



FACULTAD
DE CIENCIAS
ECONÓMICAS



Universidad
Nacional
de Córdoba

REPOSITORIO DIGITAL UNIVERSITARIO (RDU-UNC)

Anotaciones sobre la tasa instantánea y su relación con la tasa de interés y de descuento

Elvira Delia Carrizo, Oscar A. Margaria,
Gustavo Alejandro Santillán

Ponencia presentada en XL Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática
Financiera realizado en 2019 en Facultad de Ciencias Económicas – Universidad Nacional del
Nordeste. Resistencia. Chaco, Argentina



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual
4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

ANOTACIONES SOBRE LA TASA INSTANTÁNEA Y SU RELACIÓN CON LA TASA DE INTERÉS Y DE DESCUENTO

CARRIZO, Elvira

MARGARÍA, Oscar

SANTILLÁN, Gustavo

Departamento: Estadística y Matemática; Facultad de Ciencias Económicas; Universidad Nacional de Córdoba

elviracarrizo@yahoo.com.ar; oscar.margaria@unc.edu.ar; gusalesanti@gmail.com

Área Técnica

RESUMEN

La tasa instantánea de una operación financiera, es una tasa instantánea única, la cual opera en el campo continuo. Esta tasa define la intensidad con que varía el capital en la operación financiera a medida que transcurre el tiempo, para que al final de la unidad de tiempo, el incremento de la unidad monetaria inicial sea la tasa de interés de la operación financiera, definida en esta operación como tasa instantánea de interés o el decrecimiento de la unidad de capital final represente la tasa de descuento de dicha operación financiera, conceptualizada aquí como tasa instantánea de descuento.

Para igual unidad de tiempo: numéricamente se verifica, que a través de la relación de equivalencia financiera entre la tasa de interés y la tasa instantánea, la tasa de interés es mayor a la tasa instantánea y mediante la relación de equivalencia entre la tasa de descuento y la tasa instantánea, se verifica que la tasa de descuento es menor a la tasa instantánea.

Así, mediante las relaciones de equivalencia financiera entre estas tres tasas analizadas, se verifica que la tasa instantánea es un valor intermedio entre sus equivalentes tasas de interés y de descuento, menor a su equivalente tasa de interés y es mayor a su respectiva tasa de descuento.

Se verifica además que, la diferencia entre la tasa de interés y la tasa instantánea más la diferencia entre la tasa instantánea y la tasa de descuento, es igual a la diferencia entre la tasa de interés y la tasa de descuento, o sea igual al interés de la tasa de descuento o al descuento de la tasa de interés.

Palabras Claves:

Tasa instantánea – Factor capitalización – Factor actualización – Relaciones de equivalencia financiera

INTRODUCCION

En XXXIII Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática Financiera realizadas en la Universidad de Morón en Octubre de 2012 se presentó el tema “La tasa instantánea de la operación financiera”, con el objetivo de analizar y destacar la importancia de ese elemento fundamental en la operación financiera. Considerando la insistencia en enseñar y transmitir este tema de la Matemática Financiera inculcado por el profesor Dr. Fernando Carrizo, es, que en aquel entonces las Profesoras Ana Karl de Vega y Elvira Carrizo decidieron difundir parte de su trabajo y a la vez tratarlo con una perspectiva algo diferente. En aquel trabajo, se mostró que la tasa de interés, utilizada para capitalizar los intereses, mide al final de cada unidad de tiempo el crecimiento continuo del capital, que resulta de la acción de la tasa instantánea, y que, la fuerza del crecimiento del capital inicial es igual a la fuerza del decrecimiento del capital final.

Dando continuidad a la idea de difundir este fundamental tema entre quienes tienen la misión de transmitir los conceptos financieros se retoma en este trabajo la temática referida a la tasa instantánea.

