



Universidad  
Nacional  
de Córdoba



FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

# Doctorado en Ciencias de la Ingeniería

## Tesis Doctoral

### **DISEÑO ÓPTIMO DE DISPOSITIVOS TERMO-ELECTRO-MECANICOS Y SUS APLICACIONES EN INGENIERIA**

Autor: **Ing. Augusto Alejandro Romero Onco**

Director: **Dr. Sebastián Giusti**

Julio 2023

# DISEÑO ÓPTIMO DE DISPOSITIVOS TERMO-ELECTRO-MECANICOS Y SUS APLICACIONES EN INGENIERIA

por Ing. Augusto Alejandro Romero Onco

Director

Dr. Sebastián Giusti - UTN - Reg. Cba.

Comisión Asesora

Dr. Sergio Preidikman - FCEFyN, UNC

Dr. Bruno Rocca - FCEFyN, UNC

Esta Tesis fue enviada a la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba como requisito parcial para la obtención del grado académico de Doctor en Ciencias de la Ingeniería.

Córdoba, Argentina  
Julio, 2023



Universidad  
Nacional  
de Córdoba



FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES



**ACTA DE EXAMEN**

Libro: E2023 Acta: 00134 Hoja 01/01  
LLAMADO: Llamado del Turno P10-(T209)\_TESIS 31/07/2023  
CATEDRA - MESA: 31-07-23 ROMERO ONCO Augusto A.

(P10-DI002) TESIS DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA

NÚMERO	APELLIDO Y NOMBRE	DOCUMENTO	INGR.	COND.	NOTA	FIRMA
35044460	ROMERO ONCO, AUGUSTO	DNI 35044460	2018		A (Aprobado)	

STUARDI, JOSE - FACHINOTTI, Víctor - FERNANDEZ FERREYRA, DAMIAN -

Observaciones:

Córdoba, \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_-.

Certifico que la/s firma/s que ha/n sido puesta/s en la presente Acta pertenece/n a: \_\_\_\_\_

1	0	1	0	1
Inscriptos	Ausentes	Examinados	Reprobados (0-3)	Aprobados (4-10)

31/07/2023 17.09.16

Libro/Acta: E202300134

Hoja 01/01



## Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas las personas e instituciones que contribuyeron de manera significativa en la realización de esta tesis doctoral. Su apoyo y colaboración han sido fundamentales para el éxito de este proyecto.

En primer lugar, deseo agradecer al Dr. Sebastián Giusti, mi orientador y director de tesis. Su guía, conocimiento y apoyo constante fueron esenciales en todas las etapas de este trabajo de investigación. Sus conocimientos especializados y orientación fueron invaluable para mi formación académica. Agradezco sinceramente su dedicación y compromiso en ayudarme a alcanzar mis metas académicas.

También quiero reconocer la invaluable contribución del Dr. Sergio Preidikman y del Dr. Bruno Rocca, miembros de mi comisión asesora, y del Dr. Elvio Pilotta y Dr. Damián Fernandez docentes investigadores de la Facultad de Matemáticas, Astronomía, Física y Computación. Los cursos que dictaron conformaban la columna vertebral del área en el cual realicé mis investigaciones. Sin los conocimientos impartidos en éstas cátedras me hubiera sido imposible desarrollar esta tesis. Agradezco su sabiduría, paciencia y valiosos comentarios que enriquecieron mi comprensión del tema.

Mi reconocimiento también se extiende a las instituciones que hicieron posible la realización de esta tesis. Agradezco al CONICET por financiar mi beca de investigación, así como a la Universidad de Córdoba y su Facultad de Ciencias Físicas, Exactas y Naturales, donde cursé mi doctorado. Además, deseo agradecer a la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba, por brindar la infraestructura necesaria y el apoyo financiero para llevar a cabo mis actividades de investigación.

No puedo dejar de mencionar a mis amigos más cercanos, cuyo apoyo y aliento fueron fundamentales a lo largo de este desafiante proceso. Sus palabras de ánimo, discusiones enriquecedoras y compañerismo han sido un verdadero regalo.

Por último, pero no menos importante, quiero expresar mi sincero agradecimiento a mi familia. Su apoyo incondicional, amor y comprensión han sido la piedra angular en mi vida y en mi camino académico. En particular, quiero agradecer a mi pareja por estar siempre a mi lado, brindándome el apoyo emocional y la motivación necesarios para superar los obstáculos y alcanzar mis metas.

Su contribución ha sido inestimable y estoy profundamente agradecido por el impacto positivo que han tenido en mi vida y en la realización de esta tesis.



## Resumen

Este trabajo se enfoca en el diseño de dispositivos termo-electro-mecánicos mediante técnicas de diseño óptimo. En particular, se considera la utilización de una técnica de optimización estructural topológica basada en el concepto de derivada topológica. El objetivo particular de este trabajo es obtener diseños geométricos óptimos (según alguna medida de desempeño) de actuadores electro-termo-mecánicos, considerando el efecto de calentamiento Joule en un sistema elástico. El análisis se focaliza en problemas de diseño bidimensionales usando modelos cinemáticos y constitutivos lineales acoplados débilmente. Este acoplamiento se manifiesta cuando el campo de solución del problema eléctrico afecta al problema térmico a través de la propiedad constitutiva de conducción eléctrica y, a su vez, este genera deformación elástica (problema mecánico) debido a la expansión térmica.

En el análisis asintótico se utiliza una técnica novedosa que permite tratar problemas lineales, como así también los no lineales, considerando una perturbación circular en las propiedades constitutivas de los materiales. La principal herramienta de la técnica consiste en escribir todo el problema de optimización topológica con un formalismo Lagrangeano, desde el punto de vista de optimización, para luego realizar las variaciones del funcional. Una vez completada esta etapa, se procede a estudiar la sensibilidad a un cambio topológico del sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, utilizando una técnica clásica, tanto para los estados directos como los adjuntos. Todo ello permitió obtener una forma analítica y cerrada de la derivada topológica para esta clase particular de problemas de ingeniería.

Se presenta una justificación matemática rigurosa de la expansión asintótica topológica de la función de costo realizando estimativas precisas de los residuos de dicha expansión.

Se realizó también un procedimiento numérico para la validación de la expresión analítica de la derivada topológica obtenida, mostrando una buena concordancia entre la aproximación numérica y el valor teórico.

Tanto en la validación numérica como en los ejemplos de aplicación considerados en esta tesis, las soluciones de las ecuaciones de estado (tanto directo como adjunto) se obtienen mediante el método de los elementos finitos. La solución computacional del problema de diseño óptimo de los dispositivos se logra mediante un algoritmo de optimización topológica basado en la evolución de curvas level-set guiadas por la derivada topológica asociada al problema.

Se destaca, finalmente, que el problema tratado en este trabajo no se encuentra reportado en la literatura existente y constituye uno de los pocos avances que se han logrado hasta el momento en el campo del análisis de sensibilidad topológico en

---

problemas no-lineales de ecuaciones diferenciales parciales acopladas.

## Abstract

This work focuses on the design of thermo-electro-mechanical devices by means of optimal design techniques. In particular, the use of a topological structural optimization technique based on the concept of topological derivative is considered. The particular objective of this work is to obtain optimal geometrical designs (according to some performance index) of electro-thermo-mechanical actuators, considering the Joule heating effect in an elastic system. The analysis focuses on two-dimensional design problems using weakly coupled linear kinematic and constitutive models. This coupling is manifested when the solution field of the electrical problem affects the thermal problem through the constitutive property of electrical conduction and, in turn, this generates elastic deformation (mechanical problem) due to thermal expansion.

A novel technique that allows treating linear as well as nonlinear problems is used in the asymptotic analysis, where a circular perturbation in the constitutive properties of the materials was considered. The main tool of the technique consists of writing the whole topological optimization problem with a Lagrangian formalism, from the optimization point of view, and then performing the variations of the functional. Once this stage is completed, we proceed to study the sensitivity to a topological change of the system of coupled differential equations, using a classical technique, for both direct and adjoint states. This procedure allowed obtaining an analytical and closed form of the topological derivative for this particular class of engineering problems.

A rigorous mathematical justification of the asymptotic topological expansion of the cost function is presented, making precise estimates of the residuals of this expansion.

A numerical procedure for the validation of the analytical expression of the obtained topological derivative was also performed, showing a good agreement between the numerical approximation and the theoretical value.

In the numerical validation as well as in the application examples considered in this thesis, the solutions of the state equations (both direct and adjoint) are obtained by means of the finite element method. The computational solution of the optimal design problem of the devices is achieved by means of a topological optimization algorithm based on the evolution of level-set curves guided by the topological derivative associated with the problem.

Finally, it is emphasized that the problem treated in this work is not reported in the existing literature and constitutes one of the few advances that have been achieved so far in the field of topological sensitivity analysis in nonlinear problems of coupled partial

---

differential equations.

## Resumo

Neste trabalho estuda-se o projeto ótimo de dispositivos termoeletro-mecânicos. Em particular, considera-se uma técnica de otimização estrutural topológica baseada no conceito de derivada topológica. O principal objetivo é obter a geometria ideal (de acordo com alguma medida de desempenho) de atuadores eletrotermo-mecânicos, considerando o efeito de aquecimento Joule num sistema elástico. A análise concentra-se em problemas bidimensional usando modelos cinemáticos e constitutivos lineares fracamente acoplados. O acoplamento manifesta-se quando o campo de solução do problema elétrico afeta o problema térmico por meio da propriedade constitutiva da condução elétrica e, por sua vez, gera-se deformação elástica (problema mecânico) devido à expansão térmica.

Na análise assintótica, é utilizada uma nova técnica permitindo lidar com problemas lineares, bem como não lineares, considerando uma perturbação circular nas propriedades constitutivas dos materiais. A principal ferramenta da técnica consiste em escrever o problema de otimização topológica num formalismo Lagrangeano (do ponto de vista da otimização) e, então, calcular as variações do funcional de custo. Concluída esta etapa, fase-se o estudo da sensibilidade mudança topológica do sistema de equações diferenciais acopladas, utilizando uma técnica clássica, dos estados diretos e adjuntos. Assim, obtém-se uma forma analítica e fechada da derivada topológica nessa classe particular de problemas de engenharia.

Apresenta-se, uma rigorosa justificação matemática da expansão assintótica topológica da função custo, fazendo-se estimativas precisas dos resíduos da expansão.

Utiliza-se um procedimento numérico na validação da expressão analítica da derivada topológica obtida, mostrando uma boa concordância da aproximação numérica e o valor teórico.

Tanto na validação numérica como nos exemplos de aplicação considerados nesta tese, as soluções das equações de estado (tanto diretas quanto adjuntas) são obtidas pelo método dos elementos finitos. A solução computacional do problema de projeto ótimo de dispositivos é obtida por meio de um algoritmo de otimização topológica baseado na evolução de curvas de níveis guiadas pela derivada topológica associada ao problema.

Finalmente, destacar-se que o problema tratado neste trabalho não é reportado na literatura existente e constitui um dos poucos avanços alcançados até o momento no campo da análise de sensibilidade topológica em problemas não lineares de equações diferenciais.



## Índice General

	<b>Página</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xv</b>
<b>I Análisis de Sensibilidad Topológico</b>	<b>1</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>3</b>
1.1 Motivación . . . . .	3
1.2 Objetivo General . . . . .	5
1.3 Objetivos Particulares . . . . .	5
1.4 Estructura de la Presentación . . . . .	6
<b>2 Ecuaciones de estado</b>	<b>9</b>
2.1 Problemas directos no perturbados . . . . .	9
2.2 Problemas Perturbados Directos . . . . .	13
<b>3 Formalismo Lagrangiano</b>	<b>17</b>
<b>4 Variación de la Función de Costo</b>	<b>23</b>
<b>5 Análisis asintótico de las soluciones</b>	<b>29</b>
5.1 Estados Directos . . . . .	30
5.2 Estados Adjuntos . . . . .	33
<b>6 Evaluación de la Derivada Topológica</b>	<b>37</b>
6.1 Ejemplo 1 . . . . .	37
6.2 Ejemplo 2 . . . . .	38

<b>7</b>	<b>Estimación de las soluciones de la expansión asintótica</b>	<b>41</b>
<b>8</b>	<b>Validación Numérica</b>	<b>61</b>
<b>II</b>	<b>Síntesis de Actuadores Electro-termo-mecánicos</b>	<b>67</b>
<b>9</b>	<b>Formulación del problema de Optimización</b>	<b>69</b>
9.1	Descripción general del problema . . . . .	69
9.2	Control de volumen . . . . .	73
9.3	Función Derivada topológica . . . . .	73
<b>10</b>	<b>Conceptos de Escalado</b>	<b>75</b>
10.1	Introducción . . . . .	75
10.2	Preliminares . . . . .	76
10.2.1	Escalado de Ecuaciones Diferenciales . . . . .	77
10.2.2	Escalado de Problemas de Optimización . . . . .	79
10.3	Un resultado clásico . . . . .	81
10.4	Escalado del problema de diseño óptimo de actuadores TEM . . . . .	84
<b>11</b>	<b>Algoritmo de optimización topológica</b>	<b>89</b>
11.1	Algoritmo SLERP . . . . .	89
11.2	Algoritmo de Lagrangiano Aumentado . . . . .	93
<b>12</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>95</b>
12.1	Ejemplo 1 . . . . .	96
12.2	Ejemplo 2 . . . . .	100
12.3	Ejemplo 3 . . . . .	103
<b>13</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>109</b>
13.1	Contribuciones principales . . . . .	109
13.2	Trabajos Futuros . . . . .	110
13.3	Publicaciones originadas . . . . .	111
	<b>Anexo</b>	<b>117</b>
<b>A</b>	<b>Lemas Auxiliares</b>	<b>117</b>

<b>B Estimación de los residuos del funcional de costo</b>	<b>121</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>125</b>



## Índice de Tablas

<b>Tabla</b>	<b>Página</b>
8.1 Condiciones de borde y sus valores prescriptos. . . . .	63
8.2 Valores de las distribuciones asociadas a los funcionales de costo y coordenadas de los puntos inicial y final de sus regiones lineales. . . . .	63
12.1 Parámetro de penalización, malla inicial y final para cada caso de evaluación.	100
12.2 Parámetro de penalización, para cada caso de evaluación. . . . .	103



## Índice de Figuras

<b>Figura</b>	<b>Página</b>
2.1 Dominio para el problema no perturbado. . . . .	10
2.2 Representación del dominio luego de la perturbación. . . . .	13
8.1 Dominio y condiciones de borde. Las regiones de Dirichlet se representan en azul y las regiones Neumann en rojo. . . . .	62
8.2 Resultados del residuo escalado. . . . .	64
8.3 Derivada topológica normalizada $g(\hat{\mathbf{x}})/\mathcal{T}_D\mathcal{J}(p_0)(\hat{\mathbf{x}})$ . . . . .	65
9.1 Caracterización del dominio de diseño en conjunto con las condiciones de borde.	70
12.1 Descripción geométrica del dominio de proyecto. . . . .	95
12.2 Descripción geométrica del dominio de proyecto escalado. . . . .	96
12.3 Respuesta mecánica del actuador en función de la diferencia de potencial. . .	97
12.4 Estructura del actuador en la configuración deformada en conjunto con la distribución de temperaturas para cada caso del Ejemplo 1. . . . .	98
12.5 Estructura del actuador en la configuración deformada en conjunto con la distribución de temperaturas para cada caso del Ejemplo 1. . . . .	99
12.6 Topologías obtenidas para distintas fracciones de volumen $v_f$ para el Ejemplo 2. . . . .	101
12.7 Magnitud del desplazamiento del punto de actuación vs. fracción de volumen.	102
12.8 Ángulo del vector desplazamiento del punto de trabajo vs. la fracción de volumen del actuador. . . . .	102
12.9 Topologías obtenidas para distintos parámetros de penalización $\pi_3$ para el Ejemplo 3. . . . .	105
12.10 Configuración deformada no deformada (negro) y configuración deformada del actuador (gris). La flecha roja representa el campo de desplazamiento del punto de actuación. . . . .	106

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

12.11	Ángulo del vector desplazamiento del punto de trabajo vs. parámetro $\pi_3$ . . .	107
12.12	Magnitud del desplazamiento del punto de actuación vs. $\pi_3$ . . . . .	107

Parte I

**Análisis de Sensibilidad  
Topológico**



## Introducción

### 1.1 Motivación

Los dispositivos termo-electro-mecánicos (TEM) son aquellos artefactos cuyo principio de funcionamiento está basado en el acoplamiento de fenómenos térmicos, eléctricos y mecánicos, o al menos su diseño se encuentra fuertemente influenciado por estos. Como ejemplo, dentro de este grupo de dispositivos podemos incluir a cualquier sistema electrónico; sensores piezoresistivos, sensores, actuadores y cosechadores piezoeléctricos; generadores y cosechadores termoeléctricos; hasta sistemas micro-electro mecánicos (MEMS por sus siglas en inglés).

Debido a la complejidad del principio de funcionamiento de los dispositivos TEM, su diseño representa una tarea sumamente desafiante, la cual aumenta a medida que mas fenómenos físicos y restricciones se agregan. Por otra parte, al diseñar nuevos productos, los ingenieros tienden a inspirarse en sus proyectos y experiencias anteriores. Aunque esto es excepcionalmente valioso, este enfoque puede llevar a la obtención de diseños altamente influenciados por nociones preconcebidas. La necesidad de obtener soluciones imparciales y, hasta a veces poco intuitivas para el diseñador, requiere de un enfoque de diseño orientado por objetivos y basado en simulación.

En este sentido, el diseño generativo es una metodología de ingeniería avanzada que permite abordar ambas problemáticas, y este consiste en combinar la generación de geometría, la simulación y la automatización del diseño. Está orientada por objetivos y basada en simulación, utilizando software y algoritmos computacionales para generar

geometrías de alto rendimiento en base a requisitos de ingeniería definidos por el usuario.

Una de sus técnicas principales es la optimización topológica, donde lo que se busca es encontrar la óptima distribución de material dentro de un dominio fijo de diseño que maximice/minimice una determinada medida de desempeño.

El método de optimización topológica más difundido en la actualidad dentro de la comunidad ingenieril es el método SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization [16, 17, 53]) debido a la simplicidad de su formulación. Este método se basa en encontrar el valor de una densidad ficticia  $\rho$  de material base para cada punto del dominio de diseño  $\Omega$ , tal que  $\rho(\mathbf{x}) \in [0, 1] \forall \mathbf{x} \in \Omega$ . Para penalizar las zonas de densidades intermedias y forzar soluciones bi-materiales, las propiedades constitutivas en el dominio se interpolan mediante una ley de potencias de la forma  $\rho^p$ .

El primer inconveniente de este método es que, a pesar de la ley de potencias, grandes zonas con densidades intermedias son obtenidas y las propiedades constitutivas en estas zonas no siempre cumplen con los límites de Hashin-Shtrikman, dando además como resultado topologías subóptimas, tal como se reporta en [24]. Aunque otras alternativas de interpolación, así como nuevos métodos de proyección han sido propuestos para sortear estas dificultades ([20, 56, 59]), estos algoritmos requieren del ajuste manual de una gran cantidad de parámetros. Estos, intervienen en la heurística propia de cada método pero guardan poca relación con la física del problema en tratamiento.

Los algoritmos basados en el concepto de derivada topológica resuelven este problema de manera precisa y eficiente ya que

- Utilizan el valor exacto de la sensibilidad de un funcional de costo a la introducción de una perturbación en la distribución de propiedades constitutivas dentro del dominio de proyecto.
- La solución que se obtiene está libre de grandes zonas con propiedades constitutivas intermedias.
- Su implementación computacional es simple y no se requiere de procesos de filtrado, por lo que el costo computacional es igual o menor.

Además, en base a este concepto, es que se han podido justificar muchos de los valores de los exponentes del método SIMP ampliamente aceptados por su comunidad, tal como se muestra en [4, 24].

El concepto de derivada topológica fue introducida por primera en los trabajos fundacionales [54] y [19]. Luego fue satisfactoriamente aplicado en diferentes áreas tales como procesamiento de imágenes [13, 14], problemas inversos [7, 23, 49] y

optimización topológica [37–39]. La mayoría de estas aplicaciones tratan con problemas de optimización restringidos mediante ecuaciones diferenciales parciales (EDP) lineales, para los cuales las derivadas topológicas están bien entendidas. Aunque, este no es el caso para problemas no-lineales, y el interés en desarrollar métodos para obtenerlas ha ido creciendo en la última década.

Los primeros trabajos que abordaron este tipo de restricción son [3, 34], donde consideraron perturbaciones de dominio singulares para una clase particular de operadores elípticos de EDP no lineales. Desde entonces, se ha avanzado en la extensión del análisis a perturbaciones de dominio regular en ecuaciones elípticas cuasilineales [6, 27], y ecuaciones elípticas semilineales [57]. Gangl y Sturm [25] han ideado un enfoque sistemático para el cálculo automático numérico de derivadas topológicas. Hasta la fecha, solo se ha encontrado una aplicación industrial de la derivada topológica a un problema de diseño no lineal con restricciones EDP [28], aunque no se presenta una fórmula explícita y cerrada de la derivada topológica asociada.

## 1.2 Objetivo General

En base a lo expuesto anteriormente, podemos concluir que la necesidad a resolver es la de obtener una herramienta de diseño sistemático de dispositivos termo-electro-mecánicos, libre de parámetros algorítmicos heurísticos y que permita contemplar las no linealidades en los operadores diferenciales presentes en las ecuaciones de estado. La solución natural a este problema sería utilizar técnicas de optimización topológica basadas en la sensibilidad exacta del problema (derivada topológica), la cual hasta la fecha no se ha determinado debido a las dificultades ya mencionadas.

## 1.3 Objetivos Particulares

1. Realizar el análisis de sensibilidad topológico sobre los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP) que modelan los dispositivos termo-electro-mecánicos e identificar la derivada topológica de cada uno de ellos.
2. Desarrollar técnicas automáticas para obtener configuraciones óptimas de los dispositivos diseñados.

La cantidad de posibilidades en la que los tres campos (eléctrico, térmico y mecánico) pueden acoplarse dentro de un operador diferencial puede ser muy grande. Por lo tanto, en esta tesis, se optó por enfocar el análisis en un tipo particular de problema de

gran interés ingenieril, a saber, el problema asociado al calentamiento por efecto Joule acoplado con expansión térmica.

## 1.4 Estructura de la Presentación

En base a los objetivos anteriormente planteados, la estructura del presente trabajo se divide en dos grandes partes. La primera parte trata sobre el análisis asintótico topológico del problema propuesto y su objetivo es obtener una fórmula cerrada de la derivada topológica asociada. Se presenta el marco teórico asociado con verificaciones analíticas y numéricas. La segunda parte considera este resultado y lo utiliza para generar un algoritmo de diseño de actuadores termo-electro-mecánicos. Aquí se presenta el algoritmo construido junto con algunos ejemplos de aplicación. Una descripción detallada se muestra a continuación:

### Parte I

- Capítulo 2. En éste capítulo se describe de forma detallada las ecuaciones de estado que gobiernan el problema. Luego se define el tipo de perturbación topológica que se realizará en el dominio, para obtener finalmente la versión perturbada de las ecuaciones de estado y sus cantidades asociadas.
- Capítulo 3. Aquí se explica la clase de funcionales de costo considerados en este trabajo, obteniéndose finalmente los estados adjuntos del problema en sus versiones perturbadas y no perturbadas.
- Capítulo 4. La variación de la función de costo se deduce en este capítulo implementando una técnica basada en funciones Lagrangianas. Uno de los principales aportes de este trabajo de tesis se encuentra en este capítulo, en donde se obtiene la derivada topológica de la parte no lineal del operador diferencial en estudio.
- Capítulo 5. En este capítulo se realiza el análisis asintótico topológico de las soluciones perturbadas de los estados directos y adjuntos en base a series asintóticas de Poincaré. Se introducen conceptos básicos de los métodos de perturbación y se obtienen las expresiones de los correctores de capa límite de manera explícita para todos los estados. También se deriva la forma fuerte de los problemas residuales.

- Capítulo 6. Se calcula la expresión de la derivada topológica para dos ejemplos de funciones de costo empleando la fórmula de la variación del funcional obtenido en capítulos anteriores.
- Capítulo 7. En este capítulo se realizan las estimativas de los problemas residuales en términos del tamaño de la perturbación.
- Capítulo 8. En este apartado se lleva a cabo una verificación numérica de la expresión de la derivada topológica obtenida.

La demostración de los teoremas y lemas auxiliares, así como las estimaciones de los residuos se muestran en el Apéndice.

### Parte II

- Capítulo 9. En este apartado se formula el problema de diseño óptimo de actuadores termo-electro-mecánicos. Se describen las funciones de costo empleadas y la forma particular de las ecuaciones de estado.
- Capítulo 10. En este capítulo se realiza una introducción sobre los procesos de escalado de ecuaciones diferenciales y su aplicación a problemas de optimización. El capítulo comienza enumerando las ventajas de resolver problemas de optimización en forma escalada y concluye con la obtención de la versión escalada del problema de diseño óptimo a resolver en este trabajo.
- Capítulo 11. Aquí se presentan los principios básicos de los algoritmos de optimización topológica basados en el método de curvas level-set y el empleo de derivada topológica. Se adjunta el pseudocódigo del algoritmo empleado en este trabajo.
- Capítulo 12. En éste apartado se realizan algunos ejemplos de aplicación del algoritmo planteado para el problema de diseño óptimo propuesto.

La disertación finaliza con las conclusiones finales del trabajo y las líneas futuras de investigación en el Capítulo 13.



## Ecuaciones de estado

El problema de calentamiento por efecto Joule acoplado a expansión térmica es un problema ampliamente conocido, de características transitorias y no lineales. En su forma más simple y en condiciones de estado estacionario, las ecuaciones que gobiernan este conjunto de fenómenos consisten en un sistema de tres EDP elípticas débilmente acopladas. En este problema, una densidad de corriente eléctrica circula por un cuerpo generando calor debido al efecto Joule. Este calor modifica el campo de temperatura sobre el cuerpo y entonces, gracias a la propiedad de expansión térmica, el cuerpo se deforma. En las siguientes secciones se describirán la versión perturbada y no perturbada de las ecuaciones de gobierno de este problema. Para distinguir las variables perturbadas de las no perturbadas, emplearemos los subíndices  $\varepsilon$  y  $0$  respectivamente. En ambos casos, supondremos que las propiedades constitutivas no dependen de los estados (eléctrico, térmico y mecánico).

### 2.1 Problemas directos no perturbados

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio abierto y acotado con frontera suficientemente suave  $\partial\Omega$  tal como se muestra en la figura Figura 2.1. La forma fuerte de las ecuaciones de gobierno

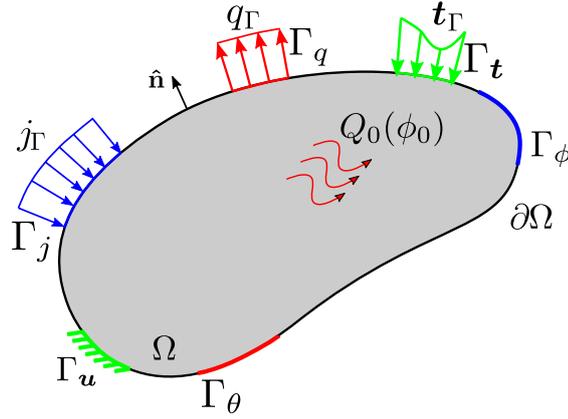


Figura 2.1: Dominio para el problema no perturbado.

para los campos eléctricos  $\phi_0$ , térmicos  $\theta_0$ , y mecánicos  $\mathbf{u}_0$  no perturbados es

$$(2.1a) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{j}_0(\phi_0)) = 0 & \text{en } \Omega \\ \phi_0 = \phi_\Gamma & \text{en } \Gamma_\phi \\ -\mathbf{j}_0(\phi_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} = j_\Gamma & \text{en } \Gamma_j \end{cases}$$

$$(2.1b) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{q}_0(\theta_0)) = Q_0(\phi_0) & \text{en } \Omega \\ \theta_0 = \theta_\Gamma & \text{en } \Gamma_\theta \\ -\mathbf{q}_0(\theta_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} = q_\Gamma & \text{en } \Gamma_q \end{cases}$$

$$(2.1c) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{S}_0(\mathbf{u}_0, \theta_0)) = \mathbf{0} & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_\Gamma & \text{en } \Gamma_u \\ \mathbf{S}_0(\mathbf{u}_0, \theta_0) \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{t}_\Gamma & \text{en } \Gamma_t \end{cases}$$

El potencial eléctrico  $\phi_0$  y la densidad de corriente  $\mathbf{j}_0(\phi_0)$  están relacionadas mediante las siguientes ecuaciones constitutivas

$$(2.2) \quad \mathbf{j}_0(\phi_0) = -s_0 \nabla \phi_0,$$

siendo  $s_0$  la conductividad eléctrica del material.

El flujo de calor  $\mathbf{q}_0(\theta_0)$  dado por la ley de Fourier es

$$(2.3) \quad \mathbf{q}_0(\theta_0) = -k_0 \nabla \theta_0,$$

donde  $k_0$  es la conductividad térmica, mientras que  $Q_0(\phi_0)$  es una fuente de calor volumétrico debido al efecto Joule y depende del potencial eléctrico de la siguiente manera

$$(2.4) \quad Q_0(\phi_0) = s_0 \|\nabla \phi_0\|_2^2.$$

En la ecuación mecánica (2.1c),  $\mathbf{u}_0$  representa el campo vectorial de desplazamiento,  $\mathbf{S}_0(\mathbf{u}_0, \theta_0)$  el tensor de tensión efectivo,  $\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0)$  el tensor de tensión debido a efectos mecánicos,  $\mathbf{B}_0(\theta_0)$  es el tensor de tensión debido a la expansión térmica,  $\alpha_0$  el coeficiente de expansión térmica, y  $\mathbb{C}_0$  el tensor de elasticidad de cuarto orden. Estas cantidades se definen mediante las siguientes relaciones

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{S}_0(\mathbf{u}_0, \theta_0) &= \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0) - \mathbf{B}_0(\theta_0), & \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0) &= \mathbb{C}_0 \nabla^s \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{B}_0(\theta_0) &= \alpha_0 \mathbb{C}_0 \mathbf{I} \theta_0, & \mathbb{C}_0 &= 2\mu_0 \mathbb{I} + \lambda_0 (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \end{aligned}$$

donde  $\mu_0$  y  $\lambda_0$  son los coeficientes de Lamé,  $\mathbb{I}$  y  $\mathbf{I}$  son los tensores de identidad de cuarto y segundo orden respectivamente, y el operador  $\nabla^s(\cdot)$  representa la parte simétrica del tensor gradiente, dado por

$$\nabla^s(\cdot) = \frac{1}{2} [\nabla(\cdot) + (\nabla(\cdot))^T].$$

En el caso de asumir comportamiento de tensión plana, los coeficientes de Lamé se pueden calcular en términos del módulo de Young  $E_0$  y la coeficiente de Poisson  $\nu$  como

$$(2.6) \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)} \quad \text{y} \quad \lambda_0 = \frac{\nu E_0}{1-\nu^2},$$

mientras que en el caso de deformación plana son

$$(2.7) \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)} \quad \text{y} \quad \lambda_0 = \frac{\nu E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

En este trabajo solo se consideran solo condiciones de borde de Dirichlet y Neumann para cada problema, es decir, un potencial eléctrico  $\phi_\Gamma$  prescrito en  $\Gamma_\phi$  y una densidad de corriente  $j_\Gamma$  sobre  $\Gamma_j$  para el problema eléctrico; una temperatura  $\theta_\Gamma$  prescrita en  $\Gamma_\theta$  y un flujo de calor  $q_\Gamma$  sobre  $\Gamma_q$  para el problema térmico; y un desplazamiento  $\mathbf{u}_\Gamma$  prescrito en  $\Gamma_u$  y una fuerza de tracción  $\mathbf{t}_\Gamma$  sobre  $\Gamma_t$  para el problema mecánico. Por otra parte, el vector  $\hat{\mathbf{n}}$  representa un versor normal a  $\partial\Omega$  en la dirección saliente de  $\Omega$ .

La frontera del dominio  $\partial\Omega$  se descompone en tres pares de regiones

$$(2.8) \quad \partial\Omega = \Gamma_\phi \cup \Gamma_j = \Gamma_\theta \cup \Gamma_q = \Gamma_u \cup \Gamma_t, \quad \text{tal que} \quad \Gamma_\phi \cap \Gamma_j = \Gamma_\theta \cap \Gamma_q = \Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset.$$

La forma variacional de las ecuaciones de gobierno (2.1a), (2.1b), (2.1c) es

$$(2.9a) \quad \phi_0 \in \mathcal{U}_\phi : - \int_\Omega \mathbf{j}_0(\phi_0) \cdot \nabla \eta_\phi = \int_{\Gamma_j} j_\Gamma \eta_\phi \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi,$$

$$(2.9b) \quad \theta_0 \in \mathcal{U}_\theta : - \int_\Omega \mathbf{q}_0(\theta_0) \cdot \nabla \eta_\theta = \int_\Omega Q_0(\phi_0) \eta_\theta + \int_{\Gamma_q} q_\Gamma \eta_\theta \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta,$$

$$(2.9c) \quad \mathbf{u}_0 \in \mathcal{U}_{\mathbf{u}} : \int_{\Omega} \mathbf{S}_0(\mathbf{u}_0, \theta_0) : \nabla^s \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} = \int_{\Gamma_{\mathbf{t}}} \mathbf{t}_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}.$$

Para definir los espacios de funciones en donde se encuentran estas soluciones, se harán las siguientes consideraciones.

**Suposición 1.** *Los datos presentes en el sistema de EDP poseen la suficiente regularidad como para asegurar que las soluciones de (2.9) son  $C^1$  continuas sobre  $\Omega$ .*

Luego, los conjuntos de funciones son

$$(2.10) \quad \mathcal{U}_{\phi} = \{\eta \in H^1(\Omega) : \eta = \phi_{\Gamma} \text{ en } \Gamma_{\phi}\} \cap C^1(\Omega),$$

$$(2.11) \quad \mathcal{U}_{\theta} = \{\eta \in H^1(\Omega) : \eta = \theta_{\Gamma} \text{ en } \Gamma_{\theta}\} \cap C^1(\Omega),$$

$$(2.12) \quad \mathcal{U}_{\mathbf{u}} = \{\boldsymbol{\eta} \in H^1(\Omega)^2 : \boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_{\Gamma} \text{ en } \Gamma_{\mathbf{u}}\} \cap C^1(\Omega)^2,$$

y los espacios de funciones asociados son

$$(2.13) \quad \mathcal{V}_{\phi} = \{\eta \in H^1(\Omega) : \eta = 0 \text{ en } \Gamma_{\phi}\} \cap C^1(\Omega),$$

$$(2.14) \quad \mathcal{V}_{\theta} = \{\eta \in H^1(\Omega) : \eta = 0 \text{ en } \Gamma_{\theta}\} \cap C^1(\Omega),$$

$$(2.15) \quad \mathcal{V}_{\mathbf{u}} = \{\boldsymbol{\eta} \in H^1(\Omega)^2 : \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_{\mathbf{u}}\} \cap C^1(\Omega)^2.$$

Se puede expresar la formulación variacional (2.9) de una forma más compacta de la siguiente manera

$$(2.16a) \quad \phi_0 \in \mathcal{U}_{\phi} : a_0(\phi_0, \eta_{\phi}) = \ell_{\mathbf{j}}(\eta_{\phi}) \quad \forall \eta_{\phi} \in \mathcal{V}_{\phi},$$

$$(2.16b) \quad \theta_0 \in \mathcal{U}_{\theta} : b_0(\theta_0, \eta_{\theta}) = N_0(\phi_0, \eta_{\theta}) + \ell_{\mathbf{q}}(\eta_{\theta}) \quad \forall \eta_{\theta} \in \mathcal{V}_{\theta},$$

$$(2.16c) \quad \mathbf{u}_0 \in \mathcal{U}_{\mathbf{u}} : c_{10}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}) - c_{20}(\theta_0, \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}) = \ell_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}.$$

donde  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_{10}$ , y  $c_{20}$  son formas bilineales dadas por

$$\begin{aligned} a_0(\phi_0, \eta_{\phi}) &= - \int_{\Omega} \mathbf{j}_0(\phi_0) \cdot \nabla \eta_{\phi}, & b_0(\theta_0, \eta_{\theta}) &= - \int_{\Omega} \mathbf{q}_0(\theta_0) \cdot \nabla \eta_{\theta}, \\ c_{10}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0) : \nabla^s \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}, & c_{20}(\theta_0, \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}, \mathbf{B}_0(\theta_0) : \nabla^s, \end{aligned}$$

$\ell_{\mathbf{j}}$ ,  $\ell_{\mathbf{q}}$ , y  $\ell_{\mathbf{t}}$  formas lineales asociadas a las condiciones de borde de Neumann

$$\ell_{\mathbf{j}}(\eta_{\phi}) = \int_{\Gamma_{\mathbf{j}}} j_{\Gamma} \eta_{\phi}, \quad \ell_{\mathbf{q}}(\eta_{\theta}) = \int_{\Gamma_{\mathbf{q}}} q_{\Gamma} \eta_{\theta}, \quad \ell_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}) = \int_{\Gamma_{\mathbf{t}}} \mathbf{t}_{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}},$$

y  $N_0$  una forma no lineal asociada a la generación de calor por efecto Joule.

$$N_0(\phi_0, \eta_{\theta}) = \int_{\Omega} Q_0(\phi_0) \eta_{\theta}.$$

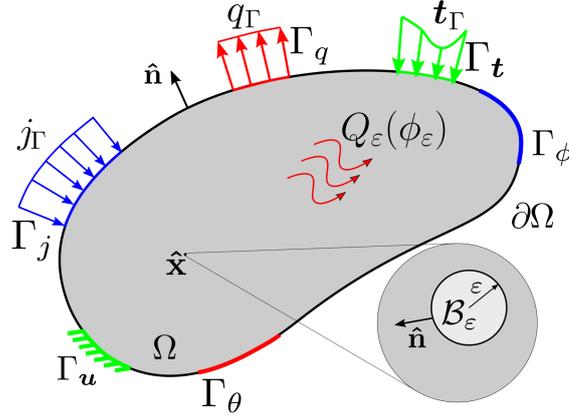


Figura 2.2: Representación del dominio luego de la perturbación.

## 2.2 Problemas Perturbados Directos

Considere la introducción de una pequeña perturbación en  $\Omega$ , caracterizada por una bola  $\mathcal{B}_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \Omega : \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2 \leq \varepsilon\}$  centrada en un punto  $\hat{\mathbf{x}}$  arbitrario de  $\Omega$  tal que  $\bar{\mathcal{B}}_\varepsilon \subset \Omega$ , tal como se muestra en la Figura 2.2. Dicha región del dominio está llena de un material cuyas propiedades constitutivas difieren por un factor de escala de las del resto del dominio. Entonces, la distribución de las propiedades constitutivas sobre todo el dominio puede expresarse mediante una función continua por tramos empleando la función característica  $\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}$  de la siguiente manera

$$(2.17) \quad \begin{cases} s_\varepsilon = \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \gamma^s s_0 + (1 - \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}) s_0, \\ k_\varepsilon = \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \gamma^k k_0 + (1 - \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}) k_0, \\ \mathbb{C}_\varepsilon = \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \gamma^c \mathbb{C}_0 + (1 - \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}) \mathbb{C}_0, \\ \alpha_\varepsilon = \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \gamma^\alpha \alpha_0 + (1 - \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}) \alpha_0, \end{cases}$$

donde  $\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} = 1$  en  $\mathcal{B}_\varepsilon$  y cero en  $\Omega \setminus \bar{\mathcal{B}}_\varepsilon$ , y los parámetros de contraste  $\gamma^s, \gamma^k, \gamma^c$ , y  $\gamma^\alpha$  son todos constantes finitas y positivas.

**Observación 2.1.** *Se considera que la perturbación del tensor elástico  $\mathbb{C}_\varepsilon$  se produce sólo a través de un salto en el valor del módulo de Young. Esta es la razón por la que en la definición de los parámetros de Lamé (ecs. ecuación (2.7) y ecuación (2.6)), la única propiedad constitutiva con un subíndice es el módulo de Young, lo que implica que el coeficiente de Poisson permanece constante después de la perturbación. Para una clase general de perturbación elástica véase [30].*

En base a las definiciones anteriores, la forma fuerte del sistema perturbado es

$$(2.18a) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{j}_\varepsilon(\phi_\varepsilon)) = 0 & \text{en } \Omega \\ \phi_\varepsilon = \phi_\Gamma & \text{en } \Gamma_\phi \\ -\mathbf{j}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{n}} = j_\Gamma & \text{en } \Gamma_j \\ [[\phi_\varepsilon]] = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon \\ -[[\mathbf{j}_\varepsilon(\phi_\varepsilon)]] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon \end{cases}$$

$$(2.18b) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{q}_\varepsilon(\theta_\varepsilon)) = Q_\varepsilon(\phi_\varepsilon) & \text{en } \Omega \\ \theta_\varepsilon = \theta_\Gamma & \text{en } \Gamma_\theta \\ -\mathbf{q}_\varepsilon(\theta_\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{n}} = q_\Gamma & \text{en } \Gamma_q \\ [[\theta_\varepsilon]] = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon \\ -[[\mathbf{q}_\varepsilon(\theta_\varepsilon)]] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon \end{cases}$$

$$(2.18c) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{S}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon, \theta_\varepsilon)) = \mathbf{0} & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}_\Gamma & \text{en } \Gamma_u \\ \mathbf{S}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{t}_\Gamma & \text{en } \Gamma_t \\ [[\mathbf{u}_\varepsilon]] = \mathbf{0} & \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon \\ [[\mathbf{S}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon, \theta_\varepsilon)]] \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0} & \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon \end{cases}$$

y la respectiva forma débil en su versión compacta es

$$(2.19a) \quad \phi_\varepsilon \in \mathcal{U}_\phi : a_\varepsilon(\phi_\varepsilon, \eta_\phi) = \ell_j(\eta_\phi) \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi,$$

$$(2.19b) \quad \theta_\varepsilon \in \mathcal{U}_\theta : b_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \eta_\theta) = N_\varepsilon(\phi_\varepsilon, \eta_\theta) + \ell_q(\eta_\theta) \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta,$$

$$(2.19c) \quad \mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{U}_u : c_{1\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_u) - c_{2\varepsilon}(\theta_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_u) = \ell_t(\boldsymbol{\eta}_u) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_u \in \mathcal{V}_u.$$

Las definiciones de las magnitudes perturbadas que aparecen más arriba se obtienen sustituyendo las propiedades constitutivas perturbadas (eq. ecuación (2.17)) por sus homólogas no perturbadas, de la siguiente manera

$$(2.20) \quad a_\varepsilon(\phi_\varepsilon, \eta_\phi) = - \int_\Omega \mathbf{j}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \cdot \nabla \eta_\phi, \quad \mathbf{j}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) = -s_\varepsilon \nabla \phi_\varepsilon,$$

para las cantidades eléctricas,

$$(2.21) \quad \begin{aligned} b_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \eta_\theta) &= - \int_\Omega \mathbf{q}_\varepsilon(\theta_\varepsilon) \cdot \nabla \eta_\theta, & N_\varepsilon(\phi_\varepsilon, \eta_\theta) &= \int_\Omega \mathbf{j}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \cdot \mathbf{e}(\phi_\varepsilon) \eta_\theta, \\ \mathbf{q}_\varepsilon(\theta_\varepsilon) &= -k_\varepsilon \nabla \theta_\varepsilon, & Q_\varepsilon(\phi_\varepsilon) &= s_\varepsilon \|\nabla \phi_\varepsilon\|_2^2. \end{aligned}$$

para las cantidades térmicas, y

$$(2.22) \quad \begin{aligned} c_{1\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla^s \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}, & c_{2\varepsilon}(\theta_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_\varepsilon(\theta_\varepsilon) : \nabla^s \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}, \\ \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon) &= \mathbb{C}_\varepsilon \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon, & \mathbf{B}_\varepsilon(\theta_\varepsilon) &= \alpha_\varepsilon \mathbb{C}_\varepsilon \mathbf{I} \theta_\varepsilon. \end{aligned}$$

para las cantidades mecánicas.

