{(n+1)}[a_{-\lambda}b]_{(n)}c) - \sum_{n=0}^{\infty}(-T)^{(n+1)}\sum_{m=0}^{\infty}T^{(m)}\partial_\lambda^m([a_{-\lambda}b]_{(n)}c)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T^{(m)}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(\partial_\lambda^j(-\lambda)^{(n+1)})(\partial_\lambda^{m-j}[a_{-\lambda}b]_{(n)}c) - \sum_{n=0}^{\infty}(-T)^{(n+1)}e^{T\partial_\lambda}([a_{-\lambda}b]_{(n)}c)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=j}^{\infty} \partial_\lambda^{(j)}(-\lambda)^{(n+1)}T^m\partial_\lambda^{(m-j)}([a_{-\lambda}b]_{(n)}c) - \sum_{n=0}^{\infty}(-T)^{(n+1)}e^{T\partial_\lambda}([a_{-\lambda}b]_{(n)}c)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty} (-\lambda)^{(n+1-j)}(-1)^{(j)}T^{m+j}\partial_\lambda^{(m)}([a_{-\lambda}b]_{(n)}c) - \sum_{n=0}^{\infty}(-T)^{(n+1)}e^{T\partial_\lambda}([a_{-\lambda}b]_{(n)}c)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda - T)^{(n+1)}\sum_{m=0}^{\infty}T^m\partial_\lambda^{(m)}([a_{-\lambda}b]_{(n)}c) - \sum_{n=0}^{\infty}(-T)^{(n+1)}e^{T\partial_\lambda}([a_{-\lambda}b]_{(n)}c)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda - T)^{(n+1)}e^{T\partial_\lambda}([a_{-\lambda}b]_{(n)}c) - \sum_{n=0}^{\infty}(-T)^{(n+1)}e^{T\partial_\lambda}([a_{-\lambda}b]_{(n)}c)$$

$$= \int_{-T}^{-\lambda-T} e^{T\partial_\lambda}[[a_{-\lambda}b]_\mu c]\,d\mu.$$

De esta manera llegamos a que

$$[a_{-\lambda-T}:bc:] = :(e^{T\partial_\lambda}c)[a_{-\lambda-T}b]: + :(e^{T\partial_\lambda}b)[a_{-\lambda-T}c]: + \int_{-T}^{-\lambda-T} e^{T\partial_\lambda}[[a_{-\lambda}b]_\mu c]\,d\mu. \tag{2.6.8}$$

Pero además tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{-\lambda-T} e^{T\partial_\lambda}[[a_{-\lambda}b]_\mu c]\,d\mu &= -\int_{-T}^{-\lambda-T} e^{T\partial_\lambda}[c_{-\mu-T}[a_{-\lambda}b]]\,d\mu\\ &= \int_0^\lambda e^{T\partial_\lambda}[c_\mu[a_{-\lambda}b]]\,d\mu\\ &= \int_0^\lambda [c_\mu[a_{\mu-\lambda-T}b]]\,d\mu,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de que

$$\begin{aligned}e^{T\partial_\lambda}[c_\mu[a_{-\lambda}b]] &= \sum_{m=0}^{\infty}\partial_\lambda^{(m)}T^m([c_\mu[a_{-\lambda}b]])\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\partial_\lambda^{(m)}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}[(T^jc)_\mu(T^{m-j}[a_{-\lambda}b])]\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\partial_\lambda^{m}\sum_{j=0}^{m}(-\mu)^{(j)}[c_\mu(T^{(m-j)}[a_{-\lambda}b])]\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=j}^{\infty}\partial_\lambda^{m}(-\mu)^{(j)}\sum_{r=0}^{\infty}(-\lambda)^{(r)}[c_\mu(T^{(m-j)}(a_{(r)}b))]\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-\mu)^{(j)}\sum_{r=0}^{\infty}\partial_\lambda^{m+j}(-\lambda)^{(r)}[c_\mu(T^{(m)}(a_{(r)}b))]\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r}(-\mu)^{(j)}\sum_{m=0}^{r-j}(-\lambda)^{(r-j-m)}(-1)^{m+j}[c_\mu(T^{(m)}(a_{(r)}b))]\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r}\mu^{(j)}[c_\mu\left(\sum_{m=0}^{r-j}(-\lambda)^{(r-j-m)}(-T)^{(m)}(a_{(r)}b)\right)]\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r}\mu^{(j)}[c_\mu(-\lambda-T)^{(r-j)}(a_{(r)}b)]\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}[c_\mu(\mu-\lambda-T)^{(r)}(a_{(r)}b)]\\ &= [c_\mu[a_{\mu-\lambda-T}b]].\end{aligned}$$

Así, la igualdad (2.6.8) se convierte en

$$[a_{-\lambda-T} : bc :] =: (e^{T\partial_\lambda}c)[a_{-\lambda-T}b] : + : (e^{T\partial_\lambda}b)[a_{-\lambda-T}c] : + \int_0^\lambda [c_\mu[a_{\mu-\lambda-T}b]]\,d\mu,$$

y aplicándole la antisimetría del $\lambda$-producto obtenemos la fórmula de Wick a derecha, por lo que $(V, |0\rangle, Y)$ es un álgebra de vértices. $\square$

# 3. El álgebra de vértices universal envolvente de un álgebra de Lie conforme

En este capítulo veremos que el concepto análogo al de álgebra universal envolvente de un álgebra de Lie para las álgebras de Lie conformes viene dado por un álgebra de vértices. Además, no sólo haremos esto para álgebras de Lie conformes, sino que nos permitiremos trabajar con una clase más general de álgebras, que denominaremos *álgebras de Lie conformes no lineales*.

A lo largo de todo el capítulo y el siguiente seguiremos el trabajo realizado por A. De Sole y V. Kac en [DSK].

## 3.1. El caso lineal

Comenzaremos estudiando la construcción del álgebra universal envolvente para las álgebras de Lie conformes que fueron presentadas en la sección 2.2. A partir de ahora estas álgebras de Lie conformes serán llamadas *lineales*.

El siguiente resultado muestra una manera canónica de dar una estructura de álgebra de Lie a un álgebra de Lie conforme.

**Proposición 3.1.1.** *Sea $R$ un álgebra de Lie conforme, con $\lambda$-producto dado por $R \otimes R \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes R$, $a \otimes b \mapsto [a_\lambda b]$. Entonces el corchete*

$$[a,b] = \int_{-T}^{0} [a_\lambda b]\, d\lambda \qquad \forall\, a,b \in R \tag{3.1.1}$$

*define una estructura de álgebra de Lie en $R$.*

*Demostración:* Para demostrar la identidad de Jacobi, observemos que dados $a,b,c \in R$ vale que

$$\begin{aligned}
[b,[a,c]] &= \int_{-T}^{0} [b_\mu \left( \int_{-T}^{0} [a_\lambda c]\, d\lambda \right)]\, d\mu \\
&= \int_{-T}^{0} [b_\mu \left( -\sum_{n=0}^{\infty} (-T)^{(n+1)} (a_{(n)} c) \right)]\, d\mu \\
&= \int_{-T}^{0} \left( -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{(n+1)} [b_\mu T^{(n+1)} (a_{(n)} c)] \right) d\mu \\
&= \int_{-T}^{0} \left( -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{(n+1)} (T+\mu)^{(n+1)} [b_\mu (a_{(n)} c)] \right) d\mu \\
&= \int_{-T}^{0} \int_{-T-\mu}^{0} [b_\mu [a_\lambda c]]\, d\lambda\, d\mu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-T}^{0}\int_{-T}^{\mu}[b_\mu[a_{\lambda-\mu}c]]\,d\lambda\,d\mu\\
&= \int_{-T}^{0}\int_{\lambda}^{0}[b_\mu[a_{\lambda-\mu}c]]\,d\mu\,d\lambda.
\end{aligned}
$$

Intercambiando $a$ con $b$, tenemos que

$$[a,[b,c]] = \int_{-T}^{0}\int_{\lambda}^{0}[a_\mu[b_{\lambda-\mu}c]]\,d\mu\,d\lambda.$$

Finalmente, gracias a la condición de Jacobi para álgebras conformes (2.2.11) resulta que

$$
\begin{aligned}
[[a,b],c] &= \int_{-T}^{0}[\left(\int_{-T}^{0}[a_\mu b]\,d\mu\right)\,_\lambda c]\,d\lambda\\
&= \int_{-T}^{0}[\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-T)^{(n+1)}(a_{(n)}b)\right)\,_\lambda c]\,d\lambda\\
&= \int_{-T}^{0}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{(n+1)}[(a_{(n)}b)_\lambda c]\right)\,d\lambda\\
&= \int_{-T}^{0}\int_{\lambda}^{0}[[a_\mu b]_\lambda c]\,d\mu\,d\lambda\\
&= \int_{-T}^{0}\int_{\lambda}^{0}([a_\mu[b_{\lambda-\mu}c]]-[b_{\lambda-\mu}[a_\mu c]])\,d\mu\,d\lambda\\
&= [a,[b,c]]-[b,[a,c]].
\end{aligned}
$$

Est muestra que este corchete convierte a $R$ en un álgebra de Leibniz (c.f. definición 2.2.1). Pero además vale que la antisimetría del $\lambda$-producto implica la de este corchete, por lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \int_{-T}^{0}[a_\lambda b]\,d\lambda\\
&= -\int_{-T}^{0}[b_{-\lambda-T}a]\,d\lambda\\
&= \int_{0}^{-T}[b_\mu a]\,d\mu\\
&= -[b,a].
\end{aligned}
$$

Así, este corchete convierte a $R$ en un álgebra de Lie. $\square$

Denotaremos por $R_{\mathrm{Lie}}$ a $R$ con la estructura de álgebra de Lie dada por (3.1.1). Observemos que $T$ es una derivación de $R_{\mathrm{Lie}}$ debido a (2.2.17).

Recordemos que el álgebra de Lie de distribuciones formales Lie $R$ asociada al álgebra de Lie conforme $R$ (c.f. Proposición 2.2.18), está definida por

$$\text{Lie } R = \tilde{R}/T\tilde{R} = \{\overline{a_{(m)}} : a \in R, m \in \mathbb{Z}\}.$$

En esta expresión, $\tilde{R} = R \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ es un $\mathbb{C}[T]$-módulo donde la acción de $T$ viene dada por $T(a \otimes f) = Ta \otimes f + a \otimes \partial_t f$ para $a \in R$ y $f \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, y además estamos utilizando la notación $\overline{a_{(m)}} = a \otimes t^m + T\tilde{R}$.

Denotaremos por (Lie $R$)₋ (respectivamente (Lie $R$)$_+$) al subespacio de Lie $R$ generado por los $\overline{a_{(m)}}$ con $a \in R$ y $m \geq 0$ (respectivamente $m < 0$). Ambas son subálgebras de Lie $R$.

Estas álgebras de Lie están relacionadas con $R_{\text{Lie}}$ a través del siguiente resultado.

