LA TEORÍA DE LIE Y LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

José Sánchez y Daniel Abud
Departamento de Física – Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba – Avenida Vélez Sarsfield 1611 (CP 5000) Córdoba. Argentina.
daniel.abud@yahoo.com, joseasanchez53@yahoo.com.ar

1. RESUMEN

En el presente artículo se utilizará la teoría de grupos de Lie para obtener una integral primera de la ecuación diferencial $x_{tt} = f(x)$, la que surge en problemas de mecánica en los cuales la fuerza sólo depende de la posición.

2. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA PLANTEADO

2.1 Condición de invariancia infinitesimal

Si la EDO de primer orden

$$f(x, y, y') = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

es invariante bajo las transformaciones uniparamétricas,

$$\begin{cases} x_1 = \phi(x, y, \varepsilon) \\ y_1 = \varphi(x, y, \varepsilon) \\ y_1' = \theta(x, y, y', \varepsilon) \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

es decir,

$$f\left(x_1, y_1, y_1'\right) \equiv f\left(x, y, y'\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Entonces existen coordenadas canónicas *X, Y* (ver [1], [2]), en las cuales la ecuación diferencial $x_{tt} = f(x)$ se transforma en la ecuación diferencial ordinaria a variables separables:

$$\frac{dY}{dX} = g(X) \qquad \textbf{(4)}$$

donde *X* e *Y* satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \xi(x, y)\, X_x + \eta(x, y)\, X_y &= 0 \\ \xi(x, y)\, Y_x + \eta(x, y)\, Y_y &= 1 \end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

con

$$\begin{cases} \xi(x, y) = \left.\dfrac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \\ \eta(x, y) = \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

La condición necesaria y suficiente para la invariancia de f bajo el grupo de transformaciones (2) es:

$$\xi f_x + \eta f_y + \left(\eta_x + \left(\eta_y - \xi_x\right) y' - \xi_y y'^2\right) f_{y'} \equiv 0 \qquad \textbf{(7)}$$

Esta ecuación se denomina ***condición de invariancia infinitesimal***, la cual, conjuntamente con la ecuación $f\left(x, y, y'\right) \equiv 0$, permite obtener $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$.

De manera similar, la condición de invariancia infinitesimal de una ecuación de segundo orden:

$$f(x, y, y', y'') = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

bajo un grupo de transformaciones de la forma (2) y mediante la prolongación de la derivada segunda:

$$y_1'' = \theta(x, y, y', y'', \varepsilon) = \frac{dy_1'}{dx_1} \qquad \textbf{(9)}$$

es:

$$\begin{gathered} \xi f_x + \eta f_y + \left(\eta_x + \left(\eta_y - \xi_x\right) y' - \xi_y y'^2\right) f_{y'} + \\ [\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 - \\ \xi_{yy} y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y') y''] f_{y''} \equiv 0 \end{gathered} \qquad \textbf{(10)}$$

Mediante las coordenadas canónicas (5), la ecuación (8) puede escribirse en la forma:

$$F(X, Y', Y'') = 0 \qquad \textbf{(11)}$$

la que se transforma en una EDO de primer orden mediante la sustitución $z = Y'$, ver [4].

2.2 Obtención de la integral primera de la ecuación diferencial $x_{tt} = f(x)$

Dada la ecuación diferencial ordinaria:

$$x_{tt} = f(x) \qquad \textbf{(12)}$$

Puede verificarse que $\xi = 1$ y $\eta = 0$ satisfacen la condición de invariancia infinitesimal (10) para la ecuación (12).

Resolviendo el sistema de ecuaciones (5) obtenemos las coordenadas canónicas:

$$X = x, \quad Y = t \qquad \textbf{(13)}$$

Reescribimos la ecuación diferencial (12) mediante las coordenadas canónicas:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x_t} \qquad \textbf{(14)}$$

es decir,

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -\frac{1}{x_t^2} x_{tt} \frac{dt}{dx} = -\frac{x_{tt}}{x_t^3} = -\left(\frac{dY}{dX}\right)^3 f(X) \qquad \textbf{(15)}$$

