

Transmisión de estados en cadenas de espines con ruido dinámico.

Trabajo especial de Licenciatura

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación,
Universidad Nacional de Córdoba

Julián Roberto Gurgo
Director: Omar Osenda

Diciembre 15, 2016



Transmisión de estados en cadenas de espines con ruido dinámico de Gurgo, Julián Roberto
se distribuye bajo una
[Licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-SinDerivar 2.5 Argentina.](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/arg/)

Agradecimientos

Quisiera dar las gracias en primer lugar a mi familia, por su apoyo constante a lo largo de estos años, y por brindarme todo lo necesario para que este sueño hoy sea una realidad.

En segundo lugar, quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi director, Omar, por su infinita paciencia, su dedicación, y por todo lo que me enseñó tanto durante la carrera, como durante el desarrollo de este trabajo.

Quiero agradecer a mis amigos, presentes durante todo este tiempo. Gracias por tantas risas compartidas, alegrías, y buenos momentos.

Agradezco al tribunal por tomarse el tiempo de leer, corregir este trabajo, y principalmente por sus valiosas sugerencias.

Gracias a todos y cada uno de los profesores de la F.A.Ma.F, por todo lo que aprendí gracias a ellos. No sólo enseñan en un aula, sino también con su ejemplo.

A mi país, por brindarme educación, y tantas cosas más.

A todos los que estuvieron y me brindaron su apoyo incondicional, gracias.

Abstract

En este trabajo se estudian cadenas de espines de transmisión perfecta (PST) y cadenas controladas por el borde (Boundary Controlled), en presencia de ruido dinámico. Para ello se presentan dos maneras de introducir dicho ruido. A continuación se estudian propiedades de escaleo para la fidelidad en cadenas PST para ambos modelos. Luego, se estudia la distinguibilidad de estados transmitidos por ambos tipos de cadenas, en presencia de uno de los tipos de ruido dinámico descritos.

Abstract

In this work two types of spin chains are studied, those known as “perfect state transfer” (PST) chains and “boundary controlled”, in the presence of dynamical noise. In order to introduce that noise, two different models are described. Then, we will study scaling properties for fidelity in PST chains, for both models of noise. Finally, we study the distinguishability of transferred states, for both types of chains, in the presence of one type of dynamical noise.

Palabras clave: Dinámica Cuántica, Ruido Dinámico, Transmisión de estados Cuánticos, Cadenas de espines, Propiedades de escaleo.

Clasificación:

03.65-w Quantum Mechanics

03.67.Hk Quantum Communication

75.10.Pq Spin chain models

Contents

1	Introducción	8
2	Marco Teórico	12
2.1	Matriz Densidad	12
2.2	Cadenas de Espín	13
2.3	El Hamiltoniano XX	14
2.4	Transmisión de estados en cadenas de espín	15
2.5	Fidelidad como figura de mérito	16
2.6	Transmisión perfecta de estados (PST) en cadenas “Fully engineered”	18
2.7	Transmisión de estados optimizada en cadenas controladas por los bordes (Boundary Controlled)	20
2.8	Ruido dinámico	21
2.8.1	Método de funciones de onda Monte Carlo	22
2.8.2	Primer modelo de ruido: ruido espectral	23
2.8.3	Segundo modelo de ruido: ruido localizado	24
2.9	Medida de distinguibilidad para estados mixtos	25
3	Propiedades de escaleo para la fidelidad al tiempo de transmisión con modelo de ruido espectral	27
3.1	El problema	27
3.2	Método de trabajo	27
3.3	Propiedades de escaleo para la fidelidad	29
3.4	Propiedades de escaleo para el ancho de los picos de fidelidad	32
4	Propiedades de escaleo para la fidelidad al tiempo de transmisión con modelo de ruido localizado	34
4.1	Propiedades de escaleo para la fidelidad	35
4.2	Propiedades de escaleo para el ancho de los picos de fidelidad	36
5	Distinguibilidad de estados transmitidos usando cadenas de trans- misión perfecta (PST)	39
5.1	Estados que inicialmente difieren en 0,75	40
6	Distinguibilidad de estados transmitidos usando cadenas contro- ladas por los bordes	43
6.1	Evolución con paso temporal $\Delta t = 0,05$	43
6.1.1	Estados que inicialmente difieren en 0,75	43
6.2	Evolución con paso temporal $\Delta t = 0,005$	44
6.2.1	Estados que inicialmente difieren en 0,75	45
7	Conclusiones y perspectivas a futuro	47
A	Parámetros A0, A1, A2 del ajuste de la fidelidad en función de λ, para cadenas PST.	48
A.1	Modelo de ruido espectral	48
A.2	Modelo de ruido localizado	51
B	Fidelidad reducida en cadenas PST	53
B.1	Estados con fidelidad reducida inicial de 0,80	53
B.2	Estados con fidelidad reducida inicial de 0,85	54
B.3	Estados con fidelidad reducida inicial de 0,90	55

C Fidelidad reducida en cadenas BC	56
C.1 Evolución con paso temporal $\Delta t = 0,05$	56
C.1.1 Estados con fidelidad reducida inicial 0,80	56
C.1.2 Estados con fidelidad reducida inicial de 0,85	57
C.1.3 Estados con fidelidad reducida inicial de 0,90	58
C.2 Evolución con paso temporal $\Delta t = 0,005$	59
C.2.1 Estados con fidelidad reducida inicial de 0,80	59
C.2.2 Estados con fidelidad reducida inicial 0,85	60
C.2.3 Estados con fidelidad reducida inicial de 0,90	61

List of Figures

1	Transferencia de polarización en lisina	9
2	Qubits superconductores	9
3	Arreglo de puntos cuánticos acoplados para la transmisión de un electrón.	10
4	Ejemplo cadena de espines	14
5	Esfera de Bloch	15
6	Fidelidad en cadenas homogéneas para diferentes largos	17
7	Espectro para cadenas PST	19
8	Fidelidad en cadenas PST	20
9	Espectro para cadena BC con α_{OPT}	21
10	Fidelidad para cadena BC con α_{OPT}	21
11	Esquema de transmisión por un canal ruidoso	22
12	Espectro para cadena PST diferentes largos de cadena	28
13	Espectro para cadena Boundary controlled diferentes largos	28
14	Fidelidad para cadena PST largo N=50 con modelo de ruido espectral	29
15	Fidelidad para cadena PST largo N=350 con modelo de ruido espectral	30
16	Fidelidad para cadenas PST de largo impar con modelo de ruido espectral.	30
17	Scaling fidelidad para cadenas PST con modelo de ruido espectral.	31
18	Anchos de los picos de fidelidad para cadenas PST con modelo de ruido espectral.	32
19	Scaling anchos de los picos de fidelidad para cadenas PST de largo impar para primer modelo de ruido.	33
20	Fidelidad para cadena PST con ruido localizado, largo 51	34
21	Fidelidad para cadena PST con ruido localizado, largo 401	35
22	Fidelidad para cadenas PST con ruido localizado, en función de la intensidad del ruido.	35
23	Scaling para la fidelidad en cadenas PST con ruido dinámico del segundo modelo, en función de la intensidad del ruido.	36
24	Anchos de los picos de fidelidad, para diferentes largos, en función de la intensidad del ruido, para modelo de ruido localizado.	37
25	Scaling para los anchos en cadenas PST para diferentes largos, en función de la intensidad del ruido, para segundo modelo de ruido	37
26	Fidelidad reducida para estados inicialmente diferentes en 0,75, en función de N	40
27	Fidelidad reducida para estados inicialmente diferentes en 0,75, en función de λ	40
28	Fidelidad en cadenas PST en función de λ , junto al límite de fidelidad 2/3 de transmisión clásica de un estado cuántico.	41
29	Fidelidad reducida para estados inicialmente diferentes en 0,75, en función de N	43
30	Fidelidad reducida para estados inicialmente diferentes en 0,75, en función de λ	44
31	Fidelidad Reducida para estados inicialmente diferentes en 0,75, en función de N	45
32	Fidelidad reducida para estados inicialmente diferentes en 0,75, en función de λ	45
33	Parámetro A0 para cadenas pares del ajuste de $F(\lambda)$	48
34	Parámetro A0 para cadenas impares del ajuste de $F(\lambda)$	48

35	Parámetro A1 para cadenas pares del ajuste de $F(\lambda)$	49
36	Parámetro A1 para cadenas impares del ajuste de $F(\lambda)$	49
37	Parámetro A2 para cadenas pares del ajuste de $F(\lambda)$	50
38	Parámetro A2 para cadenas impares del ajuste de $F(\lambda)$	50
39	Comportamiento parámetro A0 de el ajuste $F(\lambda)$ en función de N .	51
40	Comportamiento parámetro A1 de el ajuste $F(\lambda)$ en función de N .	51
41	Comportamiento parámetro A2 de el ajuste $F(\lambda)$ en función de N .	52
42	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,80, en función de N	53
43	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,80, en función de λ	53
44	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de N	54
45	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de λ	54
46	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,90, en función de N	55
47	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,90, en función de λ	55
48	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,80, en función de N	56
49	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,80, en función de λ	56
50	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de N	57
51	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de λ	57
52	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,90, en función de N	58
53	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,90, en función de λ	58
54	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,80, en función de N	59
55	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,80, en función de λ	59
56	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de N	60
57	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de λ	60
58	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,90, en función de N	61
59	Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,90, en función de λ	61

1 Introducción

Para cualquier tipo de hardware computacional, los buses o canales son una pieza fundamental. Su función es permitir la conexión entre diferentes subsistemas de un sistema digital, transmitiendo información entre los mismos. En particular, son parte indispensable para el desarrollo de hardware en computación cuántica. Un modelo simple para dichos canales es el de una cadena de sistemas de dos niveles acoplados entre sí. Estos sistemas de dos niveles se inspiran en los conocidos bits clásicos, pero por ser bits cuánticos, o *qubits*, presentan propiedades muy interesantes, como por ejemplo, la posibilidad de almacenar y transmitir información en estados que son superposición de los dos niveles mencionados. Además, la existencia de estados entrelazados permite explotar sus características particulares para la transmisión de información por estos canales.

Entre los sistemas más estudiados para jugar el rol de canal están las cadenas de sistemas físicos que pueden ser aproximados por sistemas de dos niveles. De esta forma, mediante la dinámica propia del sistema, regida por su Hamiltoniano, se puede transmitir un estado en el cual se codifica información desde un extremo de la cadena al otro. Diversos sistemas han sido propuestos para implementar estos canales. Las primeras implementaciones realizadas experimentalmente para testear y estudiar los protocolos de transmisión fueron en el ámbito de la resonancia magnética nuclear (RMN), debido al grado de maduración de las tecnologías relacionadas (ver [9], capítulo 6). En particular estas tecnologías permiten implementar pulsos para realizar operaciones unitarias, así como también, proveen de formas de controlar hasta cierto punto la influencia del ambiente. Por ejemplo, en un trabajo del año 1997 [1], Mádi et al. estudiaron la transferencia de polarización entre átomos de ^{13}C de una molécula de lisina, mediante técnicas de resonancia magnética en estado líquido. Esta molécula consiste en una cadena lineal de 6 de dichos átomos, donde sólo utilizan para la transmisión de polarización a los carbonos alifáticos (5 de ellos). Mediante el uso de pulsos de radiofrecuencias, implementan un Hamiltoniano efectivo, de la forma:

$$H = 2\pi \sum_{i < j} \frac{J_{ij}}{2} (I_i^+ I_j^- + I_i^- I_j^+) \quad (1)$$

donde I_j^\pm son los operadores de espín dados correspondientes al núcleo j , dados por $I_j^\pm = I_j^x \pm iI_j^y$. De esta manera observan cómo polarización inicialmente transmitida al primer carbono de esta cadena, se transfiere hacia el último, y de nuevo al primero. En la figura 1 se observan sus resultados experimentales, y el resultado de simulaciones numéricas para este experimento. Las diferencias entre ambas son atribuidas a imperfecciones experimentales al generar el Hamiltoniano, inhomogeneidades en los campos magnéticos utilizados, y efectos de relajación. Es remarcable que este experimento fue realizado a una temperatura de 300K .

Por otro lado, hay diversos candidatos para hardware cuántico en estado sólido. Por ejemplo, el uso de centros de vacancia de nitrógeno en diamante (NV^-) como procesadores es prometedor, debido a que poseen tiempos largos de decoherencia aún a temperatura ambiente, y pueden manipularse utilizando técnicas ópticas ([2, 3, 4]). Los centros NV^- consisten en defectos en la red de carbonos del diamante, donde hay un carbono faltante (vacancia) y a continuación, una impureza de nitrógeno. Hay trabajos que estudian la practicidad de conectar estos “procesadores” mediante el uso de impurezas de ^{15}N (isótopo de N con espín $1/2$) como canal, por ejemplo [2].

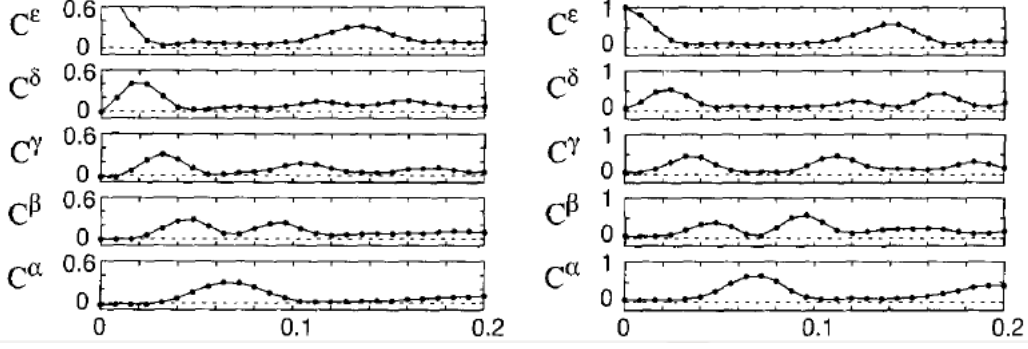


Figure 1: Transferencia de polarización en lisina. Los gráficos muestran polarización vs. tiempo. La figura izquierda corresponde a los resultados experimentales, y la derecha a simulaciones numéricas.

Otro de los sistemas de estado sólido propuestos son los qubits superconductores, que consisten en lazos de material superconductor, interrumpidos por juntas Josephson ([5]). Para ciertos valores de flujo magnético externo, se pueden obtener superposiciones de corrientes circulantes en ambos sentidos. Identificando estas direcciones de circulación con bits, se define el qubit para estos sistemas, que entonces pueden describirse como sistemas de dos niveles. En un trabajo del año 2006 [6] estudian cuatro qubits superconductores acoplados magnéticamente y vía juntas Josephson. Utilizando una técnica de medición conocida como IMT (del inglés impedance measure technique), miden cambios en la impedancia de un bobinado de Nb que rodea a los qubits, mientras modifican el flujo magnético cambiando las corrientes que lo generan (ver figura 2). De esta manera, logran encontrar experimentalmente los parámetros del Hamiltoniano del sistema (que es un Hamiltoniano de pseudoespín), constatando que la descripción teórica como sistemas de dos niveles está en completo acuerdo con las realizaciones experimentales.

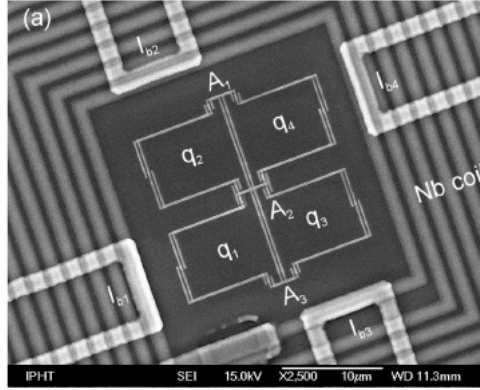


Figure 2: Arreglo de cuatro qubits superconductores (lazos q_1 , q_2 , q_3 y q_4), acoplados entre sí magnéticamente y mediante juntas Josephson A_1 , A_2 y A_3 . Se miden cambios de impedancia en el bobinado de Nb que rodea la muestra, mientras se cambian las corrientes que generan el flujo magnético que pasa a través de los lazos superconductores.

Otra forma de transmitir información consiste en enviar directamente el sistema en el cuál se codificó dicha información. Por ejemplo, podemos codificar información en el estado de polarización de un fotón, y enviarlo a un receptor. Otra posibilidad, puede ser la de transmitir un electrón en un arreglo de puntos cuánticos acoplados, como se estudia en [7]. En ese trabajo se simula numéricamente la propagación de un electrón en un arreglo de N puntos cuánticos acoplados (ver figura 3). Mediante la elección apropiada de los elementos de matriz de tunneling (lo cual

puede hacerse experimentalmente mediante potenciales eléctricos) se observa que un electrón puede moverse entre los extremos de este arreglo, sin deslocalizarse. Incluso cuando se estudia la influencia de imperfecciones, como por ejemplo, fluctuaciones aleatorias en los niveles de energía de los puntos y sus acoplos entre vecinos, la propagación coherente se mantiene durante varios periodos de oscilación.

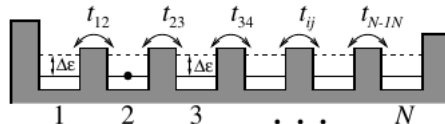


Figure 3: Esquema de un arreglo de puntos cuánticos acoplados para la transmisión de un electrón. Los elementos t_{ij} están relacionados a los elementos de la matriz de tunneling, y pueden seleccionarse de forma conveniente para que el electrón se propague sin deslocalizarse por este arreglo.

Para que el procesamiento de información cuántica sea posible, debemos poder transmitirla, almacenarla y convertirla de manera fidedigna. Sin embargo, como se comentó en los ejemplos anteriores, los medios de transmisión no son perfectos, y tenemos efectos de decoherencia que afectan tanto la supervivencia de la información como las distancias a las que se puede transmitir. Estos efectos se deben a la interacción del sistema que se usa para transmitir con uno o mas sistemas externos, a los cuales se llama *ambiente*. La interacción con el medio ambiente produce que la evolución temporal del sistema sea no unitaria. La ecuación de Linblad es la ecuación Markoviana mas general que describe este tipo de evolución. Es decir, pasamos de considerar la dinámica de un sistema aislado, regido por la ecuación de Liouville, $\dot{\rho}_s = -i[H_s, \rho_s]$, a la dinámica de un sistema abierto, regida por la ecuación maestra de Linblad:

$$\dot{\rho}_s = -i[H_s, \rho_s] - \frac{1}{2} \sum_k \gamma_k ([L_k \rho_s, L_k^\dagger] + [L_k, \rho_s L_k^\dagger])$$

donde ρ_s es la matriz densidad reducida del sistema, habiendo tomado la traza parcial sobre el ambiente. Los operadores de Linblad L_k describen todos los diferentes tipos de influencias que el ambiente pueda tener sobre el sistema.

Esta ecuación presenta una “desventaja”, ya que si el espacio de Hilbert en el cual estamos trabajando es de dimensión N , la matriz densidad será $N \times N$, y computacionalmente es más costoso trabajar con ella, en especial para sistemas grandes. Además, como primera aproximación al problema de este trabajo no vamos a considerar que el ambiente pueda cambiar la magnetización, como sucede con los operadores de Linblad L_k . Por eso, en este trabajo, se recurre al uso de lo que se conoce como *Monte Carlo Wave Function Methods*, donde se trabaja con la función de onda del sistema en estudio, la cual evoluciona con un Hamiltoniano y se aplican *saltos cuánticos* aleatoriamente decididos, seguido de una renormalización de la función de onda. Puede probarse ([8]) que este enfoque es equivalente al tratamiento con la ecuación maestra de Linblad. Siguiendo este espíritu de trabajo, propondremos modelos de interacción con el ambiente, que detallaremos más adelante.

Esto nos lleva al objetivo del presente trabajo. Se estudiará la transmisión de estados en cadenas interactuantes con un ambiente, para dos tipos de cadenas, cadenas de transmisión perfecta (PST por su sigla en inglés) y cadenas controladas por los bordes (Boundary Controlled en inglés), que describiremos más adelante. En particular, se estudia la fidelidad de la transmisión, y se proponen leyes de escala para la misma. Las leyes de escala permiten describir en forma concisa el comportamiento de diferentes cantidades. Además, se estudia la distinguibilidad de estados transmitidos por estas cadenas.

El trabajo se organiza de la siguiente manera. En el capítulo 2 se discute la teoría necesaria para su desarrollo. En el capítulo 3, se discute el método de trabajo, y se presentan los primeros resultados relacionados a la transmisión de información por un canal donde se modela la decoherencia de una manera particular, y se presentan propiedades de escaleo para la fidelidad de la transmisión. En el capítulo 4 se estudian propiedades de escaleo para otro modelo de decoherencia propuesto. En los capítulos 5 y 6 se estudia la distinguibilidad de estados en diferentes cadenas, para el segundo modelo de decoherencia propuesto. En el capítulo 7 se comentan conclusiones y perspectivas de trabajo futuras.

2 Marco Teórico

Comenzamos revisando los conceptos básicos que son necesarios para el desarrollo de este trabajo. Antes que nada, aclaramos la notación. Llamaremos a un espín 1/2 un qubit, y denotaremos sus estados $|\uparrow\rangle$ y $|\downarrow\rangle$ por $|1\rangle$ y $|0\rangle$ respectivamente, para ser coherentes con el lenguaje usual en teoría de la información.

2.1 Matriz Densidad

Una de las maneras de formular la Mecánica Cuántica es mediante el uso de la matriz densidad [10, 11]. Todos los postulados de la teoría pueden escribirse en términos de esta matriz. Es especialmente útil cuando trabajamos con estados mixtos, o como veremos mas adelante en el trabajo, cuando nos interesa conocer cosas sobre el estado de una porción de nuestro sistema, donde recurrimos a la matriz densidad reducida.

Consideremos una mezcla de estados puros preparados independientemente, $|\psi_n\rangle$, con pesos estadísticos W_n . Estos estados puros no son necesariamente ortonormales. El operador densidad para la mezcla de estados es:

$$\rho = \sum_n W_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (2)$$

Podemos expresar esto en forma matricial, eligiendo una base ortonormal conveniente $|\Phi_i\rangle$, luego:

$$|\psi_n\rangle = \sum_m a_m^{(n)} |\Phi_m\rangle$$

Entonces, nos queda:

$$\rho = \sum_{n,m,m'} W_n a_{m'}^{(n)*} a_m^{(n)} |\Phi_m\rangle \langle \Phi_{m'}|$$

Remarquemos sus propiedades más importantes:

- **Hermiticidad:** Los elementos de matriz de ρ satisfacen $\langle \Phi_i | \rho | \Phi_j \rangle = \langle \Phi_j | \rho | \Phi_i \rangle^*$.
- **Interpretación física de los elementos diagonales de ρ :** La probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|\Phi_m\rangle$ es el elemento diagonal $\rho_{mm} = \sum_n W_n |a_m^{(n)}|^2$. En particular notamos aquí que $\rho_{mm} \geq 0$
- La probabilidad de encontrar al sistema en un estado $|\psi\rangle$ luego de medir es $P(\psi) = \langle \psi | \rho | \psi \rangle$
- Vale que, independientemente de la representación, $Tr(\rho) = 1$.
- El valor de expectación de un observable Q está dado por $Tr(\rho Q)$.
- La matriz densidad describe un estado puro si y sólo si $Tr(\rho^2) = [Tr(\rho)]^2 = 1$.

