



Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación



Universidad
Nacional
de Córdoba

Trabajo Especial de Licenciatura en Física

Caracterización del entrelazamiento en sistemas de partículas compuestas utilizando el formalismo de cobosones

Autor: Walter Javier Díaz

Directora: Dra. Ana Paula Majtey

Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y
Computación

Caracterización del entrelazamiento en sistemas de partículas compuestas utilizando el formalismo de cobosones © 2024 por Walter Javier Díaz se distribuye bajo una licencia [CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).



A mi mamá, Mabel.

A mi papá, Walter.

Resumen

De acuerdo con el modelo estándar sistemas de partículas compuestas que están formadas por un número par de constituyentes fermiónicos se comportan en la práctica como sistemas de bosones elementales. La teoría de bosones compuestos (cobosones) permite explicar en detalle el comportamiento de partículas compuestas aproximadamente bosónicas tomando en cuenta el carácter fermiónico de los constituyentes. En este trabajo estudiamos un sistema compuesto por dos pares de fermiones de distinta especie en una trampa acoplados por una interacción armónica basado en el modelo de Moshinsky. Se resolvió el Hamiltoniano del sistema de manera exacta y se construyó la solución utilizando el formalismo de bosones compuestos. Se analizó la calidad de la aproximación dada por el formalismo, estudiando la fidelidad, las correlaciones espaciales y la energía del sistema. Finalmente determinamos el entrelazamiento considerando distintas biparticiones del sistema y obtuvimos una expresión cerrada para calcular el entrelazamiento en un sistema con un número arbitrario de pares utilizando el formalismo de cobosones.

Abstract

According to the standard model, composite systems consisting of an even number of fermionic constituents behave in practice as elementary boson systems. In this work we study a system composed of two pairs of fermions of different species in a trap coupled by a harmonic interaction based on the Moshinsky's model. The Hamiltonian of the system was solved exactly and the solution was constructed using the composite boson (coboson) formalism. The quality of the approximation given by the formalism was analyzed, studying the fidelity, the spatial correlations and the energy of the system. Finally we determined the entanglement considering different bipartitions of the system and obtained a closed expression to calculate the entanglement in a system of an arbitrary number of pairs using the composite boson formalism.

Agradecimientos

En estas líneas me gustaría dedicar unas palabras de agradecimiento a mi directora Ana Majtey, por todo, su guía, paciencia, optimismo, enseñanza, cariño y alegría. A Martín Jiménez por toda su ayuda y acompañamiento durante este trabajo, por las discusiones, por las ideas y estar siempre disponible para dar una mano y sacar las cosas adelante.

A Cecilia Cormick por las discusiones, sugerencias y correcciones al trabajo. A Yamila Garro Linck por sus correcciones, sugerencias, por su calidad humana, su cariño y por su apoyo.

A mi familia, mi mamá, mi papá por estar siempre incondicionalmente y nunca soltarme la mano, por todo el amor y guiarme en la vida, por enseñarme a nunca bajar los brazos y pelear hasta el final por lo que uno quiere. A mi abuelo Gilberto por acompañarme espiritualmente en los momentos adversos y por inculcar la educación. A mis hermanas Nati y Fer, por todo su amor. A mis sobrinas, Cati y Pili, que las amo un montón.

A los amigos y amigas que me hice en la facultad, a los primeros Mili, Gero, Jony, Male, Eric (por imprimirme casi todos los libros de la carrera). A los chicos Angelo, Fran, Fabri y Martín con quiénes compartí esta última etapa.

A los profesores y profesoras que me formaron, en especial a María Eugenia Gabach Clement por todo su cariño y calidad humana, además de las ecuaciones de Maxwell.

A mi país, Argentina. A la Universidad Nacional de Córdoba y a todos los que hacen posible la educación pública.

Índice general

1	Introducción	1
1.1	Organización del Trabajo	3
2	Marco teórico	5
2.1	Partículas idénticas	5
2.2	Segunda cuantización	8
2.2.1	Número de ocupación	8
2.2.2	Espacio y estados de Fock	9
2.2.3	Operadores creación y aniquilación	10
2.2.4	Cambio de base y operadores de campo	11
2.3	Entrelazamiento	13
2.3.1	Operador densidad, descomposición y rango de Schmidt . . .	14
2.3.2	Entrelazamiento en sistemas de fermiones idénticos	16
2.4	Teoría de cobosones	18
3	Modelo Trabajado	23
3.1	Un par de fermiones	23
3.2	Dos pares de fermiones	24
4	Solución exacta del sistema	27
4.1	Un solo par de fermiones	27
4.1.1	Un par de fermiones en dos dimensiones	28
4.2	Dos pares de fermiones	29
4.2.1	Dos pares de fermiones en dos dimensiones	34
5	Solución con el ansatz de cobosones	43
5.1	Ansatz en una dimensión	44
5.2	Ansatz en dos dimensiones	48
5.3	Cálculo de la energía	52
6	Comparación de soluciones	55
6.1	Fidelidades	55
6.2	Funciones de onda y energías	58
7	Entrelazamiento	61

7.1	Entrelazamiento del subsistema aa con el resto del sistema	61
7.2	Entrelazamiento entre un fermión de tipo a con el resto del sistema .	63
7.3	Entrelazamiento del subsistema ab con el resto del sistema	65
7.4	Entrelazamiento y ansatz de cobosones	67
8	Conclusiones y proyectos futuros	71
8.1	Proyectos futuros	72
	Bibliografía	73
A	Modelo de Schwinger	79
B	Cálculo de factor de normalización y matriz densidad reducida	83

Introducción

La comprensión y descripción de sistemas cuánticos de muchos cuerpos interactuantes, y a su vez, diseñar y utilizar estos sistemas para tareas de información cuántica, plantea uno de los desafíos más significativos en la física cuántica.

Entre los fenómenos descubiertos con el advenimiento de la física cuántica se destaca el entrelazamiento, una forma de correlación cuántica sin equivalente en la física clásica. Comprender el entrelazamiento es crucial para el desarrollo de tecnologías cuánticas. Un área de gran interés es el estudio de criterios de separabilidad, es decir, poder establecer criterios que nos permitan decir si un cierto sistema está entrelazado o es separable. En años recientes, el debate se ha extendido a sistemas compuestos por partículas idénticas, debido a las correlaciones que se presentan al (anti)simetrizar los estados del sistema. Para sistemas de fermiones idénticos se han establecido criterios simples que resultan necesarios y suficientes para su separabilidad, entendiendo al entrelazamiento en este tipo de sistemas como las correlaciones *por encima* de las correlaciones de simetría [1, 2, 3].

Los sistemas cuánticos formados por muchas partículas exhiben una amplia variedad de fenómenos físicos que algunas veces pueden conducir a propiedades macroscópicas fascinantes, como la superconductividad a alta temperatura o la termalización. Resolver la mayoría de estos sistemas resulta extremadamente difícil, y es esencial desarrollar técnicas que mejoren nuestra comprensión de estos fenómenos. Por otro lado, los modelos solubles nos proporcionan una vía para entender dinámicas cuánticas que de otro modo serían inaccesibles, pueden darnos información relevante sobre el comportamiento de las funciones de correlación, la evolución del entrelazamiento entre otros aspectos.

Una de las situaciones usuales en la naturaleza es aquella en la cual las partículas se encuentran ligadas, por ejemplo, un átomo de Hidrógeno, un par de Cooper o una molécula, este hecho ofrece la posibilidad de pensar este agregado de partículas como una unidad, la cual se denomina partícula compuesta. En este contexto uno de los marcos teóricos que ha surgido recientemente es lo que se conoce como teoría de bosones compuestos o cobosones [4, 5], el cual logra dar una descripción en sistemas de muchas partículas compuestas aproximadamente bosónicas. La idea de que las partículas compuestas formadas por número par de fermiones puedan comportarse como bosones elementales se espera del hecho de que tienen espín total entero, o equivalentemente, que el estado cuántico debe ser simétrico bajo el intercambio de dos partículas compuestas de este tipo.

El formalismo de cobosones tiene su origen en el estudio de la interacción entre excitones, los cuales forman bosones compuestos ya que están constituidos por dos fermiones, electrón y hueco. El desarrollo posterior de la teoría incluyó su aplicación a los condensados de Bose-Einstein [6], los pares de Cooper [7], entre otros, y además paralelamente, un enfoque desde la información cuántica proporcionó una visión más profunda del comportamiento de los bosones compuestos, mostrando una conexión entre el carácter bosónico y el entrelazamiento de los constituyentes [8, 9].

La teoría de bosones compuestos brinda una descripción de un sistema de partículas aproximadamente bosónicas a través de lo que se conoce como *ansatz* de cobosones, este *ansatz* aproxima el estado fundamental de un sistema de muchos cuerpos repitiendo la aplicación del operador que, al actuar sobre el vacío, crea un único par en un determinado estado de energía. El *ansatz* de cobosones constituye una herramienta poderosa para describir sistemas en los cuales la estructura intrínseca de las partículas compuestas empieza a ser evidente y nos brinda información sobre cantidades físicas, como la energía, la fracción del condensado, la densidad espectral, los efectos del principio de exclusión de Pauli y como veremos en este trabajo, resulta ser de gran utilidad para estudiar las correlaciones cuánticas presentes en el sistema.

Un sistema de particular interés dado que admite una solución analítica es el llamado modelo de Moshinsky [10, 11] que consiste de dos partículas en una trampa armónica acopladas por una interacción armónica, dado que el modelo y su solución analítica es generalizable para prácticamente cualquier número de partículas, ha constituido un campo de pruebas para el estudio de diversos sistemas que van desde la física atómica y molecular a la física de agujeros negros [12]; por el lado de la información cuántica se ha utilizado para explorar características relacionadas con el entrelazamiento [13, 14, 15, 16, 17] y otras manifestaciones de correlaciones cuánticas [18] en sistemas atómicos.

Este trabajo tiene una motivación doble. Por un lado, aprovechamos las ventajas de un modelo de juguete analíticamente soluble que puede aplicarse a un número arbitrario de partículas, incluso si el sistema está compuesto por partículas de diferentes especies. Por otro lado, buscamos caracterizar las correlaciones en estos sistemas de muchos cuerpos. El modelo de Moshinsky con el que trabajamos nos permite poner a prueba el *ansatz* del formalismo de cobosones y utilizando el formalismo de cobosones, encontramos expresiones formales para cuantificar el entrelazamiento entre distintas biparticiones de un sistema compuesto por N pares de partículas.

Utilizando el modelo de Moshinsky en este trabajo calculamos, de forma (analítica) exacta y usando el *ansatz* de bosones compuestos, el entrelazamiento de un sistema de cuatro partículas dos de especie a y dos de especie b considerando diferentes formas de biparticionar el sistema. El *ansatz* nos permite introducir una herramienta

para calcular el entrelazamiento en un sistema con un número arbitrario de partículas, algo inviable de calcular exactamente en forma analítica y muy costoso para calcular numéricamente.

1.1 Organización del Trabajo

Este trabajo está organizado de la siguiente manera, en el **Capítulo (2)** se describen las herramientas teóricas e ideas fundamentales para la comprensión y resolución del sistema. En el **Capítulo (3)** se introduce el modelo desarrollado, este sistema corresponde al modelo de Moshinsky del cual se hizo mención en la introducción. Luego en los **Capítulos (4)** y **(5)** se resuelve el sistema de dos maneras, primero de manera exacta y luego implementando el ansatz de cobosones, para concluir este estudio en el **Capítulo (6)** se comparan y analizan los resultados obtenidos. Finalmente, en el **Capítulo (7)** utilizando ambas soluciones se estudia el entrelazamiento. Para terminar en el **Capítulo (8)** comentamos las conclusiones y perspectivas a futuro.

Como material complementario para los **Capítulos (4)** y **(7)** se encuentran los **Apéndices (A)** y **(B)**.

Marco teórico

En este capítulo se introducirán los conceptos y herramientas teóricas utilizadas en el trabajo. Se comenzará con las consideraciones e ideas a tener en cuenta al trabajar con sistemas de partículas idénticas en mecánica cuántica. Luego se seguirá con una introducción al formalismo de la segunda cuantización y una noción de entrelazamiento. Finalmente se introducirá el formalismo de cobosones.

Para las Secciones (2.1), (2.2) y (2.3) se han seguido primordialmente los libros *Quantum Mechanics, Volume 2: Angular Momentum, Spin, and Approximation Methods* y *Quantum Mechanics, Volume 3: Fermions, Bosons, Photons, Correlations, and Entanglement* de Claude Cohen-Tannoudji et al.

2.1 Partículas idénticas

En la mecánica clásica no es necesario tratar sistemas que contengan partículas idénticas de alguna manera en especial, porque aunque todas sus propiedades características sean las mismas (masa, carga, etc), siempre es posible identificar cada una de ellas. En principio es suficiente medir la posición y el momento de cada partícula en un instante de tiempo dado. Con estos valores como condiciones iniciales y usando las ecuaciones de movimiento, cada partícula se puede identificar a cualquier tiempo posterior [19].

Una de las diferencias fundamentales entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica es la indistinguibilidad de las partículas, ya que en la mecánica cuántica sabemos que no es posible definir trayectorias como en el caso clásico debido al principio de incerteza. Si consideramos un sistema de partículas idénticas en algún instante de tiempo, la función de onda que representa el estado del sistema estará dada por productos de paquetes de ondas individuales que en general se superponen. Por lo tanto, si en un instante posterior se localiza una partícula, es imposible determinar cuál era su configuración inicial. Es justamente esta superposición de paquetes de ondas, lo que da lugar a la diferencia fundamental en el tratamiento de la distinguibilidad de partículas idénticas en los marcos clásico y cuántico [19]. Un ejemplo concreto de esta situación es el de dispersión o colisión entre dos partículas idénticas [20].

En mecánica cuántica la idea es la siguiente. Supongamos un sistema compuesto por dos partículas idénticas, con el mismo espín s , a las cuales denotamos con los números (1) y (2). Eligiendo una base, $\{|u_i\rangle\}$, en el espacio \mathcal{H}_1 de la partícula (1) y

vía producto tensorial podemos construir una base $\{|1 : u_i ; 2 : u_j \rangle\}$ para el espacio \mathcal{H} de dos partículas, donde $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Sin embargo, el espacio de estados \mathcal{H} no representa el espacio de estados físicos para el sistema de dos partículas idénticas, la naturaleza nos indica que partículas de una misma especie solo pueden estar representadas por dos tipos de estados que dependiendo de la naturaleza de las partículas idénticas son completamente simétricos o completamente antisimétricos con respecto a la permutación de estas partículas. Aquellas partículas para las cuales los estados físicos son simétricos reciben el nombre de **bosones**, y aquellas para los que son antisimétricos, **fermiones**. En términos matemáticos definiendo el operador permutación P_{21} que intercambia la partícula (1) con la (2), cuya acción en los estados de la base es,

$$P_{21} |1 : u_i ; 2 : u_j \rangle = |2 : u_i ; 1 : u_j \rangle, \quad (2.1)$$

tenemos que para estados (anti)simétricos ($|\psi_A\rangle$) ($|\psi_S\rangle$),

$$P_{21} |\psi_S\rangle = |\psi_S\rangle, \quad (2.2)$$

$$P_{21} |\psi_A\rangle = -|\psi_A\rangle. \quad (2.3)$$

Es decir, que los autoestados de P_{21} con autovalor +1 son estados completamente simétricos mientras que los autoestados de P_{21} con autovalor -1 son estados completamente antisimétricos. El operador permutación nos permite definir los operadores proyección S y A ,

$$S = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + P_{21}), \quad (2.4)$$

$$A = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - P_{21}), \quad (2.5)$$

de manera que si $|\psi\rangle$ es un estado que pertenece a \mathcal{H} , entonces $S|\psi\rangle$ es un estado completamente simétrico y $A|\psi\rangle$ es un estado completamente antisimétrico. Por ejemplo, si comenzamos con un estado $|\psi\rangle = |1 : u_i ; 2 : u_j \rangle$ tenemos que,

$$S|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|1 : u_i ; 2 : u_j \rangle + |2 : u_i ; 1 : u_j \rangle), \quad (2.6)$$

$$A|\psi\rangle = \frac{1}{2} (|1 : u_i ; 2 : u_j \rangle - |2 : u_i ; 1 : u_j \rangle). \quad (2.7)$$

Notemos que la Ec.(2.7) se anula si las partículas se encuentran en el mismo estado, esto se conoce como *principio de exclusión de Pauli*.

De manera general para un sistema de N partículas idénticas, análogamente comenzando con una base $\{|u_i\rangle\}$, correspondiente al espacio de estados de una partícula, podemos construir una base $\{|1 : u_i ; 2 : u_j ; \dots ; N : u_p\rangle\}$ en el espacio producto \mathcal{H} donde en este caso $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$. Sin embargo, en analogía al caso de dos partículas idénticas, debido a que las partículas solo presentan un único tipo de simetría, el espacio físico de estados no es \mathcal{H} sino alguno de los subespacios conformados por los estados totalmente simétricos(antisimétricos), \mathcal{H}_S (\mathcal{H}_A). Los proyectores de dichos subespacios vienen definidos por,

$$S = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} P_{\alpha}, \quad (2.8)$$

$$A = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} P_{\alpha}, \quad (2.9)$$

donde P_{α} es un operador permutación arbitrario asociado con un sistema de N partículas y α representa una permutación arbitraria de los primeros N enteros¹. Además se tiene $\varepsilon_{\alpha} = +1$ si P_{α} es una permutación par y $\varepsilon_{\alpha} = -1$ si P_{α} es una permutación impar.

Nuevamente si $|\psi\rangle$ es un estado que pertenece a \mathcal{H} , entonces $S|\psi\rangle$ es un estado completamente simétrico y $A|\psi\rangle$ es un estado completamente antisimétrico. En la literatura una forma usual de representar estados antisimétricos viene dada por lo que se conoce como *determinante de Slater*, para un sistema de N partículas idénticas como el descrito anteriormente lo podemos definir como:

$$A|\psi\rangle = \frac{1}{N!} \begin{vmatrix} |1 : u_i\rangle & |1 : u_j\rangle & \cdots & |1 : u_k\rangle \\ |2 : u_i\rangle & |2 : u_j\rangle & \cdots & |2 : u_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |N : u_i\rangle & |N : u_j\rangle & \cdots & |N : u_k\rangle \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

En su forma elemental, es decir cuando $N = 2$, la expresión viene dada por el determinante de una matriz 2×2 , en completa equivalencia el estado (2.7) puede representarse:

$$A|\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} |1 : u_i\rangle & |1 : u_j\rangle \\ |2 : u_i\rangle & |2 : u_j\rangle \end{vmatrix}. \quad (2.11)$$

¹También es usual en la literatura definir P como cualquier permutación en S_N (grupo de permutación sobre N elementos).

2.2 Segunda cuantización

Para un sistema donde se presenta un número grande de partículas idénticas la (anti)simetrización se vuelve complicada. Por ejemplo, para calcular el valor de expectación de un operador simétrico se requiere la simetrización del bra, el ket y finalmente del operador lo que introduce una gran cantidad de términos. Para evitar estas complicaciones puede utilizarse un método equivalente basado en operadores de creación y aniquilación que actúan en lo que se conoce como *espacio de Fock*. Las reglas de conmutación (o anticonmutación) que satisfacen estos operadores reflejan la simetría de paridad de las partículas. La numeración de partículas es reemplazada asignando un *número de ocupación*, a partir de los estados individuales de una partícula, lo cual es más natural para tratar partículas idénticas. Todas estas ideas son las que subyacen en lo que se llama **segunda cuantización**.

2.2.1 Número de ocupación

Supongamos un problema de N partículas idénticas no interactuantes, entonces el Hamiltoniano puede expresarse de la forma

$$H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \sum_{i=1}^N h(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i). \quad (2.12)$$

Si tenemos resuelto el problema de autovalores para una partícula, es decir,

$$h |u_k\rangle = \epsilon_k |u_k\rangle, \quad (2.13)$$

donde u_k denota un conjunto completo de números cuánticos, podemos construir un autoestado de H vía producto tensorial como

$$\underbrace{|u_i\rangle \dots |u_i\rangle}_{n_i} \underbrace{|u_j\rangle \dots |u_j\rangle}_{n_j} \dots \underbrace{|u_l\rangle \dots |u_l\rangle}_{n_l} \dots = |n_i, n_j, \dots, n_l, \dots\rangle, \quad (2.14)$$

donde n_i representa el número de partículas en el estado $|u_i\rangle$, n_j el número de partículas en el estado $|u_j\rangle$, etc; sujetos a la condición:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k + \dots = N, \quad (2.15)$$

los vectores de estado pueden caracterizarse entonces por los números de ocupación n_i , donde n_1 es el número de ocupación del estado $|u_1\rangle$, n_2 es el número de ocupación del estado $|u_2\rangle$ y así siguiendo. En este conjunto de números de ocupación algunos de ellos serán nulos ya que un estado arbitrario no siempre tiene que estar ocupado.

2.2.2 Espacio y estados de Fock

Para bosones, los kets físicos se escriben de la forma:

$$\begin{aligned}
 & |n_i, n_j, \dots, n_l, \dots\rangle \\
 = & \sqrt{\frac{N!}{n_i! n_j! \dots n_l! \dots}} \frac{1}{N!} \sum_P P |1 : u_i ; 2 : u_i ; \dots ; n_i : u_i ; n_i + 1 : u_j ; \dots ; n_i + n_j : u_j ; \dots\rangle .
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Para fermiones teniendo en cuenta el principio de exclusión de Pauli, los números de ocupación son 1 o 0 por lo que denotamos a los kets físicos de la forma:

$$\begin{aligned}
 |u_i, u_j, \dots, u_l, \dots\rangle = & \\
 & \begin{cases} \sqrt{N!} \frac{1}{N!} \sum_P (-1)^P P |1 : u_i ; 2 : u_j ; \dots ; q : u_l ; \dots\rangle & u_i \text{ diferentes,} \\ 0 & u_i \text{ idénticos,} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde denotamos $|u_i\rangle, |u_j\rangle, \dots, |u_l\rangle, \dots$ a todos los estados con un número de ocupación igual a 1.

Los estados de Fock pertenecen a lo que se conoce como espacio de Fock, el cual agrupa los espacios simétrico y antisimétricos para un número N de partículas arbitrario. Utilizando la definición de suma directa, definimos los espacios de Fock para cada caso, bosones \mathcal{H}_{Fock}^S y fermiones \mathcal{H}_{Fock}^A :

$$\mathcal{H}_{Fock}^S = \mathcal{H}_S(0) \oplus \mathcal{H}_S(1) \oplus \mathcal{H}_S(2) \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_S(N) \oplus \dots, \tag{2.18}$$

$$\mathcal{H}_{Fock}^A = \mathcal{H}_A(0) \oplus \mathcal{H}_A(1) \oplus \mathcal{H}_A(2) \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_A(N) \oplus \dots, \tag{2.19}$$

en ambos espacios el subespacio $\mathcal{H}_{S,A}(0)$ se define como un espacio 1-dimensional que contiene al vector "vacío", el cual se denota como $|0, 0, \dots, 0, \dots\rangle = |0\rangle$. Por lo que tanto como para bosones y fermiones podemos construir una base para el espacio de Fock con los kets $|n_i, n_j, \dots, n_l, \dots\rangle$ teniendo en cuenta que

$$n_j = \begin{cases} 0, 1 & \text{para fermiones,} \\ 0, 1, 2, \dots & \text{para bosones.} \end{cases} \tag{2.20}$$

Con esto presente podemos definir de manera equivalente el espacio de Fock como un producto tensorial de espacios de Fock $\mathcal{H}_{Fock}^{u_i}$ asociados con los estados ortogonales

$|u_i\rangle$, siendo generado por los kets $|n_i\rangle$ donde n_i toma todos los valores enteros positivos posibles (de cero a infinito para bosones, de cero a uno para fermiones):

$$\mathcal{H}_{Fock}^{S,A} = \mathcal{H}_{Fock}^{u_1} \otimes \mathcal{H}_{Fock}^{u_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{Fock}^{u_i} \otimes \dots \quad (2.21)$$

Es decir, que los estados de Fock, los cuales forman una base del espacio de Fock, pueden ser escritos como:

$$|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_i\rangle \otimes \dots \quad (2.22)$$

2.2.3 Operadores creación y aniquilación

A partir de las ideas antes mencionadas, es natural definir la acción del operador creación $a_{u_i}^\dagger$ en el espacio de Fock, para **bosones**:

$$a_{u_i}^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, n_2, \dots, n_i + 1, \dots\rangle, \quad (2.23)$$

es decir, la acción de $a_{u_i}^\dagger$ sobre un estado del espacio de Fock, crea una partícula en el estado $|u_i\rangle$. Mientras que para **fermiones** teniendo en cuenta el principio de exclusión de Pauli se tiene:

$$a_{u_i}^\dagger |u_j, \dots, u_k, \dots, u_l, \dots\rangle = |u_i, u_j, \dots, u_k, \dots, u_l, \dots\rangle, \quad (2.24)$$

por otro lado, si comenzamos con un ket donde ya hay una partícula en el estado $|u_i\rangle$ ($n_i = 1$) obtenemos:

$$a_{u_i}^\dagger |u_j, \dots, u_i, \dots, u_l, \dots\rangle = |u_i, u_j, \dots, u_i, \dots, u_l, \dots\rangle = 0. \quad (2.25)$$

Definimos también la acción del operador aniquilación a_{u_i} , para **bosones** y **fermiones** respectivamente

$$a_{u_i} |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, n_2, \dots, n_i - 1, \dots\rangle, \quad (2.26)$$

$$a_{u_i} |u_i, u_j, u_k, \dots, u_l, \dots\rangle = |u_j, u_k, \dots, u_l, \dots\rangle, \quad (2.27)$$

o si inicialmente el estado $|u_i\rangle$ no está ocupado:

$$a_{u_i} |u_j, u_k, \dots, u_l, \dots\rangle = 0. \quad (2.28)$$

Además la acción de ambos operadores, para los dos tipos de partículas, sobre el vacío se define:

$$a_{u_i}^\dagger |0\rangle = |u_i\rangle, \quad (2.29)$$

$$a_{u_i} |0\rangle = 0. \quad (2.30)$$

Finalmente es importante mencionar que, según el tipo de partícula, estos operadores cumplen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad (2.31)$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad \text{para bosones} \quad (2.32)$$

$$[a_i, a_j] = 0. \quad (2.33)$$

y

$$\{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0, \quad (2.34)$$

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \text{para fermiones} \quad (2.35)$$

$$\{a_i, a_j\} = 0. \quad (2.36)$$

2.2.4 Cambio de base y operadores de campo

Los operadores $a_{u_i}^\dagger$ y a_{u_i} fueron definidos por su acción en el espacio de Fock a partir de una base ortonormal de estados individuales $|u_i\rangle$ para una partícula. También se puede elegir cualquier otra base $|v_s\rangle$ y definir de la misma forma operadores creación $a_{v_s}^\dagger$ y aniquilación a_{v_s} , surge entonces la motivación de estudiar qué relación hay entre los operadores escritos en bases distintas. Para operadores creación se puede inferir la relación viendo su acción en el vacío,

$$a_{v_s}^\dagger |0\rangle = |1 : v_s\rangle = \sum_i |u_i\rangle \langle u_i | 1 : v_s\rangle = \sum_i \langle u_i | v_s\rangle |1 : u_i\rangle = \sum_i \langle u_i | v_s\rangle a_{u_i}^\dagger |0\rangle, \quad (2.37)$$

con lo cual podemos deducir,

$$a_{v_s}^\dagger = \sum_i \langle u_i | v_s\rangle a_{u_i}^\dagger, \quad (2.38)$$

con su Hermítico conjugado,

$$a_{v_s} = \sum_i \langle v_s | u_i \rangle a_{u_i}. \quad (2.39)$$

Si reemplazamos la base $\{|v_s\rangle\}$ por la base posición $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ donde \mathbf{r} simboliza los tres índices continuos, el operador a_{v_s} dependerá entonces del índice continuo \mathbf{r} y recibe el nombre de *operador de campo*. Denotaremos a este operador $\Psi(\mathbf{r})$ siguiendo la notación usual de los libros de texto, utilizando la Ec.(2.39) obtenemos:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_i u_i(\mathbf{r}) a_i, \quad (2.40)$$

donde $u_i(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | u_i \rangle$.