En esta oportunidad, se intenta dar cuenta de que:

- mediante el cálculo de la tasa instantánea a partir del factor de capitalización aplicado a la unidad monetaria inicial en una unidad de tiempo y luego a partir del factor de actualización aplicado a la unidad monetaria final en la unidad de tiempo, se obtiene la misma tasa instantánea.
- la tasa instantánea es menor a su equivalente tasa de interés, pero a la vez mayor a su correspondiente tasa de descuento.
- el interés de la tasa de descuento o el descuento de la tasa de interés, es igual a la diferencia entre la tasa de interés respecto a la tasa instantánea, sumada a la diferencia entre la tasa instantánea y la tasa de descuento.

DESARROLLO

La tasa instantánea, simbolizada con la letra griega delta δ , define en la operación financiera, la intensidad con que varía el capital a medida que transcurre el tiempo y se puede definir como tasa instantánea de interés, o como tasa instantánea de descuento, es una tasa instantánea única. Cuando se aplica al capital inicial, mide el continuo incremento de dicho capital al cabo de la unidad de tiempo y cuando esta tasa instantánea se aplica al capital final, mide en dicha unidad de tiempo el decrecimiento continuo de dicho capital.

La tasa instantánea en la operación financiera, opera en el campo continuo y calcula, tanto el crecimiento del capital inicial, utilizando el operador financiero de capitalización, como el decrecimiento del capital final, mediante el operador financiero de actualización.

Representa en la operación financiera, la intensidad de la variación de la unidad de capital en una unidad de tiempo, cuando dividida dicha unidad de tiempo en infinitas partes posibles, considera que la variación o el cambio generado en cada uno de los infinitésimos en que se divide esa unidad de tiempo es el mismo.

En el operador financiero de capitalización, la tasa instantánea representa el incremento de la unidad de capital inicial al cabo de una unidad de tiempo, suponiendo que el incremento o crecimiento del capital inicial en cada uno de los infinitésimos en que se divide la unidad de tiempo es igual al incremento del primer infinitésimo.

En el operador financiero de actualización, la tasa instantánea representa el decrecimiento de la unidad de capital final al cabo de una unidad de tiempo, suponiendo que el decrecimiento del capital final en cada uno de los infinitésimos en que se divide la unidad de tiempo es igual al decrecimiento del último infinitésimo.

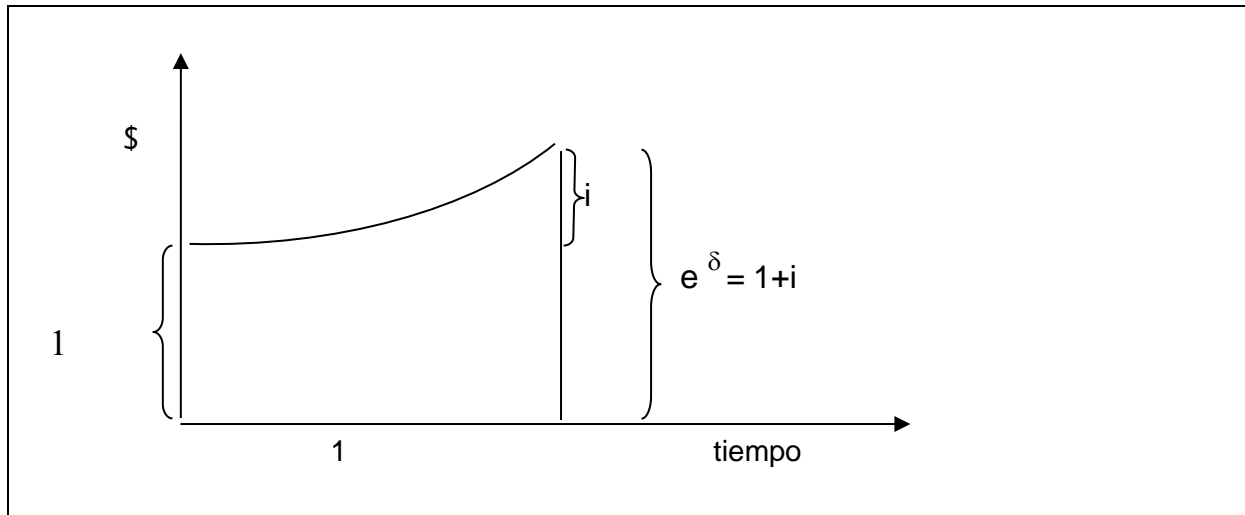
1.- Tasa instantánea aplicada al capital inicial