A continuación describimos la matriz densidad reducida. Es una herramienta útil para describir subsistemas en sistemas compuestos. Sean A y B dos sistemas cuyo estado está descrito por un operador densidad ρ^{AB} . El operador densidad reducido del sistema A se define como:

$$\rho^A = Tr_B(\rho^{AB})$$

donde tomamos la traza parcial sobre el subsistema B. Cuando estudiamos la matriz densidad reducida de un subsistema, aun cuando el estado del sistema completo sea puro, se encuentra que el subsistema está descrito por un estado mezcla. Si todos

los subsistemas se encuentran en estados mixtos, decimos que el sistema está en un *estado entrelazado*.

Recordemos que un estado puro es aquel sobre el que se dispone de máxima información, y podemos describirlo mediante un vector de estado en el espacio de Hilbert correspondiente. En cambio, un estado mixto no está máximamente determinado, y se describe sólo mediante la matriz densidad, que en particular no cumplirá la propiedad $Tr(\rho^2) = [Tr(\rho)]^2 = 1$ ([10]).

2.2 Cadenas de Espín

Consideremos el problema de transmitir información vía un canal cuántico, donde una fuente o emisor envía estados que, luego de pasar por dicho canal, son recibidos y decodificados por el receptor del mensaje. Debido a su “simpleza”, las cadenas de espines juegan un rol importante en este esquema de transmisión de información. Supongamos entonces una cadena de N espines $1/2$, con interacciones a primeros vecinos. Nuestra primera tarea es pensar en que espacio de Hilbert está contenido el estado del sistema durante la transmisión.

Como sabemos, tenemos N sistemas de dos niveles, por lo tanto la dimensión del espacio será 2^N . Los estados del sistema completo pueden escribirse como combinación lineal de los elementos de la base del espacio, que es la base producto directo. Podemos definir la base del espacio de Hilbert completo como el producto directo de las bases de cada espacio de Hilbert de los sistemas de dos niveles que lo componen. Es fácil convencerse de que estos estados forman una base, pues son linealmente independientes, y hay exactamente 2^N elementos. Se la conoce como base producto. Sin embargo, como veremos mas adelante, trabajaremos en un espacio mas pequeño, no en el espacio de Hilbert completo.

Consideremos ahora un modelo para el sistema que será estudiado. Vamos a considerar una cadena unidimensional con espines en sitios fijos e interacciones a primeros vecinos. La interacción no es, en general, isotrópica. Esto refleja el hecho de que los sistemas reales en los cuales se implementa la transmisión de estados cuánticos tienen direcciones preferenciales. Si la dirección preferencial es la Z , y consideramos que hay un campo externo aplicado a la cadena, el cual depende de la posición, el Hamiltoniano de la cadena puede escribirse como:

$$H = 1/2 \sum_{i=1}^N J_i [(1 + \gamma) \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + (1 - \gamma) \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z] + \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i^z \quad (3)$$

Vemos que el Hamiltoniano queda determinado por los parámetros γ, Δ , y debido a esto, se distinguen diferentes tipos. Por ejemplo, para $\gamma = 0$ y $\Delta = 1$, tenemos el Hamiltoniano de Heisenberg, también conocido como modelo XXX, pues todas las componentes de espín experimentan la misma interacción. Si $\gamma = 0$, $\Delta \neq 1$, el modelo se denomina XXZ, siendo un caso particular $\Delta = 0$, conocido como modelo XX:

$$H = 1/2 \sum_{i=1}^N J_i [\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y] + \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i^z \quad (4)$$

Es este Hamiltoniano XX, con elementos $h_i = 0$ el que usaremos a lo largo del trabajo.

A continuación mostramos un esquema de una cadena de espines con interacciones a primeros vecinos J_i diferentes de un espín al otro.

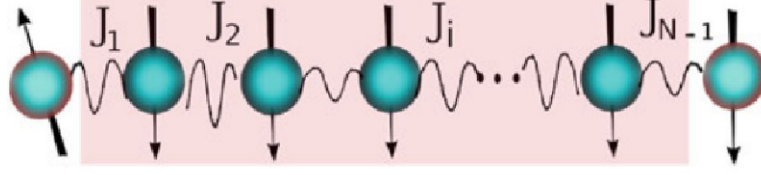


Figure 4: Cadena de espines con interacción a primeros vecinos J_i

Como veremos mas adelante, esta figura corresponde a una cadena diseñada con interacciones elegidos especialmente para obtener propiedades convenientes.

2.3 El Hamiltoniano XX

¿Qué podemos decir de este Hamiltoniano? En primer lugar, como $\gamma = 0$, tenemos que $[H, S_z] = 0$, donde S_z es el espín total según Z . Esto es crucial en nuestro esquema de transmisión, pues nos dice que S_z es una constante de movimiento, con lo cual, la magnetización total en esa dirección se mantendrá constante con el tiempo (es decir, su valor de expectación).

Esto nos permitirá trabajar en el subespacio de una excitación, donde comenzamos con el primer espín en el estado que queremos transmitir por nuestra cadena, y todos los demás en el estado $|0\rangle$. Es decir, nos restringimos en nuestro espacio de Hilbert a estados de la forma:

$$\begin{aligned} |\mathbf{0}\rangle &= |0_1 0_2 \dots 0_N\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle \\ |\mathbf{i}\rangle &= |0_1 \dots 1_i 0_{i+1} \dots 0_N\rangle = |0\rangle \otimes \dots \otimes |1\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle \end{aligned}$$

El subespacio de una excitación tiene dimensión N , y es simple ver que los estados $|\mathbf{i}\rangle$ forman una base del mismo.

Otro dato importante a mencionar es que las interacciones J_i del Hamiltoniano pueden elegirse de forma conveniente para obtener una transmisión satisfactoria de estados por la cadena. Estos parámetros se “eligen” al construir la cadena experimentalmente. Veremos mas adelante que, por ejemplo, al elegir estos parámetros de forma tal que los J_i tengan simetría de reflexión respecto al centro de la cadena, con lo que las energías del Hamiltoniano cumplen una cierta condición, que en nuestro caso es tener energías equiespaciadas, obtenemos transmisión de estados perfecta, PST (del inglés *perfect state transfer*).

Por último, notemos que el Hamiltoniano tiene forma tri-diagonal en la base ya explicitada, la cual es:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & J_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ J_1 & 0 & J_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & J_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & J_{N-2} & 0 & J_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & J_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que la matriz es autoadjunta, con autovalores y autovectores reales para cualquier elección de los J_i .

A continuación detallamos a qué nos referimos con transmisión de estados, cómo armamos nuestro mensaje a transmitir, y luego comentaremos cómo lo obtenemos al otro extremo de la cadena.

2.4 Transmisión de estados en cadenas de espín

Dijimos ya que queremos transmitir un estado de una punta de la cadena a la otra. ¿Cómo lo hacemos? Un protocolo consiste en los siguientes pasos:

- Empezamos con la cadena en el estado $|\mathbf{0}\rangle = |0_1 0_2 \dots 0_N\rangle$
- Preparamos en el primer qubit el estado que deseamos transmitir, el cual será de la forma $|\psi_1\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$.
- Dejamos al sistema evolucionar regido por su Hamiltoniano:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} |\psi_1\rangle \otimes |0_2 \dots 0_N\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} |\Psi(t=0)\rangle = |\Psi_0\rangle$$
- A un cierto tiempo particular (que depende del sistema), t_{trans} , el estado enviado llega a la otra punta de la cadena, o al menos parte de él.
- En ese momento, comparamos lo que llega con el mensaje original, es decir, estudiamos la *fidelidad* de la transmisión.

Los estados del primer qubit son estados en la esfera de Bloch, donde $|\psi_1\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle$, obteniendo así un estado normalizado. En la esfera de Bloch tenemos $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi < 2\pi$.

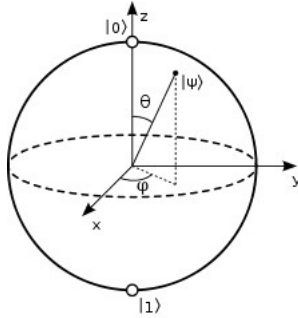


Figure 5: Esfera de Bloch.

Estudiemos con un poco más de detalle la evolución temporal de este sistema. El estado $|\mathbf{0}\rangle$ es el estado fundamental de nuestro Hamiltoniano XX , y su energía es 0 (basta aplicar el Hamiltoniano al estado para ver esto). Dijimos que el estado inicial era:

$$|\Psi(t=0)\rangle = \alpha |\mathbf{0}\rangle + \beta |\mathbf{1}\rangle \quad (5)$$

Luego, evolucionando el estado:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} |\Psi(t=0)\rangle \\ &= \alpha |\mathbf{0}\rangle + \beta e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} |\mathbf{1}\rangle \\ &= \alpha |\mathbf{0}\rangle + \beta \sum_{i=1}^N f_i(t) |\mathbf{i}\rangle \end{aligned} \quad (6)$$

donde $f_i(t) = \langle \mathbf{i} | e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} | \mathbf{1} \rangle$. Vemos que la evolución natural de este sistema hace que el estado original no sólo se disperse, sino que también se propague a lo largo de la cadena.

Ahora, ¿cómo comparamos el mensaje que nos llegó con el que habíamos enviado? Para eso recurrimos a la *fidelidad*.

2.5 Fidelidad como figura de mérito

Como nuestro objetivo era transmitir el estado inicial, proyectemos el estado evolucionado $|\Psi(t)\rangle$ sobre el estado que deseamos recuperar, $|\Psi_f\rangle = \alpha|\mathbf{0}\rangle + \beta|\mathbf{N}\rangle$. Para esto, reescribamos la ecuación 6, pero en términos de la base $|u_j\rangle$ de autoestados del Hamiltoniano:

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha|\mathbf{0}\rangle + \beta \sum_{j=1}^N \exp(-i\frac{E_j t}{\hbar}) \langle u_j | \mathbf{1} \rangle |u_j\rangle \quad (7)$$

Entonces, proyectemos en el estado que queremos recuperar:

$$(\alpha \langle \mathbf{0} | + \beta \langle \mathbf{N} |)(\alpha |\mathbf{0}\rangle + \beta \sum_{j=1}^N \exp(-i\frac{E_j t}{\hbar}) \langle u_j | \mathbf{1} \rangle |u_j\rangle) \quad (8)$$

Obtenemos:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 \sum_{j=1}^N \exp(-i\frac{E_j t}{\hbar})$$

El módulo cuadrado de esta expresión será la probabilidad de encontrar al estado que quisimos transmitir en el último sitio. A esta función se conoce como *fidelidad dependiente del estado*. Está dada por:

$$F(\alpha, \beta, t) = |(\alpha \langle \mathbf{0} | + \beta \langle \mathbf{N} |) |\Psi(t)\rangle|^2 \quad (10)$$

También podemos escribirla en términos de la matriz densidad. En general, el estado de N-ésimo espín será mixto, y puede obtenerse tomando traza parcial sobre los demás espines. Obtenemos el operador densidad del estado de salida ρ_N haciendo:

$$\text{Tr}_{1,2,\dots,N-1}(|\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|)$$

Entonces la fidelidad queda escrita como:

$$F(\alpha, \beta, t) = \langle \Psi_N | \rho_N(t) | \Psi_N \rangle \quad (11)$$

donde $|\Psi_N\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ (el estado que queremos recuperar en el último espín), y $\rho_N(t)$ es la matriz densidad reducida al último espín.

Pero esta fidelidad depende del estado inicial enviado, por lo cual resulta útil obtener resultados sobre la fidelidad de transmisión que no dependan de los parámetros α y β que caracterizan al estado enviado. Para hacer esto, promediamos sobre todos los estados iniciales posibles distribuidos de manera uniforme en la esfera de Bloch. Obtenemos:

$$F(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{Blochsphere}} F(\alpha, \beta, t) d\Omega = \frac{|f_N(t)| \cos \gamma}{3} + \frac{|f_N(t)|^2}{6} + \frac{1}{2} \quad (12)$$

donde $\gamma = \arg(|f_N(t)|)$ y $f_N(t) = \langle \mathbf{N} | e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} | \mathbf{1} \rangle$, esto es, la cantidad definida a continuación de la ecuación 6, con $i = N$. Esta fase γ puede ser controlada con campos externos, y consideraremos $\cos(\gamma) = 1$. Se obtiene $F(t) = 1$ cuando la transmisión es perfecta (PST), y cada estado que es enviado es perfectamente transmitido al spin receptor.

Veamos un poco más la forma de $f_N(t)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \langle \mathbf{N} | e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} | \mathbf{1} \rangle \\ &= \langle \mathbf{N} | \sum_{k=1}^N e^{-i\frac{E_k t}{\hbar}} \langle k | \mathbf{1} \rangle | k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^N e^{-i\frac{E_k t}{\hbar}} \langle k | \mathbf{1} \rangle \langle \mathbf{N} | k \rangle \end{aligned} \quad (13)$$

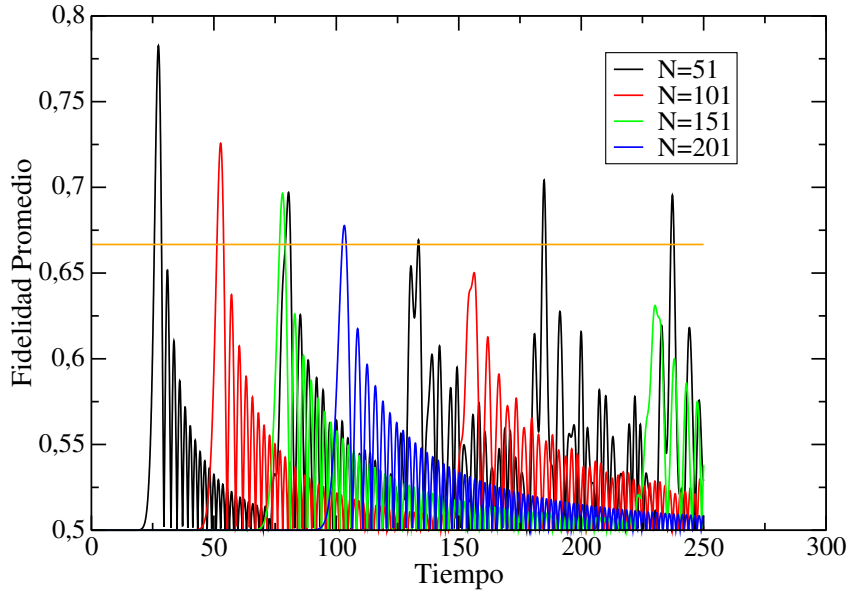


Figure 6: Fidelidad en cadenas homogéneas para diferentes largos, los cuales son $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde) y $N = 201$ (azul). Observamos que los picos de fidelidad decaen a medida que aumentamos el largo de la cadena. La línea recta corresponde al valor $2/3$, que es la máxima fidelidad para la transmisión clásica de un estado cuántico.

Para ilustrar lo explicado anteriormente, analicemos la fidelidad de una cadena con interacciones homogéneas, $J_i = 1 \forall i$. La figura 6 fue obtenida evaluando la ecuación 12, utilizando el Hamiltoniano especificado en la ecuación 4, con dichas interacciones homogéneas. Para ello, evaluamos el valor de f_n dado por la ecuación 13 en intervalos $\Delta t = 0.005$. En el caso de esta figura, lo dejamos evolucionar la cantidad de tiempo necesaria para que aparezcan los picos de fidelidad que observamos. Más adelante, en el capítulo 3, comentaremos en mayor detalle la forma de trabajo.

La transferencia del estado de un qubit será mejor que la transmisión de información de un estado cuántico por medios clásicos solo si la fidelidad es mayor a un cierto valor, que en particular es $\frac{2}{3}$ para qubits. En el caso en el cual la fidelidad tiene ese valor, se puede obtener la misma fidelidad utilizando medios clásicos, y no se justifica la utilización de sistemas cuánticos. Además para fidelidades tan bajas, el estado transmitido se parece poco al estado que uno quiso enviar, en un sentido que precisaremos mejor a continuación.

Consideremos dos personas, Ana y Bernardo, que quieren transmitir un estado. Inicialmente Ana dispone de un estado $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ desconocido para ella. El objetivo es reconstruir el estado en la locación de Bernardo. Para lograrlo, Ana puede realizar una medición en su estado, por ejemplo, la componente de espín según la dirección z , y comunicarle a Bernardo

el resultado de dicha medición por un medio clásico. En consecuencia, Bernardo utiliza esa información para armar un estado. Como Ana mide con probabilidad $|\alpha|^2$ el estado $|0\rangle$, y con probabilidad $|\beta|^2$ el estado $|1\rangle$, entonces con las mismas probabilidades Bernardo construye el estado $|0\rangle$ o $|1\rangle$. En este sentido el estado que se recupera se parece poco al estado que se tenía inicialmente. Examinemos la fidelidad de este esquema de transmisión, utilizando la ecuación 11 para este caso. La matriz densidad correspondiente al estado que Bernardo puede armar con la información que dispone será:

$$\rho_B = |\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle \langle 1|$$

Por ello, la fidelidad será:

$$F_{cl} = \langle \phi | (|\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle \langle 1|) | \phi \rangle$$

En este caso, el subíndice *cl* hace referencia a que sólo se utilizó un medio clásico para transmitir el estado cuántico. Promediando sobre todos los posibles estados que Ana pudo tener inicialmente, es decir, en la esfera de Bloch, se obtiene:

$$F_{cl}^{prom} = \frac{1}{4\pi} \int_{BlochSphere} \langle \phi | (|\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle \langle 1|) | \phi \rangle d\Omega = \frac{2}{3} \quad (14)$$

Este es el límite de fidelidad anteriormente mencionado.

Como dijimos antes, la capacidad de nuestro canal de transmitir información depende, entre otras cosas, de las interacciones J_i del Hamiltoniano. Veamos a continuación dos formas de armar las cadenas para obtener fidelidades altas.

2.6 Transmisión perfecta de estados (PST) en cadenas “Fully engineered”¹

La transmisión perfecta de estados, si la cadena presenta simetría especular con respecto al centro ($J_i^2 = J_{N-i}^2$), ocurre en un tiempo t_{PST} si los términos en la suma de f_N suman en fase. Esto ocurre si el espectro de energías cumple que ([12], [16]):

$$E_{n+1} - E_n \propto (2m_n + 1)\pi/t_{PST} \quad (15)$$

donde estas energías están ordenadas de forma tal que $E_n < E_{n+1}$. En particular esto nos dice que el cociente entre diferencias de energías serán números racionales, como fue observado en [13]. Podemos por ejemplo utilizar un espectro donde las diferencias de energías sean proporcionales a enteros, llamadas *energías conmensuradas*[14]. Consideremos un ejemplo simple para entender esto. Sea una partícula en una caja simétrica centrada en $x = 0$ (esto es, el potencial satisface $V(-x) = V(x)$), con paredes infinitas. Tendremos entonces autoestados $\phi_k(x)$ del Hamiltoniano que por la simetría del potencial tienen paridad definida alternante, $\phi_k(-x) = (-1)^k \phi_k(x)$. Sea un estado general $\psi(x) = \sum_k c_k \phi_k$, entonces su evolución temporal viene dada por:

$$\psi(x, t) = \sum_k c_k e^{-iE_k t} \phi_k(x) \quad (16)$$

donde las energías $E_k \propto k^2$. Si tomamos un tiempo de evolución $t = \tau$ tal que $E_k \tau = k^2 \pi$, tenemos:

$$\psi(x, \tau) = \sum_k c_k (-1)^k \phi_k(x) = \sum_k c_k \phi_k(-x) = \psi(-x) \quad (17)$$

¹Fully engineered quiere decir que la intensidad de la interacción a primeros vecinos se selecciona mediante un algoritmo.

Entonces obtenemos para un tiempo particular una “imagen especular” del estado original. Vemos entonces la importancia de tener paridad alternante de autoestados y espectro de energías conmensurados para tener esta inversión especular. Podemos llevar esto a nuestra cadena de espines para obtener transmisión perfecta.

Hacemos una analogía entre la coordenada continua x y las posiciones discretas donde los espines se dan vuelta $j = 1, 2, \dots, N$, y la función de onda $\psi(x)$ con la superposición $\sum_j c_j |j\rangle$. Si las interacciones del Hamiltoniano poseen simetría de inversión respecto al centro de la cadena (es decir $J_j = J_{N-j}$ lo que nos da la paridad alternante, ver [14]), y tenemos espectro conmensurado, entonces para un cierto tiempo τ_{trans} el estado se convierte en $\sum_j c_j |N-j\rangle$, obteniendo la reflexión especular.

Usando esto en el Hamiltoniano XX, pedimos interacciones $J_j = J\sqrt{j(N-j)}$ (donde J da la escala de energía), los que nos da energías $E_k \propto k$ ([13]). Notemos que diseñar una cadena con espectro conmensurado puede dar diferentes interacciones, dependiendo del espectro específico que elijamos ($E_k \propto k, k^2, k(k+1), etc$, notar que estas elecciones respetan la paridad de k). La pregunta es si dado un espectro conmensurado, podemos obtener interacciones J_i simétricas respecto al centro de la cadena, y asegurar así la transmisión perfecta de estados.

Yung y Bose[15], y Karbach y Stolze[16] sugirieron un enfoque sistemático para construir cadenas PST con el espectro deseado. Dados N números reales $E_1 < E_2 < \dots < E_N$, conmensurados, es siempre posible construir una única matriz simétrica tri-diagonal real, con diagonal a_1, \dots, a_N y entradas sub/supra-diagonales b_1, \dots, b_{N-1} , con los requerimientos adicionales de simetría $a_i = a_{N+1-i}$ y $b_i = b_{N-i}$ que tenga a los E_i como espectro.

A lo largo de todo este trabajo, para las cadenas PST se utilizaron interacciones $J_j = J\sqrt{j(N-j)}$ con $J = 1$. En la figura 7 puede observarse el espectro de este tipo de cadenas, en el subespacio de una excitación, graficado en función de $X = \frac{k}{N} - \frac{1}{2}$, donde k es el índice correspondiente a las energías E_k , y va entre 0 y N .

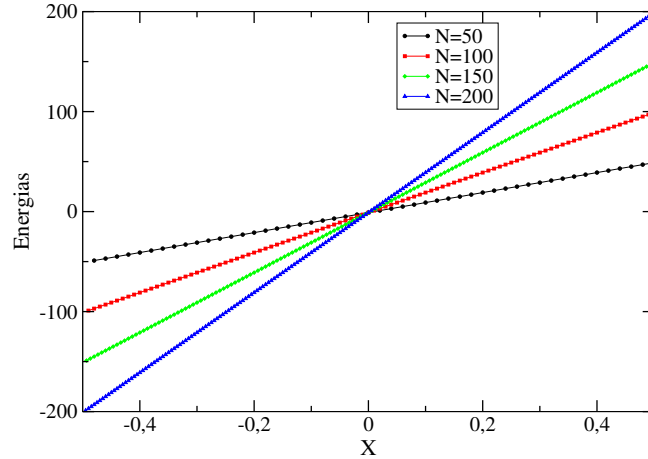


Figure 7: Espectro para cadenas PST, para diferentes largos. Corresponde a interacciones de la forma $J_j = \sqrt{j(N-j)}$. Se aprecian las diferencias de energía conmensuradas. Además, para las cadenas usadas, las diferencias de energía entre niveles sucesivos es la misma, independientemente del largo. En esta figura $X = \frac{k}{N} - \frac{1}{2}$, donde k es el índice correspondiente a las energías E_k .