**Observación 2.2.** *Nótese que  $\phi_\varepsilon$ ,  $\theta_\varepsilon$ , y  $\mathbf{u}_\varepsilon$  y sus respectivos gradientes deben tener salto nulo sobre  $\partial\mathcal{B}_\varepsilon \subset \Omega$ . Por lo tanto, pedir que estas soluciones vivan en  $\mathcal{U}_\phi$ ,  $\mathcal{U}_\theta$ , y  $\mathcal{U}_\mathbf{u}$  es apropiado.*

El vector  $\hat{\mathbf{n}}$  presente en las condiciones de borde de salto en (2.18), representa el versor normal a la frontera  $\partial\mathcal{B}_\varepsilon$  en la dirección saliente de  $\mathcal{B}_\varepsilon$ .



## Formalismo Lagrangiano

Teniendo en cuenta la clase de perturbación topológica definida en la Sección 2.2, definimos la función  $\mathcal{J}_0 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  como una función de costo asociada al dominio no perturbado y  $\mathcal{J}_\varepsilon : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , su contraparte perturbada. Por otro lado, las formas fuertes de los sistemas no perturbado (2.1) y perturbado (2.18) se pueden expresar de manera abstracta en base los siguientes operadores diferenciales,  $e_0 : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Z}$ , y  $e_\varepsilon : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Z}$  respectivamente, tal que

$$\begin{cases} e_0(p_0) = 0, \\ e_\varepsilon(p_\varepsilon) = 0, \end{cases}$$

en donde,  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Z}$  son espacios de Banach. Por motivos de simplicidad notacional, se ha agrupado el triplete de estados no perturbados y perturbados de la siguiente forma  $p_0 = (\phi_0, \theta_0, \mathbf{u}_0)$  y  $p_\varepsilon = (\phi_\varepsilon, \theta_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ . En el siguiente capítulo, se mostrará que la siguiente expansión asintótica del funcional de costo es válida

$$(3.1) \quad \mathcal{J}_\varepsilon(p_\varepsilon) = \mathcal{J}_0(p_0) + f(\varepsilon)\mathcal{T}_D\mathcal{J}(p_0)(\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{E}(\varepsilon),$$

donde  $\mathcal{T}_D\mathcal{J}(p_0)(\hat{\mathbf{x}})$  se conoce como la derivada topológica de la función de coste  $\mathcal{J}$ , y  $f(\varepsilon)$  una función escalar positiva tal que  $f(\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dada la clase de perturbación topológica considerada en este trabajo, entonces  $f(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2$ . Además,  $\mathcal{E}(\varepsilon)$  es el residuo de la expansión asintótica, a saber  $\frac{\mathcal{E}(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Para demostrar la validez de la expansión anterior, debemos suponer que se cumplen las siguientes condiciones:

**Suposición 2.** *Se requiere que*

1. *El funcional  $\mathcal{J}_\varepsilon$  y el operador diferencial  $e_\varepsilon$  deben ser doblemente Fréchet diferenciables en  $p_0$ .*
2. *La siguiente expansión del funcional  $\mathcal{J}_\varepsilon$  debe ser válida*

$$(3.2) \quad \mathcal{J}_\varepsilon(p) = \mathcal{J}_0(p) + \delta\mathcal{J}(p) \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad \text{tal que} \quad \delta\mathcal{J}(p) = O(\varepsilon^2).$$

Además, se considera que la primera derivada direccional del funcional de costo  $\mathcal{J}$  se puede expresar mediante las siguientes expresiones

$$(3.3) \quad \langle \partial_p \mathcal{J}_\varepsilon(p), \eta_p \rangle = \int_{\Omega} \tilde{J}_\varepsilon(p) \cdot \nabla \eta_p + \int_{\Omega} \bar{J}_\varepsilon(p) \cdot \eta_p + \int_{\Gamma_J} J_\Gamma(p) \cdot \eta_p, \quad \eta_p \in \mathcal{V}_p.$$

$$(3.4) \quad \langle \partial_p \mathcal{J}_0(p), \eta_p \rangle = \int_{\Omega} \tilde{J}_0(p) \cdot \nabla \eta_p + \int_{\Omega} \bar{J}_0(p) \cdot \eta_p + \int_{\Gamma_J} J_\Gamma(p) \cdot \eta_p, \quad \forall \eta_p \in \mathcal{V}_p.$$

donde los paréntesis  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotan un producto de dualidad entre los espacios correspondientes, y el símbolo  $\cdot$  dentro de los integrandos de las expresiones anteriores representa una operación de producto interno generalizado. Los operadores  $\tilde{J}_\varepsilon, \tilde{J}_0, \bar{J}_\varepsilon$  y  $\bar{J}_0$  se definen por partes empleando la función característica  $\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}$  de la bola  $\mathcal{B}_\varepsilon$  de la siguiente manera

$$(3.5) \quad \begin{cases} \tilde{J}_\varepsilon(p) = \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \tilde{J}_{\text{in}}(p) + (1 - \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}) \tilde{J}_{\text{out}}(p), \\ \tilde{J}_0(p) = \tilde{J}_{\text{out}}(p), \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{J}_\varepsilon(p) = \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \bar{J}_{\text{in}}(p) + (1 - \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}) \bar{J}_{\text{out}}(p), \\ \bar{J}_0(p) = \bar{J}_{\text{out}}(p). \end{cases}$$

Estos operadores generalizados son para nuestro caso  $\tilde{J}_{\text{in}} = (\tilde{J}_{\text{in}}^\phi, \tilde{J}_{\text{in}}^\theta, \tilde{J}_{\text{in}}^{\mathbf{u}})$  y  $\tilde{J}_{\text{out}} = (\tilde{J}_{\text{out}}^\phi, \tilde{J}_{\text{out}}^\theta, \tilde{J}_{\text{out}}^{\mathbf{u}})$ , y cada una de sus componentes puede ser función de cualquiera de los estados contenidos en  $p$ , y de la coordenada  $\mathbf{x}$ . Por lo tanto, dados  $\mathbf{x} \in \Omega$  y  $p \in \mathcal{P}$  tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{\text{in}}, \tilde{J}_{\text{out}} &\in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2 \times 2}, \\ \bar{J}_{\text{in}}, \bar{J}_{\text{out}} &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

En otras palabras, los operadores  $\bar{J}_{\text{in}}$  y  $\bar{J}_{\text{out}}$  actúan contra los estados  $\phi, \theta$ , y  $\mathbf{u}$ , mientras que los operadores  $\tilde{J}_{\text{in}}$  y  $\tilde{J}_{\text{out}}$  actúan contra sus gradientes. Luego,

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\varepsilon(p) - \tilde{J}_0(p) &= \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \left( \tilde{J}_{\text{in}}(p) - \tilde{J}_{\text{out}}(p) \right) = \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \tilde{J}(p), \\ \bar{J}_\varepsilon(p) - \bar{J}_0(p) &= \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \left( \bar{J}_{\text{in}}(p) - \bar{J}_{\text{out}}(p) \right) = \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \bar{J}(p). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la siguiente expansión es válida

$$(3.6) \quad \langle \partial_p \mathcal{J}_\varepsilon(p), \eta_p \rangle - \langle \partial_p \mathcal{J}_0(p), \eta_p \rangle = \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \tilde{\mathcal{J}}(p) \cdot \nabla \eta_p + \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \bar{\mathcal{J}}(p) \cdot \eta_p, \quad \forall p \in \mathcal{P}, \eta_p \in \mathcal{V}_p.$$

**Suposición 3.** *También, se requiere que*

1.  $\delta \tilde{\mathcal{J}}(p)$  sea un operador continuamente diferenciable en  $\mathcal{B}_\varepsilon$ ,  $\forall \mathcal{B}_\varepsilon \subset \Omega$ .
2.  $\|\delta \bar{\mathcal{J}}(p)\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} = O(\varepsilon)$ .

La función Lagrangiana para el problema no perturbado se define como

$$(3.7) \quad \mathcal{L}_0(p, p^a) = \mathcal{J}_0(p) + \langle p^a, e_0(p) \rangle_{\mathcal{Z}^*, \mathcal{Z}},$$

y para el problema perturbado

$$(3.8) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(p, p^a) = \mathcal{J}_\varepsilon(p) + \langle p^a, e_\varepsilon(p) \rangle_{\mathcal{Z}^*, \mathcal{Z}},$$

Los segundos términos del lado derecho de (3.7) y (3.8), son productos de dualidad entre elementos del espacio  $\mathcal{Z}$  y su dual  $\mathcal{Z}^*$ . Estos productos conforman una representación generalizada pero equivalente de la forma débil de los sistemas (2.9) y (2.19) respectivamente. Es decir, evaluando  $\eta_p$  en algún  $p^a \in \mathcal{V}_p$  se tiene

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \langle p^a, e_0(p) \rangle_{\mathcal{Z}^*, \mathcal{Z}} = & a_0(\phi, \phi^a) - \ell_{\mathbf{j}}(\phi^a) + b_0(\theta, \theta^a) - N_0(\phi, \theta^a) - \ell_{\mathbf{q}}(\theta^a) + \\ & + c_{10}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^a) - c_{20}(\theta, \mathbf{u}^a) - \ell_{\mathbf{t}}(\mathbf{u}^a), \end{aligned}$$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \langle p^a, e_\varepsilon(p) \rangle_{\mathcal{Z}^*, \mathcal{Z}} = & a_\varepsilon(\phi, \phi^a) - \ell_{\mathbf{j}}(\phi^a) + b_\varepsilon(\theta, \theta^a) - N_\varepsilon(\phi, \theta^a) - \ell_{\mathbf{q}}(\theta^a) + \\ & + c_{1\varepsilon}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^a) - c_{2\varepsilon}(\theta, \mathbf{u}^a) - \ell_{\mathbf{t}}(\mathbf{u}^a). \end{aligned}$$

El estado adjunto no perturbado  $p_0^a = (\phi_0^a, \theta_0^a, \mathbf{u}_0^a)$  y el estado adjunto perturbado  $p_\varepsilon^a = (\phi_\varepsilon^a, \theta_\varepsilon^a, \mathbf{u}_\varepsilon^a)$ , se definen respectivamente como soluciones de los siguientes problemas variacionales

$$(3.11) \quad p_0^a \in \mathcal{V}_p : \langle \partial_p \mathcal{L}_0(p, p_0^a), \eta_p \rangle |_{p=p_0} = 0 \quad \forall \eta_p \in \mathcal{V}_p,$$

$$(3.12) \quad p_\varepsilon^a \in \mathcal{V}_p : \langle \partial_p \mathcal{L}_\varepsilon(p, p_\varepsilon^a), \eta_p \rangle |_{p=p_0} = 0 \quad \forall \eta_p \in \mathcal{V}_p,$$

Desarrollando (3.11) se obtiene

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \langle \partial_p \mathcal{L}_0(p, p_0^a), \eta_p \rangle |_{p=p_0} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_0(p_0 + t\eta_p, p_0^a) |_{t=0} \\ &= \langle \partial_p \mathcal{J}_0(p_0), \eta_p \rangle + \langle p_0^a, \partial_p e_0(p_0) \eta_p \rangle. \end{aligned}$$

Luego, se puede se puede reescribir el segundo término del lado derecho de la ecuación anterior empleando el adjunto del operador  $\partial_p e_0(p_0)$ , llámese  $\partial_p e_0(p_0)^*$ . Entonces despejando se obtiene la forma equivalente de (3.11)

$$(3.14) \quad p_0^a \in \mathcal{V}_p : \langle \partial_p e_0(p_0)^* p_0^a, \eta_p \rangle = - \langle \partial_p \mathcal{J}_0(p_0), \eta_p \rangle, \quad \forall \eta_p \in \mathcal{V}_p.$$

### Sistema Adjunto no perturbado

Empleando (3.9), se puede desarrollar el lado izquierdo de la ecuación anterior de la siguiente manera

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \langle \partial_p e_0(p_0)^* p_0^a, \eta_p \rangle &= \langle p_0^a, \partial_p e_0(p_0) \eta_p \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle p_0^a, e_0(p_0 + t \eta_p) \rangle |_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [a_0(\phi_0 + t \eta_\phi, \phi_0^a) - \ell_j(\phi_0^a) + b_0(\theta_0 + t \eta_\theta, \theta_0^a) - N_0(\phi_0 + t \eta_\phi, \theta_0^a) \\ &\quad + c_{10}(\mathbf{u}_0 + t \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_0^a) - c_{20}(\theta_0 + t \eta_\theta, \mathbf{u}_0^a) - \ell_t(\mathbf{u}_0^a)] |_{t=0} \\ &= a_0(\eta_\phi, \phi_0^a) + b_0(\eta_\theta, \theta_0^a) - d_0(\phi_0, \theta_0^a, \eta_\phi) + c_{10}(\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_0^a) - c_{20}(\eta_\theta, \mathbf{u}_0^a), \end{aligned}$$

donde

$$(3.16) \quad d_0(\phi_0, \theta_0^a, \eta_\phi) = \langle \partial_\phi N_0(\phi_0, \theta_0^a), \eta_\phi \rangle = - \int_{\Omega} 2\theta_0^a \mathbf{j}_0(\phi_0) \cdot \nabla \eta_\phi.$$

Finalmente, la forma débil del sistema adjunto no perturbado se escribe de la siguiente manera

$$(3.17a) \quad \phi_0^a \in \mathcal{V}_\phi : \quad a_0(\eta_\phi, \phi_0^a) - d_0(\phi_0, \theta_0^a, \eta_\phi) = - \langle \partial_\phi \mathcal{J}_0(p_0), \eta_\phi \rangle \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi,$$

$$(3.17b) \quad \theta_0^a \in \mathcal{V}_\theta : \quad b_0(\eta_\theta, \theta_0^a) - c_{20}(\eta_\theta, \mathbf{u}_0^a) = - \langle \partial_\theta \mathcal{J}_0(p_0), \eta_\theta \rangle \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta,$$

$$(3.17c) \quad \mathbf{u}_0^a \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} : \quad c_{10}(\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_0^a) = - \langle \partial_{\mathbf{u}} \mathcal{J}_0(p_0), \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}.$$

### Sistema Adjunto perturbado

Operando de manera similar obtenemos la versión equivalente de (3.12)

$$(3.18) \quad \langle \partial_p e_\varepsilon(p)^* p_\varepsilon^a, \eta_p \rangle |_{p=p_0} = - \langle \partial_p \mathcal{J}_\varepsilon(p), \eta_p \rangle |_{p=p_0} \quad \forall \eta_p \in \mathcal{V}_p.$$

Aplicando la definición del operador diferencial (3.10) se obtienen que en forma detallada el sistema adjunto perturbado

$$(3.19a) \quad \phi_\varepsilon^a \in \mathcal{V}_\phi^\varepsilon : \quad a_\varepsilon(\eta_\phi, \phi_\varepsilon^a) - d_\varepsilon(\phi_0, \theta_\varepsilon^a, \eta_\phi) = - \langle \partial_\phi \mathcal{J}_\varepsilon(p_0), \eta_\phi \rangle \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi^\varepsilon,$$

$$(3.19b) \quad \theta_\varepsilon^a \in \mathcal{V}_\theta^\varepsilon : \quad b_\varepsilon(\eta_\theta, \theta_\varepsilon^a) - c_{2\varepsilon}(\eta_\theta, \mathbf{u}_\varepsilon^a) = - \langle \partial_\theta \mathcal{J}_\varepsilon(p_0), \eta_\theta \rangle \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta^\varepsilon,$$

$$(3.19c) \quad \mathbf{u}_\varepsilon^a \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}^\varepsilon : \quad c_{1\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_\varepsilon^a) = - \langle \partial_{\mathbf{u}} \mathcal{J}_\varepsilon(p_0), \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}^\varepsilon.$$

---

donde

$$(3.20) \quad d_\varepsilon(\phi_0, \theta_\varepsilon^a, \eta_\phi) = \langle \partial_\phi N_\varepsilon(\phi_0, \theta_\varepsilon^a), \eta_\phi \rangle = - \int_\Omega 2\theta_\varepsilon^a \mathbf{j}_\varepsilon(\phi_0) \cdot \nabla \eta_\phi.$$

Debido a la clase de funcionales de costo considerados (ver Ecuación (3.3)), las soluciones de este sistema tienen una discontinuidad de salto en sus gradientes. Por lo tanto, los espacios de funciones apropiados son

$$(3.21) \quad \mathcal{V}_\phi^\varepsilon = \{ \eta \in H^1(\Omega) : \llbracket \eta \rrbracket = 0 \text{ on } \partial\mathcal{B}_\varepsilon, \quad \eta = 0 \text{ on } \Gamma_\phi \},$$

$$(3.22) \quad \mathcal{V}_\theta^\varepsilon = \{ \eta \in H^1(\Omega) : \llbracket \eta \rrbracket = 0 \text{ on } \partial\mathcal{B}_\varepsilon, \quad \eta = 0 \text{ on } \Gamma_\theta \},$$

$$(3.23) \quad \mathcal{V}_\mathbf{u}^\varepsilon = \{ \boldsymbol{\eta} \in H^1(\Omega)^2 : \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket = 0 \text{ on } \partial\mathcal{B}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\eta} = 0 \text{ on } \Gamma_\mathbf{u} \}.$$



## Variación de la Función de Costo

En este trabajo, para obtener la expansión asintótica del funcional de costes se sigue una versión ligeramente modificada del método de Amstutz, presentado en [2], y expandido para algunos sistemas de EDP no lineales en [3] y [6]. Para una descripción de los métodos lagrangianos más novedosos desarrollados para obtener derivadas topológicas, véase [15].

Con el objeto de simplificar la notación en éste capítulo y en adelante se denotará  $\delta p = (\delta\phi, \delta\theta, \delta\mathbf{u}) = (\phi_\varepsilon - \phi_0, \theta_\varepsilon - \theta_0, \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0)$  y  $\delta p^a = (\delta\phi^a, \delta\theta^a, \delta\mathbf{u}^a) = (\phi_\varepsilon^a - \phi_0^a, \theta_\varepsilon^a - \theta_0^a, \mathbf{u}_\varepsilon^a - \mathbf{u}_0^a)$ .

Evaluando las funciones lagrangianas con las correspondientes soluciones de los estados directos se obtienen las funciones de costo. Es decir, evaluando (3.7) en  $p = p_0$  y (3.8) en  $p = p_\varepsilon$  se logra

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(p_0, p^a) &= \mathcal{J}_0(p_0) + \underbrace{\langle p^a, e_0(p_0) \rangle_{\mathcal{Z}^*, \mathcal{Z}}}_{=0} = \mathcal{J}_0(p_0), \\ \mathcal{L}_\varepsilon(p_\varepsilon, p^a) &= \mathcal{J}_\varepsilon(p_\varepsilon) + \underbrace{\langle p^a, e_\varepsilon(p_\varepsilon) \rangle_{\mathcal{Z}^*, \mathcal{Z}}}_{=0} = \mathcal{J}_\varepsilon(p_\varepsilon),\end{aligned}$$

Restando las ecuaciones anteriores y tomando  $p^a = p_\varepsilon^a$ , se obtiene la variación de la función de costo como

$$(4.1) \quad \mathcal{J}_\varepsilon(p_\varepsilon) - \mathcal{J}_0(p_0) = \mathcal{L}_\varepsilon(p_\varepsilon, p_\varepsilon^a) - \mathcal{L}_0(p_0, p_\varepsilon^a).$$

Es necesario resaltar que las funciones lagrangianas deben ser evaluadas en el estado adjunto perturbado  $p_\varepsilon^a$ . En el caso que se desee utilizar  $p_0^a$  se obtendrán residuos de la expansión del orden  $O(\varepsilon^2)$  [12], lo cual no es suficiente.

Sumando y restando  $\mathcal{L}_\varepsilon(p_0, p_\varepsilon^a)$  a la ecuación anterior se obtiene

$$(4.2) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(p_\varepsilon, p_\varepsilon^a) - \mathcal{L}_0(p_0, p_\varepsilon^a) \pm \mathcal{L}_\varepsilon(p_0, p_\varepsilon^a) = [\mathcal{L}_\varepsilon(p_\varepsilon, p_\varepsilon^a) - \mathcal{L}_\varepsilon(p_0, p_\varepsilon^a)] + \delta\mathcal{L}(p_0, p_\varepsilon^a),$$

donde el término  $\delta\mathcal{L}(p_0, p_\varepsilon^a)$  representa la variación de la función de coste debido sólo a un cambio en las propiedades constitutivas, mientras que la diferencia  $[\mathcal{L}_\varepsilon(p_\varepsilon, p_\varepsilon^a) - \mathcal{L}_\varepsilon(p_0, p_\varepsilon^a)]$  representa la contribución dada por un cambio del estado  $p_0$  debido a la introducción de la perturbación  $\mathcal{B}_\varepsilon$ . El término  $\mathcal{L}_\varepsilon(p_\varepsilon, p_\varepsilon^a)$  puede expandirse en una serie de Taylor sobre la variable  $p$  alrededor de  $p_0$  de la siguiente manera

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon(p_\varepsilon, p_\varepsilon^a) &= \mathcal{L}_\varepsilon(p_0 + \delta p, p_\varepsilon^a) = \mathcal{L}_\varepsilon(p_0, p_\varepsilon^a) + \langle \partial_p \mathcal{L}_\varepsilon(p, p_\varepsilon^a), \delta p \rangle |_{p=p_0} \\ &+ \frac{1}{2} \langle \partial_p^2 \mathcal{L}_\varepsilon(p, p_\varepsilon^a) \delta p, \delta p \rangle |_{p=p_0} + \mathcal{E}_1(\varepsilon), \end{aligned}$$

con el residuo

$$(4.4) \quad \mathcal{E}_1(\varepsilon) = o(\|\delta p\|_p^2).$$

De la definición del problema adjunto obtenemos que  $\langle \partial_p \mathcal{L}_\varepsilon(p, p_\varepsilon^a), \delta p \rangle |_{p=p_0} = 0$ , ya que  $\delta p \in \mathcal{V}_p^\varepsilon = \mathcal{V}_\phi^\varepsilon \times \mathcal{V}_\theta^\varepsilon \times \mathcal{V}_u^\varepsilon$ . Luego introduciendo los últimos resultados en (4.2) se obtiene

$$(4.5) \quad \mathcal{J}_\varepsilon(p_\varepsilon) - \mathcal{J}_0(p_0) = \frac{1}{2} \langle \partial_p^2 \mathcal{L}_\varepsilon(p, p_\varepsilon^a) \delta p, \delta p \rangle |_{p=p_0} + \delta\mathcal{L}(p_0, p_\varepsilon^a) + \mathcal{E}_1(\varepsilon).$$

Dado que casi todos los términos en  $\langle p^a, e_\varepsilon(p) \rangle_{\mathcal{Z}^*, \mathcal{Z}}$  son lineales con  $p$ , excepto  $N_\varepsilon(\phi, \eta_\theta)$  se tiene

$$(4.6) \quad \langle \partial_p^2 \mathcal{L}_\varepsilon(p_0, p_\varepsilon^a) \delta p, \delta p \rangle = \langle \partial_p^2 \mathcal{J}_\varepsilon(p_0) \delta p, \delta p \rangle - \langle \partial_\phi^2 N_\varepsilon(\phi_0, \theta_\varepsilon^a) \delta \phi, \delta \phi \rangle.$$

El último término del lado derecho de la ecuación anterior puede expresarse como

$$(4.7) \quad \begin{aligned} -\langle \partial_\phi^2 N_\varepsilon(\phi_0, \theta_\varepsilon^a) \delta \phi, \delta \phi \rangle &= \int_\Omega \theta_\varepsilon^a \mathbf{j}_\varepsilon(\delta \phi) \cdot \nabla \delta \phi \\ &= -2N_\varepsilon(\delta \phi, \theta_\varepsilon^a) \end{aligned}$$

La variación del lagrangiano dada por sólo el cambio de las propiedades constitutivas en la región perturbada es

$$(4.8) \quad \delta\mathcal{L}(p_0, p_\varepsilon^a) = \delta\mathcal{J}(p_0) + \langle p_\varepsilon^a, \delta e(p_0) \rangle_{\mathcal{Z}^*, \mathcal{Z}},$$

con  $\langle p_\varepsilon^a, \delta e(p_0) \rangle_{\mathcal{Z}^*, \mathcal{Z}}$  dado por

$$(4.9) \quad \langle p_\varepsilon^a, \delta e(p_0) \rangle_{\mathcal{Z}^*, \mathcal{Z}} = \delta a(\phi_0, \phi_\varepsilon^a) + \delta b(\theta_0, \theta_\varepsilon^a) - \delta N(\phi_0, \theta_\varepsilon^a) + \delta c_1(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_\varepsilon^a) - \delta c_2(\theta_0, \mathbf{u}_\varepsilon^a)$$

siendo

$$(4.10) \quad \delta a(\phi_0, \phi_\varepsilon^a) = (a_\varepsilon - a_0)(\phi_0, \phi_\varepsilon^a) = (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_\varepsilon^a,$$

$$(4.11) \quad \delta b(\theta_0, \theta_\varepsilon^a) = (b_\varepsilon - b_0)(\theta_0, \theta_\varepsilon^a) = (\gamma^k - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} k_0 \nabla \theta_0 \cdot \nabla \theta_\varepsilon^a,$$

$$(4.12) \quad \delta N(\phi_0, \theta_\varepsilon^a) = (N_\varepsilon - N_0)(\phi_0, \theta_\varepsilon^a) = (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \theta_\varepsilon^a \|\nabla \phi_0\|_2^2,$$

$$(4.13) \quad \delta c_1(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_\varepsilon^a) = (c_{1\varepsilon} - c_{10})(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_\varepsilon^a) = (\gamma^{\mathbb{C}} - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbb{C}_0 \nabla^s \mathbf{u}_0 : \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon^a,$$

$$(4.14) \quad \delta c_2(\theta_0, \mathbf{u}_\varepsilon^a) = (c_{2\varepsilon} - c_{20})(\theta_0, \mathbf{u}_\varepsilon^a) = (\gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}} - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \alpha_0 \mathbb{C}_0 \mathbf{I} \theta_0 : \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon^a.$$

Empleando los resultados anteriores, se obtiene la siguiente expresión de la variación funcional de costo

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon(p_\varepsilon) - \mathcal{J}_0(p_0) &= \frac{1}{2} \langle \partial_p^2 \mathcal{J}_\varepsilon(p) \delta p, \delta p \rangle |_{p=p_0} + \delta \mathcal{J}(p_0) - N_\varepsilon(\delta \phi, \theta_\varepsilon^a) \\ &\quad + (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_\varepsilon^a + (\gamma^k - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} k_0 \nabla \theta_0 \cdot \nabla \theta_\varepsilon^a \\ &\quad - (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \theta_\varepsilon^a \|\nabla \phi_0\|_2^2 + (\gamma^{\mathbb{C}} - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbb{C}_0 \nabla^s \mathbf{u}_0 : \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon^a \\ &\quad - (\gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}} - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \alpha_0 \mathbb{C}_0 \mathbf{I} \theta_0 : \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon^a + \mathcal{E}_1(\varepsilon). \end{aligned}$$

Es necesario realizar un trabajo adicional para expresar  $N_\varepsilon(\delta \phi, \theta_\varepsilon^a)$  en términos de una integral sobre la bola  $\mathcal{B}_\varepsilon$  más, posiblemente, un residuo. Integrando por partes y aplicando el teorema de la divergencia generalizada obtenemos

$$(4.16) \quad \begin{aligned} N_\varepsilon(\delta \phi, \theta_\varepsilon^a) &= \int_{\Omega} \theta_\varepsilon^a s_\varepsilon \nabla \delta \phi \cdot \nabla \delta \phi = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\delta \phi \theta_\varepsilon^a s_\varepsilon \nabla \delta \phi) - \int_{\Omega} \delta \phi \operatorname{div}(\theta_\varepsilon^a s_\varepsilon \nabla \delta \phi) = \\ &= \int_{\partial \Omega} \delta \phi \theta_\varepsilon^a s_\varepsilon \nabla \delta \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} [\delta \phi \theta_\varepsilon^a s_\varepsilon \nabla \delta \phi] \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &\quad - \int_{\Omega} \delta \phi \theta_\varepsilon^a \operatorname{div}(s_\varepsilon \nabla \delta \phi) - \int_{\Omega} \delta \phi s_\varepsilon \nabla \delta \phi \cdot \nabla \theta_\varepsilon^a. \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior puede descomponerse como

$$(4.17) \quad \int_{\partial \Omega} \delta \phi \theta_\varepsilon^a s_\varepsilon \nabla \delta \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{\Gamma_\phi} \delta \phi \theta_\varepsilon^a s_\varepsilon \nabla \delta \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{\Gamma_j} \delta \phi \theta_\varepsilon^a s_\varepsilon \nabla \delta \phi \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

A partir de las condiciones de contorno en los problemas (2.1a) y (2.18a), tenemos

$$\phi_\varepsilon = \phi_0 = \phi_\Gamma \quad \text{en} \quad \Gamma_\phi \quad \implies \quad \delta \phi = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_\phi.$$

Además, teniendo en cuenta que

$$s_\varepsilon \nabla \phi_\varepsilon \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{j}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{n}} = j_\Gamma = \mathbf{j}_0(\phi_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} = s_0 \nabla \phi_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} = s_\varepsilon \nabla \phi_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{en } \Gamma_j.$$

y por lo tanto

$$\mathbf{j}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{j}_0(\phi_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} = -s_\varepsilon \nabla \delta \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } \Gamma_j.$$

En conclusión, tenemos que

$$(4.18) \quad \int_{\partial\Omega} \delta\phi \theta_\varepsilon^a s_\varepsilon \nabla \delta\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0.$$

Para el segundo término en el lado derecho de (4.16) se tiene que

$$\llbracket \delta\phi \theta_\varepsilon^a s_\varepsilon \nabla \delta\phi \rrbracket = \delta\phi \theta_\varepsilon^a \llbracket s_\varepsilon \nabla \delta\phi \rrbracket,$$

ya que  $\delta\phi$  y  $\theta_\varepsilon^a$  son continuos. Luego, es fácil demostrar que

$$\llbracket s_\varepsilon \nabla \delta\phi \rrbracket = \llbracket s_\varepsilon \nabla \phi_\varepsilon \rrbracket - \llbracket s_\varepsilon \nabla \phi_0 \rrbracket.$$

De la condición de salto en el problema (2.18a) se concluye que

$$\llbracket s_\varepsilon \nabla \phi_\varepsilon \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\llbracket \mathbf{j}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0.$$

Siguiendo la definición (2.17) obtenemos

$$-\llbracket s_\varepsilon \nabla \phi_0 \rrbracket = -\llbracket s_\varepsilon \rrbracket \nabla \phi_0 = -(1 - \gamma^s) s_0 \nabla \phi_0.$$

Debido a las relaciones anteriores, el segundo término del lado derecho de la ecuación (4.16) se simplifica en la forma

$$(4.19) \quad - \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} \llbracket \delta\phi \theta_\varepsilon^a s_\varepsilon \nabla \delta\phi \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} = (1 - \gamma^s) \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} \delta\phi \theta_\varepsilon^a s_0 \nabla \phi_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

El operador divergencia del tercer término de (4.16) se descompone como

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(s_\varepsilon \nabla \delta\phi) &= \operatorname{div}(s_\varepsilon \nabla \phi_\varepsilon) - \operatorname{div}(s_\varepsilon \nabla \phi_0) = \\ &= \operatorname{div}(s_\varepsilon \nabla \phi_\varepsilon) - \operatorname{div}(s_0 \nabla \phi_0) + \operatorname{div}((s_0 - s_\varepsilon) \nabla \phi_0), \end{aligned}$$

donde se ha sumado y restado el valor  $\operatorname{div}(s_0 \nabla \phi_0)$  para obtener dicho resultado. Los primeros dos términos del lado derecho de la ecuación anterior son nulos  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  debido

a (2.1a) y (2.18a). Introduciendo estos resultados en el tercer término de (4.16) se obtiene (4.21)

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \delta\phi\theta_{\varepsilon}^a \operatorname{div}(s_{\varepsilon}\nabla\delta\phi) = \int_{\Omega} \delta\phi\theta_{\varepsilon}^a \operatorname{div}((s_{\varepsilon} - s_0)\nabla\phi_0) = \\
& = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\delta\phi\theta_{\varepsilon}^a(s_{\varepsilon} - s_0)\nabla\phi_0) - \int_{\Omega} (s_{\varepsilon} - s_0)\nabla\phi_0 \cdot \nabla(\delta\phi\theta_{\varepsilon}^a) = \\
& = \int_{\partial\Omega} \delta\phi\theta_{\varepsilon}^a(s_{\varepsilon} - s_0)\nabla\phi_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{\partial\mathcal{B}_{\varepsilon}} \llbracket \delta\phi\theta_{\varepsilon}^a(s_{\varepsilon} - s_0)\nabla\phi_0 \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_{\Omega} (s_0 - s_{\varepsilon})\nabla\phi_0 \cdot \nabla(\delta\phi\theta_{\varepsilon}^a).
\end{aligned}$$

Siendo que  $s_{\varepsilon} = s_0$  fuera de la bola  $\mathcal{B}_{\varepsilon}$ , el primer término de la ecuación anterior desaparece. El salto en el segundo término de la ecuación de arriba puede tratarse de manera similar que en (4.19) y obtenerse

$$\llbracket \delta\phi\theta_{\varepsilon}^a(s_{\varepsilon} - s_0)\nabla\phi_0 \rrbracket = (1 - \gamma^s)\delta\phi\theta_{\varepsilon}^a s_0 \nabla\phi_0,$$

y por ende, el tercer término de (4.16) se simplifica de la siguiente manera

$$(4.22) \quad - \int_{\Omega} \delta\phi\theta_{\varepsilon}^a \operatorname{div}(s_{\varepsilon}\nabla\delta\phi) = \int_{\mathcal{B}_{\varepsilon}} s_0 \nabla\phi_0 \cdot \nabla(\delta\phi\theta_{\varepsilon}^a) - (1 - \gamma^s) \int_{\mathcal{B}_{\varepsilon}} \delta\phi\theta_{\varepsilon}^a s_0 \nabla\phi_0 \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Reemplazando (4.18), (4.19) y (4.22) en (4.16) se obtiene

$$(4.23) \quad N_{\varepsilon}(\delta\phi, \theta_{\varepsilon}^a) = (1 - \gamma^s) \int_{\mathcal{B}_{\varepsilon}} s_0 \nabla\phi_0 \cdot \nabla(\delta\phi\theta_{\varepsilon}^a) - \int_{\Omega} \delta\phi s_{\varepsilon} \nabla\delta\phi \cdot \nabla\theta_{\varepsilon}^a.$$

Finalmente, la variación de la función de costo en la ecuación (4.15) puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
(4.24) \quad \mathcal{J}_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}) - \mathcal{J}_0(p_0) &= \frac{1}{2} \langle \partial_p^2 \mathcal{J}_{\varepsilon}(p_0) \delta p, \delta p \rangle + \delta \mathcal{J}(p_0) + (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_{\varepsilon}} s_0 \nabla\phi_0 \cdot \nabla(\delta\phi\theta_{\varepsilon}^a) \\
&+ (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_{\varepsilon}} s_0 \nabla\phi_0 \cdot \nabla\phi_{\varepsilon}^a + (\gamma^k - 1) \int_{\mathcal{B}_{\varepsilon}} k_0 \nabla\theta_0 \cdot \nabla\theta_{\varepsilon}^a \\
&- (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_{\varepsilon}} s_0 \theta_{\varepsilon}^a \|\nabla\phi_0\|_2^2 + (\gamma^c - 1) \int_{\mathcal{B}_{\varepsilon}} \mathbb{C}_0 \nabla^s \mathbf{u}_0 : \nabla^s \mathbf{u}_{\varepsilon}^a \\
&- (\gamma^{\alpha} \gamma^c - 1) \int_{\mathcal{B}_{\varepsilon}} \alpha_0 \mathbb{C}_0 \mathbf{I}\theta_0 : \nabla^s \mathbf{u}_{\varepsilon}^a + \sum_{i=1}^2 \mathcal{E}_i(\varepsilon).
\end{aligned}$$

con

$$(4.25) \quad \mathcal{E}_2(\varepsilon) = \int_{\Omega} \delta\phi s_{\varepsilon} \nabla\delta\phi \cdot \nabla\theta_{\varepsilon}^a,$$

y  $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$  dado en la ecuación (4.4).

El primer y tercer término del lado derecho de la expansión (4.24) poseen dependencia con respecto al estado directo perturbado  $p_{\varepsilon}$  a través de la variación  $\delta p = p_{\varepsilon} - p_0$ . Por otra

parte, salvo los dos primeros términos, dicha variación posee dependencia con respecto al estado adjunto perturbado  $p_\varepsilon^a$ .

La expresión (4.24) está dada en términos de integrales concentradas en la región perturbada  $\mathcal{B}_\varepsilon$ . Por lo tanto, con el objeto de obtener una expansión asintótica de la forma (3.1), es necesario conocer el comportamiento asintótico de las soluciones  $p_\varepsilon$  y  $p_\varepsilon^a$  con respecto a la variable  $\varepsilon$ . Una vez que dicho comportamiento asintótico es conocido de manera explícita, es posible expresar los estados perturbados en términos de los no perturbados y así poder realizar la integración de los términos del lado derecho de la expansión. Esto permite identificar a la función  $f(\varepsilon)$  y otros términos de orden superior contenidos en dichas integrales que terminarán siendo parte del residuo  $\mathcal{E}(\varepsilon)$ , pudiendo finalmente identificar la derivada topológica asociada al funcional de costo  $\mathcal{J}$ . En el siguiente capítulo se trata en detalle el procedimiento abordado para obtener dichas expansiones asintóticas.

## Análisis asintótico de las soluciones

Para obtener una aproximación de los estados perturbados en términos de las soluciones no perturbadas, consideramos la siguiente expansión asintótica de los estados generalizados directo y adjunto

$$(5.1) \quad p_\varepsilon = p_0 + \varepsilon w_p(\mathbf{y}) + \tilde{p},$$

$$(5.2) \quad p_\varepsilon^a = p_0^a + \varepsilon w_{p^a}(\mathbf{y}) + \tilde{p}^a.$$

Esta expansión también se conoce como expansión en serie de Poincaré. Aquí, la transformación  $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$  se ha introducido, y tiene el efecto de estirar la región en la vecindad de  $\mathcal{B}_\varepsilon$  cuando  $\varepsilon$  se hace pequeño, por lo que a veces se la conoce como una transformación de estiramiento. Con esta transformación, el centro de la perturbación pasa de  $\hat{\mathbf{x}}$  a  $\hat{\mathbf{y}}$ , y la perturbación del dominio  $\mathcal{B}_\varepsilon$  en el dominio estirado  $\mathbb{R}^2$  se convierte en la bola unitaria centrada en  $\hat{\mathbf{y}}$ , es decir

$$(5.3) \quad \mathcal{B}_1 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2 < 1\} \quad \text{y} \quad \partial\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2 = 1\}.$$

Las funciones  $w_p(\mathbf{y})$  y  $w_{p^a}(\mathbf{y})$  son soluciones de problemas exteriores en  $\mathbb{R}^2$ , y también se los conocen como correctores de capa límite dentro de la literatura de métodos de perturbación. Estas funciones decaen a cero en el infinito, es decir,  $w_p(\mathbf{y}) \rightarrow 0$  y  $w_{p^a}(\mathbf{y}) \rightarrow 0$  cuando  $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2 \rightarrow \infty$ , y compensan la discrepancia introducida por el término de orden inferior de la expansión de Poincaré ( $p_0$  y  $p_0^a$  alrededor de  $\hat{\mathbf{x}}$ ). Las funciones  $\tilde{p}$  y  $\tilde{p}^a$ , se las conoce como soluciones de un problema de residuo, y su propósito es compensar las discrepancias dejadas tanto por  $w_p(\mathbf{y})$  y  $w_{p^a}(\mathbf{y})$  en la frontera exterior  $\partial\Omega$  como por

el término de orden superior de la expansión en la vecindad de  $\mathcal{B}_\varepsilon$ . Basándonos en la transformación de estiramiento, los operadores diferenciales son los siguientes

$$(5.4) \quad \operatorname{div}(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}(\cdot), \quad \nabla(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}}(\cdot),$$

donde  $\operatorname{div}(\cdot)$  y  $\nabla(\cdot)$  son el operador de divergencia y el de gradiente respecto a la variable independiente  $\mathbf{x}$ . Por comodidad notacional, cada variable basada en estos operadores se denotará con el subíndice adicional  $\mathbf{y}$  para indicar que la operación diferencial se realiza respecto a esta variable, por ejemplo  $\mathbf{j}_{\varepsilon\mathbf{y}}(\phi) = -s_\varepsilon \nabla_{\mathbf{y}} \phi$ . Luego, mediante el cambio de variable definimos las funciones  $w_p^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon) = \varepsilon w_p(\mathbf{y})$  y  $w_{p^a}^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon) = \varepsilon w_{p^a}(\mathbf{y})$ .

## 5.1 Estados Directos

### Problema Eléctrico

Siguiendo la ecuación (5.1), el ansatz

$$(5.5) \quad \phi_\varepsilon = \phi_0 + \varepsilon w_\phi(\mathbf{y}) + \tilde{\phi},$$

es introducido en la ecuación (2.18a) y por lo tanto se obtiene que la función  $w_\phi$  es solución del siguiente problema

$$(5.6) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}(\mathbf{j}_{\varepsilon\mathbf{y}}(w_\phi)) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2, \\ w_\phi \rightarrow 0 & \text{con } \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2 \rightarrow \infty, \\ \llbracket w_\phi \rrbracket = 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}_1, \\ \llbracket \mathbf{j}_{\varepsilon\mathbf{y}}(w_\phi) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} = v_\phi & \text{en } \partial\mathcal{B}_1, \end{cases}$$

con  $v_\phi = -(1 - \gamma^s) \mathbf{j}_0(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

El problema de valor en la frontera anterior admite una solución explícita, que tras un cambio de variables tiene la forma

$$(5.7) \quad w_\phi^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1 - \gamma^s}{1 + \gamma^s} \nabla \phi_0(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) & \text{en } \mathcal{B}_\varepsilon, \\ \frac{1 - \gamma^s}{1 + \gamma^s} \frac{\varepsilon^2}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2} \nabla \phi_0(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) & \text{en } \Omega \setminus \bar{\mathcal{B}}_\varepsilon. \end{cases}$$

El residuo  $\tilde{\phi}$  de (5.5), es solución del siguiente problema de valor en la frontera

$$(5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi})) = f_\phi \quad \text{en } \Omega, \\ \tilde{\phi} = g_\phi \quad \text{en } \Gamma_\phi, \\ \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = h_\phi \quad \text{en } \Gamma_{\mathbf{j}}, \\ \llbracket \tilde{\phi} \rrbracket = 0 \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon, \\ \llbracket \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} = p_\phi \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon. \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_\phi = 0, \\ g_\phi = -w_\phi^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon), \\ h_\phi = -\mathbf{j}_\varepsilon(w_\phi^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon)) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \\ p_\phi = (\gamma^s - 1) \nabla \mathbf{j}_0(\phi_0)(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \end{array} \right.$$

con el punto  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_\varepsilon$ . Entonces, la función  $\tilde{\phi}$  posee la siguiente estimativa  $\|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$  (ver Lema 7.5).