La equivalencia entre la tasa instantánea y la tasa de interés cuyas unidades de tiempo coinciden y ambas tasas son aplicadas al capital inicial, una realizando los cálculos en el campo continuo y la otra en el campo discreto, generan operaciones financieras equivalentes.

$$f_{(m)} = \begin{matrix} \nearrow & f_{(o)} (1 + i)^m \\ \searrow & f_{(o)} e^{\delta m} \end{matrix}$$

Se observa en la siguiente grafica (Figura 1) , el capital final de la unidad monetaria inicial, al cabo de una unidad de tiempo, el que se representa con ambas tasas, segun el campo en el cual se trabaje:

Figura 1: Capital final



Fuente Elaboración Propia

Referido a una unidad de tiempo:

$$1 + i = e^{\delta} \quad (1)$$

La expresión (1) representa el capital final de la unidad monetaria inicial, en una unidad de tiempo, calculado con la tasa instantánea y con la tasa de interés.

i → tasa de interés, incremento de la unidad monetaria inicial en una unidad de tiempo.

δ → tasa instantánea, utilizada en el factor de capitalización, representa el incremento de la unidad de **capital inicial** en una unidad de tiempo, suponiendo que el incremento en cada uno de los infinitésimos en que se ha dividido la unidad de tiempo es igual al incremento del **primer infinitésimo**, conceptualizada como tasa instantánea de interés.

A partir de la igualdad (1), se calcula la tasa de interés y la tasa instantánea para la unidad de tiempo dada.

Por un lado, se despeja la tasa de interés y se obtiene la tasa de interés equivalente a la tasa instantánea que actúa en la operación financiera:

$$i = e^{\delta} - 1$$

Por otra parte, se aplica una de las propiedades de los logaritmos en (1), y se obtiene el cálculo de la tasa instantánea, equivalente a una tasa de interés dada:

$$\delta = \ln(1+i) \quad (2)$$

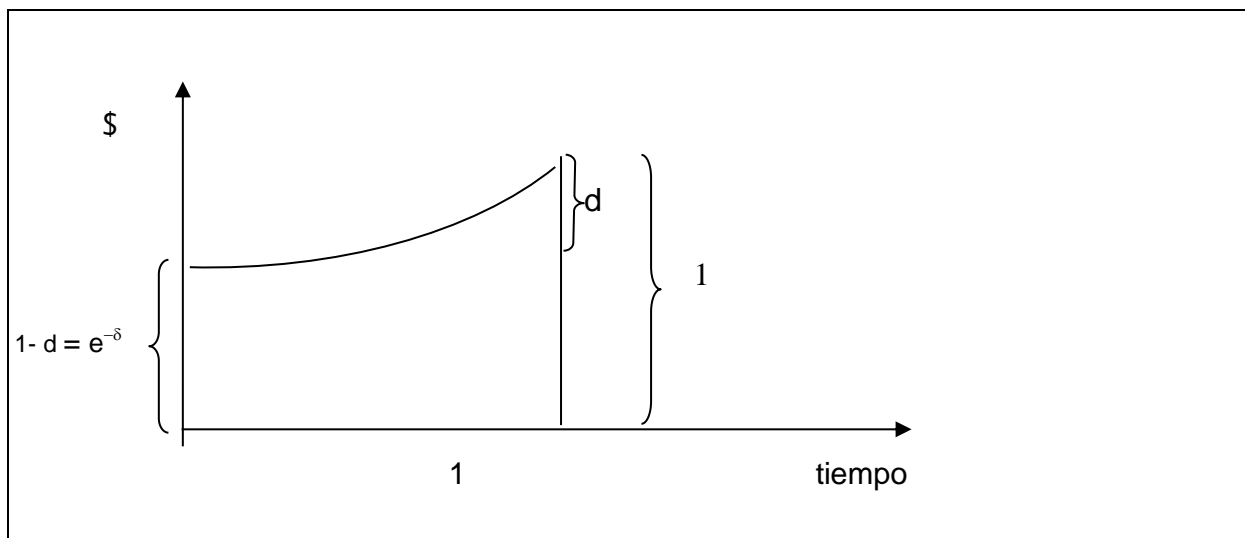
2.- Tasa instantánea aplicada al capital final