Todos los autovalores están separados por la misma diferencia de energía ΔE , y dan origen a autovectores de paridad alternante cuando son ordenadas de la forma $E_1 < E_2 < \dots < E_N$.

En la figura 8 se muestra la fidelidad obtenida con este tipo de cadenas.

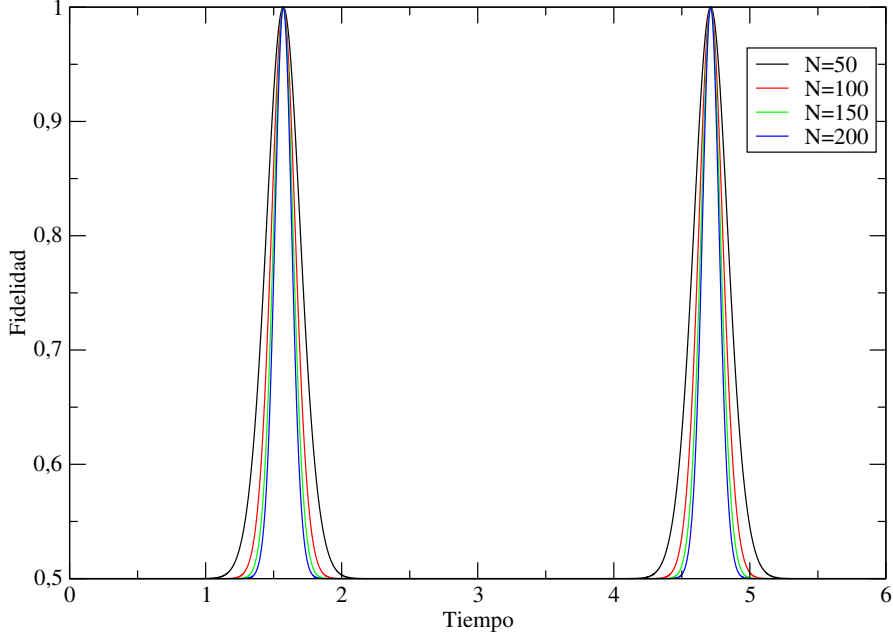


Figure 8: Fidelidad para cadenas PST, para diferentes longitudes de cadena: $N = 50$ (negro), $N = 100$ (rojo), $N = 150$ (verde), y $N = 200$ (azul).

Se observa que la fidelidad alcanza su valor máximo, $F(t) = 1$, para tiempos de la forma $\tau_n = \frac{(2n+1)\pi}{2J}$ (en este trabajo, se tomó $J = 1$). Notemos que por las propiedades para obtener transmisión perfecta mencionadas anteriormente, el tiempo de transmisión no depende del estado enviado, sino sólo del espectro de energías (ver ecuación 15). Además vemos cómo el ancho de los picos disminuye a medida que aumenta el largo de las cadenas.

2.7 Transmisión de estados optimizada en cadenas controladas por los bordes (Boundary Controlled)

El sistema tratado anteriormente supone que somos capaces de fabricar un dispositivo en donde las N interacciones entre los espines son precisas y sin errores. Esto puede ser difícil de realizar. Consideremos otro tipo de cadenas, conocidas como cadenas controladas por los bordes (boundary-controlled en inglés, y a partir de ahora, serán abreviadas BC), en las cuales los espines emisores y receptores del estado a enviar están acoplados débilmente al sistema usado para transmitir. El resto de las interacciones son homogéneas. Esto supone controlar muy bien los espines de los extremos, algo más fácilmente realizable experimentalmente. Estas interacciones J_1 y J_N son de la forma $J_{extremo} = \alpha J$, donde J es el acople homogéneo del resto de la cadena.

Zwick y Osenda [17] demostraron que el valor óptimo para este α va como $\alpha_{OPT} \approx 1.06N^{-\frac{1}{6}}$. Con ese valor de α se obtienen fidelidades altas, en tiempos de transmisión de la forma $t_{trans} \approx N/2J$. A lo largo de este trabajo, para las cadenas BC se tomó la interacción homogénea $J = 1$. En la figura 13 podemos ver el espectro para este tipo de cadenas.

Este tipo de cadenas presenta fidelidad alta cuando utilizamos el acople α_{OPT} . En la figura 10 podemos ver cómo se comporta la fidelidad para diferentes largos de cadena.

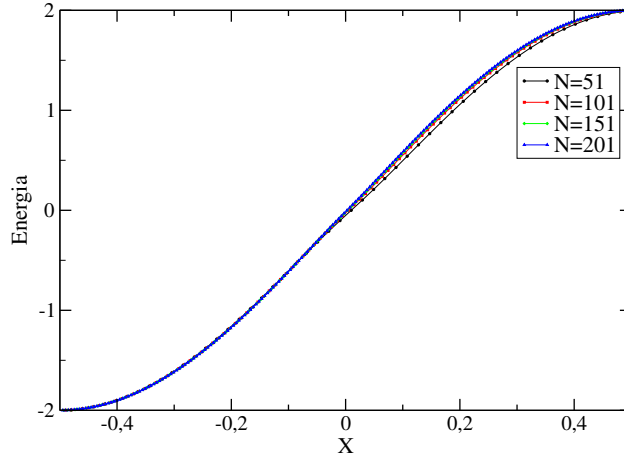


Figure 9: Espectro para cadena BC, para diferentes longitudes de la cadena, y para el acople α_{OPT} . En esta figura $X = \frac{k}{N} - \frac{1}{2}$, donde k es el índice correspondiente a las energías E_k .

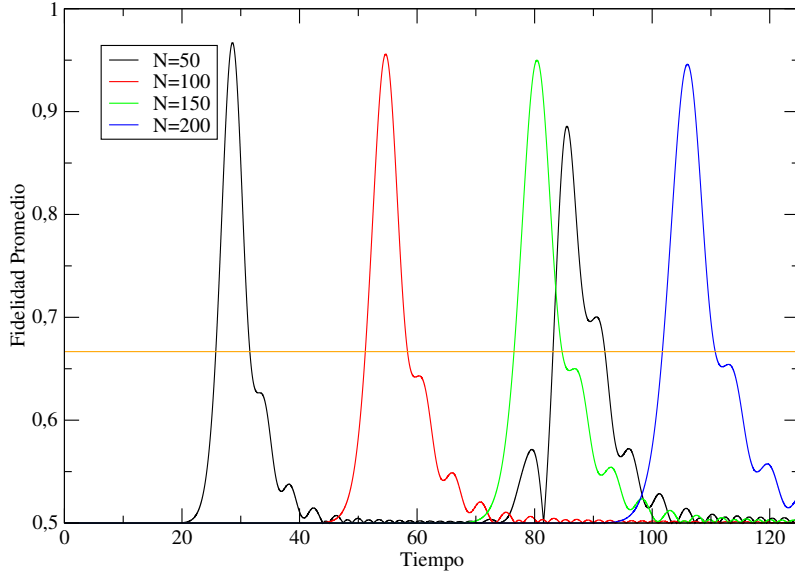


Figure 10: Fidelidad promedio para cadena BC, para diferentes longitudes de la cadena: $N = 50$ (negro), $N = 100$ (rojo), $N = 150$ (verde), y $N = 200$ (azul), y para el acople α_{OPT} . La línea naranja corresponde al valor de fidelidad $2/3$.

Podemos apreciar que el tiempo de transmisión (es decir, el tiempo para el cual ocurre el primer pico de fidelidad), es aproximadamente $N/2$ como mencionamos antes. También se puede observar un leve decaimiento de la fidelidad máxima a medida que aumenta el largo de las cadenas. En todos los casos la fidelidad es alta, muy por encima del valor $2/3$ para la transmisión clásica de un estado cuántico, y por encima del valor que obtendríamos sin modificar las interacciones de los extremos.

2.8 Ruido dinámico

Queremos introducir en nuestros sistemas una fuente de “ruido”. El mismo puede deberse al acople o interacción con el ambiente, entendiendo por ambiente todos aquellos sistemas externos al sistema de interés que interactúen con el mismo (un ejemplo pueden ser reservorios térmicos). La interacción con otros sistemas modificará el comportamiento de la fidelidad, ya que estaremos operando con un canal ruidoso. En lo que sigue, detallamos dos formas diferentes de introducir el ruido. La cantidad de interés cuando se utiliza ruido dinámico es la fidelidad promediada

sobre realizaciones del ruido. Es decir, realizamos s evoluciones ruidosas, calculamos la fidelidad para cada una, sumamos todas, y dividimos por s .

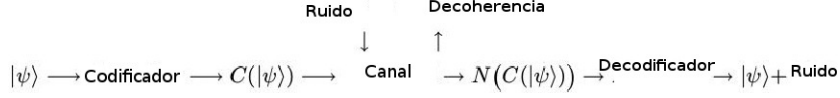


Figure 11: Esquema de transmisión de estados por un canal donde hay una interacción con un ambiente presente, el cual genera efectos de decoherencia, y agrega ruido al estado que originalmente queríamos transmitir. Este ruido agrega información aleatoria a la señal inicial.

Para detallar las formas de introducir el desorden dinámico, explicamos mejor lo comentado en la introducción sobre *Monte Carlo Wave Function Methods* (ver [8]).

2.8.1 Método de funciones de onda Monte Carlo

En general el acople del sistema con un reservorio puede tratarse con una ecuación maestra, donde escribimos una ecuación para la evolución temporal de la matriz densidad reducida del sistema, habiendo tomado traza sobre las variables del reservorio. Si el Hamiltoniano del sistema aislado es H_s , podemos escribir esta ecuación de forma general como:

$$\dot{\rho}_s(t) = \frac{-i}{\hbar} [H_s, \rho_s] + \mathcal{L}_{dissip}(\rho_s) \quad (18)$$

donde \mathcal{L}_{dissip} es un operador de relajación general actuando sobre la matriz densidad del sistema. Se considera que es local en el tiempo, en el sentido de que $\dot{\rho}_s$ depende sólo de ρ_s al mismo tiempo (esto se conoce como aproximación de Markov, donde el sistema tiene poca “memoria” de lo que le sucede en tiempos pasados). Ahora, como mencionamos en la introducción, podemos hacer una aproximación donde evitemos trabajar con la matriz densidad, que computacionalmente es mas caro. Esta consiste de dos elementos: evolución con un Hamiltoniano no hermitiano (esto corresponde al caso general de la aproximación, en este trabajo NO se utiliza una evolución con un Hamiltoniano no hermitiano) y saltos cuánticos aleatoriamente decididos, seguido de una renormalización de la función de onda. Una forma de escribir los operadores de relajación es:

$$\mathcal{L}_{dissip}(\rho_s) = -\frac{1}{2} \sum_m (C_m^\dagger C_m \rho_s + \rho_s C_m^\dagger C_m) + \sum_m C_m \rho_s C_m^\dagger \quad (19)$$

Esta expresión es bastante general. Los operadores C_m y su adjunto actúan en el espacio del sistema en estudio. Entonces, pasamos a dar el procedimiento de MCWF. Básicamente, y sin demasiado detalle, consiste en:

- Calculamos la función de onda $|\psi(t + \Delta t)\rangle$ que se obtiene evolucionando $|\psi(t)\rangle$ con el Hamiltoniano no hermitiano:

$$H = H_s - \frac{i\hbar}{2} \sum_m C_m^\dagger C_m$$

Se suele considerar Δt muy pequeño, y trabajar a primer orden en él. Esto da:

$$|\psi^{(1)}(t + \Delta t)\rangle = (1 - \frac{iH\Delta t}{\hbar}) |\psi(t)\rangle$$

Como H es no hermitiano, esta función de onda no será normalizada y se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \psi^{(1)}(t + \Delta t) | \psi^{(1)}(t + \Delta t) \rangle &= \langle \psi(t) | (1 + \frac{iH^\dagger \Delta t}{\hbar}) (1 - \frac{iH\Delta t}{\hbar}) | \psi(t) \rangle \\ &= 1 - \delta p \end{aligned}$$

donde:

$$\delta p = \Delta t \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | H - H^\dagger | \psi(t) \rangle = \sum_m \delta p_m \delta p_m = \Delta t \langle \psi(t) | C_m^\dagger C_m | \psi(t) \rangle$$

- El segundo paso de este procedimiento consiste en un posible salto cuántico. Se decide su ocurrencia eligiendo un número aleatorio ϵ uniformemente distribuido entre 0 y 1, y comparándolo con la cantidad δp . Si $\epsilon > \delta p$, no ocurre el salto cuántico, y la nueva función normalizada es:

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = |\psi^{(1)}(t + \Delta t)\rangle / (1 - \delta p)^{1/2}$$

Caso contrario hay salto, y el nuevo estado se elige entre los posibles estados dados por $C_m |\psi(t)\rangle$:

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = C_m |\psi(t)\rangle / (\delta p_m / \Delta t)^{1/2}$$

con probabilidad $\Pi_m = \delta p_m / \delta p$.

Puede probarse (ver [8]) que este esquema de evolución es equivalente a la ecuación maestra 18, siempre y cuando la cantidad $\sigma(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$ y $\rho_s(t)$ coincidan en $t = 0$. Consideremos una MCWF $|\psi(t)\rangle$ al tiempo t . Al tiempo $t + \Delta t$ el promedio de $\sigma(t + \Delta t)$ sobre la evolución causada por los diferentes valores del aleatorio ϵ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma(t + \Delta t)} &= (1 - \delta p) \frac{|\psi^{(1)}(t + \Delta t)\rangle \langle \psi^{(1)}(t + \Delta t)|}{(1 - \delta p)^{1/2} (1 - \delta p)^{1/2}} + \delta p \sum_m \Pi_m \frac{C_m |\psi(t)\rangle \langle \psi(t) | C_m^\dagger}{(\delta p_m / \Delta t)^{1/2} (\delta p_m / \Delta t)^{1/2}} \\ &= \sigma(t) + (i\Delta t / \hbar) [\sigma(t), H_s] + \Delta t \mathcal{L}_{dissip}(\sigma(t)) \end{aligned} \quad (20)$$

Promediando esta ecuación sobre los posibles valores de $\sigma(t)$, obtenemos:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\bar{\sigma}, H_s] + \mathcal{L}_{dissip}(\bar{\sigma})$$

lo cual es idéntico a la ecuación 18.

En este esquema se basan los modelos de ruido que vamos a implementar. El sistema evoluciona en cada paso con el Hamiltoniano del sistema aislado, es decir, el Hamiltoniano XX de la cadena (que es hermitiano), y en cada paso se produce un “salto cuántico” que consistirá en poner fases en los estados. Dado que este esquema de evolución es unitario, no debemos renormalizar la función de onda en cada paso. Detallamos la forma en la cual introducimos las fases en la próxima sección.

2.8.2 Primer modelo de ruido: ruido espectral

El primer modelo consiste en identificar los saltos discutidos en la sección anterior con sumar a las energías valores ΔE_j durante la evolución temporal. En nuestra rutina numérica, se evoluciona el sistema de a pasos Δt y, en cada uno, se suma a cada una de las energías E_j un número $\Delta E_j = \lambda(2\phi_j - 1)$, donde ϕ_j es un número aleatorio entre 0 y 1, donde λ es un parámetro que regula la intensidad del ruido. Como $\langle \phi_j \rangle = 1/2$ y $\langle \phi_j^2 \rangle = 1$, tenemos que $\langle \Delta E_j \rangle = 0$ y $\langle (\Delta E_j)^2 \rangle = 3\lambda^2$. Veamos en mayor detalle cómo se introduce ΔE_j . Luego de un paso Δt , la función de onda esta dada por:

$$|\Psi(t + \Delta t)\rangle = \sum_{j=1}^N e^{-i \frac{E_j \Delta t}{\hbar}} \langle u_j | \mathbf{1} \rangle |u_j\rangle \quad (21)$$

Con la introducción del ruido la función pasa a ser:

$$|\Psi'(t + \Delta t)\rangle = \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{(E_j + \lambda(2\phi_j - 1))\Delta t}{\hbar}} \langle u_j | \mathbf{1} \rangle |u_j\rangle \quad (22)$$

En cada paso temporal, sorteamos números aleatorios ϕ_j diferentes, que perturban las energías. Esto hace que la fidelidad se vea afectada, pues cambia $f_N(t)$.

Sabemos que la escala de energía esta relacionada con la escala de evolución temporal. Si el ruido es demasiado grande comparado con la escala de energía del sistema, la evolución estará gobernada por el mismo, y no podremos recuperar el mensaje original enviado. Por lo tanto pedimos que:

$$\min_j (E_j \Delta t) \leq \lambda(2\phi_j - 1)\Delta t \leq \max_j (E_j \Delta t) \quad (23)$$

Con este modelo de ruido, estudiaremos leyes de escala para la fidelidad.

2.8.3 Segundo modelo de ruido: ruido localizado

Recordemos que al comienzo de la sección 2.3 definimos la base de sitios, donde $|\mathbf{j}\rangle$ quiere decir que la excitación de espín está en el sitio j de la cadena. Entonces, en este modelo, lo que hacemos es sumar fases aleatorias a las fases de los sitios en los cuales está la excitación de espín. Definamos entonces un operador T actuando en la base de una excitación, cuyo efecto es:

$$T |\mathbf{l}\rangle = e^{i\lambda(2\phi_l - 1)} |\mathbf{l}\rangle \quad (24)$$

donde nuevamente ϕ_l es un número aleatorio entre 0 y 1. Entonces, para cada paso de evolución temporal tendremos:

$$|\Psi(t + \Delta t)\rangle = T(e^{-i\frac{H\Delta t}{\hbar}} |\Psi(t)\rangle) \quad (25)$$

donde $|\Psi(t)\rangle$ es la función de onda obtenida hasta el paso de evolución anterior (donde también actuó T). Elegimos los λ de la misma forma que en la ecuación 23. Veamos la acción de T en mas detalle. Si al tiempo t , la función de onda escrita en la base de sitios es:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{l=1}^N \chi_l |\mathbf{l}\rangle$$

entonces en el siguiente paso de evolución:

$$\begin{aligned} |\Psi(t + \Delta t)\rangle &= T(e^{-i\frac{H\Delta t}{\hbar}} |\Psi(t)\rangle) \\ &= T\left(\sum_{j=1}^N e^{-i\frac{E_j\Delta t}{\hbar}} |u_j\rangle \langle u_j| \sum_{l=1}^N \chi_l |\mathbf{l}\rangle\right) \\ &= T\left(\sum_{j=1}^N e^{-i\frac{E_j\Delta t}{\hbar}} \sum_{l',l''=1}^N C_j^{l'} C_j^{l''*} |\mathbf{l}'\rangle \langle \mathbf{l}''| \sum_l \chi_l |\mathbf{l}\rangle\right) \\ &= T\left(\sum_{j=1}^N e^{-i\frac{E_j\Delta t}{\hbar}} \sum_{l',l''=1}^N C_j^{l'} C_j^{l''*} |\mathbf{l}'\rangle \sum_l \chi_l \langle \mathbf{l}''|\mathbf{l}\rangle\right) \\ &= T\left(\sum_{j=1}^N e^{-i\frac{E_j\Delta t}{\hbar}} \sum_{l',l=1}^N C_j^{l'} C_j^{l*} \chi_l |\mathbf{l}'\rangle\right) \end{aligned} \quad (26)$$

donde se usa la ortogonalidad de la base de sitios en el último paso. Intercambiando $l' \leftrightarrow l$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&= T\left(\sum_{l=1}^N \left(\sum_{j,l'=1}^N e^{-i\frac{E_j \Delta t}{\hbar}} C_j^l C_{j'}^{l'*} \chi_{l'}\right) |\mathbf{l}\rangle\right) \\
&= \sum_{l=1}^N \left[\left(\sum_{j,l'=1}^N e^{-i\frac{E_j \Delta t}{\hbar}} C_j^l C_{j'}^{l'*} \chi_{l'}\right) e^{i\lambda(2\phi_l-1)}\right] |l\rangle
\end{aligned} \tag{27}$$

donde en el último paso se aplica T a cada uno de los sitios. Ahora el paso de evolución siguiente consiste en tomar

$$\chi_l = \left(\sum_{j,l'=1}^N e^{-i\frac{E_j \Delta t}{\hbar}} C_j^l C_{j'}^{l'*} \chi_{l'}\right) e^{i\lambda(2\phi_l-1)}$$

y repetir el procedimiento.

Pero este ruido no necesariamente tiene que actuar en todos los sitios en cada paso. Por lo tanto, seleccionaremos de forma aleatoria cuántos sitios serán perturbados y luego, de nuevo aleatoriamente, cuáles son los sitios perturbados. Esto hace que en las sumas anteriores, algunos de los $\lambda(2\phi_l - 1)$ sean nulos. Dejamos en claro que el operador T actúa en todos los pasos de evolución temporal, aunque como explicamos, en diferentes sitios y con diferentes intensidades en cada uno.

2.9 Medida de distinguibilidad para estados mixtos

Como ya mencionamos anteriormente, una buena forma de comparar entre estados es la fidelidad. En particular, si estos estados son mixtos, la fidelidad se calcula en forma diferente a cuando se tienen estados puros. Jozsa, en su trabajo de 1994 [18], propuso una definición para la fidelidad de estados mixtos dada por:

$$F(\rho_1, \rho_2) = Tr \left[\sqrt{\rho_1^{1/2} \rho_2 \rho_1^{1/2}} \right]^2 \tag{28}$$

Esta expresión es simétrica a pesar de la forma. Si ρ_1 y ρ_2 son diagonales en la misma base, esta ecuación se reduce a la expresión clásica, que es una medida de la distinguibilidad entre dos distribuciones de probabilidad. En lo que sigue del trabajo esta cantidad es de vital importancia, pues vamos a querer distinguir entre dos estados enviados por un canal ruidoso. Es decir, si inicialmente sabemos que podemos distinguir entre dos estados, queremos comparar cuánto podemos distinguir entre los mismos una vez atravesaron el canal ruidoso. Para compararlos estudiamos entonces el estado del último espín, que sabemos que es mixto, y por ello usamos la matriz densidad reducida del mismo, para cada estado transmitido.

