

INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE CORTE EN LA PREDICCIÓN DE DESPLAZAMIENTOS EN VIGAS DE SECCIÓN RECTANGULAR

Alejandro T. Brewer¹, Sergio Preidikman^{1,2} y Raúl J. Ritta¹

¹ *Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba. Casilla de Correo 916, CP 5000 Córdoba, Argentina. alejtulbrewer@gmail.com*

² *CONICET – Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Av. Rivadavia 1917, Bs. As., Argentina.*

Resumen: En este trabajo se presenta una teoría que permite calcular la distribución de tensiones de corte, producidas por fuerzas de corte, en secciones homogéneas de forma arbitraria. A partir de las tensiones, es posible determinar los coeficientes de corte que permiten modelar vigas utilizando el modelo de Timoshenko. Cuando se utilizan secciones rectangulares, es común adoptar como coeficiente de corte el valor 0.833 independientemente de la relación alto ancho de la sección. Esto conduce en los modelos de elementos finitos de vigas de Timoshenko al conocido bloqueo por corte, (secciones de poca altura), salvo que se integre numéricamente en forma reducida. Sin embargo, para secciones de poca altura, la teoría de elasticidad preve un valor diferente a 0.833, lo que, según la referencia [1], evitaría el bloqueo aun sin recurrir a una integración numérica reducida. Es el objeto de este trabajo verificar la certeza de dicho aserto.

Palabras claves: *vigas, coeficientes de corte, Timoshenko.*

1. INTRODUCCIÓN

El diseño de vigas utilizando elementos unidimensionales formulados en el marco del Método de Elementos Finitos (MEF) requiere la caracterización de la rigidez de la sección, que depende del material, de las propiedades geométricas de la misma y del tipo de esfuerzo a que se encuentra sometida la estructura. Entre las propiedades geométricas de la sección se encuentran el área, los momentos de inercia, el momento de inercia polar y el área de corte, y se corresponden con los esfuerzos normales, de flexión, torsión y corte, respectivamente.

En estructuras aeronáuticas son de particular interés las secciones de pared delgada y las configuraciones de una o varias celdas. En trabajos previos, [1,2], se implementaron las teorías presentadas en [3], adecuadas para secciones sólidas, delgadas abiertas, de una celda, o de varias celdas, sometidas a esfuerzos de torsión y corte, comparando los resultados obtenidos con otros que figuran en la literatura, [3, 4, 5]. La formulación hace uso de la teoría de la elasticidad y se particulariza al caso de una viga en voladizo. No obstante, los resultados pueden ser aplicados a secciones transversales de cualquier forma, y permiten caracterizar los valores de las tensiones de corte, del momento de inercia polar para secciones de forma arbitraria y la posición del centro de corte. Conocidas las tensiones de corte, se pueden calcular los coeficientes que permiten ponderar las áreas de corte, coeficientes que resultan necesarios si se quiere modelar vigas siguiendo la teoría de Timoshenko [6]. En relación a estos coeficientes, Pilkey [3] sostiene que el cálculo de los coeficientes de corte en el marco de la citada teoría, permitiría resolver vigas utilizando el modelo de Timoshenko, que incluye la deformación por corte, sin que las matrices elementales de rigidez presenten el comportamiento de bloqueo, i.e., estarían libres de bloqueo sin tener que recurrir a la integración reducida. A fin de aclarar el alcance de tal afirmación, en el presente trabajo se presenta una teoría que permite calcular los coeficientes de corte y se cuantifica el desplazamiento de una viga en voladizo, con diferentes longitudes y diferentes secciones rectangulares, comparando las formulaciones de Bernoulli (sin corte) y de Timoshenko (con corte, sin y con integración reducida).

2. CÁLCULO DE LAS TENSIONES DE CORTE

En la Figura 1 se muestra una viga prismática y homogénea en voladizo cuya sección ubicada en la posición x está sometida a esfuerzos de corte y flexión, [3]. Las fuerzas de corte actúan en el centro de corte. Los resultados que se presentan en esta sección son válidos para secciones homogéneas de cualquier forma, y vigas sometidas a la acción de cualquier carga y condición de borde.