**Proposición 3.1.2.** *Sea $R$ un álgebra de Lie conforme. Entonces la aplicación $F : R_{Lie} \to (Lie\ R)_+$ dada por $a \mapsto \overline{a_{(-1)}}$, es un isomorfismo de álgebras de Lie.*

*Demostración:* Primero veamos que este mapa es un homomorfismo de álgebras de Lie. Dados $a, b \in R$, tenemos que

$$\begin{aligned}
F([a, b]) &= \overline{[a, b]_{(-1)}} \\
&= \overline{\left(\int_{-T}^{0} [a_\lambda b]\, d\lambda\right) t^{-1}} \\
&= \overline{\sum_{n=0}^{\infty} (-T)^{(n+1)} (a_{(n)} b) t^{-1}} \\
&= \overline{\sum_{n=0}^{\infty} (a_{(n)} b) \partial_t^{(n+1)} (t^{-1})} \\
&= \overline{\sum_{n=0}^{\infty} (a_{(n)} b)(-1)^{n+1} t^{-n-2}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, recordando que el corchete de Lie en Lie $R$ está dado por (2.2.18), resulta que

$$\begin{aligned}
[F(a), F(b)] &= [\overline{a_{(-1)}}, \overline{b_{(-1)}}] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-1}{m} \overline{(a_{(m)} b)_{(-m-2)}} \\
&= \overline{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)(-2)\cdots(-m)}{m!} (a_{(m)} b) t^{-m-2}} \\
&= \overline{\sum_{m=0}^{\infty} (a_{(m)} b)(-1)^{m+1} t^{-m-2}}.
\end{aligned}$$

Así, llegamos a que $F([a,b]) = [F(a), F(b)]$ para todos $a, b \in R$. Además $F$ preserva la acción de $T$, puesto que

$$F(Ta) = \overline{Ta\,t^{-1}} = \overline{-\partial_t(a\,t^{-1})} = \overline{a\,t^{-2}} = \overline{T(a_{(-1)})} = T(Fa).$$

Esto en particular dice que podemos escribir a todo $\overline{a_{(n)}} \in F$ como

$$\overline{a_{(n)}} = (-T)^{(-n-1)}\overline{a_{(-1)}} = (-T)^{(-n-1)}F(a) = F((-T)^{(-n-1)}a),$$

lo cual muestra que $F$ es sobreyectiva.

Por último, la inyectividad de $F$ se sigue de la demostración de la Proposición 2.2.20, en la cual vimos que si un $a \in R$ cumplía que $\overline{a_{(-1)}} = 0$, entonces debía ocurrir $a = 0$. $\square$

Esta Proposición nos permite realizar la siguiente construcción del álgebra de vértices universal envolvente $U(R)$ de un álgebra de Lie conforme $R$.

**Teorema 3.1.3.** *Sea $R$ un álgebra de Lie conforme. Sea $R_{\mathrm{Lie}}$ el álgebra de Lie dada por $R$ con el corchete (3.1.1), y sea $V = U(R_{\mathrm{Lie}})$ su álgebra universal envolvente. Entonces existe una única estructura de álgebra de vértices en $V$ tal que la restricción del $\lambda$-producto a $R_{\mathrm{Lie}} \otimes R_{\mathrm{Lie}}$ coincide con el $\lambda$-producto de $R$, y la restricción del producto normalmente ordenado a $R_{\mathrm{Lie}} \otimes V$ coincide con el producto en $U(R_{\mathrm{Lie}})$.*

*Denotaremos por $U(R)$ a $V$ con esta estructura de álgebra de vértices.*

*Demostración:* En la Proposición anterior vimos que $R_{\mathrm{Lie}} \simeq (\mathrm{Lie}\ R)_+$. Por lo tanto, vale que como $(\mathrm{Lie}\ R)$-módulos,

$$V = U(R_{\mathrm{Lie}}) \simeq U((\mathrm{Lie}\ R)_+) \simeq U(\mathrm{Lie}\ R) \otimes_{U((\mathrm{Lie}\ R)_-)} \mathbb{C} = \mathrm{Ind}_{(\mathrm{Lie}\ R)_-}^{\mathrm{Lie}\ R}\mathbb{C}, \tag{3.1.2}$$

donde la acción de $(\mathrm{Lie}\ R)_-$ en $\mathbb{C}$ es trivial. Veamos que $\tilde{V} = \mathrm{Ind}_{(\mathrm{Lie}\ R)_-}^{\mathrm{Lie}\ R}\mathbb{C}$ posee una estructura de álgebra de vértices.

Denotemos por $\mathfrak{g}$ a Lie $R$. En primer lugar, las distribuciones formales $\mathfrak{g}$-valuadas $a(z)$ con $a \in R$ definidas en (2.2.19) permiten definir a su vez nuevas distribuciones formales $\tilde{V}$-valuadas, que denotaremos por $\tilde{a}(z)$. Es posible ver que estas distribuciones formales son campos en $\tilde{V}$, locales entre sí. Además, si denotamos por $|0\rangle$ a la imagen del $1 \in U(\mathfrak{g})$ en $\tilde{V}$, entonces $\tilde{V}$ está generado por los elementos de la forma

$$\tilde{a}^1_{(n_1)}\tilde{a}^2_{(n_2)} \cdots \tilde{a}^k_{(n_k)}|0\rangle,$$

con $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}$, $a^1, ..., a^k \in R$ y $k \in \mathbb{Z}_+$. Por otro lado, la acción de $T$ en $\mathfrak{g}$ permite definir una derivación en $U(\mathfrak{g})$, la cual a su vez induce una acción de $T$ en $\tilde{V}$ que la convierte en un $\mathbb{C}[T]$-módulo.

Ahora podemos aplicar el Teorema de Existencia[5] para afirmar que la fórmula

$$Y\left(\tilde{a}^1_{(n_1)}\tilde{a}^2_{(n_2)}\cdots\tilde{a}^k_{(n_k)}|0\rangle, z\right) = \tilde{a}^1(z)_{(n_1)}\left(\tilde{a}^2(z)_{(n_2)}\left(\cdots\tilde{a}^k(z)_{(n_k)}I_{\tilde{V}}\right)\right)$$

define una correspondencia estado-campo en $\tilde{V}$ de forma tal que $(\tilde{V}, |0\rangle, Y)$ es un álgebra de vértices. □

El álgebra de vértices $U(R)$ cumple la siguiente propiedad universal.

**Proposición 3.1.4.** *Sea $R$ un álgebra de Lie conforme. Sea $W$ un álgebra de vértices, y sea $f : R \to W$ un homomorfismo de álgebras conformes. Si consideramos la inclusión canónica $i : R \to U(R)$, entonces existe un único homomorfismo de álgebras de vértices $\tilde{f} : U(R) \to W$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} U(R) \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ R \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

Para ver la demostración de este hecho, será conveniente desarrollar primero una serie de herramientas que nos permitirán entender a $U(R)$ desde otra perspectiva. Haremos esto a lo largo de las siguientes secciones, trabajando con una versión más general de la noción de álgebra de Lie conforme, y en la sección 3.5 retomaremos esta propiedad universal.

## 3.2. Álgebras conformes no lineales

De aquí en más nos abocaremos a generalizar los resultados obtenidos en la sección 3.1 para abarcar una definición más amplia de la noción de álgebra conforme.

Comenzaremos introduciendo los conceptos de *graduación* y *filtración* de un espacio vectorial.

De ahora en adelante, la letra $\Gamma$ denotará un semigrupo abeliano totalmente ordenado y con un elemento mínimo 0, tal que para todo $\Delta \in \Gamma$ hay sólo una cantidad finita de elementos $\Delta' \in \Gamma$ tales que $\Delta' < \Delta$. El ejemplo más importante viene dado por $\Gamma = \mathbb{Z}_+$.

**Definición 3.2.1.** Una $\Gamma$-*graduación* de un espacio vectorial $U$ es una descomposición del mismo como suma directa de subespacios vectoriales indexados por $\Gamma$, es decir

$$U = \bigoplus_{\Delta \in \Gamma} U[\Delta].$$

[5] Ver [K, Theorem 4.5]

Si $a \in U[\Delta]$, diremos que $\Delta$ es el *grado* de $a$, y lo denotaremos por $\Delta(a)$ o bien $\Delta_a$.

La $\Gamma$-*filtración* inducida por esta graduación de $U$ se define mediante

$$U_\Delta = \bigoplus_{\Delta' \leq \Delta} U[\Delta'].$$

Dado un espacio vectorial $U$, consideremos su álgebra tensorial $\mathcal{T}(U)$, dada por

$$\mathcal{T}(U) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} U^{\otimes n} = \mathbb{C} \oplus U \oplus U^{\otimes 2} \oplus \cdots .$$

Una $\Gamma$-graduación de $U$ puede extenderse a una $\Gamma$-graduación de $\mathcal{T}(U)$, definiendo

$$\Delta(1) = 0, \quad \Delta(A \otimes B) = \Delta(A) + \Delta(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{T}(U).$$

Su $\Gamma$-filtración inducida se denota mediante

$$\mathcal{T}_\Delta(U) = \bigoplus_{\Delta' \leq \Delta} \mathcal{T}(U)[\Delta'].$$

Ahora podemos dar la definición con la cual trabajaremos durante el resto del presente trabajo.

**Definición 3.2.2.** Un *álgebra conforme no lineal* es un $\mathbb{C}[T]$-módulo junto con una $\Gamma \backslash \{0\}$-graduación en $\mathbb{C}[T]$-submódulos

$$R = \bigoplus_{\Delta \in \Gamma \backslash \{0\}} R[\Delta],$$

y un $\lambda$-corchete dado por una aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$[\ _\lambda\ ] : R \otimes R \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{T}(R),$$

tales que para todos $a, b \in R$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. Sesquilinealidad

$$[Ta_\lambda b] = -\lambda [a_\lambda b], \tag{3.2.1}$$
$$[a_\lambda Tb] = (\lambda + T)[a_\lambda b]. \tag{3.2.2}$$

2. Condición de grado

$$\Delta([a_\lambda b]) < \Delta(a) + \Delta(b). \tag{3.2.3}$$

*Observación* 3.2.3. Utilizando la notación de los productos $n$-ésimos para el $\lambda$-corchete vista en el capítulo anterior, la condición de grado significa que $\Delta(a_{(n)}b) < \Delta(a) + \Delta(b)$ para todos $a, b \in R$ y para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

A su vez, esto también puede expresarse en términos de la $\Gamma$-filtración de $\mathcal{T}(R)$, ya que es equivalente a que para todos $\Delta_1, \Delta_2 \in \Gamma$ exista algún $\Delta \in \Gamma$ tal que $\Delta < \Delta_1 + \Delta_2$ y

$$[R[\Delta_1]\,{}_\lambda\, R[\Delta_2]] \subseteq \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{T}_\Delta(R).$$

Además, observemos que estas condiciones implican que $\mathcal{T}(R)[0] = \mathbb{C}$ y que $\mathcal{T}(R)[\delta_0] = R[\delta_0]$, donde $\delta_0$ es el menor elemento de $\Gamma\backslash\{0\}$ tal que $R[\delta_0] \neq 0$.

**Ejemplo 3.2.4.** Toda álgebra conforme (c.f. definición 2.2.8) es un álgebra conforme no lineal según esta definición, puesto que podemos tomar $\Gamma = \{0, 1\}$ y asignarle grado 1 a todo elemento de $R$, obteniendo así una $\Gamma$-graduación de $R$ (dada por $R = R[1]$) que claramente satisface la condición de grado.

No obstante, existen ejemplos de álgebras conformes no lineales que realmente son no lineales, es decir que poseen $\Gamma$-graduaciones no triviales y en los cuales intervienen elementos de $\mathcal{T}(R)$ en el $\lambda$-corchete. El primero de estos ejemplos en ser descubierto fue la $W_3$-álgebra de Zamolodchikov (ver [Z]), la cual consiste en

$$W_3 = \mathbb{C}[T]L + \mathbb{C}[T]W,$$

donde $\Delta(L) = 2$, $\Delta(W) = 3$, y el $\lambda$-corchete se define a partir de

$$[L_\lambda L] = (T+2\lambda)L+\frac{c}{12}\lambda^3, \qquad [L_\lambda W] = (T+3\lambda)W, \qquad [W_\lambda L] = (2T+3\lambda)W,$$

$$[W_\lambda W] = (T+2\lambda)\left(\frac{16}{22+5c}(L\otimes L) + \frac{c-10}{3(22+5c)}T^2L + \frac{1}{6}\lambda(T+\lambda)L\right)+\frac{c}{360}\lambda^5.$$

## 3.3. Construcción del álgebra universal envolvente $U(R)$

Ahora introduciremos en $\mathcal{T}(R)$ un producto normalmente ordenado y extenderemos el $\lambda$-corchete de $R$ a $\mathcal{T}(R)$, a través del uso de la cuasi-asociatividad y de las fórmulas de Wick.