Reemplazando $z = \dfrac{dY}{dX}$ se obtiene:

$$\frac{dz}{dX} = -z^3 f(X) \qquad \textbf{(16)}$$

Resolvemos (16) por el método de separación de variables:

$$-\int \frac{dz}{z^3} = \int f(X) dX$$

$$\frac{z^{-2}}{2}=\int f(X)dX+c_1$$

$$z=\left(2\int f(X)dX+c_1\right)^{-1/2} \qquad \textbf{(17)}$$

Introduciendo las variables originales, tenemos:

$$\frac{dt}{dx}=\left(2\int f(x)dx+c_1\right)^{-1/2} \qquad \textbf{(18)}$$

$$t+c_2=\int\left(2\int f(x)dx+c_1\right)^{-1/2}dx \qquad \textbf{(19)}$$

de la ecuación (18) se obtiene:

$$\left(x_t\right)^2=2\int f(x)dx+c_1 \qquad \textbf{(20)}$$

Denotando:

$$\begin{aligned}&\dot{x}=x_t\\&F(x)=\int f(x)dx\end{aligned} \qquad \textbf{(21)}$$

podemos reescribir la ecuación (20) de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2-F(x)=C \qquad \textbf{(22)}$$

Si denominamos $E(t)=\frac{1}{2}\dot{x}^2-F(x)$, obtenemos $\frac{dE(t)}{dt}=0$ – integral de la energía–. Multiplicando ambos miembros por m –masa del cuerpo– tenemos que la energía mecánica total de la partícula –energía cinética más energía potencial– es constante para este caso, pues se trata de fuerzas conservativas:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}mv^2=\text{Energía cinética}$$
$$-mF(x)=\text{Energía potencial}$$

2.3 Aplicaciones a problemas de la mecánica

Sistema Mecánico	Ecuación diferencial	Integral Primera	Conservación de la Energía Mecánica Total
Caída libre	$\frac{d^2y}{dt^2}=-g$	$\frac{1}{2}\dot{y}^2+gy=c$	$\frac{1}{2}m\dot{y}^2+mgy=\tilde{c}$
Péndulo Simple	$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}sen\theta$	$\frac{1}{2}\left(\dot{\theta}\right)^2+\frac{g}{l}\cos\theta=c$	$\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2+mgl\cos\theta=\tilde{c}$
Sistema masa - resorte lineal	$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x$	$\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{k}{m}x^2=c$	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2=\tilde{c}$
Sistema masa – resorte no lineal	$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x-\frac{q}{m}x^3$	$\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}\frac{k}{m}x^2+\frac{1}{4}\frac{q}{m}x^4=c$	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{4}qx^4=\tilde{c}$

3. CONCLUSIONES

La teoría de Lie permite abordar desde una perspectiva diferente, resultados conocidos de la Matemática ó de la Física, como ocurre en este caso con la conservación de la energía mecánica total de una partícula sometida a fuerzas conservativas.

Nuestro interés consiste en estimular el conocimiento de una herramienta poderosa que puede utilizarse para resolver en forma exacta, ecuaciones diferenciales que ofrecen mayor dificultad desde los enfoques tradicionales.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Gigena,S. et al *La Teoría de Lie para EDO's de primer orden,* EMCI 2012.

[2] Sánchez, J.A. et al *Obtención de soluciones exactas de ecuaciones diferenciales primer orden mediante grupos de Lie – Aplicaciones a un problema de mecánica*, EMCI 2014.

[3] Boothby, W. M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, San Diego: Academic Press, 1986.

[4] George, Emanuel *Solution of Ordinary Differential Equations by Continuous Groups*, CHAPMAN and HALL/CRC, 2001.

[5] Warner, F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and lie Groups*, New York: Springer Verlag, 1983.

[6] Olver, P. J. *Application of Lie Groups to Differential Equations*, Second Edition, Springer Verlag, 1993.

[7] Bluman, G. and Kumei, S. *Symmetries and Differential Equations*, Second Edition, Springer Verlag, 1989.

[8] Hydon, P. E. *Symmetry Methods for Differential Equations*, Cambridge University Press, 2000.

[9] Hereman, W. *Review of Symbolic Software for Lie Symmetrie Analysis*, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 25 (8/9), pp. 115-132, 1997.

[10] Kwatny, H. G., Blankenship, G. L. *Nonlinear Control and Analytical Mechanics*, Birkhäuser, 2000.