Al calcular la matriz densidad reducida del último sitio, el espacio de Hilbert es bi-dimensional, por ello utilizaremos otro resultado del trabajo de Jozsa. Para el caso de 2 dimensiones (y sólo ahí), podemos obtener expresiones simples para la fidelidad definida en la ecuación 28. Sea M una matriz Hermitiana con autovalores positivos λ_1 y λ_2 , luego:

$$Tr(\sqrt{M}) = \sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}$$

Por lo tanto:

$$(Tr(\sqrt{M}))^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = Tr(M) + 2(detM)^{1/2}$$

Tomando $M = \rho_1^{1/2} \rho_2 \rho_1^{1/2}$, tenemos:

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(\rho_1\rho_2), \det(M) = \det(\rho_1)\det(\rho_2)$$

y, finalmente:

$$F(\rho_1, \rho_2) = \text{Tr}(\rho_1\rho_2) + 2[\det(\rho_1)\det(\rho_2)]^{1/2} \quad (29)$$

En este trabajo utilizaremos esta definición de F para comparar entre matrices densidad reducidas de estados enviados por la cadena, pero con una modificación. De acuerdo a la definición de fidelidad de Jozsa, la misma tiene una interpretación en términos de probabilidad. Utilizaremos la siguiente definición en las rutinas numéricas implementadas:

$$F(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{\left(\text{Tr}(\rho_1\rho_2) + 2[\det(\rho_1)\det(\rho_2)]^{1/2} \right)} \quad (30)$$

De aquí en más, cuando digamos fidelidad reducida nos referiremos a lo explicado aquí, a la fidelidad obtenida para la matriz densidad reducida del último sitio de la cadena.

Un último comentario al respecto permite aclarar un poco más el uso de la fidelidad como medida de distinguibilidad. Se busca poder cuantificar de alguna manera si dos estados son similares. Las matrices densidad dan acceso a toda la información que puede obtenerse del sistema, pues en particular, son distribuciones de probabilidad. Por ejemplo, si $F(\rho_1, \rho_2) = 1$, no hay ninguna observable u operación que me permita distinguir entre ambas matrices densidad, por lo cual el estado del sistema es el mismo. En cambio, si $F(\rho_1, \rho_2) \neq 1$, las matrices densidad son diferentes, y entonces existirán una o más observables u operaciones con las cuales podremos implementar algún proceso para intentar distinguir los estados.

Veremos más adelante cómo se comporta la fidelidad reducida en función del ruido y largo de las cadenas. Observaremos que la presencia del ambiente hace que la fidelidad reducida tienda a uno, es decir, no podemos distinguir entre dos estados luego de ser enviados por la cadena. En esos casos no podremos utilizar ningún proceso para decodificar un mensaje escrito en términos de esos estados. Ahora bien, si es posible mediante un dispositivo experimental implementar un proceso para distinguir estados, sabiendo que las matrices densidad son “diferentes” en alguna cantidad, la cadena permitirá transmitir el mensaje deseado, sabiendo que el receptor del mismo puede recuperarlo “suficientemente bien” mediante la aplicación de alguna operación en el último espín de la cadena.

3 Propiedades de escaleo para la fidelidad al tiempo de transmisión con modelo de ruido espectral

En este capítulo veremos por un lado el método de trabajo utilizado, y expondremos los primeros resultados obtenidos con el mismo, relacionados a las propiedades de escaleo para la fidelidad al tiempo de transmisión en función de parámetros del sistema.

3.1 El problema

Hemos comentado que la presencia de desorden en la cadena afecta la transmisión de información a través de la misma. Esto se refleja en la altura de los picos de fidelidad, la cual es menor. Es interesante estudiar la manera en la cuál la misma decae, en función de los parámetros del sistema, como por ejemplo, el largo de la cadena, la intensidad y tipo del ruido que la afecta. Se supone que la dependencia de la fidelidad con los diferentes parámetros puede ser expresada a través de leyes simples, o leyes de escala. Nos interesará en este trabajo, entre otras cosas, relacionar la fidelidad al tiempo de transmisión con la intensidad del ruido, y el largo de la cadena en cuestión.

Como hemos comentado, una de las maneras de introducir ruido es mediante el uso de lo que se conoce como *ruido estático*. Con ello nos referimos a imperfecciones en la construcción de la cadena, que se ven reflejadas en los acoples. En este esquema de ruido, a los acoples del Hamiltoniano se les suman pequeñas “perturbaciones”, dadas por números aleatorios. Luego se diagonaliza el mismo y se encuentran autovectores y autovalores. Esto modifica la evolución temporal, afectando la fidelidad. Estos modelos han sido ampliamente estudiados. En un trabajo del año 2005, De Chiara [19] estudió numéricamente la fidelidad al tiempo de transmisión en cadenas PST con ruido estático, encontrando que la caída en la fidelidad como función de la intensidad del ruido puede expresarse en términos de la intensidad de la imperfección de la cadena (ruido), y del largo de la misma, en forma de ley de escala. Encontraron que la fidelidad al tiempo de transmisión se comporta como $F(\tau) = f(N\epsilon^2)$, donde ϵ es la intensidad del ruido. Como vimos en la ecuación 13, la fidelidad depende fuertemente del espectro de energías del Hamiltoniano por lo cual es esperable que las propiedades de las leyes de escala se deban al comportamiento del mismo, y a cómo el ruido afecta estas energías.

3.2 Método de trabajo

A lo largo de todo el trabajo, se realizaron simulaciones numéricas. Se obtiene el espectro y autovectores del Hamiltoniano XX, expuesto en el capítulo 2, con la interacción entre vecinos correspondientes a cadenas PST o boundary controlled según corresponda. Los autovalores y autovectores se obtuvieron mediante el uso de las rutinas TQLI y TRED2 de Numerical Recipes [20]. Luego calculamos las cantidades de interés, en particular, fidelidades, como función del tiempo. Para ello, realizamos pasos de evolución pequeños Δt con el Hamiltoniano XX unitario, y aplicamos el ruido de la forma explicada anteriormente.

En primer lugar, se trabajó sin perturbaciones, y se verificaron las rutinas utilizadas repitiendo resultados de trabajos anteriores, y estudiando por ejemplo el comportamiento de la fidelidad con intensidad de ruido nula, para constatar que la

rutina funcione de la forma esperada. Para el proceso de obtención de autovalores y autovectores se verificó su correcto funcionamiento al obtener el espectro, el cual en cadenas PST mostró un comportamiento lineal, con diferencia de energías entre autovalores sucesivos constante. En el caso de las cadenas Boundary Controlled, el espectro también fue de la forma esperada.

En la figura 12 se observa el espectro para cadenas PST de diferentes largos. Vemos que es lineal, y que las diferencias de energía entre autovalores sucesivos se mantiene constante.

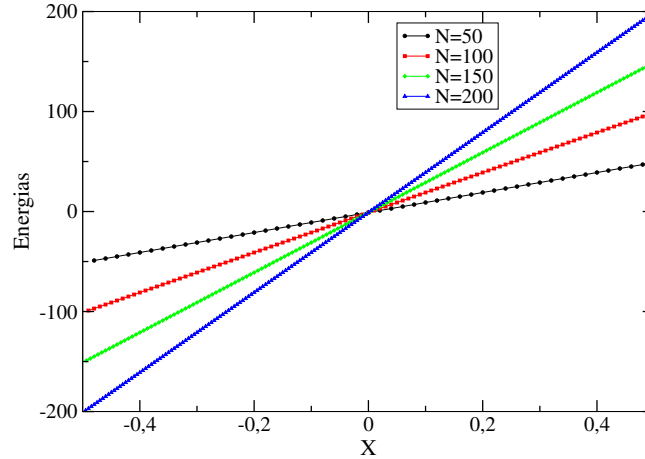


Figure 12: Espectro para cadena de transmisión perfecta (PST) para largos de cadena $N=50$ (negro), $N=100$ (rojo), $N=150$ (verde) y $N=200$ (azul). En esta figura $X = \frac{k}{N} - \frac{1}{2}$, donde k es el índice correspondiente a las energías E_k .

En la figura 13 podemos ver el espectro para cadenas Boundary Controlled de diferentes largos. Notemos que en este caso, a diferencia del caso anterior, las diferencias de energía entre autovalores sucesivos no es constante.

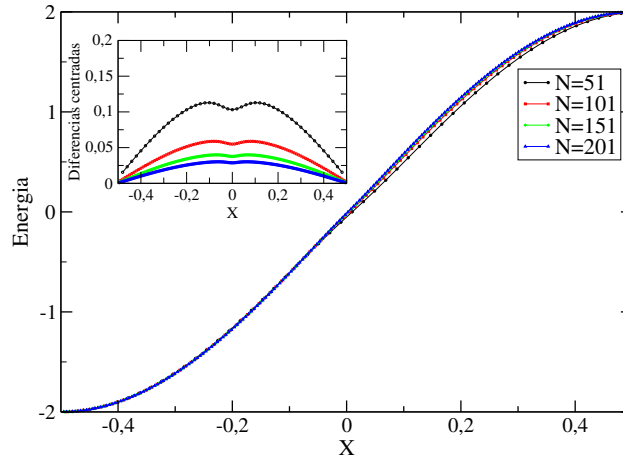


Figure 13: Espectro para cadena controlada por los bordes (BC) con parámetro α_{opt} para largos de cadena $N=51$ (negro), $N=101$ (rojo), $N=151$ (verde) y $N=201$ (azul). INSET: diferencias centradas entre los autovalores.

En segundo lugar, se incluirá la presencia de desorden dinámico. En la rutina se evoluciona el estado total de la cadena para una realización del ruido. A continuación se realizan promedios sobre realizaciones del ruido, es decir, repetimos los cálculos una cierta cantidad de veces (cada una con ruidos aleatorios diferentes). Esto equivale a pensar que tenemos muchas copias del sistema estudiado. Es importante remarcar que este método de trabajo es independiente del tipo de cadena utilizado (PST o BC).

3.3 Propiedades de escaleo para la fidelidad

En esta sección se muestran los primeros resultados, correspondientes a las propiedades de escaleo para la fidelidad al tiempo de transmisión con el primer modelo de ruido. Este consistía en sumar a los autovalores del Hamiltoniano un término $\Delta E_j = \lambda(2\phi_j - 1)$ en cada paso de evolución temporal, donde λ es un parámetro que regula la intensidad del ruido, y donde ϕ_j es un número aleatorio entre 0 y 1. Es decir, se hace $E_j \rightarrow E_j + \Delta E_j$ para cada una de las energías E_j (ver ec. 21).

Para los resultados de este capítulo se trabajó con rutinas que hacen 1000 promedios sobre realizaciones del ruido (para obtener curvas lo mas suaves posibles, sin excesivo tiempo de cómputo), y con un paso de evolución temporal $\Delta t = 0.005$ dentro de la rutina. El sistema, luego de evolucionar durante un tiempo Δt experimenta saltos $E_j + \Delta E_j$ en las energías. Es decir, el ruido actúa en cada paso de evolución.

Primero, se muestra cómo se comporta la fidelidad para este modelo de ruido en la figura 14.

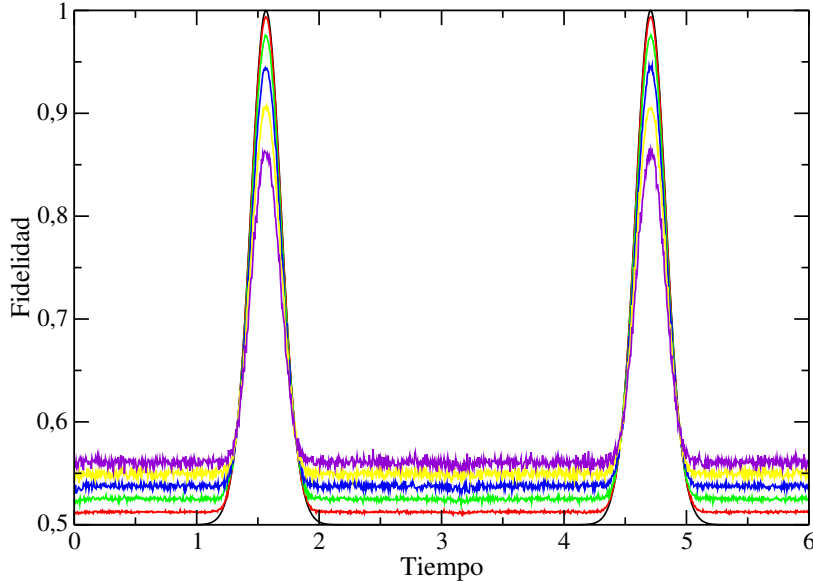


Figure 14: Fidelidad en cadena PST de largo $N=50$, para modelo de ruido espectral, y para diferentes valores de λ , los cuales son $\lambda = 0.00$ (negro), $\lambda = 0.25$ (rojo), $\lambda = 0.50$ (verde), $\lambda = 0.75$ (azul), $\lambda = 1.00$ (amarillo), $\lambda = 1.25$ (violeta).

En la figura 14, mostramos la fidelidad de una cadena PST de largo $N = 50$, para diferentes valores de λ . Observamos como el máximo valor de la fidelidad se presenta al tiempo de transmisión del sistema sin ruido, y que su valor disminuye cuando la intensidad del ruido λ aumenta. Esto se cuantifica ajustando curvas gaussianas, como explicaremos más adelante. Los tiempos de transmisión se mantienen, respetando la forma $\frac{(2n+1)\pi}{2}$ (esto viene de la ecuación 15 del capítulo 2, para el valor de $\Delta E = 2$ que es la diferencia de energía entre autovalores sucesivos para la cadena PST con la que se trabajó. Recordemos que las energías para PST están dadas en términos de J , donde $J_i = J\sqrt{i(N-i)}$, y en este trabajo se utilizó $J = 1$).

En la figura 15 se muestra un gráfico similar, pero para largo $N = 350$. Observamos nuevamente que la fidelidad máxima se presenta al tiempo de transmisión en el sistema sin ruido, que los picos de fidelidad caen a medida que aumenta la intensidad de ruido λ , y que los tiempos de transmisión se mantienen, respetando la forma $\frac{(2n+1)\pi}{2}$. También, a diferencia del caso $N=50$, podemos notar que el ancho de los picos es mucho menor (nuevamente, ajustando gaussianas). Además, se observa que los picos de fidelidad caen más rápido cuando la cadena es más larga.

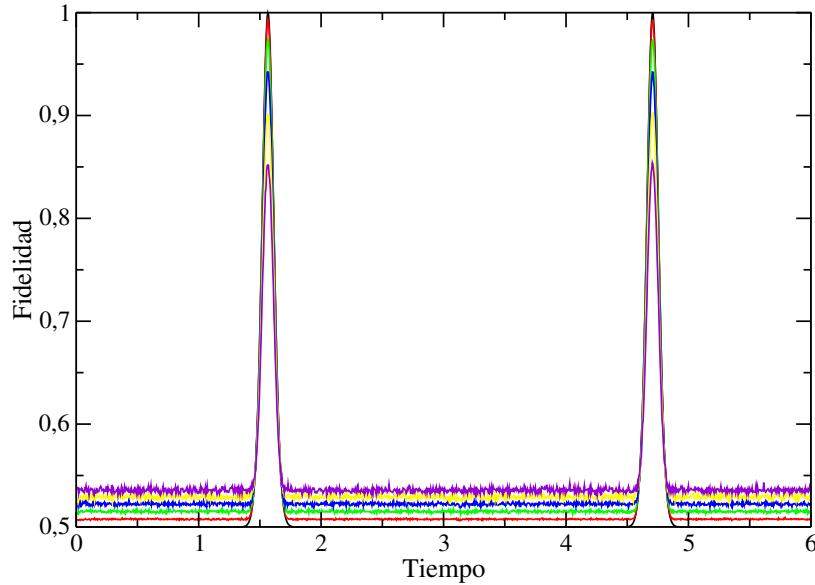


Figure 15: Fidelidad en cadena PST de largo $N=350$, para modelo de ruido espectral, y para diferentes valores de λ , los cuales son $\lambda = 0.00$ (negro), $\lambda = 0.25$ (rojo), $\lambda = 0.50$ (verde), $\lambda = 0.75$ (azul), $\lambda = 1.00$ (amarillo), $\lambda = 1.25$ (violeta).

En la figura 16 se muestra la fidelidad para diferentes largos de cadenas, al primer tiempo de transmisión, en función de la intensidad del ruido. Se utiliza el primer tiempo de transmisión por dos motivos. Primero, porque es el menor lapso de tiempo que un experimentador debe esperar para poder recuperar el estado enviado. En segundo lugar, porque en los tiempos de transmisión sucesivos, los picos de fidelidad son cada vez mas bajos, es decir, obtenemos fidelidades menores.

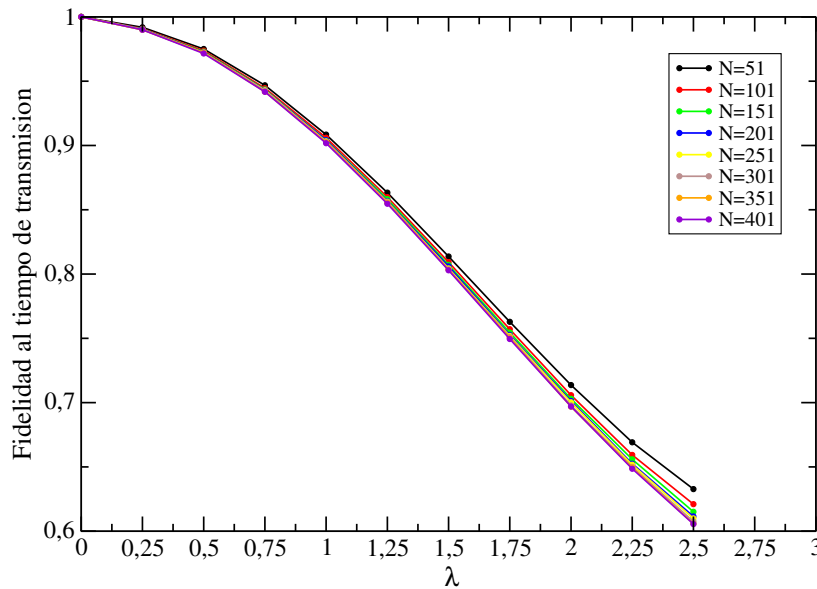


Figure 16: Fidelidad para cadenas PST con modelo de ruido espectral, en función de λ , para diferentes largos, los cuales son $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (marrón), $N = 351$ (naranja), y $N = 401$ (violeta).

Observamos que a medida que aumenta el largo de las cadenas, el valor de la fidelidad al tiempo de transmisión disminuye mas rápidamente.

Estos valores se obtuvieron realizando ajustes a los picos de fidelidad al tiempo de transmisión, con funciones gaussianas de la forma $F(t) = Ae^{-B(t-C)^2} + 1/2$. A

partir del parámetro A obtenemos la altura de los picos, y a partir del parámetro B calculamos el ancho a media altura de los picos. El parámetro C nos da el tiempo de transmisión para ese pico, el cuál siempre siguió la ley $\frac{(2n+1)\pi}{2}$ como dijimos antes.

Cada una de las curvas de fidelidad al tiempo de transmisión en función de λ puede ajustarse con la función $F(\lambda) = A_0 e^{-A_1 \lambda^2} + A_2$, con parámetros de correlación muy cercanos a 1 (siendo el mas bajo ≈ 0.98), y donde los parámetros A_0, A_1, A_2 del ajuste dependen del largo de la cadena. Estos parámetros serán presentados en el apéndice A.

Podemos escalar los resultados de la figura 16, relacionando los valores de λ entre las diferentes cadenas, obteniendo la figura 17. El hecho de que las curvas escalen nos dice que las curvas tienen la misma forma. Si uno consigue dar leyes de escala par las mismas, podremos por ejemplo, dado un largo de cadena N y una intensidad de ruido λ , conocer cuál es la máxima fidelidad posible para transmitir estados (ya que tendremos alguna relación de la forma $f(N, \lambda)$, de manera similar al trabajo de De Chiara [19]).

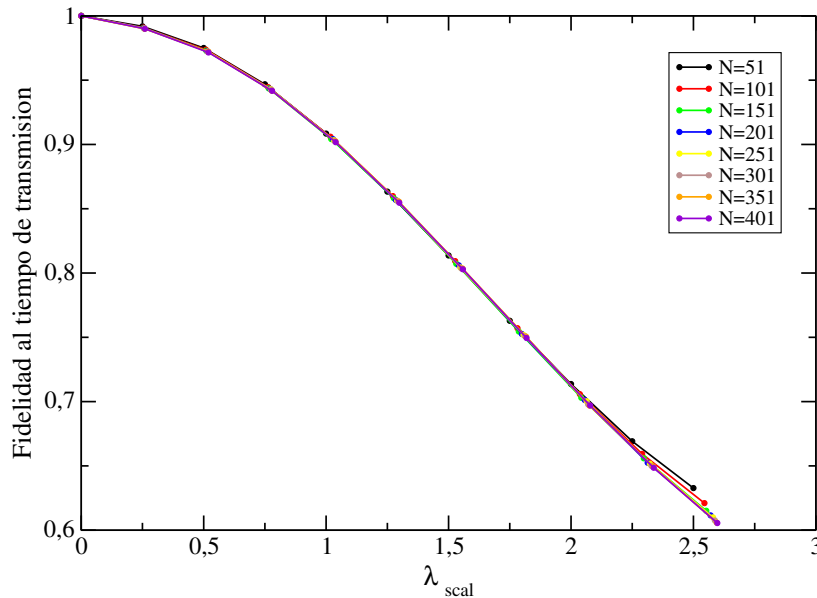


Figure 17: Scaling de la fidelidad al tiempo de transmisión para cadenas PST con modelo de ruido espectral, en función de λ , para los largos de cadena $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (marrón), $N = 351$ (naranja), y $N = 401$ (violeta).

En la tabla 1 detallaremos los parámetros de escaleo obtenidos.

λ_{51}	$1.018\lambda_{101}$	$1.021\lambda_{151}$	$1.028\lambda_{201}$	$1.032\lambda_{251}$	$1.035\lambda_{301}$	$1.038\lambda_{351}$	$1.039\lambda_{401}$
----------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------

Table 1: Parámetros de escaleo en λ para la fidelidad al tiempo de transmisión en cadenas PST con modelo de ruido espectral.

Vemos que las curvas se pegan mucho hasta $\lambda \approx 2$, que es el valor correspondiente a las diferencias de energía del sistema, y a partir de ese valor las curvas comienzan a separarse apreciablemente.

3.4 Propiedades de escaleo para el ancho de los picos de fidelidad

Pasemos a estudiar el ancho de los picos de fidelidad, en función del ruido, para diferentes largos. Los anchos se relacionan con los términos de la suma en la ecuación 13, que son los que luego aparecerán en la fidelidad, determinando su forma funcional. Utilizando ajustes gaussianos, obtenemos el ancho de los picos mostrados, en función del largo de las cadenas, y la intensidad del ruido.

Se calcula el ancho a media altura de los picos de fidelidad. Presenta el comportamiento explicitado en la figura 18

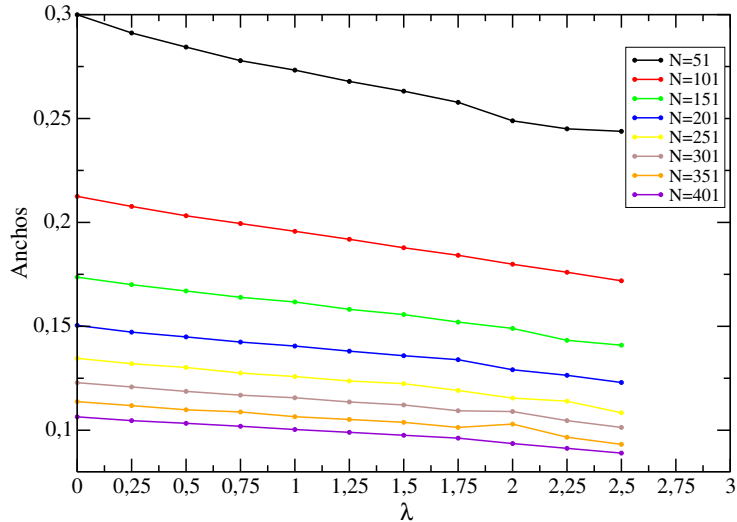


Figure 18: Anchos de los picos de fidelidad para cadenas PST con modelo de ruido espectral, en función de λ , para los largos de cadena $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (marrón), $N = 351$ (naranja), y $N = 401$ (violeta).