### Problema Térmico

Análogo al problema anterior, se introduce el siguiente ansatz

$$(5.9) \quad \theta_\varepsilon = \theta_0 + \varepsilon w_\theta(\mathbf{y}) + \tilde{\theta},$$

en (2.18b), y se obtiene el siguiente problema de valores en la frontera

$$(5.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}(\mathbf{q}_{\varepsilon\mathbf{y}}(w_\theta)) = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^2, \\ w_\theta \rightarrow 0, \quad \text{con } \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2 \rightarrow \infty, \\ \llbracket w_\theta \rrbracket = 0, \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_1, \\ \llbracket \mathbf{q}_{\varepsilon\mathbf{y}}(w_\theta) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} = v_\theta \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_1, \end{array} \right.$$

con  $v_\theta = -(1 - \gamma^k) \mathbf{q}_0(\theta_0)(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ . Su solución explícita luego de un cambio de variables es

$$(5.11) \quad w_\theta^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1 - \gamma^k}{1 + \gamma^k} \nabla \theta_0(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) & \text{en } \mathcal{B}_\varepsilon, \\ \frac{1 - \gamma^k}{1 + \gamma^k} \frac{\varepsilon^2}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2} \nabla \theta_0(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) & \text{en } \Omega \setminus \bar{\mathcal{B}}_\varepsilon, \end{cases}$$

donde el residuo  $\tilde{\theta}$  es solución de

$$(5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta})) = f_\theta, \quad \text{en } \Omega, \\ \tilde{\theta} = g_\theta, \quad \text{en } \Gamma_\theta, \\ \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = h_\theta, \quad \text{en } \Gamma_{\mathbf{q}}, \\ \llbracket \tilde{\theta} \rrbracket = 0 \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon, \\ \llbracket \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} = p_\theta \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon. \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_\theta = \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \left[ (1 - \gamma^k) \operatorname{div}(\mathbf{q}_0(\theta_0)) + \right. \\ \quad \left. + (\gamma^s - 1) Q_0(\phi_0) \right] + m_1 + m_2, \\ g_\theta = -w_\theta^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon), \\ h_\theta = -\mathbf{q}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon)) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \\ p_\theta = -(1 - \gamma^k) [\mathbf{q}_0(\theta_0) - \mathbf{q}_0(\theta_0)(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{array} \right.$$

siendo  $\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}$  la función característica de la bola  $\mathcal{B}_\varepsilon$ , y  $m_1 = 2s_\varepsilon \nabla \phi_0 \cdot \nabla (w_\phi^\varepsilon + \tilde{\phi})$ , y  $m_2 = s_\varepsilon \|\nabla (w_\phi^\varepsilon + \tilde{\phi})\|_2^2$ . La estimativa  $\|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$  es válida (ver Lema 7.6).

### Problema Mecánico

Siguiendo la misma metodología, el ansatz para este problema se escribe

$$(5.13) \quad \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{w}_u(\mathbf{y}) + \tilde{\mathbf{u}},$$

e introduciéndolo en la ecuación (2.19c), se obtiene el siguiente problema de valores en el contorno

$$(5.14) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_y(\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon y}(\mathbf{w}_u)) = \mathbf{0}, & \text{en } \mathbb{R}^2, \\ \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon y}(\mathbf{w}_u)\hat{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbf{0}, & \text{con } \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2 \rightarrow \infty, \\ \llbracket \mathbf{w}_u \rrbracket = \mathbf{0}, & \text{en } \partial\mathcal{B}_1, \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon y}(\mathbf{w}_u) \rrbracket \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{A}_u \hat{\mathbf{n}} & \text{en } \partial\mathcal{B}_1, \end{cases}$$

con  $\mathbf{A}_u = (\gamma^{\mathbb{C}} - 1)\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0)(\hat{\mathbf{x}}) - (\gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}} - 1)\mathbf{B}_0(\theta_0)(\hat{\mathbf{x}})$ . Considerando un sistema de coordenadas polares  $(r, \varphi)$ , centradas en el punto  $\hat{\mathbf{x}}$ , las componentes del tensor  $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\mathbf{w}_u^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon))$  están dadas por (véase, por ejemplo, [29]):

- Fuera de la bola ( $r \geq \varepsilon$ )

$$(5.15)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\mathbf{w}_u^\varepsilon)^{rr} &= \frac{1}{1 + a_1 \gamma^{\mathbb{C}}} \frac{\varepsilon^2}{r^2} \left( \frac{A_{1,1} + A_{2,2}}{2} \right) + \frac{1}{1 + a_2 \gamma^{\mathbb{C}}} \frac{\varepsilon^2}{r^2} \left( 4 - 3 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) \left( \frac{A_{1,1} - A_{2,2}}{2} \right) \cos 2\varphi \\ &\quad + \frac{1}{1 + a_2 \gamma^{\mathbb{C}}} \frac{\varepsilon^2}{r^2} \left( 4 - 3 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) \left( \frac{A_{1,2} + A_{2,1}}{2} \right) \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

$$(5.16)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\mathbf{w}_u^\varepsilon)^{\varphi\varphi} &= - \frac{1}{1 + a_1 \gamma^{\mathbb{C}}} \frac{\varepsilon^2}{r^2} \left( \frac{A_{1,1} + A_{2,2}}{2} \right) + \frac{3}{1 + a_2 \gamma^{\mathbb{C}}} \frac{\varepsilon^4}{r^4} \left( \frac{A_{1,1} - A_{2,2}}{2} \right) \cos 2\varphi \\ &\quad + \frac{3}{1 + a_2 \gamma^{\mathbb{C}}} \frac{\varepsilon^4}{r^4} \left( \frac{A_{1,2} + A_{2,1}}{2} \right) \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

$$(5.17)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\mathbf{w}_u^\varepsilon)^{\varphi r} &= \frac{1}{1 + a_2 \gamma^{\mathbb{C}}} \frac{\varepsilon^2}{r^2} \left( 2 - 3 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) \left( \frac{A_{1,1} - A_{2,2}}{2} \right) \sin 2\varphi \\ &\quad - \frac{1}{1 + a_2 \gamma^{\mathbb{C}}} \frac{\varepsilon^2}{r^2} \left( 2 - 3 \frac{\varepsilon^2}{r^2} \right) \left( \frac{A_{1,2} + A_{2,1}}{2} \right) \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

- Dentro de la bola ( $0 \leq r < \varepsilon$ ):

$$(5.18) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\mathbf{w}_u^\varepsilon)^{rr} &= - \frac{a_1 \gamma^{\mathbb{C}}}{1 + a_1 \gamma^{\mathbb{C}}} \left( \frac{A_{1,1} + A_{2,2}}{2} \right) - \frac{a_2 \gamma^{\mathbb{C}}}{1 + a_2 \gamma^{\mathbb{C}}} \left( \frac{A_{1,1} - A_{2,2}}{2} \right) \cos 2\varphi \\ &\quad - \frac{a_2 \gamma^{\mathbb{C}}}{1 + a_2 \gamma^{\mathbb{C}}} \left( \frac{A_{1,2} + A_{2,1}}{2} \right) \sin 2\varphi \end{aligned}$$

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \sigma_\varepsilon(\mathbf{w}_\mathbf{u}^\varepsilon)^{\varphi\varphi} = & -\frac{a_1\gamma^{\mathbb{C}}}{1+a_1\gamma^{\mathbb{C}}}\left(\frac{A_{1,1}+A_{2,2}}{2}\right) + \frac{a_2\gamma^{\mathbb{C}}}{1+a_2\gamma^{\mathbb{C}}}\left(\frac{A_{1,1}-A_{2,2}}{2}\right)\cos 2\varphi \\ & + \frac{a_2\gamma^{\mathbb{C}}}{1+a_2\gamma^{\mathbb{C}}}\left(\frac{A_{1,2}+A_{2,1}}{2}\right)\sin 2\varphi, \end{aligned}$$

$$(5.20) \quad \begin{aligned} \sigma_\varepsilon(\mathbf{w}_\mathbf{u}^\varepsilon)^{\varphi r} = & -\frac{a_2\gamma^{\mathbb{C}}}{1+a_2\gamma^{\mathbb{C}}}\left(\frac{A_{1,2}+A_{2,1}}{2}\right)\cos 2\varphi \\ & + \frac{a_2\gamma^{\mathbb{C}}}{1+a_2\gamma^{\mathbb{C}}}\left(\frac{A_{1,1}-A_{2,2}}{2}\right)\sin 2\varphi, \end{aligned}$$

donde  $A_{i,j}$  son las componentes del tensor  $\mathbf{A}_\mathbf{u}$ , mientras que las constantes  $a_1$  y  $a_2$  son las siguientes

$$(5.21) \quad a_1 = \frac{\mu_0 + \lambda_0}{\mu_0} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu},$$

$$(5.22) \quad a_2 = \frac{3\mu_0 + \lambda_0}{\mu_0 + \lambda_0} = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}.$$

El residuo  $\tilde{\mathbf{u}}$  es solución de

$$(5.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})) = \mathbf{f}_\mathbf{u}, \quad \text{en } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{g}_\mathbf{u}, \quad \text{en } \Gamma_\mathbf{u}, \\ \sigma_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{h}_\mathbf{u}, \quad \text{en } \Gamma_\mathbf{t}, \\ \llbracket \tilde{\mathbf{u}} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon, \\ \llbracket \sigma_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \rrbracket \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{p}_\mathbf{u} \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon. \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_\mathbf{u} = \operatorname{div}(\mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta})) \\ -\operatorname{div}([\sigma_\varepsilon - \sigma_0](\mathbf{u}_0) - (\mathbf{B}_\varepsilon - \mathbf{B}_0)(\theta_0)), \\ \mathbf{g}_\mathbf{u} = -\mathbf{w}_\mathbf{u}^\varepsilon, \\ \mathbf{h}_\mathbf{u} = [\mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta}) - \sigma_\varepsilon(\mathbf{w}_\mathbf{u}^\varepsilon)] \hat{\mathbf{n}}, \\ \mathbf{p}_\mathbf{u} = \mathbf{S}_\mathbf{u}\hat{\mathbf{n}} + \llbracket \mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta}) \rrbracket \hat{\mathbf{n}} \end{array} \right.$$

con  $\mathbf{S}_\mathbf{u} = -[(\sigma_0 - \sigma_\varepsilon)(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0(\hat{\mathbf{x}})) - (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_\varepsilon)(\theta_0 - \theta_0(\hat{\mathbf{x}}))]$ . La estimativa  $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)^2} = o(\varepsilon)$  es válida (ver Lema 7.7).

## 5.2 Estados Adjuntos

Dado que el acoplamiento de los estados adjuntos sigue un orden inverso al de los estados directos, introduciremos el análisis asintótico de los problemas adjuntos en ese orden.

### Problema Mecánico

Introduciendo el ansatz

$$(5.24) \quad \mathbf{u}_\varepsilon^a = \mathbf{u}_0^a + \varepsilon \mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}(\mathbf{y}) + \tilde{\mathbf{u}}^a,$$

en (3.19c) se obtiene el siguiente problema exterior para  $w_{\mathbf{u}^a}$ :

$$(5.25) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon\mathbf{y}}(\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a})) = \mathbf{0}, & \text{en } \mathbb{R}^2, \\ \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon\mathbf{y}}(\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a})\hat{\mathbf{n}} \rightarrow \mathbf{0}, & \text{con } \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2 \rightarrow \infty, \\ \llbracket \mathbf{w}_{\mathbf{u}^a} \rrbracket = \mathbf{0}, & \text{en } \partial\mathcal{B}_1, \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon\mathbf{y}}(\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}) \rrbracket \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{A}_{\mathbf{u}^a} \hat{\mathbf{n}} & \text{en } \partial\mathcal{B}_1, \end{cases}$$

con  $\mathbf{A}_{\mathbf{u}^a} = (\gamma^{\mathbb{C}} - 1)\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a)(\hat{\mathbf{x}}) + \delta\tilde{J}^{\mathbf{u}}(p_0)(\hat{\mathbf{x}})$ .

La solución de este sistema es dado en coordenadas polares  $(r, \varphi)$  y sigue exactamente las mismas expresiones que las ecuaciones (5.15) y (5.20), reemplazando  $\mathbf{A}_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{u}^a}$ .

El residuo  $\tilde{\mathbf{u}}^a$  es solución de

$$(5.26) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^a)) = \mathbf{f}_{\mathbf{u}^a} & \text{en } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}}^a = \mathbf{g}_{\mathbf{u}^a} & \text{en } \Gamma_{\mathbf{u}}, \\ \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^a)\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{h}_{\mathbf{u}^a} & \text{en } \Gamma_{\mathbf{t}}, \\ \llbracket \tilde{\mathbf{u}}^a \rrbracket = \mathbf{0} & \text{en } \partial\mathcal{B}_{\varepsilon}, \\ \llbracket \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}^a) \rrbracket \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{p}_{\mathbf{u}^a} & \text{en } \partial\mathcal{B}_{\varepsilon}. \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{f}_{\mathbf{u}^a} = -\operatorname{div}\left([\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}_0](\mathbf{u}_0^a) + \chi_{\mathcal{B}_{\varepsilon}}\delta\tilde{J}^{\mathbf{u}}(p_0)\right) \\ \quad + \chi_{\mathcal{B}_{\varepsilon}}\delta\bar{J}^{\mathbf{u}}(p_0), \\ \mathbf{g}_{\mathbf{u}^a} = -\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^{\varepsilon}, \\ \mathbf{h}_{\mathbf{u}^a} = -\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}(\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^{\varepsilon})\hat{\mathbf{n}}, \\ \mathbf{p}_{\mathbf{u}^a} = -\llbracket \chi_{\mathcal{B}_{\varepsilon}}(\gamma^{\mathbb{C}} - 1)(\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a) - \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a)(\hat{\mathbf{x}})) \rrbracket \hat{\mathbf{n}} \\ \quad - \llbracket \chi_{\mathcal{B}_{\varepsilon}}(\delta\tilde{J}^{\mathbf{u}}(p_0) - \delta\tilde{J}^{\mathbf{u}}(p_0)(\hat{\mathbf{x}})) \rrbracket \hat{\mathbf{n}}. \end{cases}$$

La estimativa  $\|\tilde{\mathbf{u}}^a\|_{H^1(\Omega)^2} = o(\varepsilon)$  es válida (ver Lema 7.8).

### Problema Térmico

Mediante la introducción del siguiente ansatz

$$(5.27) \quad \theta_{\varepsilon}^a = \theta_0^a + \varepsilon w_{\theta^a}(\mathbf{y}) + \tilde{\theta}^a,$$

en el problema de valores en la frontera (3.19b), se obtiene el siguiente problema exterior

$$(5.28) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}(\mathbf{q}_{\varepsilon\mathbf{y}}(w_{\theta^a})) = 0, & \text{en } \mathbb{R}^2, \\ w_{\theta^a} \rightarrow 0, & \text{con } \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2 \rightarrow \infty, \\ \llbracket w_{\theta^a} \rrbracket = 0, & \text{en } \partial\mathcal{B}_1, \\ \llbracket \mathbf{q}_{\varepsilon\mathbf{y}}(w_{\theta^a}) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{v}_{\theta^a} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{en } \partial\mathcal{B}_1, \end{cases}$$

con  $\mathbf{v}_{\theta^a} = [\gamma^k - 1]\mathbf{q}_0(\theta_0^a)(\hat{\mathbf{x}}) - \delta\tilde{J}^{\theta}(p_0)(\hat{\mathbf{x}})$ . Su solución explícita es

$$(5.29) \quad w_{\theta^a}^{\varepsilon}(\mathbf{x}/\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{k_0(1 + \gamma^k)} \mathbf{v}_{\theta^a} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) & \text{en } \mathcal{B}_{\varepsilon}, \\ \frac{\varepsilon^2}{k_0(1 + \gamma^k)} \mathbf{v}_{\theta^a} \cdot \frac{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2} & \text{en } \Omega \setminus \bar{\mathcal{B}}_{\varepsilon}, \end{cases}$$

y el residuo  $\tilde{\theta}^a$  es solución de

$$(5.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}^a)) = f_{\theta^a}, \quad \text{en } \Omega, \\ \tilde{\theta}^a = g_{\theta^a}, \quad \text{en } \Gamma_\theta, \\ -\mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}^a) \cdot \hat{\mathbf{n}} = h_{\theta^a}, \quad \text{en } \Gamma_{\mathbf{q}}, \\ \llbracket \tilde{\theta}^a \rrbracket = 0 \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon, \\ \llbracket \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}^a) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} = p_{\theta^a} \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon. \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{\theta^a} = -\operatorname{div}([\mathbf{q}_\varepsilon - \mathbf{q}_0](\theta_0^a)) \\ \quad + \mathbf{B}_0 : \nabla^s(w_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon + \tilde{\mathbf{u}}^a) + (\mathbf{B}_\varepsilon - \mathbf{B}_0) : \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon^a \\ \quad + \operatorname{div}(\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \tilde{\mathcal{J}}^\theta(p_0)) - \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \tilde{\mathcal{J}}^\theta(p_0), \\ g_{\theta^a} = -w_{\tilde{\theta}^a}^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon), \\ h_{\theta^a} = -\mathbf{q}_\varepsilon(w_{\tilde{\theta}^a}^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon)) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \\ p_{\theta^a} = \llbracket \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}(-[\gamma^k - 1][\mathbf{q}_0(\theta_0^a) - \mathbf{q}_0(\theta_0^a)(\hat{\mathbf{x}})]) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \quad + \llbracket \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}(\delta \tilde{\mathcal{J}}^\theta(p_0) - \delta \tilde{\mathcal{J}}^\theta(p_0)(\hat{\mathbf{x}})) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}}. \end{array} \right.$$

La estimativa  $\|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$  es válida (ver Lema 7.9).

### Problema Eléctrico

Mediante la introducción del ansatz

$$(5.31) \quad \phi_\varepsilon^a = \phi_0^a + \varepsilon w_{\phi^a}(\mathbf{y}) + \tilde{\phi}^a,$$

en el problema de valores en el contorno (3.19a), se obtiene el siguiente problema exterior

$$(5.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{\mathbf{y}}(\mathbf{j}_{\varepsilon\mathbf{y}}(w_{\phi^a})) = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^2, \\ w_{\phi^a} \rightarrow 0, \quad \text{con } \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2 \rightarrow \infty, \\ \llbracket w_{\phi^a} \rrbracket = 0, \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_1, \\ \llbracket \mathbf{j}_{\varepsilon\mathbf{y}}(w_{\phi^a}) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{v}_{\phi^a} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_1, \end{array} \right.$$

con  $\mathbf{v}_{\phi^a} = [\gamma^s - 1]\mathbf{j}_0(\phi_0^a)(\hat{\mathbf{x}}) - 2\theta_0^a(\hat{\mathbf{x}})[\gamma^s - 1]\mathbf{j}_0(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}}) - \delta \tilde{\mathcal{J}}^\theta(p_0)(\hat{\mathbf{x}})$ . Su solución explícita es

$$(5.33) \quad w_{\phi^a}^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{s_0(1 + \gamma^s)} \mathbf{v}_{\phi^a} \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) & \text{en } \mathcal{B}_\varepsilon, \\ \frac{\varepsilon^2}{s_0(1 + \gamma^s)} \mathbf{v}_{\phi^a} \cdot \frac{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2} & \text{en } \Omega \setminus \bar{\mathcal{B}}_\varepsilon, \end{cases}$$

y el residuo  $\tilde{\phi}^a$  es solución de

(5.34)

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}^a)) = f_{\phi^a}, \quad \text{en } \Omega, \\ \tilde{\phi}^a = g_{\phi^a}, \quad \text{en } \Gamma_\phi, \\ -\mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}^a) \cdot \hat{\mathbf{n}} = h_{\phi^a}, \quad \text{en } \Gamma_{\mathbf{j}}, \\ \llbracket \tilde{\phi}^a \rrbracket = 0 \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon, \\ \llbracket \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}^a) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} = p_{\phi^a} \quad \text{en } \partial\mathcal{B}_\varepsilon. \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{\phi^a} = -\operatorname{div}(\llbracket \mathbf{j}_\varepsilon - \mathbf{j}_0 \rrbracket(\phi_0^a)) \\ \quad + 2\operatorname{div}(\theta_0^a(\mathbf{j}_\varepsilon - \mathbf{j}_0)(\phi_0) + \delta\theta^a \mathbf{j}_\varepsilon(\phi_0)) \\ \quad + \operatorname{div}(\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \tilde{J}^\phi(p_0)) - \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \tilde{J}^\phi(p_0), \\ g_{\phi^a} = -w_{\phi^a}^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon), \\ h_{\phi^a} = \mathbf{j}_\varepsilon(w_{\phi^a}^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon)) \cdot \hat{\mathbf{n}} - 2\delta\theta^a \mathbf{j}_0(\phi_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \\ p_{\phi^a} = -\llbracket \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}(\gamma^s - 1) \llbracket \mathbf{j}_0(\phi_0^a) - \mathbf{j}_0(\phi_0^a)(\hat{\mathbf{x}}) \rrbracket \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \quad + \llbracket 2[\theta_0^a - \theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \delta\theta^a](\mathbf{j}_\varepsilon - \mathbf{j}_0)(\phi_0) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \quad + \llbracket \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} 2\theta_0^a(\hat{\mathbf{x}})(\gamma^s - 1) \llbracket \mathbf{j}_0(\phi_0) - \mathbf{j}_0(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}}) \rrbracket \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ \quad + \llbracket \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon}(\delta \tilde{J}^\phi(p_0) - \delta \tilde{J}^\phi(p_0)(\hat{\mathbf{x}})) \rrbracket \cdot \hat{\mathbf{n}}. \end{array} \right.$$

La estimativa  $\|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon)$  es válida (ver Lema 7.10).

## Evaluación de la Derivada Topológica

En esta sección, se presenta el cálculo de la derivada topológica para algunos ejemplos de funcionales de costo empleando la expansión (4.24).

### 6.1 Ejemplo 1

Para un funcional lineal de la forma

$$(6.1) \quad \mathcal{J}(p) = \int_{\Gamma_1} f_1 \phi + \int_{\Gamma_2} f_2 \theta + \int_{\Gamma_3} \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{u},$$

donde no existe dependencia directa con la perturbación  $\varepsilon$ , en otras palabras, dado  $p \in \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{J}_\varepsilon(p) = \mathcal{J}_0(p) = \mathcal{J}(p)$ , se tiene

$$(6.2) \quad \langle \partial_p^2 \mathcal{J}(p_0) \delta p, \delta p \rangle = 0,$$

$$(6.3) \quad \delta \mathcal{J}(p_0) = 0,$$

y la contribución a las expansiones de las soluciones perturbadas es

$$(6.4) \quad \delta \tilde{\mathcal{J}}(p) = (\delta \tilde{\mathcal{J}}^\phi(p_0), \delta \tilde{\mathcal{J}}^\theta(p_0), \delta \tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0)) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}).$$

Empleando el ansatz para los estados perturbados (ecuaciones (5.5), (5.24), (5.27) y (5.31)) se obtiene

$$(6.5) \quad (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_\varepsilon^a = \pi \varepsilon^2 [\mathbf{P}_s \mathbf{j}_0(\phi_0) \cdot \nabla \phi_0^a + \beta_{Q_1} Q_0(\phi_0) \theta_0^a](\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{E}_3(\varepsilon),$$

$$(6.6) \quad (\gamma^k - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} k_0 \nabla \theta_0 \cdot \nabla \theta_\varepsilon^a = \pi \varepsilon^2 [\mathbf{P}_k \mathbf{q}_0(\theta_0) \cdot \nabla \theta_0^a](\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{E}_4(\varepsilon),$$

$$(6.7) \quad -(\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \|\nabla \phi_0\|_2^2 \theta_\varepsilon^a = \pi \varepsilon^2 [\beta_{Q_2} Q_0(\phi_0) \theta_0^a](\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{E}_5(\varepsilon),$$

$$(6.8) \quad (\gamma^{\mathbb{C}} - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbb{C}_0 \nabla^s \mathbf{u}_0 : \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon^a = \pi \varepsilon^2 [\mathbb{P}_\sigma \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0) : \nabla^s \mathbf{u}_0^a](\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{E}_6(\varepsilon),$$

$$(6.9) \quad -(\gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}} - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \alpha_0 \mathbb{C}_0 \mathbf{I} \theta_0 : \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon^a = \pi \varepsilon^2 [\mathbb{P}_\mathbf{B} \mathbf{B}_0(\theta_0) : \nabla^s \mathbf{u}_0^a](\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{E}_7(\varepsilon),$$

$$(6.10) \quad \begin{aligned} (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla (\delta \phi \theta_\varepsilon^a) &= (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla w_\phi^\varepsilon \theta_0^a + \mathcal{E}_8(\varepsilon) \\ &= \pi \varepsilon^2 [\beta_{Q_3} Q_0(\phi_0) \theta_0^a](\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{E}_8(\varepsilon). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada topológica asociada es

$$(6.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_D(p_0) \mathcal{J}(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{P}_s \mathbf{j}_0(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \phi_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \beta_Q Q_0(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}}) \theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{P}_k \mathbf{q}_0(\theta_0)(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) \\ &\quad + \mathbb{P}_\sigma \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0)(\hat{\mathbf{x}}) : \nabla^s \mathbf{u}_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{P}_\mathbf{B} \mathbf{B}_0(\theta_0)(\hat{\mathbf{x}}) : \nabla^s \mathbf{u}_0^a(\hat{\mathbf{x}}), \end{aligned}$$

donde

$$(6.12a) \quad \beta_{Q_1} = 2 \frac{(1-\gamma^s)^2}{1+\gamma^s}, \quad \beta_{Q_2} = (1-\gamma^s), \quad \beta_{Q_3} = -\frac{1}{2} \beta_{Q_1}, \quad \beta_Q = \sum_{i=1}^3 \beta_{Q_i} = 2 \frac{1-\gamma^s}{1+\gamma^s}$$

$$(6.12b) \quad \mathbf{P}_s = 2 \frac{1-\gamma^s}{1+\gamma^s} \mathbf{I}, \quad \mathbf{P}_k = 2 \frac{1-\gamma^k}{1+\gamma^k} \mathbf{I},$$

(6.12c)

$$\mathbb{P}_\sigma = -(1-\gamma^{\mathbb{C}})(\mathbb{I} + \mathbb{T}) = -\frac{(1-\gamma^{\mathbb{C}})}{(1+\gamma^{\mathbb{C}} a_2)} \left[ (1+a_2) \mathbb{I} + \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \frac{(1-\gamma^{\mathbb{C}})}{(1+\gamma^{\mathbb{C}} a_1)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right],$$

(6.12d)

$$\mathbb{P}_\mathbf{B} = (1-\gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}})(\mathbb{I} + \mathbb{T}) = \frac{(1-\gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}})}{(1+\gamma^{\mathbb{C}} a_2)} \left[ (1+a_2) \mathbb{I} + \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \frac{(1-\gamma^{\mathbb{C}})}{(1+\gamma^{\mathbb{C}} a_1)} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right],$$

con

$$(6.13) \quad \mathbb{T} = \frac{1}{2} \frac{1-\gamma^{\mathbb{C}}}{1+a_2 \gamma^{\mathbb{C}}} \left( 2a_2 \mathbb{I} + \frac{a_1 - a_2}{1+a_1 \gamma^{\mathbb{C}}} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right).$$

Las constantes  $a_1$  y  $a_2$  se definen en (5.21) y (5.22). Además, el residuo  $\mathcal{E}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^8 \mathcal{E}_i(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ , tal como se muestra en el Lema B.1.

## 6.2 Ejemplo 2

Considere el siguiente funcional cuadrático

$$(6.14) \quad \mathcal{J}_\varepsilon(p) = \int_{\Omega} Q_\varepsilon(\phi) = \int_{\Omega} s_\varepsilon \|\nabla \phi\|_2^2,$$

El término  $\delta\mathcal{J}(p_0)$  se obtiene de manera trivial

$$(6.15) \quad \delta\mathcal{J}(p_0) = (a_\varepsilon - a_0)(\phi_0, \phi_0).$$

Para la segunda contribución a la variación se tiene

$$(6.16) \quad \frac{1}{2} \langle \partial_p^2 \mathcal{J}_\varepsilon(p_0) \delta p, \delta p \rangle = a_\varepsilon(\delta\phi, \delta\phi).$$

Afortunadamente, gracias a la ecuación (7.4), se puede formular la siguiente expresión como una integral sobre la bola  $\mathcal{B}_\varepsilon$  de la siguiente manera

$$(6.17) \quad \frac{1}{2} \langle \partial_p^2 \mathcal{J}_\varepsilon(p_0) \delta p, \delta p \rangle = -(a_\varepsilon - a_0)(\phi_0, \delta\phi).$$

La contribución del funcional de costo a las soluciones de los problemas exteriores es

$$(6.18) \quad \delta\tilde{J}(p) = (2(\gamma^s - 1)s_0 \nabla\phi_0, \mathbf{0}, \mathbf{0}),$$

y por ende, la expansión de  $\phi_\varepsilon^a$  cambia con respecto a su homóloga del ejemplo anterior. Consecuentemente, la expansión del término  $\delta a(\phi_0, \phi_\varepsilon^a) = (a_\varepsilon - a_0)(\phi_0, \phi_\varepsilon^a)$  en la ecuación (4.10) cambia, mientras que las expresiones del resto de los términos permanecen inalterados. Sumando las contribuciones en las ecuaciones (6.15) y (6.17) con (4.10) se obtiene lo siguiente

$$(6.19) \quad \frac{1}{2} \langle \partial_p^2 \mathcal{J}_\varepsilon(p_0) \delta p, \delta p \rangle + \delta\mathcal{J}(p_0) + \delta a(\phi_0, \phi_\varepsilon^a) = \delta a(\phi_0, \phi_0) - \delta a(\phi_0, \delta\phi) + \delta a(\phi_0, \phi_\varepsilon^a).$$

Seguindo la expresión (5.33), y utilizando el resultado (6.18), la solución del problema exterior  $w_{\phi_a}^\varepsilon$  para este problema es

$$(6.20) \quad w_{\phi_a}^\varepsilon(\mathbf{x}/\varepsilon) = \begin{cases} \frac{(1 - \gamma^s)}{(1 + \gamma^s)} [\nabla\phi_0^a - 2\theta_0^a \nabla\phi_0 + 2\nabla\phi_0](\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) & \text{en } \mathcal{B}_\varepsilon, \\ \varepsilon^2 \frac{(1 - \gamma^s)}{(1 + \gamma^s)} [\nabla\phi_0^a - 2\theta_0^a \nabla\phi_0 + 2\nabla\phi_0](\hat{\mathbf{x}}) \cdot \frac{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2} & \text{en } \Omega \setminus \bar{\mathcal{B}}_\varepsilon. \end{cases}$$

Comparando esta solución con  $w_{\phi_a}^\varepsilon$  y  $w_\phi^\varepsilon$  del ejemplo anterior, se puede establecer lo siguiente

$$(6.21) \quad w_{\phi_a}^\varepsilon = \bar{w}_{\phi_a}^\varepsilon + 2w_\phi^\varepsilon,$$

donde  $\bar{w}_{\phi_a}^\varepsilon$  es la solución al problema exterior para  $\phi_\varepsilon^a$  cuando  $\delta\tilde{J}^\phi(p) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ , y  $w_\phi^\varepsilon$  es la solución del problema exterior para  $\phi_\varepsilon$ . Introduciendo la descomposición anterior en (6.19), y utilizando el ansatz (5.31) en la ecuación (4.10) se obtiene

$$(6.22) \quad \begin{aligned} \delta a(\phi_0, \phi_0) - \delta a(\phi_0, \delta\phi) + \delta a(\phi_0, \phi_\varepsilon^a) &= \delta a(\phi_0, \phi_0 - w_\phi^\varepsilon - \tilde{\phi} + \phi_0^a + \bar{w}_{\phi_a}^\varepsilon + 2w_\phi^\varepsilon + \tilde{\phi}^a) \\ &= \delta a(\phi_0, \phi_0 + w_\phi^\varepsilon) + \delta a(\phi_0, \phi_0^a + \bar{w}_{\phi_a}^\varepsilon) + \mathcal{E}_3(\varepsilon) + \mathcal{E}_9(\varepsilon), \end{aligned}$$

con  $\mathcal{E}_9(\varepsilon) = -\delta a(\phi_0, \tilde{\phi}) = o(\varepsilon^2)$ , véase Lema B.1. El primer y el tercer término del lado derecho de la ecuación anterior ya están expresados en la expansión del funcional de costo (vea ecuación (6.5)), y los nuevos términos a ser agregados son el segundo y el cuarto.

Se concluye que la derivada topológica asociada a este problema está dada por la siguiente expresión

$$(6.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_D \mathcal{J}(p_0)(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{P}_s \mathbf{j}_0(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \phi_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \beta_Q Q_0(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}}) \theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{P}_k \mathbf{q}_0(\theta_0)(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) \\ &+ \mathbb{P}_\sigma \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0)(\hat{\mathbf{x}}) : \nabla^s \mathbf{u}_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{P}_\mathbf{B} \mathbf{B}_0(\theta_0)(\hat{\mathbf{x}}) : \nabla^s \mathbf{u}_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{P}_s \mathbf{j}_0(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \phi_0(\hat{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

## Estimación de las soluciones de la expansión asintótica

En esta sección supondremos continuidad del tipo  $C^2$  de los estados directo y adjunto no perturbados sobre  $\Omega$  para probar las siguientes estimaciones, pero esta condición puede debilitarse considerablemente. Además, asumimos que los datos en las EDP en los problemas (2.16a) y (3.17b) cumplen las condiciones necesarias para asegurar que  $\nabla\phi_0$  y  $\nabla\theta_0^a$  viven en  $L^\infty(\Omega)^2$ .

En esta sección y en el Apéndice, la letra  $C$  numerada representa una constante positiva independiente del radio de la perturbación  $\varepsilon$ .

Es importante destacar que las estimaciones de las cantidades  $\|\delta\phi\|_{H^1(\Omega)}$ ,  $\|\delta\theta\|_{H^1(\Omega)}$ , y  $\|\delta\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}$  realizadas en los Lemas 7.1, 7.3 y 7.4 respectivamente pueden realizarse empleando las expansiones (5.5), (5.9) y (5.13) y los resultados obtenidos dentro de los restantes lemas presentes en esta sección y en el apéndice. La importancia de estos primeros lemas es justamente que son válidos independientemente del ansatz utilizado.

**Lema 7.1.** *Sea  $\phi_\varepsilon$  y  $\phi_0$  soluciones de la ecuación de estado perturbada (2.19a) y no perturbada (2.16a), respectivamente, luego la siguiente estimativa es válida*

$$(7.1) \quad \|\phi_\varepsilon - \phi_0\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon).$$

**Prueba.** Restando (2.16a) de (2.19a) y luego evaluando en  $\eta_\phi = \delta\phi$  se obtiene

$$(7.2) \quad a_\varepsilon(\phi_\varepsilon, \delta\phi) - a_0(\phi_0, \delta\phi) = \ell_j(\delta\phi) - \ell_j(\delta\phi) = 0.$$

Ahora sumando y restando  $a_\varepsilon(\phi_0, \delta\phi)$  a la última ecuación tenemos

$$(7.3) \quad a_\varepsilon(\phi_\varepsilon, \delta\phi) - a_0(\phi_0, \delta\phi) \pm a_\varepsilon(\phi_0, \delta\phi) = a_\varepsilon(\delta\phi, \delta\phi) + (a_\varepsilon - a_0)(\phi_0, \delta\phi) = 0,$$

y por ende,

$$(7.4) \quad a_\varepsilon(\delta\phi, \delta\phi) = (a_0 - a_\varepsilon)(\phi_0, \delta\phi) = (1 - \gamma^s) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \delta\phi.$$

Luego, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz y del teorema de valor medio del cálculo integral

$$(7.5) \quad |a_\varepsilon(\delta\phi, \delta\phi)| \leq C_1 \|\nabla \phi_0\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\delta\phi\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_2 \varepsilon \|\delta\phi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ya que  $\delta\phi \in \mathcal{V}_\phi$  la desigualdad de Poincaré es válida y por ende la forma bilineal  $a_\varepsilon(\delta\phi, \delta\phi)$  es  $\mathcal{V}_\phi$ -elíptica, esto es

$$(7.6) \quad C_3 \|\delta\phi\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a_\varepsilon(\delta\phi, \delta\phi),$$

Finalmente, usando las últimas dos expresiones, se obtiene

$$(7.7) \quad \|\delta\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Lema 7.2.** *Sea  $\phi_\varepsilon$  y  $\phi_0$  soluciones de las ecuaciones de estado perturbadas (2.19a) y no perturbadas (2.16a), respectivamente, luego  $\delta\phi$  es acotada y la siguiente estimativa es válida*

$$(7.8) \quad \|\phi_\varepsilon - \phi_0\|_{L^\infty(\Omega)} = O(\varepsilon)$$

**Prueba.** Sustrayendo (2.16a) de (2.19a) se puede establecer un nuevo problema variacional

$$(7.9) \quad \delta\phi \in \mathcal{V}_\phi : \quad a_\varepsilon(\delta\phi, \eta_\phi) = (a_0 - a_\varepsilon)(\phi_0, \eta_\phi) \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi,$$

donde

$$(7.10) \quad (a_0 - a_\varepsilon)(\phi_0, \eta_\phi) = \int_{\Omega} (\mathbf{j}_\varepsilon - \mathbf{j}_0)(\phi_0) \cdot \nabla \eta_\phi.$$

Siguiendo el Teorema A.3 con  $y = \delta\phi$ , y  $\mathbf{f} = (\mathbf{j}_\varepsilon - \mathbf{j}_0)(\phi_0)$  se obtiene

$$\|\delta\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_\infty \|(\mathbf{j}_\varepsilon - \mathbf{j}_0)(\phi_0)\|_{L^p(\Omega)^2} \leq C_1 \|\mathbf{j}_0(\phi_0)\|_{L^p(\mathcal{B}_\varepsilon)^2} = C_5 \varepsilon^{2/p}.$$

Ya que  $\phi_0 \in H^1(\Omega)$ , esto es,  $\phi_0 \in L^2(\Omega)$  y  $\nabla \phi_0 \in L^2(\Omega)^2$ , luego, al menos  $p = 2$ . Se concluye que

$$(7.11) \quad \|\delta\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_5 \varepsilon. \quad \blacksquare$$

---

**Lema 7.3.** Sea  $\theta_\varepsilon$  y  $\theta_0$  soluciones de las ecuaciones de estado perturbadas (2.19b) y no perturbadas (2.16b), respectivamente, luego la siguiente estimativa es válida

$$(7.12) \quad \|\theta_\varepsilon - \theta_0\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon).$$

**Prueba.** Sustrayendo (2.16b) de (2.19b) con  $\eta_\phi = \delta\phi$ , sumando y restando  $b_\varepsilon(\theta_0, \delta\theta)$  al lado izquierdo y  $N_\varepsilon(\phi_0, \delta\theta)$  al lado derecho la ecuación se, arriba a la siguiente expresión

$$(7.13) \quad b_\varepsilon(\delta\theta, \delta\theta) = (b_0 - b_\varepsilon)(\theta_0, \delta\theta) + N_\varepsilon(\phi_\varepsilon, \delta\theta) - N_\varepsilon(\phi_0, \delta\theta) + (N_\varepsilon - N_0)(\phi_0, \delta\theta).$$

Dado que  $\phi_\varepsilon = \phi_0 + \delta\phi$ , se puede expandir de manera exacta el segundo término de la ecuación anterior mediante una serie de Taylor hasta el término de segundo orden alrededor del punto  $\phi = \phi_0$  de la siguiente manera

$$(7.14) \quad N_\varepsilon(\phi_\varepsilon, \delta\theta) = N_\varepsilon(\phi_0, \delta\theta) + \langle \partial_\phi N_\varepsilon(\phi, \delta\theta), \delta\phi \rangle \Big|_{\phi=\phi_0} + \frac{1}{2} \langle \partial_\phi^2 N_\varepsilon(\phi, \delta\theta) \delta\phi, \delta\phi \rangle \Big|_{\phi=\phi_0},$$

y por lo tanto arribar a la siguiente expresión

$$(7.15) \quad N_\varepsilon(\phi_\varepsilon, \delta\theta) = N_\varepsilon(\phi_0, \delta\theta) + d_\varepsilon(\phi_0, \delta\theta, \delta\phi) + N_\varepsilon(\delta\phi, \delta\theta).$$

Introduciendo el resultado anterior en (7.13), se obtiene

$$(7.16) \quad b_\varepsilon(\delta\theta, \delta\theta) = (b_0 - b_\varepsilon)(\theta_0, \delta\theta) + d_\varepsilon(\phi_0, \delta\theta, \delta\phi) + N_\varepsilon(\delta\phi, \delta\theta) + (N_\varepsilon - N_0)(\phi_0, \delta\theta).$$

Para el primer término de la ecuación de arriba, empleado la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$(7.17) \quad \begin{aligned} |(b_0 - b_\varepsilon)(\theta_0, \delta\theta)| &= \left| \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (1 - \gamma^k) k_0 \nabla \theta_0 \cdot \nabla \delta\theta \right| \leq \\ &\leq C_1 \|\nabla \theta_0\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla \delta\theta\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_2 \varepsilon \|\delta\theta\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad generalizada de Hölder en el segundo término de la ecuación (7.16), y ya que se asume que  $\nabla \phi_0 \in L^\infty(\Omega)^2$  se obtiene el siguiente resultado

$$(7.18) \quad \begin{aligned} |d_\varepsilon(\phi_0, \delta\theta, \delta\phi)| &= \left| 2 \int_{\Omega} s_\varepsilon \delta\theta \nabla \phi_0 \cdot \nabla \delta\phi \right| \\ &\leq C_3 \|\nabla \phi_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|\delta\theta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \delta\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_4 \|\delta\phi\|_{H^1(\Omega)} \|\delta\theta\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

De manera similar, para el cuarto término de la expansión (7.16)

$$(7.19) \quad \begin{aligned} |(N_\varepsilon - N_0)(\phi_0, \delta\theta)| &= \left| \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^s - 1) s_0 \|\nabla \phi_0\|_2^2 \delta\theta \right| \leq \\ &\leq C_5 \|s_0\| \|\nabla \phi_0\|_2^2 \|L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)\| \|\delta\theta\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_6 \varepsilon \|\delta\theta\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

El tercer término de la expansión (7.16) puede ser tratado de manera similar al tercer término de la ecuación (4.15) y obtener una expresión similar a (4.23), considerando el hecho que  $\delta\theta$  es continua sobre  $\partial\mathcal{B}_\varepsilon$ , i.e.

$$\begin{aligned}
 (7.20) \quad N_\varepsilon(\delta\phi, \delta\theta) &= (1 - \gamma^s) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \nabla\phi_0 \cdot \nabla(\delta\phi\delta\theta) - \int_{\Omega} \delta\phi s_\varepsilon \nabla\delta\phi \cdot \nabla\delta\theta \\
 &= (1 - \gamma^s) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta\theta s_0 \nabla\phi_0 \cdot \nabla\delta\phi + (1 - \gamma^s) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta\phi s_0 \nabla\phi_0 \cdot \nabla\delta\theta - \\
 &\quad - (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta\phi s_0 \nabla\delta\phi \cdot \nabla\delta\theta - \int_{\Omega} \delta\phi s_0 \nabla\delta\phi \cdot \nabla\delta\theta.
 \end{aligned}$$

El término  $N_\varepsilon(\delta\phi, \delta\theta)$  puede ser acotado de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 (7.21) \quad |N_\varepsilon(\delta\phi, \delta\theta)| &\leq C_7 \left[ \|\nabla\phi_0\|_{L^\infty(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\delta\theta\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla\delta\phi\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \right. \\
 &\quad \left. \|\nabla\phi_0\|_{L^\infty(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\delta\phi\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla\delta\theta\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \|\delta\phi\|_{L^\infty(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\delta\phi\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla\delta\theta\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \right. \\
 &\quad \left. + \|\delta\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\delta\phi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\delta\theta\|_{L^2(\Omega)} \right] \leq C_8 [1 + \|\delta\phi\|_{L^\infty(\Omega)}] \|\delta\phi\|_{H^1(\Omega)} \|\delta\theta\|_{H^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

En base a la coercividad de la forma bilineal  $b_\varepsilon(\delta\theta, \delta\theta)$  se tiene que

$$(7.22) \quad \|\delta\theta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq b_\varepsilon(\delta\theta, \delta\theta).$$

Finalmente, tomando las estimativas ecuaciones (7.7), (7.11), (7.17) a (7.19), (7.21) y (7.22) se obtiene

$$(7.23) \quad \|\delta\theta\|_{H^1(\Omega)} \leq C_9 [1 + \varepsilon] \varepsilon = O(\varepsilon).$$

■

**Lema 7.4.** *Sea  $\mathbf{u}_\varepsilon$  y  $\mathbf{u}_0$  soluciones de los problemas perturbados (2.19c) y no perturbados (2.16c), respectivamente, luego la siguiente cotas es válida*

$$(7.24) \quad \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon).$$

**Prueba.** Restando (2.16c) de (2.19c), luego evaluando en  $\boldsymbol{\eta}_\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}$ , y finalmente adicionando y sustrayendo  $c_{1\varepsilon}(\mathbf{u}_0, \delta\mathbf{u})$  y  $c_{2\varepsilon}(\theta_0, \delta\mathbf{u})$  se obtiene

$$(7.25) \quad c_{1\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon, \delta\mathbf{u}) - c_{2\varepsilon}(\theta_\varepsilon, \delta\mathbf{u}) - [c_{10}(\mathbf{u}_0, \delta\mathbf{u}) - c_{20}(\theta_0, \delta\mathbf{u})] \pm c_{1\varepsilon}(\mathbf{u}_0, \delta\mathbf{u}) \pm c_{2\varepsilon}(\theta_0, \delta\mathbf{u}) = 0.$$

Ya que  $\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0$ , se puede despejar  $c_{1\varepsilon}(\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$  obteniéndose

$$\begin{aligned}
 (7.26) \quad c_{1\varepsilon}(\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) &= (c_{10} - c_{1\varepsilon})(\mathbf{u}_0, \delta\mathbf{u}) + c_{20}(\delta\theta, \delta\mathbf{u}) \\
 &\quad + (c_{2\varepsilon} - c_{20})(\delta\theta, \delta\mathbf{u}) + (c_{20} - c_{2\varepsilon})(\theta_0, \delta\mathbf{u}).
 \end{aligned}$$

Cada término de la ecuación anterior puede ser acotado de la siguiente manera

$$(7.27) \quad \begin{aligned} |(c_{10} - c_{1\varepsilon})(\mathbf{u}_0, \delta \mathbf{u})| &= \left| (1 - \gamma^{\mathbb{C}}) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0) : \nabla^s \delta \mathbf{u} \right| \\ &\leq C_1 \|\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0)\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla^s \delta \mathbf{u}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_2 \varepsilon \|\delta \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 \varepsilon \|\delta \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$(7.28) \quad \begin{aligned} |c_{20}(\delta \theta, \delta \mathbf{u})| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{B}_0(\delta \theta) : \nabla^s \delta \mathbf{u} \right| \leq C_4 \|\delta \theta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla^s \delta \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq C_5 \|\delta \theta\|_{H^1(\Omega)} \|\delta \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$(7.29) \quad \begin{aligned} |(c_{2\varepsilon} - c_{20})(\delta \theta, \delta \mathbf{u})| &= \left| (\gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}} - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \alpha_0 \mathbb{C}_0 \mathbf{I} \delta \theta : \nabla^s \delta \mathbf{u} \right| \\ &\leq C_6 \|\delta \theta\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla^s \delta \mathbf{u}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_7 \|\delta \theta\|_{H^1(\Omega)} \|\delta \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$(7.30) \quad \begin{aligned} |(c_{20} - c_{2\varepsilon})(\theta_0, \delta \mathbf{u})| &= \left| (1 - \gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}}) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \alpha_0 \mathbb{C}_0 \mathbf{I} \theta_0 : \nabla^s \delta \mathbf{u} \right| \\ &\leq C_8 \|\theta_0\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla^s \delta \mathbf{u}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_9 \varepsilon \|\delta \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde el teorema del valor medio del cálculo integral se ha empleado.