La equivalencia entre la tasa instantánea y la tasa de descuento cuyas unidades de tiempo coinciden y ambas tasas son aplicadas al capital final, una realizando los cálculos en el campo continuo y la otra en el campo discreto, generan operaciones financieras equivalentes.

$$f_{(0)} = \begin{cases} f_{(m)} (1 - d)^m \\ f_{(m)} e^{-\delta m} \end{cases}$$

Se observa en la siguiente gráfica (Figura 2), el capital inicial de la unidad monetaria final, al cabo de una unidad de tiempo, el que se representa con ambas tasas, según el campo en el cual se trabaje:

Figura 2: Capital inicial



Fuente Elaboración Propia

Referido a una unidad de tiempo:

$$1 - d = e^{-\delta} \quad (3)$$

La igualdad (3) representa el capital inicial de la unidad monetaria final, en una unidad de tiempo, calculado con la tasa instantánea y con la tasa de descuento.

d → tasa de descuento, decrecimiento de la unidad monetaria final en una unidad de tiempo.

$\delta \longrightarrow$ tasa instantánea, utilizada en el factor de actualización, se refiere al decrecimiento de la unidad de **capital final** en una unidad de tiempo, suponiendo que el descuento en cada uno de los infinitésimos en que se ha dividido la unidad de tiempo es igual al descuento o decrecimiento del **último infinitésimo**, conceptualizada como tasa instantánea de descuento.

A partir de la expresión (3), se despeja la tasa de descuento para la unidad de tiempo dada a partir de la tasa instantánea:

$$d = 1 - e^{-\delta}$$

Por otra parte, se aplica una de las propiedades de los logaritmos en (3), se obtiene el cálculo de la tasa instantánea, equivalente a la tasa de descuento dada:

$$-\delta = \ln(1 - d)$$

Operando: $\delta = -\ln(1 - d)$ (4)

3.- Relación entre la tasa instantánea aplicada al capital inicial y la tasa instantánea aplicada al capital final

De lo expuesto anteriormente, y sabiendo que:

$$(1 + i) = (1 - d)^{-1}$$

Representa el capital final de la unidad monetaria inicial en una unidad de tiempo, y a su vez es el factor de capitalización.

Y que:

$$(1 + i)^{-1} = (1 - d)$$

Representa el capital inicial de la unidad monetaria final en una unidad de tiempo, y a su vez es el factor de actualización.

En la expresión (2) se observa que la tasa instantánea de una determinada unidad de tiempo, se obtiene mediante el cálculo del logaritmo natural del factor de capitalización aplicado a la unidad monetaria inicial, en esa unidad de tiempo, por lo cual se puede indicar a partir de ella (2) y según la tasa financiera equivalente que se utilice en el factor de capitalización, que:

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1 - d)^{-1}$$

A su vez, en la expresión (4) se observa que la tasa instantánea de una determinada unidad de tiempo, se obtiene mediante el cálculo del menos logaritmo natural del factor de actualización de un peso final al cabo de esa unidad de tiempo, por lo cual se puede indicar a partir de ella (4) y según la tasa financiera equivalente que se utilice en el factor de actualización, que:

$$\delta = -\ln(1 - d) = -\ln(1 + i)^{-1}$$

¿Es posible referirse a una relación de equivalencia entre la tasa instantánea aplicada al capital inicial conceptualizada como tasa instantánea de interés y la tasa instantánea aplicada al capital final definida como tasa instantánea de descuento?. De acuerdo a lo analizado resulta ser la misma tasa, *la tasa instantánea*, la cual, conceptualmente bajo los supuestos ya conocidos, hace referencia al incremento infinitesimal de la unidad de capital inicial en la unidad de tiempo, en un caso y en el otro se refiere al decrecimiento infinitesimal de la unidad de capital final en dicha unidad de tiempo.