La expresión que permite encontrar las tensiones de corte cuando actúa solamente la carga V_x , se obtienen a partir de resolver en el dominio de la sección, $\Omega(x)$, la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\nabla^2 \Phi(y, z) = 2(I_{yz}y - I_z z), \quad (y, z) \in \Omega(x) \quad (1)$$

sujeta a la condición de borde $\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi(y, z) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}$, $\mathbf{y} \mathbf{h} = [h_y, h_z]$. La función $\Phi(y, z)$, posee derivadas terceras continuas, esto es, $\Phi(y, z) \in C^3$, y se elige de tal modo que las ec. (2) satisfagan idénticamente las ecuaciones de compatibilidad del problema. A partir de $\Phi(y, z)$, las tensiones de corte resultan:

$$\tau_{xy} = \Delta^{-1} V_z (\Phi_{,y} - h_y) \quad \text{y} \quad \tau_{xz} = \Delta^{-1} V_z (\Phi_{,z} - h_z) \quad (2)$$

donde: ν representa al módulo de Poisson, y I_y, I_z e I_{yz} los momentos y productos de inercia medidos respecto del baricentro, y:

$$\Delta = 2(1+\nu) [I_y I_z - I_{yz}^2] \quad ; \quad h_y = \nu (I_z y z - 2^{-1} I_{yz} (y^2 - z^2)) \quad \text{y} \quad h_z = -\nu (I_{yz} y z + 2^{-1} I_z (y^2 - z^2)) \quad (3)$$

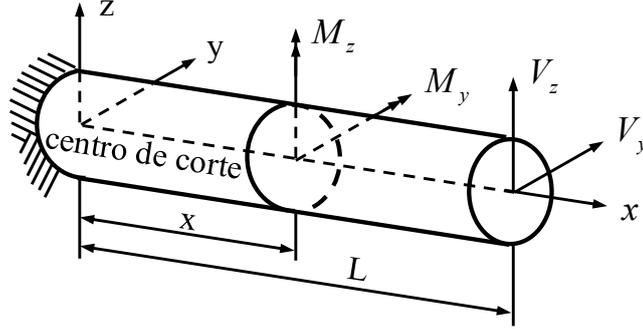


Figura 1. Viga sometida a esfuerzos de corte y flexión.

3. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS

La ecuación en residuos ponderados para la ecuación diferencial (1) es:

$$\int_{\Omega(x)} W(y, z) [\nabla^2 \Phi(y, z) - 2(I_{yz}y - I_z z)] d\Omega = 0 \quad (4)$$

que luego de algunas transformaciones resulta en:

$$\int_{\Omega(x)} \nabla W \cdot \nabla \Phi d\Omega - \int_{\Omega(x)} \nabla W \cdot \mathbf{h} d\Omega + \int_{\Omega(x)} W 2(1+\nu)(I_{yz}y - I_z z) d\Omega = 0 \quad (5)$$

Que es la forma débil de la ecuación diferencial que gobierna la distribución de las tensiones de corte para una carga actuando en la dirección del eje z, e incluye las condiciones de contorno. La función $\Phi(\xi, \eta)$, en el dominio del elemento de referencia, se escribe utilizando las funciones de forma $\mathbf{N}(\xi, \eta)$ como $\Phi^e(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \Phi^e$, y en la que el vector columna Φ^e contiene los valores nodales de $\Phi(\xi, \eta)$. Reemplazando esta aproximación en la (5) resulta la siguiente expresión a nivel elemental:

$$\mathbf{k}^e \Phi^e = \mathbf{p}_z^e \quad \text{con} \quad \mathbf{k}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad ; \quad \mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1} [\partial \mathbf{N} / \partial \xi \quad \partial \mathbf{N} / \partial \eta]^T \quad ; \quad \mathbf{y} \quad (6)$$

$$\mathbf{p}_z^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ 2^{-1} \nu \mathbf{B}^T [h_1 \quad h_2]^T + 2(1+\nu) \mathbf{N}^T (I_z \mathbf{N} z - I_{yz} \mathbf{N} y) \right\} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (7)$$

y en las que $\mathbf{h} = [h_y, h_z] = 2^{-1} \nu [h_1, h_2]$. En forma similar, puede tratarse la carga V_y .

4. CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE DEFORMACION POR CORTE

La determinación de los coeficientes de deformación por corte se logra igualando la energía de deformación de corte por unidad de longitud para una viga, calculada según la teoría de la elasticidad, U_0 , con la correspondiente de la teoría técnica de vigas, utilizando coeficientes de corte, U_{viga} :

$$U_0 = \int (2G)^{-1} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2) dA \quad ; \quad U_{viga} = (2GA)^{-1} (\alpha_{yy} V_y^2 + \alpha_{zz} V_z^2 + \alpha_{yz} V_y V_z + \alpha_{zy} V_z V_y) \quad (8)$$

En la ec. (8), las tensiones se calculan a partir de las expresiones (2) cuando actúa la carga V_z y expresiones similares cuando actúa la carga V_y . En particular, cuando solamente actúa V_z se obtiene α_{zz} :

$$\alpha_{zz} = A \Delta^{-2} \int (\nabla \Phi^e - \mathbf{h}^e)^2 dA = A \Delta^{-2} \int [(\Phi_{,y} - h_y)^2 + (\Phi_{,z} - h_z)^2] dA \quad (9)$$

4.1 COEFICIENTES DE DEFORMACIÓN POR CORTE PARA UNA SECCIÓN RECTANGULAR

La ec.(9) es completamente general y puede aplicarse a secciones de forma arbitraria. Se observa que los coeficientes dependerán del módulo de Poisson. En la Tabla 1 se muestran los valores de obtenidos para el coeficiente de deformación por corte para distintas relaciones alto (h), ancho (b) y un coeficiente de Poisson $\nu=0.3$.

Tabla 1: Coeficientes de deformación por corte para sección rectangular.

h/b	α_{zz} (ec. 9)	k (ec. 10)	α_{zz}	k (ec. 10)
20.00	1.20	0.01	1.2	0.01
10.00	1.20	0.04	1.2	0.04
5.00	1.20	0.15	1.2	0.15
2.00	1.20	0.96	1.2	0.96
1.00	1.21	3.86	1.2	3.85
0.50	1.27	14.48	1.2	15.38
0.20	2.09	55.15	1.2	96.15
0.10	5.59	82.55	1.2	384.62
0.02	131.64	87.65	1.2	9615.38
0.01	530.78	86.95	1.2	38461.54

En la tercer columna se muestran los valores de k , ver ec. (10), que mide la relación entre parámetros que participan en la definición de la rigidez al corte y la rigidez flexional. En la cuarta columna se muestra el valor del coeficiente α_{zz} , generalmente adoptado para sección rectangular, que se obtiene cuando $\nu=0$. Se observa que para secciones altas, $h/b > 1$, el coeficiente de Poisson no influye en la definición de α_{zz} , mientras que para secciones bajas, $h/b < 1$, se observa una variación tanto mayor cuanto más baja es la sección. Este comportamiento también se reporta en la Ref. [7]. Esta variación impacta sobre el coeficiente k (que como se verá a continuación participa en la definición de los coeficientes de las matrices de rigidez), que crece significativamente cuando se ensancha la sección y $\alpha_{zz}=1.2$ (ver 5ta col en la Tabla 1).