Debido a la coercividad de la forma bilinear  $c_{1\varepsilon}(\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u})$  y a las estimativas dadas por las ecuaciones (7.27) a (7.30), se tiene que

$$(7.31) \quad \|\delta \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c_{1\varepsilon}(\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \leq C_{10} [\varepsilon + \|\delta \theta\|_{H^1(\Omega)} + \|\delta \theta\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon] \|\delta \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta la estimativa (7.23) en la expresión anterior

$$(7.32) \quad \|\delta \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{11} \varepsilon$$

■

**Lema 7.5.** *Sea  $\tilde{\phi}$  solución del problema de valores en el contorno (5.8) o equivalentemente solución del siguiente problema variacional*

*Encuentre  $\tilde{\phi} \in \tilde{\mathcal{U}}_\phi^\varepsilon$  tal que*

$$(7.33) \quad - \int_{\Omega} \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}) \cdot \nabla \eta_\phi = - \int_{\Gamma_j} h_\phi \eta_\phi + \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} p_\phi \eta_\phi \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi^\varepsilon,$$

*donde el conjunto  $\tilde{\mathcal{U}}_\phi^\varepsilon$  y el espacio  $\mathcal{V}_\phi^\varepsilon$  se definen de la siguiente manera*

$$(7.34) \quad \tilde{\mathcal{U}}_\phi^\varepsilon = \{ \eta \in H^1(\Omega) : \llbracket \eta \rrbracket = 0 \text{ on } \partial \mathcal{B}_\varepsilon, \quad \eta = g_\phi \text{ on } \Gamma_\phi \},$$

$$(7.35) \quad \mathcal{V}_\phi^\varepsilon = \{ \eta \in H^1(\Omega) : \llbracket \eta \rrbracket = 0 \text{ on } \partial \mathcal{B}_\varepsilon, \quad \eta = 0 \text{ on } \Gamma_\phi \}.$$

*Luego, la siguiente estimativa es válida*

$$(7.36) \quad \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon).$$

**Prueba.** Tomando  $\eta_\phi = \tilde{\phi} - \tilde{g}_\phi$  en (7.33), donde  $\tilde{g}_\phi$  es el *lifting* de la condición de borde de Dirichlet  $g_\phi$  en  $\Gamma_\phi$ , se tiene que

$$(7.37) \quad - \int_{\Omega} \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}) \cdot \nabla \tilde{\phi} = - \int_{\Gamma_\phi} g_\phi \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}) \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{\Gamma_j} h_\phi \tilde{\phi} + \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} p_\phi \tilde{\phi}.$$

Debido a las condiciones de borde impuestas (5.8), i.e.  $\tilde{\phi} = g_\phi = -w_\phi^\varepsilon$  en  $\Gamma_\phi$ , el primer término del lado derecho de la ecuación anterior puede reescribirse de la siguiente forma

$$(7.38) \quad - \int_{\Gamma_\phi} g_\phi \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{\Gamma_\phi} w_\phi^\varepsilon \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \int_{\Gamma_\phi} \tilde{\phi} \mathbf{j}_\varepsilon(w_\phi^\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

Luego, tomando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (7.37)

$$(7.39) \quad \begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}) \cdot \nabla \tilde{\phi} \right| &\leq \left| \int_{\Gamma_\phi} \tilde{\phi} \mathbf{j}_\varepsilon(w_\phi^\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right| + \left| \int_{\Gamma_j} \mathbf{j}_\varepsilon(w_\phi^\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{n}} \tilde{\phi} \right| + \left| \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^s - 1) \varepsilon \nabla \mathbf{j}_0(\phi_0)(\tilde{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tilde{\phi} \right| \\ &\leq C_1 \|\tilde{\phi}\|_{L^2(\Gamma_\phi)} \|\mathbf{j}_\varepsilon(w_\phi^\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{n}}\|_{L^2(\Gamma_\phi)} + C_2 \|\mathbf{j}_\varepsilon(w_\phi^\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{n}}\|_{L^2(\Gamma_j)} \|\tilde{\phi}\|_{L^2(\Gamma_j)} + \\ &\quad C_3 \varepsilon \|\nabla \mathbf{j}_0(\phi_0)(\tilde{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\|_{L^2(\partial \mathcal{B}_\varepsilon)} \|\tilde{\phi}\|_{L^2(\partial \mathcal{B}_\varepsilon)} \\ &\leq C_4 \varepsilon^2 \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)} + C_5 \varepsilon^2 \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)} + C_6 \varepsilon^{3/2} \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\mathcal{B}_\varepsilon)} \\ &\leq C_7 (\varepsilon^2 + \varepsilon^{3/2}) \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el teorema del valor medio del cálculo integral sobre la frontera  $\partial \mathcal{B}_\varepsilon$ , la desigualdad de la traza, y la solución explícita (5.7). Debido a la coercividad de la forma bilineal en (7.33), véase [21], se tiene que

$$(7.40) \quad C_8 \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq - \int_{\Omega} \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}) \cdot \nabla \tilde{\phi},$$

y por lo tanto se arriba a

$$(7.41) \quad \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_9 (\varepsilon^2 + \varepsilon^{3/2}),$$

lo que conduce a la estimativa deseada cuando. ■

**Lema 7.6.** *Sea  $\tilde{\theta}$  la solución al problema de valores en la frontera (5.12) o equivalentemente, solución al siguiente problema varaicional:*

*Encuentre  $\tilde{\theta} \in \tilde{\mathcal{U}}_\theta^\varepsilon$  tal que*

$$(7.42) \quad - \int_{\Omega} \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}) \cdot \nabla \eta_\theta = \int_{\Omega} f_\theta \eta_\theta - \int_{\Gamma_q} h_\theta \eta_\theta + \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} p_\theta \eta_\theta \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta^\varepsilon,$$

*donde el conjunto  $\tilde{\mathcal{U}}_\theta^\varepsilon$  y el espacio  $\mathcal{V}_\theta^\varepsilon$  son definidos de la siguiente manera*

$$(7.43) \quad \tilde{\mathcal{U}}_\theta^\varepsilon = \{ \eta \in H^1(\Omega) : \llbracket \eta \rrbracket = 0 \text{ on } \partial \mathcal{B}_\varepsilon, \quad \eta = g_\theta \text{ on } \Gamma_\theta \},$$

$$(7.44) \quad \mathcal{V}_\theta^\varepsilon = \{ \eta \in H^1(\Omega) : [\eta] = 0 \text{ on } \partial\mathcal{B}_\varepsilon, \quad \eta = 0 \text{ on } \Gamma_\theta \}.$$

Luego, la siguiente estimativa es válida

$$(7.45) \quad \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon).$$

**Prueba.** Evaluando (7.42) en  $\eta_\theta = \tilde{\theta} - \tilde{g}_\theta$ , con  $\tilde{g}_\theta$  siendo el *lifting* de Dirichlet  $g_\theta$  sobre  $\Gamma_\theta$ , se obtiene

$$(7.46) \quad - \int_\Omega \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}) \cdot \nabla \tilde{\theta} = - \int_{\Gamma_\theta} g_\theta \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \int_\Omega f_\theta \tilde{\theta} - \int_{\Gamma_\mathbf{q}} h_\theta \tilde{\theta} + \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} p_\theta \tilde{\theta}.$$

El último término de la ecuación anterior puede ser reescrito de la siguiente forma

$$(7.47) \quad \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} p_\theta \tilde{\theta} = -(1 - \gamma^k) \left[ \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{q}_0(\theta_0)) \tilde{\theta} + \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} [\mathbf{q}_0(\theta_0) - \mathbf{q}_0(\theta_0)(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla \tilde{\theta} \right].$$

Luego, considerando la expansión de Taylor  $\mathbf{q}_0(\theta_0) = \mathbf{q}_0(\theta_0)(\hat{\mathbf{x}}) + \nabla \mathbf{q}_0(\theta_0)(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$ , para algún  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_\varepsilon$ , se obtiene

$$(7.48) \quad \begin{aligned} - \int_\Omega \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}) \cdot \nabla \tilde{\theta} &= - \int_{\Gamma_\theta} g_\theta \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}) \cdot \hat{\mathbf{n}} + (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} Q_0(\phi_0) \tilde{\theta} + \int_\Omega (m_1 + m_2) \tilde{\theta} \\ &\quad - \int_{\Gamma_\mathbf{q}} h_\theta \tilde{\theta} + (\gamma^k - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \nabla \mathbf{q}_0(\theta_0)(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

- El primer término del lado derecho puede acotarse utilizando la solución explícita (5.11), la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de traza

$$(7.49) \quad \left| - \int_{\Gamma_\theta} g_\theta \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \right| \leq \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\Gamma_\theta)} \|\mathbf{q}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon)\|_{L^2(\Gamma_\theta)} \leq C_1 \varepsilon^2 \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)},$$

donde se han utilizado las condiciones de borde sobre  $\Gamma_\theta$  para cambiar los argumentos de las normas.

- Para el segundo término en (7.48), empleando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el resultado del Lema 1.1 en [38] se obtiene

$$(7.50) \quad \left| (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} Q_0(\phi_0) \tilde{\theta} \right| \leq C_2 \|Q_0(\phi_0)\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_3 \varepsilon^{1+\delta} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)},$$

con  $\delta \in (0, 1)$ .

- Siguiendo el mismo tratamiento que para el primer término, el cuarto está acotado de la siguiente manera

$$(7.51) \quad \left| - \int_{\Gamma_\mathbf{q}} h_\theta \tilde{\theta} \right| \leq C_4 \|\nabla w_\theta^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\mathbf{q})} \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\Gamma_\mathbf{q})} \leq C_5 \varepsilon^2 \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)}.$$

- Para el quinto término, se tiene

$$(7.52) \quad \left| (\gamma^k - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \nabla \mathbf{q}_0(\theta_0)(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \tilde{\theta} \right| \leq C_6 \|\nabla \mathbf{q}_0(\theta_0)(\tilde{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \\ \leq C_7 \lambda_{\mathbf{q}} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_8 \varepsilon^2 \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)},$$

donde se ha empleado la desigualdad de Cauchy-Schwarz y  $\lambda_{\mathbf{q}}$  es el radio espectral del tensor de segundo orden  $\nabla \mathbf{q}_0(\theta_0)(\tilde{\mathbf{x}})^T \nabla \mathbf{q}_0(\theta_0)(\tilde{\mathbf{x}})$ .

- La estimación del tercer término de (7.48) es bastante más complicada. En primer lugar, empezamos con

$$(7.53) \quad \left| \int_{\Omega} m_1 \tilde{\theta} \right| \leq \left| \int_{\Omega} 2s_\varepsilon \tilde{\theta} \nabla \phi_0 \cdot \nabla w_\phi^\varepsilon \right| + \left| \int_{\Omega} 2s_\varepsilon \tilde{\theta} \nabla \phi_0 \cdot \nabla \tilde{\phi} \right|.$$

El último término de la desigualdad anterior es fácilmente acotado aplicando la desigualdad de Hölder, aprovechando la regularidad de  $\phi_0$ , y usando la estimación para  $\tilde{\phi}$  de Lema 7.5, esto es

$$(7.54) \quad \left| \int_{\Omega} 2s_\varepsilon \tilde{\theta} \nabla \phi_0 \cdot \nabla \tilde{\phi} \right| \leq C_9 \|\nabla \phi_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \tilde{\phi}\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq C_{10} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{11} \varepsilon^{3/2} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Para el primer término de (7.53), primero se obtiene la siguiente forma equivalente

$$(7.55) \quad \int_{\Omega} 2s_\varepsilon \tilde{\theta} \nabla \phi_0 \cdot \nabla w_\phi^\varepsilon = \int_{\Omega} 2s_0 \tilde{\theta} \nabla \phi_0 \cdot \nabla w_\phi^\varepsilon + \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} 2(\gamma^s - 1) s_0 \tilde{\theta} \nabla \phi_0 \cdot \nabla w_\phi^\varepsilon,$$

y entonces, aplicando el teorema de la divergencia y las reglas de diferenciación para el segundo término de la ecuación anterior, se obtiene

$$(7.56) \quad \int_{\Omega} 2s_0 \tilde{\theta} \nabla \phi_0 \cdot \nabla w_\phi^\varepsilon = \int_{\Omega} 2 \operatorname{div} (s_0 \tilde{\theta} \nabla \phi_0 w_\phi^\varepsilon) - \int_{\Omega} 2 \operatorname{div} (s_0 \tilde{\theta} \nabla \phi_0) w_\phi^\varepsilon \\ = \int_{\partial\Omega} 2s_0 \tilde{\theta} w_\phi^\varepsilon \nabla \phi_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \int_{\Omega} 2 \operatorname{div} (s_0 \nabla \phi_0) \tilde{\theta} w_\phi^\varepsilon - \int_{\Omega} 2s_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \tilde{\theta} w_\phi^\varepsilon,$$

donde el segundo término se anula ya que  $\operatorname{div}(s_0 \nabla \phi_0) = 0$ .

En conclusión, el primer término en (7.53) está acotado como se muestra a continuación

$$(7.57) \quad \left| \int_{\Omega} 2s_\varepsilon \tilde{\theta} \nabla \phi_0 \cdot \nabla w_\phi^\varepsilon \right| \leq \left| \int_{\partial\Omega} 2s_0 \tilde{\theta} w_\phi^\varepsilon \nabla \phi_0 \cdot \hat{\mathbf{n}} \right| + \left| \int_{\Omega} 2s_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \tilde{\theta} w_\phi^\varepsilon \right| \\ + \left| \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} 2(\gamma^s - 1) s_0 \tilde{\theta} \nabla \phi_0 \cdot \nabla w_\phi^\varepsilon \right| \leq C_{12} \varepsilon^2 \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ + C_{13} \|\nabla \phi_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \|w_\phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \\ + C_{14} \|\nabla \phi_0\|_{L^\infty(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla w_\phi^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \\ \leq \left[ C_{15} \varepsilon^2 + C_{16} \varepsilon^2 \sqrt{|\ln \varepsilon|} + C_{17} \varepsilon^{1+\delta} \right] \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)},$$

donde la desigualdad de Hölder, la estimativa en Lema 1.1 en [38] y (A.1), y la regularidad de  $\phi_0$  fueron aplicadas. Con la cota anterior y el resultado de (7.54) se obtiene

$$(7.58) \quad \left| \int_{\Omega} m_1 \tilde{\theta} \right| = o(\varepsilon).$$

Solo queda estimar  $\int_{\Omega} m_2 \tilde{\theta}$ . Comparando con la definición de la forma no lineal  $N_{\varepsilon}$  en (2.21), se puede observar que

$$(7.59) \quad \int_{\Omega} m_2 \tilde{\theta} = N_{\varepsilon}(\delta\phi, \tilde{\theta}).$$

Por lo tanto, se puede utilizar su forma equivalente en (4.23) y obtenerse

$$(7.60) \quad \int_{\Omega} m_2 \tilde{\theta} = (1 - \gamma^s) \left[ \int_{\mathcal{B}_{\varepsilon}} s_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \delta\phi \tilde{\theta} + \int_{\mathcal{B}_{\varepsilon}} s_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \tilde{\theta} \delta\phi \right] - \int_{\Omega} \delta\phi s_{\varepsilon} \nabla \delta\phi \cdot \nabla \tilde{\theta},$$

Esta expresión puede ser fácilmente acotada como

$$(7.61) \quad \begin{aligned} \left| \int_{\Omega} m_2 \tilde{\theta} \right| &\leq C_{18} \|\nabla \phi_0\|_{L^{\infty}(\mathcal{B}_{\varepsilon})} \left[ \|\nabla \delta\phi\|_{L^2(\mathcal{B}_{\varepsilon})} \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\mathcal{B}_{\varepsilon})} + \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\mathcal{B}_{\varepsilon})} \|\delta\phi\|_{L^2(\mathcal{B}_{\varepsilon})} \right] \\ &\quad + C_{19} \|\delta\phi\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\nabla \delta\phi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{20} \|\delta\phi\|_{H^1(\Omega)} \varepsilon^{\delta_1} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \varepsilon^{\delta_2} \|\delta\phi\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \varepsilon \left[ \|\nabla w_{\phi}^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \tilde{\phi}\|_{L^2(\Omega)} \right] \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_{21} \left[ \varepsilon^{1+\delta_1} + \varepsilon^{1+\delta_2} \right] \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} + \left[ \varepsilon^2 + \varepsilon^{2+\delta_3} \right] \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

con  $\delta_i \in (0, 1)$  y  $i = 1, \dots, 4$ . Aquí, la regularidad de  $\phi_0$ , la solución explícita (5.7), la estimativa del Lema 1.1 en [38], los resultados en (7.11) y Lema 7.5 han sido tomados en cuenta.

- Finalmente, considerando la coercividad de la forma bilineal (7.42)

$$(7.62) \quad C_{22} \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq - \int_{\Omega} \mathbf{q}_{\varepsilon}(\tilde{\theta}) \cdot \nabla \tilde{\theta},$$

y tomando en consideración ecuaciones (7.49), (7.52), (7.58) y (7.61) y tomando límite para cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se obtiene el resultado esperado

■

**Lema 7.7.** Sea  $\tilde{\mathbf{u}}$  solución del problema de valores en la frontera (5.23) o equivalentemente solución del siguiente problema variacional

Encuéntrese  $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{u}}^\varepsilon$

$$(7.63) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla^s \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} = - \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} + \int_{\Gamma_t} \mathbf{h}_{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} - \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{p}_{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}^\varepsilon,$$

donde el conjunto  $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{u}}^\varepsilon$  y el espacio  $\mathcal{V}_{\mathbf{u}}^\varepsilon$  son definidos como

$$(7.64) \quad \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{u}}^\varepsilon = \{ \boldsymbol{\eta} \in H^1(\Omega)^2 : \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket = \mathbf{0} \text{ on } \partial \mathcal{B}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{g}_{\mathbf{u}} \text{ on } \Gamma_{\mathbf{u}} \},$$

$$(7.65) \quad \mathcal{V}_{\mathbf{u}}^\varepsilon = \{ \boldsymbol{\eta} \in H^1(\Omega)^2 : \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket = \mathbf{0} \text{ on } \partial \mathcal{B}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_{\mathbf{u}} \}.$$

Luego la siguiente estimativa es válida

$$(7.66) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)^2} = o(\varepsilon).$$

**Prueba.** Evaluando (7.63) en  $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{u}}$ , con  $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{u}}$  siendo el *lifting* de Dirichlet de la condición de borde  $\mathbf{g}_{\mathbf{u}}$  en  $\Gamma_{\mathbf{u}}$ , se obtiene

$$(7.67) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} = - \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\Gamma_{\mathbf{u}}} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{u}} + \int_{\Gamma_t} \mathbf{h}_{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{p}_{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}.$$

El primer término de la ecuación anterior puede expandirse gracias al teorema de la divergencia generalizada de la siguiente manera

$$(7.68) \quad \begin{aligned} - \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta})) \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\Omega} \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon)(\mathbf{u}_0) - (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_\varepsilon)(\theta_0)) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta}) \tilde{\mathbf{u}}) + \int_{\Omega} \mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta}) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} \\ &+ \int_{\Omega} \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon)(\mathbf{u}_0) - (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_\varepsilon)(\theta_0)) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ &= - \int_{\Gamma_{\mathbf{u}}} \mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \int_{\Gamma_t} \mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} \llbracket \mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta}) \rrbracket \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta}) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon)(\mathbf{u}_0) - (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_\varepsilon)(\theta_0)) \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

donde la identidad

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon)(\mathbf{u}_0) - (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_\varepsilon)(\theta_0)) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon)(\mathbf{u}_0) - (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_\varepsilon)(\theta_0)) \cdot \tilde{\mathbf{u}},$$

ha sido utilizada, la cual puede ser obtenida por medio de sucesivas aplicaciones del teorema de la divergencia generalizado.

Mediante la aplicación del teorema de la divergencia sobre la bola  $\mathcal{B}_\varepsilon$ , podemos obtener una forma equivalente del último término en el lado derecho de la ecuación (7.67), como sigue

$$\begin{aligned}
(7.69) \quad \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{p}_\mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{S}_\mathbf{u} \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} [\mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta})] \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\
&= \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{S}_\mathbf{u} \tilde{\mathbf{u}}) + \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} [\mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta})] \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\
&= \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \operatorname{div}(\mathbf{S}_\mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{S}_\mathbf{u} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} [\mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta})] \cdot \tilde{\mathbf{u}}.
\end{aligned}$$

Además,  $\operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon)(\mathbf{u}_0(\hat{\mathbf{x}})) - (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_\varepsilon)(\theta_0(\hat{\mathbf{x}}))) = \mathbf{0}$ , ya que la derivada de un tensor constante es cero, y por ende

$$\begin{aligned}
(7.70) \quad \operatorname{div}[(\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon)(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0(\hat{\mathbf{x}})) - (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_\varepsilon)(\theta_0 - \theta_0(\hat{\mathbf{x}}))] &= \\
&= \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon)(\mathbf{u}_0) - (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_\varepsilon)(\theta_0)).
\end{aligned}$$

Introduciendo este resultado en (7.69) se obtiene

$$\begin{aligned}
(7.71) \quad \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{p}_\mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon)(\mathbf{u}_0) - (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_\varepsilon)(\theta_0)) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\
&+ \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{S}_\mathbf{u} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} [\mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta})] \cdot \tilde{\mathbf{u}}.
\end{aligned}$$

Reemplazando (7.68) y (7.71) en (7.67), y luego tomando valor absoluto obtenemos

$$\begin{aligned}
(7.72) \quad \left| \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} \right| &\leq \left| \int_{\Gamma_\mathbf{u}} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{g}_\mathbf{u} \right| + \left| \int_{\Gamma_\mathbf{u}} \mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right| \\
&+ \left| \int_{\Gamma_\mathbf{t}} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\mathbf{w}_\mathbf{u}^\varepsilon) \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right| + \left| \int_{\Omega} \mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta}) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} \right| + \left| \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{S}_\mathbf{u} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} \right|.
\end{aligned}$$

- Teniendo en cuenta las condiciones de borde en (5.23), i.e.  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{g}_\mathbf{u} = -\mathbf{w}_\mathbf{u}^\varepsilon$  en  $\Gamma_\mathbf{u}$ , se pueden cambiar los argumentos en las siguientes ecuaciones y obtener

$$(7.73) \quad \left| \int_{\Gamma_\mathbf{u}} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{g}_\mathbf{u} \right| = \left| \int_{\Gamma_\mathbf{u}} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(-\mathbf{w}_\mathbf{u}^\varepsilon) \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right| \leq C_1 \varepsilon^2 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Gamma_\mathbf{u})}^2 \leq C_2 \varepsilon^2 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

donde la solución explícita en las ecuaciones (5.15) a (5.17) y la desigualdad de la traza han sido utilizadas.

- Utilizando la solución explícita (5.11) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned}
(7.74) \quad \left| - \int_{\Gamma_\mathbf{u}} \mathbf{B}_\varepsilon(w_\theta^\varepsilon + \tilde{\theta}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right| &\leq C_3 \left[ \|w_\theta^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\mathbf{u})} + \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\Gamma_\mathbf{u})} \right] \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq C_4 \left[ \varepsilon^2 + \|\tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \right] \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq C_5 \left[ \varepsilon^2 + \varepsilon^{1+\delta} \right] \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

donde la desigualdad de la traza y la estimativa  $\|\tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{1+\delta}$  han sido empleadas, véase Lema 7.6.

- De manera similar, usando las ecuaciones (5.15) a (5.17) y la desigualdad de la traza se obtiene

$$(7.75) \quad \left| - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\mathbf{w}_{\tilde{\mathbf{u}}}^\varepsilon) \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right| \leq C_6 \varepsilon^2 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Gamma_t)}^2 \leq C_7 \varepsilon^2 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

- Utilizando el mismo procedimiento para estimar el segundo término de (7.72) obtenemos

$$(7.76) \quad \left| \int_{\Omega} \mathbf{B}_\varepsilon(w_{\tilde{\theta}}^\varepsilon + \tilde{\theta}) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} \right| \leq C_8 \left[ \varepsilon^2 \sqrt{\ln |\varepsilon|} + \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \right] \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ \leq C_9 \left[ \varepsilon^2 \sqrt{\ln |\varepsilon|} + \varepsilon^{1+\delta} \right] \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

- Tomando la siguiente expansión de Taylor

$$\mathbf{S}_{\mathbf{u}} = -[(1 - \gamma^{\mathbb{C}}) \nabla \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0)(\tilde{\mathbf{x}}_1) - (1 - \gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}}) \nabla \mathbf{B}_0(\theta_0)(\tilde{\mathbf{x}}_2)](\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}),$$

para algún  $\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2 \in \mathcal{B}_\varepsilon$ , obtenemos

$$(7.77) \quad \left| \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{S}_{\mathbf{u}} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} \right| \leq C_{10} \max[\lambda^\sigma, \lambda^{\mathbf{B}}] \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ \leq C_{11} \varepsilon^2 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

donde  $\lambda^\sigma$  y  $\lambda^{\mathbf{B}}$  son los radios espectrales de los tensores de tercer orden  $(\nabla \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0)(\tilde{\mathbf{x}}_1))^T \nabla \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0)(\tilde{\mathbf{x}}_1)$  y  $(\nabla \mathbf{B}_0(\theta_0)(\tilde{\mathbf{x}}_2))^T \nabla \mathbf{B}_0(\theta_0)(\tilde{\mathbf{x}}_2)$  respectivamente.

- Finalmente, por la coercividad de la forma bilineal (7.63), (véase [21])

$$(7.78) \quad C_{12} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}},$$

arribamos al resultado esperado. ■

**Lema 7.8.** *Sea  $\tilde{\mathbf{u}}^a$  solución del problema de valores en la frontera (5.26) o equivalentemente del siguiente problema variacional:*

*Encuentre  $\tilde{\mathbf{u}}^a \in \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon$ :*

$$(7.79) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^a) : \nabla^s \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} = - \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{u}^a} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} + \int_{\Gamma_t} \mathbf{h}_{\mathbf{u}^a} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} - \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{p}_{\mathbf{u}^a} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}, \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}^\varepsilon,$$

donde el espacio  $\mathcal{V}_{\mathbf{u}}^\varepsilon$  se define en (7.65), y el conjunto  $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon$  es

$$(7.80) \quad \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon = \{ \boldsymbol{\eta} \in H^1(\Omega)^2 : \llbracket \boldsymbol{\eta} \rrbracket = \mathbf{0} \text{ on } \partial\mathcal{B}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\eta} = g_{\mathbf{u}^a} \text{ on } \Gamma_{\mathbf{u}} \}.$$

Luego, la siguiente estimativa es válida

$$(7.81) \quad \|\tilde{\mathbf{u}}^a\|_{H^1(\Omega)^2} = o(\varepsilon).$$

**Prueba.** En primera medida, y por simplicidad, se asumirá que el operador  $\delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0)$  es simétrico. Luego, evaluando (7.79) en  $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^a - g_{\mathbf{u}^a}$  arribamos a

$$(7.82) \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^a) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}^a = - \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{u}^a} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a + \int_{\Gamma_t} \mathbf{h}_{\mathbf{u}^a} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a - \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{p}_{\mathbf{u}^a} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a + \int_{\Gamma_{\mathbf{u}}} \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^a) \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a.$$

Empleando el teorema de la divergencia generalizada, el tercer término de la ecuación anterior puede reescribirse de la siguiente manera

$$(7.83) \quad \begin{aligned} - \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{p}_{\mathbf{u}^a} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a &= \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} \llbracket \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \left( (\gamma^{\mathbb{C}} - 1)(\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a) - \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a)(\hat{\mathbf{x}})) + \delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0) - \delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0)(\hat{\mathbf{x}}) \right) \rrbracket \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a \\ &= \int_{\partial\Omega} \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \left( (\gamma^{\mathbb{C}} - 1)(\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a) - \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a)(\hat{\mathbf{x}})) + \delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0) - \delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0)(\hat{\mathbf{x}}) \right) \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a \\ &\quad - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left( \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \left( (\gamma^{\mathbb{C}} - 1)(\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a) - \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a)(\hat{\mathbf{x}})) + \delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0) - \delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0)(\hat{\mathbf{x}}) \right) \right) \tilde{\mathbf{u}}^a \\ &\quad - \int_{\Omega} \left( (\gamma^{\mathbb{C}} - 1)(\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a) - \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a)(\hat{\mathbf{x}})) + \delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0) - \delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0)(\hat{\mathbf{x}}) \right) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}^a. \end{aligned}$$

Ya que  $\bar{\mathcal{B}}_\varepsilon \subset \Omega$ , luego  $\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} = 0$  en  $\partial\Omega$ . Además,  $\operatorname{div}([\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon - \boldsymbol{\sigma}_0](\mathbf{u}_0^a)(\hat{\mathbf{x}})) = \mathbf{0}$  y  $\operatorname{div}(\delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0)(\hat{\mathbf{x}})) = \mathbf{0}$ , ya que  $\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a)(\hat{\mathbf{x}})$  y  $\delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0)(\hat{\mathbf{x}})$  son tensores constantes.

Teniendo en cuenta estos hechos, y considerando que  $[\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon - \boldsymbol{\sigma}_0](\mathbf{u}_0^a) = (\gamma^{\mathbb{C}} - 1)\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a)$ , luego, la suma del primer y el tercer término de (7.82) es

$$(7.84) \quad \begin{aligned} - \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{u}^a} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a - \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{p}_{\mathbf{u}^a} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a &= - \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^{\mathbb{C}} - 1)(\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a) - \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a)(\hat{\mathbf{x}})) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}^a \\ &\quad - \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \left( \delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0) - \delta\tilde{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0)(\hat{\mathbf{x}}) \right) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}^a - \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta\bar{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0) \cdot \tilde{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

- Empleando el teorema de Taylor-Lagrange, la ecuación anterior puede acotarse de la siguiente manera

$$(7.85) \quad \begin{aligned} \left| - \int_{\Omega} \mathbf{f}_{\mathbf{u}^a} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a - \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} \mathbf{p}_{\mathbf{u}^a} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a \right| &\leq C_1 \max[\lambda^\sigma, \lambda_{\mathbf{u}}^J] \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)^2} \|\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)^2} \\ &\quad + \|\delta\bar{\mathcal{J}}^{\mathbf{u}}(p_0)\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)^2} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)^2} \leq C_2[\varepsilon^2 + \varepsilon^{1+\delta}] \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)^2}, \end{aligned}$$

donde  $\lambda^\sigma$  y  $\lambda_{\mathbf{u}}^J$  son los radios espectrales de los tensores  $(\nabla \sigma_0(\mathbf{u}_0)(\tilde{\mathbf{x}}_1))^T \nabla \sigma_0(\mathbf{u}_0)(\tilde{\mathbf{x}}_1)$  y  $(\nabla \delta \tilde{J}^{\mathbf{u}}(p_0)(\tilde{\mathbf{x}}_2))^T \nabla \delta \tilde{J}^{\mathbf{u}}(p_0)(\tilde{\mathbf{x}}_2)$  respectivamente para algún  $\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2 \in \mathcal{B}_\varepsilon$ . Además, el Lema 1.1 [38], y la Suposición 3 han sido tenidos en cuenta para estimar los últimos dos términos de la ecuación (7.84).

- El segundo término de (7.82) puede ser acotado usando la desigualdad de la traza y la de Cauchy-Schwarz de la siguiente manera

$$(7.86) \quad \left| \int_{\Gamma_{\mathbf{t}}} \mathbf{h}_{\mathbf{u}^a} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^a \right| \leq \|\sigma(\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon)\|_{L^2(\Gamma_{\mathbf{t}})^2} \|\tilde{\mathbf{u}}^a\|_{L^2(\Gamma_{\mathbf{t}})^2} \leq C_3 \varepsilon^2 \|\tilde{\mathbf{u}}^a\|_{H^1(\Omega)^2},$$

donde la solución explícita  $\sigma(\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon)$  fuera de la bola  $\mathcal{B}_\varepsilon$  también ha sido empleada.

- Se pueden utilizar las condiciones de borde definidas en (5.26) para intercambiar los argumentos dentro del último término de (7.82), y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la de la traza se obtiene

$$(7.87) \quad \left| \int_{\Gamma_{\mathbf{u}}} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^a) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon \right| \leq \|\sigma(\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon)\|_{L^2(\Gamma_{\mathbf{u}})^2} \|\tilde{\mathbf{u}}^a\|_{L^2(\Gamma_{\mathbf{u}})^2} \leq C_4 \varepsilon^2 \|\tilde{\mathbf{u}}^a\|_{H^1(\Omega)^2},$$

donde la solución explícita del sistema (5.25) también ha sido utilizada.

- Debido a la coercividad en la forma bilineal (7.82) (vea [21]), tenemos que

$$(7.88) \quad C_5 \|\tilde{\mathbf{u}}^a\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq \left| \int_{\Omega} \sigma_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^a) : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}^a \right|,$$

y por lo tanto, abordamos al resultado esperado. ■

**Lema 7.9.** *Sea  $\tilde{\theta}^a$  la solución del problema de valor en la frontera (5.30) o equivalentemente solución al siguiente problema variacional:*

*Encuentre  $\tilde{\theta}^a \in \tilde{\mathcal{U}}_{\theta^a}^\varepsilon$  tal que*

$$(7.89) \quad - \int_{\Omega} \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}^a) \cdot \nabla \eta_\theta = \int_{\Omega} f_{\theta^a} \eta_\theta + \int_{\Gamma_{\mathbf{q}}} h_{\theta^a} \eta_\theta + \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} p_{\theta^a} \eta_\theta \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta^\varepsilon,$$

*donde el espacio  $\mathcal{V}_\theta^\varepsilon$  es definido en (7.44) y el conjunto  $\tilde{\mathcal{U}}_{\theta^a}^\varepsilon$  es*

$$(7.90) \quad \tilde{\mathcal{U}}_{\theta^a}^\varepsilon = \{ \eta \in H^1(\Omega) : \llbracket \eta \rrbracket = 0 \text{ on } \partial \mathcal{B}_\varepsilon, \quad \eta = g_{\theta^a} \text{ on } \Gamma_\theta \}.$$

*Luego, la siguiente estimativa es válida*

$$(7.91) \quad \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon).$$

**Prueba.** Luego de evaluar  $\eta_\theta$  en  $\tilde{\theta}^a - \tilde{g}_{\theta^a}$  en (7.89) se obtiene la siguiente ecuación

$$(7.92) \quad - \int_{\Omega} \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}^a) \cdot \nabla \tilde{\theta}^a = \int_{\Omega} f_{\theta^a} \tilde{\theta}^a + \int_{\Gamma_q} h_{\theta^a} \tilde{\theta}^a + \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} p_{\theta^a} \tilde{\theta}^a - \int_{\Gamma_\theta} \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}^a) \cdot \hat{\mathbf{n}} g_{\theta^a},$$

con  $\tilde{g}_{\theta^a}$  siendo el *lifting* sobre la condición de borde de Dirichlet  $g_{\theta^a}$  en  $\Gamma_\theta$ . Aplicando el teorema de la divergencia generalizada en el tercer término de la ecuación anterior obtenemos

$$(7.93) \quad \begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} p_{\theta^a} \tilde{\theta}^a &= \int_{\partial \Omega} \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \left( \delta \tilde{J}^\theta(p_0) - \delta \tilde{J}^\theta(p_0)(\hat{\mathbf{x}}) - [\gamma^k - 1][\mathbf{q}_0(\theta_0^a) - \mathbf{q}_0(\theta_0^a)(\hat{\mathbf{x}})] \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \tilde{\theta}^a \\ &+ \int_{\Omega} \operatorname{div} \left( \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \left( [\gamma^k - 1][\mathbf{q}_0(\theta_0^a) - \mathbf{q}_0(\theta_0^a)(\hat{\mathbf{x}})] - [\delta \tilde{J}^\theta(p_0) - \delta \tilde{J}^\theta(p_0)(\hat{\mathbf{x}})] \right) \right) \tilde{\theta}^a \\ &+ \int_{\Omega} \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \left( [\gamma^k - 1][\mathbf{q}_0(\theta_0^a) - \mathbf{q}_0(\theta_0^a)(\hat{\mathbf{x}})] - [\delta \tilde{J}^\theta(p_0) - \delta \tilde{J}^\theta(p_0)(\hat{\mathbf{x}})] \right) \cdot \nabla \tilde{\theta}^a. \end{aligned}$$

Sobre la frontera  $\partial \Omega$ , la función característica para la región perturbada es  $\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} = 0$ . Entonces, como  $\mathbf{q}_0(\theta_0^a)(\hat{\mathbf{x}})$  y  $\delta \tilde{J}^\theta(p_0)(\hat{\mathbf{x}})$  son vectores constantes, su divergencia será cero. Así, sumando la expresión anterior con el primer término de (7.92) obtenemos

$$(7.94) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} f_{\theta^a} \tilde{\theta}^a + \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} p_{\theta^a} \tilde{\theta}^a &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_0 : \nabla^s (\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon + \tilde{\mathbf{u}}^a) \tilde{\theta}^a + \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}} - 1) \mathbf{B}_0 : \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon^a \tilde{\theta}^a \\ &+ \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \tilde{J}^\theta(p_0) \tilde{\theta}^a + \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \left( [\gamma^k - 1][\mathbf{q}_0(\theta_0^a) - \mathbf{q}_0(\theta_0^a)(\hat{\mathbf{x}})] - [\delta \tilde{J}^\theta(p_0) - \delta \tilde{J}^\theta(p_0)(\hat{\mathbf{x}})] \right) \cdot \nabla \tilde{\theta}^a. \end{aligned}$$

- El primer término de la expresión anterior puede acotarse de la siguiente manera

$$(7.95) \quad \begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathbf{B}_0 : \nabla^s (\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon + \tilde{\mathbf{u}}^a) \tilde{\theta}^a \right| &= \left| 2\alpha_0(\mu_0 + \lambda_0) \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon + \tilde{\mathbf{u}}^a) \tilde{\theta}^a \right| \\ &= \left| 2\alpha_0(\mu_0 + \lambda_0) \left[ \int_{\partial \Omega} (\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon + \tilde{\mathbf{u}}^a) \cdot \hat{\mathbf{n}} \tilde{\theta}^a - \int_{\Omega} (\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon + \tilde{\mathbf{u}}^a) \cdot \nabla \tilde{\theta}^a \right] \right| \\ &\leq C_1 \left( \|\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon + \tilde{\mathbf{u}}^a\|_{L^2(\partial \Omega)} \|\tilde{\theta}^a\|_{L^2(\partial \Omega)} + \|\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon + \tilde{\mathbf{u}}^a\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \tilde{\theta}^a\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C_2 \left( \|\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon\|_{L^2(\partial \Omega)} + \|\tilde{\mathbf{u}}^a\|_{L^2(\partial \Omega)} + \|\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{\mathbf{u}}^a\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_3 \left( \varepsilon^2 + \varepsilon^{1+\delta} + \varepsilon^2 \sqrt{|\ln \varepsilon|} + \varepsilon^{1+\delta} \right) \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde se han empleado la desigualdad del triángulo, la traza y de Cauchy-Schwarz, además de la estimación (7.81) (ver Lema 7.8), y la solución  $\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon$  (ver ecuaciones (5.15) a (5.17)). Mediante los mismos conceptos, podemos estimar el segundo término de (7.94) de la siguiente manera

$$(7.96) \quad \begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}} - 1) \mathbf{B}_0 : \nabla^s \mathbf{u}_\varepsilon^a \tilde{\theta}^a \right| &= \left| \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}} - 1) \alpha_0 \mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_\varepsilon^a) \tilde{\theta}^a \right| \leq \\ &\leq \left( \|\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{u}_0^a)\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \|\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{w}_{\mathbf{u}^a}^\varepsilon)\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \|\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \right) \|\tilde{\theta}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \\ &\leq C_4 (\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon^{1+\delta'}) \varepsilon^\delta \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Siguiendo la Suposición 3 y utilizando el Lema 1.1 [38], tenemos

$$(7.97) \quad \left| \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \bar{J}^\theta(p_0) \tilde{\theta}^a \right| \leq \|\delta \bar{J}^\theta(p_0)\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\tilde{\theta}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_5 \varepsilon^{1+\delta} \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)}.$$

El término final de (7.94) tiene la siguiente estimativa

$$(7.98) \quad \begin{aligned} & \left| \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} ([\gamma^k - 1] [\mathbf{q}_0(\theta_0^a) - \mathbf{q}_0(\theta_0^a)(\hat{\mathbf{x}})] - [\delta \bar{J}^\theta(p_0) - \delta \tilde{J}^\theta(p_0)(\hat{\mathbf{x}})]) \cdot \nabla \tilde{\theta}^a \right| \leq \\ & \leq C_6 \max[\lambda^{\mathbf{q}}, \lambda_\theta^J] \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_7 \varepsilon^2 \|\tilde{\theta}\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde  $\lambda^{\mathbf{q}}$  y  $\lambda_\theta^J$  son el radio espectral de los tensores  $(\nabla \mathbf{q}_0(\theta_0^a)(\tilde{\mathbf{x}}_1))^T \nabla \mathbf{q}_0(\theta_0^a)(\tilde{\mathbf{x}}_1)$ , y  $(\nabla \delta \tilde{J}^\theta(p_0)(\tilde{\mathbf{x}}_2))^T \nabla \delta \tilde{J}^\theta(p_0)(\tilde{\mathbf{x}}_2)$  respectivamente, con  $\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2 \in \mathcal{B}_\varepsilon$ .