Si se observa el siguiente ejemplo numérico:

Para una tasa de interés mensual del 0,04 y su equivalente tasa de descuento mensual del 0,03846154 ($d=0,04 \div 1,04$), se calcula la tasa instantánea mensual correspondiente.

A partir de la expresión (2), se realiza el cálculo de la tasa instantánea mensual, utilizando las equivalentes tasa de interés y de descuento, que operan en el factor de capitalización:

$\delta = \ln(1 + 0,04) = \ln(1 - 0,03846154)^{-1} = 0,03922071$ mensual instantánea, calculada con las equivalentes tasas de interés y de descuento mensual.

A partir de la expresión (4), se procede a calcular la tasa instantánea mensual, utilizando las equivalentes tasas de descuento y de interés, que operan en el factor de actualización:

$\delta = -\ln(1 - 0,03846154) = -\ln(1 + 0,04)^{-1} = 0,03922071$ mensual instantánea, calculada con las equivalentes tasas de descuento y de interés mensual.

Con lo que se ejemplifica numéricamente que la tasa instantánea es una, esta tasa define la intensidad con que varía el capital en la operación financiera a medida que transcurre el tiempo, para el ejemplo planteado la tasa instantánea mensual del 0,03922071, determina el interés de la unidad de moneda inicial igual al 0,04 mensual y el descuento de la unidad monetaria final igual a 0,03846154 mensual.

4.- Relación entre las tres tasas financieras analizadas

A continuación se describen las relaciones entre estas tres tasas analizadas para la unidad de tiempo dada: tasa de interés, tasa instantánea y tasa de descuento. Se verifica numéricamente, que la tasa instantánea es menor a su equivalente tasa de interés ($i > \delta$) y es mayor a su respectiva tasa de descuento ($\delta > d$).

En el ejemplo numérico se observa:

$i = 0,04$ mensual de interés

$\delta = 0,03922071$ instantánea mensual;

$d = 0,03846154$ mensual de descuento

Y en consecuencia que:

$0,04$ mensual de interés $>$ $0,03922071$ instantánea mensual

$0,03846154$ mensual de descuento $<$ $0,03922071$ instantánea mensual

Se concluye que el valor de la tasa instantánea para una unidad de tiempo dada, es un importe intermedio entre el valor de sus respectivas tasas equivalentes de interés y de descuento: $d < \delta < i$

En el ejemplo práctico para la unidad de tiempo mensual se obtuvieron las siguientes tasas equivalentes:

$0,03846154$ de descuento $<$ $0,03922071$ instantánea $<$ $0,04$ de interés

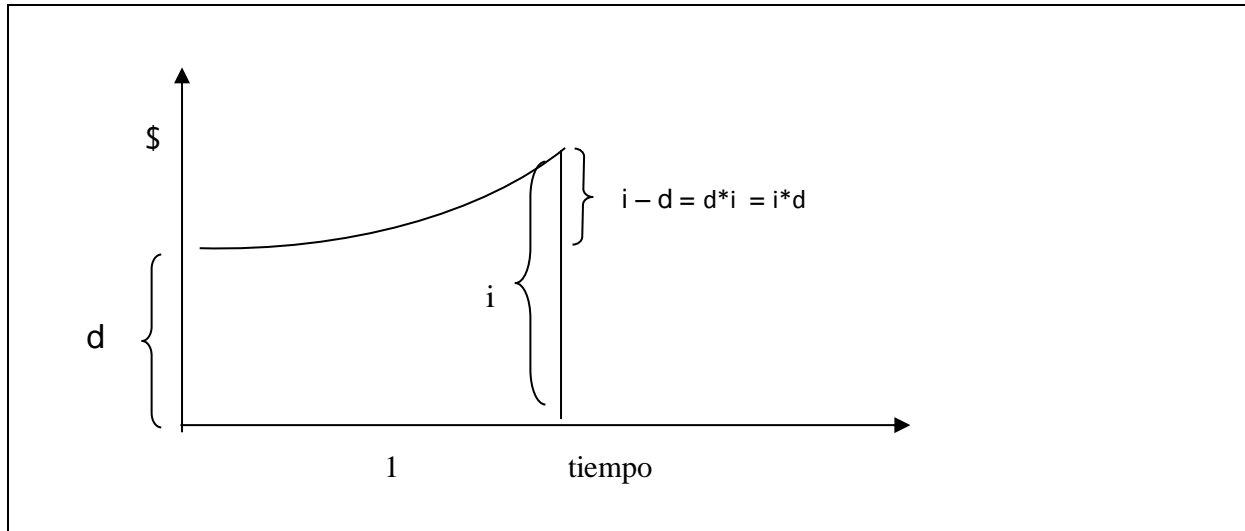
5.- La relación entre las tasas de interés y de descuento, es igual a la diferencia entre las tasas de interés e instantánea sumada a la diferencia entre las tasas instantánea y de descuento.