**Proposición 3.3.1.** *Sea $R$ un álgebra conforme no lineal. Entonces existen únicos mapas $\mathbb{C}$-lineales*

$$N : \mathcal{T}(R) \otimes \mathcal{T}(R) \to \mathcal{T}(R),$$
$$L_\lambda : \mathcal{T}(R) \otimes \mathcal{T}(R) \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{T}(R),$$

*tales que, para $a, b, c \in R$ y $A, B, C \in \mathcal{T}(R)$, se cumplen las siguientes condiciones:*

*a)*

$$
\begin{aligned}
N(1,A) &= N(A,1) = A, && (3.3.1)\\
N(a,B) &= a\otimes B, && (3.3.2)\\
N(a\otimes B,C) &= N(a,N(B,C)) + N\left(\left(\int_0^T d\lambda\, a\right), L_\lambda(B,C)\right)\\
&\quad + N\left(\left(\int_0^T d\lambda\, B\right), L_\lambda(a,C)\right), && (3.3.3)\\
L_\lambda(1,A) &= L_\lambda(A,1) = 0, && (3.3.4)\\
L_\lambda(a,b) &= [a\,{}_\lambda\, b], && (3.3.5)\\
L_\lambda(a,b\otimes C) &= N(L_\lambda(a,b),C) + N(b,L_\lambda(a,C))\\
&\quad + \int_0^\lambda L_\mu(L_\lambda(a,b),C)d\mu, && (3.3.6)\\
L_\lambda(a\otimes B,C) &= N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}a\right), L_\lambda(B,C)\right) + N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}B\right), L_\lambda(a,C)\right)\\
&\quad + \int_0^\lambda L_\mu(B, L_{\lambda-\mu}(a,C))d\mu. && (3.3.7)
\end{aligned}
$$

*b)*

$$
\begin{aligned}
\Delta(N(A,B)) &\le \Delta(A) + \Delta(B), && (3.3.8)\\
\Delta(L_\lambda(A,B)) &< \Delta(A) + \Delta(B). && (3.3.9)
\end{aligned}
$$

*Demostración:* Vamos a probar por inducción en $\Delta = \Delta(A) + \Delta(B)$ que $N(A,B)$ y $L_\lambda(A,B)$ existen y están unívocamente determinados por las ecuaciones (3.3.1) a (3.3.7), y que satisfacen las condiciones de grado (3.3.8) y (3.3.9).

Primero analicemos el caso de $N(A,B)$. Si $A \in \mathbb{C}$ o $A \in R$, entonces $N(A,B)$ queda definido por las condiciones (3.3.1) y (3.3.2) respectivamente. Supongamos entonces que $A \in \mathcal{T}(R)$ y $A \notin \mathbb{C}$, $A \notin R$, es decir que $A = a\otimes A'$ con $a \in R$ y $A' \in R \oplus R^{\otimes 2} \oplus \cdots$. Observemos que en particular se cumple que $\Delta(a) < \Delta(a) + \Delta(A') = \Delta(A)$ y de igual forma, $\Delta(A') < \Delta(A)$. Por la condición (3.3.3), resulta entonces que

$$
\begin{aligned}
N(A,B) &= a\otimes N(A',B) + N\left(\left(\int_0^T d\lambda\, a\right), L_\lambda(A',B)\right)\\
&\quad + N\left(\left(\int_0^T d\lambda\, A'\right), L_\lambda(a,B)\right). && (3.3.10)
\end{aligned}
$$

Veamos ahora que los tres términos de la derecha en (3.3.10) están unívocamente definidos por hipótesis inductiva. En el caso de $N(A',B)$, esto ocurre porque $\Delta(A') + \Delta(B) < \Delta$; en el caso del segundo término, primero debemos considerar que, si denotamos $L_\lambda(A', B) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(n)} A'_{(n)} B$ con $A'_{(n)} B \in \mathcal{T}(R)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, entonces

$$N\left(\left(\int_0^T d\lambda\, a\right), L_\lambda(A', B)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} N(T^{(n+1)} a, A'_{(n)} B).$$

Como $\Delta(A') + \Delta(B) < \Delta$, podemos usar la hipótesis inductiva (3.3.9) y afirmar que $\Delta(A'_{(n)} B) < \Delta(A') + \Delta(B)$. Luego resulta que

$$\begin{aligned}\Delta(T^{(n+1)} a) + \Delta(A'_{(n)} B) &< \Delta(T^{(n+1)} a) + \Delta(A') + \Delta(B)\\ &= \Delta(a) + \Delta(A') + \Delta(B)\\ &= \Delta,\end{aligned}$$

lo cual nos permite afirmar que $N(T^{(n+1)} a, A'_{(n)} B)$ está bien definido para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ por hipótesis inductiva, y esto dice que el segundo término de (3.3.10) se encuentra bien definido. El tercer término se trata de manera análoga, teniendo en cuenta que $T$ actúa como una derivación en $\mathcal{T}(R)$, y que esto implica que cada $\mathcal{T}(R)[\Delta]$ es un $\mathbb{C}[T]$-submódulo de $\mathcal{T}(R)$.

Consideremos ahora el caso de $L_\lambda(A, B)$. Si $A \in \mathbb{C}$ o $B \in \mathbb{C}$, entonces $L_\lambda(A, B) = 0$ por (3.3.4). Más aún, si $A, B \in R$, entonces $L_\lambda(A, B)$ queda definido por (3.3.5). Esto hace que sólo queden dos casos por revisar.

El primero de ellos se da cuando $A = a \in R$ y $B = b \otimes B'$ con $b \in R$ y $B' \in R \oplus R^{\otimes 2} \oplus \cdots$. En esta situación, tenemos por la condición (3.3.6) que

$$\begin{aligned}L_\lambda(A, B) &= N(L_\lambda(a, b), B') + N(b, L_\lambda(a, B'))\\ &\quad + \int_0^\lambda L_\mu(L_\lambda(a, b), B') d\mu.\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

Ahora puede verse de manera análoga a lo hecho anteriormente para $N(A, B)$ que los tres términos de la derecha en (3.3.11) se encuentran bien definidos por hipótesis inductiva. Por ejemplo, para el primero tenemos que $N(L_\lambda(a, b), B') = \sum_{n=0}^{\infty} N(a_{(n)} b, B')$, y usando la condición de grado (3.2.3) de $R$ llegamos a que

$$\Delta(a_{(n)} b) + \Delta(B') < \Delta(a) + \Delta(b) + \Delta(B') = \Delta.$$

El segundo y último caso consiste en tomar $A = a \otimes A'$ con $a \in R$ y $A', B \in R \oplus R^{\otimes 2} \oplus \cdots$. Entonces por (3.3.7) vale que

$$\begin{aligned}L_\lambda(A, B) = N\left(\left(e^{T\partial_\lambda} a\right), L_\lambda(A', B)\right) + N\left(\left(e^{T\partial_\lambda} A'\right), L_\lambda(a, B)\right)\\ + \int_0^\lambda L_\mu(A', L_{\lambda-\mu}(a, B)) d\mu,\end{aligned}$$

y puede verse de igual forma que en los casos anteriores que los términos de la derecha de esta última expresión se encuentran bien definidos por hipótesis inductiva. $\square$

La Proposición anterior nos permite definir lo que será el ideal de $\mathcal{T}(R)$ por el cual cocientaremos para obtener el álgebra de vértices $U(R)$ que queremos definir.

**Definición 3.3.2.** Sea $R$ un álgebra conforme no lineal. Dado $\Delta \in \Gamma$, definimos el subespacio $\mathcal{M}_\Delta(R) \subseteq \mathcal{T}(R)$ como

$$\mathcal{M}_\Delta(R) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\Bigg\{ A \otimes \left( (b \otimes c - c \otimes b) \otimes D - N\left( \int_{-T}^{0} L_\lambda(b,c) d\lambda \, , D \right)\right) : \\ b, c \in R,\ A, D \in \mathcal{T}(R),\ A \otimes b \otimes c \otimes D \in \mathcal{T}_\Delta(R). \Bigg\}.$$

Definimos también

$$\mathcal{M}(R) = \bigcup_{\Delta \in \Gamma} \mathcal{M}_\Delta(R).$$

*Observación* 3.3.3. $\mathcal{M}(R)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{T}(R)$ ya que la unión es creciente. Además, es importante destacar que esta definición está inspirada en (3.1.1), puesto que queremos que la relación

$$b \otimes c - c \otimes b = \int_{-T}^{0} [b_\lambda c] \, d\lambda$$

con $b, c \in R$ se cumpla en el cociente $\mathcal{T}(R)/\mathcal{M}(R)$.

Ahora podemos definir con precisión el análogo no lineal del concepto de álgebra de Lie conforme.

**Definición 3.3.4.** Un *álgebra de Lie conforme no lineal* es un álgebra conforme no lineal $R$ tal que su $\lambda$-corchete satisface las siguientes dos condiciones:

1. Antisimetría
$$[a_\lambda b] = -[b_{-\lambda-T} a] \quad \forall\, a, b \in R. \tag{3.3.12}$$

2. Identidad de Jacobi
$$L_\lambda(a, L_\mu(b,c)) - L_\mu(b, L_\lambda(a,c)) - L_{\lambda+\mu}(L_\lambda(a,b), c) \in \mathbb{C}[\lambda,\mu] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \tag{3.3.13}$$
para todos $a, b, c \in R$ y para algún $\Delta' \in \Gamma$ tal que $\Delta' < \Delta(a) + \Delta(b) + \Delta(c)$.

Dada un álgebra de Lie conforme no lineal $R$, consideremos el espacio vectorial

$$U(R) = \mathcal{T}(R)/\mathcal{M}(R).$$

En la siguiente sección veremos que es posible dar un producto normalmente ordenado y un $\lambda$-corchete en $U(R)$ de forma tal que se convierta en un álgebra de vértices. Por este motivo, $U(R)$ se denomina el *álgebra de vértices universal envolvente* asociada a $R$.

## 3.4. Estructura de álgebra de vértices en $U(R)$

El primer paso para ver que $U(R)$ posee una estructura de álgebra de vértices consiste en brindar una acción de $T$ en $U(R)$ para transformarlo en un $\mathbb{C}[T]$-módulo. Recordemos que $\mathcal{T}(R)$ es un $\mathbb{C}[T]$-módulo con la acción de $T$ definida por

$$T(1) = 0, \quad T(A \otimes B) = T(A) \otimes B + A \otimes T(B) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{T}(R). \tag{3.4.1}$$

**Proposición 3.4.1.** *Sea $R$ un álgebra conforme no lineal. Entonces el endomorfismo $T : \mathcal{T}(R) \to \mathcal{T}(R)$ es una derivación del producto $N : \mathcal{T}(R) \otimes \mathcal{T}(R) \to \mathcal{T}(R)$. Es decir, para todos $A, B \in \mathcal{T}(R)$ vale que*

$$TN(A, B) = N(TA, B) + N(A, TB). \tag{3.4.2}$$

*Además, el $\lambda$-corchete $L_\lambda : \mathcal{T}(R) \otimes \mathcal{T}(R) \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{T}(R)$ satisface las condiciones de sesquilinealidad, es decir que para todos $A, B \in \mathcal{T}(R)$ vale que*

$$L_\lambda(TA, B) = -\lambda L_\lambda(A, B), \tag{3.4.3}$$
$$L_\lambda(A, TB) = (\lambda + T) L_\lambda(A, B). \tag{3.4.4}$$

*En particular, $T$ es una derivación de $L_\lambda$.*

*Demostración:* Probaremos ambas afirmaciones por inducción en $\Delta = \Delta(A) + \Delta(B)$. Si $\Delta = 0$, entonces $A, B \in \mathbb{C}$, y no hay nada que probar. Supongamos entonces que $\Delta > 0$. Si $A \in \mathbb{C}$, las igualdades (3.4.2), (3.4.3) y (3.4.4) se satisfacen automáticamente. Por lo tanto, resta considerar sólo los siguientes casos:

1. $A = a \in R$,

2. $A = a \otimes A'$, con $a \in R$ y $A' \in R \oplus R^{\otimes 2} \oplus \cdots$.