Por ende, tenemos la estimativa para

$$(7.99) \quad \left| \int_{\Omega} f_{\theta^a} \tilde{\theta}^a + \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} p_{\theta^a} \tilde{\theta}^a \right| = o(\varepsilon).$$

- El segundo término de (7.92) puede ser acotado empleando la desigualdad de la traza y la solución explícita de  $w_{\theta^a}^\varepsilon$  en la ecuación (5.29), i.e.

$$(7.100) \quad \left| \int_{\Gamma_{\mathbf{q}}} h_{\theta^a} \tilde{\theta}^a \right| \leq \left| \int_{\Gamma_{\mathbf{q}}} \mathbf{q}_\varepsilon(w_{\theta^a}^\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{n}} \tilde{\theta}^a \right| \leq C_8 \varepsilon^2 \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)}.$$

- El último término de (7.92) puede estimarse utilizando las mismas herramientas que en la desigualdad anterior y, además, las condiciones de contorno en (5.30), con el fin de intercambiar los argumentos de las normas de la siguiente manera

$$(7.101) \quad \left| - \int_{\Gamma_\theta} \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}^a) \cdot g_{\theta^a} \right| \leq \|\mathbf{q}_\varepsilon(w_{\theta^a}^\varepsilon)\|_{L^2(\Gamma_\theta)} \|\tilde{\theta}^a\|_{L^2(\Gamma_\theta)} \leq C_9 \varepsilon^2 \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)}.$$

- Por último, a partir de la coercividad de la función bilineal en (7.92), tenemos

$$(7.102) \quad C_{10} \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left| - \int_{\Omega} \mathbf{q}_\varepsilon(\tilde{\theta}^a) \cdot \nabla \tilde{\theta}^a \right|.$$

Combinando las estimaciones anteriores, llegamos al resultado esperado tomando el límite de  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

■

**Lema 7.10.** Sea  $\tilde{\phi}^a$  la solución del problema de valores en la frontera (5.34) o equivalentemente solución del siguiente problema variacional:

Encuentre  $\tilde{\phi}^a \in \tilde{\mathcal{U}}_{\phi^a}^\varepsilon$  tal que:

$$(7.103) \quad - \int_{\Omega} \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}^a) \cdot \nabla \eta_\phi = \int_{\Omega} f_{\phi^a} \eta_\phi + \int_{\Gamma_j} h_{\phi^a} \eta_\phi + \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} p_{\phi^a} \eta_\phi \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi^\varepsilon,$$

donde el espacio  $\mathcal{V}_\phi^\varepsilon$  es definido en (3.21) y el conjunto  $\tilde{\mathcal{U}}_{\phi^a}^\varepsilon$  es

$$(7.104) \quad \tilde{\mathcal{U}}_{\phi^a}^\varepsilon = \{ \eta \in H^1(\Omega) : \llbracket \eta \rrbracket = 0 \text{ on } \partial \mathcal{B}_\varepsilon, \quad \eta = g_{\phi^a} \text{ on } \Gamma_\phi \}.$$

Luego, la siguiente estimativa es válida

$$(7.105) \quad \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon).$$

**Prueba.** Luego de evaluar  $\eta_\phi$  en  $\tilde{\phi}^a - \tilde{g}_{\phi^a}$  en la ecuación (7.103) se obtiene la siguiente ecuación

$$(7.106) \quad - \int_{\Omega} \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}^a) \cdot \nabla \tilde{\phi}^a = \int_{\Omega} f_{\phi^a} \tilde{\phi}^a + \int_{\Gamma_j} h_{\phi^a} \tilde{\phi}^a + \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} p_{\phi^a} \tilde{\phi}^a - \int_{\Gamma_\phi} \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}^a) \cdot \hat{\mathbf{n}} g_{\phi^a},$$

con  $\tilde{g}_{\phi^a}$  siendo el *lifting* de la condición de borde de Dirichlet  $g_{\phi^a}$  sobre  $\Gamma_\phi$ . Aplicando el teorema de la divergencia generalizado sobre el tercer término de la expresión anterior se aborda a la siguiente ecuación

$$(7.107) \quad \begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} p_{\phi^a} \tilde{\phi}^a &= \int_{\partial \Omega} \left[ -\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^s - 1) [\mathbf{j}_0(\phi_0^a) - \mathbf{j}_0(\phi_0^a)(\hat{\mathbf{x}})] + 2[\theta_0^a - \theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \delta \theta^a] (\mathbf{j}_\varepsilon - \mathbf{j}_0)(\phi_0) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \tilde{\phi}^a \\ &\quad + \int_{\partial \Omega} \chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} \left[ 2\theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) (\gamma^s - 1) [\mathbf{j}_0(\phi_0) - \mathbf{j}_0(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}})] + (\delta \tilde{J}^\phi(p_0) - \delta \tilde{J}^\phi(p_0)(\hat{\mathbf{x}})) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \tilde{\phi}^a \\ &\quad - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^s - 1) [\mathbf{j}_0(\phi_0^a) - \mathbf{j}_0(\phi_0^a)(\hat{\mathbf{x}})]) \tilde{\phi}^a + \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^s - 1) [\mathbf{j}_0(\phi_0^a) - \mathbf{j}_0(\phi_0^a)(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \\ &\quad - \int_{\Omega} \operatorname{div} (2[\theta_0^a - \theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \delta \theta^a] (\mathbf{j}_\varepsilon - \mathbf{j}_0)(\phi_0)) \tilde{\phi}^a - \int_{\Omega} 2[\theta_0^a - \theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \delta \theta^a] (\mathbf{j}_\varepsilon - \mathbf{j}_0)(\phi_0) \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \\ &\quad - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} 2\theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) (\gamma^s - 1) [\mathbf{j}_0(\phi_0) - \mathbf{j}_0(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}})]) \tilde{\phi}^a - \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} 2\theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) (\gamma^s - 1) [\mathbf{j}_0(\phi_0) - \mathbf{j}_0(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \\ &\quad - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} [\delta \tilde{J}^\phi(p_0) - \delta \tilde{J}^\phi(p_0)(\hat{\mathbf{x}})]) \tilde{\phi}^a - \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} [\delta \tilde{J}^\phi(p_0) - \delta \tilde{J}^\phi(p_0)(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla \tilde{\phi}^a. \end{aligned}$$

Los primeros dos términos de la ecuación anterior son cero ya que  $\chi_{\mathcal{B}_\varepsilon} = 0$  fuera de la

bola. Por lo tanto, la suma del primer término y del tercer término de (7.106) es

$$(7.108) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} f_{\phi^a} \tilde{\phi}^a + \int_{\partial \mathcal{B}_\varepsilon} p_{\phi^a} \tilde{\phi}^a = \int_{\Omega} 2 \operatorname{div}(\delta \theta^a \mathbf{j}_0(\phi_0)) \tilde{\phi}^a - \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \bar{J}^\theta(p_0) \tilde{\phi}^a \\ & + \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^s - 1) [\mathbf{j}(\phi_0^a) - \mathbf{j}(\phi_0^a)(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla \tilde{\phi}^a - \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} 2[\theta_0^a - \theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \delta \theta^a] (\gamma^s - 1) \mathbf{j}(\phi_0) \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \\ & - \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} 2\theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) (\gamma^s - 1) [\mathbf{j}(\phi_0) - \mathbf{j}(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla \tilde{\phi}^a - \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^s - 1) [\delta \bar{J}^\phi(p_0) - \delta \bar{J}^\phi(p_0)(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla \tilde{\phi}^a. \end{aligned}$$

- Empleando reglas de diferenciación y el teorema de la divergencia en el primer término de la expresión anterior se obtiene la siguiente estimativa

$$(7.109) \quad \begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} 2 \operatorname{div}(\delta \theta^a \mathbf{j}_0(\phi_0)) \tilde{\phi}^a \right| = \left| \int_{\partial \Omega} \delta \theta^a \mathbf{j}_0(\phi_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} \tilde{\phi}^a - \int_{\Omega} \delta \theta^a \mathbf{j}_0(\phi_0) \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \right| \leq \\ & \leq C_1 [\|\delta \theta^a\|_{L^2(\partial \Omega)} \|\tilde{\phi}^a\|_{L^2(\partial \Omega)} \|\mathbf{j}_0(\phi_0)\|_{L^\infty(\partial \Omega)} + \|\delta \theta^a\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \tilde{\phi}^a\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{j}_0(\phi_0)\|_{L^\infty(\Omega)}] \\ & \leq C_2 \left[ (\|w_{\theta^a}^\varepsilon\|_{L^2(\partial \Omega)} + \|\tilde{\theta}^a\|_{L^2(\partial \Omega)}) \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)} + (\|w_{\theta^a}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{\theta}^a\|_{L^2(\Omega)}) \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)} \right] \\ & \leq C_3 \left[ \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \sqrt{|\ln \varepsilon|} + \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)} \right] \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)} \\ & \leq C_4 \left[ \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \sqrt{|\ln \varepsilon|} + \varepsilon^{\mathbb{H}\delta} \right] \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donde se ha empleado la desigualdad de la traza y las estimativas en la ecuación (A.1) y el Lema 7.9. El segundo término en el lado derecho de la ecuación (7.108) se acota empleando la Suposición 3, y la estimativa en el Lema 1.1 de [38] de la siguiente manera

$$(7.110) \quad \left| - \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \bar{J}^\theta(p_0) \tilde{\phi}^a \right| \leq \|\delta \bar{J}^\theta(p_0)\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\tilde{\phi}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_5 \varepsilon^{1+\delta} \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)}.$$

El resto de los términos en (7.108) pueden ser acotados empleando la desigualdad de Hölder y de Taylor-Lagrange, y la estimativa en el Lema 7.9 de la siguiente manera

$$(7.111) \quad \begin{aligned} & \left| \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^s - 1) [\mathbf{j}(\phi_0^a) - \mathbf{j}(\phi_0^a)(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \right| = \left| \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^s - 1) \nabla \mathbf{j}(\phi_0^a)(\tilde{\mathbf{x}}_1) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \right| \leq \\ & \leq C_6 \lambda_1^{\mathbf{j}} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla \tilde{\phi}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_7 \varepsilon^2 \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$(7.112) \quad \begin{aligned} & \left| - \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} 2[\theta_0^a - \theta_0^a(\hat{\mathbf{x}}) + \delta \theta^a] (\gamma^s - 1) \mathbf{j}(\phi_0) \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \right| = \left| 2(1 - \gamma^s) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} [\nabla \theta_0^a(\tilde{\mathbf{x}}_2) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \delta \theta^a] \mathbf{j}_0(\phi_0) \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \right| \\ & \leq C_8 \|\mathbf{j}_0(\phi_0)\|_{L^\infty(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla \tilde{\phi}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} [\|\delta \theta^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \|\nabla \theta_0^a(\tilde{\mathbf{x}}_2)\|_{L^\infty(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)}] \\ & \leq C_9 \left[ \|w_{\theta^a}^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \varepsilon^{\delta_1} \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon^2 \right] \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)} \\ & \leq C_{10} \left[ \varepsilon^2 + \varepsilon^{1+\delta_1+\delta_2} + \varepsilon^2 \right] \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$(7.113) \quad \left| -\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} 2\theta_0^a(\hat{\mathbf{x}})(\gamma^s-1)[\mathbf{j}(\phi_0)-\mathbf{j}(\phi_0)(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \right| = \left| -\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} 2\theta_0^a(\hat{\mathbf{x}})(\gamma^s-1)\nabla \mathbf{j}(\phi_0)(\tilde{\mathbf{x}}_3)(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \right| \\ \leq C_{11}\lambda_2^{\mathbf{j}}\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)}\|\nabla \tilde{\phi}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_{12}\varepsilon^2\|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)},$$

$$(7.114) \quad \left| -\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^s-1)[\delta \tilde{J}^\phi(p_0)-\delta \tilde{J}^\phi(p_0)(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \right| = \left| -\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} (\gamma^s-1)\nabla \delta \tilde{J}^\phi(p_0)(\tilde{\mathbf{x}}_4)(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}) \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \right| \\ \leq C_{13}\lambda_\phi^J\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)}\|\nabla \tilde{\phi}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_{14}\varepsilon^2\|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)},$$

donde  $\delta_1, \delta_2 > 0$ . Los coeficientes  $\lambda_1^{\mathbf{j}}, \lambda_2^{\mathbf{j}}$  y  $\lambda_\phi^J$  son los radios espectrales de los tensores  $(\nabla \mathbf{j}(\phi_0^a)(\tilde{\mathbf{x}}_1))^T \nabla \mathbf{j}(\phi_0^a)(\tilde{\mathbf{x}}_1)$ ,  $(\nabla \mathbf{j}(\phi_0)(\tilde{\mathbf{x}}_3))^T \nabla \mathbf{j}(\phi_0)(\tilde{\mathbf{x}}_3)$  y  $(\nabla \delta \tilde{J}^\phi(p_0)(\tilde{\mathbf{x}}_4))^T \nabla \delta \tilde{J}^\phi(p_0)(\tilde{\mathbf{x}}_4)$  respectivamente, para algún  $\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_3, \tilde{\mathbf{x}}_4 \in \mathcal{B}_\varepsilon$ .

- El segundo término de la ecuación (7.106) puede ser acotado empleando la desigualdad de la traza, la desigualdad generalizada de Hölder y la solución explícita (5.33) de la siguiente manera

$$(7.115) \quad \left| \int_{\Gamma_j} h_{\phi^a} \tilde{\phi}^a \right| \leq C_{15} \left[ \|\mathbf{j}_\varepsilon(w_{\phi^a}^\varepsilon)\|_{L^2(\Gamma_j)} + \left( \|w_{\theta^a}^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_j)} + \|\tilde{\theta}^a\|_{L^2(\Gamma_j)} \right) \|\mathbf{j}_0(\phi_0)\|_{L^\infty(\Gamma_j)} \right] \|\tilde{\phi}^a\|_{L^2(\Gamma_j)} \\ \leq C_{16}[\varepsilon^2 + \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)}] \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{17}[\varepsilon^2 + \varepsilon^{1+\delta}] \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)},$$

donde la estimativa en el Lema 7.9 también ha sido utilizada.

- Para el último término de (7.106) se ha empleado la desigualdad de la traza y las condiciones de borde en (5.34) con el objeto de intercambiar los argumentos de las normas

$$(7.116) \quad \left| -\int_{\Gamma_\phi} \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}^a) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{g_{\phi^a}} \right| = \left| -\int_{\Gamma_\phi} \mathbf{j}_\varepsilon(w_{\phi^a}^\varepsilon) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\tilde{\phi}^a} \right| \leq C_{18}\varepsilon^2\|\tilde{\phi}^a\|_{L^2(\Gamma_\phi)} \leq C_{19}\varepsilon^2\|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)}.$$

- Finalmente, dada la coercividad de la forma bilineal en (7.106) se obtiene

$$(7.117) \quad \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left| -\int_{\Omega} \mathbf{j}_\varepsilon(\tilde{\phi}^a) \cdot \nabla \tilde{\phi}^a \right|,$$

y luego, el resultado esperado se obtiene tomando límite de  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

■



## Validación Numérica

La expresión analítica de la expansión asintótica topológica, y por tanto también de la derivada topológica, pueden validarse mediante un procedimiento numérico que se explicará en esta sección.

Consideremos la expansión asintótica

$$(8.1) \quad \mathcal{J}_\varepsilon(p_\varepsilon) = \mathcal{J}_0(p_0) + f(\varepsilon)\mathcal{T}_D\mathcal{J}(p_0)(\hat{\mathbf{x}}) + \mathcal{E}(\varepsilon).$$

Despejando  $\mathcal{E}(\varepsilon)$  y luego tomando valor absoluto se obtiene

$$(8.2) \quad \mathcal{E}(\varepsilon) = |\mathcal{J}_\varepsilon(p_\varepsilon) - \mathcal{J}_0(p_0) - f(\varepsilon)\mathcal{T}_D\mathcal{J}(p_0)(\hat{\mathbf{x}})|.$$

Evaluando la expresión anterior para una secuencia de valores decrecientes de  $\varepsilon$ , podemos demostrar que empleando la fórmula analítica obtenida para  $\mathcal{T}_D\mathcal{J}(p_0)(\hat{\mathbf{x}})$ , recuperamos la estimación encontrada en el Lema B.1 para el residuo, es decir,  $\mathcal{E}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ . Esta técnica también se empleó en [25], y es particularmente útil ya que nos permite determinar la tasa de variación exacta para un caso de evaluación específico. Otra forma clásica de verificar la validez de la fórmula analítica es comparándola con una aproximación por diferencias finitas. Considere la función  $g(\hat{\mathbf{x}})$

$$(8.3) \quad g_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\mathcal{J}_\varepsilon(p_\varepsilon) - \mathcal{J}_0(p_0)}{f(\varepsilon)}.$$

Ya que por definición

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{T}_D\mathcal{J}(p_0)(\hat{\mathbf{x}}),$$

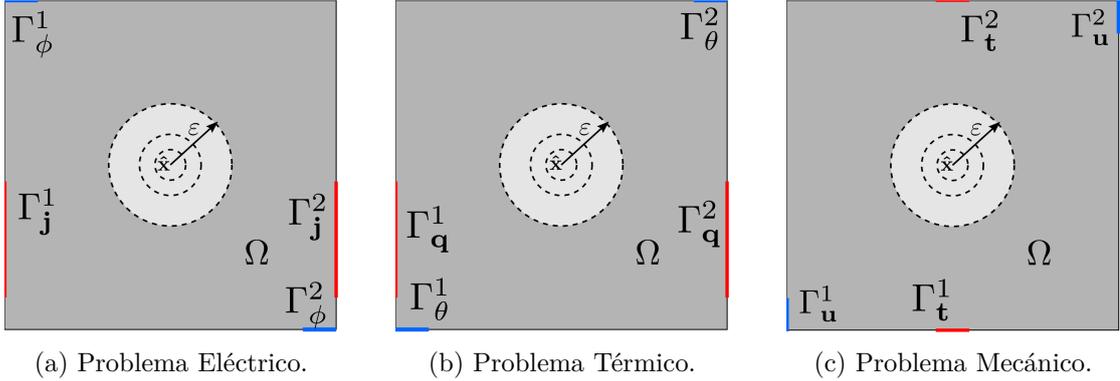


Figura 8.1: Dominio y condiciones de borde. Las regiones de Dirichlet se representan en azul y las regiones Neumann en rojo.

luego, el cociente  $g(\hat{\mathbf{x}})/\mathcal{T}_D\mathcal{J}(p_0)(\hat{\mathbf{x}}) \rightarrow 1$ . Más allá del hecho de que estas dos condiciones son equivalentes, por razones de completitud se verificarán ambas dos.

En particular, comprobaremos la validez de la derivada topológica dada para un funcional de costo como el del ejemplo 1, en la Sección 6.1 (ver ecuación (6.11)).

El dominio computacional  $\Omega$  consiste en una región cuadrada de longitud 2. El centro de la perturbación circular  $\mathcal{B}_\varepsilon$  coincide con el origen del sistema de coordenadas y con el centro del dominio computacional, es decir  $\hat{\mathbf{x}} = (0, 0)$ . Obtenemos  $p_0$ , y luego  $p_\varepsilon$  para la siguiente secuencia de radios de perturbación  $\varepsilon \in \{0.160, 0.080, 0.040, 0.020, 0.010, 0.005\}$ , empleando un procedimiento estándar de elementos finitos. El dominio computacional se discretiza con 822158 elementos lineales triangulares de Lagrange con 411528 nodos. Las propiedades del material empleadas son: conductividad eléctrica  $s_0 = 1$ , conductividad térmica  $k_0 = 1$ , módulo de Young  $E_0 = 1$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.33$ , y coeficiente de expansión térmica  $\alpha_0 = 10^{-3}$ . Para el problema mecánico, se consideraron hipótesis de tensiones planas.

Las fronteras de Dirichlet y Neumann para cada problema están compuestas por un par de segmentos de línea disjuntos, esto es  $\Gamma_\phi = \Gamma_\phi^1 \cup \Gamma_\phi^2$  y  $\Gamma_j = \Gamma_j^1 \cup \Gamma_j^2$  para el problema eléctrico,  $\Gamma_\theta = \Gamma_\theta^1 \cup \Gamma_\theta^2$  y  $\Gamma_q = \Gamma_q^1 \cup \Gamma_q^2$  para el problema térmico, y  $\Gamma_u = \Gamma_u^1 \cup \Gamma_u^2$  y  $\Gamma_t = \Gamma_t^1 \cup \Gamma_t^2$  para el problema mecánico, ver figura 8.1. Los valores prescritos para cada condición de borde sobre cada región están listados en la Tabla 8.1, como así también las coordenadas de los puntos inicial y final de dichas regiones de frontera.

Se evalúan los funcionales  $\mathcal{J}_\varepsilon(p_\varepsilon)$  y  $\mathcal{J}_0(p_0)$ , utilizando la versión discretizada de la expresión (6.1). Las regiones relacionadas con este funcional de costo están compuestas también por un par de regiones de líneas disjuntas, i.e.  $\Gamma_1 = \Gamma_1^1 \cup \Gamma_1^2$ ,  $\Gamma_2 = \Gamma_2^1 \cup \Gamma_2^2$ , y  $\Gamma_3 = \Gamma_3^1 \cup \Gamma_3^2$ . Los valores de  $f_1$ ,  $f_2$  y  $\mathbf{f}_3$  sobre sus regiones asociadas se enumeran en la

Problema	Condición de borde	Región	Valor	Punto Inicial	Punto Final
Eléctrico	$\phi_\Gamma$	$\Gamma_\phi^1$	0	(-1,1)	(-0.8,1)
		$\Gamma_\phi^2$	0	(0.8,-1)	(1,-1)
	$j_\Gamma$	$\Gamma_j^1$	-1	(-1,-0.1)	(-1,-0.8)
		$\Gamma_j^2$	1	(1,-0.1)	(1,-0.8)
Térmico	$\theta_\Gamma$	$\Gamma_\theta^1$	0	(-1,-1)	(-0.8,-1)
		$\Gamma_\theta^2$	0	(0.8,1)	(1,1)
	$q_\Gamma$	$\Gamma_q^1$	-1	(-1,-0.1)	(-1,-0.8)
		$\Gamma_q^2$	1	(1,-0.1)	(1,-0.8)
Mecánico	$\mathbf{u}_\Gamma$	$\Gamma_u^1$	(0,0)	(-1,-0.8)	(-1,-1)
		$\Gamma_u^2$	(0,0)	(1,0.8)	(1,1)
	$\mathbf{t}_\Gamma$	$\Gamma_t^1$	(0,1)	(-0.1,-1)	(0.1,-1)
		$\Gamma_t^2$	(0,-1)	(-0.1,1)	(0.1,1)

Tabla 8.1: Condiciones de borde y sus valores prescriptos.

Distribución	Región	Valor	Punto Inicial	Punto Final
$f_1$	$\Gamma_1^1$	1	(-1,0.1)	(-1,-0.1)
	$\Gamma_1^2$	-1	(1,0.1)	(1,-0.1)
$f_2$	$\Gamma_2^1$	-1	(-1,0.8)	(-1,-0.8)
	$\Gamma_2^2$	2	(1,0.8)	(1,-0.8)
$\mathbf{f}_3$	$\Gamma_3^1$	(0,1)	(-0.1,-1)	(0.1,-1)
	$\Gamma_3^2$	(0,-1)	(-0.1,1)	(0.1,1)

Tabla 8.2: Valores de las distribuciones asociadas a los funcionales de costo y coordenadas de los puntos inicial y final de sus regiones lineales.

Tabla 8.2, así como las coordenadas iniciales y finales de los segmentos de línea.

El estudio se realizó para todas las combinaciones de parámetros de contraste  $\gamma^s$ ,  $\gamma^k$ ,  $\gamma^c$ , y  $\gamma^\alpha$  con valores en el conjunto  $\{10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2\}$ , dando un total de  $n_c = 625$  combinaciones. Para cada conjunto de parámetros de contraste, la evaluación del residuo  $\mathcal{E}(\varepsilon)$  puede diferir en órdenes de magnitud, por lo que se emplea el siguiente esquema de escalado para representar gráficamente estos resultados.

En primer lugar, se asume el siguiente comportamiento del residuo en función de  $\varepsilon$

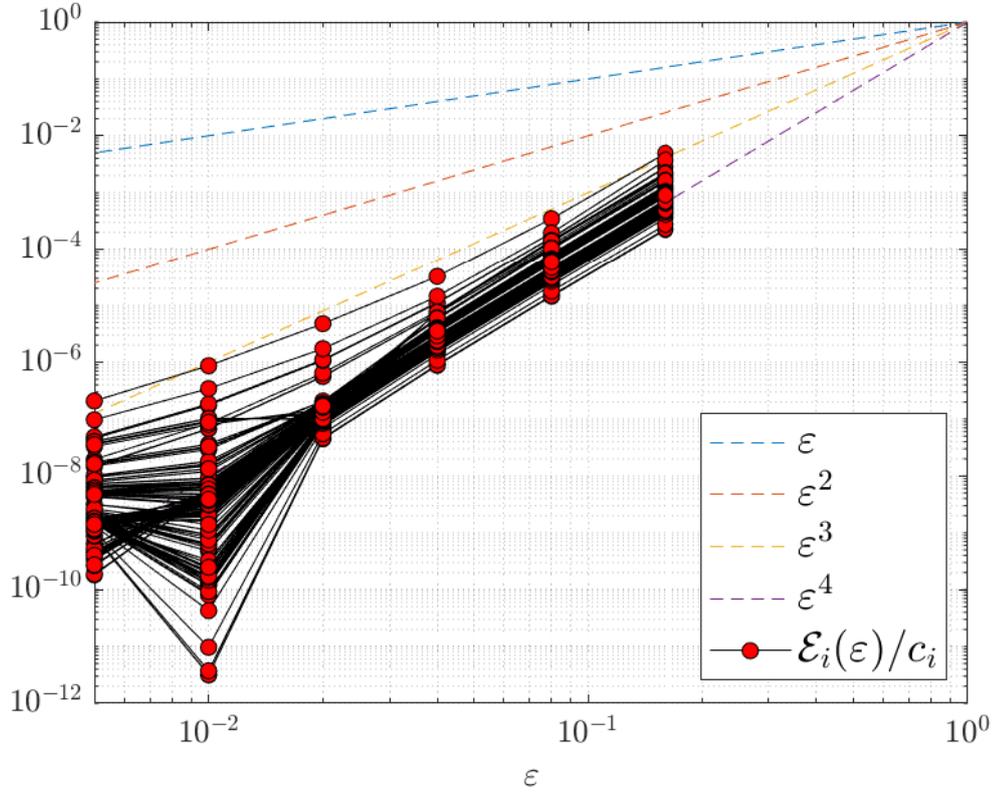


Figura 8.2: Resultados del residuo escalado.

para una determinada combinación de parámetros de contraste  $i$  ( $i = 1, \dots, n_c$ )

$$(8.4) \quad \mathcal{E}_i(\varepsilon) \approx c_i \varepsilon^{p_i}$$

Tomando logaritmos a ambos lados se obtiene

$$(8.5) \quad \ln \mathcal{E}_i(\varepsilon) = p_i \ln \varepsilon + \ln c_i.$$

A continuación, podemos utilizar el método de mínimos cuadrados para obtener  $p_i$ ,  $\ln c_i$ , y finalmente  $c_i$ . Las evaluaciones del residuo escalado  $\mathcal{E}_i(\varepsilon)/c_i$  se representan en la figura 8.2, mientras que el valor normalizado de la derivada topológica  $g(\hat{\mathbf{x}})/\mathcal{T}_D \mathcal{J}(p_0)(\hat{\mathbf{x}})$  se representa en la Figura 8.3.

Según los experimentos numéricos, se observa que la aproximación por diferencia finita de la derivada topológica converge al valor analítico correspondiente para todos los casos evaluados. Asimismo, la evaluación numérica del residuo muestra tasas con media  $p_m = \frac{1}{n_c} \sum_{i=1}^{n_c} p_i = 3,94$ , lo que confirma la estimación  $\mathcal{E}(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ .

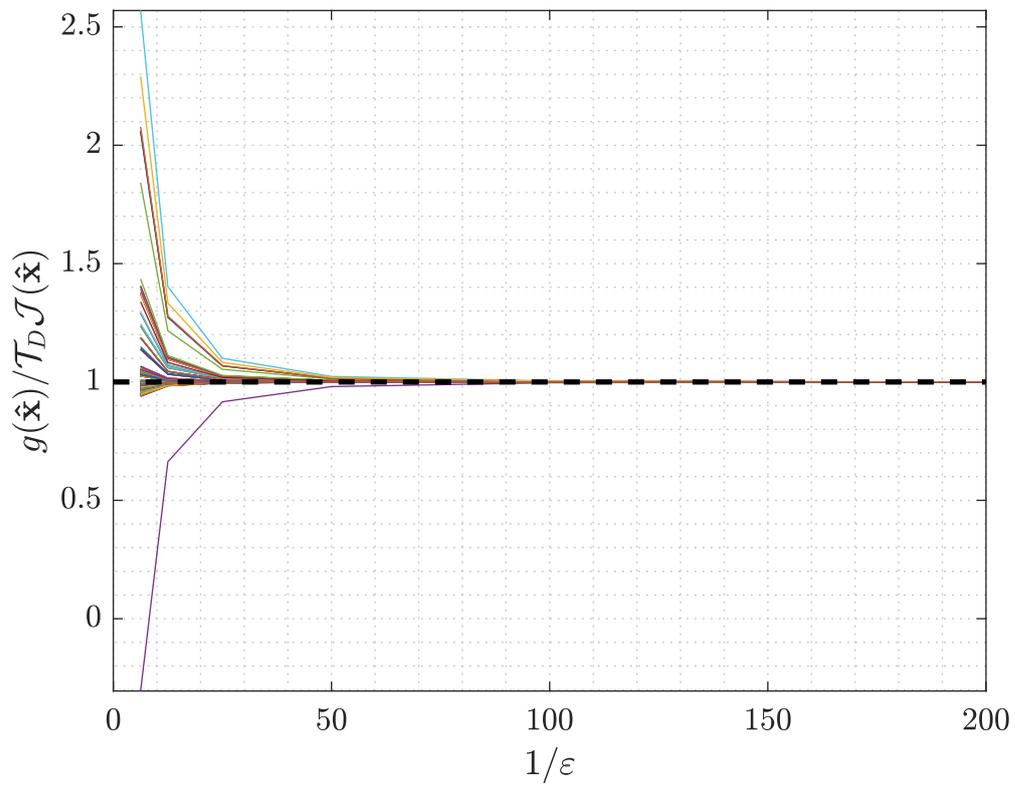


Figura 8.3: Derivada topológica normalizada  $g(\hat{\mathbf{x}})/\mathcal{T}_D \mathcal{J}(p_0)(\hat{\mathbf{x}})$ .



## Parte II

# Síntesis de Actuadores Electro-termo-mecánicos



## Formulación del problema de Optimización

### 9.1 Descripción general del problema

Tal como se mencionó anteriormente, la segunda parte de este trabajo de tesis trata sobre la aplicación de los conceptos de derivada topológica a la resolución de problemas de optimización topológica, en particular a la síntesis de actuadores termo-electro-mecánicos (TEM). En éste capítulo, se presentará la formulación del problema de optimización topológica asociada a dicho problema.

Considere un dominio de diseño  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  abierto y acotado, con frontera suficientemente suave  $\partial\Omega$ , el cual está subdividido en una región material  $\Omega_M$  y otra asociada al vacío  $\Omega_V$ , ver Figura 9.1. Dicha subdivisión puede realizarse mediante una función característica  $\chi$ , la cual valdrá 1  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  y 0 en caso contrario.

En base a esta representación geométrica se puede explicar el principio de funcionamiento de un actuador TEM. Primero se hace circular una corriente eléctrica  $\mathbf{j}_\chi(\phi)$  a través de la estructura flexible del actuador, resultado de las condiciones de borde eléctricas en  $\Gamma_j$  y  $\Gamma_\phi$ . El flujo de dicha corriente genera calor por efecto Joule  $Q_\chi(\phi)$ , elevando así la temperatura  $\theta$  de la estructura y con ello, por dilatación térmica, deformándola. El objetivo de diseño entonces es, dado un conjunto de condiciones de borde eléctricas, térmicas y mecánicas, obtener la topología de la estructura flexible (caracterizada por la región  $\Omega_M$ , y ésta a través de la función característica  $\chi$ ) que maximice el desplazamiento  $\mathbf{u}$  promedio de la región  $\Gamma_J$  en la dirección  $\hat{\mathbf{e}}$  utilizando una determinada cantidad de material.

En términos matemáticos, dicho problema de optimización se puede establecer de la siguiente manera:

$$(9.1a) \quad \min_{\chi \in \mathcal{X}_{ad}} \mathcal{J}(\mathbf{u}) = - \int_{\Gamma_J} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma,$$

$$(9.1b) \quad \text{s.a.} \quad |\Omega_M| = |\Omega|^*,$$

$$(9.1c) \quad \begin{cases} \phi \in \mathcal{U}_\phi : a_\chi(\phi, \eta_\phi) = \ell_j(\eta_\phi) \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi, \\ \theta \in \mathcal{V}_\theta : b_\chi(\theta, \eta_\theta) = N_\chi(\phi, \eta_\theta) + \ell_q(\eta_\theta) \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta, \\ \mathbf{u} \in \mathcal{V}_\mathbf{u} : c_{1\chi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) + c_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) = c_{2\chi}(\theta_\chi, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) + \ell_t(\boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u} \in \mathcal{V}_\mathbf{u}, \end{cases}$$

donde el conjunto de funciones  $\mathcal{U}_\phi$  está definido en (2.10), mientras que los espacios funcionales  $\mathcal{V}_\theta$  y  $\mathcal{V}_\mathbf{u}$  lo están en (2.13), (2.14) y (2.12) respectivamente, mientras que la definición de los espacios de funciones  $\mathcal{V}_\phi$ ,  $\mathcal{V}_\theta$  y  $\mathcal{V}_\mathbf{u}$  se encuentra en (2.13), (2.14) y (2.15).

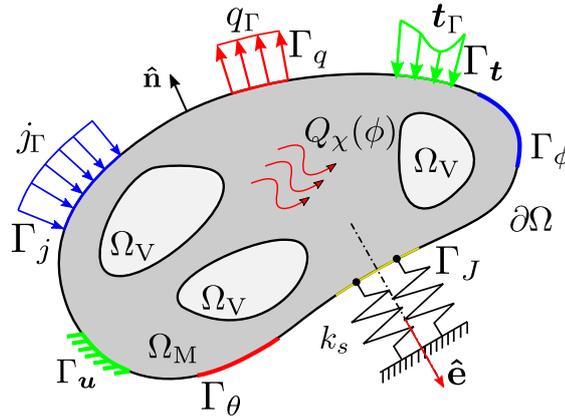


Figura 9.1: Caracterización del dominio de diseño en conjunto con las condiciones de borde.

Para modelar la respuesta de una pieza de trabajo sobre la cual opera el actuador, se ha agregado una condición de apoyo elástico sobre la región  $\Gamma_J$ , que se materializa en el sistema de EDP (9.1) mediante la siguiente forma bilineal

$$(9.2) \quad c_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_J} k_s \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u} d\Gamma,$$

donde  $k_s$  representa la rigidez por unidad de longitud de la pieza de trabajo.

Las formas lineales  $\ell_j$ ,  $\ell_q$  y  $\ell_t$ , conservan las mismas definiciones dadas en (2.16a), (2.16b) y (2.16c), mientras que a las formas bilineales y no lineales poseen el subíndice

$\chi$ , indicando que estas dependen de manera directa de la función característica a través de la definición de las propiedades materiales, a saber

$$(9.3) \quad a_\chi(\phi, \eta_\phi) = - \int_{\Omega} \mathbf{j}_\chi(\phi) \cdot \nabla \eta_\phi d\Omega,$$

$$(9.4) \quad b_\chi(\theta, \eta_\theta) = - \int_{\Omega} \mathbf{q}_\chi(\theta) \cdot \nabla \eta_\theta d\Omega,$$

$$(9.5) \quad N_\chi(\phi, \eta_\theta) = \int_{\Omega} Q_\chi(\phi) \eta_\theta d\Omega,$$

$$(9.6) \quad c_{1\chi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_\chi(\mathbf{u}) : \nabla^s \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u} d\Omega,$$

$$(9.7) \quad c_{2\chi}(\theta_\chi, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}_\chi(\theta) : \nabla^s \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u} d\Omega,$$

con

$$(9.8) \quad \mathbf{j}_\chi(\phi) = -s_\chi \nabla \phi,$$

$$(9.9) \quad \mathbf{q}_\chi(\theta) = -k_\chi \nabla \theta,$$

$$(9.10) \quad Q_\chi(\theta) = s_\chi \|\nabla \phi\|_2^2,$$

$$(9.11) \quad \boldsymbol{\sigma}_\chi(\mathbf{u}) = \mathbb{C}_\chi \nabla^s \mathbf{u},$$

$$(9.12) \quad \mathbf{B}_\chi(\theta) = \alpha_\chi \mathbb{C}_\chi \mathbf{1} \theta,$$

siendo

$$(9.13) \quad s_\chi = s(\chi + \rho^s(1 - \chi)),$$

$$(9.14) \quad k_\chi = k(\chi + \rho^k(1 - \chi)),$$

$$(9.15) \quad \mathbb{C}_\chi = \mathbb{C}(\chi + \rho^c(1 - \chi)),$$

$$(9.16) \quad \alpha_\chi = \alpha(\chi + \rho^\alpha(1 - \chi)).$$

Los coeficientes  $\rho^s$ ,  $\rho^k$ ,  $\rho^c$  y  $\rho^\alpha$  son factores de contraste entre las propiedades constitutivas del medio *vacío* y el medio material. Los valores de estos factores deben ser lo suficientemente bajos como para hacer despreciable la contribución de la región vacía a la función de costo y a las soluciones directas y adjuntas, y lo suficientemente alto como para evitar problemas de singularidad en las discretizaciones de los operadores diferenciales (matriz de rigidez de elementos finitos). Valores entre  $10^{-2}$  y  $10^{-3}$  son usuales en la literatura.

El volumen (área) ocupada por la estructura flexible se obtiene mediante

$$(9.17) \quad |\Omega_M| = \int_{\Omega} \chi d\Omega,$$

y la cantidad máxima que ésta puede ocupar se denota por  $|\Omega|^*$ .

La formulación del problema (9.1) es clásica para la obtención de actuadores flexibles, y se puede encontrar en aplicaciones para generar mecanismos flexibles de funcionamiento con fenómenos puramente elásticos [47, 50]<sup>1</sup>, o multifísicos [1, 41, 48, 51, 52]. Para una revisión exhaustiva de la síntesis de actuadores y mecanismos flexibles se puede consultar [61].

La formulación antes presentada no contempla la posibilidad de que se obtengan diseños de actuadores con altos niveles de movimientos parásitos. El movimiento parásito se define como el desplazamiento de la zona de trabajo del actuador en una dirección perpendicular a la deseada, llámese  $\hat{\mathbf{e}}_\perp$ , donde  $\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\perp = 0$ . En efecto, tenemos que

$$\int_{\Gamma_J} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma_J} \|\hat{\mathbf{e}}\|_2 \|\mathbf{u}\|_2 \cos(\beta) d\Gamma.$$

Luego, ya que  $\hat{\mathbf{e}}$  es un versor, su norma es unitaria. Entonces, existe un  $\tilde{\mathbf{x}} \in \Gamma_J$  tal que

$$\int_{\Gamma_J} \|\mathbf{u}\|_2 \cos(\beta) d\Gamma = u_p \cos(\beta_p) |\Gamma_J|,$$

con  $u_p$  siendo la magnitud del desplazamiento promedio dentro de la región  $\Gamma_J$ , dado por

$$u_p = \|\mathbf{u}\|_2(\tilde{\mathbf{x}}),$$

y  $\cos(\beta_p)$  el coseno del ángulo formado entre  $\hat{\mathbf{e}}$  y  $\mathbf{u}$  en el punto  $\tilde{\mathbf{x}}$ , es decir  $\cos(\beta_p) = \cos(\beta(\tilde{\mathbf{x}}))$ . Luego, podemos reescribir la función de costo de la siguiente manera

$$(9.18) \quad \mathcal{J}(\mathbf{u}) = -u_p \cos(\beta_p) |\Gamma_J|,$$

La generación de movimientos parásitos por parte del actuador puede caracterizarse por este ángulo, si  $\cos(\beta_p) = 1$ , entonces la dirección de  $\mathbf{u}$  coincide con la de  $\hat{\mathbf{e}}$  y no hay movimientos parásitos. Como caso opuesto, si  $\cos(\beta_p) = 0$ , entonces el desplazamiento que genera el actuador es puramente parásito. La función (9.18) se minimiza con valores altos del producto  $u_p \cos(\beta_p)$ , en otras palabras se pueden obtener actuadores *óptimos* con movimientos parásitos altos ( $\cos(\beta_p)$  cercano a 0) en tanto el valor del desplazamiento obtenido  $u_p$  sea lo suficientemente alto.

Con el objeto de solventar esta situación, planteamos un funcional de costo alternativo para (9.1), el cual permita minimizar los movimientos parásitos mediante un esquema de penalización, a saber

$$(9.19) \quad \mathcal{J}(\mathbf{u}) = - \int_{\Gamma_J} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \kappa \int_{\Gamma_J} \hat{\mathbf{e}}_\perp \cdot \mathbf{u} d\Gamma,$$

<sup>1</sup>En [50] se presenta una formulación con una función de costo más general, y la del presente trabajo sería un caso particular de esta.

con  $\kappa > 0$  el factor de penalización.

## 9.2 Control de volumen

En este trabajo utilizaremos el método de lagrangiano aumentado para implementar las restricciones de tipo no PDE en el problema de optimización. Por lo tanto, reescribimos el problema (9.1) de la siguiente manera

$$(9.20) \quad \min_{\chi \in \mathcal{X}_{ad}} \mathcal{A}_\chi(\mathbf{u}, \lambda_1) = \mathcal{J}(\mathbf{u}) + \lambda_1 \mathcal{C}_\chi + \frac{\lambda_2}{2} \mathcal{C}_\chi^2,$$

$$\begin{cases} \phi \in \mathcal{U}_\phi : a_\chi(\phi, \eta_\phi) = \ell_j(\eta_\phi) & \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi, \\ \theta \in \mathcal{V}_\theta : b_\chi(\theta, \eta_\theta) = N_\chi(\phi, \eta_\theta) + \ell_q(\eta_\theta) & \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta, \\ \mathbf{u} \in \mathcal{V}_\mathbf{u} : c_{1\chi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) + c_k(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) = c_{2\chi}(\theta_\chi, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) + \ell_t(\boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) & \forall \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u} \in \mathcal{V}_\mathbf{u}, \end{cases}$$

con  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  dado por (9.1a) o por (9.19), y donde  $\mathcal{C}_\chi$  es

$$(9.21) \quad \mathcal{C}_\chi = \frac{|\Omega_M|}{|\Omega|^\star} - 1,$$

siendo  $\lambda_1$  un estimador del multiplicador de lagrange asociado a la restricción  $\mathcal{C}_\chi$  y  $\lambda_2$  un parámetro de penalización .