5. INFLUENCIA DEL COEFICIENTE DE CORTE EN EL DESPLAZAMIENTO DE UNA VIGA

A continuación se calcula el desplazamiento en la dirección z , U_z , del extremo de una viga en voladizo, de sección rectangular, para distintas longitudes L y distintas relaciones h/b de la sección. Con este objetivo, se utilizan las formulaciones de Bernouilli, que no contempla la deformación por corte, y Timoshenko que si la incluye:

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & -K_1 & K_2 \\ K_2 & K_3 & -K_2 & K_4 \\ -K_1 & -K_2 & K_1 & -K_2 \\ K_2 & K_4 & -K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_z^i \\ \phi^i \\ U_z^j \\ \phi^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_z^i \\ M^i \\ P_z^j \\ M^j \end{bmatrix} ; \quad k = \frac{1}{\alpha_{zz}} \frac{GA}{EI_y} \quad (10)$$

Los valores de k que participan en la definición de los coeficientes de rigidez se toman de la Tabla 1. La ec.(10) muestra la forma general que adopta la matriz elemental de rigidez para un elemento plano de 2 nodos y la Tabla 2 los valores de los coeficientes según la formulación considerada (Bernouilli, y Timoshenko sin integracion reducida (s/IR) y considerando la misma (c/IR)).

Tabla 2: Coeficientes de rigidez para las formulaciones de viga de Bernouilli y Timoshenko.

Formulación	K_1	K_2	K_3	K_4
Viga de Bernouilli	$12EIh_e^{-3}$	$6EIL^{-2}$	$4EIL^{-1}$	$2EIL^{-1}$
Timoshenko (s/IR)	$k EIL^{-1}$	$2^{-1}k EI$	$EIL^{-1} + 3^{-1}k EI L$	$-EIL^{-1} + 6^{-1}k EI L$
Timoshenko (c/IR).	$k EIL^{-1}$	$2^{-1}k EI$	$EIL^{-1} + 4^{-1}k EI L$	$-EIL^{-1} + 4^{-1}k EI L$

En las Figuras 2 y 3 se muestran los desplazamientos en el extremo, obtenidos, con 20 elementos, para una sección en la que $b=1$ cm y $E=2.1$ kg/cm² y $L=10, 20, 35, 60,$ y 100 cm. Los desplazamientos se han referido a los obtenidos utilizando la formulación de Bernouilli, (U_z/U_B), por lo que la ordenada 1 representa el resultado obtenido según esta formulación.