Tomando el conjugado Hermítico del operador obtenemos

$$\Psi^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_i u_i^*(\mathbf{r}) a_i^\dagger, \quad (2.41)$$

este operador crea una partícula en la posición \mathbf{r} , esto lo podemos corroborar aplicándolo al vacío

$$\Psi^\dagger(\mathbf{r}) |0\rangle = \sum_i u_i^*(\mathbf{r}) a_i^\dagger |0\rangle = \sum_i u_i^*(\mathbf{r}) |u_i\rangle = \sum_i \langle u_i | \mathbf{r} \rangle |u_i\rangle = \sum_i |u_i\rangle \langle u_i | \mathbf{r} \rangle = |\mathbf{r}\rangle. \quad (2.42)$$

Por otro lado, uno puede invertir las Ecs.(2.41)-(2.40) y obtener,

$$\int d^3r u_i^*(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) = \int d^3r u_i^*(\mathbf{r}) \sum_j u_j(\mathbf{r}) a_j = \sum_j \delta_{ij} a_j = a_i, \quad (2.43)$$

además, tomando el Hermítico conjugado se obtiene,

$$\int d^3r u_i(\mathbf{r}) \Psi^\dagger(\mathbf{r}) = a_i^\dagger. \quad (2.44)$$

Los operadores de campo cumplen las relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\Psi^\dagger(x), \Psi^\dagger(x')] &= 0, \\ [\Psi(x), \Psi^\dagger(x')] &= \delta(x - x'), \quad \text{para bosones} \\ [\Psi(x), \Psi(x')] &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned}
\{\Psi^\dagger(x), \Psi^\dagger(x')\} &= 0, \\
\{\Psi(x), \Psi^\dagger(x')\} &= \delta(x - x'), \quad \text{para fermiones} \\
\{\Psi(x), \Psi(x')\} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

2.3 Entrelazamiento

Los sistemas compuestos son sistemas que pueden descomponerse en dos o más subsistemas. Formalmente el espacio de Hilbert \mathcal{H} asociado a un sistema compuesto, o sistema multipartito, está dado por el producto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$ de los espacios correspondientes a cada subsistema.

Consideremos un sistema bipartito, es decir dos sistemas físicos A y B , cada uno con un espacio de estados asociado \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente, estos sistemas pueden agruparse para así formar un sistema total $A + B$ cuyo espacio de estados es el producto tensorial $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Si asumimos que los estados A y B están descritos por los vectores de estado $|\varphi_A\rangle$ y $|\chi_B\rangle$ respectivamente, el estado $|\Phi\rangle$ que describe el sistema total es el producto tensorial:

$$|\Phi\rangle = |\varphi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle. \tag{2.47}$$

En este caso, cada uno de los tres sistemas físicos A , B , y $A + B$ son descritos por un vector de estado. Sin embargo, la situación es diferente cuando el vector de estado del sistema total no es un producto. Supongamos que tenemos dos bases $\{|\varphi_A\rangle, |\zeta_A\rangle, \dots, \}$, y $\{|\chi_B\rangle, |\xi_B\rangle, \dots, \}$ de los espacios A y B respectivamente, invocando el principio de superposición es posible tener un estado $|\psi\rangle$ para el sistema total dado por:

$$|\psi\rangle = \alpha |\varphi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle + \beta |\zeta_A\rangle \otimes |\xi_B\rangle, \tag{2.48}$$

los coeficientes complejos α y β cumplen la condición de normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, un estado de las características de la Ec.(2.48) donde α y β son no-nulos, que contiene una superposición coherente de dos o más componentes donde cada componente es un producto, se llama **estado entrelazado**. Por el contrario si $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$, el estado es separable. En general un estado arbitrario $|w\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ es **separable** si $\exists |w_A\rangle \in \mathcal{H}_A, |w_B\rangle \in \mathcal{H}_B$ tal que $|w\rangle = |w_A\rangle \otimes |w_B\rangle$. Una definición equivalente de estado entrelazado es, *todo estado que no sea separable es entrelazado*.

La propiedad asociada con los estados entrelazados se conoce como *entrelazamiento* y expresa el hecho de que el estado de cada subsistema está, de alguna manera, condicionado por el estado del otro subsistema. Ahora supongamos que uno está

interesado en medir cierta cantidad de un observable en uno de los subsistemas, por ejemplo, en el subsistema A , para ello uno recurre, cuando es posible, al vector de estado con el cual se calcula la probabilidad correspondiente de medir la cantidad de interés. Sin embargo, cuando el sistema total está entrelazado como en el caso descrito por la Ec.(2.48), no existe generalmente un vector de estado que pertenezca al espacio \mathcal{H}_A y nos permita realizar los cálculos de dichas probabilidades. Para esto hay una descripción equivalente donde el protagonista ya no es más el vector de estado sino el **operador densidad** del sistema que se denota usualmente con la letra ρ , pasamos entonces a describir algunas ideas de trabajar en esta descripción.

2.3.1 Operador densidad, descomposición y rango de Schmidt

El operador densidad del sistema total $A + B$, cuyo vector de estado es $|\psi\rangle$ se define como:

$$\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.49)$$

cuya traza es igual a uno,

$$\text{Tr}\{\rho_{AB}\} = 1, \quad (2.50)$$

cuando un sistema puede ser descrito por un vector de estado, se dice que está en un **estado puro** y su operador densidad cumple la relación:

$$[\rho_{AB}]^2 = \rho_{AB}, \quad (2.51)$$

y por lo tanto,

$$\text{Tr}\{[\rho_{AB}]^2\} = 1. \quad (2.52)$$

Bajo estas condiciones, se tiene la libertad de describir al sistema total o bien por el vector de estado $|\psi\rangle$ o por el operador densidad ρ_{A+B} . Por otro lado, la descripción para los subsistemas A y B se obtiene tomando la traza parcial sobre el sistema que no es observado. Por ejemplo, para el sistema A se tiene:

$$\rho_A = \text{Tr}_B\{\rho_{AB}\}. \quad (2.53)$$

Cuando el sistema está descrito por el estado entrelazado dado por la Ec.(2.48) el operador densidad del subsistema A viene dado por,

$$\begin{aligned}\rho_A &= \sum_{v_B} \mathbb{I}_A \otimes \langle v_B | (|\psi\rangle \langle \psi|) \mathbb{I}_A \otimes |v_B\rangle \\ &= |\alpha|^2 |\varphi_A\rangle \langle \varphi_A| + |\beta|^2 |\zeta_A\rangle \langle \zeta_A|,\end{aligned}\tag{2.54}$$

que es la suma de dos proyectores. Como consecuencia, el subsistema A está en el estado $|\varphi_A\rangle$ con una probabilidad $|\alpha|^2$, y en el estado $|\zeta_A\rangle$ con una probabilidad $|\beta|^2$ es decir que, en oposición al estado de $A + B$, no se tiene certeza del estado de A , solo se tiene cierta probabilidad. Este hecho se expresa en la desigualdad,

$$\text{Tr} \{ [\rho_A]^2 \} \leq 1,\tag{2.55}$$

esta desigualdad nos indica que el estado de A solo es conocido de manera estadística, es decir, la descripción del sistema A es menos precisa que la del sistema total $A + B$. Notemos que si $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$ en la Ec.(2.54) se cumple la igualdad en la Ec.(2.55), por lo tanto, el subsistema A se encuentra en un estado puro, de manera análoga se puede ver que al subsistema B le ocurre lo mismo.

Cuando el sistema bipartito $A + B$ se encuentra en un estado puro, es decir, cuando está descrito por un vector de estado como (2.47) ó (2.48), existe un criterio para determinar si los subsistemas son separables o están entrelazados [21].

Descomposición de Schmidt:

Supongamos que $|\psi\rangle$ es un estado puro de un sistema compuesto $A+B$. Entonces existen estados ortonormales $|i_A\rangle$ para el sistema A y $|i_B\rangle$ para el sistema B tal que

$$|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |i_A\rangle |i_B\rangle,\tag{2.56}$$

donde $\sqrt{\lambda_i}$ son números reales no-negativos que satisfacen $\sum_i \lambda_i = 1$ y se conocen como *coeficientes de Schmidt*.

Este resultado es muy útil, ya que si $|\psi\rangle$ es un estado puro de un sistema compuesto $A + B$ entonces por descomposición de Schmidt se tiene que $\rho_A = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle \langle i_A|$ y $\rho_B = \sum_i \lambda_i |i_B\rangle \langle i_B|$, es decir, que los autovalores de los operadores densidad de cada subsistema son los mismos, a saber λ_i .

Definimos el *rango de Schmidt* asociado al estado $|\psi\rangle$ como el número de $\sqrt{\lambda_i}$ no-nulos presentes en la Ec.(2.56), denotado como R . Cuando $R = 1$, el estado total del sistema no está entrelazado, es decir el estado del sistema es separable y cada subsistema se encuentra en un estado puro. Mientras que en el caso contrario el sistema está entrelazado. La distribución de los coeficientes de Schmidt $\sqrt{\lambda_i}$ nos brinda información acerca de cuán entrelazado está el sistema. La medida más fundamental basada en el grado de mezcla de las matrices reducidas es la entropía de entrelazamiento,

$$\varepsilon(|\psi\rangle) = S_{vN}(\rho_A) = S_{vN}(\rho_B), \quad (2.57)$$

donde $S_{vN}(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho)$ es la entropía de von Neumann del operador ρ . Esta medida en términos de los coeficientes de Schmidt toma la forma:

$$S_{vN} = -\sum_i \lambda_i \log(\lambda_i). \quad (2.58)$$

Otro indicador útil de la cantidad de entrelazamiento de un estado puro está dado por la entropía lineal de las matrices marginales, definida como

$$S_L = 1 - \mathcal{P}, \quad (2.59)$$

donde $\mathcal{P} = \text{Tr} \{[\rho_A]^2\} = \text{Tr} \{[\rho_B]^2\} = \sum_i \lambda_i^2$ se define como la *pureza*. Este indicador tiene la ventaja de ser computacionalmente más eficiente, ya que no requiere la diagonalización de las matrices densidad.

2.3.2 Entrelazamiento en sistemas de fermiones idénticos

Al tratar sistemas de partículas idénticas fermiónicas, como se detalló en la Sección (2.1), debemos antisimetrizar el estado que describe al sistema. Las correlaciones entre fermiones idénticos que son debidas únicamente a la naturaleza antisimétrica del estado no contribuyen al entrelazamiento del estado [22, 23, 24, 25]. Según el enfoque que seguiremos en este trabajo, ampliamente discutido en la literatura, el entrelazamiento está dado por las correlaciones cuánticas existentes por encima de estas mínimas de simetría.

Los ejemplos usuales de entrelazamiento, como el visto anteriormente, son en sistemas compuestos de subsistemas distinguibles. En un sistema compuesto de dos subsistemas A y B donde \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B son sus respectivos espacios de Hilbert, vimos que es posible estudiar el entrelazamiento utilizando la descomposición de Schmidt. La expresión para el estado $|\psi\rangle$ dada por la Ec.(2.56) es una expansión en una base

ortogonal de vectores producto con un número mínimo R de términos no nulos. Este número al cual llamamos rango de Schmidt de $|\psi\rangle$, puede tomar valores entre uno y $\min\{\dim(\mathcal{H}_A), \dim(\mathcal{H}_B)\}$, el estado $|\psi\rangle$ está entrelazado si y solo si $R > 1$.

Ahora supongamos el caso de dos fermiones idénticos [23, 24], donde cada uno pertenece a un espacio de Hilbert \mathcal{H}_n de dimensión n . El espacio de Hilbert total es $A(\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n)$ donde A denota la antisimetrización del espacio, un estado general $|w\rangle$ viene dado por la Ec.(2.60),

$$|w\rangle = \sum_{i,j}^n w_{ij} f_i^\dagger f_j^\dagger |0\rangle, \quad (2.60)$$

donde f_i^\dagger y f_j^\dagger corresponden a los operadores creación de un fermión en los estados $|i\rangle$ y $|j\rangle$ de una partícula. Los coeficientes w_{ij} son antisimétricos, es decir $w_{ij} = -w_{ji}$, por lo tanto conforman una matriz compleja antisimétrica w de dimensión $n \times n$. Esta matriz cumple con la condición de normalización,

$$\text{Tr}(w^\dagger w) = \frac{1}{2}. \quad (2.61)$$

Una transformación unitaria del espacio de una sola partícula, teniendo en cuenta la Ec.(2.38), transforma los operadores $f_i^\dagger = \sum_j U_{ji} (f_j')^\dagger$ a nuevos operadores fermiónicos f_j' y $(f_j')^\dagger$. Mientras que las matrices de coeficientes w transforman como,

$$w \rightarrow U w U^T \quad (2.62)$$

donde U^T es la transpuesta de U .

Para toda matriz w compleja antisimétrica de dimensión $n \times n$ existe una transformación unitaria U tal que $w' = U w U^T$ tiene entradas no nulas solo en los bloques 2×2 de la diagonal [24]. Esto es,

$$w' = \text{diag}[Z_1, \dots, Z_R, Z_0] \quad \text{con } Z_k = \begin{bmatrix} 0 & z_k \\ -z_k & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

donde $z_k > 0$ con $k \in \{1, \dots, R\}$, y Z_0 es la matriz nula de dimensión $(n - 2R) \times (n - 2R)$. Cada bloque 2×2 , Z_k , corresponde a un determinante de Slater elemental. Estos determinantes de Slater son análogos a los estados producto en sistemas de partículas distinguibles. De este modo, cuando lo expresamos en esta base, el estado $|w\rangle$ es una suma de determinantes de Slater donde cada estado posible,

correspondiente a la base de estados de una partícula, ocurre a lo sumo en un solo término. En términos matemáticos siguiendo [26] lo que se tiene es

$$|w\rangle = \sum_{i,j} w'_{ij} (f'_i)^\dagger (f'_j)^\dagger |0\rangle = 2 \sum_{k=1}^{\leq \frac{n}{2}} z_k (f'_{2k-1})^\dagger (f'_{2k})^\dagger |0\rangle, \quad (2.64)$$

el número de coeficientes no nulos z_k , es decir el número de determinantes de Slater no nulos, se conoce como *rango de Slater* del estado $|w\rangle$.

Un estado puro de un sistema compuesto por dos fermiones idénticos se considera separable (es decir, no entrelazado) si y solo si puede ser descrito como un único determinante de Slater. Los estados puros de este tipo se dice que tienen rango de Slater igual a 1.

2.4 Teoría de cobosones

En la naturaleza la mayoría de las partículas son partículas compuestas formadas por dos o más fermiones fundamentales, los átomos, las moléculas y los núcleos son ejemplos de ello. Así mientras los procesos físicos no revelen una estructura interna podemos pensar una partícula compuesta como un todo y tratarla aproximadamente como un bosón (fermión) si el número de partículas constituyentes es par (impar) [8].

En este trabajo estudiamos bosones compuestos o **cobosones**, es decir sistemas con un número par de fermiones fundamentales. El grado de *entrelazamiento* entre los fermiones constituyentes determina qué tanto se acerca el sistema a comportarse como un bosón puro [8].

Supongamos dos fermiones de especies a y b , cada uno tiene asociado un espacio de Hilbert en los cuales definimos una base $|k_a\rangle$ y $|k_b\rangle$. De forma tal que se tiene

$$|k_a\rangle = a_{k_a}^\dagger |0\rangle, \quad (2.65)$$

$$|k_b\rangle = b_{k_b}^\dagger |0\rangle. \quad (2.66)$$

los estados $|k_a, k_b\rangle = a_{k_a}^\dagger b_{k_b}^\dagger |0\rangle$ forman una base del espacio producto y en consecuencia cumplen la relación de clausura:

$$\mathbb{I} = \sum_{k_a, k_b} |k_a, k_b\rangle \langle k_a, k_b|, \quad (2.67)$$

esto nos permite escribir un estado arbitrario $|i\rangle$ correspondiente al par de fermiones (a, b) o **cobosón** como:

$$|i\rangle = \sum_{\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b} |\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b\rangle \langle \mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b | i \rangle, \quad (2.68)$$

a su vez, utilizando el formalismo de la segunda cuantización, podemos asociar un operador creación c_i^\dagger para el estado $|i\rangle$ del cobosón²,

$$c_i^\dagger = \sum_{\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b} \langle \mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b | i \rangle a_{\mathbf{k}_a}^\dagger b_{\mathbf{k}_b}^\dagger, \quad (2.69)$$

particularizando para la base posición de cada fermión $|\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b\rangle$ se tiene³,

$$c_i^\dagger = \int \int \langle \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b | i \rangle \Psi_a^\dagger(\mathbf{r}_a) \Psi_b^\dagger(\mathbf{r}_b) d\mathbf{r}_a d\mathbf{r}_b, \quad (2.70)$$

si el estado $|i\rangle$ corresponde al estado fundamental del cobosón y estamos en una dimensión, tenemos que:

$$c^\dagger = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_a dx_b \Phi_0(x_a, x_b) \Psi_a^\dagger(x_a) \Psi_b^\dagger(x_b). \quad (2.71)$$

Siempre podemos expresar la función de onda del estado fundamental $\Phi_0(x_a, x_b)$ en la forma de la descomposición de Schmidt [8, 27],

$$\Phi_0(x_a, x_b) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \phi_n^{(a)}(x_a) \phi_n^{(b)}(x_b), \quad (2.72)$$

con lo cual podemos asociar operadores creación para cada fermión de manera análoga a la que hicimos en las Ecs.(2.43)-(2.44). De esta forma podemos escribir un operador creación para el par,

$$c^\dagger = \sum_n \sqrt{\lambda_n} a_n^\dagger b_n^\dagger, \quad (2.73)$$

²Utilizando la relación de clausura obtenemos: $|i\rangle = \sum_{\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b} \langle \mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b | i \rangle |\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b\rangle = \underbrace{\sum_{\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b} \langle \mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b | i \rangle a_{\mathbf{k}_a}^\dagger b_{\mathbf{k}_b}^\dagger}_{c_i^\dagger} |0\rangle.$

³En el paso al continuo se tiene $\sum_{\mathbf{k}_a, \mathbf{k}_b} \rightarrow \int \int d\mathbf{r}_a d\mathbf{r}_b.$

donde los operadores dados por las Ecs.(2.74)-(2.75) corresponden a la creación de los fermiones de especie a y b respectivamente, en el n -ésimo modo de Schmidt,

$$a_n^\dagger = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_n^{(a)}(x) \Psi_a^\dagger(x), \quad (2.74)$$

$$b_n^\dagger = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_n^{(b)}(x) \Psi_b^\dagger(x). \quad (2.75)$$

Teniendo en cuenta que los operadores dados por las Ecs.(2.74)-(2.75) son fermiónicos, y por lo tanto cumplen las relaciones de conmutación dadas por las Ecs.(2.34)-(2.36), puede verse que el operador creación para el par dado por la Ec.(2.73) cumple la relación de conmutación [8],

$$[c, c^\dagger] = 1 - \Delta, \quad (2.76)$$

donde el operador Δ se define como

$$\Delta = \sum_n \lambda_n (a_n^\dagger a_n + b_n^\dagger b_n), \quad (2.77)$$

y representa una corrección teniendo en cuenta que el operador c no es puramente bosónico.

A partir del estado de un cobosón, en nuestro caso el estado fundamental, puede construirse un estado para N cobosones de la siguiente forma,

$$|N\rangle = \chi_N^{-1/2} \frac{(c^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle. \quad (2.78)$$

La Ec.(2.78) representa lo que se conoce como **ansatz de cobosones**. El factor χ_N corresponde a un factor de normalización tal que cumple $\langle N|N\rangle = 1$ y para el caso en que a y b son fermiones tiene una expresión dada por la Ec.(2.79) [8],

$$\chi_N = N! \sum_{p_N > p_{N-1} > \dots > p_2 > p_1} \lambda_{p_1} \lambda_{p_2} \dots \lambda_{p_N}, \quad (2.79)$$

para el caso $N = 2$ tenemos que la expresión dada por la Ec.(2.80)⁴.

$$\sum_{p_1 p_2} \lambda_{p_1} \lambda_{p_2} = \underbrace{\sum_{p_1} \lambda_{p_1}}_1 \underbrace{\sum_{p_2} \lambda_{p_2}}_1 = 1 = \sum_{p_1 p_2} \lambda_{p_1} \lambda_{p_2} = \underbrace{\sum_{p_1=p_2} \lambda_i^2}_i + \underbrace{\sum_{p_1 \neq p_2} \lambda_{p_1} \lambda_{p_2}}_{2 \sum_{p_2 > p_1} \lambda_{p_1} \lambda_{p_2}}.$$

$$\chi_2 = 2 \sum_{p_2 > p_1} \lambda_{p_1} \lambda_{p_2} = 1 - \sum_i \lambda_i^2, \quad (2.80)$$

De la Ec.(2.80) observamos que el factor χ_2 coincide con la entropía lineal.

Este factor también nos da información de cuán bosónicos son los operadores c y c^\dagger , escribiendo la ecuación de cómo actúa el operador aniquilación en un estado de N pares

$$c|N\rangle = \alpha_N \sqrt{N} |N-1\rangle + |\epsilon_N\rangle, \quad (2.81)$$

donde α_N es una constante y $|\epsilon_N\rangle$ es un término de corrección ortogonal a $|N-1\rangle$. De la expresión dada por la Ec.(2.81) vemos que c se comporta como un operador bosónico si se satisfacen las dos condiciones $\alpha_N \rightarrow 1$ y $\langle \epsilon_N | \epsilon_N \rangle \rightarrow 0$, luego de realizar algunos cálculos puede verse que [8],

$$\alpha_N = \sqrt{\frac{\chi_N}{\chi_{N-1}}}, \quad (2.82)$$

$$\langle \epsilon_N | \epsilon_N \rangle = 1 - N \frac{\chi_N}{\chi_{N-1}} + (N-1) \frac{\chi_{N+1}}{\chi_N}. \quad (2.83)$$

con lo cual se observa que en el límite $\frac{\chi_{N\pm 1}}{\chi_N} \rightarrow 1$ emerge el comportamiento bosónico.

Modelo Trabajado

En este capítulo se introducirá el modelo trabajado. Si bien el sistema se analizó en una y dos dimensiones solo se resolvió en una dimensión, ya que para más dimensiones el sistema puede ser desacoplado y reducir la solución a la de una dimensión, como se explica en la Sección (3.1).

3.1 Un par de fermiones

El modelo trabajado, mostrado en la Fig.(3.1), consiste en un par de fermiones de especies a y b , de misma masa m e igual ω , interactuando armónicamente en una trampa armónica.

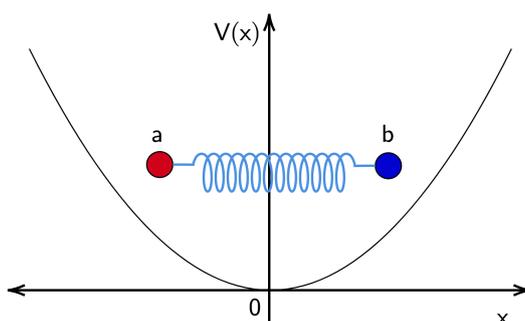


Figura 3.1: Un par de fermiones en una trampa armónica, uno de especie a y otro de especie b interactuando armónicamente.

El Hamiltoniano del sistema en dimensión arbitraria viene dado por la Ec.(3.1), si el signo es positivo (negativo) la interacción es atractiva (repulsiva), donde $\lambda \geq 0$ es el parámetro de acoplamiento. Por otro lado, las coordenadas espaciales x_1 y x_2 corresponden a los fermiones de especie a y b respectivamente.

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2) \pm \frac{1}{2} \lambda^2 (|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)^2 \quad (3.1)$$

Notando lo dicho al comienzo de la sección para el caso en dos dimensiones¹,

¹El mismo procedimiento puede generalizarse para la dimensión que se requiera y con otras variables.

$$(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)^2 = (|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|)^2 \quad (3.2)$$

$$= |(x_1 - x_2, y_1 - y_2)|^2 \quad (3.3)$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \quad (3.4)$$

con lo cual,

$$H = H_x + H_y. \quad (3.5)$$

Por lo tanto, la solución del sistema vendrá dada por una función de la forma,

$$\Phi(x, y) = \Phi(x)\Phi(y). \quad (3.6)$$

3.2 Dos pares de fermiones

El mismo modelo pero esta vez para dos pares se muestra en la Fig.(3.2), consiste en dos pares indistinguibles de fermiones de especies a y b interactuando armónicamente.