## 9.3 Función Derivada topológica

Se puede re-interpretar a la derivada topológica como un campo escalar tal que  $\mathcal{T}_D \mathcal{J} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbb{R}$ , cuya expresión variará dependiendo de la zona del dominio  $\Omega$  a la que pertenece el punto  $\mathbf{x}$  en donde se introduce la perturbación  $\mathcal{B}_\varepsilon(\mathbf{x})$ . En ese sentido, la derivada topológica toma la siguiente forma

$$(9.22) \quad \mathcal{T}_D \mathcal{J}(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \mathcal{T}_D^{\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}} \mathcal{J}(\mathbf{x}) + (1 - \chi(\mathbf{x})) \mathcal{T}_D^{\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}} \mathcal{J}(\mathbf{x}),$$

donde  $\mathcal{T}_D^{\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}} \mathcal{J}(\mathbf{x})$  indica la tasa de cambio de la función  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  cuando se introduce un *hueco* en la región sólida  $\Omega_M$ , mientras  $\mathcal{T}_D^{\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{M}} \mathcal{J}(\mathbf{x})$  indica la tasa de cambio cuando se introduce una *isla* en la región vacío  $\Omega_V$ .

Para una función de costo  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  dada por (9.1a) o (9.19), la expresión de la derivada topológica para un hueco  $\mathcal{T}_D^{\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}} \mathcal{J}(\mathbf{x})$  se calcula mediante (6.11). En dicha expresión los tensores de polarización  $\mathbf{P}_s, \mathbf{P}_k, \mathbb{P}_\sigma$  y  $\mathbb{P}_\mathbf{B}$ , y en el escalar  $\beta_Q$  se los reemplaza por  $\mathbf{P}_s^{\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}}, \mathbf{P}_k^{\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}}, \mathbb{P}_\sigma^{\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}}, \mathbb{P}_\mathbf{B}^{\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}}$ , y  $\beta_Q^{\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V}}$ , cuyas expresiones están dadas por (6.12) utilizando los siguientes contrastes

$$(9.23) \quad \gamma^s = \rho^s, \quad \gamma^k = \rho^k, \quad \gamma^{\mathbb{C}} = \rho^{\mathbb{C}}, \quad \gamma^\alpha = \rho^\alpha,$$

mientras que  $\mathbf{P}_s^{V \rightarrow M}$ ,  $\mathbf{P}_k^{V \rightarrow M}$ ,  $\mathbb{P}_\sigma^{V \rightarrow M}$ ,  $\mathbb{P}_B^{V \rightarrow M}$ , y  $\beta_Q^{V \rightarrow M}$ , se obtienen con las mismas expresiones pero con los siguientes contrastes

$$(9.24) \quad \gamma^s = \frac{1}{\rho^s}, \quad \gamma^k = \frac{1}{\rho^k}, \quad \gamma^C = \frac{1}{\rho^C}, \quad \gamma^\alpha = \frac{1}{\rho^\alpha}.$$

La derivada topológica de  $\mathcal{C}_\chi(\mathbf{x})$  se construye en base a la misma estructura, esto es

$$(9.25) \quad \mathcal{T}_D \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \mathcal{T}_D^{M \rightarrow V} \mathcal{C}(\mathbf{x}) + (1 - \chi(\mathbf{x})) \mathcal{T}_D^{V \rightarrow M} \mathcal{C}(\mathbf{x}),$$

siendo

$$(9.26) \quad \mathcal{T}_D^{M \rightarrow V} \mathcal{C}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{|\Omega|^\star} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_M,$$

$$(9.27) \quad \mathcal{T}_D^{V \rightarrow M} \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega|^\star} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_V.$$

Finalmente, la derivada topológica del problema (9.20) es

$$(9.28) \quad \mathcal{T}_D \mathcal{A}_\chi(\mathbf{x}) = \mathcal{T}_D \mathcal{J}(\mathbf{x}) + \left( \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \mathcal{C}_\chi \right) \mathcal{T}_D \mathcal{C}_\chi(\mathbf{x}), \quad \text{c.t.p. de } \Omega.$$

## Conceptos de Escalado

### 10.1 Introducción

Una de las formas más eficientes y populares para automatizar o sistematizar un proceso de diseño es mediante diseño óptimo, en donde se traduce el problema de diseño a un problema de optimización. Dentro del planteamiento de un problema de optimización, se encuentra un determinado número de parámetros físicos, algunos contenidos dentro del conjunto de restricciones (EDPs y otros), y otros dentro de la función de costo. Uno de los fines últimos en un problema de diseño es lograr trazar un mapa que permita entender como cambia la solución óptima en función de los valores de dichos parámetros físicos. A modo de ejemplo, en un problema de diseño de intercambiadores de calor sometido a distintos fenómenos de transferencia de calor (conducción, convección, radiación), interesa saber cómo impactan en el diseño final las magnitudes relativas de éstos fenómenos. Si nos extendemos a problemas multifísicos, cada vez más parámetros físicos aparecen a medida que se agregan nuevos campos de solución, y empezamos a perder noción de como éstos parámetros influyen en la solución del problema de diseño óptimo.

Una forma eficiente de reducir la complejidad de este tipo de estudios es escalando el problema de optimización. Tradicionalmente, el proceso de escalado se usaba principalmente para identificar pequeños parámetros en modelos matemáticos con el objeto de emplear métodos de perturbación para poder obtener soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales.

Actualmente, es muy utilizado por diferentes razones. En primer lugar, el número de parámetros a definir que resultan del proceso de escalado es mucho menor al número de parámetros físicos del modelo original. Además, estos parámetros son adimensionales, y expresan los efectos de los fenómenos físicos en términos relativos a otros en vez de su valor individual. Definir valores significativos de algunos pocos números adimensionales resulta más fácil que determinar valores relevantes de los parámetros físicos originales.

Otra gran ventaja que se obtiene es que el costo computacional de muchos estudios puede verse reducido en gran medida. Por ejemplo, en [36] se ejemplifica un gran cantidad de modelos físicos estacionarios y transitorios en donde la versión escalada de ellos no posee parámetro adimensional alguno. Por lo tanto, esas soluciones son válidas para todo valor de parámetros físicos y por ende sólo es necesario resolver los problemas escalados una sola vez y luego re-escalar para obtener la versiones particulares. Este tipo de situaciones son sumamente útiles en estudios de barridos paramétricos, en donde la cantidad de simulaciones a realizar se reduce drásticamente, ya que la cantidad de parámetros posibles a barrer es ahora menor. Para una descripción mas detallada de los métodos de escalado se puede consultar [33, 36].

En la siguiente sección se darán los conceptos preliminares y generales de un proceso de escalado a un problema de optimización. Estos conceptos serán aplicados a un ejemplo clásico en la Sección 10.3 y finalmente al problema de estudio de este trabajo de tesis en la Sección 10.4.

## 10.2 Preliminares

No existe un procedimiento general reconocido para escalar un problema de optimización. Aún así, proponemos dividirlo en 3 partes:

1. Escalar la función de costo.
2. Escalar las restricciones.
3. Escalar las sensibilidades.

En un problema de optimización topológica, el grupo de restricciones más importante lo conforman las EDPs. El escalado de este tipo de restricciones es un poco más complejo que el resto y por ello serán tratados por separado en la Sección 10.2.1. Luego, el escalado de la función de costo en conjunto con las sensibilidades será abordado en la Sección 10.2.2.

### 10.2.1 Escalado de Ecuaciones Diferenciales

Lo que se busca durante el proceso de escalado de EDPs es

1. Lograr variables dependientes e independientes adimensionales.
2. Lograr que los valores de estas variables se encuentren dentro del intervalo  $[0, 1]$ .
3. Lograr que el valor cada uno de los términos de la ecuación diferencial punto a punto estén dentro del intervalo  $[0, 1]$ , y si esto no se logra, que entonces no difieran en orden de magnitud.

Con la intención de fijar ideas, considere el siguiente problema de valores en el contorno: Dado  $\alpha : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ ; encuentre  $u$  tal que

$$(10.1) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(\alpha \nabla u) &= f & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Utilizando el proceso de escalado de propuesto en [36] tenemos:

1. **Identificar variables.** Tenemos una variable independiente  $\mathbf{x}$  y tres dependientes  $\alpha, f$  y  $u$ .
2. **Adimensionalizar variables.** Introduciendo el siguiente cambio de variables

$$(10.2) \quad \mathbf{x} = x_c \bar{\mathbf{x}}, \quad \alpha = \alpha_c \bar{\alpha}, \quad f = f_c \bar{f}, \quad u = u_c \bar{u},$$

donde  $x_c, \alpha_c, f_c$  y  $u_c$  son factores de escala, y  $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\alpha}, \bar{f}$  y  $\bar{u}$  son las variables adimensionalizadas.

3. **Adimensionalizar cada término de la EDP estimando escalas.** Primero introducimos los cambios de variables en la ecuación diferencial, teniendo en cuenta que  $\nabla(\cdot) = x_c^{-1} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}(\cdot)$  y  $\operatorname{div}(\cdot) = x_c^{-1} \operatorname{div}_{\bar{\mathbf{x}}}(\cdot)$ ,

$$(10.3) \quad \begin{aligned} - \left( \frac{u_c \alpha_c}{f_c x_c^2} \right) \operatorname{div}(\bar{\alpha} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{u}) &= \bar{f} & \text{en } \bar{\Omega}, \\ u_c \bar{u} &= 0 & \text{en } \partial \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Los factores de escalas de  $\alpha, \mathbf{x}$  y  $f$  deben ser seleccionados de tal manera que el valor absoluto de las variables escaladas estén dentro del intervalo  $[0, 1]$ . Para  $\alpha_c$  y  $f_c$  simplemente se puede seleccionar

$$(10.4) \quad \alpha_c = \max_{\Omega}(\alpha), \quad f_c = \max_{\Omega}(f).$$

Para  $x_c$  podemos tomar el radio de la menor esfera  $\mathcal{B}_R(\bar{\mathbf{x}})$  tal que  $\Omega \subset \mathcal{B}_R(\bar{\mathbf{x}})$ , esto es

$$(10.5) \quad L = \min\{R : \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_2 \leq R \quad \forall \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \Omega\},$$

pero podría utilizarse otro tipo de medida con tal que el valor absoluto de cada componente de la variable espacial varíe dentro del intervalo unitario.

En base a estas consideraciones  $\bar{f}$  varía entre 0 y 1, y por lo tanto podríamos ajustar  $u_c$  de tal manera que el lado izquierdo de ecuación (10.3) también lo haga, es decir

$$(10.6) \quad \frac{u_c \max_{\Omega}(\alpha)}{\max_{\Omega}(f)L^2} = 1, \implies u_c = \frac{\max_{\Omega}(f)L^2}{\max_{\Omega}(\alpha)}$$

y por ende

$$(10.7) \quad |\operatorname{div}(\bar{\alpha} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{u})| \in [0, 1].$$

Finalmente el problema de valores en el contorno queda: Dado  $\bar{\alpha} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ , encuentre  $\bar{u}$  tal que

$$(10.8) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(\bar{\alpha} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{u}) &= \bar{f} \quad \text{en } \bar{\Omega}, \\ \bar{u} &= 0 \quad \text{en } \partial \bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Como se puede observar, el sistema (10.1) posee 2 parámetros físicos que deben ser dados,  $\alpha_c$  y  $f_c$ , mientras que el sistema (10.8) no posee ninguno. Este es un resultado extraordinario, ya que experimentos numéricos empleando el modelo original requerirían simulaciones con distintos valores de los parámetros físicos, mientras que empleando el modelo escalado el experimento se limita a una sola simulación.

La forma débil del problema escalado anterior es

$$(10.9) \quad \bar{u} \in H_0^1(\bar{\Omega}) : \int_{\bar{\Omega}} \bar{\alpha} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{u} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \eta d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} \bar{f} \eta d\bar{\Omega} \quad \forall \eta \in H_0^1(\bar{\Omega}).$$

Hay que notar que no es necesario escalar la variación  $\eta$ , ya que el factor de escala aparecería a ambos lados de la ecuación anterior, y al ser todas las formas débiles lineales con respecto a las variaciones, este factor terminaría cancelándose.

Se puede obtener de manera alternativa la versión débil de la EDP partiendo de la forma no escalada de la siguiente manera. Para ello, y en base al cambio de variables en la coordenada espacial (10.2), consideremos la siguiente transformación entre los diferenciales de dominio

$$(10.10) \quad d\Omega = x_c^N d\bar{\Omega}.$$

Introduciendo esta expresión y los cambios de variables (10.2) en ambos lados de la forma débil del problema original tenemos

$$(10.11) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla \eta d\Omega &= \alpha_c u_c x_c^{N-2} \int_{\bar{\Omega}} \bar{\alpha} \nabla_{\bar{x}} \bar{u} \cdot \nabla_{\bar{x}} \eta d\bar{\Omega}, \\ \int_{\Omega} f \eta d\Omega &= f_c x_c^N \int_{\bar{\Omega}} \bar{f} \eta d\bar{\Omega}. \end{aligned}$$

Igualando ambos términos obtenemos

$$(10.12) \quad \frac{\alpha_c u_c}{f_c x_c^2} \int_{\bar{\Omega}} \bar{\alpha} \nabla_{\bar{x}} \bar{u} \cdot \nabla_{\bar{x}} \eta d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} \bar{f} \eta d\bar{\Omega}.$$

Si seleccionamos de la misma forma el parámetro de escala  $u_c$ , es decir, de tal manera que el factor del lado izquierdo sea unitario, abordamos nuevamente a la versión escalada de la forma débil

$$(10.13) \quad \int_{\bar{\Omega}} \bar{\alpha} \nabla_{\bar{x}} \bar{u} \cdot \nabla_{\bar{x}} \eta d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} \bar{f} \eta d\bar{\Omega},$$

y por lo tanto ambas metodologías son equivalentes. Ya que dentro de los problemas de optimización en general las restricciones de EDPs están expresadas en su forma débil, utilizaremos ésta última alternativa de escalado en vez de la primera, más conocida y difundida.

### 10.2.2 Escalado de Problemas de Optimización

Considere el siguiente problema de optimización topológica en  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ :

$$(10.14) \quad \begin{aligned} \min_{\chi \in \mathcal{X}_{ad}} \quad & \mathcal{J}(\chi, u) = \int_{\Omega} g_{\chi} u d\Omega, \\ \text{s.a.} \quad & u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha_{\chi} \nabla u \cdot \nabla \eta d\Omega = \int_{\Omega} f \eta d\Omega \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

con  $g_{\chi}$  definido por

$$(10.15) \quad g_{\chi} = g_0(\chi + \rho^g(1 - \chi)), \quad \text{con } \rho^g \in (0, 1), \quad g_0 > 0.$$

El estado adjunto asociado al problema de optimización es

$$(10.16) \quad v \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \alpha_{\chi} \nabla v \cdot \nabla \eta d\Omega = - \int_{\Omega} g_{\chi} \eta d\Omega \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega).$$

En este problema, la variable a optimizar es la función característica  $\chi \in \mathcal{X}_{ad}$ , con  $\mathcal{X}_{ad}$  un conjunto admisible de funciones características. La EDP presente en (10.14) es la

misma que la que se ha escalado en la sección anterior, con la diferencia en que se ha cambiado la función que opera en el término principal por

$$(10.17) \quad \alpha_\chi = \alpha_0(\chi + \rho^\alpha(1 - \chi)),$$

con  $\rho^\alpha \in (0, 1)$  y  $\alpha_0 > 0$ .

Tenemos tres metas que perseguir mediante el proceso de escalado de un problema de optimización, a saber:

1. Lograr que la función de costo escalada sea del orden de la unidad y además adimensional.
2. Lograr expresiones adimensionales y del orden de la unidad de las restricciones. En particular con las restricciones EDP, es útil que la solución de éstas sea de magnitud aproximadamente unitaria punto a punto.
3. Lograr que las sensibilidades estén en el orden de la unidad, esto es, que la solución del estado adjunto sea de magnitud unitaria punto a punto.

La variable a optimizar  $\chi$  ya es del orden de la unidad por definición de función característica, y por ende no es necesario escalarla. En base a los conceptos ya elaborados anteriormente, introducimos en (10.14) y (10.16) los siguientes cambios de variables

$$(10.18) \quad \mathbf{x} = x_c \bar{\mathbf{x}} \quad g_\chi = g_c \bar{g}_\chi, \quad \alpha_\chi = \alpha_c \bar{\alpha}_\chi, \quad f = f_c \bar{f}, \quad u = u_c \bar{u}, \quad v = v_c \bar{v},$$

obteniendo para la función de costo

$$(10.19) \quad \mathcal{J}(\chi, \bar{u}) = g_c u_c x_c^N \int_{\bar{\Omega}} \bar{g}_\chi \bar{u} d\bar{\Omega},$$

y para los problemas directos y adjuntos

$$(10.20) \quad \bar{u} \in H_0^1(\bar{\Omega}) : \alpha_c u_c x_c^{N-2} \int_{\bar{\Omega}} \bar{\alpha}_\chi \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{u} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \eta d\bar{\Omega} = f_c x_c^N \int_{\bar{\Omega}} \bar{f} \eta d\bar{\Omega} \quad \forall \eta \in H_0^1(\bar{\Omega})$$

$$(10.21) \quad \bar{v} \in H_0^1(\bar{\Omega}) : \alpha_c v_c x_c^{N-2} \int_{\bar{\Omega}} \bar{\alpha}_\chi \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{v} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \eta d\bar{\Omega} = -g_c x_c^N \int_{\bar{\Omega}} \bar{g}_\chi \eta d\bar{\Omega}, \quad \forall \eta \in H_0^1(\bar{\Omega}).$$

Realizando la siguiente selección de factores de escala

$$(10.22) \quad x_c = L, \quad g_c = g; \quad \alpha_c = \alpha; \quad f_c = \max_{\Omega}(f), \quad u_c = \frac{\max_{\Omega}(f)L^2}{\alpha}, \quad v_c = \frac{gL^2}{\alpha},$$

con  $L$  dado por (10.5),  $\bar{g}_\chi = (\chi + \rho^g(1 - \chi))$  y  $\bar{\alpha}_\chi = (\chi + \rho^\alpha(1 - \chi))$ , obtenemos el siguiente problema de optimización escalado

$$(10.23) \quad \begin{aligned} \min_{\chi \in \mathcal{X}_{ad}} \quad & \bar{\mathcal{J}}(\chi, \bar{u}) = \int_{\bar{\Omega}} \bar{g}_\chi(\rho^g) \bar{u} d\bar{\Omega}, \\ \text{s.a.} \quad & \bar{u} \in H_0^1(\bar{\Omega}) : \int_{\bar{\Omega}} \bar{\alpha}_\chi(\rho^\alpha) \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{u} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \eta d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Omega}} \bar{f} \eta d\bar{\Omega} \quad \forall \eta \in H_0^1(\bar{\Omega}), \end{aligned}$$

con

$$(10.24) \quad \bar{v} \in H_0^1(\bar{\Omega}) : \int_{\bar{\Omega}} \bar{\alpha}_\chi(\rho^\alpha) \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{v} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \eta d\bar{\Omega} = - \int_{\bar{\Omega}} \bar{g}_\chi \eta d\bar{\Omega} \quad \forall \eta \in H_0^1(\bar{\Omega}),$$

en donde se ha dejado indicado de manera explícita la dependencia del problema de optimización y del estado adjunto con respecto a los dos únicos parámetros adimensionales  $\rho^g$  y  $\rho^\alpha$ .

En base a un análisis similar al realizado en la Sección 10.2.1, los estados directos y adjuntos son unitarios. Por otro lado, la función de costo escalada es adimensional y su valor absoluto ronda la unidad. Esto se puede mostrar primero teniendo en cuenta que  $0 \leq \bar{g}_\chi \leq 1$ , al igual que  $u_c$  y  $v_c$ , luego por el teorema de valor medio del cálculo integral tenemos

$$(10.25) \quad \bar{\mathcal{J}}(\chi, \bar{u}) = \int_{\bar{\Omega}} \bar{g}_\chi \bar{u} d\bar{\Omega} = \bar{g}_\chi(\tilde{\mathbf{x}}_1) \bar{u}(\tilde{\mathbf{x}}_1) |\bar{\Omega}|,$$

donde  $|\bar{\Omega}|$  es la medida de la región  $\bar{\Omega}$ . Debido al cambio de transformación introducido para la variable  $\mathbf{x} = L\bar{\mathbf{x}}$ , se puede mostrar que  $\bar{\Omega} \subseteq \mathcal{B}_1$ , con  $\mathcal{B}_1$  una esfera de radio unitaria. Entonces

$$(10.26) \quad |\bar{\mathcal{J}}(\chi, \bar{u})| \leq |\bar{g}_\chi(\tilde{\mathbf{x}}_1)| |\bar{u}(\tilde{\mathbf{x}}_1)| |\mathcal{B}_1| = O(1),$$

con  $O(1)$  significando que el resultado es del orden de la unidad, y con lo cual los objetivos del proceso escalado se han cumplido para este caso.

El procedimiento aquí aplicado será utilizado en la siguiente sección para demostrar un resultado clásico de la literatura de optimización estructural.

### 10.3 Un resultado clásico

Considere el siguiente problema de optimización en  $\mathbb{R}^N$ , con  $N = 2, 3$ .

$$(10.27) \quad \begin{aligned} \min_{\chi \in \mathcal{X}_{ad}} \quad & \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_J} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \\ \text{s.a.} \quad & \int_{\Omega} \chi d\Omega \leq |\Omega|^*, \\ & \mathbf{u} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} : \int_{\Omega} \mathbb{C}_\chi \nabla^s \mathbf{u} : \nabla^s \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Gamma_J} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

con

$$\mathcal{V}_{\mathbf{u}} = \{\boldsymbol{\eta} \in H^1(\Omega)^N : \boldsymbol{\eta} = 0 \text{ en } \Gamma_{\mathbf{u}}\}.$$

El problema (10.27) es un problema clásico de síntesis de estructuras. Para elasticidad lineal isotrópica tenemos que

$$(10.28) \quad \mathbb{C} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \quad \text{con} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

siendo  $E$  el módulo de Young y  $\nu$  el coeficiente de Poisson. La expresión de  $\lambda$  en la ecuación anterior es válida para elasticidad 3D o deformación plana, en caso que se considere tensión plana se debe reemplazar por el valor  $\lambda = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}$ . La función de costo utilizada aquí se la conoce como *compliance functional* y mide el trabajo realizado por la carga superficial externa  $\mathbf{t}$  sobre la estructura. La minimización de este funcional lleva a obtener estructuras lo más rígidas posibles con una utilización máxima de material dada por  $|\Omega|^\star$ .

Un resultado ampliamente conocido es que el minimizador del problema (10.27) (topología óptima) resulta independiente de la magnitud de la carga  $\mathbf{t}$  y del valor del módulo elástico del material de la estructura  $E$ . Éste hecho solo se ha comprobado numéricamente y hasta el momento, ninguna demostración formal de éste fenómeno ha sido presentada. El siguiente teorema demuestra este comportamiento bajo ciertas condiciones.

**Teorema 10.1.** *Sea el problema de optimización topológica (10.27), tal que  $\mathbf{t} = t_c \bar{\mathbf{t}}$  con  $\bar{\mathbf{t}} \in L^\infty(\Omega)^N$ ,  $\mathbb{C}_\chi$  dado por (9.15), y  $\mathbb{C}$  y  $\mu$  dados por (10.28). Luego, si  $\chi_{opt}$  es un minimizador local de este problema, entonces éste es minimizador para todo  $t_c \in \mathbb{R}$  y para todo  $E > 0$ . Más aún, el minimizador del problema depende solamente del valor de  $\nu$ .*

**Prueba.** Introducimos los siguientes cambios de variables

$$(10.29) \quad \mathbf{x} = x_c \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u} = u_c \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{t} = t_c \bar{\mathbf{t}}.$$

donde  $\bar{\mathbf{x}}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  y  $\bar{\mathbf{t}}$  son las variables adimensionalizadas, y  $x_c, u_c$  y  $t_c$  son los factores de escala.

En base a la nueva variable espacial adimensionalizada  $\bar{\mathbf{x}}$ , se redefinen los operadores diferenciales

$$(10.30) \quad d\Gamma = x_c^{(N-1)} d\bar{\Gamma}, \quad d\Omega = x_c^N d\bar{\Omega}, \quad \nabla(\cdot) = x_c^{-1} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}(\cdot),$$

Introduciendo los cambios de variables en la EDP del problema de optimización y sacando factor común  $\mu$  en el lado izquierdo obtenemos

$$(10.31) \quad \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} : \frac{u_c \mu}{x_c t_c} \int_{\bar{\Omega}} \bar{\mathbb{C}}_{\chi} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^s \bar{\mathbf{u}} : \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^s \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Gamma}_J} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} d\bar{\Gamma} \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}},$$

con

$$(10.32) \quad \bar{\mathbb{C}}_{\chi} = \bar{\mathbb{C}}(\chi + \rho^C(1 - \chi)), \quad \bar{\mathbb{C}} = 2\mathbb{I} + \pi_1(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}),$$

siendo

$$(10.33) \quad \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}$$

para elasticidad 3D o deformación plana y

$$(10.34) \quad \pi_1 = \frac{2\nu}{1 - \nu},$$

para tensión plana.

Luego, seleccionando el factor de escala  $u_c$  de tal forma que  $\frac{u_c \mu}{x_c t_c} = 1$ , esto es

$$(10.35) \quad u_c = \frac{x_c t_c}{\mu},$$

obtenemos la versión escalada de la EDP

$$(10.36) \quad \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} : \int_{\bar{\Omega}} \bar{\mathbb{C}}_{\chi}(\rho^C, \pi_1) \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^s \bar{\mathbf{u}} : \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^s \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Gamma}_J} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} d\bar{\Gamma} \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}},$$

donde se ha denotado de manera explícita la dependencia de  $\bar{\mathbb{C}}_{\chi}$  con los parámetros adimensionales  $\rho^C$  y  $\pi_1$ . Por otro lado, dividiendo ambos lados de la restricción de volumen por el volumen total del dominio  $|\Omega|$  obtenemos la siguiente restricción adimensionalizada

$$(10.37) \quad v_f \leq v_f^*,$$

donde  $v_f = \frac{|\Omega_M|}{|\Omega|}$  es la fracción de volumen y  $v_f^* = \frac{|\Omega|^*}{|\Omega|}$  es la fracción de volumen máxima.

Introduciendo los cambios de variable en la función de costo obtenemos

$$(10.38) \quad \mathcal{J}(\mathbf{u}) = t_c u_c x_c^{N-1} \int_{\bar{\Gamma}_J} \bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\bar{\Gamma} = \frac{x_c^N t_c^2}{\mu} \int_{\bar{\Gamma}_J} \bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\bar{\Gamma}.$$

Si seleccionamos los siguientes valores de los factores de escala

$$(10.39) \quad t_c = \|\mathbf{t}\|_{L^\infty(\Gamma_J)^N}, \quad x_c = L,$$

con  $L$  siendo el radio de la bola de menor tamaño que contiene a  $\Omega$ . entonces el factor  $\frac{x_c^N t_c^2}{\mu}$  es no negativo. Como el minimizador de una función no se ve afectado si se multiplica a esta por una constante no negativa, luego el minimizador de  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  es el mismo que el de la función escalada  $\bar{\mathcal{J}}$ , luego el problema de optimización (10.27) es equivalente al siguiente

$$(10.40) \quad \begin{aligned} \min_{\chi \in \mathcal{X}_{ad}} \quad & \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}}) = \int_{\bar{\Gamma}_J} \bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\bar{\Gamma}, \\ \text{s.a.} \quad & v_f \leq v_f^*, \\ & \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} : \int_{\bar{\Omega}} \bar{\mathbb{C}}_{\chi}(\rho^{\mathbb{C}}, \pi_1) \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^s \bar{\mathbf{u}} : \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^s \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} d\bar{\Omega} = \int_{\bar{\Gamma}_J} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} d\bar{\Gamma} \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

Como podemos ver, el problema de optimización (10.40) solo posee 3 parámetros adimensionales a definir:  $\rho^{\mathbb{C}}, \pi_1$  y  $v_f^*$ , y en ninguno de ellos interviene el valor del módulo elástico  $E$ , ni la magnitud de la carga superficial  $t_c$ . Si el problema de optimización tiene alguna solución, llámese  $\chi_{opt}$ , entonces esta no cambiará si se modifica  $E$  y  $t_c$ , solo lo hará con el valor de  $\nu$  a través de  $\pi_1$ . ■

## 10.4 Escalado del problema de diseño óptimo de actuadores TEM

En esta sección se utilizarán los procedimientos explicados en las secciones 10.2.1 y 10.2.2 para obtener la versión escalada del problema de optimización (9.1). Comenzamos introduciendo los siguientes cambios de variables

$$(10.41) \quad \begin{aligned} \mathbf{x} &= x_c \bar{\mathbf{x}}, & s_{\chi} &= s_c \bar{s}_{\chi}, & k_{\chi} &= k_c \bar{k}_{\chi}, & \mathbb{C}_{\chi} &= \mu_c \bar{\mathbb{C}}_{\chi} & \alpha_{\chi} &= \alpha_c \bar{\alpha}_{\chi} & k_s &= k_c \bar{k}_s \\ \phi &= \phi_c \bar{\phi}, & \boldsymbol{\theta} &= \theta_c \bar{\boldsymbol{\theta}}, & \mathbf{u} &= u_c \bar{\mathbf{u}}, & \phi^a &= \phi_c^a \bar{\phi}^a, & \boldsymbol{\theta}^a &= \theta_c^a \bar{\boldsymbol{\theta}}^a, & \mathbf{u}^a &= u_c^a \bar{\mathbf{u}}^a. \end{aligned}$$

Luego, consideremos la forma bilineal del problema eléctrico  $a_{\chi}$  e introduzcamos los cambios de variables correspondientes

$$(10.42) \quad a_{\chi}(\phi, \eta_{\phi}) = s_c \phi_c \int_{\bar{\Omega}} \bar{s}_{\chi} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\phi} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \eta_{\phi} d\bar{\Omega}.$$

Podemos llamar a la forma bilineal del lado derecho de la expresión anterior de la siguiente manera

$$(10.43) \quad \bar{a}_{\chi}(\phi, \eta_{\phi}) = \int_{\bar{\Omega}} \bar{s}_{\chi} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\phi} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \eta_{\phi} d\bar{\Omega},$$

donde  $\bar{a}_{\chi}$  es la versión escalada de la forma bilineal. Luego vale la siguiente expresión

$$(10.44) \quad a_{\chi}(\phi, \eta_{\phi}) = a_c \phi_c \bar{a}_{\chi}(\bar{\phi}, \eta_{\phi}).$$

Aquí,  $a_c$  es el factor de escala de la forma bilineal, que para esta situación es  $a_c = s_c$ . Podemos expresar el sistema de EDP del problema directo de manera similar de la siguiente forma

$$(10.45) \quad \begin{aligned} \bar{\phi} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi : a_c \phi_c \bar{a}_\chi(\bar{\phi}, \eta_\phi) &= 0 \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi, \\ \bar{\theta} \in \mathcal{V}_\theta : \bar{b}_\chi(\bar{\theta}, \eta_\theta) &= \frac{N_c \phi_c^2}{b_c \theta_c} \bar{N}_\chi(\bar{\phi}, \eta_\theta) \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta, \\ \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_\mathbf{u} : \bar{c}_{1\chi}(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) + \frac{c_{kc}}{c_{1c}} \bar{c}_k(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) &= \frac{c_{2c} \theta_c}{c_{1c} u_c} \bar{c}_{2\chi}(\bar{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u} \in \mathcal{V}_\mathbf{u}, \end{aligned}$$

con

$$(10.46) \quad \bar{\mathcal{U}}_\phi = \{ \eta \in H^1(\bar{\Omega}) : \eta = \bar{\phi}_\Gamma \text{ on } \bar{\Gamma}_\phi \},$$

donde

$$(10.47) \quad b_c = k_c, \quad N_c = s_c, \quad c_{1c} = \mu_c, \quad c_{2c} = \alpha_c \mu_c x_c, \quad c_{kc} = k_{sc} x_c.$$

Podemos seleccionar  $\theta_c$  y  $u_c$  de tal forma que  $\frac{N_c \phi_c^2}{b_c \theta_c} = 1$  y  $\frac{c_{2c} \theta_c}{c_{1c} u_c} = 1$ , entonces

$$(10.48) \quad \theta_c = \frac{s_c \phi_c^2}{k_c}, \quad u_c = \alpha_c \theta_c x_c.$$

Si seleccionamos los siguientes valores para los factores de escala

$$(10.49) \quad x_c = L, \quad s_c = s, \quad k_c = k, \quad \mu_c = \mu, \quad \alpha_c = \alpha, \quad k_{sc} = k_s$$

con  $L$  el radio de la esfera  $\mathcal{B}_R$  de menor diámetro que contenga al dominio  $\Omega$ , ver (10.5), entonces las propiedades constitutivas escaladas quedan

$$(10.50) \quad \begin{aligned} \bar{s}_\chi &= \chi + \rho^s(1 - \chi), \\ \bar{k}_\chi &= \chi + \rho^k(1 - \chi), \\ \bar{\mathbb{C}}_\chi &= \bar{\mathbb{C}}(\chi + \rho^{\mathbb{C}}(1 - \chi)), \quad \text{con } \bar{\mathbb{C}} = 2\mathbb{I} + \pi_1(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \\ \bar{\alpha}_\chi &= \chi + \rho^\alpha(1 - \chi), \\ \bar{k}_s &= 1. \end{aligned}$$

con

$$(10.51) \quad \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu},$$

y el sistema escalado de EDP es

$$(10.52) \quad \begin{aligned} \bar{\phi} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi : \bar{a}_\chi(\bar{\phi}, \eta_\phi) &= 0 \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi, \\ \bar{\theta} \in \mathcal{V}_\theta : \bar{b}_\chi(\bar{\theta}, \eta_\theta) &= \bar{N}_\chi(\bar{\phi}, \eta_\theta) \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta, \\ \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_\mathbf{u} : \bar{c}_{1\chi}(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) + \pi_2 \bar{c}_k(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) &= \bar{c}_{2\chi}(\bar{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u} \in \mathcal{V}_\mathbf{u}, \end{aligned}$$

donde

$$(10.53) \quad \pi_2 = \frac{c_{kc}}{c_{1c}} = \frac{k_s L}{\mu}.$$

Note que el sistema (10.52) depende de solamente dos parámetros adimensionales,  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , donde  $\pi_1$  representa el cociente entre los parámetros de Lamé del material de la estructura flexible del actuador y  $\pi_2$  indica cuán rígida es la pieza de trabajo (materializada por el resorte distribuido en la frontera  $\Gamma_J$ ), con respecto al material de fabricación del actuador. Queda por determinar el factor de escala para la solución eléctrica, el cual se obtiene a partir de la condición de borde de la forma

$$(10.54) \quad \phi_c = \max_{\Gamma_J} (|\phi_\Gamma|).$$

La función de costo  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  en (9.1) se la puede escalar siguiendo el mismo esquema

$$(10.55) \quad \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \mathcal{J}_c u_c \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}}), \quad \text{con } \mathcal{J}_c = L, \quad \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}}) = - \int_{\Gamma_J} \hat{\mathbf{e}} \cdot \bar{\mathbf{u}}.$$

Luego teniendo en cuenta que

$$(10.56) \quad \langle \partial_{\mathbf{u}} \mathcal{J}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \rangle = \langle \partial_{\mathbf{u}} (\mathcal{J}_c u_c \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}})), \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \rangle = \mathcal{J}_c u_c \langle \partial_{\bar{\mathbf{u}}} \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}}) \partial_{\bar{\mathbf{u}}} \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \rangle,$$

en donde  $\partial_{\bar{\mathbf{u}}} \mathbf{u}$  es el jacobiano de la transformación entre  $\mathbf{u}$  y  $\bar{\mathbf{u}}$ , es decir  $\partial_{\bar{\mathbf{u}}} \mathbf{u} = 1/u_c$ , entonces

$$(10.57) \quad \langle \partial_{\mathbf{u}} \mathcal{J}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \rangle = \mathcal{J}_c \langle \partial_{\bar{\mathbf{u}}} \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \rangle.$$

En base a estas expresiones, obtenemos para el sistema adjunto

$$(10.58) \quad \begin{aligned} \bar{\phi} \in \mathcal{V}_\phi : \bar{a}_\chi(\eta_\phi, \bar{\phi}^a) &= \frac{d_c \phi_c \theta_c^a}{a_c \phi_c^a} \bar{d}_\chi(\bar{\phi}, \bar{\theta}^a, \eta_\phi) \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi, \\ \bar{\theta} \in \mathcal{V}_\theta : \bar{b}_\chi(\eta_\theta, \bar{\theta}^a) &= \frac{c_{2c} u_c^a}{b_c \theta_c^a} \bar{c}_{2\chi}(\eta_\theta, \bar{\mathbf{u}}^a) \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta, \\ \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} : \bar{c}_{1\chi}(\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}^a) + \frac{c_k}{c_{1c}} \bar{c}_k(\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}^a) &= - \frac{\mathcal{J}_c}{c_{1c} u_c^a} \langle \partial_{\bar{\mathbf{u}}} \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Seleccionamos  $\phi_c^a$ ,  $\theta_c^a$  y  $u_c^a$  de tal manera que los cocientes  $\frac{\mathcal{J}_c}{c_{1c} u_c^a}$ ,  $\frac{c_{2c} u_c^a}{b_c \theta_c^a}$  y  $\frac{d_c \phi_c \theta_c^a}{a_c \phi_c^a}$  sean unitarios obteniendo

$$(10.59) \quad u_c^a = \frac{L}{\mu}, \quad \theta_c^a = \frac{\alpha_c \mu u_c^a L}{k}, \quad \phi_c^a = \theta_c^a \phi_c.$$

y por lo tanto el sistema adjunto queda

$$(10.60) \quad \begin{aligned} \bar{\phi}^a \in \mathcal{V}_\phi : \bar{a}_\chi(\eta_\phi, \bar{\phi}^a) &= \bar{d}_\chi(\bar{\phi}, \bar{\theta}^a, \eta_\phi) \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi, \\ \bar{\theta} \in \mathcal{V}_\theta : \bar{b}_\chi(\eta_\theta, \bar{\theta}^a) &= \bar{c}_{2\chi}(\eta_\theta, \bar{\mathbf{u}}^a) \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta, \\ \bar{\mathbf{u}}^a \in \mathcal{V}_\mathbf{u} : \bar{c}_{1\chi}(\boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}^a) + \pi_2 \bar{c}_k(\boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}^a) &= -\langle \partial_{\bar{\mathbf{u}}} \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u} \in \mathcal{V}_\mathbf{u}. \end{aligned}$$

La restricción de volumen se puede tratar al igual que en la Sección 10.3, ecuación (10.37). Según (10.55) y (10.48),  $\mathcal{J}_c u_c$  es una constante positiva, entonces el minimizador de  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  y de  $\bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}})$  es el mismo, y por lo tanto utilizamos la versión escalada de manera directa como función de costo. En base a estas consideraciones podemos establecer finalmente el problema de diseño óptimo de actuadores TEM de la siguiente manera

$$(10.61a) \quad \min_{\chi \in \mathcal{X}_{ad}} \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}}) = - \int_{\Gamma_J} \hat{\mathbf{e}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\bar{\Gamma}$$

$$(10.61b) \quad \text{s.a.} \quad v_f = v_f^*,$$

$$(10.61c) \quad \begin{cases} \bar{\phi} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi : \bar{a}_\chi(\bar{\phi}, \eta_\phi) = 0 \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi, \\ \bar{\theta} \in \mathcal{V}_\theta : \bar{b}_\chi(\bar{\theta}, \eta_\theta) = \bar{N}_\chi(\bar{\phi}, \eta_\theta) \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta, \\ \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_\mathbf{u} : \bar{c}_{1\chi}(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) + \pi_2 \bar{c}_k(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) = \bar{c}_{2\chi}(\bar{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u} \in \mathcal{V}_\mathbf{u}, \end{cases}$$

Por otra parte, la versión escalada del funcional (9.19) diseñado para disminuir los movimientos parásitos es

$$(10.62) \quad \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}}) = - \int_{\Gamma_J} \hat{\mathbf{e}} \cdot \bar{\mathbf{u}} d\bar{\Gamma} + \pi_3 \int_{\Gamma_J} \hat{\mathbf{e}}_\perp \cdot \bar{\mathbf{u}} d\bar{\Gamma},$$

con  $\pi_3$  un parámetro de penalización.

**Observación 10.1.** *Note que los parámetros adimensionales  $\pi_1$  y  $\pi_2$  que figuran en el problema de optimización (10.61), con función de costo (10.61a) o (10.62), son independientes de la magnitud de la diferencia de potencial  $\phi_c$  impuesta en  $\Gamma_\phi$ . Por lo tanto, la topología óptima  $\chi_{opt}$  solución de (10.61) será independiente del valor de  $\phi_c$ .*

Como se ya lo ha mencionado anteriormente, el tratamiento de las restricciones de volumen se realizará mediante el método del lagrangeano aumentado. Por lo tanto, el problema (10.61) se reescribe en términos de la función lagrangiano aumentado de la siguiente manera

$$(10.63a) \quad \min_{\chi \in \mathcal{X}_{ad}} \bar{\mathcal{A}}_\chi(\bar{\mathbf{u}}, \lambda_1) = \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}}) + \lambda_1 \bar{c}_\chi + \frac{\lambda_2}{2} \bar{c}_\chi^2,$$

$$(10.63b) \quad \begin{cases} \bar{\phi} \in \bar{\mathcal{U}}_\phi : \bar{a}_\chi(\bar{\phi}, \eta_\phi) = 0 \quad \forall \eta_\phi \in \mathcal{V}_\phi, \\ \bar{\theta} \in \mathcal{V}_\theta : \bar{b}_\chi(\bar{\theta}, \eta_\theta) = \bar{N}_\chi(\bar{\phi}, \eta_\theta) \quad \forall \eta_\theta \in \mathcal{V}_\theta, \\ \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_\mathbf{u} : \bar{c}_{1\chi}(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) + \pi_2 \bar{c}_k(\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) = \bar{c}_{2\chi}(\bar{\theta}, \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}_\mathbf{u} \in \mathcal{V}_\mathbf{u}, \end{cases}$$

donde

$$(10.64) \quad \bar{c}_\chi = \frac{v_f}{v_f^*} - 1,$$

La derivada topológica de este problema escalado es

$$(10.65) \quad \mathcal{T}_D \bar{\mathcal{A}}_\chi(\bar{\mathbf{x}}) = \mathcal{T}_D \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{x}}) + \left( \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} \bar{c}_\chi \right) \mathcal{T}_D \bar{c}_\chi(\bar{\mathbf{x}}), \quad \text{c.t.p. de } \Omega$$

donde

$$(10.66a) \quad \mathcal{T}_D \bar{c}(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \mathcal{T}_D^{M \rightarrow V} \bar{c}(\bar{\mathbf{x}}) + (1 - \chi(\mathbf{x})) \mathcal{T}_D^{V \rightarrow M} \bar{c}(\bar{\mathbf{x}}),$$

$$(10.66b) \quad \mathcal{T}_D^{M \rightarrow V} \bar{c}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{v_f^*} \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Omega}_M,$$

$$(10.66c) \quad \mathcal{T}_D^{V \rightarrow M} \bar{c}(\mathbf{x}) = \frac{1}{v_f^*} \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Omega}_V.$$

y, de manera similar,

$$(10.67) \quad \mathcal{T}_D \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{x}}) = \chi(\mathbf{x}) \mathcal{T}_D^{M \rightarrow V} \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{x}}) + (1 - \chi(\mathbf{x})) \mathcal{T}_D^{V \rightarrow M} \bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{x}}).$$

La derivada topológica de  $\bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}})$  para un hueco es

$$(10.68) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_D \bar{\mathcal{J}}^{M \rightarrow V}(\bar{\mathbf{x}}) &= \mathbf{P}_s^{M \rightarrow V} \bar{\mathbf{j}}_\chi(\bar{\phi})(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\phi}^a(\bar{\mathbf{x}}) + \beta_Q^{M \rightarrow V} \bar{Q}_\chi(\bar{\phi})(\bar{\mathbf{x}}) \bar{\theta}^a(\bar{\mathbf{x}}) \\ &+ \mathbf{P}_k^{M \rightarrow V} \bar{\mathbf{q}}_\chi(\bar{\theta})(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\theta}^a(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbb{P}_\sigma^{M \rightarrow V} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\chi(\bar{\mathbf{u}})(\bar{\mathbf{x}}) : \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^s \bar{\mathbf{u}}^a(\bar{\mathbf{x}}) \\ &+ \mathbb{P}_B^{M \rightarrow V} \bar{\mathbf{B}}_\chi(\bar{\theta})(\bar{\mathbf{x}}) : \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^s \bar{\mathbf{u}}^a(\bar{\mathbf{x}}), \quad \text{c.t.p. de } \Omega. \end{aligned}$$

y la derivada para una isla  $\mathcal{T}_D \bar{\mathcal{J}}^{V \rightarrow M}(\bar{\mathbf{x}})$  se obtiene de manera similar (ver Sección 9.3).