En el presente trabajo, se verifica para igual unidad de tiempo que, la diferencia entre la tasa de interés y la tasa instantánea, más la diferencia entre la tasa instantánea y la tasa de descuento, es igual a la diferencia entre la tasa de interés y la tasa de descuento o sea igual al interés de la tasa de descuento o al descuento de la tasa de interés.

Se recuerda que en la unidad de tiempo, la relación de equivalencia financiera entre la tasa de interés y la tasa de descuento, la tasa de interés representa el capital final de la tasa de descuento o la tasa de descuento es el capital inicial de la tasa de interés, o sea, la diferencia entre la tasa de interés y la tasa de descuento, $(i - d)$, equivale al interés de la tasa de descuento $(d*i)$ o al descuento de la tasa de interés, $(i*d)$.

Se grafica a continuación (Figura 3) la relación de equivalencia entre la tasa de interés y la tasa de descuento:

Figura 3: Relaciones entre i y d



Fuente Elaboración Propia

Por último observaremos, a través de un ejemplo numérico, que: la diferencia entre las tasas de interés y de descuento, es igual a la diferencia entre la tasa de interés respecto a la tasa instantánea, sumada a la diferencia entre la tasa instantánea y la tasa de descuento.

A partir de conocer que la tasa de interés es mayor a su tasa equivalente de descuento, y comprobado que la tasa instantánea equivalente a las tasas mencionadas, es mayor que la tasa de descuento y menor a la tasa de interés, se observa, con los valores de las tasas planteados en el ejemplo para la unidad de tiempo mensual, que:

La suma de las diferencias entre la tasa de interés menos la tasa instantánea y la tasa instantánea menos la tasa de descuento: $(i - \delta) + (\delta - d)$

$$(0,04 - 0,03922071) + (0,03922071 - 0,03846154) = 0,00153846$$

Es igual a la diferencia entre tasa de interés y tasa de descuento: $i - d$

$$(0,04 - 0,03846154) = 0,00153846$$

Y por equivalencia entre la tasa de interés y la tasa de descuento, la diferencia obtenida es igual al interés de la tasa de descuento: $d*i$