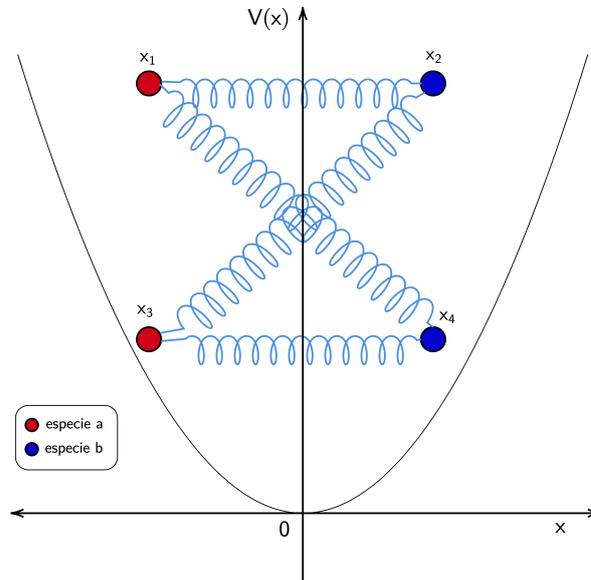


Figura 3.2: Dos pares indistinguibles de fermiones de especie a y b interactuando armónicamente en una trampa.

El Hamiltoniano del sistema en dimensión arbitraria viene dado por la Ec.(3.7). Las coordenadas x_1 y x_3 corresponden a los fermiones de especie a , mientras que las coordenadas x_2 y x_4 corresponden a los fermiones de especie b .

$$\begin{aligned}
H = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\mathbf{P}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{x}_i^2 \right) \pm \frac{1}{2} \lambda^2 [& (|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)^2 + (|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4|)^2 \\
& + (|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4|)^2 + (|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2|)^2] \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Solución exacta del sistema

En este capítulo se resolverá de manera exacta el problema para un par de fermiones, mostrado en la Fig.(3.1). Primero lo haremos en una dimensión donde se obtendrá la función de onda para el estado fundamental y su energía. Luego repetiremos el procedimiento para el problema de dos pares, mostrado en la Fig.(3.2), en una y dos dimensiones. De acá en adelante se utilizarán las unidades $\hbar = m = 1$.

4.1 Un solo par de fermiones

El modelo que se resolverá en esta sección consta de un par de fermiones de especie a y b respectivamente, los cuales se encuentran en una trampa armónica e interactúan de manera armónica y cuyo esquema esta representado en la Fig.(3.1). El Hamiltoniano del sistema viene dado por la Ec.(4.1),

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) \pm \frac{1}{2} \lambda^2 (x_1 - x_2)^2. \quad (4.1)$$

Para resolver el sistema de manera exacta es conveniente introducir las coordenadas $r = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ y $R = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, que llamaremos coordenadas relativa y centro de masa respectivamente. En estas coordenadas el sistema queda desacoplado y podemos reescribirlo de la siguiente manera,

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} (\omega^2 \pm 2\lambda^2) r^2. \quad (4.2)$$

Es decir que el Hamiltoniano pasa a ser el de dos osciladores armónicos desacoplados, de frecuencias:

$$\kappa_1 := \omega, \quad (4.3)$$

$$\kappa_2 := \sqrt{\omega^2 \pm 2\lambda^2}, \quad (4.4)$$

notamos que la frecuencia κ_2 para el caso repulsivo está definida para $\lambda \in \left[0, \frac{\omega}{\sqrt{2}}\right]$. Por lo tanto, las soluciones al problema de autovalores $H\Phi = E\Phi$, son de la forma

$\Phi = \Phi_{n_R}^{(CM)} \Phi_{n_r}^{rel}$ donde las expresiones para $\Phi_{n_R}^{(CM)}$ y $\Phi_{n_r}^{rel}$ vienen dadas por las Ecs.(4.5) y (4.6),

$$\Phi_{n_R}^{(CM)} = \left(\frac{\kappa_1}{\pi 2^{2n_R} (n_R!)^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\kappa_1 R^2}{2}\right) H_{n_R}(\sqrt{\kappa_1} R), \quad n_R = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.5)$$

$$\Phi_{n_r}^{rel} = \left(\frac{\kappa_2}{\pi 2^{2n_r} (n_r!)^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\kappa_2 r^2}{2}\right) H_{n_r}(\sqrt{\kappa_2} r), \quad n_r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

donde la expresión $H_n(x)$ corresponde al polinomio de Hermite de grado n [28].

Mientras que el espectro de energía tiene la forma de la Ec.(4.7),

$$E_{n_R, n_r} = \kappa_1 \left(n_R + \frac{1}{2} \right) + \kappa_2 \left(n_r + \frac{1}{2} \right), \quad n_{R,r} = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.7)$$

En particular el estado fundamental se corresponde al caso $n_R = n_r = 0$ y viene dado por la Ec.(4.8),

$$\Phi_0(x_1, x_2) = \Phi_0^{(CM)}(R) \Phi_0^{rel}(r) = \frac{(\kappa_1 \kappa_2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\kappa_1}{4}(x_1 + x_2)^2\right) \exp\left(-\frac{\kappa_2}{4}(x_1 - x_2)^2\right), \quad (4.8)$$

con energía,

$$E_0 = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}. \quad (4.9)$$

4.1.1 Un par de fermiones en dos dimensiones

El Hamiltoniano isotrópico para el problema de un par de fermiones en dos dimensiones viene dado por la Ec.(4.10),

$$H = -\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \right) + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2) \pm \frac{1}{2} \lambda^2 (|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)^2. \quad (4.10)$$

Debido al desacoplamiento notado en la Sección (3.1) tenemos que,

$$H = H_x + H_y. \quad (4.11)$$

Por lo tanto podemos resolver el problema de autovalores con la misma estrategia del problema en una dimensión, esto es utilizar las coordenadas relativa y centro de masa, con lo cual la solución nos queda,

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi_{n_{R_x}}^{(CM)}(R_x) \Phi_{n_{r_x}}^{rel}(r_x) \Phi_{n_{R_y}}^{(CM)}(R_y) \Phi_{n_{r_y}}^{rel}(r_y). \quad (4.12)$$

En particular para el estado fundamental se tiene que $n_{R_x} = n_{r_x} = n_{R_y} = n_{r_y} = 0$, por lo tanto la expresión toma la forma,

$$\Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(\kappa_1 \kappa_2)^{1/2}}{\pi} \exp\left(-\frac{\kappa_1}{4}[(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2] - \frac{\kappa_2}{4}[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]\right), \quad (4.13)$$

notamos que el estado fundamental de un par en dos dimensiones es no degenerado.

4.2 Dos pares de fermiones

En esta sección, se resolverá el modelo constituido por dos pares de fermiones, cuyo esquema puede verse en la Fig.(3.2). El Hamiltoniano del sistema viene dado por la Ec.(4.14),

$$H = \sum_{i=1}^4 \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2} \omega^2 x_i^2 \right) \pm \frac{1}{2} \lambda^2 [(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_3 - x_2)^2]. \quad (4.14)$$

El objetivo es desacoplar el sistema introduciendo nuevas coordenadas, esto se puede llevar a cabo utilizando la teoría de modos normales [28, 29, 30].

Lo primero a realizar es la construcción de la matriz asociada a la energía potencial del sistema, para ello reescribimos el Hamiltoniano dado por la Ec.(4.14) de la siguiente manera,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 P_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 x_i V_{ij} x_j, \quad (4.15)$$

con lo cual la matriz asociada a la energía potencial nos queda:

$$V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \kappa_2^2 & \beta & 0 & \beta \\ \beta & \kappa_2^2 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \kappa_2^2 & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \kappa_2^2 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

con $\beta := \pm\lambda^2$.

Diagonalizando la matriz, obtenemos:

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \kappa_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_3^2 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

donde

$$\kappa_3 := \sqrt{\omega^2 \pm 4\lambda^2}, \quad (4.18)$$

notamos que la frecuencia κ_3 para el caso repulsivo está definida para $\lambda \in \left[0, \frac{\omega}{2}\right]$. Como se observa tenemos un autovalor degenerado por lo que se debe ortogonalizar utilizando, por ejemplo, Gram-Schmidt y obtenemos el conjunto de autovectores,

$$\kappa_2^2 \rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1, 0) \right\}, \quad (4.19)$$

$$\kappa_1^2 \rightarrow \left\{ \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1) \right\}, \quad (4.20)$$

$$\kappa_3^2 \rightarrow \left\{ \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \right\}, \quad (4.21)$$

a partir de los cuales podemos inferir las coordenadas que desacoplan al sistema,

$$R_1 = \frac{x_4 - x_2}{\sqrt{2}}, \quad (4.22)$$

$$R_2 = \frac{x_3 - x_1}{\sqrt{2}}, \quad (4.23)$$

$$R_3 = \frac{x_2 - x_1 + x_4 - x_3}{2}, \quad (4.24)$$

$$R_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}, \quad (4.25)$$

en estas coordenadas el Hamiltoniano del sistema pasa a ser,

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} + \frac{1}{2} \left[\kappa_2^2 (R_1^2 + R_2^2) + \kappa_1^2 R_3^2 + \kappa_3^2 R_4^2 \right]. \quad (4.26)$$

Es decir, que nos queda un sistema de cuatro osciladores armónicos desacoplados, con lo cual la solución en primera instancia vendrá dada por,

$$\psi = \varphi_{n_{R_1}}(R_1)\varphi_{n_{R_2}}(R_2)\varphi_{n_{R_3}}(R_3)\varphi_{n_{R_4}}(R_4), \quad (4.27)$$

donde,

$$\varphi_{n_{R_i}}(R_i) = \left(\frac{\eta_i}{\pi 2^{2n_{R_i}} (n_{R_i}!)^2} \right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\eta_i R_i^2)\right) H_{n_{R_i}}(\sqrt{\eta_i} R_i), \quad (4.28)$$

con $i = 1, 2, 3, 4$, $\eta_1 = \eta_2 = \kappa_2$, $\eta_3 = \kappa_1$ y $\eta_4 = \kappa_3$. Mientras que el espectro de energía viene dado por:

$$E_{n_{R_1}, n_{R_2}, n_{R_3}, n_{R_4}} = \kappa_2(n_{R_1} + n_{R_2} + 1) + \kappa_1\left(n_{R_3} + \frac{1}{2}\right) + \kappa_3\left(n_{R_4} + \frac{1}{2}\right), \quad (4.29)$$

con $i = 1, 2, 3, 4$ y $n_{R_i} = 0, 1, 2, \dots$

Sin embargo, como se explicó en la Sección (2.1), las partículas de especie a y b son fermiones idénticos, es decir, que los estados físicos del sistema pertenecen al espacio de Hilbert $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$, donde \mathcal{H}_a y \mathcal{H}_b denotan los espacios de Hilbert antisimétricos de los fermiones a y b respectivamente. Por lo tanto, es necesario antisimetrizar la función de onda, más específicamente, debe cumplirse:

$$A_a A_b \psi = \psi, \quad (4.30)$$

donde los operadores A_a y A_b se corresponden con la antisimetrización de los fermiones a y b . En este caso como son dos partículas de cada especie, la forma de los operadores será:

$$A_a = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - P_{31}), \quad (4.31)$$

$$A_b = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - P_{42}), \quad (4.32)$$

donde los operadores P_{31} y P_{42} corresponden a cambiar los estados de los fermiones a y b respectivamente. Para antisimetrizar la solución dada por la Ec.(4.27) debemos calcular $A_a A_b \psi$, utilizando las Ecs.(4.31)-(4.32) obtenemos la Ec.(4.33).

$$\begin{aligned}
A_a A_b \psi &= \frac{1}{2}(\mathbb{I} - P_{31}) \frac{1}{2}(\mathbb{I} - P_{42}) \varphi_{n_{R_1}}(R_1) \varphi_{n_{R_2}}(R_2) \varphi_{n_{R_3}}(R_3) \varphi_{n_{R_4}}(R_4) \quad (4.33) \\
&= \frac{1}{4}(\mathbb{I} - P_{42} - P_{31} + P_{31}P_{42}) \varphi_{n_{R_1}}(R_1) \varphi_{n_{R_2}}(R_2) \varphi_{n_{R_3}}(R_3) \varphi_{n_{R_4}}(R_4)
\end{aligned}$$

Veamos ahora como actúa cada operador sobre el producto de estados, para eso debemos analizar como cambian las coordenadas desacopladas cuando se aplican las permutaciones.

- P_{31} corresponde a la permutación de los fermiones de especie a y su efecto sobre las coordenadas es el siguiente:

$$R_1 = \frac{x_4 - x_2}{\sqrt{2}} \xrightarrow{P_{31}} \widetilde{R}_1 = \frac{x_4 - x_2}{\sqrt{2}} = R_1, \quad (4.34)$$

$$R_2 = \frac{x_3 - x_1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{P_{31}} \widetilde{R}_2 = \frac{x_1 - x_3}{\sqrt{2}} = -R_2, \quad (4.35)$$

$$R_3 = \frac{x_2 - x_1 + x_4 - x_3}{2} \xrightarrow{P_{31}} \widetilde{R}_3 = \frac{x_2 - x_3 + x_4 - x_1}{2} = R_3, \quad (4.36)$$

$$R_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} \xrightarrow{P_{31}} \widetilde{R}_4 = \frac{x_3 + x_2 + x_1 + x_4}{2} = R_4. \quad (4.37)$$

Por lo tanto se tiene que,

$$\begin{aligned}
&P_{31} \varphi_{n_{R_1}}(R_1) \varphi_{n_{R_2}}(R_2) \varphi_{n_{R_3}}(R_3) \varphi_{n_{R_4}}(R_4) \\
&= \varphi_{n_{R_1}}(R_1) \varphi_{n_{R_2}}(-R_2) \varphi_{n_{R_3}}(R_3) \varphi_{n_{R_4}}(R_4).
\end{aligned} \quad (4.38)$$

- P_{42} corresponde a la permutación de los fermiones de especie b y su efecto sobre las coordenadas es el siguiente:

$$R_1 = \frac{x_4 - x_2}{\sqrt{2}} \xrightarrow{P_{42}} \widetilde{R}_1 = \frac{x_2 - x_4}{\sqrt{2}} = -R_1, \quad (4.39)$$

$$R_2 = \frac{x_3 - x_1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{P_{42}} \widetilde{R}_2 = \frac{x_3 - x_1}{\sqrt{2}} = R_2, \quad (4.40)$$

$$R_3 = \frac{x_2 - x_1 + x_4 - x_3}{2} \xrightarrow{P_{42}} \widetilde{R}_3 = \frac{x_4 - x_1 + x_2 - x_3}{2} = R_3, \quad (4.41)$$

$$R_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} \xrightarrow{P_{42}} \widetilde{R}_4 = \frac{x_1 + x_4 + x_3 + x_2}{2} = R_4. \quad (4.42)$$

Por lo tanto el efecto del permutador P_{42} viene dado por la Ec.(4.43).

$$\begin{aligned}
& P_{42} \varphi_{n_{R_1}}(R_1) \varphi_{n_{R_2}}(R_2) \varphi_{n_{R_3}}(R_3) \varphi_{n_{R_4}}(R_4) \\
& = \varphi_{n_{R_1}}(-R_1) \varphi_{n_{R_2}}(R_2) \varphi_{n_{R_3}}(R_3) \varphi_{n_{R_4}}(R_4)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

De esta manera podemos escribir:

$$\begin{aligned}
A_a A_b \psi &= \frac{1}{4} \varphi_{n_{R_1}}(R_1) \varphi_{n_{R_2}}(R_2) \varphi_{n_{R_3}}(R_3) \varphi_{n_{R_4}}(R_4) \\
& - \frac{1}{4} \varphi_{n_{R_1}}(-R_1) \varphi_{n_{R_2}}(R_2) \varphi_{n_{R_3}}(R_3) \varphi_{n_{R_4}}(R_4) \\
& - \frac{1}{4} \varphi_{n_{R_1}}(R_1) \varphi_{n_{R_2}}(-R_2) \varphi_{n_{R_3}}(R_3) \varphi_{n_{R_4}}(R_4) \\
& + \frac{1}{4} \varphi_{n_{R_1}}(-R_1) \varphi_{n_{R_2}}(-R_2) \varphi_{n_{R_3}}(R_3) \varphi_{n_{R_4}}(R_4).
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Notamos que si $\varphi_{n_{R_1}}(-R_1) = -\varphi_{n_{R_1}}(R_1)$ y $\varphi_{n_{R_2}}(-R_2) = -\varphi_{n_{R_2}}(R_2)$ entonces ψ es autoestado del operador $A_a A_b$. Los polinomios de Hermite tienen paridad definida [28] con lo cual basta tomar $n_{R_1} = n_{R_2} = 1$ y $n_{R_3} = n_{R_4} = 0$, la elección de estos números cuánticos representa el estado fundamental del sistema teniendo en cuenta la indistinguibilidad de los fermiones. Por lo tanto, el estado tiene la forma:

$$\begin{aligned}
\psi_{1D} &= \frac{1}{2\pi} (\kappa_1 \kappa_2^2 \kappa_3)^{\frac{1}{4}} \\
& \times \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\kappa_2 (R_1^2 + R_2^2) + \kappa_3 R_3^2 + \kappa_1 R_4^2 \right) \right) H_1(\sqrt{\kappa_2} R_1) H_1(\sqrt{\kappa_2} R_2),
\end{aligned} \tag{4.45}$$

con energía

$$E_{0,ex} = 3\kappa_2 + \frac{(\kappa_1 + \kappa_3)}{2}. \tag{4.46}$$

Si bien tenemos las expresiones exactas para el estado fundamental, una forma de caracterizar al estado es a través de las correlaciones espaciales presentes en el sistema [31]. Esto será útil al momento de comparar los resultados obtenidos utilizando el ansatz para las soluciones del problema en el Capítulo (6).

La densidad conjunta para fermiones de diferentes especie para el caso atractivo, se define en términos de segunda cuantización como:

$$\mathcal{D}_{ab}(x, x') = \langle \tilde{\psi} | \Psi_b^\dagger(x') \Psi_a^\dagger(x) \Psi_a(x) \Psi_b(x') | \tilde{\psi} \rangle. \tag{4.47}$$

Mientras que la densidad conjunta para dos fermiones de la misma especie se define a través de la densidad conjunta,

$$\mathcal{D}_{aa}(x, x') = \langle \tilde{\psi} | \Psi_a^\dagger(x') \Psi_a^\dagger(x) \Psi_a(x) \Psi_a(x') | \tilde{\psi} \rangle, \quad (4.48)$$

donde $|\tilde{\psi}\rangle$ es un estado normalizado, dado que las funciones de onda con las que se trabaja están normalizadas. Las gráficas (4.1)-(4.2)-(5.2)-(5.3) son proporcionales por una constante a las densidades conjuntas (4.47)-(4.48). Notamos que se grafica solo el caso atractivo de manera que el trabajo no se extienda tanto, pero en principio es posible graficar ambos casos.

En los cuatro paneles de la Fig.(4.1) se observa una fuerte correlación diagonal a medida que aumentamos el parámetro de interacción λ . La densidad conjunta $\mathcal{D}_{ab}(x, x')$ representa la probabilidad de encontrar un fermión de especie a y b en las posiciones x y x' respectivamente (o viceversa por la simetría del problema), de manera que al aumentar la interacción las gráficas nos indican que hay mayor probabilidad de encontrar a las partículas en $x = x'$, es decir, que los fermiones a y b forman pares fuertemente ligados.

En la Fig.(4.2) ilustramos las correlaciones espaciales entre dos fermiones de la misma especie a través de la densidad conjunta, para diferentes valores del parámetro de interacción λ en el caso atractivo. Las gráficas (4.2) muestran claramente la presencia del principio de exclusión de Pauli, en los cuatro paneles la densidad es cero en la diagonal. Dos fermiones idénticos tienen más probabilidades de encontrarse separados el uno del otro a una distancia que estará determinada por la escala espacial de la trampa armónica y como se observa cambia para los diferentes valores de λ . Una posible explicación de este comportamiento es que debido al acoplamiento entre fermiones de distinta especie cuando se aumenta la interacción los fermiones de misma especie se acercan cada vez más.

4.2.1 Dos pares de fermiones en dos dimensiones

Para comprender mejor el problema y motivados por los resultados de [32], se estudió el problema exacto en dos dimensiones.

El Hamiltoniano a resolver está dado por la Ec.(3.7) teniendo en cuenta que $\mathbf{x} = (x, y)$, el desacoplamiento de las dimensiones mencionado en la Sección (3) y utilizando las coordenadas (4.22-4.25) que desacoplan al problema unidimensional la forma del Hamiltoniano se reduce a la dada por la Ec.(4.49),

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left[\frac{\partial^2}{\partial R_{i,x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial R_{i,y}^2} \right] + \frac{1}{2} \left[\kappa_2^2 (|\mathbf{R}_1|^2 + |\mathbf{R}_2|^2) + \kappa_1^2 |\mathbf{R}_3|^2 + \kappa_3^2 |\mathbf{R}_4|^2 \right]. \quad (4.49)$$

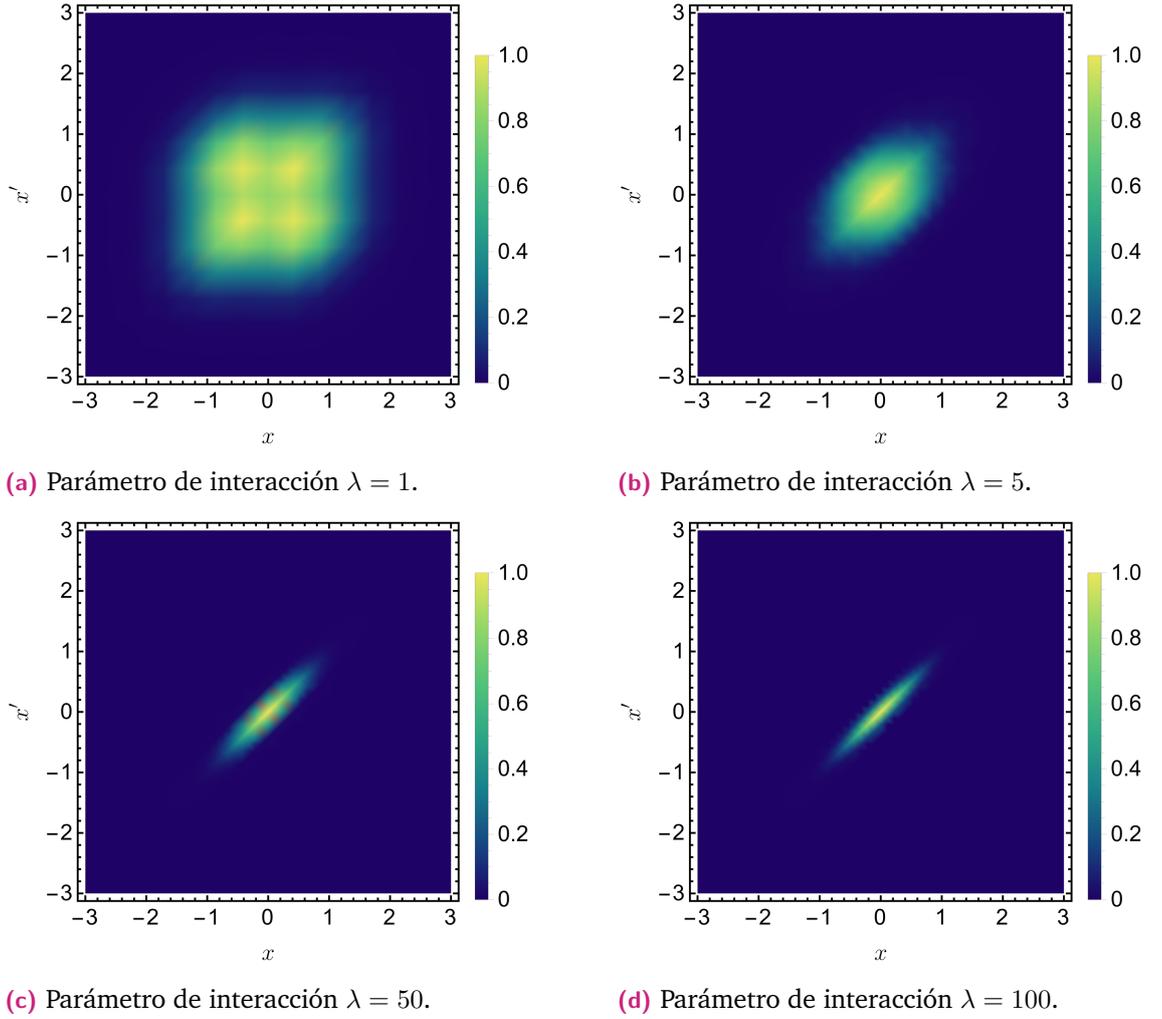


Figura 4.1: Correlaciones espaciales para fermiones de distinta especie correspondientes a la solución exacta del sistema, para distintos valores del parámetro de interacción λ en el caso atractivo con $\omega = 1$.

Como consecuencia, el espectro de energía vendrá dado por la Ec.(4.29), pero con la importante diferencia de que los números cuánticos principales serán de la forma $n_{R_i} = n_{R_{i,x}} + n_{R_{i,y}}$. Esto nos indica que hay una degeneración presente y que H no constituye un **C.C.O.C**¹, volveremos sobre este punto en un momento.