El resto de las cantidades que figuran en (10.68) se definen a continuación.

$$(10.69) \quad \bar{\mathbf{j}}_\chi(\phi) = -\bar{s}_\chi \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\phi},$$

$$(10.70) \quad \bar{\mathbf{q}}_\chi(\theta) = -\bar{k}_\chi \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\theta},$$

$$(10.71) \quad \bar{Q}_\chi(\theta) = \bar{s}_\chi \|\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\phi}\|_2^2,$$

$$(10.72) \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\chi(\mathbf{u}) = \bar{\mathbb{C}}_\chi \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}^s \bar{\mathbf{u}},$$

$$(10.73) \quad \bar{\mathbf{B}}_\chi(\theta) = \bar{\alpha}_\chi \bar{\mathbb{C}}_\chi \bar{\mathbf{I}} \bar{\theta}.$$

La expresión (10.65) es válida tanto para  $\bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}})$  dado por (10.61a) como por (10.62).

## Algoritmo de optimización topológica

### 11.1 Algoritmo SLERP

En esta sección se presenta el algoritmo de optimización topológica basado en derivadas topológicas y en la representación de dominio mediante funciones level-set. Propuesto por Amstutz and Andrä en [5], este consiste básicamente en buscar una condición de optimalidad para el problema de minimización (10.61) escrito en términos de la derivada topológica y la función level-set. La eficiencia de este algoritmo se demuestra en varias aplicaciones tales como en problemas de flujo a través de medios porosos [5], optimización estructural con restricción de tensión [8, 10] y optimización de microestructuras elásticas [9]. En las aplicaciones anteriormente nombradas solo se busca la topología óptima considerando un sólo tipo de material, pero también se han implementado versiones que contemplen el uso de múltiples materiales [26, 41]. Cabe señalar que, a diferencia de los métodos de optimización topológica encontrados en la literatura, la derivada topológica no requiere un modelo material basado en densidades intermedias. Esta característica es crucial en problemas con restricciones de tensión ya que los esquemas de interpolación son innecesarios. De esta forma, naturalmente, se evitan las dificultades derivadas de los procedimientos basados en densidades intermedias tal como SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). Además, la derivada topológica tiene la ventaja de proporcionar una fórmula analítica para la sensibilidad topológica que permite obtener la topología óptima en pocas iteraciones. Por lo tanto, el algoritmo de optimización topológica es considerablemente eficiente, con implementación computacional simple y

requiere un número mínimo de parámetros algorítmicos definidos por el usuario, como se verá más adelante.

Tal como se ha mencionado, este algoritmo utiliza el método de representación de dominio mediante funciones level-set. Éste método consiste en lograr la representación de las distintas regiones de forma implícita a partir de los valores de una función  $\psi \in L^2(\Omega)$ , conocida como función level-set. La representación de las regiones del dominio se logra definiendo la función característica en términos de la función level-set de la siguiente manera

$$(11.1) \quad \chi(\mathbf{x}) = -H(\psi(\mathbf{x})),$$

donde  $H$  es la función Heaviside. En otras palabras, se define la región material  $\Omega_M$  donde la función  $\psi(\mathbf{x}) < 0$  y  $\Omega_V$  donde  $\psi(\mathbf{x}) > 0$ .

Si  $\mathcal{J}_\chi(p)$  es la función a minimizar con  $p$  solución de una EDP, entonces en el minimizador, la introducción de una perturbación en el dominio debe hacer crecer la función de costo, es decir

$$(11.2) \quad \mathcal{T}_D \mathcal{J}_\chi(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Esta es la condición de optimalidad suficiente para la clase de perturbaciones de dominio presentadas según [5]. Con el objeto de escribir la condición anterior en términos de la función level-set, se define el gradiente topológico  $g(\mathbf{x})$  de la siguiente manera

$$(11.3) \quad g(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\mathcal{T}_D^{M \rightarrow V} \mathcal{J}_\chi(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} : \psi(\mathbf{x}) < 0, \\ \mathcal{T}_D^{V \rightarrow M} \mathcal{J}_\chi(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} : \psi(\mathbf{x}) > 0. \end{cases}$$

Luego, en el óptimo, según (11.2) tendremos que

$$(11.4) \quad \begin{cases} g(\mathbf{x}) < 0 & \forall \mathbf{x} : \psi(\mathbf{x}) < 0, \\ g(\mathbf{x}) > 0 & \forall \mathbf{x} : \psi(\mathbf{x}) > 0. \end{cases}$$

y por lo tanto las funciones  $g$  y  $\psi$  serán paralelas en un sentido  $L^2$ , la cual es una manera alternativa de condición de optimalidad.

La estrategia de los métodos level-set para actualizar la función level-set se basa en la utilización de ecuaciones de evolución, normalmente la ecuación de Hamilton-Jacobi. En particular, este algoritmo emplea la siguiente

$$(11.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = P_\psi^\perp(g), \\ \psi|_{t=0} \in \mathcal{S}, \end{cases}$$

con  $t$  siendo un pseudo-tiempo,  $\mathcal{S}$  la esfera unitaria

$$(11.6) \quad \mathcal{S} = \{\varphi \in L^2(\Omega) : \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1\},$$

y  $P_\psi^\perp(g)$ , la proyección de  $g$  sobre una dirección ortogonal a  $\psi$  dada por

$$(11.7) \quad P_\psi^\perp(g) = g - \frac{(g, \psi)_{L^2(\Omega)}}{\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2} \psi$$

La configuración óptima se alcanza cuando la topología deja de cambiar, es decir cuando  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ , y según (11.5),  $P_\psi^\perp(g) = 0$ , implicando que en el óptimo la función level-set y el gradiente topológico son paralelos, tal como lo requiere la condición (11.4).

Para verificar numéricamente y de manera eficiente esta condición, se evalúa el ángulo  $\vartheta$  que existe entre estas dos funciones a partir de

$$(11.8) \quad (g, \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} g\psi = \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \cos(\vartheta),$$

y luego despejando para  $\vartheta$

$$(11.9) \quad \vartheta = \arccos\left(\frac{(g, \psi)}{\|\psi\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2}}\right).$$

Entonces, desde el punto de vista analítico, el óptimo se alcanza cuando  $\vartheta = 0$ .

A continuación se detalla la secuencia lógica del algoritmo. Primero se inicializa con una level-set inicial  $\psi_0 \in \mathcal{S}$ . Luego para una iteración genérica  $i$  se calcula el gradiente topológico  $g$ . A continuación se actualiza la función level-set utilizando la siguiente expresión

$$(11.10) \quad \psi_{i+1} = \frac{1}{\sin(\vartheta_i)} \left[ \sin((1 - \kappa)\vartheta_i) \psi_i + \sin(\kappa\vartheta_i) \frac{g_i}{\|g_i\|_{L^2(\Omega)}} \right],$$

donde  $\vartheta_i$  es el ángulo formado entre  $g_i$  y  $\psi_i$ . El esquema de actualización anterior puede ser obtenido integrando la ecuación (11.5) mediante un esquema de Euler en la esfera unitaria. Es de aquí que el algoritmo adquiere el nombre SLERP (*spherical linear interpolation*), ya que el esquema de integración anterior puede ser interpretado como una interpolación a lo largo de la geodésica dentro de la esfera unitaria  $\mathcal{S}$  que une los elementos  $\psi_i$  y  $P_\psi^\perp(g)$ . El parámetro  $\kappa$  representa un paso determinado por un proceso de búsqueda lineal. Este paso, inicialmente se setea igual a 1 y se lo reduce de acuerdo a  $\kappa \leftarrow \kappa/2$  hasta que la condición  $\mathcal{J}_{\chi_{i+1}}(p_{i+1}) \leq \mathcal{J}_{\chi_i}(p_i)$  se cumple. Este proceso se repite hasta que  $\vartheta_i \leq \epsilon_\vartheta$ , donde  $\epsilon_\vartheta$  es una tolerancia numérica suficientemente pequeña. Si para alguna iteración el paso de la búsqueda lineal  $\kappa$  es menor que una determinada

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo SLERP

---

**Entrada:**  $\Omega, \psi_0, \epsilon_\vartheta, \epsilon_\kappa$ , datos de la ecuación diferencial

**Salida:** Topología óptima  $\chi_{opt}$

```

1  $\psi_i \leftarrow \psi_0$ 
2 Calcular  $\chi_i$  usando (11.1)
3 Resolver ecuación diferencial para obtener  $p_i$  asociada a  $\chi_i$ 
4 Calcular  $\mathcal{J}_{\chi_i}(p_i)$ 
5 Calcular  $g_i$  a partir de (11.3)
6 Calcular  $\vartheta_i$  a partir de (11.9)
7  $\psi_i \leftarrow \psi_0$ 
8  $\psi_{old} \leftarrow \psi_i; \mathcal{J}_{old} \leftarrow \mathcal{J}_{\chi_i}(p_i); \mathcal{J}_{new} \leftarrow \mathcal{J}_{\chi_i}(p_i) + 1; \kappa \leftarrow 1$ 
9 while  $\mathcal{J}_{new} > \mathcal{J}_{old}$  do
10 |   Calcular  $\psi_{new}$  usando (11.10);
11 |    $\psi_i \leftarrow \psi_{new}$ 
12 |   Ejecutar líneas 2-4;
13 |    $\mathcal{J}_{old} \leftarrow \mathcal{J}_{\chi_i}(p_i)$ 
14 |    $\kappa \leftarrow \kappa/2$ 
15 end
16 if  $\kappa < \epsilon_\kappa$  then
17 |   Remallar 1
18 |    $\psi_{i+1} \leftarrow \psi_i; i \leftarrow i + 1$ 
19 |   Volver a línea 2
20 else if  $\vartheta_i > \epsilon_\vartheta$  then
21 |    $\psi_{i+1} \leftarrow \psi_i; i \leftarrow i + 1$ 
22 |   Volver a línea 2
23 else
24 |    $\psi_{opt} \leftarrow \psi_i$ 
25 |   Calcular  $\chi_i$  usando (11.1)
26 |   return  $\chi_{opt} \leftarrow \chi_i$ 
27 end

```

---

tolerancia  $\epsilon_\kappa$  y la condición de optimalidad no se cumple, luego un refinamiento de la malla en todo el dominio de proyecto  $\Omega$  es realizado y el proceso iterativo continúa. El pseudo-código del algoritmo descrito anteriormente se presenta a continuación

## 11.2 Algoritmo de Lagrangiano Aumentado

Para resolver problemas con restricciones, Amstutz construyó en [11] un método numérico capaz de contemplar problemas de optimización topológica con restricciones en conos utilizando conceptos de derivada topológica y el método de lagrangiano aumentado. En pocas palabras, el método de lagrangiano aumentado obtiene la solución del problema de optimización restringida resolviendo una sucesión de problemas irrestrictos. El método numérico ideado por Amstutz utiliza el Algoritmo 1 para resolver la sucesión de problemas irrestrictos y luego emplea conceptos tradicionales de los métodos de lagrangiano aumentado para actualizar los estimadores de los multiplicadores de Lagrange. Amstutz muestra en [11] la efectividad del método controlando los valores límite de la energía de deformación de un estructura optimizada como así también su primer autovalor asociado, mientras que Campeão lo utilizó como método de control de volumen en [18].

El algoritmo que se presenta a continuación está basado el algoritmo propuesto en [11] pero con la diferencia de que éste no espera a obtener un minimizador parcial para actualizar los multiplicadores de Lagrange sino que los actualiza para cada paso de búsqueda. Esta versión ha sido satisfactoriamente implementada en [41] para obtener diseños óptimos de estructuras bidimensionales, de placas, disipadores de calor, y actuadores piezoeléctricos utilizando múltiples materiales. Los detalles se muestran en el pseudocódigo a continuación.

---

<sup>1</sup>En general se le pide al usuario decidir si corta la ejecución del programa o refina la malla.

---

**Algoritmo 2:** Algoritmo de Lagrangiano Aumentado modificado
 

---

**Entrada:**  $\Omega, \psi_0, v_f^*, \epsilon_\vartheta, \epsilon_\kappa, \epsilon_C, \lambda_{1,0}, \lambda_2$ , datos de la ecuación diferencial

**Salida:** Topología óptima  $\chi_{opt}$ 

```

1  $\psi_i \leftarrow \psi_0$ 
2  $\lambda_{1,i} \leftarrow \lambda_{1,0}$ 
3 Calcular  $\chi_i$  usando (11.1)
4 Resolver (10.63b) para obtener  $\bar{p}_i = (\bar{\phi}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\mathbf{u}}_i)$  asociada a  $\chi_i$ 
5 Calcular  $\bar{\mathcal{A}}_{\chi_i}(\bar{p}_i, \lambda_{1,i})$  mediante (10.63a)
6  $g_i \leftarrow -\chi \mathcal{T}_D^{M \rightarrow V} \bar{\mathcal{A}}_{\chi_i} + (1 - \chi) \mathcal{T}_D^{V \rightarrow M} \bar{\mathcal{A}}_{\chi_i}$ 
7 Calcular  $\vartheta_i$  a partir de (11.9)
8  $\psi_{old} \leftarrow \psi_i; \mathcal{A}_{old} \leftarrow \bar{\mathcal{A}}_{\chi_i}(\bar{p}_i, \lambda_{1,i}); \mathcal{A}_{new} \leftarrow \bar{\mathcal{A}}_{\chi_i}(\bar{p}_i, \lambda_{1,i}) + 1; \kappa \leftarrow 1$ 
9 while  $\mathcal{A}_{new} > \mathcal{A}_{old}$  do
10 |   Calcular  $\psi_{new}$  usando (11.10);
11 |    $\psi_i \leftarrow \psi_{new}$ 
12 |   Ejecutar líneas 3-5;
13 |    $\mathcal{A}_{old} \leftarrow \bar{\mathcal{A}}_{\chi_i}(\bar{p}_i, \lambda_{1,i})$ 
14 |    $\kappa \leftarrow \kappa/2$ 
15 end
16 if  $\kappa < \epsilon_\kappa$  then
17 |   Remallar
18 |    $\psi_{i+1} \leftarrow \psi_i; i \leftarrow i + 1$ 
19 |   Volver a línea 3
20 else if  $\vartheta_i > \epsilon_\vartheta$  then
21 |   if  $\bar{C}_{\chi_i} > \epsilon_C$  then
22 |     |  $\lambda_{1,i+1} \leftarrow \lambda_{1,i} + \lambda_2 \bar{C}_{\chi_i}$ 
23 |   else
24 |     |  $\lambda_{1,i+1} \leftarrow \lambda_{1,i}$ 
25 |   end
26 |    $\psi_{i+1} \leftarrow \psi_i;$ 
27 |    $i \leftarrow i + 1;$ 
28 |   Volver a la línea 3;
29 else
30 |    $\psi_{opt} \leftarrow \psi_i$ 
31 |   Calcular  $\chi_i$  usando (11.1)
32 |    $\chi_{opt} \leftarrow \chi_i$ 
33 end

```

---

## Resultados Numéricos

En este capítulo se presentan una serie de ejemplos numéricos de aplicación del **Algoritmo 2** de optimización topológica para la síntesis de actuadores termo-electro-mecánicos.

En cada ejemplo se realizarán distintos estudios, pero en todos ellos se trabajará sobre el mismo dominio de proyecto, el cual está esquematizado en la Figura 12.1. En

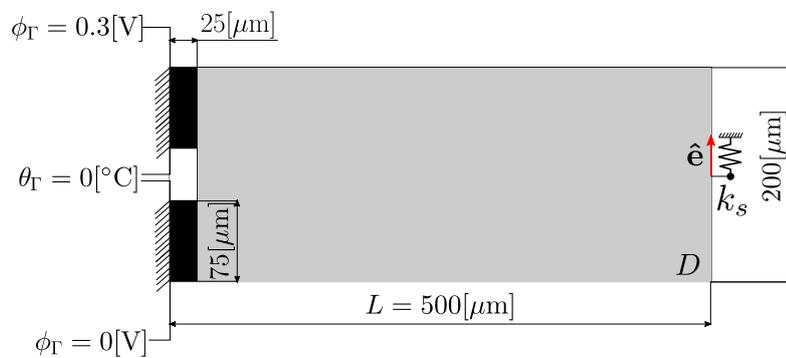


Figura 12.1: Descripción geométrica del dominio de proyecto.

este dominio, la región gris corresponde a la región optimizable, mientras que los dos rectángulos negros a la izquierda están restringidos a permanecer como parte de la región material  $\Omega_M$ . Dichos rectángulos negros cumplen la función de puertos eléctricos, en donde se impone la diferencia de potencial  $\phi_\Gamma$  sobre su frontera exterior izquierda. Sobre la misma frontera también se empotra el dispositivo ( $\mathbf{u}_\Gamma = \mathbf{0}$ ) y se imponen condiciones

de borde térmicas ( $\theta_\Gamma = 0$ ). Por otro lado, el rectángulo blanco está restringido a siempre pertenecer a la región vacía  $\Omega_V$ .

Para todos los ejemplos contenidos en esta sección, las propiedades constitutivas del medio material son  $s = 3.774 \times 10^7 [\text{S/m}]$ ,  $k = 238 [\text{W}/(\text{m K})]$ ,  $E = 70 \times 10^9 [\text{Pa}]$ ,  $\nu = 0.33$  y  $\alpha = 23 \times 10^{-6} [1/\text{K}]$ . Los factores de contraste ( $\gamma^s$ ,  $\gamma^k$ ,  $\gamma^C$  y  $\gamma^\alpha$ ) se setean en  $1 \times 10^{-3}$ .

El problema de optimización será resuelto utilizando su expresión escalada. La región de proyecto asociada a este problema escalado se muestra en la Figura 12.2. Los valores de los parámetros adimensionales son para todos los ejemplos  $\pi_1 = 0.985$  y  $\pi_2 = 0.01$ . La rigidez del resorte  $k_s$  puede obtenerse a partir del valor de  $\pi_2$  utilizando la ecuación (10.53).

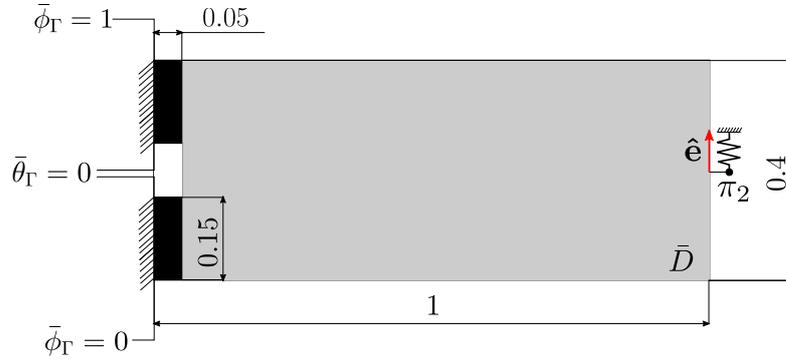


Figura 12.2: Descripción geométrica del dominio de proyecto escalado.

Para la resolución numérica de los sistemas PDE directos y adjuntos, en todos los casos, se utiliza el método de los elementos finitos. El dominio es discretizado mediante elementos triangulares lineales tipo Langrange P1.

## 12.1 Ejemplo 1

En este ejemplo se comprobará numéricamente lo establecido en la **Observación** 10.1. Para ello, se resuelve el problema de optimización considerando los siguientes valores de condiciones de borde eléctricas  $\phi_\Gamma = \{0.3[\text{V}], 0.6[\text{V}], 0.9[\text{V}]\}$  con un valor de restricción de la fracción de volumen  $v_f^* = 0.55$ . El dominio se discretiza inicialmente utilizando 2256 elementos triangulares con un total de 1337 nodos para luego de 3 procesos de remallado finalizar con 163840 elementos y 82369 nodos. El criterio de optimalidad para este caso se setea en  $\epsilon_\vartheta = 8$ , mientras que la tolerancia para la restricción es  $\epsilon_C = 0.01$ .

El desplazamiento en la dirección deseada  $u_e = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}|_{\Gamma_j}$  del punto de actuación se muestra en la Figura 12.3, mientras que la topología obtenida para cada valor de

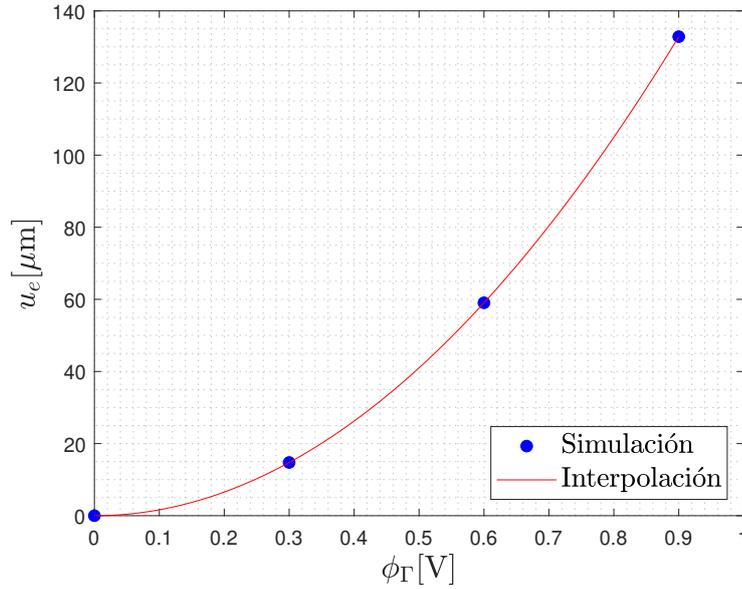


Figura 12.3: Respuesta mecánica del actuador en función de la diferencia de potencial.

condición de borde su muestra en la Figura 12.4. Superpuesto se muestra también las líneas de campo eléctrico. Estas líneas indican la forma en la que la corriente eléctrica circula a través de la estructura conductora del actuador. Mientras más apiladas se encuentren en una determinada región el valor de la densidad de corriente  $\mathbf{j}_{\chi}(\phi)$  aumenta.

Como puede observarse en la Figura 12.3, la respuesta del actuador en función de la diferencia de potencial es no lineal (cuadrática), tal como era de esperarse. La topología óptima se mantiene independiente de éste valor, como puede comprobarse en la Figura 12.4.

Finalmente, la configuración deformada y la distribución de temperaturas se gráfica en la Figura 12.5. En esta imagen se observan condiciones de temperatura que harían inviable su funcionamiento para prácticamente cualquier material base de construcción. Para resolver este problema, sería necesario implementar modelos de transferencia de calor más realistas, tales como se reporta en [51] y [52], en donde se consideran mecanismos convectivos con un coeficiente de película  $h$  determinado mediante ensayos experimentales. También, sería necesario considerar restricciones de temperatura o de corriente.

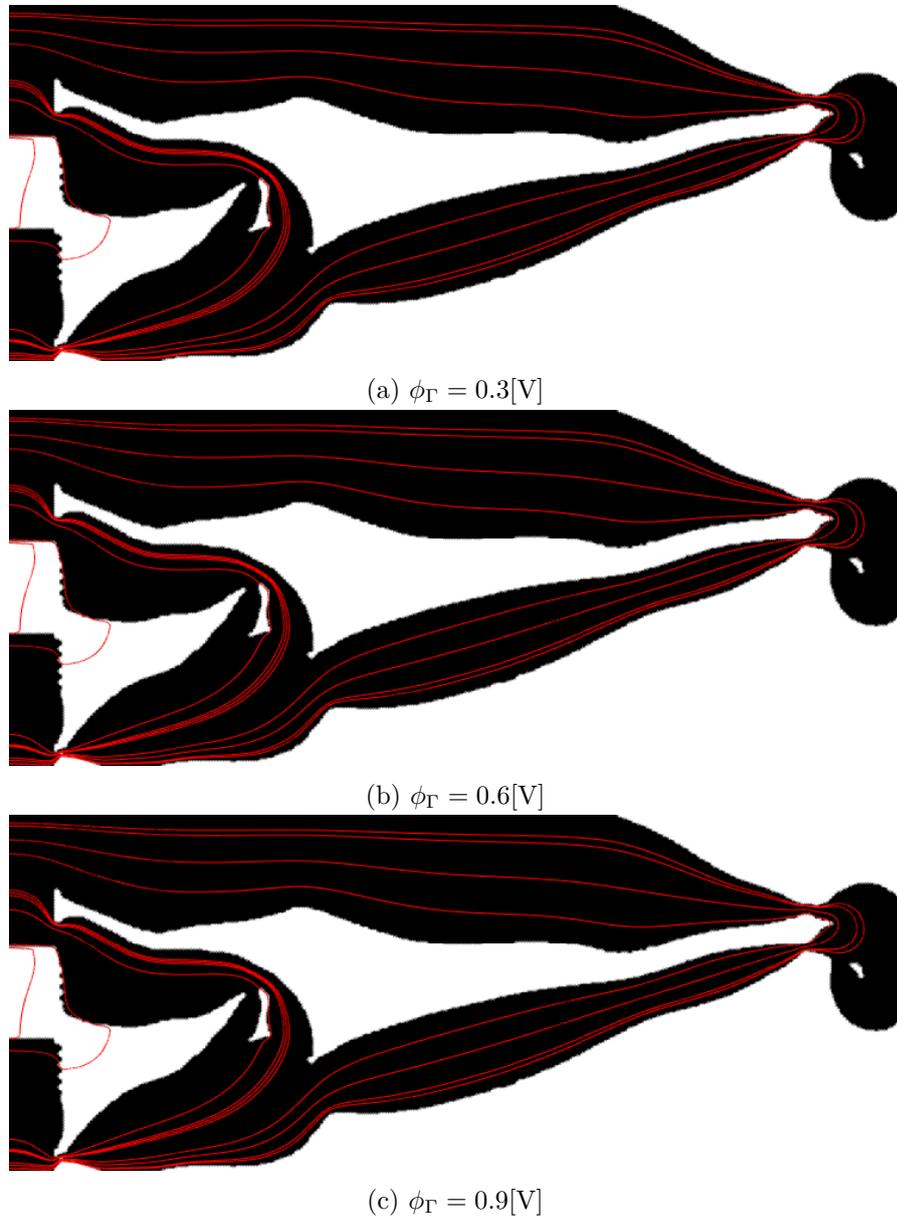


Figura 12.4: Estructura del actuador en la configuración deformada en conjunto con la distribución de temperaturas para cada caso del Ejemplo 1.

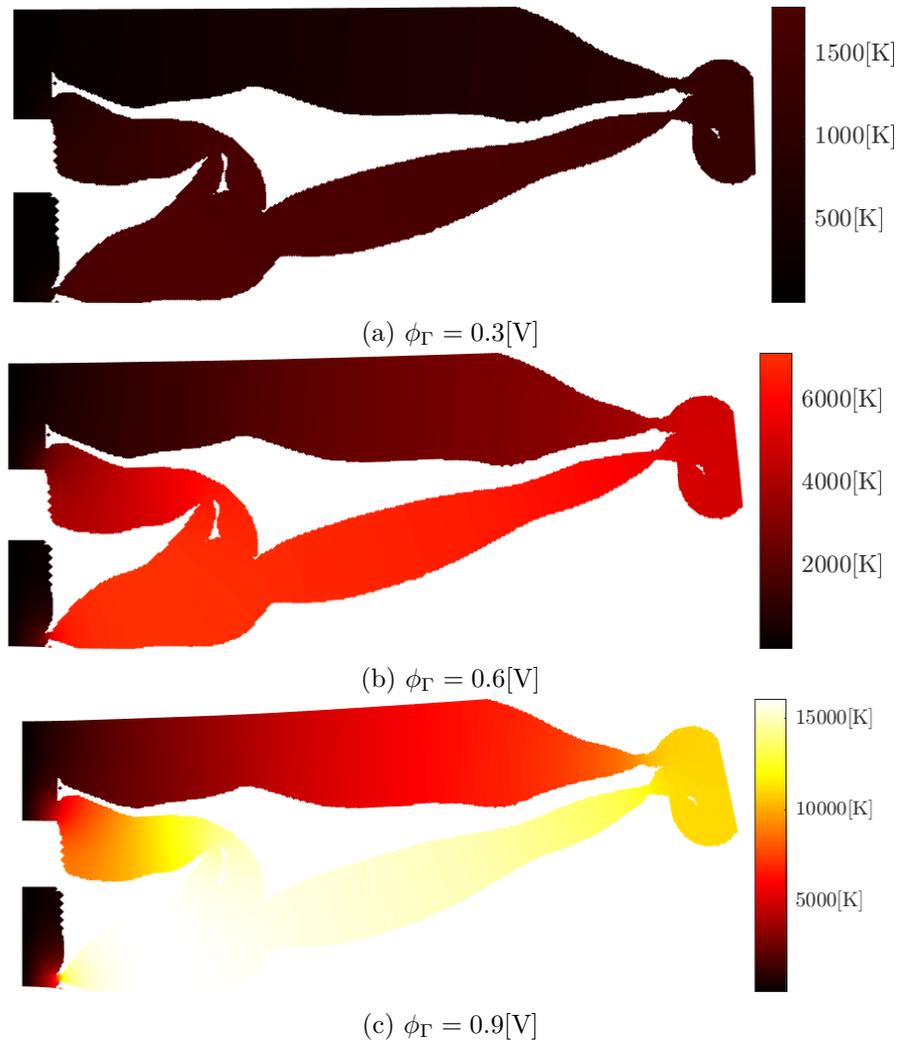


Figura 12.5: Estructura del actuador en la configuración deformada en conjunto con la distribución de temperaturas para cada caso del Ejemplo 1.

## 12.2 Ejemplo 2

En este ejemplo se estudia como cambia el diseño óptimo del actuador en función de la fracción de volumen requerida. Para ello, se resuelve el problema de optimización (10.63) para los siguientes valores de fracciones de volumen  $v_f^*$  desde 0.2 hasta 0.65 con un paso de 0.05. El criterio de optimalidad para todos los casos de este ejemplo se setea en  $\epsilon_\vartheta = 8^\circ$ , mientras que la tolerancia para el cumplimiento de la restricción es  $\epsilon_C = 0.01$ . También, el estimador inicial del multiplicador de lagrange se setea en  $\lambda_{1,0} = 0$ . El parámetro de penalización en conjunto con la malla inicial y final para cada caso de evaluación se muestra en la Tabla 12.1.

Fracción Volumen	Discretización inicial		Discretización final		$\lambda_2$
	Elementos	Nodos	Elementos	Nodos	
0.2	10240	5233	163840	82369	0.001
0.25	10240	5233	163840	82369	0.001
0.3	10240	5233	163840	82369	0.001
0.35	2560	1337	163840	82369	0.005
0.4	10240	5233	163840	82369	0.001
0.45	2560	1337	163840	82369	0.001
0.5	2560	1337	163840	82369	0.0025
0.55	2560	1337	163840	82369	0.005
0.6	2560	1337	163840	82369	0.0025
0.65	640	349	163840	82369	0.005

Tabla 12.1: Parámetro de penalización, malla inicial y final para cada caso de evaluación.

Las topologías óptimas para cada fracción de volumen se muestran en la Figura 12.6, mientras que la magnitud del campo de desplazamiento del punto de actuación se muestra en la Figura 12.7. Por otro lado, en la Figura 12.8 se muestra el ángulo de inclinación con respecto a la horizontal que forma  $\mathbf{u}$  en la zona de interés  $\Gamma_J$ , dado por

$$(12.1) \quad \cos(\beta_{\mathbf{u}}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1}{\|\mathbf{u}\|_2 \|\hat{\mathbf{e}}_1\|_2}, \quad \text{ó} \quad \cos(\beta_{\mathbf{u}}) = \frac{\bar{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1}{\|\bar{\mathbf{u}}\|_2 \|\hat{\mathbf{e}}_1\|_2}$$

con  $\hat{\mathbf{e}}_1$  el versor canónico que indica la dirección horizontal.

Se puede observar en la Figura 12.7 una tendencia creciente del desplazamiento del actuador con respecto a la fracción de volumen utilizada. Por otra parte, el ángulo de funcionamiento para los dispositivos obtenidos ronda entre los  $35^\circ$  y los  $50^\circ$  para todo el rango evaluado, bastante alejados del objetivo de  $90^\circ$ . De aquí se puede concluir que el empleo del funcional de costo (10.61a) no es recomendable para obtener bajos niveles de movimientos parásitos.

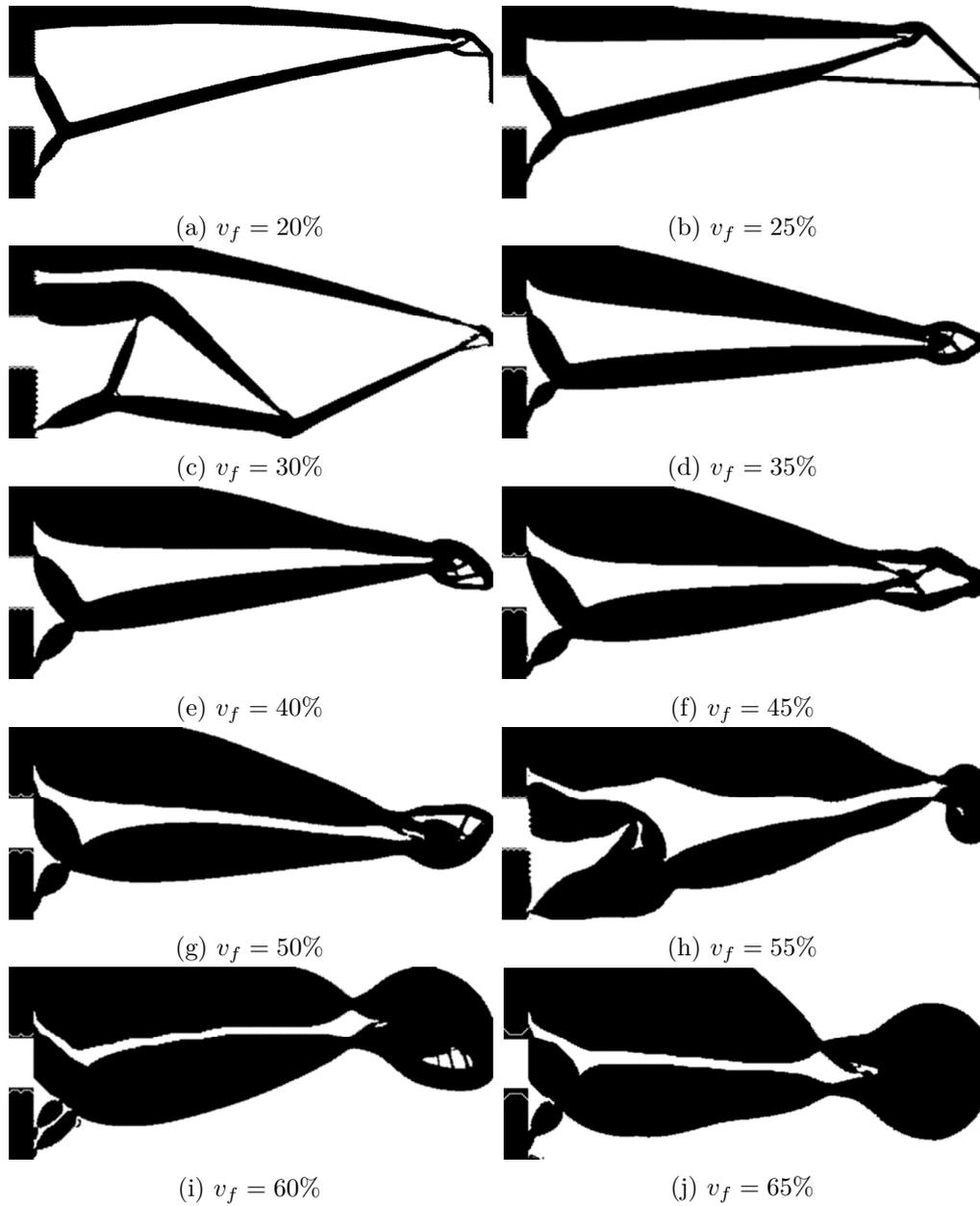


Figura 12.6: Topologías obtenidas para distintas fracciones de volumen  $v_f$  para el Ejemplo 2.

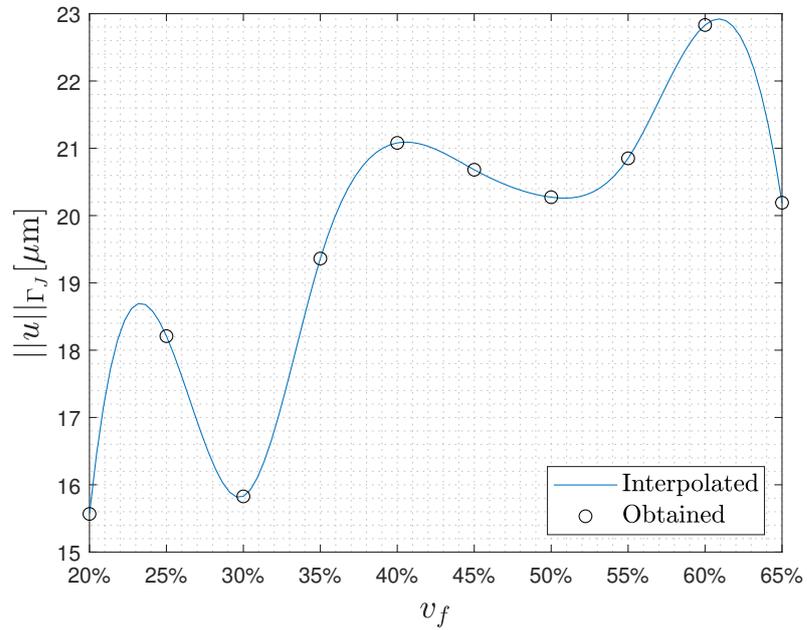


Figura 12.7: Magnitud del desplazamiento del punto de actuación vs. fracción de volumen.

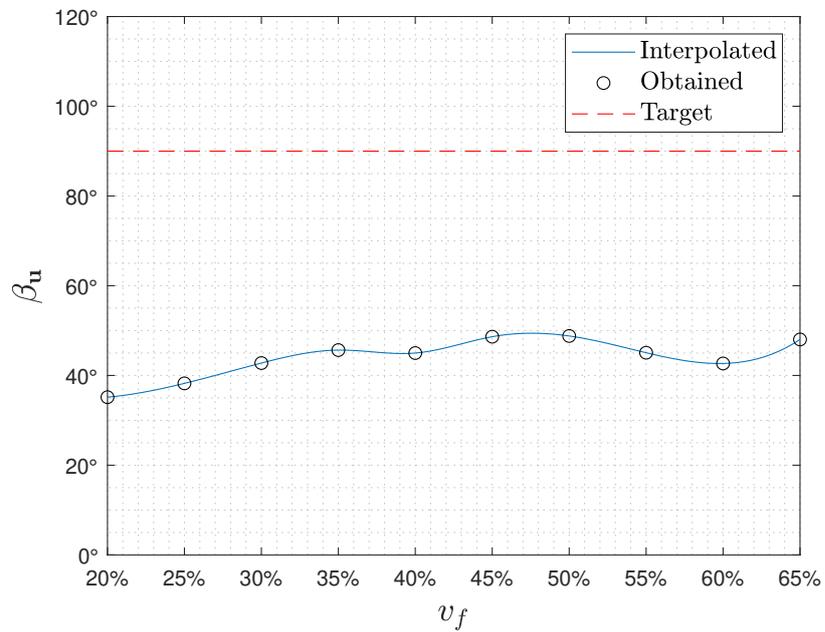


Figura 12.8: Ángulo del vector desplazamiento del punto de trabajo vs. la fracción de volumen del actuador.

$\pi_3$	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25	0.275	0.3
$\lambda_2(\times 10^{-3})$	7.5	7.5	2.5	7.5	1	2.5	2.5	7.5	1	7.5	7.5

Tabla 12.2: Parámetro de penalización, para cada caso de evaluación.

### 12.3 Ejemplo 3

El objetivo es analizar la capacidad de esta función de costo (10.62) para obtener diseños de actuadores TEM con bajos niveles de movimientos parásitos. Para ello, se resuelve el problema de optimización (10.63) con  $\bar{\mathcal{J}}(\bar{\mathbf{u}})$  dado por la Ecuación (10.62) y  $v_f^* = 0.5$ , para los siguientes valores de parámetro de penalización  $\pi_3$  desde 0.05 hasta 0.3 con un paso de 0.025. El criterio de optimalidad para todos los casos de este ejemplo se setea en  $\epsilon_\vartheta = 8^\circ$ , a excepción del caso para  $\pi_3 = 0.225$  en donde se ha tomado  $\epsilon_\vartheta = 4^\circ$ , con el objeto de obtener una topología libre de islas de material. La tolerancia para el cumplimiento de la restricción es  $\epsilon_C = 0.01$  para todos los casos. También, el estimador inicial del multiplicador de lagrange se setea en  $\lambda_{1,0} = 0$ . Para todos los casos la malla inicial consta de 2560 elementos y 1337 y la malla final consta de 655360 elementos y 328580 nodos. Los parámetros de penalización  $\pi_3$  y  $\lambda_{0,1}$  se muestran en la Tabla 12.2.

Los diseños de actuadores para este ejemplo se muestran en la Figura 12.9 y una ilustración de los actuadores en su configuración no deformada y deformada se muestra en la Figura 12.10 algunos valores característicos de  $\pi_3$ .

Se puede observar en las imágenes de la Figura 12.9 que para valores bajos de  $\pi_3$ , las topologías obtenidas coinciden morfológicamente con las obtenidas utilizando el funcional de costo (10.63). También, éstas comparten niveles de movimientos parásitos del mismo orden ( $\beta_{\mathbf{u}}$  entre  $35^\circ$  y  $45^\circ$ ) como se muestra en la Figura 12.11. A partir de  $\pi_3 > 0.15$  el nivel de movimientos parásitos para esos diseños comienza a reducirse hasta que para  $\pi_3 > 0.225$  aumentan nuevamente. Para estos rangos de  $\pi_3$ , los diseños de los actuadores cambian, apareciendo estructuras que simulan tensores desde los cuales se *tira* del punto de actuación, y de ésta manera se logra compensar hasta cierto punto el movimiento parásito. También, con el aumento de  $\pi_3$  se verifica una tendencia decreciente de la magnitud del campo de desplazamiento  $\mathbf{u}$  en el punto de actuación.