Observamos nuevamente que los picos se hacen más angostos al utilizar cadenas más largas, y que el ancho también decae en función de la intensidad del ruido.

Se observa que, si Y_{N1} es el valor de ancho para la cadena de largo $N1$, e Y_{N2} es el ancho correspondiente a una cadena de largo $N2$, la ley de escala para hacer que todos partan del mismo valor de ancho:

$$Y_{N1} \approx \sqrt{\frac{N2}{N1}} Y_{N2} \quad (31)$$

Sin embargo, para los valores de λ solo se obtuvo un scaling aproximado en términos de valores numéricos. Se obtuvieron los valores que se muestran en la tabla 2.

λ_{51}	$0.83\lambda_{101}$	$0.77\lambda_{151}$	$0.75\lambda_{201}$	$0.73\lambda_{251}$	$0.71\lambda_{301}$	$0.69\lambda_{351}$	$0.66\lambda_{401}$
----------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------

Table 2: Parámetros de escaleo en λ para el ancho de los picos de fidelidad al tiempo de transmisión en cadenas PST con modelo de ruido espectral.

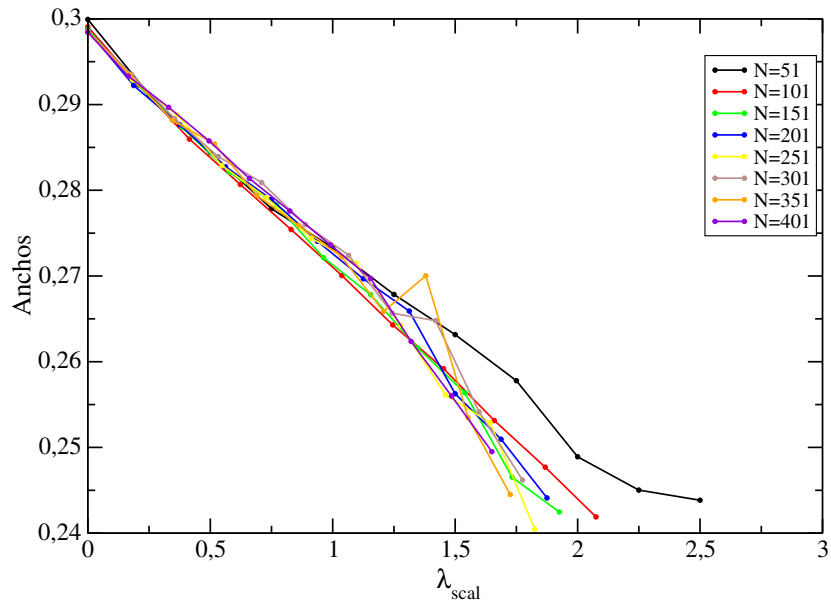


Figure 19: Scaling de los anchos para los picos de fidelidad para cadenas PST de largo impar con primer modelo de ruido, en función de λ , para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (marrón), $N = 351$ (naranja), y $N = 401$ (violeta).

Se observa en la figura 19 que el escaleo funciona relativamente bien para ruidos bajos, y comienzan a diferir bastante para los ruidos a partir de $\lambda = 1.25$. Las diferencias que se observan para λ mas grande se deben probablemente a falta de promediación. En trabajos futuros, se podría intentar suavizar estas curvas realizando una mayor cantidad de promedios sobre el ruido, conseguir mejores parámetros de scaling en λ , e intentar obtener alguna forma funcional explícita en lugar de los valores numéricos obtenidos.

4 Propiedades de escaleo para la fidelidad al tiempo de transmisión con modelo de ruido localizado

Consideremos ahora el segundo modelo de ruido dinámico presentado en el capítulo 2. Recordemos que este modelo consiste en sumar fases aleatorias a las fases de los sitios en los cuales está la excitación de espín. Definimos entonces un operador T actuando en los sitios cuyo efecto al aplicarlo en un paso de evolución es:

$$\begin{aligned} |\Psi(t + \Delta t)\rangle &= T(e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} |\Psi(t + (\Delta t - 1))\rangle) \\ &= \sum_{l=1}^N [(\sum_{j,l'=1}^N e^{-i\frac{E_j t}{\hbar}} C_j^l C_j^{l'*} \chi_{l'}) e^{i\lambda(2\phi_l - 1)}] |l\rangle \end{aligned} \quad (32)$$

donde $|l\rangle$ es la base de sitios. Recordemos también que el ruido no actúa necesariamente en todos los sitios en cada paso, sino que se elige de forma aleatoria cuántos y cuáles van a ser los sitios perturbados.

Se muestra el comportamiento de la fidelidad con este modelo de ruido en la figura 20.

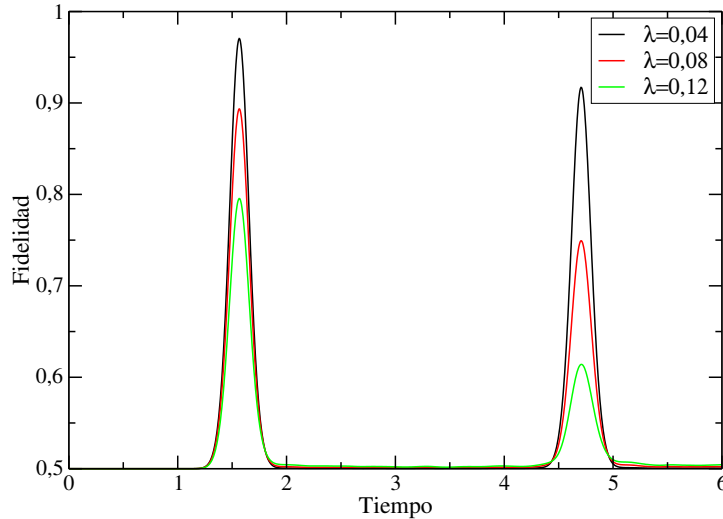


Figure 20: Fidelidad para cadena PST de largo 51, para intensidades de ruido $\lambda = 0.04$ (negro), $\lambda = 0.08$ (rojo), y $\lambda = 0.12$ (verde).

Observamos como a medida que aumenta la intensidad del ruido λ , los picos de fidelidad al primer tiempo de transmisión son más bajos. Vemos además que para el segundo tiempo de transmisión los picos son aún mas bajos en comparación con los del primer tiempo.

La figura 21 muestra los el comportamiento de la fidelidad para una cadena más larga.

Observamos nuevamente cómo a medida que aumenta la intensidad del ruido λ , los picos de fidelidad son más bajos. Al igual que en el caso anterior, se observa que para el segundo tiempo de transmisión los picos son mas bajos en comparación con los picos del primer tiempo. Notemos por último que el ancho de los picos disminuyó apreciablemente en relación al ancho de los picos para $N = 51$.

Se observa en ambos casos que el tiempo de transmisión es independiente de N , y que se comporta como antes según $\tau_{trans} = \frac{(2n+1)\pi}{2}$. También podemos notar que los valores de λ utilizados en este caso son menores a los utilizados en el capítulo 3, dado que la fidelidad decae a valores menores a $2/3$ para valores de λ mas pequeños en el caso de ruido localizado.

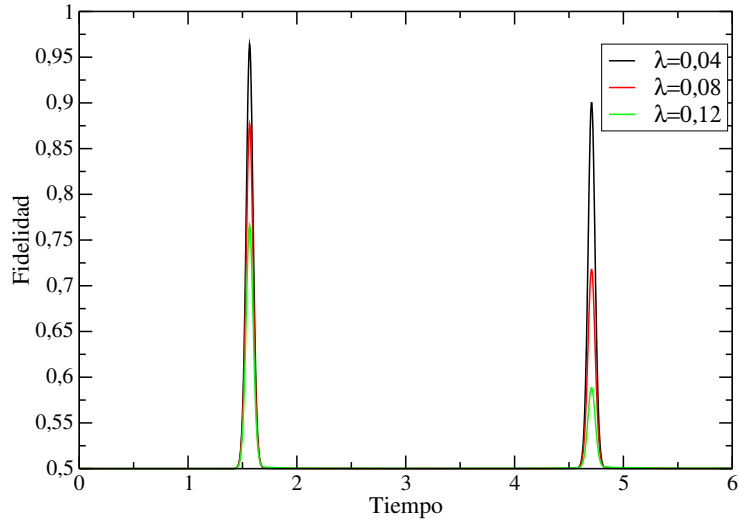


Figure 21: Fidelidad para cadena PST de largo 401, para intensidades de ruido $\lambda = 0.04$ (negro), $\lambda = 0.08$ (rojo), y $\lambda = 0.12$ (verde).

4.1 Propiedades de escaleo para la fidelidad

Pasamos a estudiar las propiedades de escaleo. En lo que sigue, y al igual que en el capítulo anterior, trabajamos con 1000 promedios sobre realizaciones, con un paso temporal de evolución $\Delta t = 0.005$, y con los picos de fidelidad al primer tiempo de transmisión.

Se trabajó realizando ajustes a los picos de fidelidad, con funciones gaussianas $F(t) = Ae^{-B(t-C)^2} + 0.5$. A partir del parámetro A obtenemos la altura de los picos, y a partir del parámetro B calculamos el ancho a media altura de los picos. El parámetro C nos da el tiempo de transmisión para ese pico, el cuál siempre siguió la ley $\frac{(2n+1)\pi}{2}$ como dijimos antes.

En la figura 22 se muestra la fidelidad al tiempo de transmisión para cadenas de diferente largo en función de la intensidad del ruido λ .

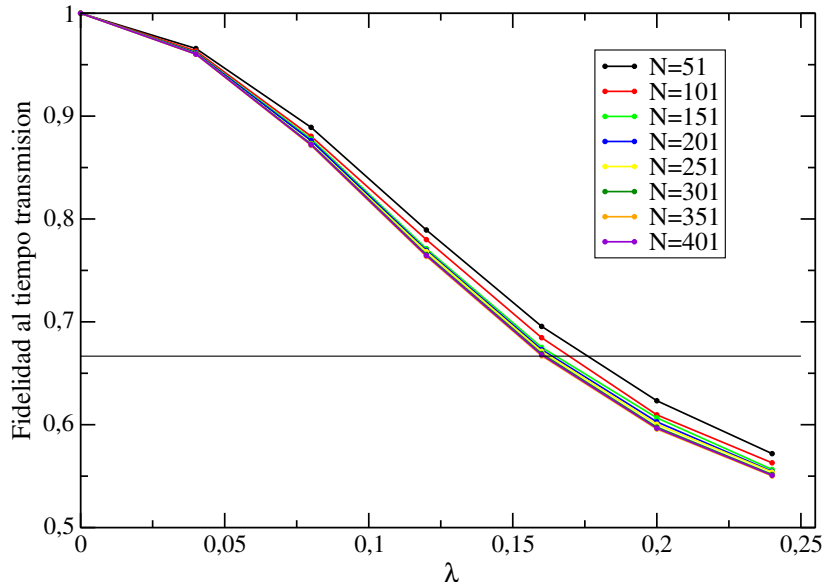


Figure 22: Fidelidad para cadenas PST en función de la intensidad del ruido, para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (verde oscuro), $N = 351$ (naranja), y $N = 401$ (violeta).

Observamos que a medida que aumenta el valor de λ , la fidelidad al tiempo de transmisión es cada vez menor. También podemos ver que para N más grande, la fidelidad disminuye más

rápídamente.

Nuevamente cada una de estas curvas puede ajustarse por $F(\lambda) = A_0 e^{-A_1 \lambda^2} + A_2$ con parámetros de correlación cercanos a 1, y donde los parámetros A_0, A_1, A_2 dependen del largo de la cadena. Los mismos muestran en el apéndice A.

Relacionando los valores de λ de las cadenas, podemos escalear las curvas de la figura 22.

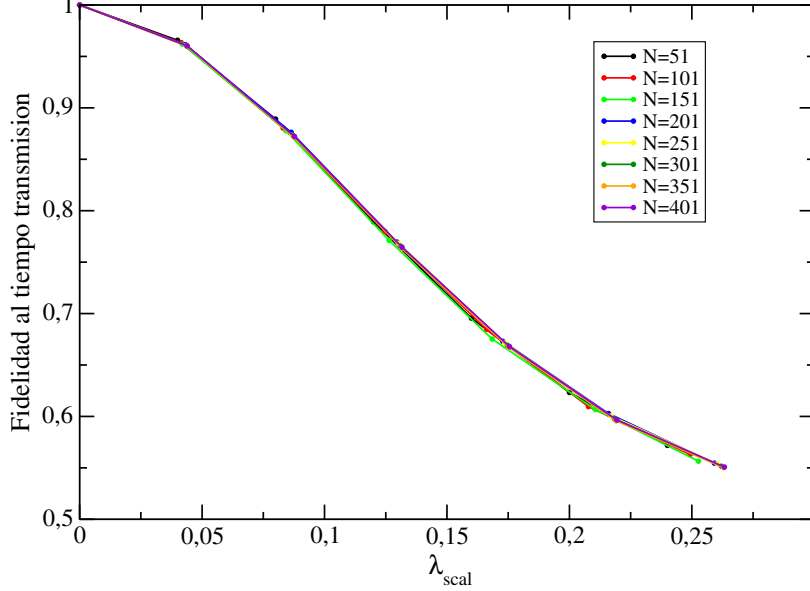


Figure 23: Scaling para la fidelidad en cadenas PST en función de la intensidad del ruido, para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (verde oscuro), $N = 351$ (naranja), y $N = 401$ (violeta).

Vemos en la figura 23 que el scaling es bastante bueno, pues las curvas colapsan en una sola. Los parámetros numéricos del escaleo se muestran en la tabla 3

λ_{51}	$1.03875\lambda_{101}$	$1.05292\lambda_{151}$	$1.08\lambda_{201}$	$1.085\lambda_{251}$	$1.092\lambda_{301}$	$1.0956\lambda_{351}$	$1.097\lambda_{401}$
----------------	------------------------	------------------------	---------------------	----------------------	----------------------	-----------------------	----------------------

Table 3: Parámetros de escaleo en λ para la fidelidad al tiempo de transmisión en cadenas PST con modelo de ruido localizado.

4.2 Propiedades de escaleo para el ancho de los picos de fidelidad

En la figura 24 se muestra el comportamiento de los anchos de los picos de fidelidad.

Vemos cómo el ancho disminuye para largos mas grandes. A largo fijo, el mismo aumenta con la intensidad del ruido.

En este caso, para conseguir que todas las curvas partan del mismo punto en el eje Y (anchos), notamos que si Y_{N1} es el valor de ancho para la cadena de largo $N1$, e Y_{N2} es el ancho correspondiente a la cadena de largo $N2$, vale que:

$$Y_{N1} \approx \sqrt{\frac{N2}{N1}} Y_{N2} \quad (33)$$

Esta propiedad es la misma que encontramos antes para el primer modelo de ruido. Para la parte del scaling en λ , obtuvimos nuevamente parámetros numéricos, los cuales se muestran en la tabla 4

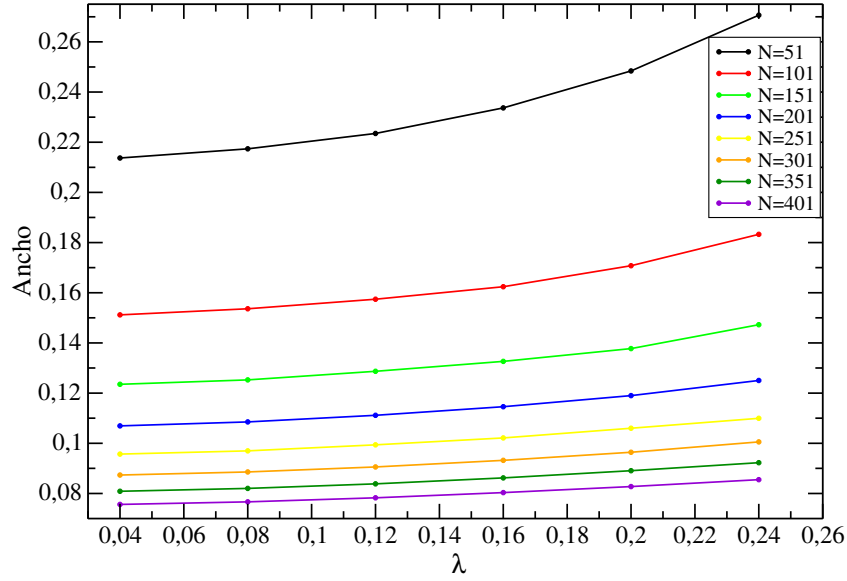


Figure 24: Anchos de los picos de fidelidad para cadenas PST en función de la intensidad del ruido, para modelo de ruido localizado, y para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (naranja), $N = 351$ (verde oscuro), y $N = 401$ (violeta).

λ_{51}	$0.90\lambda_{101}$	$0.87\lambda_{151}$	$0.85\lambda_{201}$	$0.81\lambda_{251}$	$0.80\lambda_{301}$	$0.79\lambda_{351}$	$0.78\lambda_{401}$
----------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------

Table 4: Parámetros de escaleo en λ para el ancho de los picos de fidelidad al tiempo de transmisión en cadenas PST con modelo de ruido localizado.

Estos valores son mayores a los obtenidos en el scaling para λ en el modelo de ruido anterior. Con estos parámetros, y los de la ecuación 33, obtenemos el escaleo para los anchos de la figura 25.

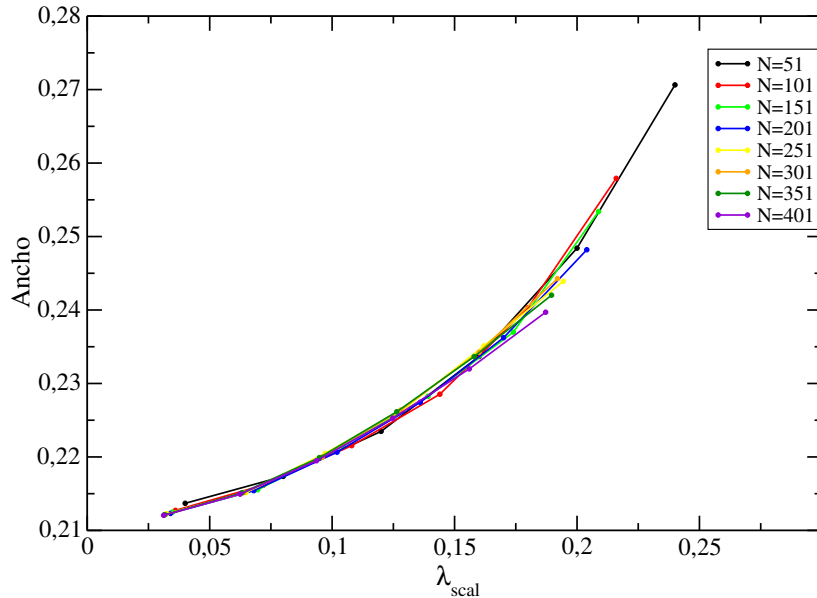


Figure 25: Escaleo para los anchos en cadenas PST con segundo modelo de ruido, en función de la intensidad del ruido, para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (naranja), $N = 351$ (verde oscuro), y $N = 401$ (violeta).

Podemos observar que a diferencia del modelo anterior, los anchos se comportan mucho mas suave, y los escaleos, si bien aún un poco imprecisos debido a tener proporcionalidades

numéricas en lugar de alguna relación funcional como en la ecuación 33, son bastante buenos. Para los valores de λ utilizados, la intensidad del ruido es pequeña en comparación a la escala de energía de estas cadenas, pues las diferencias de energía entre autovalores sucesivos son $\Delta E = 2$ en unidades de J , y las energías del sistema son cada vez más grandes para largos de cadena mayores.

5 Distinguibilidad de estados transmitidos usando cadenas de transmisión perfecta (PST)

Mencionamos en el capítulo 2 que nos interesaba estudiar la distinguibilidad entre estados usando la fidelidad. Esto es de vital importancia cuando queremos codificar un mensaje. Si disponemos de una cierta cantidad de estados para codificar en ellos el mensaje que queremos enviar (alfabeto), tenemos que saber de que manera afecta el canal ruidoso a la distinguibilidad de los mismos, para que luego en el otro extremo podamos “leer” la información enviada. Para armar un alfabeto deberíamos conocer que tan bien podemos diferenciar las letras usadas.

En la sección 2.9 vimos cuál es la fidelidad para estados mixtos. Vamos a utilizarla en cadenas PST, dando estados que inicialmente difieren en una cierta cantidad, y viendo cómo se modifica su distinguibilidad al transmitirlos por la cadena ruidosa, utilizando el modelo de ruido localizado. ¿Cómo haremos esto? Utilizando la matriz densidad reducida, comparamos dos estados que difieran en una cierta cantidad, los cuales inicialmente fueron puestos en el primer espín de la cadena. La medida de cuánto difieren viene dada por la fidelidad de estados mixtos, definida en la ecuación 28. Como al tomar matriz densidad reducida, terminamos en un espacio de Hilbert de dimensión 2, podemos usar la expresión estudiada en la ecuación 30, en la sección 2.9. A continuación, transmitimos por la cadena ruidosa ambos estados por separado. Es decir, enviamos primero uno de los dos estados iniciales, $|\Psi_1\rangle$, y luego volviendo a poner la cadena en su estado inicial, enviamos el otro estado a transmitir, $|\Psi_2\rangle$. Luego de ser recibidos en el último sitio al tiempo de transmisión, los comparamos nuevamente vía la fidelidad obtenida con la matriz densidad reducida, ecuación 30. Trabajaremos con estados que difieren inicialmente en 0,75, 0,80, 0,85, y 0,90 (recordemos también que la fidelidad va entre 0 y 1). Estas diferencias son elegidas tomando un estado fijo, $|1\rangle$, y algún estado $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ entre el conjunto de estados uniformemente distribuidos en la esfera de Bloch, de forma tal que la fidelidad reducida sea la que se quiere tener inicialmente.

Notemos que en este contexto los estados transmitidos por la cadena tienden a perder su distinguibilidad debido al ruido, y por ende tienden a perder su contenido de información. Es decir, el efecto del ruido es hacer que se “parezcan” cada vez más. Por eso, veremos que estados que inicialmente empezaron difiriendo en una cierta cantidad de las arriba mencionadas, luego de pasar por la cadena, tienen *fidelidad reducida* cada vez más cercana a 1. En particular, observamos que mientras mayor es el ruido, más se acerca la fidelidad a su valor máximo, evidenciando que ya no podemos distinguir los estados tan bien como antes.

Por lo tanto para lo que sigue, estudiaremos la distinguibilidad como se aclaró anteriormente, y también tendremos en cuenta la fidelidad promedio en cadenas PST, en función del largo de las mismas y la intensidad del ruido, es decir, los resultados del capítulo 4. Para todos los resultados de distinguibilidad, es decir capítulo 5 y 6, trabajamos con 100 promedios sobre realizaciones del ruido.