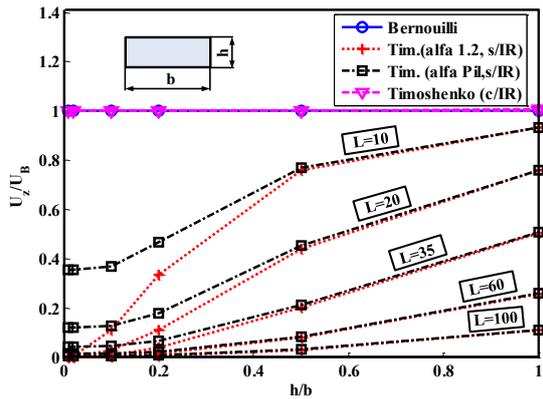


Figura 2. Desplazamientos para $h/b \leq 1$

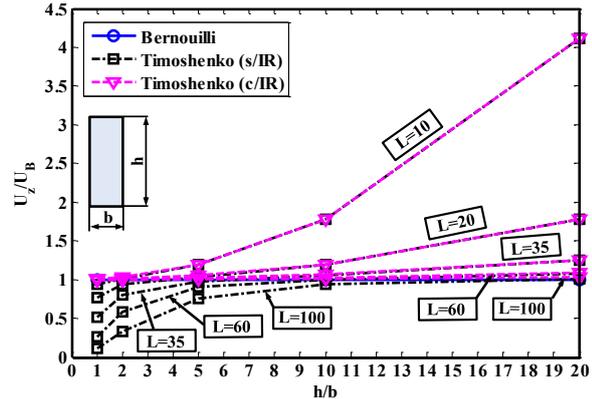


Figura 3. Desplazamientos para $h/b \geq 1$

En la Fig. 2 se muestran los resultados para la relación $h/b \leq 1$: para el modelo de Bernoulli el resultado es $U_z/U_B = 1, \forall L$; para el modelo de Timoshenko (c/IR), utilizando uno u otro coeficiente α_{zz} , se obtiene $U_z/U_B = 1 \pm 0.001, \forall L$; para el modelo de Timoshenko (s/IR) la respuesta muestra grandes variaciones tanto cuando varía la longitud de la viga como la relación h/b , proporcionando un desplazamiento muy por debajo de 1. Cuando el coeficiente $\alpha_{zz} = 1.2$, la respuesta bloquea tanto más cuanto menor es la relación h/b . Cuando se utiliza el coeficiente α_{zz} calculado con la ec. (9) (identificado en la Fig. como alfa Pil, s/IR), la respuesta mejora un poco para vigas cortas respecto del valor obtenido con $\alpha_{zz} = 1.2$, siendo esta diferencia más significativa para relaciones $h/b \leq 0.5$. En la Fig. 3 se muestran los resultados para las relaciones $h/b \geq 1$ (la ec. (9) provee $\alpha_{zz} = 1.2$) y la solución con la formulación de Timoshenko c/IR se aleja del valor 1 a medida que la viga es más corta y la relación h/b aumenta. El modelo de Timoshenko s/IR, muestra desplazamientos menores o coincidentes con la formulación de Timoshenko c/IR (esto último a partir de cierto valor de la relación h/b). Cuando la viga es más corta, el valor de la relación h/b donde comienzan a coincidir las predicciones de ambas teorías se acerca a 1.

6. CONCLUSIONES

A partir de la Tabla 1 se observa que el coeficiente α_{zz} calculado con la ec. (9) muestra un aumento significativo cuando la sección es más baja, resultando en valores de la relación de rigidez k mucho menores de las que se obtienen cuando $\alpha_{zz} = 1.2$. No obstante, ver Figura 2, si bien la utilización del α_{zz} calculado con la ec. (9) en la formulación de Timoshenko s/IR mejora respecto a los valores obtenidos con $\alpha_{zz} = 1.2$, los resultados quedan por debajo de lo previsto por la teoría de Bernoulli. Por otro lado, la formulación de Timoshenko c/IR, para la relación $h/b \leq 1$, muestra resultados prácticamente coincidentes con la viga de Bernoulli, independientemente del valor de α_{zz} que se utilice. Cuando la relación $h/b \geq 1$, el valor que arroja la ec. (9) es $\alpha_{zz} = 1.2$ y la respuesta se comporta según lo descrito en la Figura 3.

7. REFERENCIAS

- [1] A. T. BREWER, C. N. GÓMEZ, y S. PREIDIKMAN, *Análisis de vigas de sección arbitraria sometidas a tensiones de corte causadas por esfuerzos de torsión y corte: Parte 1-Formulación teórica*, CAIA III, La Plata, 2014, URL: <http://www.caia.ing.unlp.edu.ar/Actas-CAIA3/17.pdf>
- [2] A. T. BREWER, C. N. GÓMEZ, y S. PREIDIKMAN, *Análisis de vigas de sección arbitraria sometidas a tensiones de corte causadas por esfuerzos de torsión y corte: Parte 2-Formulación mediante Elementos Finitos*, CAIA III, La Plata, 2014, URL: <http://www.caia.ing.unlp.edu.ar/Actas-CAIA3/18.pdf>
- [3] W. D. PILKEY, *Analysis and Design of Elastic Beams-Computational Methods*, John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [4] N. W. MURRAY, *Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures*, Clarendon Press Oxford, 1986.
- [5] R. M. RIVELLO, *Theory and Analysis of Flight Structures*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- [6] M. A. BHATTI, *Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures*, John Wiley & Sons, New York, 2006.
- [7] F. Gruttmann AND W. WAGNER, *Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections*, Computational Mechanics, 27 (2001), pp. 199-207.