*Caso 1.* La ecuación (3.4.2) se sigue de (3.4.1), puesto que $N(a, B) = a \otimes B$. En relación a las otras dos igualdades, observemos que para $B \in \mathbb{C}$ son triviales, y para $B \in R$ valen por (3.3.5). Supongamos entonces que $B = b \otimes B'$, con $b \in R$ y $B' \in R \oplus R^{\otimes 2} \oplus \cdots$. Ahora debido a (3.3.6) y a la hipótesis inductiva, tenemos que

$$\begin{aligned}
L_\lambda(Ta, B) &= N(L_\lambda(Ta, b), B') + N(b, L_\lambda(Ta, B')) + \int_0^\lambda L_\mu(L_\lambda(Ta, b), B')\, d\mu \\
&= -\lambda N(L_\lambda(a, b), B') - \lambda N(b, L_\lambda(a, B')) - \lambda \int_0^\lambda L_\mu(L_\lambda(a, b), B')\, d\mu \\
&= -\lambda L_\lambda(a, B).
\end{aligned}$$

De manera similar resulta que

$$\begin{aligned}
L_\lambda(a, TB) &= L_\lambda(a, Tb \otimes B') + L_\lambda(a, b \otimes TB') \\
&= N(L_\lambda(a, Tb), B') + N(Tb, L_\lambda(a, B')) + \int_0^\lambda L_\mu(L_\lambda(a, Tb), B')\, d\mu \\
&\quad + N(L_\lambda(a, b), TB') + N(b, L_\lambda(a, TB')) + \int_0^\lambda L_\mu(L_\lambda(a, b), TB')\, d\mu \\
&= N((\lambda + T)L_\lambda(a, b), B') + N(b, (\lambda + T)L_\lambda(a, B')) \\
&\quad + N(L_\lambda(a, b), TB') + N(b, (\lambda + T)L_\lambda(a, B')) \\
&\quad + \int_0^\lambda (\lambda - \mu)L_\mu(L_\lambda(a, b), B')\, d\mu + \int_0^\lambda (\mu + T)L_\mu(L_\lambda(a, b), B')\, d\mu \\
&= \lambda N(L_\lambda(a, b), B') + TN(b, L_\lambda(a, B')) + \lambda N(b, L_\lambda(a, B')) \\
&\quad + TN(L_\lambda(a, b), B') + (\lambda + T) \int_0^\lambda L_\mu(L_\lambda(a, b), B')\, d\mu \\
&= (\lambda + T)L_\lambda(a, B).
\end{aligned}$$

*Caso 2.* Debido a la ecuación (3.3.3), a las condiciones de grado (3.3.8) y (3.3.9) y a la hipótesis inductiva, tenemos que

$$\begin{aligned}
TN(A, B) &= TN(a, N(A', B)) + TN\left(\int_0^T d\lambda\, a, L_\lambda(A', B)\right) \\
&\qquad + TN\left(\int_0^T d\lambda\, A', L_\lambda(a, B)\right) \\
&= N(Ta, N(A', B)) + N(a, N(TA', B)) + N(a, N(A', TB)) \\
&\quad + N\left(\int_0^T d\lambda\, Ta, L_\lambda(A', B)\right) + N\left(\int_0^T d\lambda\, a, L_\lambda(TA', B)\right) \\
&\quad + N\left(\int_0^T d\lambda\, a, L_\lambda(A', TB)\right) + N\left(\int_0^T d\lambda\, TA', L_\lambda(a, B)\right) \\
&\quad + N\left(\int_0^T d\lambda\, A', L_\lambda(Ta, B)\right) + N\left(\int_0^T d\lambda\, A', L_\lambda(a, TB)\right) \\
&= N(Ta \otimes A', B) + N(a \otimes TA', B) + N(a \otimes A', B) \\
&= N(TA, B) + N(A, TB).
\end{aligned}$$

Similarmente, usando la relación $e^{T\partial_\lambda}\lambda = (\lambda+T)e^{T\partial_\lambda}$, vale que

$$\begin{aligned}
L_\lambda(TA,B) &= L_\lambda(Ta\otimes A',B) + L_\lambda(a\otimes TA',B)\\
&= N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}Ta\right), L_\lambda(A',B)\right) + N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}A'\right), L_\lambda(Ta,B)\right)\\
&\quad + N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}a\right), L_\lambda(TA',B)\right) + N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}TA'\right), L_\lambda(a,B)\right)\\
&\quad + \int_0^\lambda L_\mu(A', L_{\lambda-\mu}(Ta,B))\,d\mu + \int_0^\lambda L_\mu(TA', L_{\lambda-\mu}(a,B))\,d\mu\\
&= N\left(T\left(e^{T\partial_\lambda}a\right), L_\lambda(A',B)\right) + N\left((-\lambda-T)\left(e^{T\partial_\lambda}A'\right), L_\lambda(a,B)\right)\\
&\quad + N\left((-\lambda-T)\left(e^{T\partial_\lambda}a\right), L_\lambda(A',B)\right) + N\left(T\left(e^{T\partial_\lambda}A'\right), L_\lambda(a,B)\right)\\
&\quad + \int_0^\lambda (\mu-\lambda)L_\mu(A', L_{\lambda-\mu}(a,B))\,d\mu - \int_0^\lambda \mu L_\mu(A', L_{\lambda-\mu}(a,B))\,d\mu\\
&= -\lambda L_\lambda(A,B).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
L_\lambda(A,TB) &= N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}a\right), L_\lambda(A',TB)\right) + N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}A'\right), L_\lambda(a,TB)\right)\\
&\qquad + \int_0^\lambda L_\mu(A', L_{\lambda-\mu}(a,TB))\,d\mu\\
&= N\left((\lambda+T)\left(e^{T\partial_\lambda}a\right), L_\lambda(A',B)\right) + N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}a\right), TL_\lambda(A',B)\right)\\
&\quad + N\left((\lambda+T)\left(e^{T\partial_\lambda}A'\right), L_\lambda(a,B)\right) + N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}A'\right), TL_\lambda(a,B)\right)\\
&\qquad + \int_0^\lambda (\lambda+T)L_\mu(A', L_{\lambda-\mu}(a,B))\,d\mu\\
&= \lambda N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}a\right), L_\lambda(A',B)\right) + TN\left(\left(e^{T\partial_\lambda}a\right), L_\lambda(A',B)\right)\\
&\quad + \lambda N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}A'\right), L_\lambda(a,B)\right) + TN\left(\left(e^{T\partial_\lambda}A'\right), L_\lambda(a,B)\right)\\
&\qquad + (\lambda+T)\int_0^\lambda L_\mu(A', L_{\lambda-\mu}(a,B))\,d\mu\\
&= (\lambda+T)L_\lambda(A,B).
\end{aligned}$$

□

Una consecuencia inmediata de esta Proposición es lo siguiente:

**Corolario 3.4.2.** *Los subespacios $\mathcal{M}_\Delta(R) \subseteq \mathcal{T}(R)$ son invariantes bajo la acción de $T$ para todo $\Delta\in\Gamma$. En particular, $T\mathcal{M}(R)\subseteq\mathcal{M}(R)$.*

Gracias a esto, definiendo $\pi : \mathcal{T}(R) \to U(R)$ como la proyección canónica, queda bien definida una acción de $T$ en $U(R)$ mediante

$$T(\pi(A)) = \pi(TA).$$

Decimos en este caso que la acción de $T$ en $\mathcal{T}(R)$ *induce* una acción de $T$ en el cociente $U(R)$. Ahora queremos ver que las aplicaciones $N$ y $L_\lambda$ inducen en $U(R)$ un producto normalmente ordenado y un $\lambda$-corchete respectivamente, y que éstos cumplen con las propiedades necesarias para que $U(R)$ sea un álgebra de vértices (de acuerdo al Teorema 2.6.5).

Para comprobar esto, introduciremos una notación que permitirá escribir de forma sucinta todas estas condiciones, y simplificará las cuentas. Dados $A, B, C \in \mathcal{T}(R)$, definimos

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(A,B,C) &= N(A,N(B,C)) - N(B,N(A,C)) \\
&\qquad - N\left(\left(\int_{-T}^{0} L_\lambda(A,B)\,d\lambda\right), C\right), \\
\mathrm{sl}(A,B;\lambda) &= L_\lambda(A,B) + L_{-\lambda-T}(B,A), \\
\mathrm{J}(A,B,C;\lambda,\mu) &= L_\lambda(A,L_\mu(B,C)) - L_\mu(B,L_\lambda(A,C)) - L_{\lambda+\mu}(L_\lambda(A,B),C), \\
\mathrm{Q}(A,B,C) &= N(N(A,B),C) - N(A,N(B,C)) \\
&\qquad - N\left(\int_0^T d\lambda\, A, L_\lambda(B,C)\right) - N\left(\int_0^T d\lambda\, B, L_\lambda(A,C)\right), \\
\mathrm{W}^l(A,B,C;\lambda) &= L_\lambda(A,N(B,C)) - \int_0^\lambda L_\mu(L_\lambda(A,B),C)\,d\mu \\
&\qquad - N(L_\lambda(A,B),C) - N(B,L_\lambda(A,C)), \\
\mathrm{W}^r(A,B,C;\lambda) &= L_\lambda(N(A,B),C) - \int_0^\lambda L_\mu(B,L_{\lambda-\mu}(A,C))\,d\mu \\
&\qquad - N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}A\right), L_\lambda(B,C)\right) - N\left(\left(e^{T\partial_\lambda}B\right), L_\lambda(A,C)\right),
\end{aligned}$$

De esta manera, podemos reescribir las ecuaciones que definen a los mapas $N : \mathcal{T}(R) \otimes \mathcal{T}(R) \to \mathcal{T}(R)$ y $L_\lambda : \mathcal{T}(R) \otimes \mathcal{T}(R) \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{T}(R)$ (cuasiasociatividad y fórmulas de Wick) como

$$\mathrm{Q}(a,B,C) = 0, \quad \mathrm{W}^l(a,b,C;\lambda) = 0, \quad \mathrm{W}^r(a,B,C;\lambda) = 0,$$

para todos $a, b \in R$ y $B, C \in \mathcal{T}(R)$. Asimismo, el axioma de sesquilinealidad y la condición de Jacobi que definen a las álgebras de Lie conformes no lineales pueden ser escritos como

$$\mathrm{sl}(a,b;\lambda) = 0, \quad \mathrm{J}(a,b,c;\lambda,\mu) \in \mathbb{C}[\lambda,\mu] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R),$$

para todos $a, b, c \in R$ y para algún $\Delta' \in \Gamma$ tal que $\Delta' < \Delta(a) + \Delta(b) + \Delta(c)$. Finalmente, los subespacios $\mathcal{M}_\Delta(R) \subseteq \mathcal{T}(R)$ con $\Delta \in \Gamma$ pueden definirse como

$$\mathcal{M}_\Delta(R) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\big\{A \otimes \mathrm{sn}(b,c,D) : A, D \in \mathcal{T}(R),\, b, c \in R,\, \Delta(A \otimes b \otimes c \otimes D) \leq \Delta\big\}.$$

En el siguiente Lema reuniremos los resultados fundamentales para la demostración de que $U(R)$ es un álgebra de vértices. Daremos una idea de la demostración, ya que la mayoría de los cálculos involucrados son análogos entre sí. La demostración completa puede encontrarse en [DSK, Lemma 4.5].