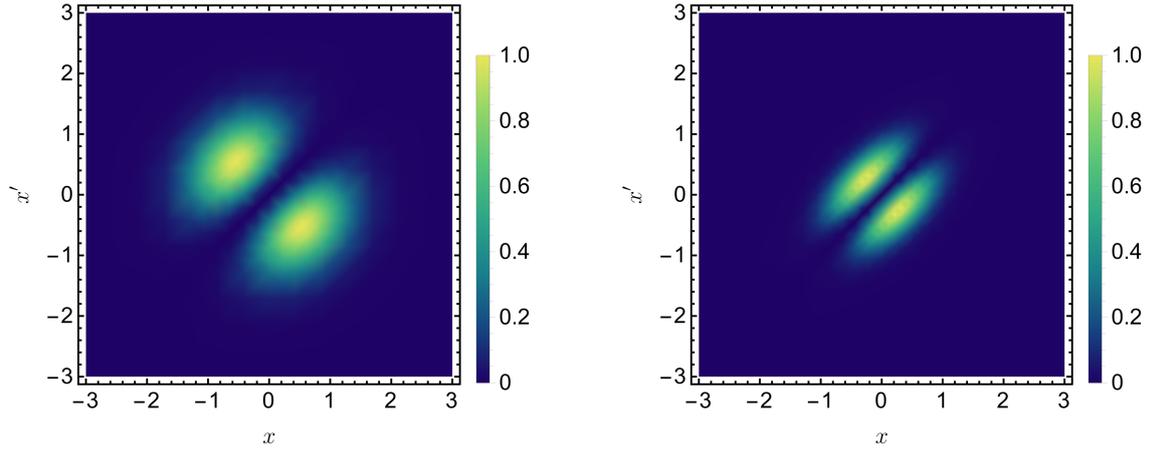
Dada la forma del Hamiltoniano la solución del problema tendrá una estructura dada por la Ec.(4.50) donde las soluciones en una dimensión son las dadas por la Ec².(4.27),

$$\psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) = \psi(R_{1,x}, R_{2,x}, R_{3,x}, R_{4,x})\psi(R_{1,y}, R_{2,y}, R_{3,y}, R_{4,y}). \quad (4.50)$$

¹Conjunto Completo de Observables Compatibles.

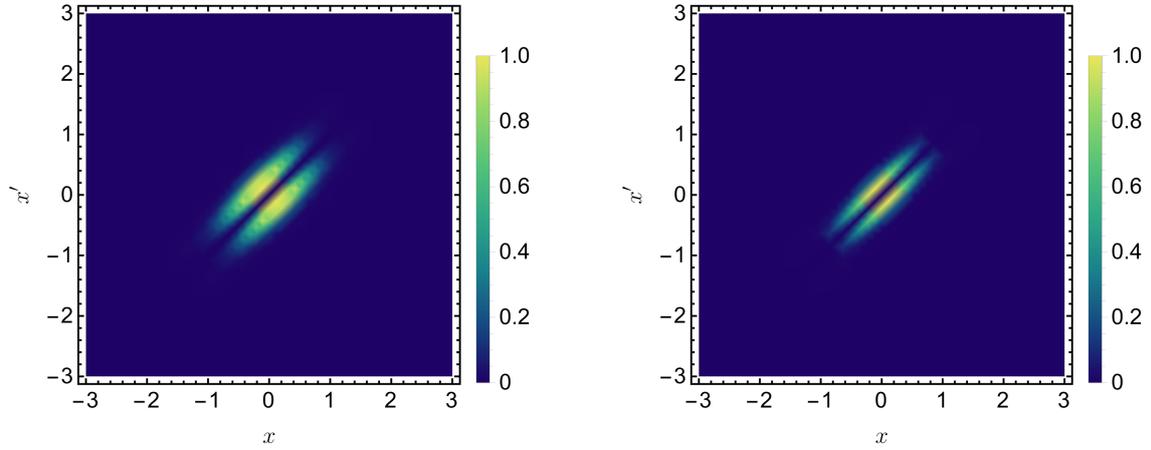
²Teniendo en cuenta la coordenada cartesiana que corresponda, Por ejemplo $R_{1,x} = \frac{x_4 - x_2}{\sqrt{2}}$ y

$$R_{1,y} = \frac{y_4 - y_2}{\sqrt{2}}.$$



(a) Parámetro de interacción $\lambda = 1$.

(b) Parámetro de interacción $\lambda = 5$.



(c) Parámetro de interacción $\lambda = 15$.

(d) Parámetro de interacción $\lambda = 30$.

Figura 4.2: Correlaciones espaciales para fermiones de la misma especie correspondientes a la solución exacta, para distintos valores del parámetro de interacción λ en el caso atractivo con $\omega = 1$.

Teniendo en cuenta la indistinguibilidad debemos antisimetrizar la solución, es decir, calcular $A_a A_b \psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4)$, en este caso las permutaciones vienen dadas por las Ecs.(4.51)-(4.52).

$$\begin{aligned}
 & P_{42} \varphi_{n_{R_1}}(\mathbf{R}_1) \varphi_{n_{R_2}}(\mathbf{R}_2) \varphi_{n_{R_3}}(\mathbf{R}_3) \varphi_{n_{R_4}}(\mathbf{R}_4) \\
 &= \varphi_{n_{R_1}}(-R_{1,x}, -R_{1,y}) \varphi_{n_{R_2}}(R_{2,x}, R_{2,y}) \\
 &\quad \times \varphi_{n_{R_3}}(R_{3,x}, R_{3,y}) \varphi_{n_{R_4}}(R_{4,x}, R_{4,y}) \\
 &= \varphi_{n_{R_1}}(-\mathbf{R}_1) \varphi_{n_{R_2}}(\mathbf{R}_2) \varphi_{n_{R_3}}(\mathbf{R}_3) \varphi_{n_{R_4}}(\mathbf{R}_4)
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
 & P_{31} \varphi_{n_{R_1}}(\mathbf{R}_1) \varphi_{n_{R_2}}(\mathbf{R}_2) \varphi_{n_{R_3}}(\mathbf{R}_3) \varphi_{n_{R_4}}(\mathbf{R}_4) \\
 &= \varphi_{n_{R_1}}(R_{1,x}, R_{1,y}) \varphi_{n_{R_2}}(-R_{2,x}, -R_{2,y}) \\
 &\quad \times \varphi_{n_{R_3}}(R_{3,x}, R_{3,y}) \varphi_{n_{R_4}}(R_{4,x}, R_{4,y}) \\
 &= \varphi_{n_{R_1}}(\mathbf{R}_1) \varphi_{n_{R_2}}(-\mathbf{R}_2) \varphi_{n_{R_3}}(\mathbf{R}_3) \varphi_{n_{R_4}}(\mathbf{R}_4)
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Por lo tanto, de la antisimetrización se obtiene la Ec.(4.53),

$$A_a A_b \psi = \frac{1}{4} \{ \varphi_{n_{R_1}}(\mathbf{R}_1) \varphi_{n_{R_2}}(\mathbf{R}_2) - \varphi_{n_{R_1}}(-\mathbf{R}_1) \varphi_{n_{R_2}}(\mathbf{R}_2) - \varphi_{n_{R_1}}(\mathbf{R}_1) \varphi_{n_{R_2}}(-\mathbf{R}_2) + \varphi_{n_{R_1}}(-\mathbf{R}_1) \varphi_{n_{R_2}}(-\mathbf{R}_2) \} \varphi_{n_{R_3}}(\mathbf{R}_3) \varphi_{n_{R_4}}(\mathbf{R}_4). \quad (4.53)$$

Por lo tanto, el estado $|\psi\rangle$ es antisimétrico si n_{R_1} y n_{R_2} son impares. Análogamente al caso unidimensional el estado fundamental se corresponde con los valores $n_{R_1} = n_{R_2} = 1$ y $n_{R_3} = n_{R_4} = 0$ con lo cual las soluciones serán de la forma,

$$\psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) = \varphi_1(\mathbf{R}_1) \varphi_1(\mathbf{R}_2) \varphi_0(\mathbf{R}_3) \varphi_0(\mathbf{R}_4). \quad (4.54)$$

Además de la indistinguibilidad de los fermiones agregar una dimensión extra al problema es también agregar una simetría extra como se noto al principio de la sección, reescribiendo el Hamiltoniano se tiene $H = H_{R_1} + H_{R_2} + H_{R_3} + H_{R_4}$ donde cada termino corresponde a un oscilador armónico bidimensional en la coordenada \mathbf{R}_i cada uno con su frecuencia correspondiente. Es claro entonces que el problema presenta la degeneración propia de un oscilador armónico bidimensional isotrópico, por esta razón para determinar unívocamente a los estados debemos agregar uno o más observables de forma tal que obtengamos un **C.C.O.C.**

Para la construcción de nuestro **C.C.O.C** utilizamos el modelo de Schwinger, el cual puede consultarse en el Apéndice (A), por cada oscilador puedo asociar un operador momento angular, es decir $\mathbf{R}_i \rightarrow J_{i,z}$. Tenemos entonces que para los osciladores 3 y 4 se cumple $n_{R_3} = n_{R_4} = 0$ lo cual implica $j_3 = j_4 = 0$ y $m_3 = m_4 = 0$, entonces puedo reducir el problema a la suma de dos momentos angulares correspondientes a los osciladores 1 y 2.

Para estos osciladores se tiene que $n_{R_1} = n_{R_2} = 1$ lo cual por la Ec.(A.25) implica que $j_1 = j_2 = 1/2$, luego de la suma de momentos angulares sabemos que,

$$1/2 \otimes 1/2 = 1 \oplus 0, \quad (4.55)$$

con lo cual los estados son,

$$\text{Triplete: } \begin{cases} |1, 1\rangle = |1/2, 1/2\rangle, \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2, -1/2\rangle + |-1/2, 1/2\rangle), \\ |1, -1\rangle = |-1/2, -1/2\rangle, \end{cases} \quad (4.56)$$

y

$$\text{Singlete: } |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1/2, -1/2\rangle - |-1/2, 1/2\rangle). \quad (4.57)$$

Veamos la representación de estos estados en términos de operadores creación y aniquilación, por ejemplo los del triplete, en particular el estado $|1, 0\rangle$. Utilizando la Ec.(A.26) y que $n = 1 = n_+ + n_-$ obtenemos:

$$m_1 = \frac{1}{2} = \frac{n_{1,+} - n_{1,-}}{2} = \frac{n_{1,+} - (1 - n_{1,+})}{2} = \frac{2n_{1,+} - 1}{2}, \quad (4.58)$$

ecuación de la cual inferimos que $n_{1,+} = 1$ y $n_{1,-} = 0$. De la misma manera para m_2 se tiene que,

$$m_2 = -\frac{1}{2} = \frac{2n_{2,+} - 1}{2}, \quad (4.59)$$

de lo cual deducimos que $n_{2,+} = 0$ y $n_{2,-} = 1$. El caso $m_1 = -\frac{1}{2}$ y $m_2 = \frac{1}{2}$ es análogo, se tiene entonces:

$$|1/2, -1/2\rangle = |n_{1,+} = 1, n_{1,-} = 0; n_{2,+} = 0, n_{2,-} = 1\rangle = a_{1,+}^\dagger a_{2,-}^\dagger |\varphi_{0,0}\rangle, \quad (4.60)$$

$$|-1/2, 1/2\rangle = |n_{1,+} = 0, n_{1,-} = 1; n_{2,+} = 1, n_{2,-} = 0\rangle = a_{1,-}^\dagger a_{2,+}^\dagger |\varphi_{0,0}\rangle. \quad (4.61)$$

Los operadores creación en las Ecs.(4.60)-(4.61) actúan de la forma:

$$\begin{aligned} a_{1,+}^\dagger a_{2,-}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1,x}^\dagger + ia_{1,y}^\dagger) \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{2,x}^\dagger - ia_{2,y}^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} (a_{1,x}^\dagger a_{2,x}^\dagger - ia_{1,x}^\dagger a_{2,y}^\dagger + ia_{1,y}^\dagger a_{2,x}^\dagger + a_{1,y}^\dagger a_{2,y}^\dagger), \end{aligned} \quad (4.62)$$

y

$$\begin{aligned} a_{1,-}^\dagger a_{2,+}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1,x}^\dagger - ia_{1,y}^\dagger) \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{2,x}^\dagger + ia_{2,y}^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} (a_{1,x}^\dagger a_{2,x}^\dagger + ia_{1,x}^\dagger a_{2,y}^\dagger - ia_{1,y}^\dagger a_{2,x}^\dagger + a_{1,y}^\dagger a_{2,y}^\dagger). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Reescribiendo se obtiene,

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{1,x}^\dagger a_{2,x}^\dagger + a_{1,y}^\dagger a_{2,y}^\dagger) |\varphi_{0,0}\rangle, \quad (4.64)$$

notemos que a este estado falta multiplicarlo por las soluciones $n_3 = n_4 = 0$, finalmente obtenemos,

$$\begin{aligned} \psi_{|1,0\rangle}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \varphi_1(R_{1,x})\varphi_0(R_{1,y})\varphi_1(R_{2,x})\varphi_0(R_{2,y}) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_0(R_{1,x})\varphi_1(R_{1,y})\varphi_0(R_{2,x})\varphi_1(R_{2,y}) \right\} \varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Este procedimiento se repitió con los estados restantes, obteniendo las Ecs.(4.66)-(4.67)-(4.68).

$$\begin{aligned} \psi_{|0,0\rangle}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \varphi_0(R_{1,x})\varphi_1(R_{1,y})\varphi_1(R_{2,x})\varphi_0(R_{2,y}) \right. \\ &\quad \left. - \varphi_1(R_{1,x})\varphi_0(R_{1,y})\varphi_0(R_{2,x})\varphi_1(R_{2,y}) \right\} \varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4) \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} \psi_{|1,1\rangle}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\varphi_1(R_{1,x})\varphi_0(R_{1,y})\varphi_1(R_{2,x})\varphi_0(R_{2,y}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \varphi_0(R_{1,x})\varphi_1(R_{1,y})\varphi_0(R_{2,x})\varphi_1(R_{2,y}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \left(\varphi_1(R_{1,x})\varphi_0(R_{1,y})\varphi_0(R_{2,x})\varphi_1(R_{2,y}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varphi_0(R_{1,x})\varphi_1(R_{1,y})\varphi_1(R_{2,x})\varphi_0(R_{2,y}) \right) \right\} \varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4) \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \psi_{|1,-1\rangle}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\varphi_1(R_{1,x})\varphi_0(R_{1,y})\varphi_1(R_{2,x})\varphi_0(R_{2,y}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \varphi_0(R_{1,x})\varphi_1(R_{1,y})\varphi_0(R_{2,x})\varphi_1(R_{2,y}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \left(\varphi_1(R_{1,x})\varphi_0(R_{1,y})\varphi_0(R_{2,x})\varphi_1(R_{2,y}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varphi_0(R_{1,x})\varphi_1(R_{1,y})\varphi_1(R_{2,x})\varphi_0(R_{2,y}) \right) \right\} \varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Ahora notemos también que otra elección posible de observables, para formar el C.C.O.C, pueden ser los Hamiltonianos $H_{R_{i,x}}$ y $H_{R_{i,y}}$ con lo cual los estados

vendrán determinados por los números cuánticos $n_{R_{i,x}}$ y $n_{R_{i,y}}$, teniendo en cuenta la indistinguibilidad las soluciones vendrán dadas por las Ecs.(4.69)-(4.72),

$$\psi_1(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) = \varphi_0(R_{1,x})\varphi_1(R_{1,y})\varphi_0(R_{2,x})\varphi_1(R_{2,y})\varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4), \quad (4.69)$$

$$\psi_2(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) = \varphi_0(R_{1,x})\varphi_1(R_{1,y})\varphi_1(R_{2,x})\varphi_0(R_{2,y})\varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4), \quad (4.70)$$

$$\psi_3(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) = \varphi_1(R_{1,x})\varphi_0(R_{1,y})\varphi_0(R_{2,x})\varphi_1(R_{2,y})\varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4), \quad (4.71)$$

$$\psi_4(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) = \varphi_1(R_{1,x})\varphi_0(R_{1,y})\varphi_1(R_{2,x})\varphi_0(R_{2,y})\varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4). \quad (4.72)$$

En particular notemos que por el principio de superposición, sumando las soluciones ψ_1 y ψ_4 , y luego normalizando, recuperamos la solución dada por la Ec.(4.65). Otra propiedad interesante de las soluciones (4.69)-(4.72) es que tienen paridad definida ante reflexiones en los ejes x e y . Definiendo la reflexión en el eje x por el operador $\Pi_x f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(-\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se tiene:

$$\Pi_x \psi_1 = \varphi_0(-R_{1,x})\varphi_1(R_{1,y})\varphi_0(-R_{2,x})\varphi_1(R_{2,y})\varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4) = \psi_1, \quad (4.73)$$

$$\Pi_x \psi_2 = \varphi_0(-R_{1,x})\varphi_1(R_{1,y})\varphi_1(-R_{2,x})\varphi_0(R_{2,y})\varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4) = -\psi_2, \quad (4.74)$$

$$\Pi_x \psi_3 = \varphi_1(-R_{1,x})\varphi_0(R_{1,y})\varphi_0(-R_{2,x})\varphi_1(R_{2,y})\varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4) = -\psi_3, \quad (4.75)$$

$$\Pi_x \psi_4 = \varphi_1(-R_{1,x})\varphi_0(R_{1,y})\varphi_1(-R_{2,x})\varphi_0(R_{2,y})\varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4) = \psi_4. \quad (4.76)$$

Análogamente definiendo la reflexión en el eje y por el operador $\Pi_y f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, -\mathbf{y})$, obtenemos,

$$\Pi_y \psi_1 = \varphi_0(R_{1,x})\varphi_1(-R_{1,y})\varphi_0(R_{2,x})\varphi_1(-R_{2,y})\varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4) = \psi_1, \quad (4.77)$$

$$\Pi_y \psi_2 = \varphi_0(R_{1,x})\varphi_1(-R_{1,y})\varphi_1(R_{2,x})\varphi_0(-R_{2,y})\varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4) = -\psi_2, \quad (4.78)$$

$$\Pi_y \psi_3 = \varphi_1(R_{1,x})\varphi_0(-R_{1,y})\varphi_0(R_{2,x})\varphi_1(-R_{2,y})\varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4) = -\psi_3, \quad (4.79)$$

$$\Pi_y \psi_4 = \varphi_1(R_{1,x})\varphi_0(-R_{1,y})\varphi_1(R_{2,x})\varphi_0(-R_{2,y})\varphi_0(\mathbf{R}_3)\varphi_0(\mathbf{R}_4) = \psi_4. \quad (4.80)$$

Por lo que podemos ver que las soluciones ψ_2 y ψ_3 son **impares** mientras que las soluciones ψ_1 y ψ_4 son **pares** ante reflexiones. Dicho de otra forma las soluciones ψ_2 y ψ_3 son autoestados de los operadores $\Pi_{x,y}$ con autovalor -1 mientras que las soluciones ψ_1 y ψ_4 son autoestados de los operadores $\Pi_{x,y}$ con autovalor $+1$.

De la misma manera podemos observar que el estado $\psi_{|1,0\rangle}$ tiene autovalor $+1$ mientras que el estado $\psi_{|0,0\rangle}$ tiene autovalor -1 . Por otro lado los estados $\psi_{|1,1\rangle}$ y

$\psi_{|1,-1}\rangle$ no presentan paridad definida ante reflexiones en los ejes x e y , en otras palabras no son autoestados de los operadores $\Pi_{x,y}$.

Como última observación podemos notar que la solución $\psi_{|1,0}\rangle$ es invariante ante rotaciones alrededor del eje z en un ángulo $\frac{\pi}{2}$, para ver esto simplemente notamos que ante esta rotación se obtiene $R_x \rightarrow R_y$ y $R_y \rightarrow -R_x$. Por lo tanto la solución cumple una condición necesaria de isotropía.

Solución con el ansatz de cobosones

En este capítulo se resolverá el problema para un par de fermiones de distinta especie utilizando el ansatz de cobosones en una dimensión, se obtendrá la función de onda para el estado fundamental y su energía para el problema de dos pares. Por último se resolverá el problema para dos dimensiones.

En la Sección (2.4) se mostró que para utilizar el ansatz debemos elegir un estado y a partir del mismo definir un operador creación. El estado a estudiar es el estado fundamental, cuya solución unidimensional viene dada por la Ec.(4.8) con lo cual en una primera instancia podríamos definir el operador creación para una dimensión, pero debido al desacoplamiento en las dimensiones antes señalado es posible construir el operador creación para el estado fundamental de un cobosón en la dimensión que se requiera.

Comenzando con el operador creación de un par dado por,

$$c^\dagger = \int d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 \Phi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Psi_a^\dagger(\mathbf{x}_1) \Psi_b^\dagger(\mathbf{x}_2). \quad (5.1)$$

Tenemos que para un sistema de dos cobosones constituido por dos fermiones de especie a y b , el operador creación viene dado por,

$$(c^\dagger)^2 = \int d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 d^3\mathbf{x}_3 d^3\mathbf{x}_4 \Phi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Phi_0(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \Psi_a^\dagger(\mathbf{x}_1) \Psi_a^\dagger(\mathbf{x}_3) \Psi_b^\dagger(\mathbf{x}_2) \Psi_b^\dagger(\mathbf{x}_4). \quad (5.2)$$

El ansatz nos dice que el estado del sistema es,

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\chi_2}} (c^\dagger)^2 |0\rangle, \quad (5.3)$$

proyectando en la base posición, luego de algunas cuentas obtenemos:

$$\langle \mathbf{x} | 2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\chi_2}} (\Phi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Phi_0(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) - \Phi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) \Phi_0(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)). \quad (5.4)$$

De acá en adelante definimos:

$$\Phi_{AN}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) := \langle \mathbf{x} | 2 \rangle, \quad (5.5)$$

$$\Phi_{AN}^1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) := \Phi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Phi_0(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4), \quad (5.6)$$

$$\Phi_{AN}^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) := \Phi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) \Phi_0(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2), \quad (5.7)$$

de manera que la solución dada por el ansatz la reescribimos,

$$\Phi_{AN}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{1}{\sqrt{2\chi_2}} \left(\Phi_{AN}^1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) - \Phi_{AN}^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \right). \quad (5.8)$$

5.1 Ansatz en una dimensión

En las secciones anteriores se obtuvo la solución del estado fundamental para un par dada por la Ec.(4.8) para el caso unidimensional, con lo cual resta calcular χ_2 .

Para ello calculamos la descomposición de Schmidt del estado fundamental, siguiendo la misma estrategia que [33] utilizamos la fórmula de Mehler,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (1-z^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{2}\right)^n \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) H_n(u) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) H_n(v) \\ = \exp\left(-\frac{(u^2+v^2)}{2} \frac{1+z^2}{1-z^2} + uv \frac{2z}{1-z^2}\right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

lo que queremos es reescribir la Ec.(4.8) de forma tal que coincida con el lado derecho de la Ec.(5.9), para ello introducimos una variable α ,

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa_1}{4}(x_1+x_2)^2 - \frac{\kappa_2}{4}(x_1-x_2)^2 &= -\frac{\kappa_1}{4}(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2) - \frac{\kappa_2}{4}(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2) \\ &= -\left(\frac{\kappa_1}{4} + \frac{\kappa_2}{4}\right)(x_1^2+x_2^2) - 2\left(\frac{\kappa_1}{4} - \frac{\kappa_2}{4}\right)x_1x_2 \\ &= -(\widetilde{\kappa}_1 + \widetilde{\kappa}_2)(x_1^2+x_2^2) - 2(\widetilde{\kappa}_1 - \widetilde{\kappa}_2)x_1x_2 \\ &= -\frac{(u^2+v^2)}{2}\alpha\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right) + uv\frac{\alpha 2z}{1-z^2}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

con $\widetilde{\kappa}_1 = \frac{\kappa_1}{4}$ y $\widetilde{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2}{4}$, de forma tal que debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones dado por las Ecs.(5.11)-(5.12).

$$(\widetilde{\kappa}_1 + \widetilde{\kappa}_2) = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1 + z^2}{1 - z^2} \right) \quad (5.11)$$

$$(\widetilde{\kappa}_1 - \widetilde{\kappa}_2) = -\frac{\alpha z}{1 - z^2} \quad (5.12)$$

Dividiendo las Ecs. (5.11)-(5.12) nos queda la ecuación de segundo orden,

$$z^2 + 2 \frac{(\widetilde{\kappa}_1 + \widetilde{\kappa}_2)}{(\widetilde{\kappa}_1 - \widetilde{\kappa}_2)} z + 1 = 0, \quad (5.13)$$

cuyas soluciones son:

$$z_{+,-} = \frac{1}{(\widetilde{\kappa}_1 - \widetilde{\kappa}_2)} \left(-(\widetilde{\kappa}_1 + \widetilde{\kappa}_2) \pm 2\sqrt{\widetilde{\kappa}_1 \widetilde{\kappa}_2} \right), \quad (5.14)$$

quedándonos con la solución z_+ , la reescribimos,

$$z_+ = -\frac{(\sqrt{\widetilde{\kappa}_1} - \sqrt{\widetilde{\kappa}_2})}{(\sqrt{\widetilde{\kappa}_1} + \sqrt{\widetilde{\kappa}_2})}, \quad (5.15)$$

reemplazando este valor en la Ec.(5.12) obtenemos α ,

$$\alpha = \sqrt{\widetilde{\kappa}_1 \widetilde{\kappa}_2}. \quad (5.16)$$

Por lo tanto, utilizando la Ec.(5.9) y reescribiendo la Ec.(4.8) obtenemos la descomposición de Schmidt,

$$\Phi_0(x_1, x_2) = \frac{(\kappa_1 \kappa_2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - z_+^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{z_+}{2} \right)^n \exp\left(-\frac{\alpha}{2} (x_1^2 + x_2^2)\right) H_n(\sqrt{\alpha} x_1) H_n(\sqrt{\alpha} x_2). \quad (5.17)$$

Ahora notemos que si $\xi = z_+^2$ entonces $(1 - z_+^2)^{\frac{1}{2}} z_+^n = (1 - \xi)^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{n}{2}} = ((1 - \xi)\xi^n)^{\frac{1}{2}}$, por lo que podemos escribir el estado,

$$\Phi_0(x_1, x_2) = \frac{(\kappa_1 \kappa_2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} ((1 - \xi)\xi^n)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} (x_1^2 + x_2^2)\right) \frac{H_n(\sqrt{\alpha} x_1) H_n(\sqrt{\alpha} x_2)}{2^n}, \quad (5.18)$$

donde $\xi \in [0, 1]$. Comparando las Ecs.(5.18)-(2.72) deducimos que la distribución de coeficientes de Schmidt es $\lambda_n = (1 - \xi)\xi^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, reemplazando en la Ec.(2.79) puede verse [8] que para N partículas la expresión para χ_N es,

$$\chi_N = \frac{N!\xi^{N(N-1)/2}(1 - \xi)^N}{(1 - \xi)(1 - \xi^2)\dots(1 - \xi^N)}, \quad (5.19)$$

particularizando para el caso $N = 2$ tenemos que:

$$\chi_2 = \frac{2\xi}{1 + \xi}, \quad (5.20)$$

reemplazando por el valor de ξ y teniendo en cuenta las definiciones de $\widetilde{\kappa}_1 = \frac{\omega}{4}$ y $\widetilde{\kappa}_2 = \frac{\sqrt{\omega^2 \pm 2\lambda^2}}{4}$ obtenemos el factor χ_2 en una dimensión denotado como $\chi_{2,1D}$,

$$\chi_{2,1D} = 1 - 2\frac{\sqrt{\omega}(\omega^2 \pm 2\lambda^2)^{\frac{1}{4}}}{\omega + \sqrt{\omega^2 \pm 2\lambda^2}}, \quad (5.21)$$

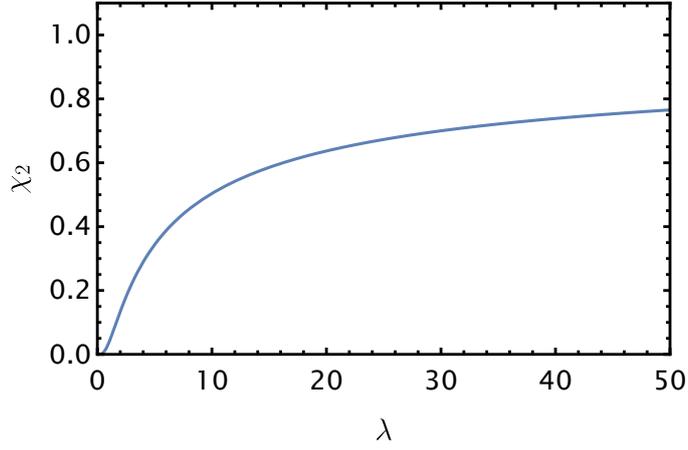
ó en términos de κ_1 y κ_2 ,

$$\chi_{2,1D} = 1 - \frac{2\sqrt{\kappa_1\kappa_2}}{\kappa_1 + \kappa_2}. \quad (5.22)$$

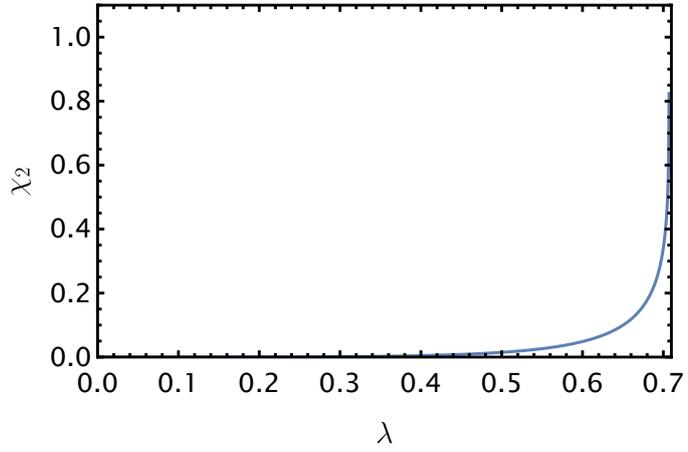
En las Fig.(5.1) podemos ver el factor χ_2 en función del parámetro de acople λ para los casos atractivo y repulsivo. Recordemos que χ_2 además de ser el coeficiente de normalización del estado de un cobosón, representa el entrelazamiento del estado de un par ab . Se observa que el entrelazamiento crece con el parámetro de interacción λ , en particular para la Fig.(5.1a) teniendo en cuenta la Ec.(5.21) vemos que si $\lambda \rightarrow \infty$ entonces $\chi_{2,1D} \rightarrow 1$ mientras que si $\lambda \rightarrow 0$ entonces $\chi_{2,1D} \rightarrow 0$ y por lo tanto el estado es separable. Por otro lado para la Fig.(5.1b) observamos un comportamiento análogo con la particularidad de que λ solo está definido en el intervalo $[0, 1/\sqrt{2}]$.