La ventaja de los métodos de penalización lineal para considerar restricciones reside en su facilidad de implementación, pero estos son sólo efectivos si la variable que se quiere controlar tiene una correspondencia monotónica creciente o decreciente con el valor del penalizador. Esto es así ya que con algunas pocas resoluciones del problema de optimización se puede ajustar rápidamente el valor del penalizador para lograr el valor deseado en la variable a controlar. Cuando la tendencia no es monotónica,

como en este caso (ver Figura 12.11), es difícil ajustar el valor del penalizador ya que aumentarlo/reducirlo no implica siempre aumentar/reducir la variable a controlar. Es por este hecho que tampoco el funcional (10.62) es recomendable para obtener diseño de actuadores TEM con bajos valores de movimiento parásito.

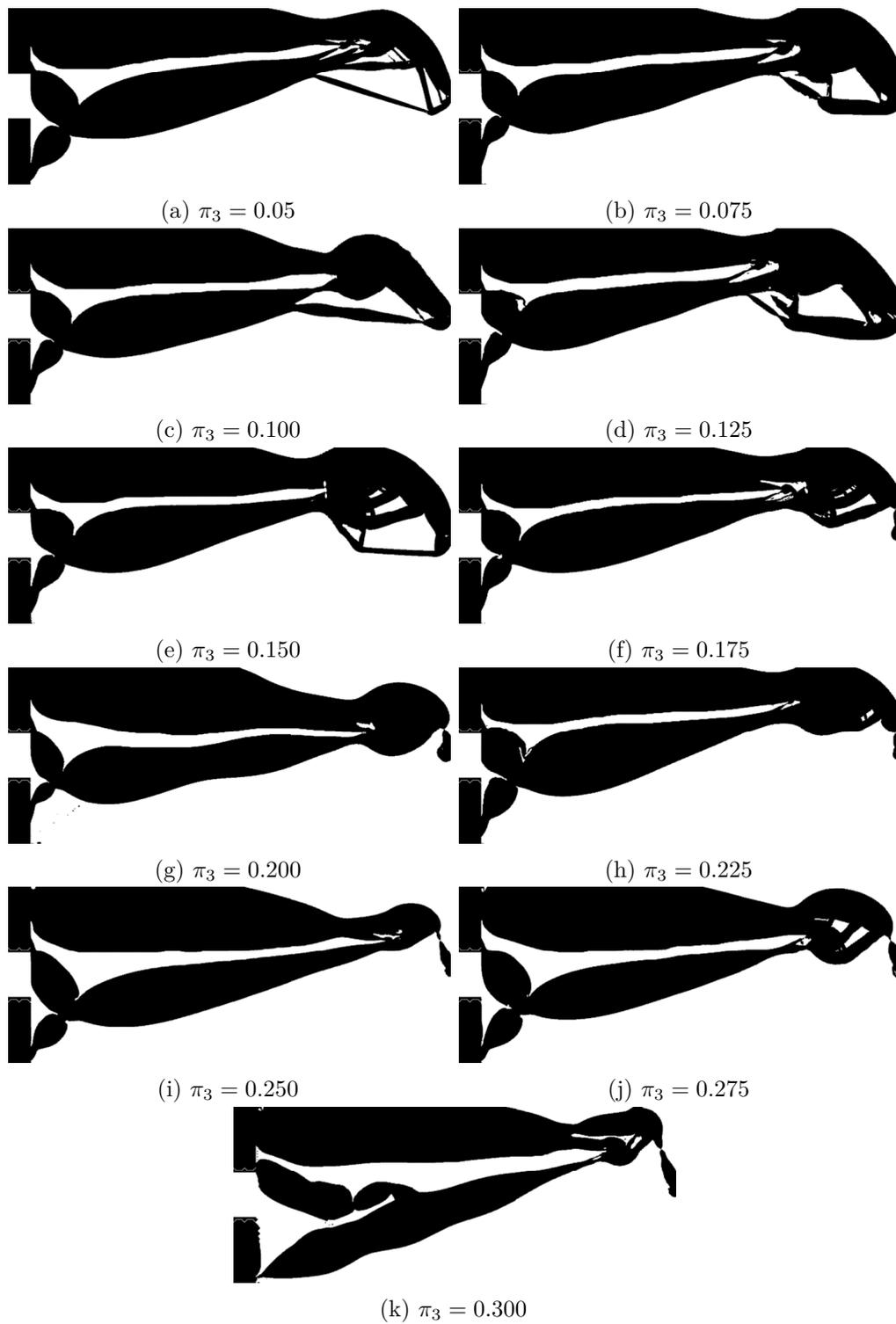


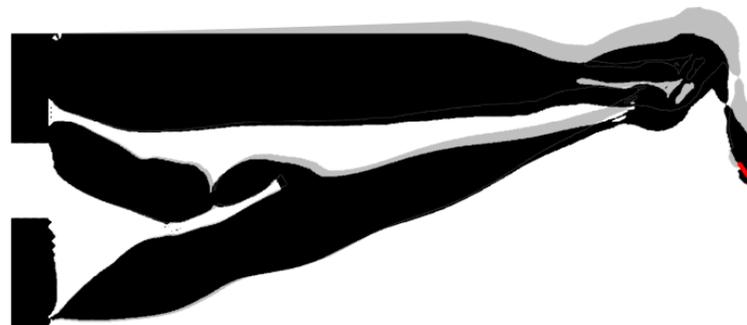
Figura 12.9: Topologías obtenidas para distintos parámetros de penalización  $\pi_3$  para el Ejemplo 3.



(a)  $\pi_3 = 0.05$



(b)  $\pi_3 = 0.225$



(c)  $\pi_3 = 0.3$

Figura 12.10: Configuración deformada no deformada (negro) y configuración deformada del actuador (gris). La flecha roja representa el campo de desplazamiento del punto de actuación.

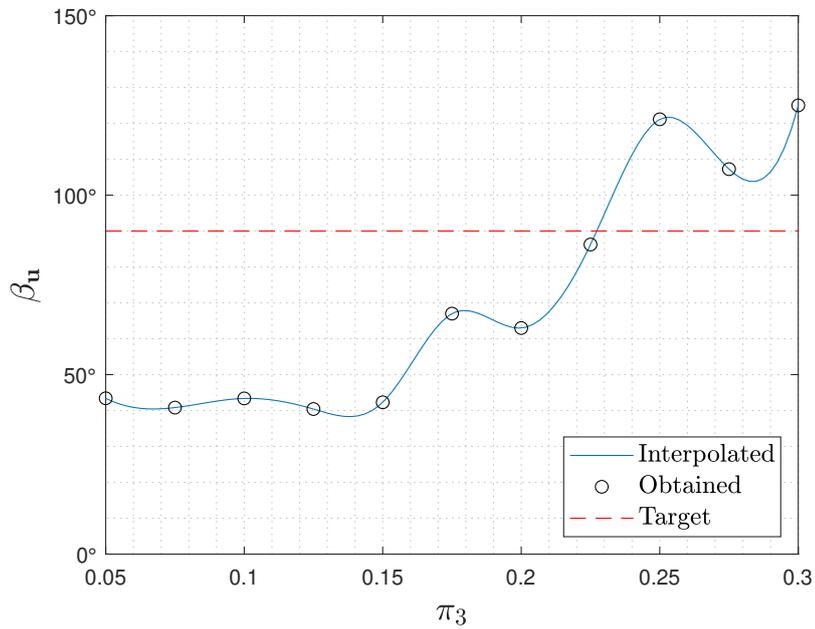


Figura 12.11: Ángulo del vector desplazamiento del punto de trabajo vs. parámetro  $\pi_3$ .

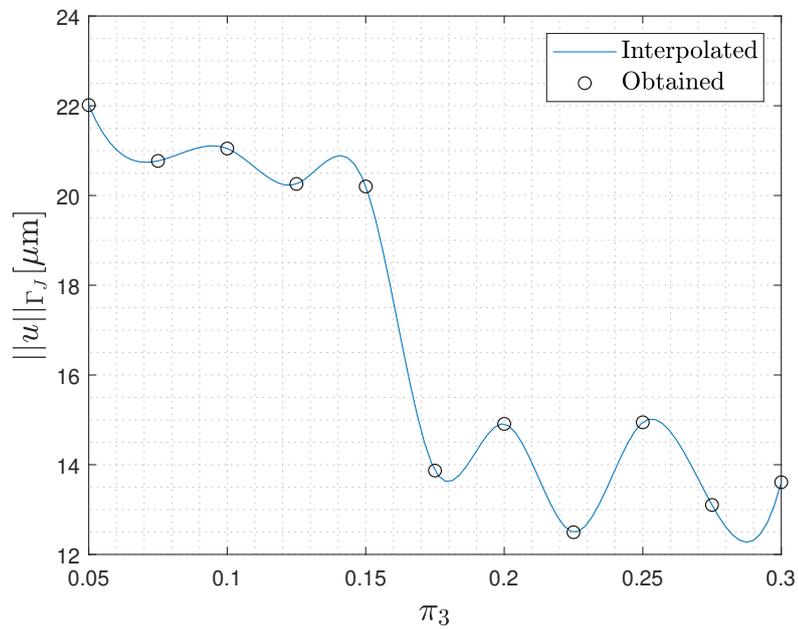


Figura 12.12: Magnitud del desplazamiento del punto de actuación vs.  $\pi_3$ .



## Conclusiones

### 13.1 Contribuciones principales

En la primera parte de este trabajo, se ha realizado el análisis asintótico topológico del problema de calentamiento por efecto Joule acoplado con dilatación térmica para una clase particular de funcionales de costo, obteniéndose finalmente una fórmula analítica y cerrada de la derivada topológica asociada. A diferencia de la mayoría de los resultados presentados en la literatura sobre derivadas topológicas en problemas no lineales, la expresión aquí obtenida es explícita. Para obtener esta expresión se ha utilizado una técnica lagrangiana basada en una modificación del método de Amstutz.

Luego, se obtuvieron estimativas precisas tanto de los términos del residuo de la expansión asintótica del funcional de costo como de las soluciones a los problemas residuales asociadas a las expansiones de Poincaré de los estados directos y adjuntos. Estas estimativas en conjunto con la expresión de la derivada topológica obtenida, fueron confirmadas mediante un procedimiento numérico, mostrando una buena concordancia entre el valor teórico y la aproximación numérica.

En la segunda parte de este trabajo, la derivada topológica obtenida fue aplicada a problemas de diseño óptimo de actuadores termo-electro-mecánicos utilizando un algoritmo basado en el método de funciones level-set.

Debido a la complejidad que surge al tratar problemas multifísicos, se optó por transcribir el problema de optimización a una versión escalada y adimensional. Los beneficios de escribir el problema en estos términos pudieron comprobarse mediante

el Teorema 10.1 y la Observación 10.1. Dicha observación fue verificada numéricamente en base a los resultados obtenidos en la sección 12.1, en donde claramente se aminora la complejidad del problema de diseño reduciendo la cantidad de parámetros físicos libres a definir.

En base a los resultados de los experimentos numéricos realizados se pueden esbozar las siguientes conclusiones:

- La metodología propuesta permite obtener de manera efectiva diseños óptimos de actuadores termo-electro-mecánicos, libres de zonas intermedias y con un mínimo de parámetros algorítmicos a setear.
- Los funcionales de costo empleados no son efectivas para obtener diseños de actuadores con movimientos parásitos reducidos.

La técnica de diseño óptimo generada en esta tesis permite no solo diseñar actuadores termo-electro-mecánicos sino cualquier otro tipo de dispositivo cuyo principio de funcionamiento esté basado en ese conjunto de acoplamientos físicos. Esta técnica también tiene aplicación en cualquier dispositivo cuyo funcionamiento no esté basado sino condicionado por los fenómenos ya nombrados. Un ejemplo claro sería cualquier circuito electrónico de baja frecuencia, en donde el calentamiento por efecto Joule genera tensiones termo-mecánicas entre el dispositivo semi-conductor y el sustrato, que con el tiempo pueden llevar a la falla.

### 13.2 Trabajos Futuros

También, en base a los resultados obtenidos, se ponen evidencia que para poder obtener diseños listos para su fabricación es necesario

- Emplear modelos de transferencia de calor mas realistas, contemplando fenómenos de convección y/o radiación, para asi poder capturar con precisión la distribución de temperaturas en la estructura del actuador.
- Considerar el funcionamiento en régimen dinámico (respuesta en frecuencia).
- Implementar restricciones de funcionamiento:
  - De movimientos parásitos.
  - De tensión, para evitar la concentración de tensiones debido a la generación de mecanismos de flexibilidad concentrada.

- De temperatura, para evitar la degradación del dispositivo.
- De resistencia eléctrica del dispositivo, ya que la caída de tensión a través del dispositivo es una especificación del diseño microelectrónico donde está contenido el actuador.
- Implementar restricciones tecnológicas asociadas a la fabricabilidad. Por ejemplo restricciones perimétricas para controlar el tamaño mínimo de las estructuras internas generadas (brazos de pequeño espesor), como para reducir el tiempo de fabricación.
- Utilizar otras funciones de costo que permitan maximizar la eficiencia energética u otros índices de performance a definir.
- Realizar el diseño óptimo de estos dispositivos empleando múltiples materiales. El objetivo es determinar si es posible obtener diseños que ofrezcan mayor performance en base a alguna combinación de materiales específica.

### 13.3 Publicaciones originadas

El núcleo de la primera parte de este trabajo ha sido enviado para su publicación bajo el título *Topological asymptotic analysis of the coupled Joule-heating with thermal expansion problem* en la revista *SIAM Journal on Control and Optimization*.

Durante el trabajo de doctorado también se realizaron las siguientes publicaciones científicas, que por razones de tiempo no fueron integradas en la presente disertación:

- A. Romero.  
Optimum design of two-material bending plate compliant devices.  
*Engineering Computations*, 39(1):395–420, 2022
- AA Romero Onco and Sebastian Miguel Giusti.  
A robust topological derivative-based multi-material optimization approach: Optimality condition and computational algorithm.  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 366:113044, 2020

También se realizaron las siguientes presentaciones en congresos nacionales y workshops internacionales

- Augusto Romero y Sebastian Giusti (UTN Argentina). Title: Optimum design of electro-thermo-mechanical devices via topological derivatives. TOP Webinar 26: Multiphysics topology optimization. Marzo 23, 2023. <https://topwebinar.weblog.tudelft.nl/>
- Augusto Romero Onco and Sebastián M Giusti.  
Diseño de actuadores flexibles multifísicos basado en derivada topológica.  
In *Mecánica Computacional*, volume 39, pages 1067–1067, 2022
- Martín M Guardiola, Constanza Navarta Perassolo, Marcos Vicentin, Augusto Romero Onco, and Sebastián M Giusti.  
Obtención de la distribución de estructuras de impresión de mínimo tiempo para la fabricación aditiva.  
In *Mecánica Computacional*, volume 39, pages 1027–1036, 2022
- Augusto A Romero Onco and Sebastián M Giusti.  
Control óptimo de actuadores piezoeléctricos flexibles.  
In *Mecánica Computacional*, volume 38, pages 1453–1453, 2021
- Augusto A Romero Onco and Sebastián M Giusti.  
Síntesis de mecanismos de lámina emergente mediante el uso de derivada topológica.  
In *Mecánica Computacional*, volume 38, pages 1055–1055, 2021
- Augusto A Romero Onco and Sebastian M Giusti.  
Variación de propiedades constitutivas efectivas considerando optimización topológica multimaterial.  
In *Mecánica Computacional*, volume 37, pages 1569–1569, 2019
- Pablo N Wierna, Augusto Romero Onco, and Javier Salomone.  
Diseño óptimo del tren de aterrizaje principal de un vehículo aéreo no tripulado.  
In *Mecánica Computacional*, volume 37, pages 21–21, 2019
- Juan I Farachi, Augusto A Romero Onco, and Sebastián M Giusti.  
Algoritmo de optimización topológica estructural en código abierto fenics.  
In *Mecánica Computacional*, volume 37, pages 9–9, 2019

- Augusto A Romero Onco and Sebastián M Giusti.

Una técnica de optimización topológica considerando múltiples materiales.

In *Mecánica Computacional*, volume 36, pages 1479–1479, 2018

Por otra parte, se llevo a cabo la escritura de un capítulo de libro en el cual se describía la aplicación de técnicas de optimización topológica mediante derivada topológica para una aplicación aeroespacial en particular:

- Sebastián Miguel Giusti, Augusto Alejandro Romero, and Javier Eduardo Salomone.

Optimal topological design of a thermal isolator for a monopropellant space thruster.

*Modeling and Optimization in Space Engineering: State of the Art and New Challenges*, pages 141–167, 2019

Este trabajo es parte de la formación de postgrado del doctorando, pero no forma parte de su trabajo de tesis y por lo tanto no está contenido dentro de esta disertación.



# Anexo





## Lemas Auxiliares

**Lema A.1.** *Sea  $w$  un campo escalar, solución de un problema exterior escalar tal como (5.6), (5.10), (5.28) o (5.32), luego las siguientes estimativas son válidas*

$$(A.1) \quad \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon^2 \sqrt{|\ln \varepsilon|} = o(\varepsilon^{1+\delta}),$$

$$(A.2) \quad \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^2} = O(\varepsilon),$$

para algún  $\delta \in (0, 1)$  y  $C$  independiente de  $\varepsilon$ .

**Prueba.** Vea [2] Lema 9.1, p. 9. ■

**Observación A.1.** *Si  $w$  es un campo vectorial, tales como las funciones definidas por (5.14) y (5.25), entonces el caso es análogo y la cota (A.1) y (A.2) son igualmente válidas, i.e.  $\|w\|_{L^2(\Omega)^2} \leq C\varepsilon^2 \sqrt{|\ln \varepsilon|} = o(\varepsilon^{1+\delta})$ . La prueba de este resultado puede ser encontrada en [40] Ch. 4, pp. 105.*

**Lema A.2.** *Sea  $k_0 \in \mathbb{R}$ , y suponga que  $\varphi$  es una función no negativa y no decreciente definida en  $[k_0, \infty)$  la cual posee la siguiente propiedad: para todo  $h > k \geq k_0$ ,*

$$\varphi(h) \leq \frac{C}{(h-k)^a} \varphi(k)^b,$$

con constantes  $C > 0$ ,  $a > 0$ , y  $b > 1$ . Luego  $\varphi(k_0 + \delta) = 0$ , donde

$$(A.3) \quad \delta^a = C\varphi(k_0)^{b-1} 2^{\frac{ab}{b-1}}.$$

**Prueba.** Vea [35], Lema B.1. ■

**Teorema A.3.** *Considere el siguiente problema variacional*

$$(A.4) \quad y \in H_0^1(\Omega) : a(y, \eta) = \ell(\eta), \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega),$$

con  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  siendo un dominio Lipschitz acotado,  $a(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal simétrica, acotada y coercitiva dada por

$$a(y, \eta) = \int_{\Omega} \alpha \nabla y \cdot \nabla \eta,$$

con  $\alpha > 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega$ , y una formma lineal

$$\ell(\eta) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla \eta.$$

Luego, si  $\mathbf{f} \in L^p(\Omega)^2$  con  $p > 1$ , entonces existe una única solución débil  $y \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , y existe alguna constante  $c_\infty > 0$ , la cual no depende de  $\mathbf{f}$  tal que

$$(A.5) \quad \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_\infty \|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)^2}$$

**Prueba.** La existencia y unicidad en  $H^1(\Omega)$  se obtiene por el teorema de Lax-Milgram para las suposiciones dadas. Resta por mostrar que la solución está acotada y la validez de la estimativa (A.5). Para ello, se seguirá el procedimiento presentado en [58], Teorema 4.5, el cual está basado en el método de Stampacchia, véase [55] y [35]. Considere un escalar  $k > 0$ , la función

$$v_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} y(\mathbf{x}) - k & \text{if } y(\mathbf{x}) \geq k \\ 0 & \text{if } |y(\mathbf{x})| < k \\ y(\mathbf{x}) + k & \text{if } y(\mathbf{x}) \leq -k \end{cases},$$

y el dominio

$$\Omega(k) = \{\mathbf{x} \in \Omega : |y(\mathbf{x})| \geq k\}.$$

Se mostrará que la función  $v_k$  desaparece para c.t.p. para un  $k$  suficientemente grande, lo cual implica el acotamiento de  $y$ . Evaluando (A.4) en  $\eta = v_k$ , la siguiente igualdad se obtiene de manera trivial

$$a(y, v_k) = a(v_k, v_k) = \ell(v_k).$$

Considerando que  $\nabla v_k = \mathbf{0}$  en  $\Omega \setminus \Omega(k)$ , y utilizando la desigualdad generalizada de Hölder con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ , y  $q = 2$ ; y la desigualdad de Young  $ab \leq \frac{\tau}{2}a^2 + \frac{1}{2\tau}b^2$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$

y  $\tau > 0$ , el lado derecho de la ecuación anterior se puede estimar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla v_k \right| &= \left| \int_{\Omega(k)} \mathbf{f} \cdot \nabla v_k \right| \leq \|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)^2} \|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega)^2} \|1\|_{L^r(\Omega(k))^2} \\ &\leq \|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)^2} \|v_k\|_{H^1(\Omega)^2} |\Omega(k)|^{1/r} \leq \frac{1}{\tau} \|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)^2}^2 |\Omega(k)|^{2/r} + \tau \|v_k\|_{H^1(\Omega)^2}^2. \end{aligned}$$

Debido a la coercividad de  $a(\cdot, \cdot)$

$$\beta \|v_k\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(v_k, v_k),$$

luego seleccionando  $0 < \tau < \beta$

$$\|v_k\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1 \|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)^2}^2 |\Omega(k)|^{2/r}.$$

Dado  $h > k$ , luego  $\Omega(h) \subset \Omega(k)$ , lo cual implica que  $|\Omega(h)| \leq |\Omega(k)|$ , por ende

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{L^s(\Omega)}^2 &= \left[ \int_{\Omega(k)} |v_k|^s \right]^{2/s} = \left[ \int_{\Omega(k)} |y-k|^s \right]^{2/s} \\ &\geq \left[ \int_{\Omega(h)} |y-k|^s \right]^{2/s} \geq \left[ \int_{\Omega(h)} |h-k|^s \right]^{2/s} = (h-k)^2 |\Omega(h)|^{2/s} \end{aligned}$$

Luego, considerando el teorema de inmersión de Sobolev  $\|v_k\|_{L^s(\Omega)} \leq c \|v_k\|_{H^1(\Omega)}$  para  $1 \leq s < \infty$ , se tiene

$$(h-k)^2 |\Omega(h)|^{2/s} \leq C_1 \|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)^2}^2 |\Omega(h)|^{2/r}.$$

Seleccionando  $s = \lambda r$ , y llamando  $\varphi(h) = |\Omega(h)|^{2/s}$ , arribamos a la siguiente desigualdad

$$\varphi(h) \leq \frac{C_2}{(h-k)^2} \varphi(k)^\lambda.$$

Aplicando el Lema A.2 con  $a = 2$ ,  $C_2 = C_1 \|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)^2}^2$ ,  $b = \lambda > 1$  y  $k_0 = 0$  se obtiene

$$\delta^2 = C_3 \|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)^2}^2.$$

Se concluye que  $\varphi(\delta) = 0$  significa que  $|y| \leq \delta$  para c.t.p. en  $\Omega$ , y por ende  $y \in L^\infty(\Omega)$ . Luego, por definición

$$|y| \leq \delta \quad \text{a.e. in } \Omega \implies \|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta = c_\infty \|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)^2}.$$

Esto concluye la prueba ■



## Estimación de los residuos del funcional de costo

**Lema B.1.** *Sea  $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}^a, \tilde{\theta}^a$  y  $\tilde{\mathbf{u}}^a$  solución de los problemas (5.8), (5.34), (5.30), y (5.26) respectivamente, y sean (5.5), y (5.27) las expansiones de Poincaré de  $\phi_\varepsilon$ , y  $\theta_\varepsilon^a$  respectivamente, luego*

$$(B.1) \quad \mathcal{E}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^9 \mathcal{E}_i(\varepsilon) = o(\varepsilon^2),$$

con

$$(B.2) \quad \mathcal{E}_1(\varepsilon) = o(\|p_\varepsilon - p_0\|_{\mathcal{P}}^2),$$

$$(B.3) \quad \mathcal{E}_2(\varepsilon) = \int_{\Omega} \delta\phi s_\varepsilon \nabla \delta\phi \cdot \nabla \theta_\varepsilon^a,$$

$$(B.4) \quad \mathcal{E}_3(\varepsilon) = (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \tilde{\phi}^a,$$

$$(B.5) \quad \mathcal{E}_4(\varepsilon) = (\gamma^k - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} k_0 \nabla \theta_0 \cdot \nabla \tilde{\theta}^a,$$

$$(B.6) \quad \mathcal{E}_5(\varepsilon) = (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \|\nabla \phi_0\|_2^2 \delta\theta^a,$$

$$(B.7) \quad \mathcal{E}_6(\varepsilon) = (\gamma^{\mathbb{C}} - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \nabla^s \mathbf{u}_0 : \sigma_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}^a),$$

$$(B.8) \quad \mathcal{E}_7(\varepsilon) = -(\gamma^\alpha \gamma^{\mathbb{C}} - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \alpha_0 \mathbf{C}_0 \mathbf{I} \theta_0 : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}^a,$$

$$(B.9) \quad \mathcal{E}_8(\varepsilon) = (\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \nabla \phi_0 \cdot \left[ \nabla w_\phi^\varepsilon \delta\theta^a + \nabla \tilde{\phi} \theta_\varepsilon^a + \nabla \theta_\varepsilon^a \delta\phi \right],$$

$$(B.10) \quad \mathcal{E}_9(\varepsilon) = -(\gamma^s - 1) \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} s_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \tilde{\phi}.$$

**Prueba.** • Considerando los resultados (7.7), (7.23) y (7.32), se obtiene

$$(B.11) \quad \begin{aligned} \|p_\varepsilon - p_0\|_{\mathcal{P}}^2 &= \|\phi_\varepsilon - \phi_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\theta_\varepsilon - \theta_0\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \\ &\leq C_1 \varepsilon^2 + C_2 \varepsilon^2 + C_3 \varepsilon^2, \end{aligned}$$

y por ende

$$(B.12) \quad \mathcal{E}_1(\varepsilon) = o(\|p_\varepsilon - p_0\|_{\mathcal{P}}^2) = o(\varepsilon^2).$$

• Luego, es posible dividir el segundo residuo de la siguiente manera

$$(B.13) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_2(\varepsilon) &= - \int_{\Omega} \delta \phi s_0 \nabla \delta \phi \cdot \nabla \theta_0^a - \int_{\Omega} \delta \phi s_0 \nabla \delta \phi \cdot \nabla \delta \theta^a \\ &\quad - \int_{\Omega} \delta \phi (s_\varepsilon - s_0) \nabla \delta \phi \cdot \nabla \theta_0^a - \int_{\Omega} \delta \phi (s_\varepsilon - s_0) \nabla \delta \phi \cdot \nabla \delta \theta^a. \end{aligned}$$

Entonces, empleando los ansatz asociados para  $\phi_\varepsilon$ , y  $\theta_\varepsilon^a$ , se obtiene las siguientes estimaciones para los términos del lado derecho de la ecuación anterior

$$(B.14) \quad \begin{aligned} - \int_{\Omega} \delta \phi s_0 \nabla \delta \phi \cdot \nabla \theta_0^a &\leq C_4 \|\nabla \theta_0^a\|_{L^\infty(\Omega)} \|w_\phi^\varepsilon + \tilde{\phi}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \delta \phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_5 \left[ \|w_\phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)} \right] \|\delta \phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C_6 \left[ \varepsilon^2 \sqrt{|\ln \varepsilon|} + \varepsilon^{1+\delta} \right] \varepsilon = o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

$$(B.15) \quad \begin{aligned} - \int_{\Omega} \delta \phi s_0 \nabla \delta \phi \cdot \nabla \delta \theta^a &\leq C_7 \|\delta \phi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\delta \phi\|_{H^1(\Omega)} \left[ \|\nabla w_{\theta^a}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)} \right] \\ &\leq C_8 \varepsilon^{1+\delta_1} (\varepsilon + \varepsilon^{1+\delta}) = o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

$$(B.16) \quad \begin{aligned} - \int_{\Omega} \delta \phi (s_\varepsilon - s_0) \nabla \delta \phi \cdot \nabla \theta_0^a &= \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \phi s_0 (1 - \gamma^s) \nabla \delta \phi \cdot \nabla \theta_0^a \\ &\leq C_9 \|\nabla \theta_0^a\|_{L^\infty(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\delta \phi\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla \delta \phi\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_{10} \varepsilon^\delta \|\delta \phi\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C_{11} \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

$$(B.17) \quad \begin{aligned} - \int_{\Omega} \delta \phi (s_\varepsilon - s_0) \nabla \delta \phi \cdot \nabla \delta \theta^a &= \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} \delta \phi s_0 (1 - \gamma^s) \nabla \delta \phi \cdot \nabla \delta \theta^a \\ &\leq \|\delta \phi\|_{L^\infty(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla \delta \phi\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \left[ \|\nabla w_{\theta^a}^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \|\nabla \tilde{\theta}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \right] \\ &\leq \|\delta \phi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\delta \phi\|_{H^1(\Omega)} \left[ \|\nabla w_{\theta^a}^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)} \right] \\ &\leq \varepsilon^2 [\varepsilon + \varepsilon^{1+\delta_1}] = o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

donde las estimativas de los Lemas 7.5 y 7.9, Lema 1.1 en [38] y en las ecuaciones (7.7) y (7.11) han sido utilizadas.

- Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para el tercer y cuarto residuo obtenemos,

$$(B.18) \quad \mathcal{E}_3(\varepsilon) \leq C_{12} \|\nabla \phi_0\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla \tilde{\phi}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_{13} \varepsilon \|\tilde{\phi}^a\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{14} \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2),$$

$$(B.19) \quad \mathcal{E}_4(\varepsilon) \leq C_{15} \|\nabla \theta_0\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla \tilde{\theta}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_{16} \varepsilon \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{17} \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2).$$

- Utilizando la desigualdad del triángulo y de Cauchy-Schwarz obtenemos la siguiente estimación para el quinto residuo

$$(B.20) \quad \mathcal{E}_5(\varepsilon) \leq C_{18} \varepsilon \|\delta \theta^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_{19} \varepsilon \left[ \|w_{\tilde{\theta}^a}^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \|\tilde{\theta}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \right] \leq C_{20} \varepsilon [\varepsilon^2 + \varepsilon^{1+\delta}] = o(\varepsilon^2).$$

- Mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos las siguientes estimaciones

$$(B.21) \quad \mathcal{E}_6(\varepsilon) \leq C_{21} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)^2} \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)^2} \leq C_{22} \varepsilon \|\tilde{\mathbf{u}}^a\|_{H^1(\Omega)^2} \leq C_{23} \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2),$$

$$(B.22) \quad \mathcal{E}_7(\varepsilon) \leq C_{24} \|\theta_0\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)^2} \leq C_{25} \varepsilon \|\tilde{\mathbf{u}}^a\|_{H^1(\Omega)^2} \leq C_{26} \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2).$$

- Empleando la desigualdad generalizada de Hölder para  $\mathcal{E}_8(\varepsilon)$  tenemos

$$(B.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_8(\varepsilon) &\leq C_{27} \|\nabla \phi_0\|_{L^\infty(\mathcal{B}_\varepsilon)} \left[ \|\nabla w_\phi^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\delta \theta^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla \tilde{\phi}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \left( \|\theta_0^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \|w_{\tilde{\theta}^a}^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \|\tilde{\theta}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \|\nabla \theta_0^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \|\nabla w_{\tilde{\theta}^a}^\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} + \|\nabla \tilde{\theta}^a\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \right) \|\delta \phi\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \right] \\ &\leq C_{28} \left[ \varepsilon^{1+\delta_1} \|\delta \theta^a\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)} \left( \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^{1+\delta_2} \right) + \left( \varepsilon + \|\tilde{\theta}^a\|_{H^1(\Omega)} \right) \varepsilon^{\delta_3} \|\delta \phi\|_{H^1(\Omega)} \right] \\ &\leq C_{29} \left[ \varepsilon^{2+\delta_1+\delta_4} + \varepsilon^{2+\delta_5} + \varepsilon^{3+\delta_5} + \varepsilon^{2+\delta_5+\delta_2} + \varepsilon^{2+\delta_3+\delta_6} + \varepsilon^{2+\delta_3+\delta_6+\delta_7} \right] = o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

- Mediante la estimativa del Lema 7.5, y la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos para el último término

$$(B.24) \quad \mathcal{E}_9(\varepsilon) \leq C_{30} \|\nabla \phi_0\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \|\nabla \tilde{\phi}\|_{L^2(\mathcal{B}_\varepsilon)} \leq C_{31} \varepsilon \|\tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{32} \varepsilon^{2+\delta} = o(\varepsilon^2).$$

■



## Bibliografía

- [1] R. Amigo, S. M. Giusti, A. A. Novotny, E. C. N. Silva, and J. Sokoowski.  
Optimum design of flexensional piezoelectric actuators into two spatial dimensions.  
*SIAM Journal on Control and Optimization*, 54(2):760–789, 2016.
- [2] S. Amstutz.  
Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property.  
*Asymptotic Analysis*, 49(1-2):87–108, 2006.
- [3] S. Amstutz.  
Topological sensitivity analysis for some nonlinear PDE systems.  
*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 85(4):540–557, 2006.
- [4] S. Amstutz.  
Connections between topological sensitivity analysis and material interpolation  
schemes in topology optimization.  
*Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(6):755–765, 2011.
- [5] S. Amstutz and H. André.  
A new algorithm for topology optimization using a level-set method.  
*Journal of Computational Physics*, 216(2):573–588, 2006.
- [6] S. Amstutz and A. Bonnafé.  
Topological derivatives for a class of quasilinear elliptic equations.  
*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 107(4):367–408, 2017.
- [7] S. Amstutz and N. Dominguez.  
Topological sensitivity analysis in the context of ultrasonic non-destructive testing.  
*Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(11):936–947, 2008.
- [8] S. Amstutz and A. A. Novotny.  
Topological optimization of structures subject to von Mises stress constraints.  
*Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(3):407–420, 2010.

- [9] S. Amstutz, S. M. Giusti, A. A. Novotny, and E. A. de Souza Neto.  
Topological derivative for multi-scale linear elasticity models applied to the synthesis of microstructures.  
*International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84:733–756, 2010.
- [10] S. Amstutz, A. A. Novotny, and E. A. de Souza Neto.  
Topological derivative-based topology optimization of structures subject to Drucker-Prager stress constraints.  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 233–236:123–136, 2012.
- [11] Samuel Amstutz.  
Augmented lagrangian for cone constrained topology optimization.  
*Computational Optimization and Applications*, 49(1):101, 2011.
- [12] Samuel Amstutz.  
An introduction to the topological derivative.  
*Engineering Computations*, 39(1):3–33, 2022.
- [13] D. Auroux and M. Masmoudi.  
Image processing by topological asymptotic expansion.  
*Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2009.  
doi: 10.1007/S10851-008-0121-2.
- [14] D. Auroux, L. Cohen, and M. Masmoudi.  
Contour detection and completion for inpainting and segmentation based on topological gradient and fast marching algorithms.  
*Int. J. Biomed. Imaging*, 2011.  
doi: 10.1155/2011/592924.
- [15] Phillip Baumann and Kevin Sturm.  
Adjoint-based methods to compute higher-order topological derivatives with an application to elasticity.  
*Engineering Computations*, 39(1):60–114, 2022.
- [16] M. P. Bendsøe.  
Optimal shape design as a material distribution problem.  
*Structure Optimization*, 1(4):193–202, 1989.
- [17] Martin P Bendsøe and Ole Sigmund.  
Material interpolation schemes in topology optimization.

- 
- Archive of applied mechanics*, 69:635–654, 1999.
- [18] D. E. Campeão, S. M. Giusti, and A. A. Novotny.  
Topology design of plates considering different volume control methods.  
*Engineering Computations*, To Appear, 2013.
- [19] J. Céa, S. Garreau, Ph. Guillaume, and M. Masmoudi.  
The shape and topological optimizations connection.  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(4):713–726, 2000.
- [20] Grzegorz Dzierżanowski.  
On the comparison of material interpolation schemes and optimal composite properties in plane shape optimization.  
*Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46:693–710, 2012.
- [21] A. Ern and J. L. Guermond.  
*Theory and practice of finite elements*, volume 159.  
New York: Springer, 2004.
- [22] Juan I Farachi, Augusto A Romero Onco, and Sebastián M Giusti.  
Algoritmo de optimización topológica estructural en código abierto fenics.  
In *Mecánica Computacional*, volume 37, pages 9–9, 2019.
- [23] G. R. Feijóo.  
A new method in inverse scattering based on the topological derivative.  
*Inverse Problems*, 20(6):1819–1840, 2004.
- [24] A. Ferrer, J.C. Cante, J.A. Hernández, and J. Oliver.  
Two scale topology optimization in computational material design: An integrated approach.  
*International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 114(3):232–254, 2018.
- [25] P. Gangl and K. Sturm.  
Automated computation of topological derivatives with application to nonlinear elasticity and reaction-diffusion problems.  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 398:115288, 2022.  
ISSN 0045-7825.  
doi: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115288>.  
URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782522004030>.

- [26] Peter Gangl.  
A multi-material topology optimization algorithm based on the topological derivative.  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 366:113090, 2020.
- [27] Peter Gangl and Kevin Sturm.  
A simplified derivation technique of topological derivatives for quasi-linear transmission problems.  
*ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 26:106, 2020.
- [28] Peter Gangl, Samuel Amstutz, and Ulrich Langer.  
Topology optimization of electric motor using topological derivative for nonlinear magnetostatics.  
*IEEE Transactions on Magnetics*, 52(3):1–4, 2015.
- [29] S. M. Giusti, A. A. Novotny, J. E. Muñoz Rivera, and J. E. Esparta Rodríguez.  
Strain energy change to the insertion of inclusions associated to a thermo-mechanical semi-coupled system.  
*International Journal of Solids and Structures*, 50(9):1303–1313, 2013.
- [30] S. M. Giusti, A. Ferrer, and J. Oliver.  
Topological sensitivity analysis in heterogeneous anisotropic elasticity problem. Theoretical and computational aspects.  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 311:134–150, 2016.
- [31] Sebastián Miguel Giusti, Augusto Alejandro Romero, and Javier Eduardo Salomone.  
Optimal topological design of a thermal isolator for a monopropellant space thruster.  
*Modeling and Optimization in Space Engineering: State of the Art and New Challenges*, pages 141–167, 2019.
- [32] Martín M Guardiola, Constanza Navarta Perassolo, Marcos Vicentin, Augusto Romero Onco, and Sebastián M Giusti.  
Obtención de la distribución de estructuras de impresión de mínimo tiempo para la fabricación aditiva.  
In *Mecánica Computacional*, volume 39, pages 1027–1036, 2022.
- [33] George W Hart.  
*Multidimensional analysis: algebras and systems for science and engineering*. Springer Science & Business Media, 1995.

- [34] M. Iguernane, S.A. Nazarov, J.-R. Roche, J. Sokolowski, and K. Szulc.  
Topological derivatives for semilinear elliptic equations.  
*International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 19(2):  
191–205, 2009.
- [35] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia.  
*An introduction to variational inequalities and their applications*.  
Classics in Applied Mathematics 31. SIAM, 2000.
- [36] Hans Petter Langtangen and Geir K Pedersen.  
*Scaling of differential equations*.  
Springer Nature, 2016.
- [37] A. A. Novotny and J. Sokołowski.  
*Topological derivatives in shape optimization*.  
Interaction of Mechanics and Mathematics. Springer, Berlin, 2013.
- [38] A. A. Novotny and J. Sokołowski.  
*An introduction to the topological derivative method*.  
SpringerBriefs in Mathematics. Springer, 2020.
- [39] A. A. Novotny, J. Sokołowski, and A. Żochowski.  
*Applications of the Topological Derivative Method*.  
Springer International Publishing. Springer, 2019.
- [40] L. Obert and W. I. Duvall.  
*Rock mechanics and the design of structures in rock*.  
John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [41] AA Romero Onco and Sebastian Miguel Giusti.  
A robust topological derivative-based multi-material optimization approach:  
Optimality condition and computational algorithm.  
*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 366:113044, 2020.
- [42] Augusto A Romero Onco and Sebastián M Giusti.  
Una técnica de optimización topológica considerando múltiples materiales.  
In *Mecánica Computacional*, volume 36, pages 1479–1479, 2018.
- [43] Augusto A Romero Onco and Sebastian M Giusti.

- Variación de propiedades constitutivas efectivas considerando optimización topológica multimaterial.  
In *Mecánica Computacional*, volume 37, pages 1569–1569, 2019.
- [44] Augusto A Romero Onco and Sebastián M Giusti.  
Control óptimo de actuadores piezoeléctricos flexibles.  
In *Mecánica Computacional*, volume 38, pages 1453–1453, 2021.
- [45] Augusto A Romero Onco and Sebastián M Giusti.  
Síntesis de mecanismos de lámina emergente mediante el uso de derivada topológica.  
In *Mecánica Computacional*, volume 38, pages 1055–1055, 2021.
- [46] Augusto Romero Onco and Sebastián M Giusti.  
Diseño de actuadores flexibles multifísicos basado en derivada topológica.  
In *Mecánica Computacional*, volume 39, pages 1067–1067, 2022.
- [47] C. B. W. Pedersen, T. Buhl, and O. Sigmund.  
Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms.  
*International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(12):2683–2705, 2001.
- [48] A. Romero.  
Optimum design of two-material bending plate compliant devices.  
*Engineering Computations*, 39(1):395–420, 2022.
- [49] B. Samet, S. Amstutz, and M. Masmoudi.  
The topological asymptotic for the Helmholtz equation.  
*SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(5):1523–1544, 2003.
- [50] O. Sigmund.  
On the design of compliant mechanisms using topology optimization.  
*Journal of Structural Mechanics*, 25(4):493–524, 1997.
- [51] O. Sigmund.  
Design of multiphysics actuators using topology optimization—part i: One-material structures.  
*Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(49-50):6577–6604, 2001.
- [52] O. Sigmund.

- Design of multiphysics actuators using topology optimization–part ii: Two-material structures.  
*Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(49-50):6605–6627, 2001.
- [53] Ole Sigmund.  
A 99 line topology optimization code written in matlab.  
*Structural and multidisciplinary optimization*, 21:120–127, 2001.
- [54] J. Sokołowski and A. Żochowski.  
On the topological derivative in shape optimization.  
*SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(4):1251–1272, 1999.
- [55] G. Stampacchia.  
Le problème de dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.  
*Annales de l'Institut Fourier*, 15(1):189–257, 1965.  
doi: 10.5802/aif.204.  
URL <http://www.numdam.org/articles/10.5802/aif.204/>.
- [56] Mathias Stolpe and Krister Svanberg.  
An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization.  
*Structural and Multidisciplinary Optimization*, 22(2):116–124, 2001.
- [57] K. Sturm.  
Topological sensitivities via a lagrangian approach for semilinear problems.  
*Nonlinearity*, 33(9):4310, 2020.  
doi: 10.1088/1361-6544/ab86cb.  
URL <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6544/ab86cb>.
- [58] F. Tröltzsch.  
*Optimal control of partial differential equations: theory, methods, and applications*.  
American Mathematical Society, 2010.
- [59] Fengwen Wang, Boyan Stefanov Lazarov, and Ole Sigmund.  
On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization.  
*Structural and multidisciplinary optimization*, 43:767–784, 2011.

- [60] Pablo N Wierna, Augusto Romero Onco, and Javier Salomone.  
Diseño óptimo del tren de aterrizaje principal de un vehículo aéreo no tripulado.  
In *Mecánica Computacional*, volume 37, pages 21–21, 2019.
- [61] B. Zhu, X. Zhang, H. Zhang, J. Liang, H. Zang, H. Li, and R. Wang.  
Design of compliant mechanisms using continuum topology optimization: a review.  
*Mechanism and Machine Theory*, 143:103622, 2020.