**Lema 3.4.3.** *Para todos* $\Delta_1$, $\Delta_2 \in \Gamma$ *valen las siguientes inclusiones:*

$$N(\mathcal{T}_{\Delta_1}(R), \mathcal{M}_{\Delta_2}(R)) \subseteq \mathcal{M}_{\Delta_1+\Delta_2}(R), \tag{3.4.5}$$
$$N(\mathcal{M}_{\Delta_1}(R), \mathcal{T}_{\Delta_2}(R)) \subseteq \mathcal{M}_{\Delta_1+\Delta_2}(R). \tag{3.4.6}$$

*Además, existe un* $\Delta' \in \Gamma$ *con* $\Delta' < \Delta_1 + \Delta_2$ *tal que*

$$L_\lambda(\mathcal{T}_{\Delta_1}(R), \mathcal{M}_{\Delta_2}(R)) \subseteq \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \tag{3.4.7}$$
$$L_\lambda(\mathcal{M}_{\Delta_1}(R), \mathcal{T}_{\Delta_2}(R)) \subseteq \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \tag{3.4.8}$$
$$\mathrm{sl}(\mathcal{T}_{\Delta_1}(R), \mathcal{T}_{\Delta_2}(R); \lambda) \subseteq \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R). \tag{3.4.9}$$

*Por otro lado, para todos* $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3 \in \Gamma$ *se cumple que*

$$\mathrm{Q}(\mathcal{T}_{\Delta_1}(R), \mathcal{T}_{\Delta_2}(R), \mathcal{T}_{\Delta_3}(R)) \subseteq \mathcal{M}_{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}(R), \tag{3.4.10}$$
$$\mathrm{sn}(\mathcal{T}_{\Delta_1}(R), \mathcal{T}_{\Delta_2}(R), \mathcal{T}_{\Delta_3}(R)) \subseteq \mathcal{M}_{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}(R). \tag{3.4.11}$$

*Además, existe un* $\Delta' \in \Gamma$ *con* $\Delta' < \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ *tal que*

$$\mathrm{W}^l(\mathcal{T}_{\Delta_1}(R), \mathcal{T}_{\Delta_2}(R), \mathcal{T}_{\Delta_3}(R); \lambda) \subseteq \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \tag{3.4.12}$$
$$\mathrm{W}^r(\mathcal{T}_{\Delta_1}(R), \mathcal{T}_{\Delta_2}(R), \mathcal{T}_{\Delta_3}(R); \lambda) \subseteq \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \tag{3.4.13}$$
$$\mathrm{J}(\mathcal{T}_{\Delta_1}(R), \mathcal{T}_{\Delta_2}(R), \mathcal{T}_{\Delta_3}(R); \lambda, \mu) \subseteq \mathbb{C}[\lambda, \mu] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R). \tag{3.4.14}$$

*Idea de la demostración:* Se prueba por inducción en $\Delta \in \Gamma$ que existe un $\Delta' < \Delta$ tal que para todos $A, B, C, D, E \in \mathcal{T}(R)$ se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}(A,B,C) &\in \mathcal{M}_\Delta(R), \quad \text{si } \Delta(A) + \Delta(B) + \Delta(C) \leq \Delta, \\
\mathrm{W}^l(A,B,C;\lambda) &\in \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \quad \text{si } \Delta(A) + \Delta(B) + \Delta(C) \leq \Delta, \\
\mathrm{W}^r(A,B,C;\lambda) &\in \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \quad \text{si } \Delta(A) + \Delta(B) + \Delta(C) \leq \Delta, \\
\mathrm{J}(A,B,C;\lambda,\mu) &\in \mathbb{C}[\lambda,\mu] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \quad \text{si } \Delta(A) + \Delta(B) + \Delta(C) \leq \Delta, \\
N(A,E) &\in \mathcal{M}_\Delta(R), \quad \text{si } \Delta(A) + \Delta(E) \leq \Delta, \\
N(E,D) &\in \mathcal{M}_\Delta(R), \quad \text{si } \Delta(D) + \Delta(E) \leq \Delta, \\
L_\lambda(A,E) &\in \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \quad \text{si } \Delta(A) + \Delta(E) \leq \Delta, \\
L_\lambda(E,D) &\in \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \quad \text{si } \Delta(D) + \Delta(E) \leq \Delta, \\
\mathrm{sn}(A,B,C) &\in \mathcal{M}_\Delta(R), \quad \text{si } \Delta(A) + \Delta(B) + \Delta(C) \leq \Delta, \\
\mathrm{sl}(A,B;\lambda) &\in \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \quad \text{si } \Delta(A) + \Delta(B) \leq \Delta.
\end{aligned}$$

Para $\Delta = 0$ no hay nada que probar, así que podemos tomar $\Delta > 0$. Supongamos por hipótesis inductiva que estas condiciones valen para todo

$\tilde{\Delta} < \Delta$. Para cada una de estas expresiones, debemos encontrar un $\Delta_i' < \Delta$ para el cual se cumplan, y luego de ello podemos tomar el máximo de todos los $\Delta_i'$ como el $\Delta'$ buscado. Veremos cómo hacer esto en uno de los casos (el correspondiente a $\mathrm{W}^l$), dado que los otros son muy similares y pueden verse en [DSK, Lemma 4.5].

Para $A \in \mathbb{C}$ no hay nada que probar. Por lo tanto, vamos a analizar por separado los siguientes casos:

1. $A = a \in R$.
2. $A = a \otimes A'$ con $a \in R$ y $A' \in R \oplus R^{\otimes 2} \oplus \cdots$.

*Caso 1.* Si $A = a \in R$, tenemos que para $B \in \mathbb{C}$ la condición es trivial, y para $B = b \in R$ vale por (3.3.6), ya que $\mathrm{W}^l(a, b, C; \lambda) = 0$. Tomemos entonces $B = b \otimes B'$, con $b \in R$ y $B' \in R \oplus R^{\otimes 2} \oplus \cdots$. En este caso, es posible calcular[6] que

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}^l(a, B, C; \lambda) = {} & N(b, \mathrm{W}^l(a, B', C; \lambda)) - \mathrm{Q}(L_\lambda(a, b), B', C) \\
& + \int_0^\lambda \mathrm{W}^l(L_\lambda(a, b), B', C; \mu)\, d\mu + \mathrm{W}^l\left(a, \int_0^T d\mu\, B', L_\mu(b, C); \lambda\right) \\
& - \int_0^\lambda \mathrm{W}^r(L_\lambda(a, b), B', C; \mu)\, d\mu + N\left(\int_0^T d\mu\, b, \mathrm{J}(a, B', C; \lambda, \mu)\right) \\
& + N\left(\int_0^T d\mu\, B', \mathrm{J}(a, b, C; \lambda, \mu)\right) + \int_0^\lambda \int_0^{\lambda-\mu} \mathrm{J}(L_\lambda(a, b), B', C; \mu, \nu)\, d\nu d\mu.
\end{aligned}$$

Ahora por la hipótesis inductiva, cada término de la derecha pertenece a $\mathcal{M}_{\Delta'}(R)$ para algún $\Delta' < \Delta$.

*Caso 2.* En este caso, es posible obtener la siguiente igualdad:[7]

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}^l(A, B, C; \lambda) = {} & N\left(\left(e^{T\partial_\lambda} a\right), \mathrm{W}^l(A', B, C; \lambda)\right) + N\left(\left(e^{T\partial_\lambda} A'\right), \mathrm{W}^l(a, B, C; \lambda)\right) \\
& - \mathrm{Q}\left(\left(e^{T\partial_\lambda} A'\right), L_\lambda(a, B), C\right) + \mathrm{sn}\left(\left(e^{T\partial_\lambda} a\right), B, L_\lambda(A', C)\right) \\
& + \mathrm{sn}\left(\left(e^{T\partial_\lambda} A'\right), B, L_\lambda(a, C)\right) + \int_0^\lambda L_\mu(A', \mathrm{W}^l(a, B, C; \lambda - \mu))\, d\mu \\
& - \int_0^\lambda \mathrm{W}^r\left(\left(e^{T\partial_\lambda} A'\right), L_\lambda(a, B), C; \mu\right)\, d\mu \\
& + \int_0^\lambda \mathrm{W}^l(A', L_{\lambda-\mu}(a, B), C; \mu)\, d\mu \\
& + \int_0^\lambda \mathrm{W}^l(A', B, L_{\lambda-\mu}(a, C); \mu)\, d\mu \\
& + \int_0^\lambda \int_0^{\lambda-\mu} \mathrm{J}(A', L_{\lambda-\mu}(a, B), C; \mu, \nu)\, d\nu d\mu.
\end{aligned}$$

[6] Ver [DSK, Lemma 4.4, Eq. 4.8].

[7] Ver [DSK, Lemma 4.4, Eq. 4.9].

Nuevamente podemos ver que, gracias a la hipótesis inductiva, todos los términos del miembro derecho de esta ecuación pertenecen a $\mathcal{M}_{\Delta'}(R)$ para algún $\Delta' < \Delta$, lo cual concluye la prueba de que existe un $\Delta' < \Delta$ tal que

$$\mathrm{W}^l(A, B, C; \lambda) \in \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{M}_{\Delta'}(R),$$

para todos $A, B, C \in \mathcal{T}(R)$ tales que $\Delta(A) + \Delta(B) + \Delta(C) \leq \Delta$. □

Ahora estamos listos para probar el Teorema más importante de este capítulo.

**Teorema 3.4.4.** *Sea $R$ un álgebra de Lie conforme no lineal. Consideremos el espacio vectorial $U(R) = \mathcal{T}(R)/\mathcal{M}(R)$, y denotemos por $\pi : \mathcal{T}(R) \to U(R)$ a la proyección canónica.*

*Entonces existe una estructura de álgebra de vértices en $U(R)$, en la cual el vector vacío $|0\rangle$ es $\pi(1)$, el operador de traslación $T : U(R) \to U(R)$ es inducido por la acción de $T$ en $\mathcal{T}(R)$:*

$$T(\pi(A)) = \pi(T(A)) \quad \forall\, A \in \mathcal{T}(R), \tag{3.4.15}$$

*el producto normalmente ordenado en $U(R)$ es inducido por $N$:*

$$:\pi(A)\pi(B) := \pi(N(A, B)) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{T}(R), \tag{3.4.16}$$

*y el $\lambda$-corchete $[\,{}_\lambda\,] : U(R) \otimes U(R) \to \mathbb{C}[\lambda] \otimes U(R)$ es inducido por $L_\lambda$:*

$$[\pi(A)\,{}_\lambda\, \pi(B)] = \pi(L_\lambda(A, B)) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{T}(R). \tag{3.4.17}$$

*Demostración:* Ya habíamos visto que (3.4.15) define una acción de $T$ en $U(R)$. Ahora podemos ver que el producto normalmente ordenado (3.4.16) está bien definido, puesto que si $\pi(A) = \pi(\tilde{A})$ y $\pi(B) = \pi(\tilde{B})$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\pi(N(A, B)) &= \pi(N(\tilde{A}, \tilde{B})) + \pi(N(\tilde{A}, B - \tilde{B})) + \pi(N(A - \tilde{A}, B))\\ &= \pi(N(\tilde{A}, \tilde{B})).\end{aligned}$$

Aquí hemos usado tanto (3.4.5) como (3.4.6), es decir que $\mathcal{M}(R)$ es un ideal bilátero en $\mathcal{T}(R)$ con respecto al producto $N$. Análogamente, (3.4.7) y (3.4.8) dicen que también es un ideal con respecto a $L_\lambda$, por lo cual el $\lambda$-corchete dado por (3.4.17) está bien definido.

Gracias a la Proposición 3.4.1, resulta que $T$ es una derivación de este producto normalmente ordenado en $U(R)$, y por (3.3.1) tenemos que $|0\rangle = \pi(1)$ es la unidad del mismo. Por otro lado, la Proposición 3.4.1 también dice que $U(R)$ es un álgebra conforme con respecto al $\lambda$-producto (3.4.17), y es de hecho un álgebra de Lie conforme gracias a (3.4.9) y (3.4.14).