Para construir la expresión propuesta por el ansatz escribimos las funciones de onda en una dimensión, dadas por las Ecs.(5.23-5.24).

$$\begin{aligned} \Phi_{AN,1D}^1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{(\kappa_1\kappa_2)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \\ &\exp\left(-\frac{1}{4}\left[\kappa_1\{(x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2\} \right. \right. \\ &\left. \left. + \kappa_2\{(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2\}\right]\right) \end{aligned} \quad (5.23)$$



(a) Caso atractivo.



(b) Caso repulsivo.

Figura 5.1: Factor de normalización χ_2 en función del parámetro de interacción λ en ambos casos con $\omega = 1$, atractivo y repulsivo, para el sistema en una dimensión.

$$\Phi_{AN,1D}^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(\kappa_1 \kappa_2)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{4} \left[\kappa_1 \{ (x_1 + x_4)^2 + (x_3 + x_2)^2 \} + \kappa_2 \{ (x_1 - x_4)^2 + (x_3 - x_2)^2 \} \right] \right) \quad (5.24)$$

Utilizando las coordenadas desacopladas (4.22)-(4.25), la Ec.(5.8) y luego de algunas cuentas es posible escribir la solución del ansatz en una dimensión en la forma de la Ec.(5.25).

$$\begin{aligned}
\Phi_{AN}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\kappa_1\kappa_2}{\chi_{2,1D}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\exp\left(-\frac{1}{8}[(\kappa_1 + \kappa_2) \left((x_4 - x_2)^2 + (x_3 - x_1)^2 \right) + \kappa_2((x_2 + x_4) - (x_3 + x_1))^2 + \right. \\
&\left. \kappa_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2] \right) \sinh\left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{4}(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)\right)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

En la Fig.(5.2), de manera análoga al caso exacto, se graficaron las densidades de probabilidad conjunta para el caso atractivo y distintos valores del parámetro de acople λ .

De manera análoga a la realizada en el Capítulo (4) podemos caracterizar a la solución del ansatz a través de las correlaciones espaciales presentes en el sistema. La Fig.(5.2) muestra las las correlaciones espaciales para fermiones de diferentes especie para el caso atractivo, podemos observar que a medida que la interacción crece la probabilidad de que los pares a y b formen un par ligado aumenta.

Por otro lado, en la Fig.(5.3) ilustramos las correlaciones espaciales entre dos fermiones de la misma especie a través de la densidad conjunta para el caso atractivo, definida por la Ec.(4.48). Las gráficas (4.2) muestran claramente la presencia del principio de exclusión de Pauli, en los cuatro paneles la densidad es cero en la diagonal.

5.2 Ansatz en dos dimensiones

Al aumentar una dimensión el análisis previo para determinar el factor χ_2 deja de ser válido, la descomposición de Schmidt que encontramos fue para el caso unidimensional. Para calcularlo puede recurrirse a una forma alternativa, como se señaló en el marco teórico se tiene,

$$\chi_2 = 1 - \mathcal{P}, \tag{5.26}$$

donde la pureza tiene la expresión [34],

$$\mathcal{P} = \int d^2\mathbf{x}_1 d^2\mathbf{x}_2 d^2\mathbf{x}_3 d^2\mathbf{x}_4 \Phi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Phi_0(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \Phi_0(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \Phi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4), \tag{5.27}$$

teniendo en cuenta el desacoplamiento que se notó anteriormente, es decir $\Phi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \Phi_0(x_1, x_2) \Phi_0(y_1, y_2)$, la solución del ansatz será simplemente un producto de la solu-

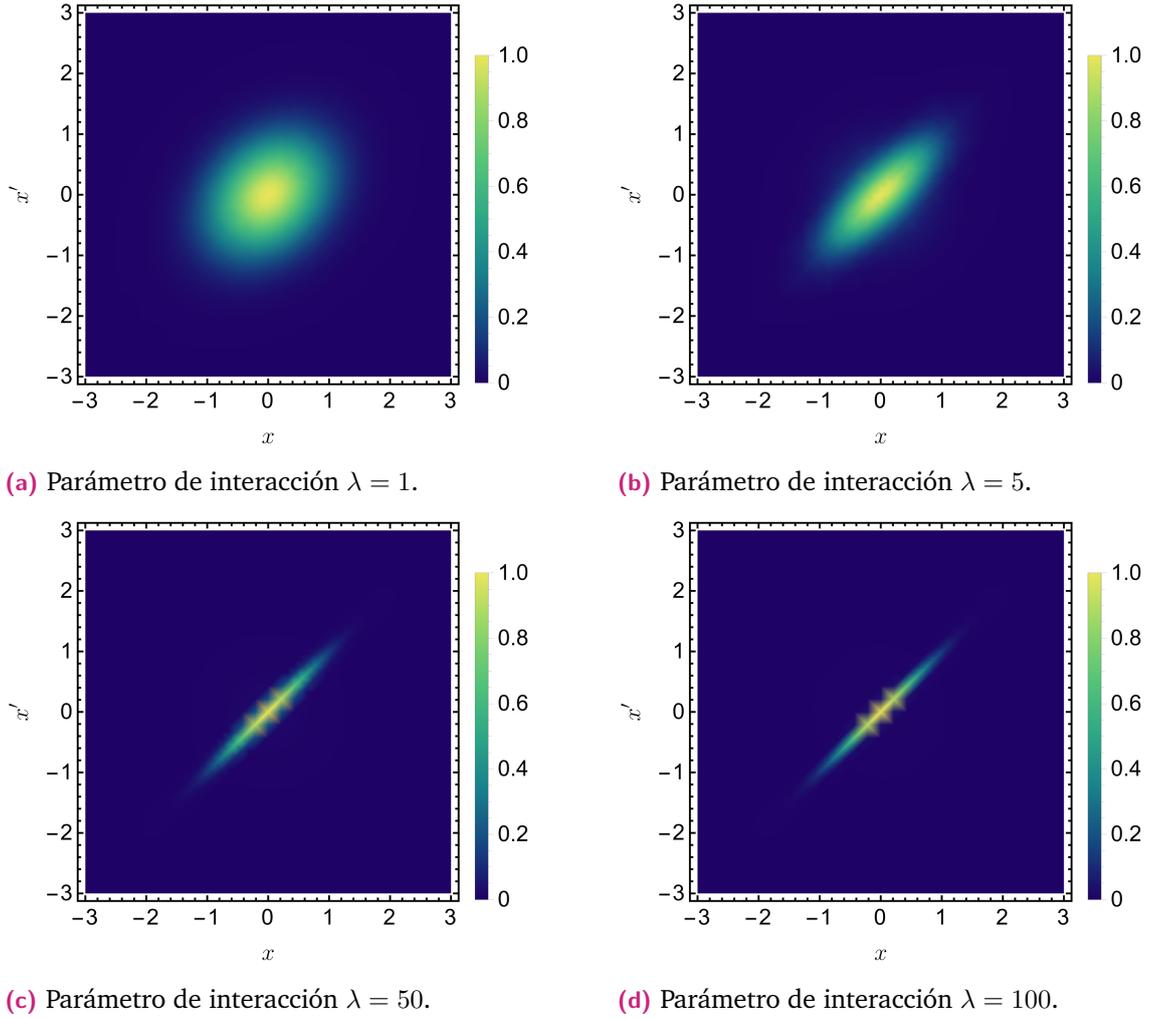


Figura 5.2: Correlaciones espaciales para fermiones de distinta especie correspondientes al ansatz de cobosones, para distintos valores del parámetro de interacción λ en el caso atractivo con $\omega = 1$.

ción unidimensional en las variables x e y . Mientras que el cálculo de la pureza se reduce a:

$$\mathcal{P} = \left(\int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \Phi_0(x_1, x_2) \Phi_0(x_2, x_3) \Phi_0(x_3, x_4) \Phi_0(x_1, x_4) \right)^2. \quad (5.28)$$

La integral nos da el resultado:

$$\mathcal{P} = 2 \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\lambda^2 + \kappa_1(\kappa_1 + \kappa_2)}. \quad (5.29)$$

Por lo que obtenemos el factor χ_2 en dos dimensiones denotado por $\chi_{2,2D}$,

$$\chi_{2,2D} = \frac{\lambda^2 + \kappa_1(\kappa_1 + \kappa_2) - 2\kappa_1\kappa_2}{\lambda^2 + \kappa_1(\kappa_1 + \kappa_2)}. \quad (5.30)$$

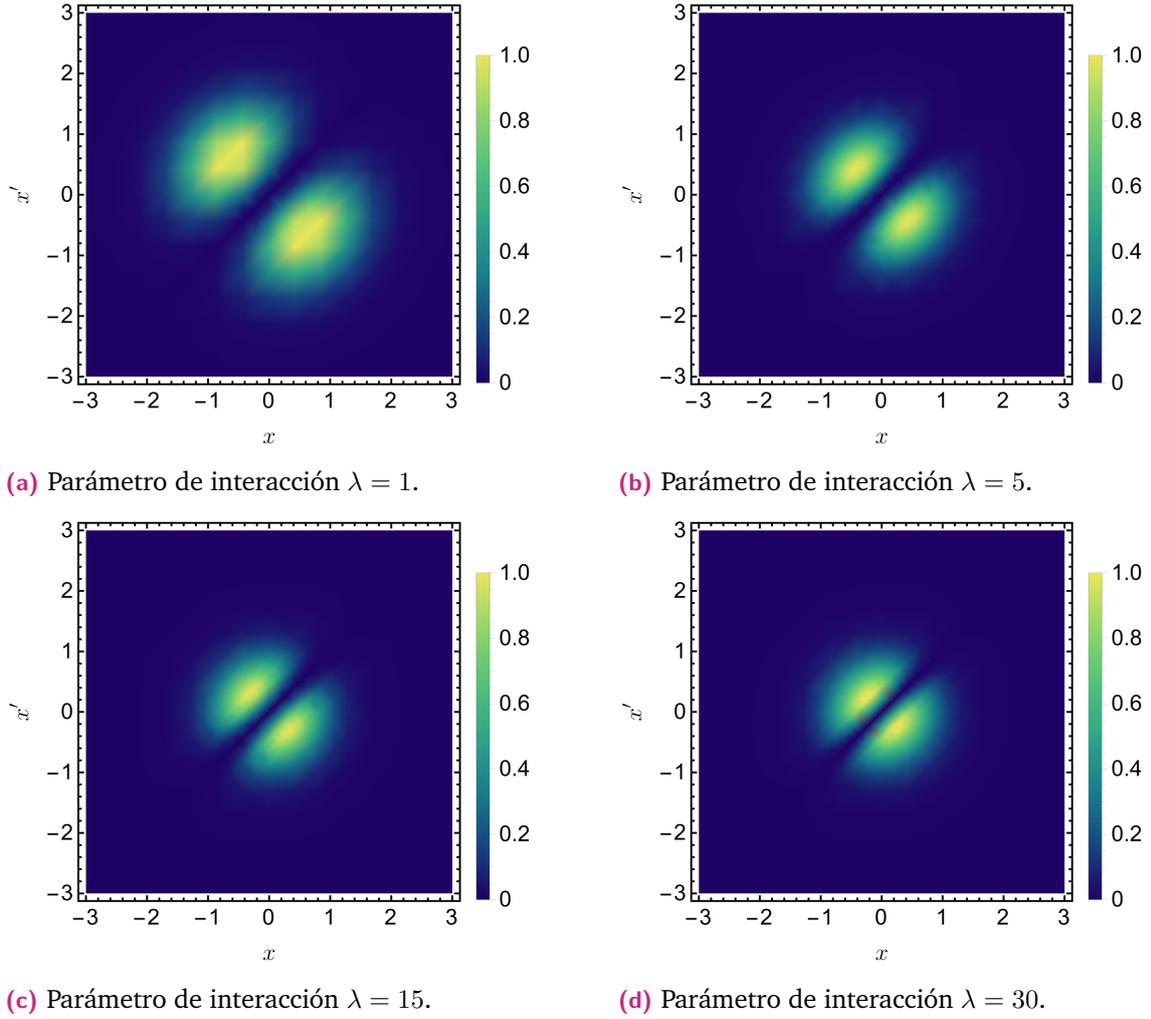


Figura 5.3: Correlaciones espaciales para fermiones de la misma especie correspondientes al ansatz de cobosones, para distintos valores del parámetro de interacción λ en el caso atractivo con $\omega = 1$.

Teniendo en cuenta la expresión general (5.8), de manera análoga al caso unidimensional, notamos que:

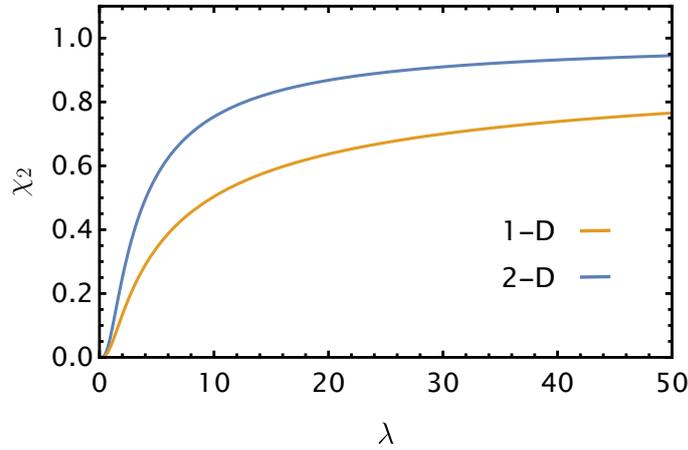
$$\Phi_{AN,2D}^1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \Phi_{AN,1D}^1(x_1, x_2, x_3, x_4)\Phi_{AN,1D}^1(y_1, y_2, y_3, y_4), \quad (5.31)$$

$$\Phi_{AN,2D}^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \Phi_{AN,1D}^2(x_1, x_2, x_3, x_4)\Phi_{AN,1D}^2(y_1, y_2, y_3, y_4), \quad (5.32)$$

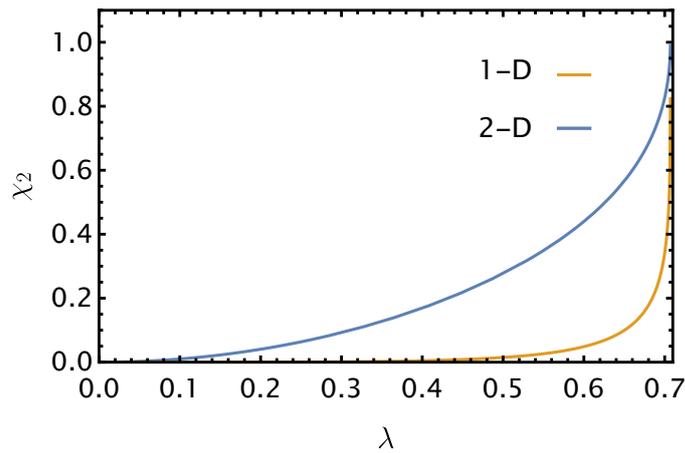
por lo tanto, con esto ya queda definida la solución en dos dimensiones a la cual denotamos como $\Phi_{AN,2D}$. Es importante notar que la solución en dos dimensiones de un par en su estado fundamental es no degenerada.

En la Fig.(5.4) podemos ver el factor χ_2 en una y dos dimensiones, en función del parámetro de acople λ para los casos atractivo y repulsivo. De manera análoga al caso unidimensional, para el caso bidimensional se observa que el entrelazamiento

crece con el parámetro de interacción λ , en particular para la Fig.(5.4a) teniendo en cuenta la Ec.(5.30) vemos que si $\lambda \rightarrow \infty$ entonces $\chi_{2,2D} \rightarrow 1$ mientras que si $\lambda \rightarrow 0$ entonces $\chi_{2,2D} \rightarrow 0$ y por lo tanto el estado es separable. Además observamos que el entrelazamiento del par ab en dos dimensiones es mayor que en una dimensión, lo cual es razonable debido a que tenemos más grados de libertad.



(a) Caso atractivo.



(b) Caso repulsivo.

Figura 5.4: Factor de normalización χ_2 en función del parámetro de interacción λ en ambos casos con $\omega = 1$, atractivo y repulsivo, para el sistema en una y dos dimensiones.

5.3 Cálculo de la energía

En esta sección calculamos la energía del estado fundamental para el Hamiltoniano exacto en una dimensión dado por la Ec.(4.14) utilizando el ansatz de cobosones, lo que se cálculo fue el valor de expectación $\langle \Phi_{AN,1D} | H | \Phi_{AN,1D} \rangle$. Por una cuestión práctica solo por esta sección denotaremos Φ_{AN} a $\Phi_{AN,1D}$, para el cálculo comenzamos reescribiendo la expresión del Hamiltoniano como:

$$\begin{aligned} H &= H_{12} + H_{34} \pm \frac{1}{2} \lambda^2 (x_1 - x_4)^2 \pm \frac{1}{2} \lambda^2 (x_3 - x_2)^2 \\ &= H_{12} + H_{34} + V_{14} + V_{32}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde H_{12} y H_{34} son los Hamiltonianos dados por la Ec.(3.1) para los pares x_1, x_2 y x_3, x_4 respectivamente, además denotamos $V_{14} := \pm \frac{1}{2} \lambda^2 (x_1 - x_4)^2$ y $V_{32} := \pm \frac{1}{2} \lambda^2 (x_3 - x_2)^2$ como los potenciales de interacción para los pares x_1, x_4 y x_3, x_2 respectivamente.

Luego el valor de expectación vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{AN} | H | \Phi_{AN} \rangle &= \underbrace{\langle \Phi_{AN} | H_{12} | \Phi_{AN} \rangle}_{(1)} + \underbrace{\langle \Phi_{AN} | H_{34} | \Phi_{AN} \rangle}_{(2)} \\ &\quad \pm \underbrace{\langle \Phi_{AN} | V_{14} + V_{32} | \Phi_{AN} \rangle}_{(3)}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Calculando cada término por separado:

1.

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{AN} | H_{12} | \Phi_{AN} \rangle &= \frac{1}{2\chi_2} \left\{ \left(\langle \Phi_{AN}^1 | - \langle \Phi_{AN}^2 | \right) H_{12} \left(| \Phi_{AN}^1 \rangle - | \Phi_{AN}^2 \rangle \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\chi_2} \left\{ \left(\langle \Phi_{AN}^1 | - \langle \Phi_{AN}^2 | \right) \left(E_0 | \Phi_{AN}^1 \rangle - H_{12} | \Phi_{AN}^2 \rangle \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\chi_2} \left\{ E_0 - E_0 \langle \Phi_{AN}^2 | \Phi_{AN}^1 \rangle - E_0 \langle \Phi_{AN}^1 | \Phi_{AN}^2 \rangle + \langle \Phi_{AN}^2 | H_{12} | \Phi_{AN}^2 \rangle \right\} \\ &= \frac{E_0}{2\chi_2} \left\{ 1 - 2 \langle \Phi_{AN}^2 | \Phi_{AN}^1 \rangle \right\} + \frac{1}{2\chi_2} \langle \Phi_{AN}^2 | H_{12} | \Phi_{AN}^2 \rangle, \end{aligned} \quad (5.35)$$

2.

$$\langle \Phi_{AN} | H_{34} | \Phi_{AN} \rangle = \frac{E_0}{2\chi_2} \left\{ 1 - 2 \langle \Phi_{AN}^2 | \Phi_{AN}^1 \rangle \right\} + \frac{1}{2\chi_2} \langle \Phi_{AN}^2 | H_{34} | \Phi_{AN}^2 \rangle, \quad (5.36)$$

3.

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{AN} | V_{14} + V_{32} | \Phi_{AN} \rangle &= \frac{1}{2\chi_2} \left\{ \langle \Phi_{AN}^1 | V_{14} + V_{32} | \Phi_{AN}^1 \rangle - 2 \langle \Phi_{AN}^2 | V_{14} + V_{32} | \Phi_{AN}^1 \rangle \right\} \\
&+ \frac{1}{2\chi_2} \langle \Phi_{AN}^2 | V_{14} + V_{32} | \Phi_{AN}^2 \rangle.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Notando que:

$$H_{12} + H_{34} + V_{14} + V_{32} = H_{14} + H_{32} + V_{12} + V_{34}, \tag{5.38}$$

se obtiene,

$$\langle \Phi_{AN}^2 | H_{12} + H_{34} + V_{14} + V_{32} | \Phi_{AN}^2 \rangle = 2E_0 + \langle \Phi_{AN}^2 | V_{12} + V_{34} | \Phi_{AN}^2 \rangle, \tag{5.39}$$

y reuniendo estos resultados obtenemos,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{AN} | H | \Phi_{AN} \rangle &= \frac{1}{2\chi_2} \left\{ 4E_0 - 4E_0 \langle \Phi_{AN}^2 | \Phi_{AN}^1 \rangle + \langle \Phi_{AN}^2 | V_{12} + V_{34} | \Phi_{AN}^2 \rangle \right\} \\
&+ \frac{1}{2\chi_2} \langle \Phi_{AN}^1 | (V_{14} + V_{32}) \left\{ | \Phi_{AN}^1 \rangle - 2 | \Phi_{AN}^2 \rangle \right\}.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Utilizando las Ecs.(5.26)-(5.27) notamos que $\mathcal{P} = \langle \Phi_{AN}^2 | \Phi_{AN}^1 \rangle = 1 - \chi_2$, de esta forma la Ec.(5.40) nos queda:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{AN} | H | \Phi_{AN} \rangle &= 2E_0 + \frac{1}{2\chi_2} \left\{ \langle \Phi_{AN}^2 | V_{12} + V_{34} | \Phi_{AN}^2 \rangle + \langle \Phi_{AN}^1 | (V_{14} + V_{32}) \left\{ | \Phi_{AN}^1 \rangle - 2 | \Phi_{AN}^2 \rangle \right\} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Ahora teniendo en cuenta que $P_{42} | \phi_{AN}^2 \rangle = - | \phi_{AN}^1 \rangle$ y $P_{42}^\dagger (V_{12} + V_{34}) P_{42} = (V_{14} + V_{32})$, podemos reescribir la Ec.(5.41) como,

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_{AN} | H | \Phi_{AN} \rangle &= 2E_0 + \frac{1}{\chi_2} \langle \Phi_{AN}^1 | (V_{14} + V_{32}) \left\{ | \Phi_{AN}^1 \rangle - | \Phi_{AN}^2 \rangle \right\}.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Finalmente por la simetría del problema tenemos $\langle \Phi_{AN}^1 | V_{14} \{ |\Phi_{AN}^1\rangle - |\Phi_{AN}^2\rangle \} = \langle \Phi_{AN}^1 | V_{32} \{ |\Phi_{AN}^1\rangle - |\Phi_{AN}^2\rangle \}$ ya que la interacción entre fermiones distintos de pares distintos es la misma, por lo tanto, concluimos que:

$$\langle \Phi_{AN} | H | \Phi_{AN} \rangle = 2E_0 + \frac{2}{\chi^2} \langle \Phi_{AN}^1 | V_{14} \{ |\Phi_{AN}^1\rangle - |\Phi_{AN}^2\rangle \}. \quad (5.43)$$

En la Sección (6.2) se muestra el valor de expectación calculado en términos del parámetro de interacción λ .