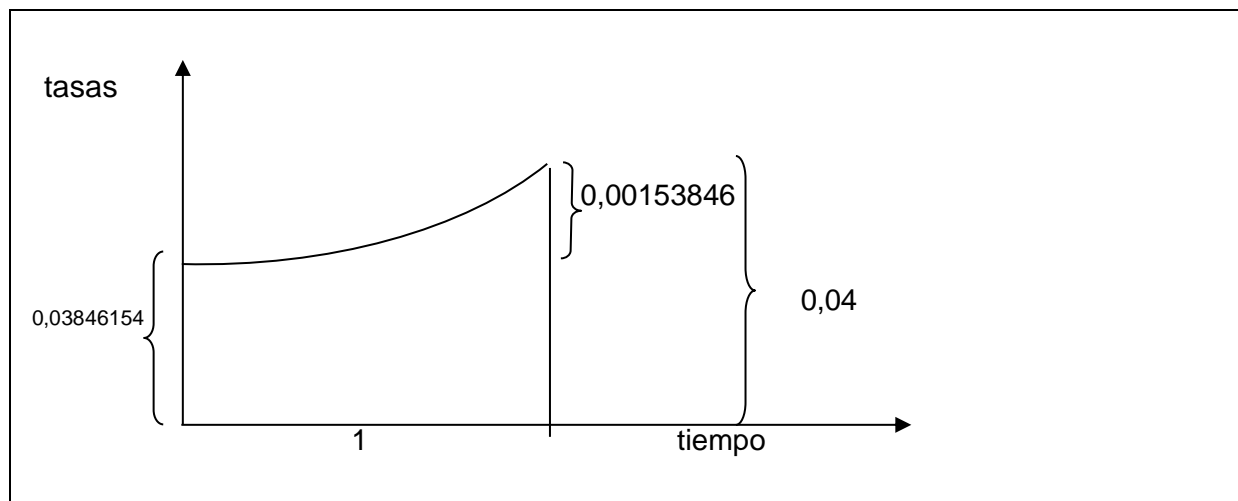
$$0,03846154 * 0,04 = 0,00153846$$

O dicha diferencia es el descuento de la tasa de interés: $i*d$

$$0,04 * 0,03846154 = 0,00153846$$

Se grafica lo verificado numéricamente (Figura 4):

Figura 4: Diferencia entre tasa de interés y tasa de descuento



Fuente Elaboración Propia

Lo cual verifica en la relación de equivalencia financiera entre la tasa de interés y la tasa de descuento, que la diferencia entre la tasa de interés y la tasa de descuento, que equivale al interés de la tasa de descuento o al descuento de la tasa de interés, es exactamente igual a la diferencia entre la tasa de interés y la tasa instantánea más la diferencia entre la tasa instantánea y la tasa de descuento.

$$i - d = d * i = i * d = (i - \delta) + (\delta - d)$$

CONCLUSIÓN

La tasa instantánea, es la intensidad con que varía el capital en la operación financiera al transcurrir el tiempo, esta tasa es única, La tasa instantánea es quien define la intensidad del cambio continuo generado en el capital al transcurrir el tiempo, para que al final de la unidad de tiempo, el incremento de la unidad de capital inicial represente la tasa de interés pactada en la operación financiera, conceptualizada aquí como tasa instantánea de interés. o el decrecimiento de la unidad de capital final en la unidad de tiempo, sea la tasa de descuento de dicha operación financiera, definida en esta operación como tasa instantánea de descuento.

Se observa numéricamente, que para la misma unidad de tiempo, la tasa instantánea asume un valor intermedio entre sus respectivas tasas equivalentes de interés y de descuento: es menor que la tasa de interés correspondiente y mayor a la respectiva tasa de descuento.

La diferencia entre la tasa de interés y la tasa instantánea más la diferencia entre la tasa instantánea y la tasa de descuento, es igual a la diferencia entre la tasa de interés y la tasa de descuento, lo que equivale a decir que dicha diferencia, es igual al interés de la tasa de descuento o al descuento de la tasa de interés.

Lo que demuestra la estrecha y perfecta relaciones de equivalencias entre estas tres tasas, que de una u otra manera, realizan los cálculos en las operaciones con dinero, para que estas operaciones resulten operaciones financieras equivalentes.

BIBLIOGRAFÍA

- Carrizo J. F. (1977). La tasa de interés. Córdoba: Argentina Cooperadora Facultad de Ciencias Económicas Universidad Nacional de Córdoba
- Carrizo J. F. (2005). *Conceptos básicos*". Córdoba, Argentina. Cooperadora Facultad de Ciencias Económicas Universidad Nacional de Córdoba
- Carrizo E. y Karl de Vega A. (2012). *La tasa instantánea de la operación financiera*, Anales XXXIII Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática Financiera realizadas en la Universidad de Morón