Por último, la fórmula de Wick (2.6.4), la antisimetría del producto normalmente ordenado (2.6.5) y la cuasiasociatividad (2.6.6) se cumplen gracias a (3.4.12), (3.4.11) (tomando $C = 1$) y (3.4.10) respectivamente. Por ejemplo, la cuasiasociatividad se obtiene de la siguiente forma: dados $A, B, C \in \mathcal{T}(R)$, vale que

$$
\begin{aligned}
&: (: \pi(A)\pi(B) :)\pi(C) : - : \pi(A)(: \pi(B)\pi(C) :) : = \\
&= \pi(N(N(A,B),C) - N(A,N(B,C))) \\
&= \pi\left(N\left(\int_0^T d\lambda\, A, L_\lambda(B,C)\right) + N\left(\int_0^T d\lambda\, B, L_\lambda(A,C)\right) + \mathrm{Q}(A,B,C)\right) \\
&= : \left(\int_0^T d\lambda\, \pi(A)\right)[\pi(B)_\lambda \pi(C)] : + : \left(\int_0^T d\lambda\, \pi(B)\right)[\pi(A)_\lambda \pi(C)] : .
\end{aligned}
$$

□

Para concluir esta sección, veremos un resultado que será de utilidad en el capítulo siguiente.

**Proposición 3.4.5.** *Sea $R$ un álgebra de Lie conforme no lineal. Entonces el mapa $L : \mathcal{T}(R) \otimes \mathcal{T}(R) \to \mathcal{T}(R)$ definido por*

$$L(A,B) = \int_{-T}^0 L_\lambda(A,B)\, d\lambda, \tag{3.4.18}$$

*para todos $A, B \in \mathcal{T}(R)$ cumple la propiedad de antisimetría:*

$$L(A,B) + L(B,A) \in \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \tag{3.4.19}$$

*para todos $A, B \in \mathcal{T}(R)$ y para algún $\Delta' < \Delta(A) + \Delta(B)$, y también cumple la condición de Jacobi:*

$$L(A, L(B,C)) - L(B, L(A,C)) - L(L(A,B),C) \in \mathcal{M}_{\Delta'}(R), \tag{3.4.20}$$

*para todos $A, B, C \in \mathcal{T}(R)$ y para algún $\Delta' < \Delta(A) + \Delta(B) + \Delta(C)$.*

*Demostración:* Sean $A, B, C \in \mathcal{T}(R)$. La propiedad de antisimetría vale porque

$$
\begin{aligned}
L(A,B) + L(B,A) &= \int_{-T}^0 L_\lambda(A,B)\, d\lambda + \int_{-T}^0 L_\lambda(B,A)\, d\lambda \\
&= \int_{-T}^0 L_\lambda(A,B)\, d\lambda - \int_{-T}^0 L_{-\lambda-T}(B,A)\, d\lambda \\
&= \int_{-T}^0 \mathrm{sl}(A,B;\lambda)\, d\lambda \quad \in \mathcal{M}_{\Delta'}(R),
\end{aligned}
$$

para algún $\Delta' < \Delta(A) + \Delta(B)$, gracias a (3.4.9).

Por otro lado, para probar que la condición de Jacobi es válida, primero observemos que

$$\begin{aligned}
L(A, L(B,C)) &= \int_{-T}^{0} L_\lambda \left( A, \int_{-T}^{0} L_\mu(B,C)\, d\mu \right) d\lambda \\
&= \int_{-T}^{0} \int_{-\lambda-T}^{0} L_\lambda \left(A, L_\mu(B,C)\right) d\mu\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Similarmente, tenemos que

$$\begin{aligned}
L(B, L(A,C)) &= \int_{-T}^{0} \int_{-\mu-T}^{0} L_\mu \left(B, L_\lambda(A,C)\right) d\lambda\, d\mu. \\
&= \int_{-T}^{0} \int_{-\lambda-T}^{0} L_\mu \left(B, L_\lambda(A,C)\right) d\mu\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}
L(L(A,B),C) &= \int_{-T}^{0} L_\mu \left( \int_{-T}^{0} L_\lambda(A,B)\, d\lambda, C \right) d\mu \\
&= \int_{-T}^{0} \int_{\mu}^{0} L_\mu(L_\lambda(A,B),C)\, d\lambda\, d\mu \\
&= \int_{-T}^{0} \int_{-T}^{\lambda} L_\mu(L_\lambda(A,B),C)\, d\mu\, d\lambda \\
&= \int_{-T}^{0} \int_{-\lambda-T}^{0} L_{\lambda+\mu}(L_\lambda(A,B),C)\, d\mu\, d\lambda.
\end{aligned}$$

De esta manera, resulta que

$$\begin{aligned}
&L(A, L(B,C)) - L(B, L(A,C)) - L(L(A,B),C) = \\
&\qquad = \int_{-T}^{0} \int_{-\lambda-T}^{0} \mathrm{J}(A,B,C;\lambda,\mu)\, d\mu\, d\lambda \quad \in \mathcal{M}_{\Delta'}(R),
\end{aligned}$$

para algún $\Delta' < \Delta(A) + \Delta(B) + \Delta(C)$, por (3.4.14). □

## 3.5. La propiedad universal de $U(R)$

En esta sección veremos el resultado análogo a la Proposición 3.1.4 para el caso no lineal.

**Definición 3.5.1.** Un *homomorfismo de álgebras de Lie conformes no lineales* $\phi : R \to R'$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}[T]$-módulos que preserva la $\Gamma$-graduación y tal que el homomorfismo de álgebras asociativas $\tilde{\phi} : \mathcal{T}(R) \to \mathcal{T}(R')$ inducido naturalmente por $\phi$ cumple que para todos $A, B \in \mathcal{T}(R)$ existe un $\Delta < \Delta(A) + \Delta(B)$ de manera que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\tilde{\phi}(N(A,B)) - N'(\tilde{\phi}(A), \tilde{\phi}(B)) \in \mathcal{M}_{\Delta(A)+\Delta(B)}(R), \tag{3.5.1}$$

$$\tilde{\phi}(L_\lambda(A,B)) - L'_\lambda(\tilde{\phi}(A), \tilde{\phi}(B)) \in \mathbb{C}[\lambda] \otimes \mathcal{M}_\Delta(R). \tag{3.5.2}$$

**Definición 3.5.2.** Un *homomorfismo de álgebras de vértices* $\psi : V \to W$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}[T]$-módulos que preserva tanto el $\lambda$-producto como el producto normalmente ordenado.

Estas dos nociones están muy relacionadas entre sí, como veremos en el siguiente resultado.

**Proposición 3.5.3.** *Sea $\phi : R \to R'$ un homomorfismo de álgebras de Lie conformes no lineales. Entonces para todo $\Delta \in \Gamma$ vale que*

$$\tilde{\phi}(\mathcal{M}_\Delta(R)) \subseteq \mathcal{M}_\Delta(R'). \tag{3.5.3}$$

*En particular, $\phi$ induce un homomorfismo de álgebras de vértices $\psi : U(R) \to U(R')$.*

*Demostración:* Dados $A, D \in \mathcal{T}(R)$ y $b, c \in R$ tales que se cumple que $\Delta(A) + \Delta(b) + \Delta(c) + \Delta(D) \le \Delta$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\tilde{\phi}\left(A \otimes \left((b \otimes c - c \otimes b) \otimes D - N\left(\int_{-T}^{0} L_\lambda(b,c)\, d\lambda, D\right)\right)\right) \\
&= \tilde{\phi}(A) \otimes \left((\phi(b) \otimes \phi(c) - \phi(c) \otimes \phi(b)) \otimes \tilde{\phi}(D) - N'\left(\int_{-T}^{0} L'_\lambda(\phi(b), \phi(c))\, d\lambda, \tilde{\phi}(D)\right)\right) \\
&\quad - \tilde{\phi}(A) \otimes \left(\tilde{\phi}\left(N\left(\int_{-T}^{0} L_\lambda(b,c)\, d\lambda, D\right)\right) - N'\left(\int_{-T}^{0} \tilde{\phi}(L_\lambda(b,c))\, d\lambda, \tilde{D}\right)\right) \\
&\quad - \tilde{\phi}(A) \otimes N'\left(\int_{-T}^{0} \left(\tilde{\phi}(L_\lambda(b,c)) - L'_\lambda(\phi(b), \phi(c))\right) d\lambda, \tilde{\phi}(D)\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para probar (3.5.3) basta con ver que los tres términos de la derecha en esta igualdad están en $\mathcal{M}_\Delta(R')$. Para el primero de ellos esto ocurre por definición, y porque $\tilde{\phi}$ preserva la $\Gamma$-graduación. El segundo término puede escribirse como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\phi}(A) \otimes \left(\tilde{\phi}\left(N\left((-T)^{(n+1)}(b_{(n)}c), D\right)\right) - N'\left((-T)^{(n+1)}(\phi(b)_{(n)}\phi(c)), \tilde{D}\right)\right).$$

Por (3.5.1), el grado de cada uno de estos sumandos es menor o igual a

$$\begin{aligned}
\Delta(\tilde{\phi}(A)) + \Delta((-T)^{(n+1)}(b_{(n)}c)) + \Delta(D) &= \Delta(A) + \Delta(b_{(n)}c) + \Delta(D) \\
&< \Delta(A) + \Delta(b) + \Delta(c) + \Delta(D) \\
&\le \Delta,
\end{aligned}$$

así que este segundo término está en $\mathcal{M}_\Delta(R')$. Finalmente, puesto que por (3.5.1) existe un $\Delta' < \Delta(b) + \Delta(c)$ tal que

$$\int_{-T}^{0} \left(\tilde{\phi}(L_\lambda(b,c)) - L'_\lambda(\phi(b), \phi(c))\right) d\lambda \in \mathcal{M}_{\Delta'}(R'),$$

podemos hacer uso de (3.4.6) y concluir que el tercer término también está en $\mathcal{M}_\Delta(R')$.

Esto concluye la prueba de (3.5.3). Gracias a esta inclusión, podemos definir un mapa $\psi : U(R) \to U(R')$ mediante

$$\psi(\pi(A)) = \pi'(\phi(A)) \quad \forall\, A \in \mathcal{T}(R),$$

con $\pi, \pi'$ las respectivas proyecciones canónicas. Es inmediato a partir de las definiciones (3.4.16) y (3.4.17) chequear que esta aplicación es un homomorfismo de álgebras de vértices. $\square$

En la siguiente Proposición veremos la propiedad universal que satisface $U(R)$, de la cual deriva su nombre.

**Proposición 3.5.4.** *Sean $R$ un álgebra de Lie conforme no lineal y $V$ un álgebra de vértices. Sea $\phi : R \to V$ un homomorfismo de $\mathbb{C}[T]$-módulos tal que si lo extendemos a una aplicación $\mathbb{C}$-lineal $\tilde{\phi} : \mathcal{T}(R) \to V$ mediante $\tilde{\phi}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = :\phi(a_1) \cdots \phi(a_n):$, se tiene que*

$$\tilde{\phi}(L_\lambda(a, b)) = [\phi(a)_\lambda \phi(b)] \quad \forall\, a, b \in R. \tag{3.5.4}$$

*Entonces existe un único homomorfismo de álgebras de vértices $\psi : U(R) \to V$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
U(R) \arrow[dr, "\psi"] & \\
R \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\phi"'] & V
\end{tikzcd}$$

*Demostración:* Primero, es necesario ver que la aplicación $\tilde{\phi} : \mathcal{T}(R) \to V$ cumple que

$$\tilde{\phi}(N(A, B)) = :\tilde{\phi}(A)\tilde{\phi}(B): \quad \text{y} \quad \tilde{\phi}(L_\lambda(A, B)) = [\tilde{\phi}(A)_\lambda \tilde{\phi}(B)] \tag{3.5.5}$$

para todos $A, B \in \mathcal{T}(R)$. Esto puede hacerse fácilmente por inducción en $\Delta = \Delta(A) + \Delta(B)$, puesto que para $A, B \in R$ las igualdades se cumplen por hipótesis, y para el resto de los casos pueden usarse las fórmulas (3.3.2), (3.3.3), (3.3.6) y (3.3.7) para poder utilizar la hipótesis inductiva.