Comparación de soluciones

En este capítulo se comparan los resultados obtenidos de manera exacta y con el formalismo de cobosones.

6.1 Fidelidades

Una forma de cuantificar qué tan parecidos son dos estados es por medio de la fidelidad \mathcal{F} , de manera general para dos estados $|f\rangle$ y $|g\rangle$ normalizados definimos la fidelidad como:

$$\mathcal{F} = |\langle f|g\rangle|^2. \quad (6.1)$$

En nuestro caso nos interesa ver qué tan parecida es la solución del ansatz respecto a la solución exacta en una y dos dimensiones, es decir que debemos calcular,

$$\mathcal{F} = \left(\int d^2\mathbf{x}_1 d^2\mathbf{x}_2 d^2\mathbf{x}_3 d^2\mathbf{x}_4 \Phi_{AN}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \right)^2, \quad (6.2)$$

donde Φ_{AN} y ψ se representarán según su dimensión correspondiente.

Comenzando con el caso en una dimensión, para calcular la integral lo que se hizo fue cambiar al sistema desacoplado, de las coordenadas dadas por las Ecs. (4.22)-(4.25) despejamos x_1, x_2, x_3 y x_4 . Por lo tanto, las soluciones dadas por las Ecs.(5.23)-(5.24) se reescriben,

$$\Phi_{AN}^1(R_1, R_2, R_3, R_4) = \frac{(\kappa_1\kappa_2)^{1/2}}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{4}\left[(\kappa_1 + \kappa_2)(R_1^2 + R_2^2) + 2(\kappa_1 - \kappa_2)R_1R_2 + 2\kappa_2R_3^2 + 2\kappa_1R_4^2\right]\right) \quad (6.3)$$

y

$$\Phi_{AN}^2(R_1, R_2, R_3, R_4) = \frac{(\kappa_1\kappa_2)^{1/2}}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{4}\left[(\kappa_1 + \kappa_2)(R_1^2 + R_2^2) - 2(\kappa_1 - \kappa_2)R_1R_2 + 2\kappa_2R_3^2 + 2\kappa_1R_4^2\right]\right). \quad (6.4)$$

Entonces la solución del ansatz nos queda,

$$\begin{aligned} \Phi_{AN,1D}(R_1, R_2, R_3, R_4) = \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\kappa_1\kappa_2}{\chi_{2,1D}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{4} \left[(\kappa_1 + \kappa_2) (R_1^2 + R_2^2) + 2\kappa_2 R_3^2 + 2\kappa_1 R_4^2 \right] \right) \sinh \left(\left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2} \right) R_1 R_2 \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Teniendo en cuenta la expresión de la solución exacta dada por la Ec.(4.45) y que el determinante de la matriz Jacobiana correspondiente al cambio de coordenadas es 1, calculamos la fidelidad:

$$\mathcal{F} = \left(\int dR_1 dR_2 dR_3 dR_4 \Phi_{AN,1D}(R_1, R_2, R_3, R_4) \psi_{1D}(R_1, R_2, R_3, R_4) \right)^2. \quad (6.6)$$

El procedimiento para dos dimensiones es el mismo, teniendo en cuenta el desacople en las dimensiones que ya hemos utilizado en los capítulos anteriores. Utilizando las coordenadas (4.22)-(4.25) para las Ecs.(5.31)-(5.32) obtenemos,

$$\begin{aligned} \Phi_{AN,2D}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4) \\ = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{\kappa_1\kappa_2}{\chi_{2,2D}} \exp \left(-\frac{1}{4} \left[(\kappa_1 + \kappa_2) (|\mathbf{R}_1|^2 + |\mathbf{R}_2|^2) + 2\kappa_2 |\mathbf{R}_3|^2 + 2\kappa_1 |\mathbf{R}_4|^2 \right] \right) \\ \sinh \left(\left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2} \right) (R_{1,x}R_{2,x} + R_{1,y}R_{2,y}) \right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Los resultados se muestran en la Fig.(6.1), la curva sólida de color verde se corresponde con $|\langle \Phi_{AN,1D} | \psi_{1D} \rangle|^2$, la curva sólida de color rojo se corresponde con $|\langle \Phi_{AN,2D} | \psi_{|1,0} \rangle|^2$, la curva a trazos de color azul se corresponde con $|\langle \Phi_{AN,2D} | \psi_1 \rangle|^2$, la curva sólida de color naranja se corresponde con $|\langle \Phi_{AN,2D} | \psi_4 \rangle|^2$, el resto de las soluciones exactas obtenidas dieron una fidelidad nula. El ansatz no logra reproducir la degeneración del problema para dos pares en dos dimensiones, ya que solo nos brinda una solución, dicho de otra forma no muestra la verdadera dimensión del espacio de soluciones.

Notamos que la solución provista por el ansatz en dos dimensiones, $\Phi_{AN,2D}$, es isotrópica¹ y por lo tanto tiene paridad definida ante reflexiones en los ejes x e y , es decir es autoestado de los operadores $\Pi_{x,y}$ en particular su autovalor es $+1$. Entonces es razonable que la fidelidad del ansatz $\Phi_{AN,2D}$ con los estados $\psi_{|0,0}$, $\psi_{|1,1}$ y $\psi_{|1,-1}$, sea nula.

¹Esto puede verse teniendo en cuenta que $R_{1,x}R_{2,x} + R_{1,y}R_{2,y} = -\frac{1}{2}(|\mathbf{R}_1|^2 + |\mathbf{R}_2|^2)$

La fidelidad disminuye con el parámetro de interacción en todos los casos, y la capacidad del ansatz para describir las soluciones $2D$ dadas por las Ecs. (4.65)-(4.72)-(4.69) es limitada. El ansatz de cobosones ofrece una aproximación aceptable de la solución exacta solo en el caso de un sistema con interacción débil ($\lambda \sim 0$). Es importante destacar que el sistema consiste en cuatro partículas con interacciones de largo alcance entre partículas de diferentes especies (Fig.(3.2)), por lo que no se espera que se comporte como un sistema de pares no interactuantes en ningún régimen, sino más bien como un sistema con interacciones entre las cuatro partículas, ya que cada partícula de una especie interactúa con ambas de la otra especie.

Es directo verificar que el ansatz de cobosones proporciona una descripción óptima de la solución en un sistema donde cada partícula de una especie interactúa solo con una partícula de la otra especie. Ha sido discutido en la literatura [4] que el ansatz solo puede proporcionar una buena aproximación del verdadero estado fundamental en sistemas que se espera que exhiban condensación a temperatura cero. Este no es el caso en el problema que estudiamos.

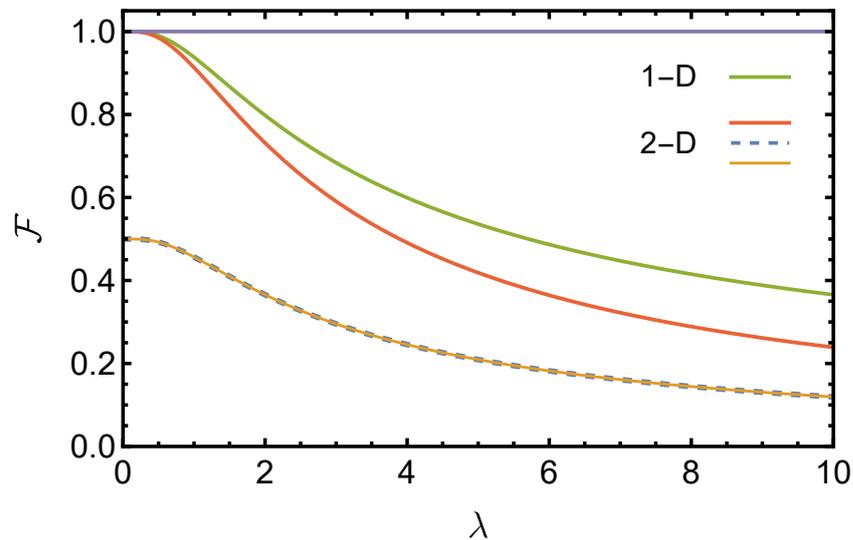
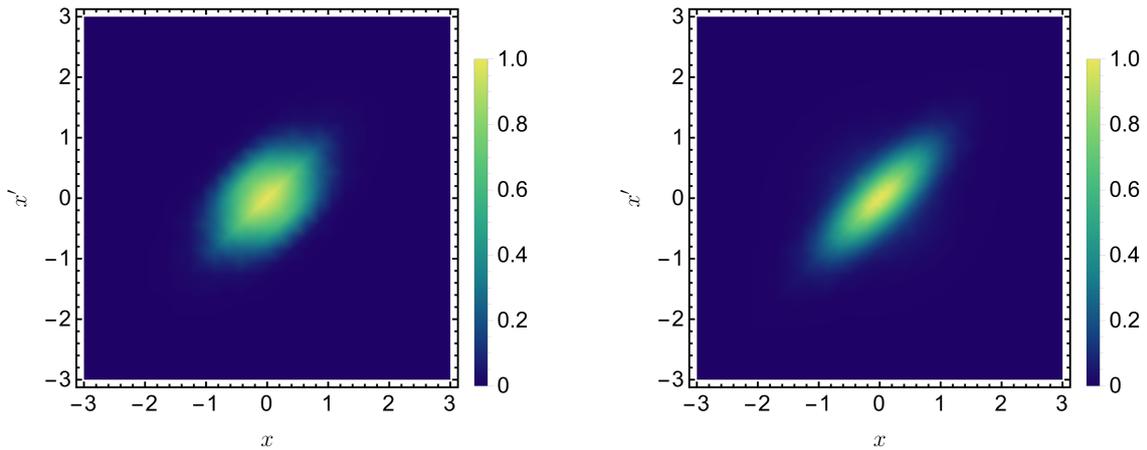


Figura 6.1: Fidelidad entre el estado fundamental exacto y el ansatz de cobosones para dos pares en función del parámetro de interacción, la curva sólida verde corresponde al sistema $1D$, las curvas roja sólida, naranja sólida y azul de trazo corresponden a las diferentes soluciones del sistema $2D$.

6.2 Funciones de onda y energías

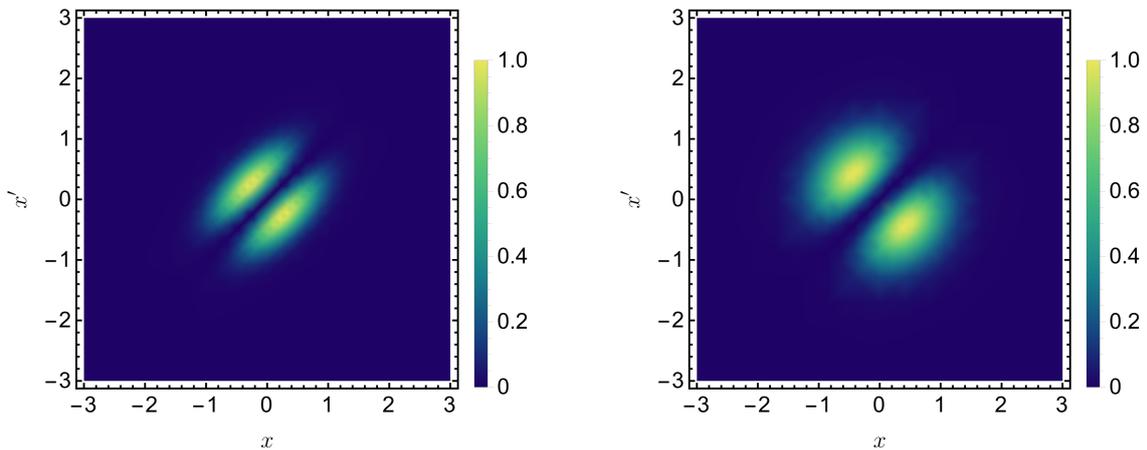
Si bien la capacidad del ansatz de describir al sistema es limitada, consigue capturar aspectos fundamentales de la física del sistema. En las Figs.(6.2)-(6.3) se muestra una comparación de las densidades calculadas en los Capítulos (4)-(5). Podemos ver que el ansatz reproduce la estadística del sistema al notarse la presencia del principio de exclusión de Pauli en la Fig.(6.3). Además como puede verse en la Fig.(6.2) en ambos casos se observa la correlación diagonal correspondientes a las partículas a y b que forman un par ligado.



(a) Correlaciones espaciales correspondientes a la **solución exacta**.

(b) Correlaciones espaciales correspondientes al **ansatz de cobosones**.

Figura 6.2: Correlaciones espaciales para fermiones de distinta especie, para el parámetro de interacción $\lambda = 5$ en el caso atractivo, con $\omega = 1$.

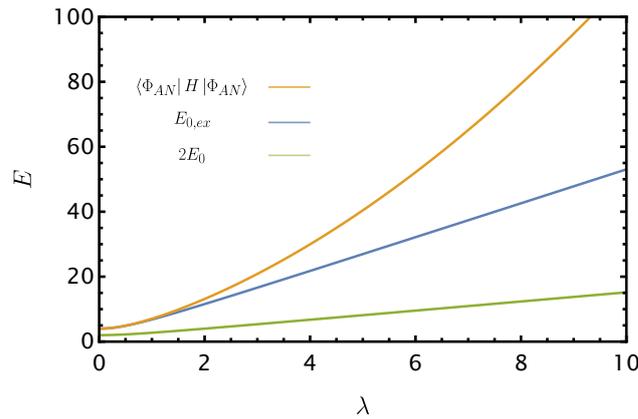


(a) Correlaciones espaciales correspondientes a la **solución exacta**.

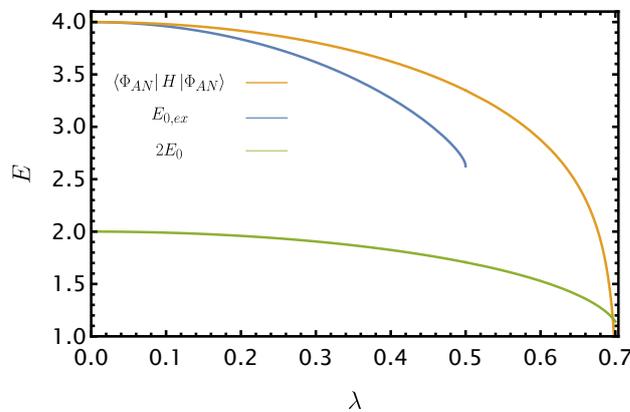
(b) Correlaciones espaciales correspondientes al **ansatz de cobosones**.

Figura 6.3: Comparación de correlaciones espaciales para fermiones de la misma especie, para el parámetro de interacción $\lambda = 5$ en el caso atractivo, con $\omega = 1$.

Otra comparación posible y relevante es la de las energías, como se vio en las secciones anteriores fue posible calcular el espectro de energías. En particular para el estado fundamental se obtuvo que la energía viene dada por la Ec.(4.46). Por otro lado, utilizando el ansatz de cobosones se obtuvo el valor de expectación dado por la Ec.(5.43), se ha señalado que el ansatz de cobosones describe pares no interactuantes por lo que no corresponde a un autoestado del Hamiltoniano. Teniendo en cuenta la solución exacta para el problema de un par, la energía de dos pares no interactuantes vendrá dada por $2E_0$, donde la energía E_0 viene dada por la Ec.(4.9).



(a) Energía caso atractivo.



(b) Energía caso repulsivo.

Figura 6.4: Valores de expectación correspondientes al Hamiltoniano del sistema. Las curvas naranja, azul y verde sólidas corresponden a los valores $\langle \Phi_{AN} | H | \Phi_{AN} \rangle$, $E_{0,ex}$ y $2E_0$ respectivamente, con $\omega = 1$.

En la Fig.(6.4) se muestran las energías obtenidas utilizando la solución del ansatz de cobosones y exacta. La curva naranja sólida corresponde al valor de expectación utilizando el ansatz dado por la Ec.(5.43), vemos que a medida que la interacción crece se sobrestima a la energía exacta del sistema, que viene dada por la curva azul sólida y la Ec.(4.46). A modo de referencia en la Fig.(6.4) se agrega la energía

para dos pares no interactuantes $2E_0$ dada por la curva verde sólida. Notamos además que para el caso repulsivo mostrado en la Fig.(6.4b) se tiene que $E_{0,ex} = 3\sqrt{1-2\lambda^2} + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4\lambda^2})$ y por lo tanto $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Entrelazamiento

En este capítulo analizamos el entrelazamiento para distintas biparticiones del sistema, las cuales se muestran, a modo de esquema, en la Fig.(7.1). El sistema consiste de dos fermiones de especie a y dos fermiones de especie b , considerando que el sistema completo se encuentra en un estado puro $|\psi\rangle$ es natural usar como indicador de la cantidad de entrelazamiento una medida basada en el grado de mezcla de la matriz densidad reducida del sistema que se desea observar, obtenida después de trazar el estado completo $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ sobre el sistema que no nos interesa observar. Como complemento de este Capítulo se encuentra el Apéndice (B).

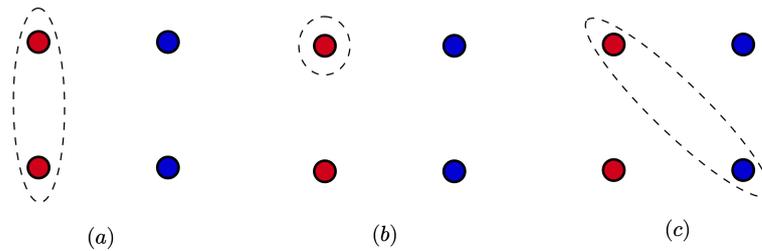


Figura 7.1: Distintas biparticiones posibles para el sistema de cuatro fermiones.

7.1 Entrelazamiento del subsistema aa con el resto del sistema

La primera bipartición que se estudió fue entre dos fermiones de misma especie a con dos fermiones de especie b cuyo esquema se muestra en la Fig.(7.1(a)). En este caso como la bipartición es entre partículas de distinta especie, es decir partículas distinguibles, no se presentan correlaciones debidas a la indistinguibilidad.

Para cuantificar el entrelazamiento del subsistema aa con el resto del sistema utilizamos la entropía lineal definida, para este caso, como:

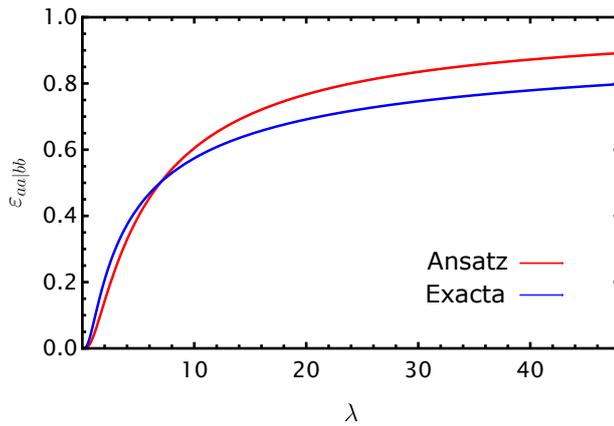
$$\varepsilon_{aa|bb} = 1 - \text{Tr}(\rho_{aa}^2). \quad (7.1)$$

En la base posición la matriz densidad reducida viene definida por la Ec.(7.2),

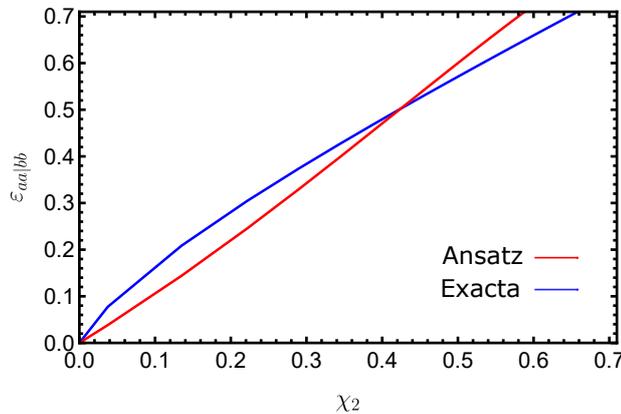
$$\sigma_{aa}(x_1, x_3, x'_1, x'_3) := \langle x' | \rho_{aa} | x \rangle = \int \psi(x'_1, x_2, x'_3, x_4) \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 dx_4. \quad (7.2)$$

Teniendo en cuenta la Ec.(7.2) se calculó por medio de integración numérica,

$$\text{Tr} \rho_{aa}^2 = \int (\sigma_{aa}(x_1, x_3, x'_1, x'_3))^2 dx_1 dx_3 dx'_1 dx'_3. \quad (7.3)$$



- (a) Entrelazamiento $\varepsilon_{aa|bb}$ de dos fermiones de la misma especie con el resto del sistema en función del parámetro de interacción λ .



- (b) Entrelazamiento $\varepsilon_{aa|bb}$ de dos fermiones de la misma especie con el resto del sistema en función del entrelazamiento de un par χ_2 .

Figura 7.2: Entrelazamiento de dos fermiones de la misma especie con el resto del sistema, las curvas roja y azul sólidas corresponden al entrelazamiento utilizando el ansatz de cobosones y la solución exacta respectivamente. Las gráficas corresponden al caso atractivo y con $\omega = 1$.

En la Fig.(7.2) se muestran los resultados obtenidos para $\varepsilon_{aa|bb}$ en función del parámetro de acople y en función del factor χ_2 . La curva roja sólida corresponde

al entrelazamiento utilizando el ansatz de cobosones observamos que a medida que la interacción λ crece, sobrepasa a la curva azul sólida que corresponde al entrelazamiento utilizando la solución exacta. La sobreestimación por parte del ansatz ocurre en ambos casos, es decir ocurre en función del parámetro de interacción y en función del entrelazamiento de un par ab , χ_2 .

7.2 Entrelazamiento entre un fermión de tipo a con el resto del sistema

La segunda bipartición que se estudió fue entre un fermión tipo a con el resto del sistema¹ cuyo esquema se muestra en la Fig.(7.1(b)).

Buscamos un indicador de entrelazamiento entre uno de los fermiones y el resto del sistema. Notamos lo siguiente:

- Puesto que los dos fermiones de tipo a son idénticos, el entrelazamiento de un fermión tipo a con el resto del sistema debe ser el mismo para ambos fermiones.
- Si cada fermión a está desentrelazado de los dos fermiones b , el par de fermiones aa como un todo debe estar desentrelazado de los otros dos fermiones bb .

Siguiendo [22, 35] utilizamos para cuantificar el entrelazamiento de uno de los fermiones y el resto del sistema,

$$\varepsilon_{a|bab} = 1 - 2\text{Tr}(\rho_a^2). \quad (7.4)$$

Esta reformulación de la medida de entrelazamiento se basa en que para un estado puro de dos fermiones idénticos la matriz densidad reducida satisface $1 - \text{Tr}(\rho_f^2) \geq 1/2$ y la igualdad se cumple sí y solo sí el estado es un determinante de Slater, es decir un estado separable de fermiones [25]. En otras palabras,

$$|\psi\rangle \text{ tiene rango de Slater } 1 \iff \text{Tr}(\rho_f^2) = 1/2. \quad (7.5)$$

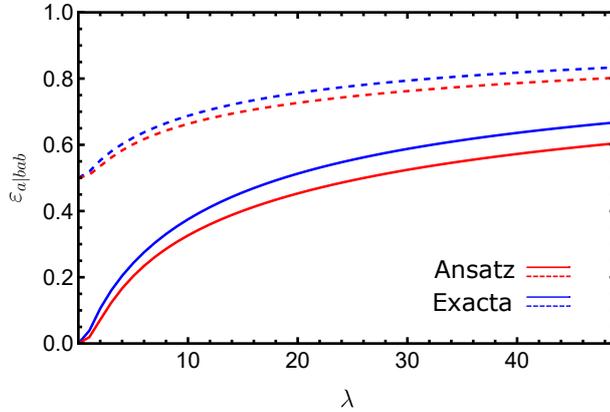
En la base posición la matriz densidad reducida viene definida por la Ec.(7.6),

$$\sigma_a(x_1, x'_1) := \langle x' | \rho_a | x \rangle = \int \psi(x'_1, x_2, x_3, x_4) \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 dx_3 dx_4. \quad (7.6)$$

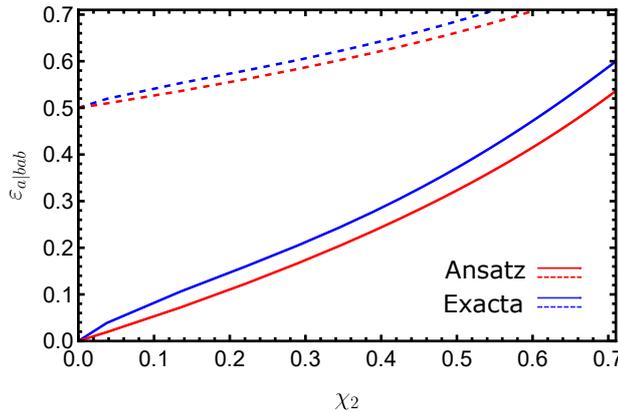
¹Notar que debido a la simetría del sistema (dada la simetría de las interacciones.) la discusión es también válida para el entrelazamiento de un fermión de tipo b con el resto del sistema.

Teniendo en cuenta la Ec.(7.6) se calculó por medio de integración numérica,

$$\text{Tr}\rho_a^2 = \int (\sigma_a(x_1, x'_1))^2 dx_1 dx'_1. \quad (7.7)$$



(a) Entrelazamiento $\varepsilon_{a|bab}$ de un fermión con el resto del sistema en función del parámetro de interacción λ .



(b) Entrelazamiento $\varepsilon_{a|bab}$ de un fermión con el resto del sistema en función del entrelazamiento de un par χ_2 .