5.1 Estados que inicialmente difieren en 0,75

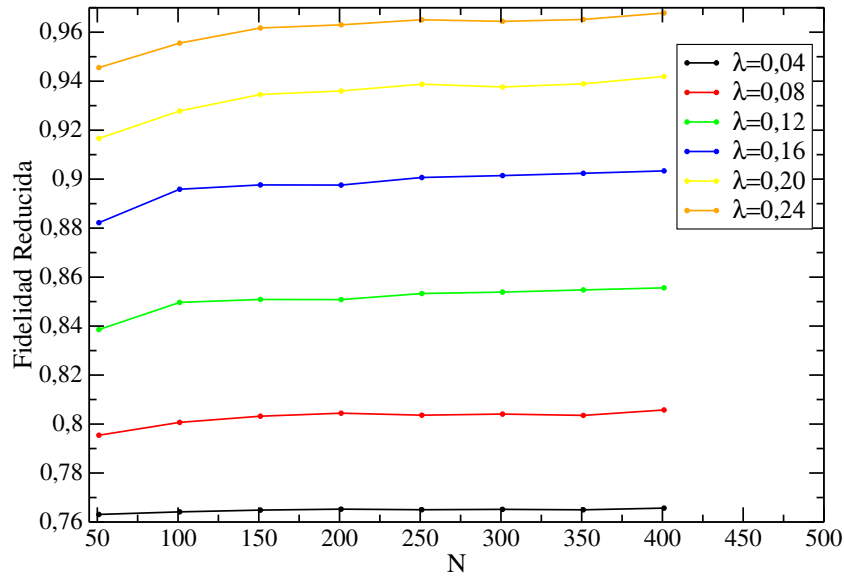


Figure 26: Fidelidad reducida para estados que inicialmente difieren en 0,75, en función de N , para los valores de intensidad de ruido $\lambda = 0,04$ (negro), $\lambda = 0,08$ (rojo), $\lambda = 0,12$ (verde), $\lambda = 0,16$ (azul), $\lambda = 0,20$ (amarillo), y $\lambda = 0,24$ (naranja).

En la figura 26 se observa cómo la fidelidad reducida aumenta con la intensidad del ruido λ . Esto se traduce en una menor distinguibilidad entre los estados enviados. Además, a medida que aumenta N y para intensidad del ruido fija, la fidelidad reducida también crece, pero tiende a estabilizarse con N . Esto es debido a que a medida que crece el largo de la cadena, por ser una cadena PST, las energías del sistema son cada vez más grandes. Entonces, la intensidad del desorden es cada vez menos importante frente a las escalas de energía del sistema.

En la figura 27 presentamos la misma información, pero graficando la fidelidad reducida en función de la intensidad del ruido λ .

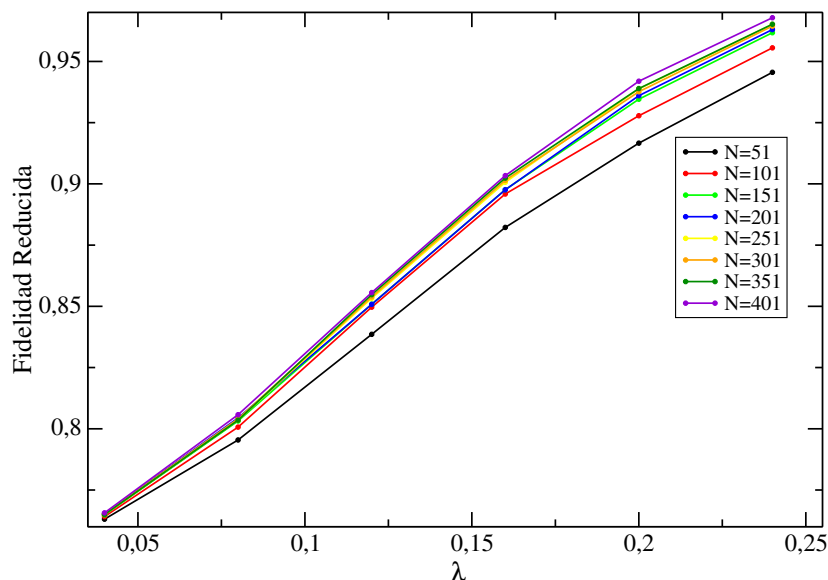


Figure 27: Fidelidad reducida para estados que inicialmente difieren en 0,75, en función de λ , para largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (naranja), $N = 351$ (verde oscuro), y $N = 401$ (violeta).

Observamos que a medida que crece λ , la fidelidad reducida aumenta. Entonces, es mas

difícil distinguir entre los estados que mandamos inicialmente. A medida que aumenta N la distinguibilidad también es menor, pues la fidelidad reducida es cada vez mayor. Además, es interesante comparar estos gráficos con la fidelidad promedio para estas cadenas (ver figura 28). Sabemos que si la fidelidad de transmisión de un estado cae por debajo de $2/3$, la fidelidad máxima para transmisión clásica de un estado cuántico, la transmisión no es lo suficientemente buena, y no justifica la utilización de estos sistemas.

Por último, es importante destacar que hasta $\lambda \approx 0,2$, las curvas del gráfico anterior presentan un comportamiento aproximadamente lineal. Esos valores de ruido son los de interés si queremos transmitir un estado, pues como veremos a continuación, para valores superiores la fidelidad promedio es menor a $2/3$. Para $\lambda \geq 0,2$, vemos además que las curvas dejan de tener un comportamiento lineal, pues la fidelidad reducida tiende a su valor máximo, que es 1. Esto es consistente, pues la fidelidad promedio es menor a $2/3$, y un receptor en el extremo final de la cadena no solo no puede distinguir entre los estados tan bien como al inicio del proceso, sino que además los estados ya son diferentes a lo que se quiso enviar en un principio (ver sección 2.5, donde se explica el origen del límite de fidelidad $2/3$).

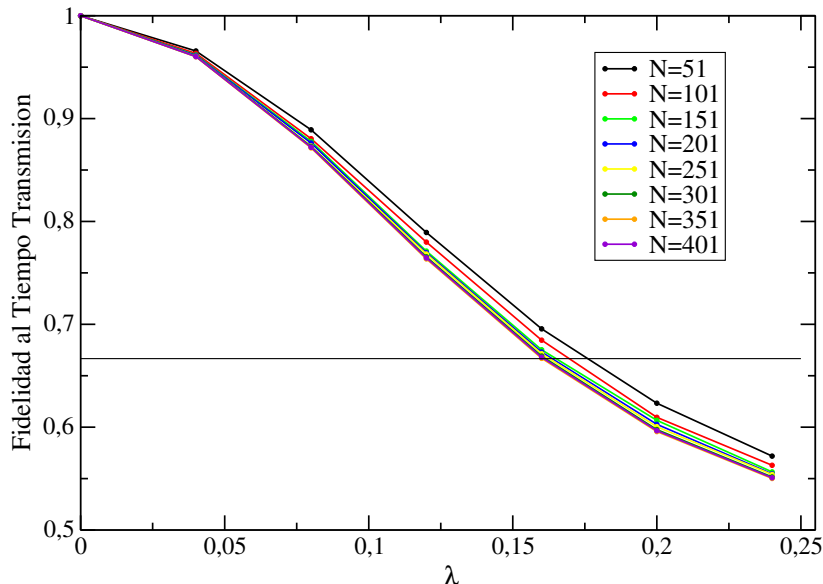


Figure 28: Fidelidad en cadenas PST en función de λ , junto al límite de fidelidad $2/3$ de transmisión clásica de un estado cuántico. Se graficaron los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (verde oscuro), $N = 351$ (naranja), y $N = 401$ (violeta).

Observamos que para ruidos mayores a $\lambda \approx 0,175$, la fidelidad para todos los largos cae por debajo de $2/3$. Entonces, por más que podamos alcanzar los requerimientos de distinguibilidad, la transmisión es pobre y es impráctico trabajar con esas cadenas.

Estudiamos también la distinguibilidad como función de N y λ , al igual que en los gráficos anteriores, para distinguibilidades iniciales de 0,80, 0,85, y 0,90. El comportamiento observado es idéntico al que fue presentado en este capítulo. Las figuras correspondientes se muestran en el apéndice B. Todas presentan el comportamiento lineal descrito anteriormente. Además, como para $\lambda \geq 0,175$ la fidelidad promedio es menor a $2/3$, no importa la distinguibilidad inicial, todas las curvas tienden a tener fidelidad reducida 1.

En resumen, podemos notar que la distinguibilidad disminuye a medida que aumentamos la intensidad del ruido, y el largo de la cadena. En el capítulo siguiente, realizaremos el mismo estudio en cadenas controladas por los bordes. Es oportuno aclarar que los resultados de este capítulo, y los que siguen para cadenas controladas por los bordes no son comparables. Esto es debido a que no están en el mismo régimen de perturbación. Para las cadenas controladas por los bordes, los tiempos de transmisión son mayores que los de las cadenas de transmisión

perfecta (en ambas cadenas se tomó $J = 1$, que define la escala de energía y por lo tanto las escalas de tiempo). Entonces las cadenas BC son perturbadas durante mucho más tiempo, ya que se realizan más pasos de evolución temporal. A futuro puede elegirse algún criterio para poder decir que estas cadenas están en el mismo régimen.

6 Distinguibilidad de estados transmitidos usando cadenas controladas por los bordes

Continuando con el estudio del modelo de ruido localizado presentado en la sección 2.8.2, y el estudio de la distinguibilidad de estados, nos interesa conocer qué sucede si en vez de tener cadenas de transmisión perfecta como en el capítulo anterior, contamos con una cadena Boundary Controlled. La idea es la misma, utilizar la matriz densidad reducida al último espín para estudiar la distinguibilidad de estados transmitidos por la cadena, en presencia de ruido localizado.

Trabajaremos con diferentes pasos temporales Δt en la evolución, usando $\Delta t = 0,05$ y $\Delta t = 0,005$. Es esperable (como veremos mas adelante que ocurre) que evolucionando con el paso temporal mas grande, la transmisión se vea menos afectada, ya que dejamos al sistema evolucionar con el Hamiltoniano libre por más tiempo antes de darle introducir fases a los sitios.

Deberemos entonces tener en cuenta cómo se comporta la fidelidad de transmisión para diferentes largos de cadena, en función de la intensidad del ruido, y según el paso temporal utilizado para la introducción de las fases en los sitios.

6.1 Evolución con paso temporal $\Delta t = 0,05$

Comenzamos presentando los resultados relacionados al paso temporal mas grande.

6.1.1 Estados que inicialmente difieren en 0,75

En la figura 29 se muestra la fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,75, en función del largo de las cadenas.

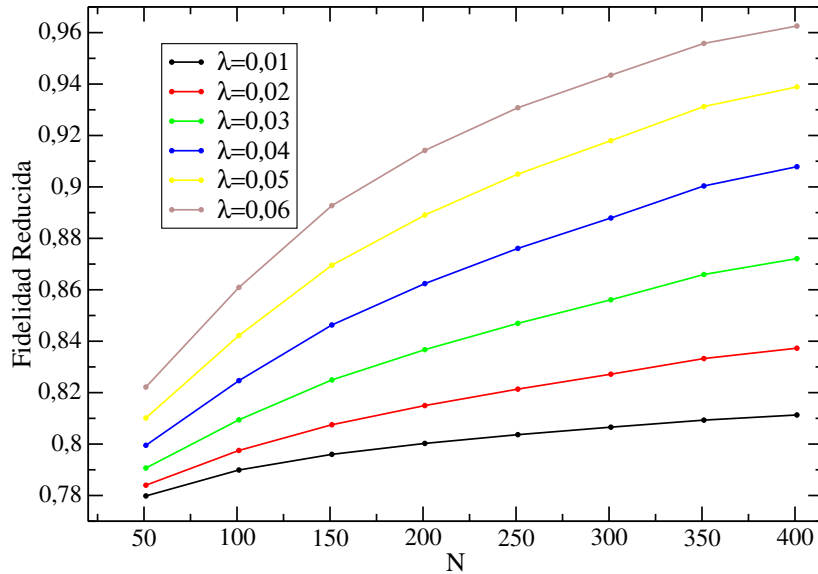


Figure 29: Fidelidad reducida para estados fidelidad reducida inicial de 0,75, en función de N , para los valores de intensidad el ruido $\lambda = 0,01$ (negro), $\lambda = 0,02$ (rojo), $\lambda = 0,03$ (verde), $\lambda = 0,04$ (azul), $\lambda = 0,05$ (amarillo), y $\lambda = 0,06$ (marrón).

Observamos que a medida que aumenta N , la fidelidad reducida crece. Además para valores de λ más grandes, la fidelidad reducida también aumenta en función de N , y lo hace más rápidamente. Esto es debido a que para cadenas BC, a medida que aumenta N , las diferencias de energía entre autovalores sucesivos no se mantiene como en el caso de las PST, sino que son cada vez más pequeñas, pues las energías del sistema están fijas en la banda $[-2J; 2J]$, como se mostró en capítulos anteriores.

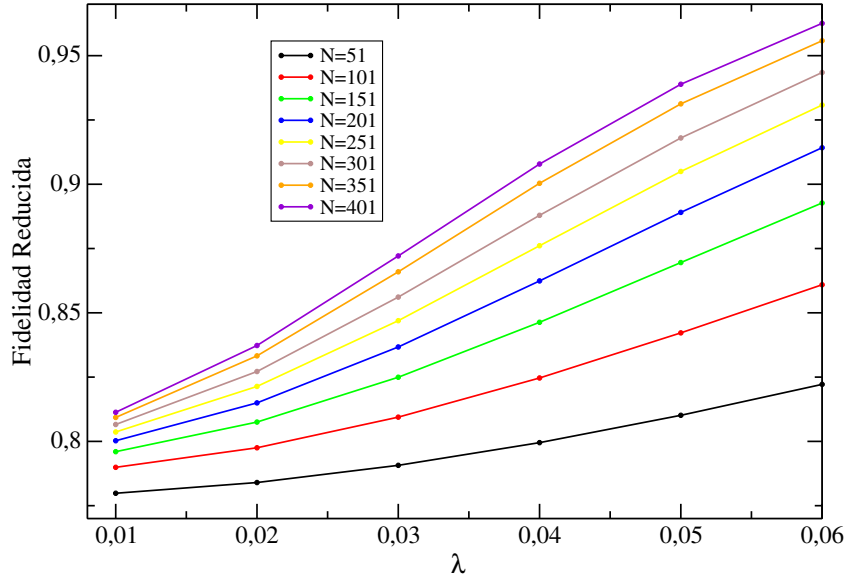


Figure 30: Fidelidad reducida para estados que inicialmente difieren en 0,75, en función de λ , para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (marrón), $N = 351$ (naranja) y $N = 401$ (violeta).

En la figura 30 se observa como a medida que aumenta λ , aumenta la fidelidad reducida. Para valores de N más grandes, la misma aumenta más rápidamente, debido a que las diferencias de energía son cada vez más pequeñas, y λ es más importante frente a las mismas.

Los gráficos correspondientes a fidelidades reducidas iniciales de 0,80, 0,85, y 0,90 presentan el mismo comportamiento, y se muestran en el apéndice C.

6.2 Evolución con paso temporal $\Delta t = 0,005$

Veremos ahora los resultados correspondientes al paso temporal de evolución mas pequeño. Esperamos que, como el estado inicial evoluciona por menos tiempo antes de introducirse las fases, las distinguibilidades empeoren más rápido que en la sección anterior con paso temporal más grande. Trabajamos con cadenas más cortas, por dos motivos. Primero, se observa al igual que en los casos anteriores, que la fidelidad reducida aumenta con N . Entonces, debido a que las fases se introducen con mayor frecuencia, la fidelidad reducida es muy cercana a 1 para N mas pequeños que en los casos anteriores. Por otro lado, como en las cadenas Boundary Controlled el tiempo de transmisión va como $N/2$ aproximadamente, para cadenas mas grandes, debemos hacer más pasos temporales para alcanzar dicho tiempo. Esto resulta en más iteraciones en el algoritmo, y por ende, el tiempo utilizado en una simulación es significativamente mayor.

6.2.1 Estados que inicialmente difieren en 0,75

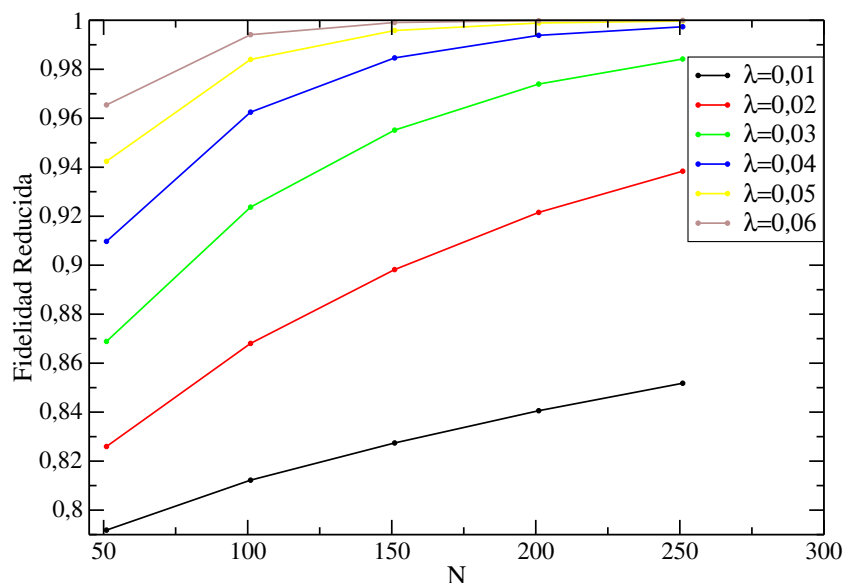


Figure 31: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,75, en función de N , para las intensidades de ruido $\lambda = 0,01$ (negro), $\lambda = 0,02$ (rojo), $\lambda = 0,03$ (verde), $\lambda = 0,04$ (azul), $\lambda = 0,05$ (amarillo), y $\lambda = 0,06$ (marrón).

Observamos en la figura 31 el mismo comportamiento que para el paso temporal $\Delta t = 0,05$, pero más pronunciado. Por ejemplo, para la curva correspondiente a una fidelidad reducida inicial de 0,75, vemos que para el valor de $N = 251$ la fidelidad reducida supera el valor 0,82, a diferencia de lo que sucede con el paso temporal $\Delta = 0,05$, donde para la misma curva y mismo N , la fidelidad reducida es menor a 0,8. Esto es debido a que en este caso el sistema evoluciona libremente durante una menor cantidad de tiempo antes de experimentar un salto (introducción de fases aleatorias). Este comportamiento se corresponde con lo esperado, que fue comentado al comienzo de esta sección.

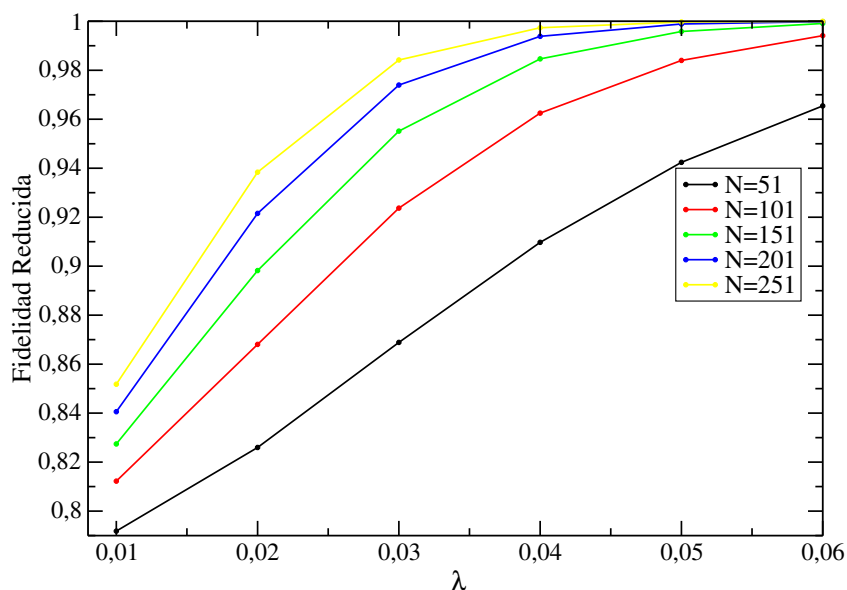


Figure 32: Fidelidad reducida para estados que inicialmente difieren en 0,75, en función de λ , para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), y $N = 251$ (amarillo).

En la figura 32 se observa como a medida que aumenta λ , aumenta la fidelidad reducida.

Para valores de N más grandes, la misma aumenta más rápidamente. Observamos que las curvas presentan una mayor concavidad en comparación con las correspondientes a $\Delta t = 0,05$ presentadas en la sección anterior. Además, vemos que la fidelidad reducida aumenta más rápidamente que en el caso anterior para un paso temporal más grande.

Los gráficos correspondientes a distinguibilidades iniciales de 0,80, 0,85, y 0,90 presentan el mismo comportamiento, y se muestran en el apéndice C.

En resumen, se observa en ambos casos que la distinguibilidad disminuye a medida que aumenta la intensidad del ruido, y el largo de las cadenas. Por otro lado, la distinguibilidad disminuye más pronunciadamente con el aumento de la intensidad del ruido para el caso en el que utilizamos un paso temporal mas pequeño, ya que el sistema evoluciona con su Hamiltoniano unitario por menos tiempo antes de introducir fases a los sitios.

7 Conclusiones y perspectivas a futuro

Se estudiaron las propiedades de escaleo para la fidelidad, tanto en cadenas de transmisión perfecta como en cadenas controladas por los bordes, sometidas a la presencia de ruido dinámico. También se estudió la distinguibilidad de estados en estas cadenas y se obtuvieron curvas que relacionan la fidelidad reducida con la intensidad del ruido y el largo de las cadenas, en las cuales se observa que la misma aumenta como función de la intensidad del ruido y N . Se observa además que, a pesar de tener distinguibilidad para ciertos valores de N y λ , la fidelidad promedio para esos valores ya es menor a $2/3$. Entonces distinguimos los estados, pero los mismos no se corresponden con los estados enviados originalmente.

Posibles extensiones de este trabajo pueden ser mejorar los escaleos realizando más promedios sobre el ruido, y estudiar aquellos que no pudieron ser expresados como leyes en función de los parámetros de la cadena, para intentar obtener estas relaciones funcionales. Esto permitirá dar los parámetros numéricos del ajuste (A_0, A_1, A_2) de $F(\lambda)$ en función de largos de la cadena y la intensidad del ruido. También pueden estudiarse las propiedades de escaleo para las cadenas controladas por los bordes, en presencia de ruido dinámico. Como se mencionó en el capítulo 5, los resultados para distinguibilidad obtenidos con cadenas de transmisión perfecta y cadenas controladas por los bordes no son comparables. A futuro hay que elegir algún criterio para poder decir que se encuentran en el mismo régimen de perturbación, y comparar su desempeño. Un criterio posible es considerar la fase que acumula un sitio durante la evolución temporal. Por la forma de esta fase, y porque los números aleatorios utilizados van entre 0 y 1, el valor medio de esta fase es 0. Pero se puede considerar el cuadrado de esta cantidad, es decir, su varianza, y trabajar con su valor fijo para ambas cadenas. Otro criterio podría ser considerar el producto λt_{trans} , y trabajar manteniendo este valor constante. Por supuesto podrían elegirse otros criterios, y deberá elegirse el más adecuado.