Ahora podemos definir el mapa $\psi : U(R) \to V$ mediante

$$\psi(\pi(A)) = \tilde{\phi}(A) \quad \forall A \in \mathcal{T}(R).$$

Éste se encuentra bien definido porque $\tilde{\phi}\,(\mathcal{M}(R)) = 0$, y esto a su vez ocurre debido a la hipótesis (3.5.4), puesto que

$$\begin{aligned}
&\tilde{\phi}\left(A \otimes \left((b \otimes c - c \otimes b) \otimes D - N\left(\int_{-T}^{0} L_\lambda(b,c)\,d\lambda, D\right)\right)\right) = \\
&= :\tilde{\phi}(A)\left(:\left(:\phi(b)\phi(c): - :\phi(c)\phi(b): - \int_{-T}^{0} [\phi(b)_\lambda \phi(c)]\,d\lambda\right)\tilde{\phi}(D):\right): \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad vale por (2.6.5). Además, esta aplicación es un homomorfismo de álgebras de vértices gracias a (3.5.5). La unicidad es inmediata. □

*Observación* 3.5.5. Si $R$ es un álgebra de Lie conforme (lineal), entonces la propiedad universal dada por la Proposición 3.1.4 se deduce de la que acabamos de ver, puesto que si $\phi : R \to W$ es un homomorfismo de álgebras conformes, entonces se cumple la condición (3.5.4).

# 4. Una generalización del Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt

En este capítulo daremos un resultado análogo al Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (el cual se cumple para álgebras de Lie), de manera tal que se pueda extender su validez a las álgebras de Lie conformes no lineales estudiadas en el capítulo anterior. Para ello, seguiremos basándonos en el artículo [DSK].

Recordemos que este Teorema establece lo siguiente:

**Teorema (PBW):** Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, y sea $\mathcal{A} = \{a_i : i \in \mathcal{I}\}$ una base ordenada de $\mathfrak{g}$. Sea $U(\mathfrak{g})$ el álgebra universal envolvente asociada a $\mathfrak{g}$, y sea $\pi : \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ la proyección canónica. Entonces el conjunto

$$\mathcal{B} \,=\, \big\{\, \pi\,(a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_n}) \,:\, i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n \,,\, n \in \mathbb{Z}_+ \big\}$$

constituye una base para $U(\mathfrak{g})$.

Para comenzar, tomemos un álgebra de Lie conforme no lineal $R$, y sea $\mathcal{A} = \{a_i : i \in \mathcal{I}\}$ una base ordenada de la misma.

Definimos el conjunto auxiliar

$$\tilde{\mathcal{B}} \,=\, \big\{\, a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_n} \,:\, i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n \,,\, n \in \mathbb{Z}_+ \big\}.$$

A su vez, denotaremos $\tilde{\mathcal{B}}[\Delta] = \tilde{\mathcal{B}} \cap \mathcal{T}(R)[\Delta]$ y $\tilde{\mathcal{B}}_\Delta = \tilde{\mathcal{B}} \cap \mathcal{T}_\Delta(R)$ para cada $\Delta \in \Gamma$. Finalmente, definimos el conjunto que queremos probar que es base de $U(R)$ como $\mathcal{B} = \pi(\tilde{\mathcal{B}})$. Un álgebra de vértices $V$ tal que $\mathcal{B}$ es una base de $V$ sobre $\mathbb{C}$ se dice *libre*[8] sobre $R$.

En el siguiente lema veremos que $\mathcal{B}$ es un conjunto de generadores de $U(R)$.

**Lema 4.1.** *Para todo $\Delta \in \Gamma$ vale que todo elemento $E \in \mathcal{T}_\Delta(R)$ puede descomponerse como*

$$E = P + M, \tag{4.1}$$

*donde $P \in \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \tilde{\mathcal{B}}_\Delta$ y $M \in \mathcal{M}_\Delta(R)$. Es decir, vale que*

$$\mathcal{T}_\Delta(R)/\mathcal{M}_\Delta(R) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \pi(\tilde{\mathcal{B}}_\Delta) \quad \forall\, \Delta \in \Gamma.$$

*Por lo tanto, se cumple que*

$$U(R) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \mathcal{B}.$$

[8] Ver [DSK, Definition 2.6]

*Demostración:* Basta con probar que vale (4.1) para monomios en $\mathcal{T}(R)[\Delta]$, es decir, elementos de la forma

$$E = a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_n} \in \mathcal{T}(R)[\Delta], \tag{4.2}$$

donde $\Delta \in \Gamma$ y $a_{j_1}, ..., a_{j_n} \in \mathcal{A}$. Definimos el *número de inversiones* de $E$ como

$$d(E) = \left|\left\{(p, q) \,:\, 1 \leq p < q \leq n \text{ y } j_p > j_q\right\}\right|.$$

Probaremos que $E$ posee una descomposición como en (4.1) mediante inducción en el conjunto de todos los pares de la forma $(\Delta, d)$ tales que existe algún $E \in \mathcal{T}(R)[\Delta]$ con $d = d(E)$, ordenado lexicográficamente.

Sea $(\Delta, d)$ fijo en este conjunto, y asumamos que todo par $(\tilde{\Delta}, \tilde{d})$ menor a él satisface la hipótesis inductiva. Tomemos un $E \in \mathcal{T}(R)[\Delta]$ de la forma (4.2) con $d = d(E)$. Si $d = 0$, entonces $E \in \tilde{\mathcal{B}}[\Delta]$, y no hay nada que probar. Supongamos entonces que $d \geq 1$, y sea $p \in \{1, ..., n-1\}$ tal que $j_p > j_{p+1}$. Ahora, por definición de $\mathcal{M}_\Delta(R)$, tenemos que

$$\begin{aligned} E \equiv{} & a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_{p+1}} \otimes a_{j_p} \otimes \cdots a_{j_n} \\ & + a_{j_1} \otimes \cdots \otimes N\left(\int_{-T}^{0} [a_{j_p}\,{}_\lambda\, a_{j_{p+1}}]\, d\lambda, a_{j_{p+2}} \otimes \cdots \otimes a_{j_n}\right) \qquad \bmod \mathcal{M}_\Delta(R). \end{aligned}$$

El primer término en el lado derecho posee grado $\Delta$ y $d-1$ inversiones, mientras que el segundo término pertenece a $\mathcal{T}_{\Delta'}(R)$ para algún $\Delta' < \Delta$, así que por hipótesis inductiva ambos poseen una descomposición. $\square$

Consideremos ahora el espacio vectorial $\tilde{\mathcal{U}}$ cuya base es el conjunto $\tilde{\mathcal{B}}$, es decir

$$\tilde{\mathcal{U}} = \bigoplus_{A \in \tilde{\mathcal{B}}} \mathbb{C}A.$$

A través de los siguientes lemas, veremos que $U(R)$ es isomorfo a $\tilde{\mathcal{U}}$ como espacio vectorial, con lo cual tendremos probado el resultado al que queremos llegar.

**Lema 4.2.** *Existe una única aplicación* $\mathbb{C}$*-lineal* $\sigma : \mathcal{T}(R) \to \tilde{\mathcal{U}}$ *tal que*

1. $\sigma(A) = A$ *para todo* $A \in \tilde{\mathcal{B}}$,
2. $\mathcal{M}(R) \subseteq \operatorname{Ker} \sigma$.

*En particular,* $\sigma$ *induce un mapa* $\overline{\sigma} : U(R) \to \tilde{\mathcal{U}}$ *que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} T(R) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{\mathcal{U}} \\ U(R) \arrow[ur, "\overline{\sigma}"'] & \end{tikzcd}$$

*Demostración:* Para probar esto, veremos que existe una única colección de aplicaciones $\mathbb{C}$-lineales $\sigma_\Delta : \mathcal{T}_\Delta(R) \to \tilde{\mathcal{U}}$ con $\Delta \in \Gamma$ tal que:

(1) $\sigma_0(1) = 1$, y si $\Delta' \leq \Delta$, entonces $\sigma_\Delta\big|_{\mathcal{T}_{\Delta'}(R)} = \sigma_{\Delta'}$,

(2) $\sigma(A) = A$ para todo $A \in \tilde{\mathcal{B}}[\Delta]$,

(3) $\mathcal{M}_\Delta(R) \subseteq \operatorname{Ker} \sigma_\Delta$.

Si tal colección existiera, simplemente definiríamos el mapa $\sigma : \mathcal{T}(R) \to \tilde{\mathcal{U}}$ como

$$\sigma\big|_{\mathcal{T}_\Delta(R)} = \sigma_\Delta \quad \forall\, \Delta \in \Gamma.$$

La condición $\sigma_0(1) = 1$ determina por completo a $\sigma_0$, y como $\mathcal{M}_0(R) = 0$, esta aplicación satisface todos los otros requerimientos. Tomemos ahora un $\Delta > 0$, y supongamos que $\sigma_{\Delta'}$ está unívocamente definida y satisface las condiciones (1)-(3) para todo $\Delta' < \Delta$.

*Unicidad de $\sigma_\Delta$.* Dado un monomio $E = a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_n} \in \mathcal{T}(R)[\Delta]$, mostraremos que $\sigma_\Delta(E)$ está unívocamente definido por inducción en el mismo conjunto que utilizamos en la demostración del Lema anterior, dado por los pares $(\Delta, d)$ con el orden lexicográfico. Para $d = 0$, tenemos que $E \in \tilde{\mathcal{B}}_\Delta$, así que $\sigma_\Delta(E) = E$ por la condición (2). Tomemos entonces $d \geq 1$, y sea $p \in \{1, ..., n-1\}$ el menor entero tal que $j_p > j_{p+1}$ (es decir, el correspondiente a la inversión que se encuentra más a la izquierda en $E$). Por la condición (3) y por la definición de $\mathcal{M}_\Delta(R)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta(E) &= \sigma_\Delta(a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_{p+1}} \otimes a_{j_p} \otimes \cdots \otimes a_{j_n}) \\ &\quad + \sigma_\Delta\left(a_{j_1} \otimes \cdots \otimes N\left(\int_{-T}^{0} [a_{j_p\,\lambda} a_{j_{p+1}}]\, d\lambda, a_{j_{p+2}} \otimes \cdots \otimes a_{j_n}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ahora bien, observemos que $a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_{p+1}} \otimes a_{j_p} \otimes \cdots \otimes a_{j_n}$ es de grado $\Delta$ y posee $d-1$ inversiones, mientras que el tensor en el cual está siendo evaluada $\sigma_\Delta$ en el segundo término posee grado menor estricto que $\Delta$. Por lo tanto, la hipótesis inductiva nos permite afirmar que ambos están unívocamente definidos por las condiciones (1)-(3), y entonces $\sigma_\Delta(E)$ también lo está.

*Existencia de $\sigma_\Delta$.* Es posible definir recursivamente la aplicación $\mathbb{C}$-lineal $\sigma_\Delta$, partiendo de imponer la condición (2) y aplicando sucesivamente la fórmula (4.3) (respetando el orden lexicográfico). De esta manera, obtenemos para cada $\Delta \in \Gamma$ un mapa que satisface las condiciones (1) y (2), así que sólo falta probar que vale (3).