Figura 7.3: Entrelazamiento de un fermión con el resto del sistema, las curvas roja y azul sólidas corresponden al entrelazamiento utilizando el ansatz de cobosones y la solución exacta respectivamente. Las gráficas corresponden al caso atractivo y con $\omega = 1$.

En las Fig.(7.3a) se muestra el comportamiento del entrelazamiento $\varepsilon_{a|bab}$ en función del parámetro de acople λ . Por otro lado, la Fig.(7.3b) muestra el comportamiento en función del entrelazamiento de los constituyentes a y b de un par. Las curvas sólidas tienen en cuenta el factor que quita las correlaciones debido a la indistinguibilidad, mientras que las curvas a trazos corresponden a tener en cuenta todas las correlaciones. El entrelazamiento $\varepsilon_{a|bab}$ crece para las dos soluciones, de manera

distinta, al aumentar la interacción entre los fermiones (Fig.(7.3a)) y al aumentar el entrelazamiento, χ_2 , de un par ab (Fig.(7.3b)).

7.3 Entrelazamiento del subsistema ab con el resto del sistema

La tercera y última bipartición que se estudió fue entre un par ab con el resto del sistema cuyo esquema se muestra en la Fig.(7.1(c)).

Siguiendo una idea similar a la del caso anterior, para cuantificar el entrelazamiento cuando consideramos la bipartición $ab - ab$ utilizando el grado de mezcla de la matriz densidad reducida ρ_{ab} realizamos un reajuste en la medida de tal forma de eliminar (o no cuantificar) las correlaciones debido a la antisimetría de la función de onda por la indistinguibilidad de los fermiones de tipo a y los del tipo b . En este caso utilizaremos,

$$\varepsilon_{ab|ab} = 1 - 4\text{Tr}(\rho_{ab}^2). \quad (7.8)$$

Esta redefinición de la medida surge teniendo en cuenta que para un estado puro de cuatro fermiones idénticos de a pares (como en este caso, dos fermiones a y dos fermiones b) la matriz densidad reducida de dos fermiones de especie diferentes, $\rho_{ff'}$ satisface: $\text{Tr}(\rho_{ff'}^2) \leq 1/4$ con igualdad solo si el estado es un estado producto de dos determinantes de Slater, un determinante de Slater para el estado de los fermiones tipo f y un determinante de Slater para los fermiones de tipo f' , es decir

$$|\psi_{\text{sep}}\rangle = \psi_{ff}^{Sl} \otimes \psi_{f'f'}^{Sl}, \quad (7.9)$$

$$\text{con } \psi_{ff}^{Sl} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha_1\rangle |\alpha_2\rangle - |\alpha_2\rangle |\alpha_1\rangle).$$

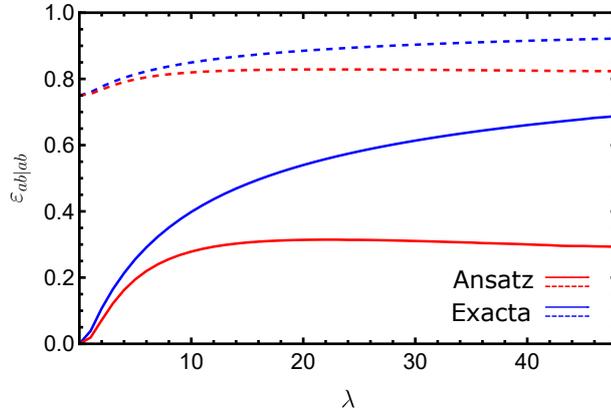
Las medidas introducidas son completamente consistentes con el enfoque de entrelazamiento de fermiones idénticos discutido en la introducción. En particular, toma en cuenta el hecho que las correlaciones -mínimas- requeridas por la antisimetría no contribuyen al entrelazamiento.

La matriz densidad reducida proyectada en la base posición para esta bipartición viene dada por,

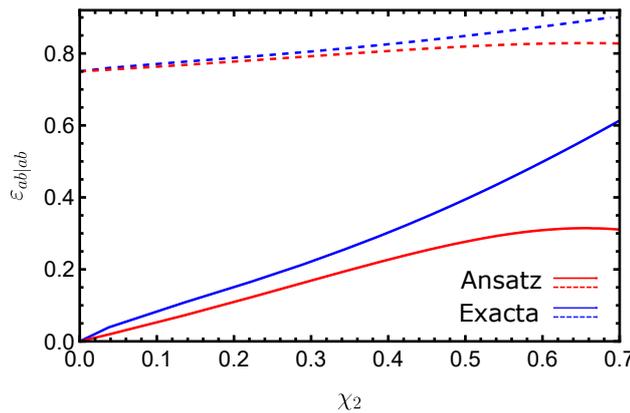
$$\sigma_{ab}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) := \langle x' | \rho_{ab} | x \rangle = \int \psi(x'_1, x'_2, x_3, x_4) \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_3 dx_4, \quad (7.10)$$

de manera que por medio de integración numérica se calculó,

$$\text{Tr}\rho_{ab}^2 = \int (\sigma_{ab}(x_1, x_2, x'_1, x'_2))^2 dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2. \quad (7.11)$$



(a) Entrelazamiento $\varepsilon_{ab|ab}$ de un par ab con el resto del sistema en función del parámetro de interacción λ .



(b) Entrelazamiento $\varepsilon_{ab|ab}$ de un par ab con el resto del sistema en función del entrelazamiento de un par χ_2 .

Figura 7.4: Entrelazamiento de un par ab con el resto del sistema, las curvas roja y azul sólidas corresponden al entrelazamiento utilizando el ansatz de cobosones y la solución exacta respectivamente. Las gráficas corresponden al caso atractivo y con $\omega = 1$.

En la Fig.(7.4a) se muestra el comportamiento del entrelazamiento $\varepsilon_{ab|ab}$ en función del parámetro de acople λ . Por otro lado en la Fig.(7.4b) se muestra en función del entrelazamiento de los constituyentes a y b de un par. Análogamente al caso anterior las curvas sólidas tienen en cuenta el factor que quita las correlaciones debido a la indistinguibilidad mientras que las curvas a trazos corresponden a tener en cuenta todas las correlaciones. Por un lado se observa que el entrelazamiento correspondiente a la solución exacta, curva azul, crece al aumentar la interacción entre fermiones.

Para la solución correspondiente al ansatz, curva roja, vemos que el entrelazamiento decrece lentamente a medida que aumentamos la interacción. Recordemos que $\varepsilon_{ab|ab}$ corresponde al entrelazamiento de un fermión tipo a cualquiera y un fermión tipo b cualquiera con el resto del sistema, vemos que un fermión de tipo a y un fermión de tipo b se correlacionan con el resto del sistema cada vez menos, utilizando los elementos de matriz dados por la Ec.(7.18) calculados en la Sección (7.4), es posible comprobar² que al aumentar la interacción λ el entrelazamiento $\varepsilon_{ab|ab} \rightarrow 0$ y por lo tanto el estado tiende a un estado separable, salvo correlaciones de simetría. Esto parece indicar que el bosón compuesto se irá aproximando a un comportamiento similar al de un bosón puro.

7.4 Entrelazamiento y ansatz de cobosones

Entre las ventajas de cálculo que tiene utilizar el ansatz de cobosones, se encuentra el entrelazamiento para la bipartición de un sistema de N pares ab , a modo de esquema puede verse la Fig.(7.5).

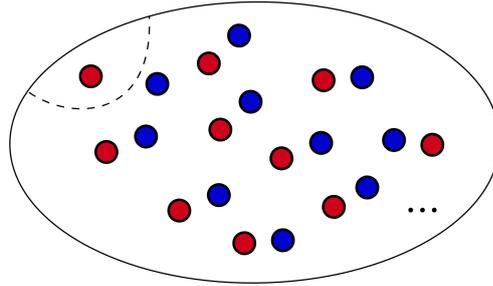


Figura 7.5: Bipartición para un sistema de N pares.

En particular es posible calcular la matriz densidad reducida de un fermión a con el resto del sistema, denotada como ρ_a ,

$$\langle i | \rho_a | j \rangle = \frac{1}{N} \langle N | a_j^\dagger a_i | N \rangle, \quad (7.12)$$

donde,

$$|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{\chi_N N!}} \sum_{i_1 \neq i_2 \dots \neq i_N} \sqrt{\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_N}} a_{i_1}^\dagger b_{i_1}^\dagger \dots a_{i_N}^\dagger b_{i_N}^\dagger |0\rangle. \quad (7.13)$$

A continuación calculamos la acción de los operadores a_i y a_j^\dagger sobre el estado de N pares, $|N\rangle$.

²Utilizando la fórmula cerrada derivada en la Sección (7.4).

$$\begin{aligned}
a_i |N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\chi_N N!}} \sum_{i_1 \neq i_2 \dots \neq i_N} \sqrt{\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_N}} a_i a_{i_1}^\dagger b_{i_1}^\dagger \dots a_{i_N}^\dagger b_{i_N}^\dagger |0\rangle \\
&= \frac{N}{\sqrt{\chi_N N!}} \sum_{i_1 \neq i_2 \dots \neq i_N} \sqrt{\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_N}} (\delta_{ii_1} - a_{i_1}^\dagger a_i) b_{i_1}^\dagger \dots a_{i_N}^\dagger b_{i_N}^\dagger |0\rangle \quad (7.14) \\
&= \frac{N \sqrt{\lambda_i} b_i^\dagger}{\sqrt{\chi_N N!}} \sum_{i_2 \neq i_3 \dots \neq i_N} \sqrt{\lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_N}} a_{i_2}^\dagger b_{i_2}^\dagger \dots a_{i_N}^\dagger b_{i_N}^\dagger |0\rangle,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado las relaciones de conmutación para operadores fermiónicos dadas por las Ecs.(2.34)-(2.36), notemos que el factor N tiene en cuenta que la aniquilación del i ésimo modo es en cada uno de los espacios de las N partículas. De manera análoga para el operador creación obtenemos,

$$\begin{aligned}
\langle N | a_j^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{\chi_N N!}} \sum_{j_1 \neq j_2 \dots \neq j_N} \sqrt{\lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_N}} \langle 0 | b_{j_N} a_{j_N} \dots b_{j_1} a_{j_1} a_j^\dagger \\
&= \frac{N}{\sqrt{\chi_N N!}} \sum_{j_1 \neq j_2 \dots \neq j_N} \sqrt{\lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_N}} \langle 0 | b_{j_N} a_{j_N} \dots b_{j_1} a_{j_1} (\delta_{j_1 j} - a_j^\dagger a_{j_1}) \quad (7.15) \\
&= \frac{N \sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\chi_N N!}} \sum_{j_2 \neq j_3 \dots \neq j_N} \sqrt{\lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_N}} \langle 0 | b_{j_N} a_{j_N} \dots b_{j_2} a_{j_2} b_j.
\end{aligned}$$

Reemplazando estos resultados, utilizando las relaciones de conmutación para operadores fermionicos y luego de un poco de álgebra obtenemos,

$$\langle i | \rho_a | j \rangle = \frac{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}}{\chi_N} \chi_{N-1}^{[\lambda_i, \lambda_j]} \delta_{ij}, \quad (7.16)$$

donde $\chi_{N-1}^{[\lambda_i, \lambda_j]}$ corresponde al factor de normalización pero sin los modos λ_i y λ_j .

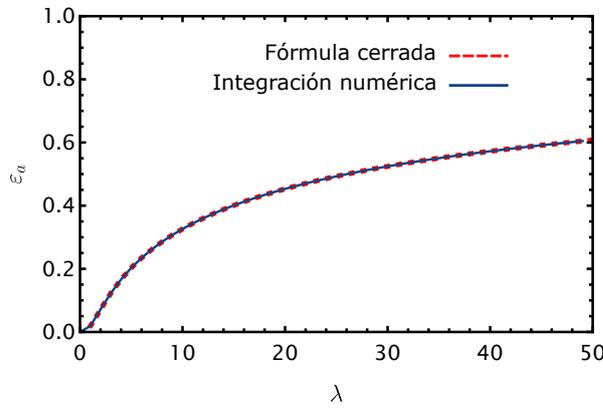
Con la Ec.(7.16) se puede calcular la cantidad de entrelazamiento entre una partícula y las $2N - 1$ partículas restantes en el sistema:

$$\varepsilon_a = 1 - \text{Tr}(\rho_a^2) = 1 - \sum_i \left(\lambda_i \frac{\chi_{N-1}^{[\lambda_i]}}{\chi_N} \right)^2. \quad (7.17)$$

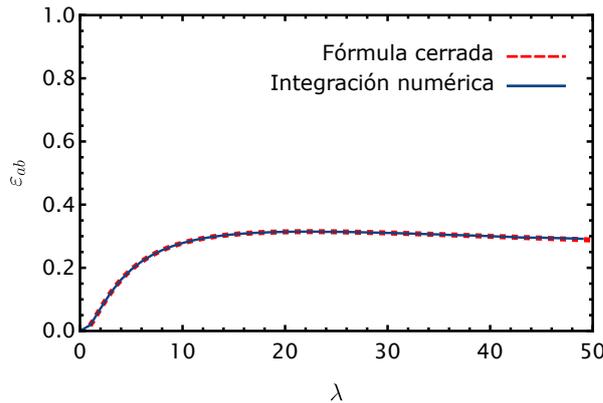
Siguiendo un procedimiento análogo, podemos calcular la matriz densidad reducida de una partícula a y una partícula b [36], que en el caso $N = 2$ toma la forma,

$$\langle k', l' | \rho_{ab} | k, l \rangle = \frac{1}{N\chi_N} \times \begin{cases} \lambda_l \chi_{N-1}^{[\lambda_l]} & , \text{ si } k' = l' = k = l \\ (N-1)\lambda_k \lambda_l \chi_{N-2}^{[\lambda_k, \lambda_l]} & , \text{ si } k' = k, l' = l \text{ y } k \neq l \\ \sqrt{\lambda_{l'} \lambda_l} \chi_{N-1}^{[\lambda_{l'}, \lambda_l]} & , \text{ si } k' = l', k = l \text{ y } l \neq l' \end{cases} \quad (7.18)$$

Notar que la Ec.(7.18) nos indica que la matriz densidad reducida a priori no es diagonal. En principio para $N > 2$ hay más elementos de matriz que calcular. En la Fig.(7.6) se muestra el entrelazamiento que se obtiene utilizando las Ecs.(7.16)-(7.18) comparado con el entrelazamiento que se obtuvo numéricamente a partir del cálculo de la matriz densidad reducida en la base coordenada.



(a) Entrelazamiento ε_a de un fermión a con el resto del sistema en función del parámetro de interacción λ .



(b) Entrelazamiento ε_{ab} de un par ab con el resto del sistema en función del parámetro de interacción λ .

Figura 7.6: Entrelazamiento para $N = 2$ pares con $\omega = 1$, las curvas azules sólidas corresponden al entrelazamiento calculado por integración numérica y las curvas a trazo rojas corresponden al entrelazamiento calculado con las fórmulas cerradas obtenidas.

Si uno está interesado en calcular el entrelazamiento de un par ligado ab , es decir que la partícula a y b están en la misma posición (modo de Schmidt) la Ec.(7.18) toma una forma más simple, dada por la Ec.(7.19),

$$\langle i', i' | \rho_{ab} | i, i \rangle = \sqrt{\lambda_i \lambda_{i'}} \frac{\chi_{N-1}^{[\lambda_i, \lambda_{i'}]}}{N \chi_N}. \quad (7.19)$$

Por lo tanto es posible calcular el entrelazamiento del par ligado como:

$$\varepsilon_{ab} = 1 - \sum_i \left(\lambda_i \frac{\chi_{N-1}^{[\lambda_i]}}{N \chi_N} \right)^2 - \sum_{i, j, i \neq j} \lambda_i \lambda_j \left(\frac{\chi_{N-1}^{[\lambda_i, \lambda_j]}}{N \chi_N} \right)^2. \quad (7.20)$$

Conclusiones y proyectos futuros

Como primer paso, se calcularon las funciones de onda y el espectro de energía para un par de fermiones de especie a y b . Luego, se realizó la descomposición de Schmidt del estado fundamental obtenido. Esto nos permitió construir el ansatz de cobosones para el estado fundamental del sistema. Por otro lado, resolvimos de forma exacta el modelo de Moshinsky para cuatro fermiones con interacción entre fermiones de diferentes especies. Para este sistema calculamos el espectro de energías y construimos las funciones de onda considerando la indistinguibilidad entre partículas de la misma especie.

Los cálculos de las funciones de onda exactas y las dadas por el ansatz se realizaron en una y dos dimensiones. Las soluciones se compararon por medio de la fidelidad. Encontramos que la fidelidad entre las soluciones exactas y el ansatz decrece en función del parámetro de interacción, lo que indica que el ansatz solo da una buena descripción del sistema para valores muy pequeños de la interacción. También comparamos las energías exactas y el valor esperado del Hamiltoniano utilizando el ansatz, encontramos que este valor esperado sobrestima la energía del sistema. En este trabajo encontramos que el ansatz de cobosones describe de forma exacta un sistema en el que una vez que un fermión de tipo a interactúa con uno de tipo b ya no interactúa con otro, es decir un sistema de pares no interactuantes entre sí. A pesar de esto mediante las correlaciones espaciales observamos que el ansatz consigue capturar aspectos fundamentales de la física del sistema, como la presencia del principio de exclusión de Pauli.

Como segunda parte del trabajo analizamos el entrelazamiento para distintas biparticiones del sistema en el caso atractivo, utilizando ambas soluciones, se pudo observar el efecto de no quitar las correlaciones de simetría. La primera bipartición que estudiamos fue entre dos fermiones de tipo a con dos fermiones de tipo b se observa que a medida que aumenta la interacción el ansatz pasa de subestimar a sobrestimar la solución exacta. La siguiente bipartición que estudiamos fue entre un fermión de tipo a con el resto del sistema, se observa que el ansatz subestima a la solución exacta a medida que aumentamos la interacción. La tercera y última bipartición que estudiamos fue entre un par de partículas ab con otro par partículas ab en cuyo caso se observa que el ansatz subestima a la solución exacta y además decrece al aumentar la interacción. Finalmente obtuvimos fórmulas para cuantificar el entrelazamiento en sistemas de N pares utilizando el ansatz de cobosones.

8.1 Proyectos futuros

Para futuras investigaciones, queda pendiente el estudio del entrelazamiento del par ab de nuestro estado de cuatro partículas, lo que implica analizar las correlaciones entre un fermión de tipo a y uno de tipo b que componen el sistema de cuatro fermiones. En este caso, $\rho_{ab} = \text{Tr}_{ab}(\rho)$ representa un estado mixto, y la cuantificación de su entrelazamiento no es trivial, ya que para estados mixtos la pureza de la matriz densidad reducida no es un indicador adecuado del entrelazamiento. Para estados mixtos arbitrarios, existen testigos de entrelazamiento o fórmulas basadas en el techo convexo que requieren una optimización barriendo sobre todo el espacio de estados, lo que conlleva un alto costo computacional. El criterio PPT (Positive Partial Transpose, por sus siglas en inglés), que se define en términos de la positividad de la parcial transpuesta, constituye un criterio necesario y suficiente de separabilidad solo para sistemas de dimensiones 2×2 y 2×3 . Sería de interés comparar el entrelazamiento entre partículas de diferentes especies (una a con una b) en un sistema de N pares con el entrelazamiento de un solo par, es decir, el entrelazamiento del estado puro $|\psi_{ab}\rangle$ que ya hemos caracterizado. Obtener información sobre este entrelazamiento nos permitiría establecer relaciones de monogamia del entrelazamiento al considerar diferentes biparticiones del sistema.

En el corto plazo, tenemos la intención de investigar el entrelazamiento en sistemas cuyo estado fundamental puede ser bien descrito por el ansatz de cobosones, utilizando las expresiones (7.16) y (7.19). Para una interacción atractiva de corto alcance entre diferentes especies de fermiones (a y b), se ha demostrado que el estado fundamental de gases de Fermi en $3D$ de dos componentes a temperatura cero puede aproximarse mediante un estado de bosones compuestos, $|N\rangle$, siempre que existan estados ligados de dos fermiones [37]. Dado que se conocen [38] las distribuciones de coeficientes de Schmidt λ_i para una molécula Feshbach, las cuales pueden describir las moléculas del gas, podríamos cuantificar el entrelazamiento en un gas de Fermi formado por N pares calculando los coeficientes χ_N y $\chi_{N-1}^{[\lambda_i, \lambda_j]}$.

Bibliografía

- [1] Ana P Majtey, Andrea Valdés-Hernández y Eloisa Cuestas. Indistinguishable entangled fermions: Basics and future challenges. En: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 381.2255 (2023). DOI: [10.1098/rsta.2022.0108](https://doi.org/10.1098/rsta.2022.0108). arXiv: [2303.17539](https://arxiv.org/abs/2303.17539) (vid. pág. 1).
- [2] Luigi Amico, Rosario Fazio, Andreas Osterloh y Vlatko Vedral. Entanglement in many-body systems. En: *Reviews of Modern Physics* 80.2 (2008), págs. 517-576. DOI: [10.1103/RevModPhys.80.517](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.517). arXiv: [0703044](https://arxiv.org/abs/0703044) [quant-ph] (vid. pág. 1).
- [3] F. Benatti, R. Floreanini, F. Franchini y U. Marzolino. Entanglement in indistinguishable particle systems. En: *Physics Reports* 878 (2020), págs. 1-27. DOI: [10.1016/j.physrep.2020.07.003](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.07.003). arXiv: [2007.06253](https://arxiv.org/abs/2007.06253) (vid. pág. 1).
- [4] Monique Combescot, Odile Betbeder-Matibet y François Dubin. *The many-body physics of composite bosons*. 2008. DOI: [10.1016/j.physrep.2007.11.003](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2007.11.003) (vid. págs. 1, 57).
- [5] Monique Combescot y Shiue-Yuan Shiau. *Excitons and Cooper Pairs: Two Composite Bosons in Many-body Physics*. Oxford University Press, 2016 (vid. pág. 1).
- [6] M. Combescot y D. W. Snoke. Stability of a Bose-Einstein condensate revisited for composite bosons. En: *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics* (2008). DOI: [10.1103/PhysRevB.78.144303](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.144303) (vid. pág. 2).
- [7] M. Combescot y G. J. Zhu. Coboson formalism for Cooper pairs and its application to Richardson's equations. En: *European Physical Journal B* (2011). DOI: [10.1140/epjb/e2010-10560-7](https://doi.org/10.1140/epjb/e2010-10560-7) (vid. pág. 2).
- [8] C K Law. Quantum entanglement as an interpretation of bosonic character in composite two-particle systems. En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 71.3 (mar. de 2005). DOI: [10.1103/PhysRevA.71.034306](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.71.034306) (vid. págs. 2, 18-21, 46).
- [9] Malte C Tichy, Peter Alexander Bouvrie y Klaus Mølmer. Bosonic behavior of entangled fermions. En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 86.4 (2012), págs. 1-8. DOI: [10.1103/PhysRevA.86.042317](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.042317) (vid. pág. 2).
- [10] M Moshinsky. How Good is the Hartree-Fock Approximation. En: *American Journal of Physics* 36.1 (1968), págs. 52-53. DOI: [10.1119/1.1974410](https://doi.org/10.1119/1.1974410) (vid. pág. 2).
- [11] M. Moshinsky, N. Méndez y E. Murow. Pseudoatoms and atoms in strong magnetic fields. En: *Annals of Physics* (1985). DOI: [10.1016/0003-4916\(85\)90349-5](https://doi.org/10.1016/0003-4916(85)90349-5) (vid. pág. 2).
- [12] Mark Srednicki. Entropy and area. En: *Physical Review Letters* (1993). DOI: [10.1103/PhysRevLett.71.666](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.666). arXiv: [9303048](https://arxiv.org/abs/9303048) [hep-th] (vid. pág. 2).

- [13] J. S. Dehesa, T. Koga, R. J. ez, A. R. Plastino y R. O. Esquivel. Quantum entanglement in helium. En: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* (2012). DOI: [10.1088/0953-4075/45/1/015504](https://doi.org/10.1088/0953-4075/45/1/015504) (vid. pág. 2).
- [14] P. A. Bouvrie, A. P. Majtey, A. R. Plastino, P. Sánchez-Moreno y J. S. Dehesa. Quantum entanglement in exactly soluble atomic models: The Moshinsky model with three electrons, and with two electrons in a uniform magnetic field. En: *European Physical Journal D* (2012). DOI: [10.1140/epjd/e2011-20417-4](https://doi.org/10.1140/epjd/e2011-20417-4). arXiv: [1112.4965](https://arxiv.org/abs/1112.4965) (vid. pág. 2).
- [15] C. L. Benavides-Riveros, J. M. Gracia-Bondía y J. C. Várilly. Lowest excited configuration of harmonium. En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* (2012). DOI: [10.1103/PhysRevA.86.022525](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.022525). arXiv: [1205.2038](https://arxiv.org/abs/1205.2038) (vid. pág. 2).
- [16] Claudio Amovilli y Norman H. March. Quantum information: Jaynes and Shannon entropies in a two-electron entangled artificial atom. En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* (2004). DOI: [10.1103/PhysRevA.69.054302](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.69.054302) (vid. pág. 2).
- [17] J. Pipek e I. Nagy. Measures of spatial entanglement in a two-electron model atom. En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* (2009). DOI: [10.1103/PhysRevA.79.052501](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.052501) (vid. pág. 2).
- [18] H. G. Laguna y R. P. Sagar. Statistical correlations in the Moshinsky atom. En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* (2011). DOI: [10.1103/PhysRevA.84.012502](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.012502) (vid. pág. 2).
- [19] Alberto Galindo y Pedro Pascual. *Quantum Mechanics II*. Springer Berlin Heidelberg, 1991. DOI: [10.1007/978-3-642-84129-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-84129-3) (vid. pág. 5).
- [20] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu y Franck Laloë. *Quantum Mechanics, Volume 2: Angular Momentum, Spin, and Approximation Methods*. Ed. por Wiley-VCH. 2019 (vid. pág. 5).
- [21] Michael A. Nielsen e Isaac Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2011 (vid. pág. 15).
- [22] A Valdés-Hernández, A P Majtey y A R Plastino. Dynamics of entanglement in systems of identical fermions undergoing decoherence. En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 91.3 (2015), págs. 1-9. DOI: [10.1103/PhysRevA.91.032313](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.032313) (vid. págs. 16, 63).
- [23] K Eckert, J Schliemann, D Bruß y M Lewenstein. Quantum correlations in systems of indistinguishable particles. En: *Annals of Physics* 299.1 (2002), págs. 88-127. DOI: [10.1006/aphy.2002.6268](https://doi.org/10.1006/aphy.2002.6268). arXiv: [0203060](https://arxiv.org/abs/0203060) [quant-ph] (vid. págs. 16, 17).
- [24] John Schliemann, J Ignacio Cirac, Marek Kuś, Maciej Lewenstein y Daniel Loss. Quantum correlations in two-fermion systems. En: *Physical Review A. Atomic, Molecular, and Optical Physics* 64.2 (2001), págs. 1-9. DOI: [10.1103/PhysRevA.64.022303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.022303). arXiv: [0012094](https://arxiv.org/abs/0012094) [quant-ph] (vid. págs. 16, 17).
- [25] A R Plastino, D Manzano y J S Dehesa. Separability criteria and entanglement measures for pure states of N identical fermions. En: *Epl* 86.2 (2009). DOI: [10.1209/0295-5075/86/20005](https://doi.org/10.1209/0295-5075/86/20005). arXiv: [1002.0465](https://arxiv.org/abs/1002.0465) (vid. págs. 16, 63).
- [26] R Paškauskas y L You. Quantum correlations in two-boson wave functions. En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 64.4 (2001), pág. 4. DOI: [10.1103/PhysRevA.64.042310](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.042310) (vid. pág. 18).