Por otro lado, se puede estudiar la distinguibilidad utilizando modelos de ruido que además de modificar las fases de los sitios, cambien la magnetización, es decir, permitan dar vuelta espines.

A Parámetros A0, A1, A2 del ajuste de la fidelidad en función de λ , para cadenas PST.

Recordemos que cada una de las curvas de fidelidad al tiempo de transmisión en función de λ pueden ajustarse con la función $F(\lambda) = A_0 e^{-A_1 \lambda^2} + A_2$, con parámetros de correlación muy cercanos a 1 (siendo el más bajo $\approx 0,98$), y donde los parámetros A_0, A_1, A_2 del ajuste dependen del largo de la cadena. Estos parámetros se muestran a continuación separados según correspondan al modelo de ruido espectral o localizado.

A.1 Modelo de ruido espectral

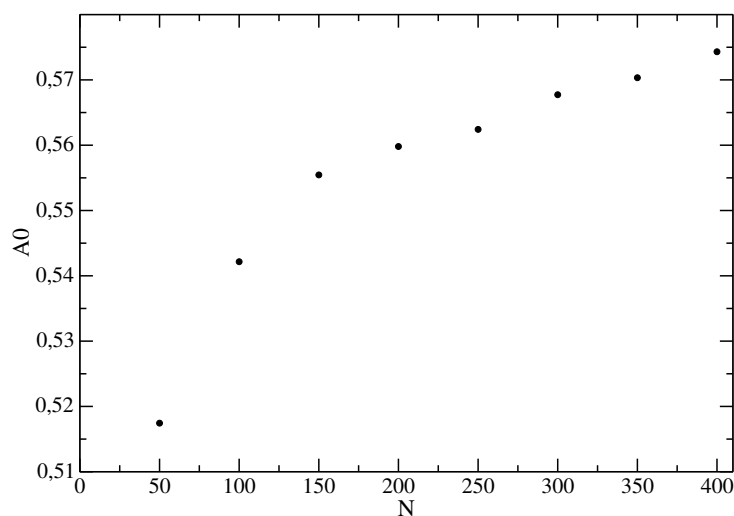


Figure 33: Parámetro A0 para cadenas pares del ajuste de $F(\lambda)$. Los largos de cadena N correspondientes son $N = 50$, $N = 100$, $N = 150$, $N = 200$, $N = 250$, $N = 300$, $N = 350$ y $N = 400$

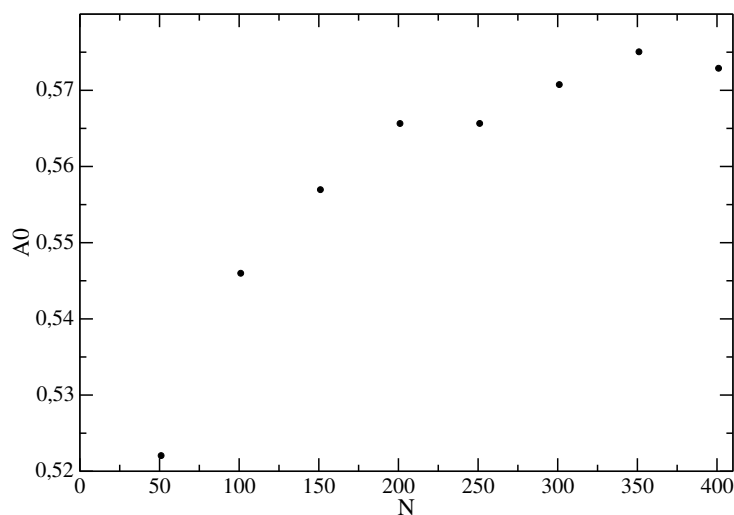


Figure 34: Parámetro A0 para cadenas impares del ajuste de $F(\lambda)$. Los largos de cadena N correspondientes son $N = 51$, $N = 101$, $N = 151$, $N = 201$, $N = 251$, $N = 301$, $N = 351$ y $N = 401$

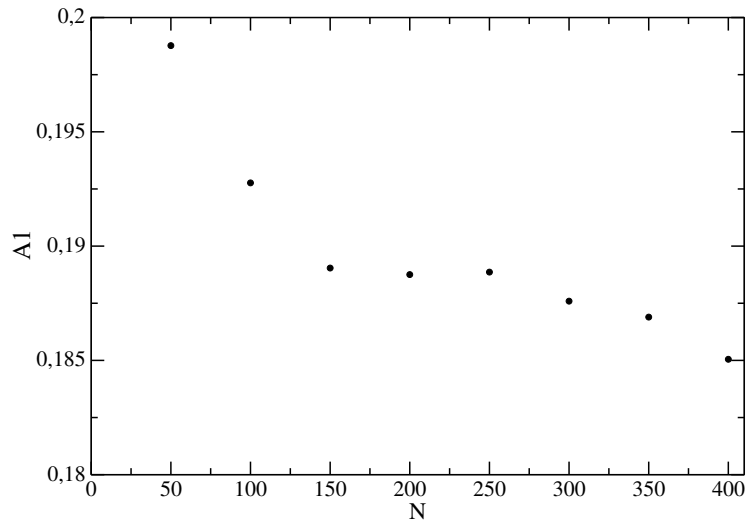


Figure 35: Parámetro A1 para cadenas pares del ajuste de $F(\lambda)$. Los largos de cadena N correspondientes son $N = 50$, $N = 100$, $N = 150$, $N = 200$, $N = 250$, $N = 300$, $N = 350$ y $N = 400$

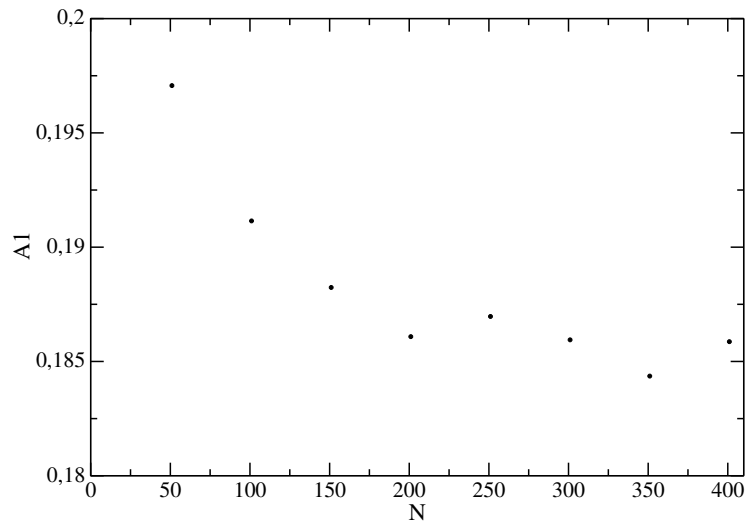


Figure 36: Parámetro A1 para cadenas impares del ajuste de $F(\lambda)$. Los largos de cadena N correspondientes son $N = 51$, $N = 101$, $N = 151$, $N = 201$, $N = 251$, $N = 301$, $N = 351$ y $N = 401$

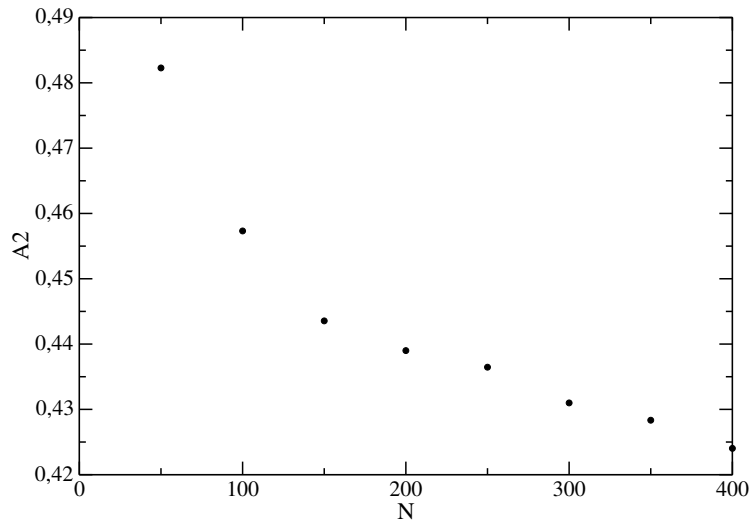


Figure 37: Parámetro A2 para cadenas pares del ajuste de $F(\lambda)$. Los largos de cadena N correspondientes son $N = 50$, $N = 100$, $N = 150$, $N = 200$, $N = 250$, $N = 300$, $N = 350$ y $N = 400$

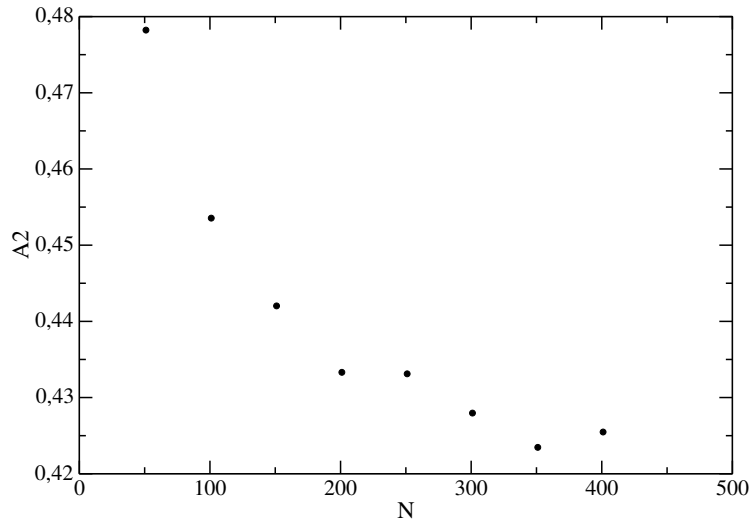


Figure 38: Parámetro A2 para cadenas impares del ajuste de $F(\lambda)$. Los largos de cadena N correspondientes son $N = 51$, $N = 101$, $N = 151$, $N = 201$, $N = 251$, $N = 301$, $N = 351$ y $N = 401$

A.2 Modelo de ruido localizado

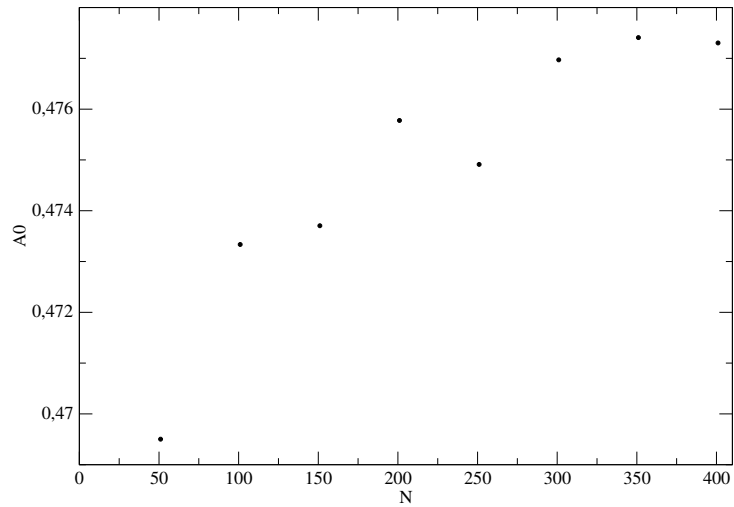


Figure 39: Comportamiento parámetro A_0 de el ajuste $F(\lambda)$ en función de N . Los largos de cadena N correspondientes son $N = 51$, $N = 101$, $N = 151$, $N = 201$, $N = 251$, $N = 301$, $N = 351$ y $N = 401$

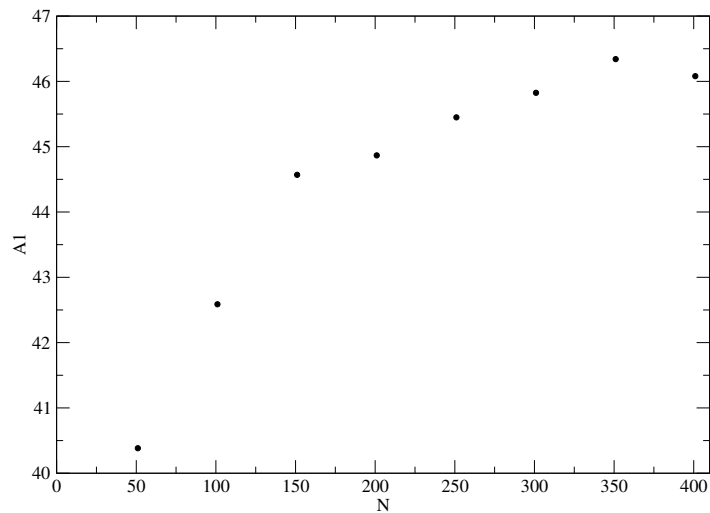


Figure 40: Comportamiento parámetro A_1 de el ajuste $F(\lambda)$ en función de N . Los largos de cadena N correspondientes son $N = 51$, $N = 101$, $N = 151$, $N = 201$, $N = 251$, $N = 301$, $N = 351$ y $N = 401$

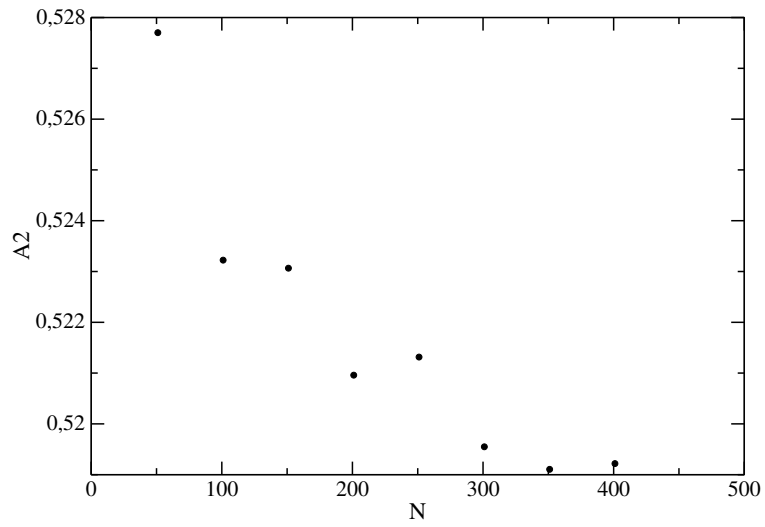


Figure 41: Comportamiento parámetro A_2 de el ajuste $F(\lambda)$ en función de N . Los largos de cadena N correspondientes son $N = 51$, $N = 101$, $N = 151$, $N = 201$, $N = 251$, $N = 301$, $N = 351$ y $N = 401$

B Fidelidad reducida en cadenas PST

En este apéndice mostramos las curvas correspondientes a la distinguibilidad en función de los parámetros λ y N , para diferentes valores de distinguibilidad inicial, complementando así lo expuesto en el capítulo 5.

B.1 Estados con fidelidad reducida inicial de 0,80

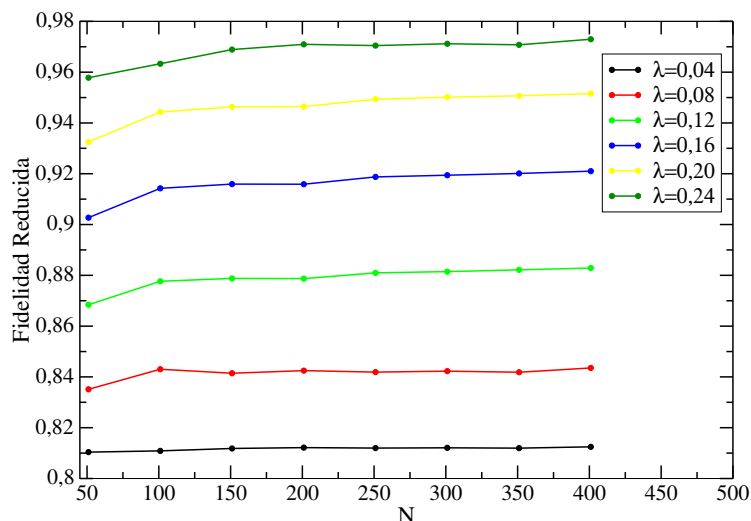


Figure 42: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial 0,80, en función de N , para diferentes valores de λ . Las curvas mostradas corresponden a $\lambda = 0,04$ (negro), $\lambda = 0,08$ (rojo), $\lambda = 0,12$ (verde), $\lambda = 0,16$ (azul), $\lambda = 0,20$ (amarillo), y $\lambda = 0,24$ (verde oscuro).

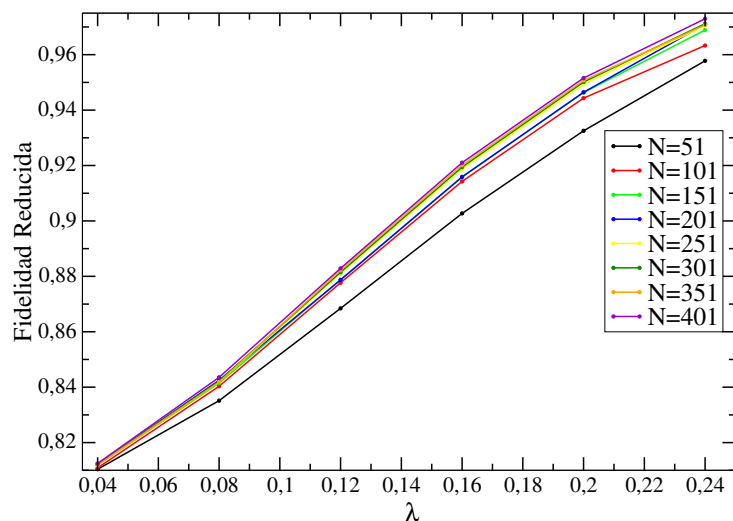


Figure 43: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,80, en función de λ , para diferentes valores de N , los cuales son $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (verde oscuro), $N = 351$ (naranja), y $N = 401$ (violeta).

Nuevamente se observa el comportamiento ya comentado, a medida que λ aumenta, la distinguibilidad empobrece.

B.2 Estados con fidelidad reducida inicial de 0,85

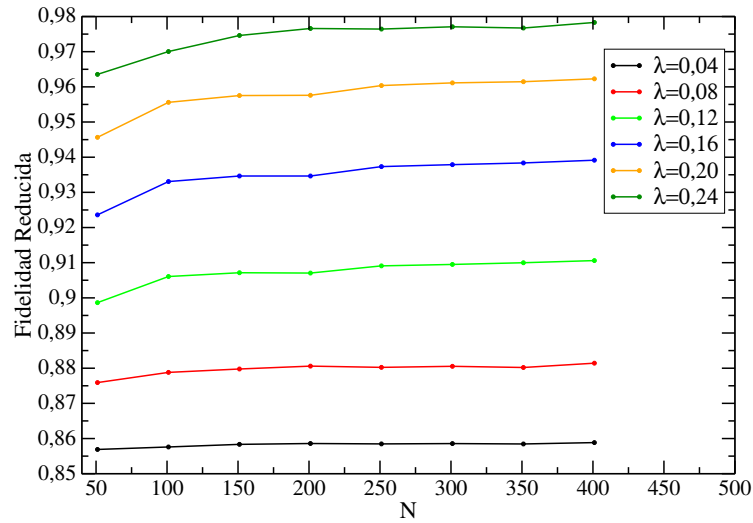


Figure 44: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de N , para diferentes valores de λ . Las curvas mostradas corresponden a $\lambda = 0,04$ (negro), $\lambda = 0,08$ (rojo), $\lambda = 0,12$ (verde), $\lambda = 0,16$ (azul), $\lambda = 0,20$ (naranja), y $\lambda = 0,24$ (verde oscuro).

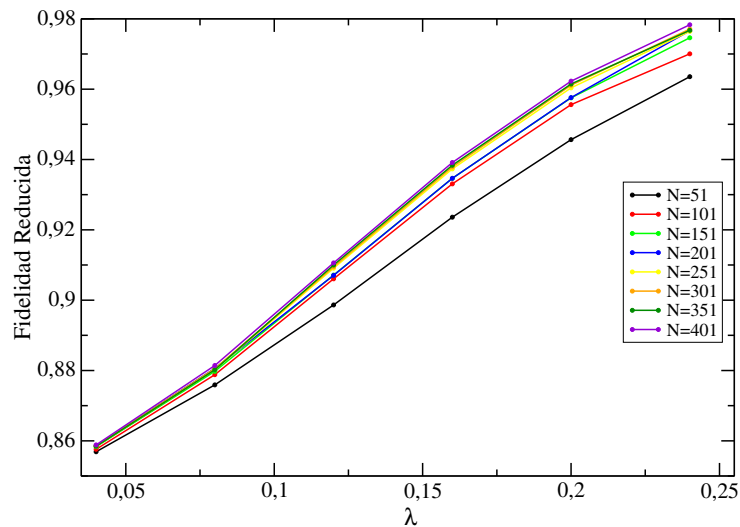


Figure 45: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de λ , para diferentes valores de N , los cuales son $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (naranja), $N = 351$ (verde oscuro), y $N = 401$ (violeta).

Volvemos a observar el comportamiento de los apartados anteriores. En particular, a partir de $\lambda = 0,12$ la fidelidad reducida es del orden de $F \approx 0,9$.

B.3 Estados con fidelidad reducida inicial de 0,90

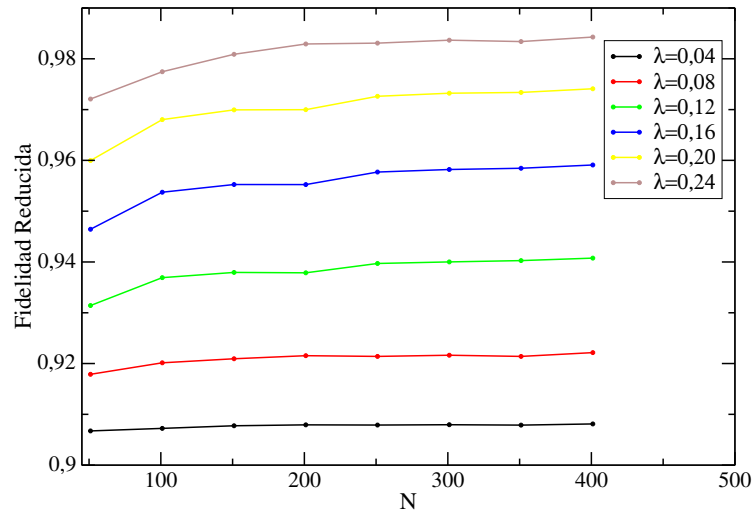


Figure 46: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,90, en función de N , para los valores de intensidad de ruido $\lambda = 0,04$ (negro), $\lambda = 0,08$ (rojo), $\lambda = 0,12$ (verde), $\lambda = 0,16$ (azul), $\lambda = 20$ (amarillo), y $\lambda = 24$ (marrón).