Por definición de $\mathcal{M}_\Delta(R)$, basta con ver que para todo monomio $E = a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_n} \in \mathcal{T}(R)[\Delta]$ y para todo $q \in \{1, ..., n-1\}$ vale que

$$\sigma_\Delta\left(a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_{q-1}} \otimes \operatorname{sn}\left(a_{j_q}, a_{j_{q+1}}, a_{j_{q+2}} \otimes \cdots \otimes a_{j_n}\right)\right) = 0. \tag{4.4}$$

Por la antisimetría del $\lambda$-corchete, podemos asumir que $j_q \geq j_{q+1}$. Además, si ocurriera que $j_q = j_{q+1}$, tendríamos que $\int_{-T}^{0} [a_{j_q\,\lambda}\, a_{j_{q+1}}]\, d\lambda = 0$ (por la Proposición 3.1.1), así que en este caso (4.4) se satisface trivialmente. Por lo tanto, podemos asumir que $(j_q, j_{q+1})$ es una inversión de $E$, y en particular $d = d(E) \geq 1$.

Queremos probar (4.4) por inducción. Sea $(j_p, j_{p+1})$ la inversión de $E$ que se encuentra más a la izquierda. Si $p = q$, (4.4) vale por construcción. Luego basta con analizar los casos $p \leq q-2$ y $p = q-1$.

*Caso 1.* Supongamos que $p \leq q-2$. Para simplificar los cálculos, reescribiremos

$$E = A \otimes c \otimes b \otimes D \otimes f \otimes e \otimes H,$$

donde $A = a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_{p-1}}$, $c = a_{j_p}$, $b = a_{j_{p+1}}$, $D = a_{j_{p+2}} \otimes \cdots \otimes a_{j_{q-1}}$, $f = a_{j_q}$, $e = a_{j_{q+1}}$ y $H = a_{j_{q+2}} \otimes \cdots \otimes a_{j_n}$. Además, haremos uso de la aplicación $L : \mathcal{T}(R) \otimes \mathcal{T}(R) \to \mathcal{T}(R)$ definida por (3.4.18). Ahora el lado izquierdo de (4.4) puede escribirse como

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(A \otimes c \otimes b \otimes D \otimes f \otimes e \otimes H) - \sigma_\Delta(A \otimes c \otimes b \otimes D \otimes e \otimes f \otimes H) \\ - \sigma_\Delta(A \otimes c \otimes b \otimes D \otimes N(L(e,f), H)).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Por definición de $\sigma_\Delta$, el primer término de (4.5) es igual a

$$\begin{aligned}&\sigma_\Delta(A \otimes b \otimes c \otimes D \otimes f \otimes e \otimes H) \\ &+ \sigma_\Delta(A \otimes N(L(c,b), D \otimes f \otimes e \otimes H)).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Por otro lado, $A \otimes c \otimes b \otimes D \otimes e \otimes f \otimes H$ tiene grado $\Delta$ y $d-1$ inversiones, por lo que podemos usar la hipótesis inductiva para reescribir el segundo término de (4.5) como

$$\begin{aligned}&- \sigma_\Delta(A \otimes b \otimes c \otimes D \otimes e \otimes f \otimes H) \\ &- \sigma_\Delta(A \otimes N(L(c,b), D \otimes e \otimes f \otimes H)).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Por último, como $A \otimes c \otimes b \otimes D \otimes N(L(e,f), H)$ posee grado $\Delta' < \Delta$, podemos usar la condición $\sigma_\Delta\big|_{\mathcal{T}_{\Delta'}(R)} = \sigma_{\Delta'}$ junto con la hipótesis inductiva para escribir el tercer término de (4.5) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}&- \sigma_\Delta(A \otimes b \otimes c \otimes D \otimes N(L(e,f), H)) \\ &- \sigma_\Delta(A \otimes N(L(c,b), D \otimes N(L(e,f), H))).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Combinando las expresiones (4.6), (4.7) y (4.8), resulta que (4.5) adopta la siguiente forma:

$$\sigma_\Delta(A \otimes b \otimes c \otimes D \otimes \operatorname{sn}(f,e,H)) + \sigma_\Delta(A \otimes N(L(c,b), D \otimes \operatorname{sn}(f,e,H))). \tag{4.9}$$

El primer término de (4.9) es cero debido a la hipótesis inductiva, puesto que $A \otimes b \otimes c \otimes D \otimes f \otimes e \otimes H$ tiene grado $\Delta$ y $d-1$ inversiones.

Por otra parte, en el segundo término de esta expresión, el argumento de $\sigma_\Delta$ pertenece a $\mathcal{M}_{\Delta'}(R)$ para algún $\Delta' < \Delta$, así que también se anula por la hipótesis inductiva. De esta manera (4.9) se anula, y por lo tanto vale (4.4).

*Caso 2.* Supongamos que $p = q-1$. Para mayor simplicidad, escribiremos

$$E = A \otimes c \otimes b \otimes a \otimes D,$$

en donde $A = a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_{p-1}}$, $c = a_{j_p}$, $b = a_{j_{p+1}}$, $a = a_{j_{p+2}}$ y $D = a_{j_{p+3}} \otimes \cdots \otimes a_{j_n}$. Ahora el lado izquierdo de la expresión (4.4) puede reescribirse como

$$\sigma_\Delta(A \otimes c \otimes b \otimes a \otimes D) - \sigma_\Delta(A \otimes c \otimes a \otimes b \otimes D) - \sigma_\Delta(A \otimes c \otimes N(L(b,a),D)). \tag{4.10}$$

Mediante la aplicación reiterada de la hipótesis inductiva, podemos realizar las siguientes manipulaciones en el primer término de (4.10):

$$\begin{aligned}
\sigma_\Delta(A \otimes c \otimes b \otimes a \otimes D) &= \sigma_\Delta(A \otimes b \otimes c \otimes a \otimes D) + \sigma_\Delta(A \otimes N(L(c,b), a \otimes D)) \\
&= \sigma_\Delta(A \otimes b \otimes a \otimes c \otimes D) + \sigma_\Delta(A \otimes b \otimes N(L(c,a),D)) \\
&\qquad + \sigma_\Delta(A \otimes N(L(c,b), a \otimes D)) \\
&= \sigma_\Delta(A \otimes a \otimes b \otimes c \otimes D) + \sigma_\Delta(A \otimes N(L(b,a), c \otimes D)) \\
&\quad + \sigma_\Delta(A \otimes b \otimes N(L(c,a),D)) + \sigma_\Delta(A \otimes N(L(c,b), a \otimes D)).
\end{aligned}$$

Similarmente, en el segundo término de (4.10) podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned}
-\sigma_\Delta(A \otimes c \otimes a \otimes b \otimes D) &= -\sigma_\Delta(A \otimes a \otimes c \otimes b \otimes D) - \sigma_\Delta(A \otimes N(L(c,a), b \otimes D)) \\
&= -\sigma_\Delta(A \otimes a \otimes b \otimes c \otimes D) - \sigma_\Delta(A \otimes a \otimes N(L(c,b),D)) \\
&\qquad - \sigma_\Delta(A \otimes N(L(c,a), b \otimes D)).
\end{aligned}$$

De esta manera, luego de cancelar el sumando $\sigma_\Delta(A \otimes a \otimes b \otimes c \otimes D)$ que se repite, podemos expresar a (4.10) como

$$\begin{aligned}
&\sigma_\Delta(A \otimes (N(L(c,b), a \otimes D) - a \otimes N(L(c,b),D))) \\
&+ \sigma_\Delta(A \otimes (b \otimes N(L(c,a),D) - N(L(c,a), b \otimes D))) \\
&+ \sigma_\Delta(A \otimes (N(L(b,a), c \otimes D) - c \otimes N(L(b,a),D))).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Pero si observamos que

$$\begin{aligned}
&A \otimes (N(L(c,b), a \otimes D) - a \otimes N(L(c,b),D)) = \\
&\quad - A \otimes N(L(a, L(c,b)), D) + A \otimes \mathrm{sn}(a, L(c,b), D),
\end{aligned}$$

y que algo similar puede decirse acerca del segundo y tercer términos de (4.11), podemos usar la hipótesis inductiva y deducir que la expresión (4.11) puede reescribirse como

$$\sigma_\Delta\big(A \otimes \big(N(L(b, L(c,a)), D) - N(L(a, L(c,b)), D) - N(L(c, L(b,a)), D)\big)\big). \tag{4.12}$$

Pero por otro lado, gracias a (3.4.19) y (3.4.20) tenemos que

$$\begin{aligned} L(b,L(c,a)) - L(a,L(c,b)) - L(c,L(b,a)) &\equiv L(L(b,c),a) - L(a,L(c,b)) \\ &\equiv L(L(b,c),a) + L(a,L(b,c)) \\ &\equiv 0 \qquad\qquad \operatorname{mod} \mathcal{M}_{\tilde{\Delta}'}(R), \end{aligned}$$

para algún $\tilde{\Delta}' < \Delta(a) + \Delta(b) + \Delta(c)$, y gracias a ello existe un $\Delta' < \Delta$ tal que el argumento de $\sigma_\Delta$ en (4.12) está en $\mathcal{M}_{\Delta'}(R)$. Por lo tanto, debido a la hipótesis inductiva y a la condición (1), resulta que la expresión (4.12) se anula, y esto muestra que (4.4) vale. □

**Lema 4.3.** *Si $\sigma$ es la función dada por el Lema 4.2, entonces vale que el mapa $\overline{\sigma} : U(R) \to \tilde{\mathcal{U}}$ inducido por $\sigma$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

*Demostración:* Por definición, $\overline{\sigma}$ es sobreyectiva. Por otro lado, existe una correspondencia natural $\overline{\pi} : \tilde{\mathcal{U}} \to U(R)$ que le asigna a cada elemento $A = a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_n} \in \tilde{\mathcal{B}}$ el elemento $\overline{\pi}(A) =: a_{i_1} \cdots a_{i_n} : \in \mathcal{B} \subseteq U(R)$. Por el Lema 4.1, esta aplicación también es sobreyectiva. Además, la composición

$$\widetilde{\mathcal{U}} \xrightarrow{\overline{\pi}} U(R) \xrightarrow{\overline{\sigma}} \widetilde{\mathcal{U}}$$

es la identidad (por definición de $\overline{\sigma}$ y $\overline{\pi}$). De aquí es sencillo concluir que tanto $\overline{\sigma}$ como $\overline{\pi}$ son biyectivas. □

Los lemas anteriores tienen como corolario inmediato el siguiente resultado, el cual como ya hemos mencionado constituye una generalización del Teorema de Poincaré-Birkoff-Witt enunciado al comienzo de este capítulo.

**Teorema 4.4.** *Sea $R$ un álgebra de Lie conforme no lineal, y sea $\mathcal{A} = \{a_i : i \in \mathcal{I}\}$ una base ordenada de $R$. Sea $U(R)$ el álgebra de vértices universal envolvente asociada a $R$ (dada por el Teorema 3.4.4), y sea $\pi : \mathcal{T}(R) \to U(R)$ la proyección canónica. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{B} = \left\{ \pi\left(a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_n}\right) : i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n\, ,\, n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

*constituye una base para $U(R)$.*

*Es decir, $U(R)$ es un álgebra de vértices libre sobre $R$.*

## Referencias bibliográficas


[BD] Beilinson, A. y V. Drinfeld, *Chiral algebras*, AMS Colloquium Publications, vol. 51, 2004.

[BK] Bakalov, B. y V. Kac, *Field algebras*, Int. Math. Res. Not **3,** 123-159 (2003)

[DSK] De Sole, A. y V. Kac, *Freely generated vertex algebras and non-linear Lie conformal algebras*, Commun. Math. Phys. **254,** 659-694 (2005)

[K] Kac, V., *Vertex algebras for beginners*, AMS University Lecture Series, vol. 10, 1996. Segunda edición, 1998.

[Z] Zamolodchikov, A., *Infinite extra symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory*, Teoret. Mat. Fiz. **65(3),** 347-359 (1985)