- [27]M V Fedorov y N I Miklin. Schmidt modes and entanglement. En: *Contemporary Physics* 55.2 (2014), págs. 94-109. DOI: [10.1080/00107514.2013.878554](https://doi.org/10.1080/00107514.2013.878554) (vid. pág. 19).
- [28]R. Shankar. *Principles of Quantum Mechanics, 2nd Edition* (vid. págs. 28, 29, 33).
- [29]E D Mshelia. *Method of Normal Coordinates in the Formulation of a System with Dissipation: the Harmonic Oscillator*. Inf. téc. 1995 (vid. pág. 29).
- [30]Dae Kil Park. Dynamics of entanglement in three coupled harmonic oscillator system with arbitrary time-dependent frequency and coupling constants. En: *Quantum Information Processing* 18.9 (sep. de 2019). DOI: [10.1007/s11128-019-2393-4](https://doi.org/10.1007/s11128-019-2393-4). arXiv: [1811.06256](https://arxiv.org/abs/1811.06256) (vid. pág. 29).
- [31]Martín D. Jiménez, Eloisa Cuestas, Ana P. Majtey y Cecilia Cormick. Composite-boson formalism applied to strongly bound fermion pairs in a one-dimensional trap. En: *SciPost Physics Core* (2023). DOI: [10.21468/SciPostPhysCore.6.1.012](https://doi.org/10.21468/SciPostPhysCore.6.1.012) (vid. pág. 33).
- [32]Paula Céspedes, Elena Rufeil-Fiori, P Alexander Bouvrie, Ana P Majtey y Cecilia Cormick. On the description of composite bosons in discrete models. En: (mar. de 2019). DOI: [10.1103/PhysRevA.100.012309](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.012309). arXiv: [1903.09906](https://arxiv.org/abs/1903.09906) (vid. pág. 34).
- [33]M L Glasser e I Nagy. Exact evaluation of entropic quantities in a solvable two-particle model. En: *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* 377.37 (nov. de 2013), págs. 2317-2319. DOI: [10.1016/j.physleta.2013.07.019](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2013.07.019) (vid. pág. 44).
- [34]Martín Jiménez. *Comportamiento bosónico de pares de fermiones con interacción de contacto 1D* (vid. pág. 48).
- [35]A. P. Majtey, P. A. Bouvrie, A. Valdés-Hernández y A. R. Plastino. Multipartite concurrence for identical-fermion systems. En: *Physical Review A* (2016). DOI: [10.1103/PhysRevA.93.032335](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.032335) (vid. pág. 63).
- [36]Tomasz Sowiński, Mariusz Gajda y Kazimierz Rzażewski. Pairing in a system of a few attractive fermions in a harmonic trap. En: *EPL* (2015). DOI: [10.1209/0295-5075/109/26005](https://doi.org/10.1209/0295-5075/109/26005). arXiv: [1406.0400](https://arxiv.org/abs/1406.0400) (vid. pág. 68).
- [37]Monique Combescot, Shiue Yuan Shiau y Yia Chung Chang. Coboson many-body formalism for cold-atom dimers with attraction between different fermion species only. En: *Physical Review A* (2016). DOI: [10.1103/PhysRevA.93.013624](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.013624) (vid. pág. 72).
- [38]P Alexander Bouvrie, Malte C Tichy e Itzhak Roditi. Composite-boson approach to molecular Bose-Einstein condensates in mixtures of ultracold Fermi gases. En: *Physical Review A* 95.2 (2017), págs. 1-9. DOI: [10.1103/PhysRevA.95.023617](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.95.023617). arXiv: [1609.05949](https://arxiv.org/abs/1609.05949) (vid. pág. 72).

Índice de figuras

3.1	Un par de fermiones en una trampa armónica, uno de especie a y otro de especie b interactuando armónicamente.	23
3.2	Dos pares indistinguibles de fermiones de especie a y b interactuando armónicamente en una trampa.	24
4.1	Correlaciones espaciales para fermiones de distinta especie correspondientes a la solución exacta del sistema, para distintos valores del parámetro de interacción λ en el caso atractivo con $\omega = 1$	35
4.2	Correlaciones espaciales para fermiones de la misma especie correspondientes a la solución exacta, para distintos valores del parámetro de interacción λ en el caso atractivo con $\omega = 1$	36
5.1	Factor de normalización χ_2 en función del parámetro de interacción λ en ambos casos con $\omega = 1$, atractivo y repulsivo, para el sistema en una dimensión.	47
5.2	Correlaciones espaciales para fermiones de distinta especie correspondientes al ansatz de cobosones, para distintos valores del parámetro de interacción λ en el caso atractivo con $\omega = 1$	49
5.3	Correlaciones espaciales para fermiones de la misma especie correspondientes al ansatz de cobosones, para distintos valores del parámetro de interacción λ en el caso atractivo con $\omega = 1$	50
5.4	Factor de normalización χ_2 en función del parámetro de interacción λ en ambos casos con $\omega = 1$, atractivo y repulsivo, para el sistema en una y dos dimensiones.	51
6.1	Fidelidad entre el estado fundamental exacto y el ansatz de cobosones para dos pares en función del parámetro de interacción, la curva sólida verde corresponde al sistema $1D$, las curvas roja sólida, naranja sólida y azul de trazo corresponden a las diferentes soluciones del sistema $2D$	57
6.2	Correlaciones espaciales para fermiones de distinta especie, para el parámetro de interacción $\lambda = 5$ en el caso atractivo, con $\omega = 1$	58
6.3	Comparación de correlaciones espaciales para fermiones de la misma especie, para el parámetro de interacción $\lambda = 5$ en el caso atractivo, con $\omega = 1$	58
6.4	Valores de expectación correspondientes al Hamiltoniano del sistema. Las curvas naranja, azul y verde sólidas corresponden a los valores $\langle \Phi_{AN} H \Phi_{AN} \rangle$, $E_{0,ex}$ y $2E_0$ respectivamente, con $\omega = 1$	59

7.1	Distintas biparticiones posibles para el sistema de cuatro fermiones. . .	61
7.2	Entrelazamiento de dos fermiones de la misma especie con el resto del sistema, las curvas roja y azul sólidas corresponden al entrelazamiento utilizando el ansatz de cobosones y la solución exacta respectivamente. Las gráficas corresponden al caso atractivo y con $\omega = 1$	62
7.3	Entrelazamiento de un fermión con el resto del sistema, las curvas roja y azul sólidas corresponden al entrelazamiento utilizando el ansatz de cobosones y la solución exacta respectivamente. Las gráficas corresponden al caso atractivo y con $\omega = 1$	64
7.4	Entrelazamiento de un par ab con el resto del sistema, las curvas roja y azul sólidas corresponden al entrelazamiento utilizando el ansatz de cobosones y la solución exacta respectivamente. Las gráficas corresponden al caso atractivo y con $\omega = 1$	66
7.5	Bipartición para un sistema de N pares.	67
7.6	Entrelazamiento para $N = 2$ pares con $\omega = 1$, las curvas azules sólidas corresponden al entrelazamiento calculado por integración numérica y las curvas a trazo rojas corresponden al entrelazamiento calculado con las fórmulas cerradas obtenidas.	69

Modelo de Schwinger

Para este apéndice seguimos los libros *Quantum Mechanics, Volume 2: Angular Momentum, Spin, and Approximation Methods* de Claude Cohen-Tannoudji et al. y *Modern Quantum Mechanics (Second Edition)* de los autores J. J. Sakurai y Jim J. Napolitano.

El Hamiltoniano del oscilador armónico bidimensional para una partícula de masa m viene dado por la Ec.(A.1),

$$\begin{aligned} H &= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 Y^2 \\ &= H_x + H_y, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde los Hamiltonianos H_x y H_y corresponden al oscilador armónico en una dimensión, entonces siguiendo la descripción usual en términos de operadores creación y aniquilación escribimos las Ecs.(A.2) y (A.3) con $\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$,

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta X + i \frac{P_x}{\beta \hbar} \right), \quad (\text{A.2})$$

$$a_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta Y + i \frac{P_y}{\beta \hbar} \right). \quad (\text{A.3})$$

Debido a que actúan en distintos espacios de Hilbert, los cuatro operadores a_x, a_y, a_x^\dagger y a_y^\dagger tienen solo los siguientes conmutadores no nulos $[a_x, a_x^\dagger] = [a_y, a_y^\dagger] = \mathbb{I}$. Teniendo en cuenta el problema unidimensional, para cada oscilador a su vez podemos definir un operador número,

$$\begin{aligned} N_x &= a_x^\dagger a_x, \\ N_y &= a_y^\dagger a_y, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

lo cual permite reescribir el Hamiltoniano de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega \left(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1 \right) \\ &= \hbar\omega (N_x + N_y + 1), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

como consecuencia el espectro de energía viene dado por,

$$E = \hbar\omega(n + 1) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.6})$$

$$= \hbar\omega(n_x + n_y + 1) \quad , \quad n_{x,y} = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.7})$$

donde $n = n_x + n_y$. Por lo tanto es posible determinar unívocamente los estados considerando los números cuánticos n_x y n_y ya que debido al desacoplamiento los estados serán de la forma:

$$|\varphi_{n_x, n_y}\rangle = |\varphi_{n_x}\rangle \otimes |\varphi_{n_y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_x! n_y!}} \left(a_x^\dagger\right)^{n_x} \left(a_y^\dagger\right)^{n_y} |\varphi_{0,0}\rangle, \quad (\text{A.8})$$

la función de onda viene dada por la Ec.(A.9), donde H_n son los polinomios de Hermite,

$$\varphi_{n_x, n_y}(x, y) = \frac{\beta}{\sqrt{\pi(2)^{n_x+n_y} (n_x!)(n_y!)}} \exp\left(\frac{\beta^2}{2} (x^2 + y^2)\right) H_{n_x}(\beta x) H_{n_y}(\beta y). \quad (\text{A.9})$$

Ahora definiendo nuevos operadores creación y aniquilación definidos por las Ecs.(A.10) y (A.11),

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y), \quad (\text{A.10})$$

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y), \quad (\text{A.11})$$

repitiendo los mismos argumentos que en el caso anterior, teniendo en cuenta que se cumplen las mismas relaciones de conmutación y definiendo los operadores número dados por la Ecs. (A.12)-(A.13),

$$N_+ = a_+^\dagger a_+ \quad (\text{A.12})$$

$$N_- = a_-^\dagger a_- \quad (\text{A.13})$$

podemos reescribir el Hamiltoniano del problema:

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega \left(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + 1 \right) \\ &= \hbar\omega (N_+ + N_- + 1). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

En analogía con lo anterior el espectro de energía viene dado por

$$E = \hbar\omega(n + 1) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.15})$$

$$= \hbar\omega(n_+ + n_- + 1) \quad , \quad n_{+,-} = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.16})$$

lo cual nos permite determinar los estados unívocamente de otra forma equivalente, mediante los números cuánticos n_+ y n_- ,

$$|\chi_{n_+, n_-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_+! n_-!}} (a_+^\dagger)^{n_+} (a_-^\dagger)^{n_-} |\varphi_{0,0}\rangle. \quad (\text{A.17})$$

Mediante los operadores a_+ y a_- es posible hacer una conexión entre el álgebra del momento angular y el álgebra de dos osciladores desacoplados.

Definiendo los operadores,

$$J_+ \equiv \hbar a_+^\dagger a_+ \quad (\text{A.18})$$

$$J_- \equiv \hbar a_-^\dagger a_-, \quad (\text{A.19})$$

$$J_z \equiv \left(\frac{\hbar}{2}\right) (a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) = \left(\frac{\hbar}{2}\right) (N_+ - N_-), \quad (\text{A.20})$$

puede demostrarse que estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación dadas por las Ecs.(A.21)-(A.22) que definen al operador momento angular,

$$[J_z, J_\pm] = \pm \hbar J_\pm, \quad (\text{A.21})$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z. \quad (\text{A.22})$$

Además definiendo

$$N \equiv N_+ + N_- = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_-, \quad (\text{A.23})$$

puede verse que

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &\equiv J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) \\ &= \frac{\hbar^2}{2} N \left(\frac{N}{2} + 1 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Con lo cual a partir de la Ec.(A.14) tenemos que $[H, \mathbf{J}^2] = [H, J_z] = 0$, esto permite identificar los estados con los números cuánticos j y m definidos por las Ecs. (A.25)-(A.26),

$$j \equiv \frac{n_+ + n_-}{2}, \quad (\text{A.25})$$

$$m \equiv \frac{n_+ - n_-}{2}. \quad (\text{A.26})$$

Cálculo de factor de normalización y matriz densidad reducida

Consideremos el espacio de Hilbert, \mathcal{H} , para un sistema de cuatro partículas distinguibles, sabemos que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_4$, por lo tanto una base posible para este espacio puede ser el producto tensorial de la base posición correspondiente a cada subsistema. Si llamamos $\{|i : z_i\rangle, i = 1, 2, 3, 4\}$ a cada base posición, sabemos que se cumple la relación de clausura,

$$\int |i : z_i\rangle \langle i : z_i| dz_i = \mathbb{I}_i, \quad (\text{B.1})$$

donde \mathbb{I}_i corresponde a la identidad en cada espacio. Además en cada espacio se cumple la relación de ortogonalidad,

$$\langle z'_i | z_i \rangle = \delta(z'_i - z_i). \quad (\text{B.2})$$

Un sistema en estado puro de dos fermiones de especie a y dos fermiones de especie b en el estado $|\psi\rangle$, puede escribirse en segunda cuantización como:

$$|\psi\rangle = \int \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) \Psi_a^\dagger(x_1) \Psi_a^\dagger(x_3) \Psi_b^\dagger(x_2) \Psi_b^\dagger(x_4) |0\rangle dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad (\text{B.3})$$

donde la función de onda de la expansión cumple $\psi(x_3, x_2, x_1, x_4) = -\psi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ y $\psi(x_1, x_4, x_3, x_2) = -\psi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, con $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 | \psi \rangle = \psi(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Para que el estado $|\psi\rangle$ este normalizado debe cumplirse $\int |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{4}$. Veamos esto en más detalle, teniendo en cuenta que¹,

$$\Psi_a^\dagger(x_1) \Psi_a^\dagger(x_3) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1 : x_1 ; 3 : x_3\rangle - |1 : x_3 ; 3 : x_1\rangle] \quad (\text{B.4})$$

$$\Psi_b^\dagger(x_2) \Psi_b^\dagger(x_4) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|2 : x_2 ; 4 : x_4\rangle - |2 : x_4 ; 4 : x_2\rangle] \quad (\text{B.5})$$

¹Recordar que $|n : u_i ; p : u_j\rangle$ significa que las partículas (n) y (p) se encuentran en los estados u_i y u_j respectivamente.

podemos escribir,

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \frac{1}{4} \int \psi^*(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) \\ & \quad [\langle 1 : x'_1 ; 3 : x'_3 | - \langle 1 : x'_3 ; 3 : x'_1 |] [\langle 2 : x'_2 ; 4 : x'_4 | - \langle 2 : x'_4 ; 4 : x'_2 |] \\ & \quad [| 1 : x_1 ; 3 : x_3 \rangle - | 1 : x_3 ; 3 : x_1 \rangle] [| 2 : x_2, 4 : x_4 \rangle - | 2 : x_4 ; 4 : x_2 \rangle] d\mathbf{x} d\mathbf{x}', \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

donde $\psi(\mathbf{x}) = \psi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\psi^*(\mathbf{x}') = \psi(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$, $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ y $d\mathbf{x}' = dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4$.

Utilizando la relación de ortogonalidad notamos que los productos entre corchetes de la Ec.(B.6) se reducen a,

$$\begin{aligned} & [\langle 1 : x'_1 ; 3 : x'_3 | - \langle 1 : x'_3 ; 3 : x'_1 |] [| 1 : x_1 ; 3 : x_3 \rangle - | 1 : x_3 ; 3 : x_1 \rangle] \\ &= \delta(x'_1 - x_1) \delta(x'_3 - x_3) - \delta(x'_1 - x_3) \delta(x'_3 - x_1) - \delta(x'_3 - x_1) \delta(x'_1 - x_3) \\ & \quad + \delta(x'_3 - x_3) \delta(x'_1 - x_1) \\ &= 2[\delta(x'_1 - x_1) \delta(x'_3 - x_3) - \delta(x'_1 - x_3) \delta(x'_3 - x_1)] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

y

$$\begin{aligned} & [\langle 2 : x'_2 ; 4 : x'_4 | - \langle 2 : x'_4 ; 4 : x'_2 |] [| 2 : x_2 ; 4 : x_4 \rangle - | 2 : x_4 ; 4 : x_2 \rangle] \\ &= \delta(x'_2 - x_2) \delta(x'_4 - x_4) - \delta(x'_2 - x_4) \delta(x'_4 - x_2) - \delta(x'_4 - x_2) \delta(x'_2 - x_4) \\ & \quad + \delta(x'_4 - x_4) \delta(x'_2 - x_2) \\ &= 2[\delta(x'_2 - x_2) \delta(x'_4 - x_4) - \delta(x'_2 - x_4) \delta(x'_4 - x_2)]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Reemplazando las Ecs.(B.7)-(B.8) en la Ec.(B.6) , se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \int \psi^*(x_1, x_2, x_3, x_4) \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) d\mathbf{x} - \int \psi^*(x_1, x_4, x_3, x_2) \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) d\mathbf{x} \\ & \quad - \int \psi^*(x_3, x_2, x_1, x_4) \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) d\mathbf{x} + \int \psi^*(x_3, x_4, x_1, x_2) \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) d\mathbf{x} \\ &= 4 \int \psi^*(x_1, x_2, x_3, x_4) \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) d\mathbf{x} = 4 \int |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado las propiedades antisimétricas de la función de onda. Por lo tanto $\langle \psi | \psi \rangle = 1 \implies \int |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{4}$.

Utilizando las Ecs.(B.4)-(B.5) es posible escribir el operador densidad ρ para este sistema como:

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{1}{4} \int \psi^*(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}) \\ & [|1 : x_1 ; 3 : x_3\rangle - |1 : x_3 ; 3 : x_1\rangle] [|2 : x_2 ; 4 : x_4\rangle - |2 : x_4 ; 4 : x_2\rangle] \\ & [\langle 1 : x'_1 ; 3 : x'_3| - \langle 1 : x'_3 ; 3 : x'_1|] [\langle 2 : x'_2 ; 4 : x'_4| - \langle 2 : x'_4 ; 4 : x'_2|] d\mathbf{x}d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Ahora supongamos que quiero calcular la matriz densidad reducida ρ_{ab} de un par ab del sistema de cuatro fermiones, para ello por definición debemos calcular la traza parcial sobre el espacio del otro par ab es decir,

$$\rho_{ab} = \int \langle 3 : z_3 ; 4 : z_4 | \rho | 3 : z_3 ; 4 : z_4 \rangle dz_3 dz_4 \quad (\text{B.11})$$

Considerando la Ec.(B.12) y su conjugado Hermitico,

$$\begin{aligned} & \langle 3 : z_3 ; 4 : z_4 | [|1 : x_1 ; 3 : x_3\rangle - |1 : x_3 ; 3 : x_1\rangle] \\ & \quad [|2 : x_2 ; 4 : x_4\rangle - |2 : x_4 ; 4 : x_2\rangle] \\ & = [\delta(z_3 - x_3) |1 : x_1\rangle - \delta(z_3 - x_1) |1 : x_3\rangle] \\ & \quad [\delta(z_4 - x_4) |2 : x_2\rangle - \delta(z_4 - x_2) |2 : x_4\rangle] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

podemos reescribir la matriz densidad reducida como,

$$\begin{aligned} \rho_{ab} = & \frac{1}{4} \int \psi^*(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}) \\ & [\delta(z_3 - x_3) |1 : x_1\rangle - \delta(z_3 - x_1) |1 : x_3\rangle] [\delta(z_4 - x_4) |2 : x_2\rangle - \delta(z_4 - x_2) |2 : x_4\rangle] \\ & [\delta(z_3 - x'_3) \langle 1 : x'_1| - \delta(z_3 - x'_1) \langle 1 : x'_3|] [\delta(z_4 - x'_4) \langle 2 : x'_2| - \delta(z_4 - x'_2) \langle 2 : x'_4|] \\ & d\mathbf{x}d\mathbf{x}' dz_3 dz_4. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

El cálculo de esta integral la hacemos en dos pasos, primero integramos sobre las variables de los fermiones tipo a dada por la Ec.(B.14),

$$\begin{aligned} I_1 = & \int \psi^*(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}) [\delta(z_3 - x_3) |1 : x_1\rangle - \delta(z_3 - x_1) |1 : x_3\rangle] \\ & [\delta(z_3 - x'_3) \langle 1 : x'_1| - \delta(z_3 - x'_1) \langle 1 : x'_3|] d\mathbf{x}d\mathbf{x}', \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

dicho cálculo resulta,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[\int \psi(x_1, x_2, z_3, x_4) |1 : x_1\rangle dx_1 dx_2 dx_4 - \int \psi(z_3, x_2, x_3, x_4) |1 : x_3\rangle dx_3 dx_2 dx_4 \right] \\
&\quad \left[\int \psi^*(x'_1, x'_2, z_3, x'_4) \langle 1 : x'_1| dx'_1 dx'_2 dx'_4 - \int \psi^*(z_3, x'_2, x'_3, x'_4) \langle 1 : x'_3| dx'_3 dx'_2 dx'_4 \right] \\
&= 4 \int \psi^*(x'_1, x'_2, z_3, x'_4) \psi(x_1, x_2, z_3, x_4) |1 : x_1\rangle \langle 1 : x'_1| dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 dx_4 dx'_4.
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Reemplazando en la Ec.(B.13) para la matriz reducida ρ_{ab} obtenemos,

$$\begin{aligned}
\rho_{ab} &= \int \psi^*(x'_1, x'_2, z_3, x'_4) \psi(x_1, x_2, z_3, x_4) |1 : x_1\rangle \langle 1 : x'_1| \\
&\quad [\delta(z_4 - x_4) |2 : x_2\rangle - \delta(z_4 - x_2) |2 : x_4\rangle] [\delta(z_4 - x'_4) \langle 2 : x'_2| - \delta(z_4 - x'_2) \langle 2 : x'_4|] \\
&\quad dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 dx_4 dx'_4 dz_3 dz_4.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

El segundo paso es integrar la expresion dada por la Ec.(B.17),

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left[\int \psi(x_1, x_2, z_3, z_4) |2 : x_2\rangle dx_2 - \int \psi(x_1, z_4, z_3, x_4) |2 : x_4\rangle dx_4 \right] \\
&\quad \left[\int \psi^*(x'_1, x'_2, z_3, z_4) \langle 2 : x'_2| dx'_2 - \int \psi^*(x'_1, z_4, z_3, x'_4) \langle 2 : x'_4| dx'_4 \right] dx_1 dx'_1 \\
&= 4 \int \psi^*(x'_1, x'_2, z_3, z_4) \psi(x_1, x_2, z_3, z_4) |2 : x_2\rangle \langle 2 : x'_2| dx_1 dx'_1 dx_2 dx'_2.
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Por lo tanto, reescribimos la Ec.(B.16) como:

$$\begin{aligned}
\rho_{ab} &= 4 \int \psi^*(x'_1, x'_2, z_3, z_4) \psi(x_1, x_2, z_3, z_4) |1 : x_1 ; 2 : x_2\rangle \langle 1 : x'_1 ; 2 : x'_2| dx_1 dx'_1 dx_2 dx'_2 dz_3 dz_4.
\end{aligned} \tag{B.18}$$

El cálculo de las matrices reducidas ρ_{aa} y ρ_a es análogo. Por último notemos que se cumple $\text{Tr}(\rho_{ab}) = 1$, ya que por definición se tiene,

$$\text{Tr}(\rho_{ab}) = \int \langle 1 : z_1 ; 2 : z_2 | \rho_{ab} | 1 : z_1 ; 2 : z_2 \rangle dz_1 dz_2, \tag{B.19}$$

utilizando las relaciones de ortogonalidad se cumple la Ec.(B.20),

$$\begin{aligned}
\langle 1 : z_1 ; 2 : z_2 | 1 : x_1 ; 2 : x_2 \rangle \langle 1 : x'_1 ; 2 : x'_2 | 1 : z_1 ; 2 : z_2 \rangle \\
= \delta(z_1 - x_1) \delta(z_2 - x_2) \delta(z_1 - x'_1) \delta(z_2 - x'_2).
\end{aligned}
\tag{B.20}$$

Reemplazando en la Ec.(B.19) e integrando vemos que,

$$\text{Tr}(\rho_{ab}) = 4 \int |\psi(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z} = 4 \times \frac{1}{4} = 1.
\tag{B.21}$$

lo mismo puede corroborarse para los operadores densidad ρ_{aa} y ρ_a .