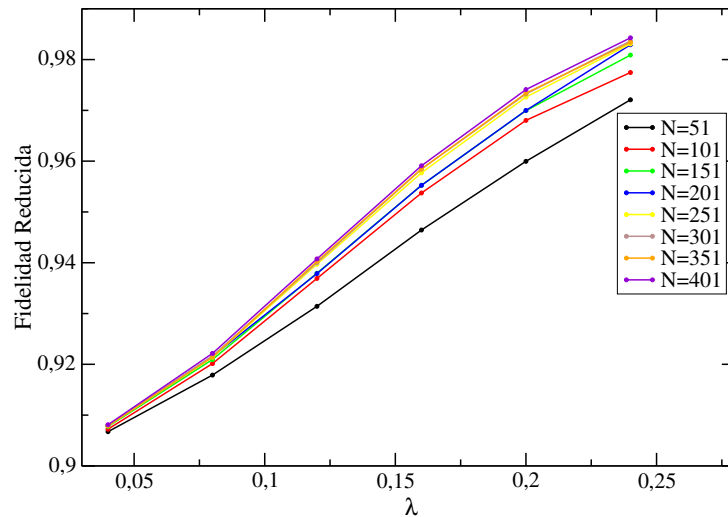


Figure 47: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,90, en función de λ , para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (marrón), $N = 351$ (naranja), y $N = 401$ (violeta).

Volvemos a observar el comportamiento de los apartados anteriores. En particular, para $\lambda = 0,24$ la Fidelidad reducida es aproximadamente del orden de $F \approx 0,98$.

C Fidelidad reducida en cadenas BC

En este apéndice mostramos las curvas correspondientes a distinguibilidad en función de N y λ , para diferentes valores de distinguibilidad inicial, y para los dos pasos temporales utilizados. Esto complementa lo expuesto en el capítulo 6.

C.1 Evolución con paso temporal $\Delta t = 0,05$

C.1.1 Estados con fidelidad reducida inicial 0,80

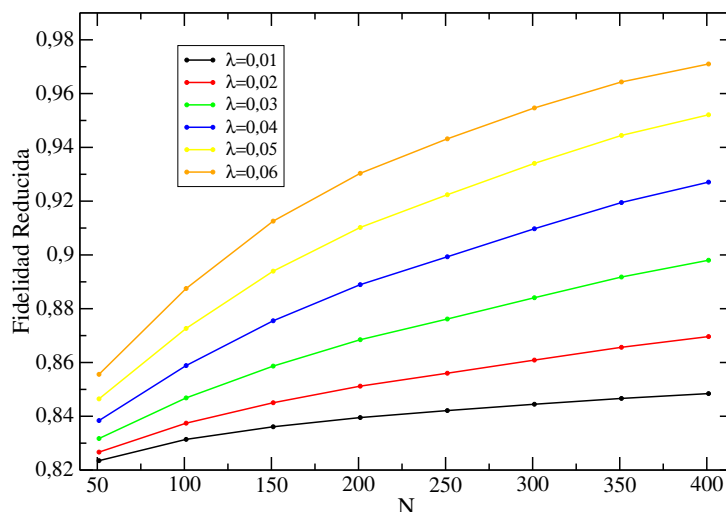


Figure 48: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,80, en función de N , para las intensidades de ruido $\lambda = 0,01$ (negro), $\lambda = 0,02$ (rojo), $\lambda = 0,03$ (verde), $\lambda = 0,04$ (azul), $\lambda = 0,05$ (amarillo), y $\lambda = 0,06$ (naranja).

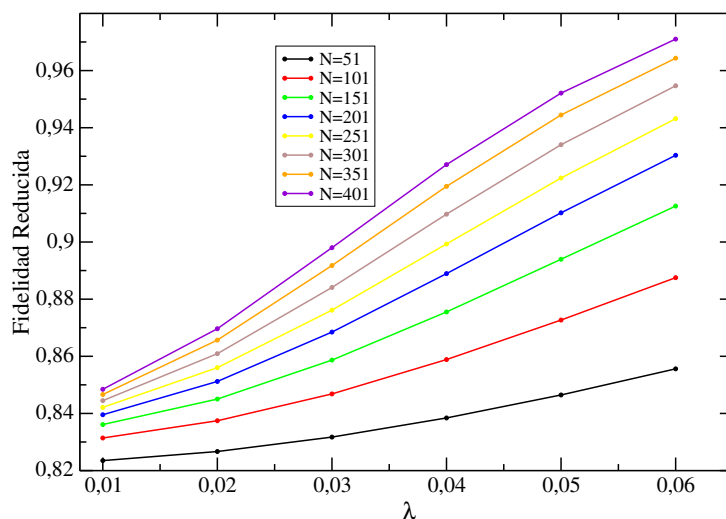


Figure 49: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,80, en función de λ , para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (marrón), $N = 351$ (naranja), y $N = 401$ (violeta).

C.1.2 Estados con fidelidad reducida inicial de 0,85

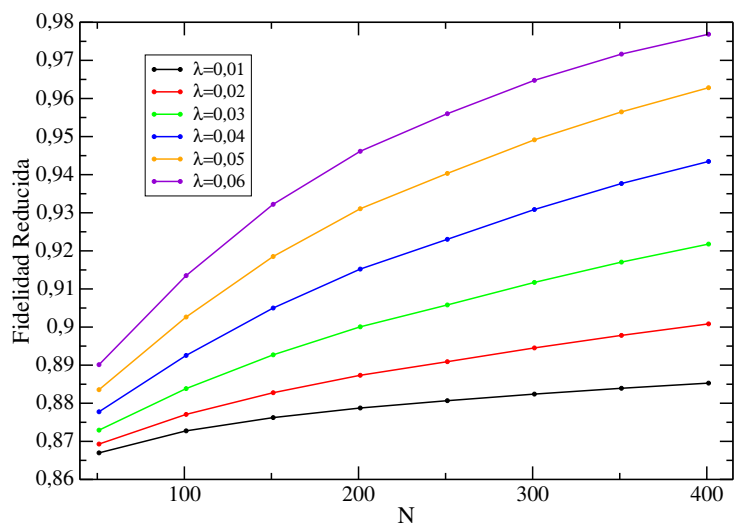


Figure 50: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de N, para las intensidades de ruido $\lambda = 0,01$ (negro), $\lambda = 0,02$ (rojo), $\lambda = 0,03$ (verde), $\lambda = 0,04$ (azul), $\lambda = 0,05$ (naranja), y $\lambda = 0,06$ (violeta).

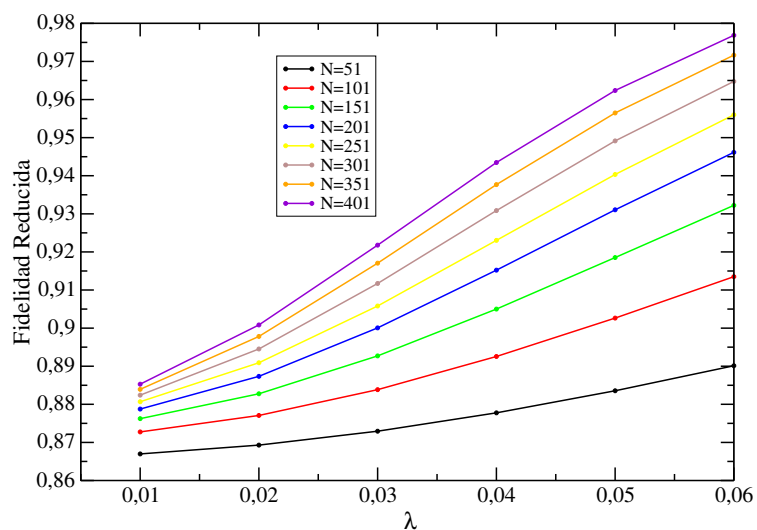


Figure 51: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de λ , para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (marrón), $N = 351$ (naranja), y $N = 401$ (violeta).

C.1.3 Estados con fidelidad reducida inicial de 0,90

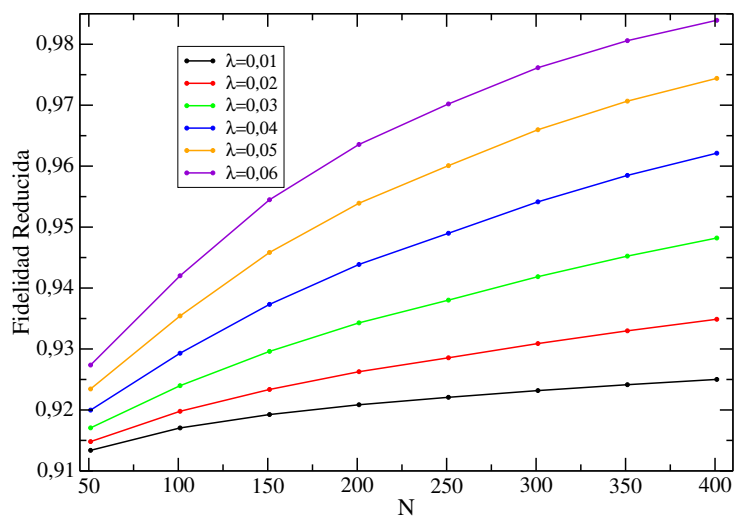


Figure 52: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,90, en función de N , para las intensidades de ruido $\lambda = 0,01$ (negro), $\lambda = 0,02$ (rojo), $\lambda = 0,03$ (verde), $\lambda = 0,04$ (azul), $\lambda = 0,05$ (naranja), y $\lambda = 0,06$ (violeta).

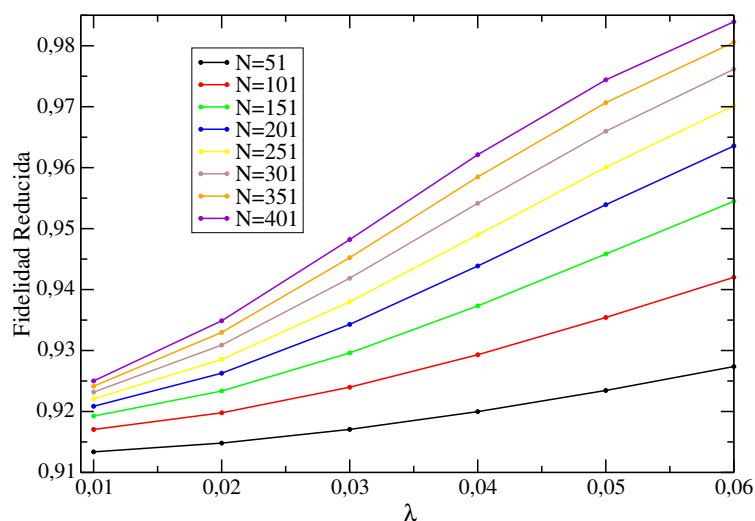


Figure 53: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,90, en función de λ , para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo), $N = 301$ (marrón), $N = 351$ (naranja), y $N = 401$ (violeta).

C.2 Evolución con paso temporal $\Delta t = 0,005$

C.2.1 Estados con fidelidad reducida inicial de 0,80

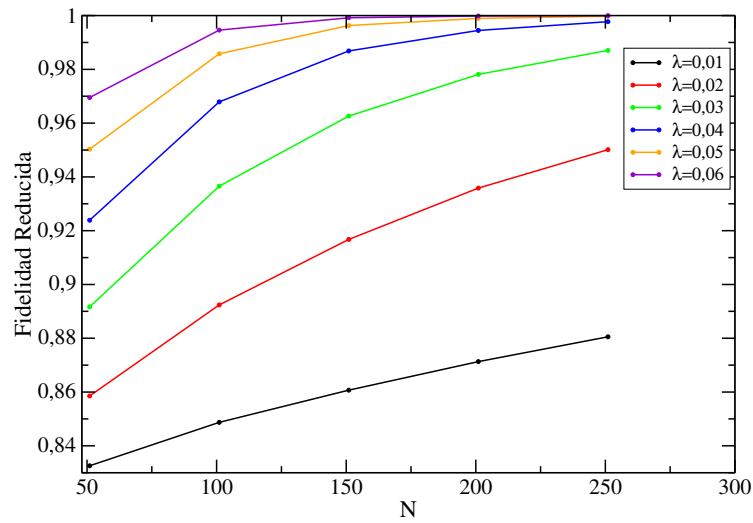


Figure 54: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,80, en función de N, para las intensidades de ruido $\lambda = 0,01$ (negro), $\lambda = 0,02$ (rojo), $\lambda = 0,03$ (verde), $\lambda = 0,04$ (azul), $\lambda = 0,05$ (naranja), y $\lambda = 0,06$ (violeta).

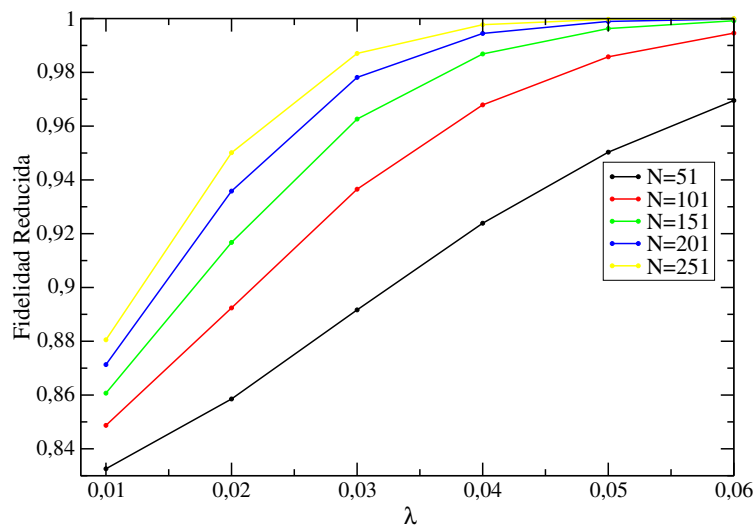


Figure 55: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,80, en función de λ , para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo).

C.2.2 Estados con fidelidad reducida inicial 0,85

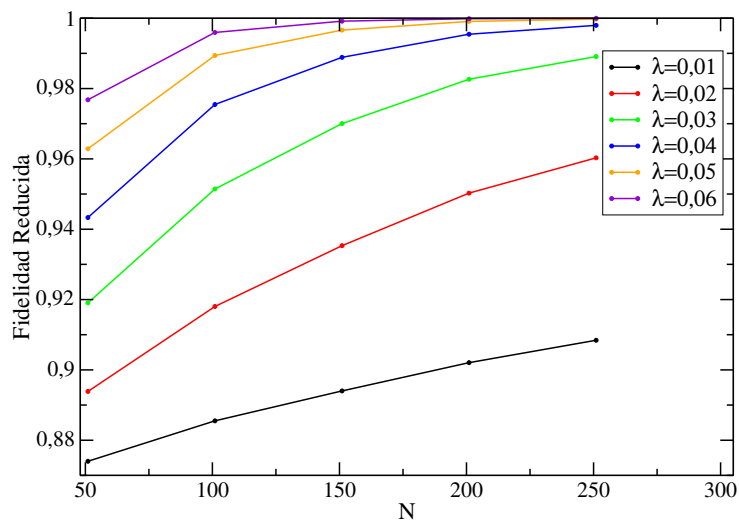


Figure 56: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de N , para las intensidades de ruido $\lambda = 0,01$ (negro), $\lambda = 0,02$ (rojo), $\lambda = 0,03$ (verde), $\lambda = 0,04$ (azul), $\lambda = 0,05$ (naranja), y $\lambda = 0,06$ (violeta).

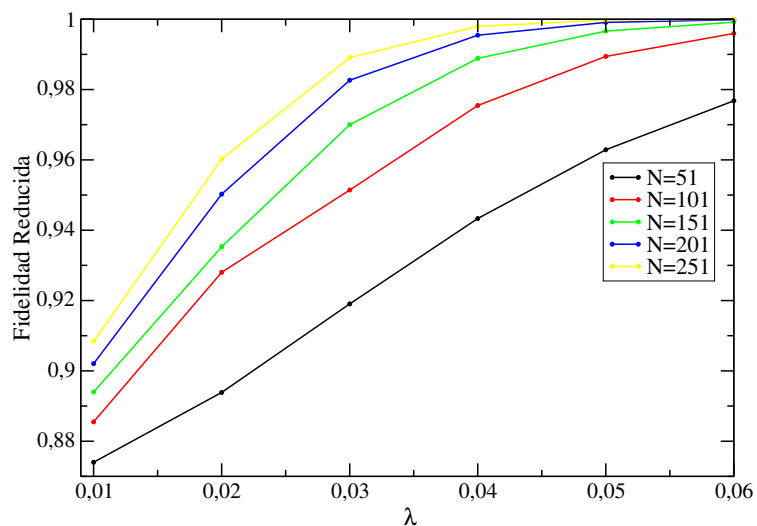


Figure 57: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de λ , para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo).

C.2.3 Estados con fidelidad reducida inicial de 0,90

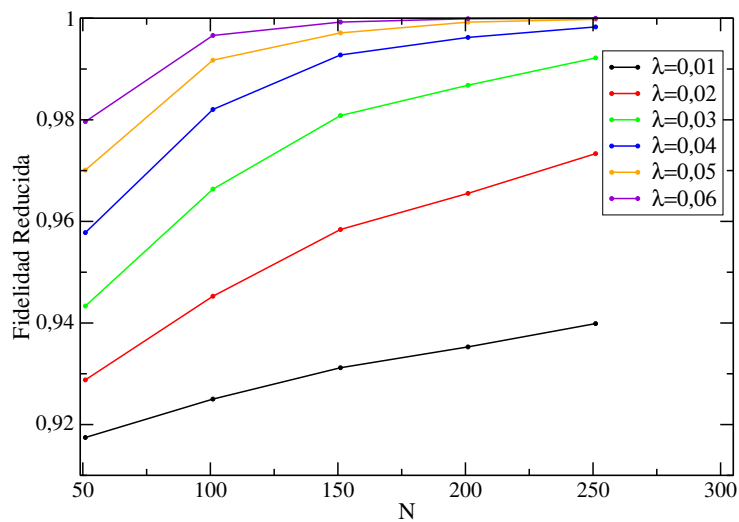


Figure 58: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,85, en función de N , para las intensidades de ruido $\lambda = 0,01$ (negro), $\lambda = 0,02$ (rojo), $\lambda = 0,03$ (verde), $\lambda = 0,04$ (azul), $\lambda = 0,05$ (naranja), y $\lambda = 0,06$ (violeta).

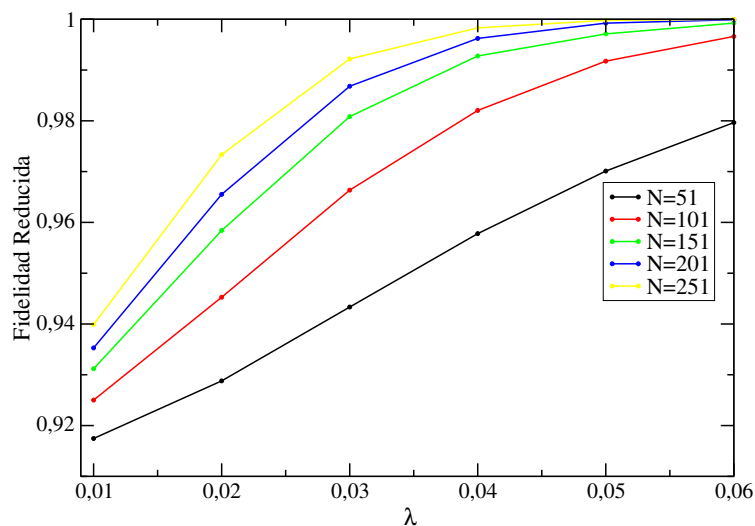


Figure 59: Fidelidad reducida para estados con fidelidad reducida inicial de 0,90, en función de λ , para los largos $N = 51$ (negro), $N = 101$ (rojo), $N = 151$ (verde), $N = 201$ (azul), $N = 251$ (amarillo).

References

- [1] Z.L.Mádi, B.Brutscher,T.Schulte-Herbruggen,R.Bruschweiler,R.R.Ernst. *Time-Resolved observation of spin waves in a linear chain of nuclear spins.* Chem.Phys.Letters 268 (1997), 300-305.
- [2] Y.Ping, B.W.Lovett, S.C.Benjamin, E.M.Gauger. *Practicality of Spin Chain Wiring in Diamond Quantum Technologies* Physical Review Letters, 110,100503. 2013.
- [3] A.M.Zagoskin, J.R.Johansson,S.Ashhab,F.Nori. *Quantum information processing using frequency control of impurity spins in diamond.* Phys.Rev.B 76, 014122, 2007.
- [4] A. Marshall Stoneham, A.H.Harker, G.W.Morley. *Could one make a diamond-based quantum computer?* Journal of Physics: Condensed Matter 21 (2009) 364222.
- [5] Ya.S.Greenber et al. *Low-frequency characterization of quantum tunneling in flux qubits.* Phys.Rev.B 66, 214525, 2002.
- [6] M.Grajcar et al. *Four-Qubit Device with Mixed Couplings* Physical Review Letters 96, 047006, 2006.
- [7] G.M.Nikolopoulos, D.Petrosyan, P.Lambropoulos. *Coherent electron wavepacket propagation and entanglement in array of coupled quantum dots.* Europhys.Lett. 65(3), pp. 297-303, 2004.
- [8] K.Mølmer, Y.Castin, J.Dalibard *Monte Carlo Wave Function Method in Quantum Optics* Journal of the Optical Society of America B, Vol. 10, No. 3. Marzo 1993
- [9] G.M. Nikolopoulos, I.Jex (Editors) *Quantum State transfer and Network Engineering* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [10] Karl Blum. *Density Matrix Theory and Applications, 3rd Edition* Springer-Verlag Berlin, Germany, 2012.
- [11] M.A.Nielsen, I.L.Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information* Cambridge University Press, UK, 2000.
- [12] A.Zwick, G.Álvarez, J.Stolze, O.Osenda. *Robustness of spin-coupling distributions for perfect quantum state transfer* Phys. Rev. A 84, 022311. 2011
- [13] M. Christandl, N.Datta, A.Ekert, A.J.Landahl, T.C.Dorlas, A.Kay *Perfect transfer of arbitrary states in quantum spin networks* Phys. Rev. A 71, 032312. 2004.
- [14] S.Bose. *Contemporary Physics, vol. 48, issue 1, pp. 13-30* 2008.
- [15] M.H.Yung, S.Bose. Phys. Rev. A 71, 032310. 2005
- [16] P.Karbach, J.Stolze. Phys. Rev. A 72 030301. 2005
- [17] A.Zwick, O.Osenda. *Quantum state transfer in a XX chain with impurities.* *Journal of physics A:Mathematical and Theoretical*, 44 105302 2011.
- [18] Richard Jozsa. *Fidelity for Mixed Quantum States, Journal of Modern Optics*, 41:12, 2315-2323 1994.
- [19] G. De Chiara, D. Rossini, S. Montanegro, R. Fazio. *From perfect to fractal transmission in spin chains* 2005.
- [20] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 90, second edition.* 1996.

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación de tesis, damos Fe que el presente ejemplar impreso, se corresponde con el aprobado por éste Tribunal.