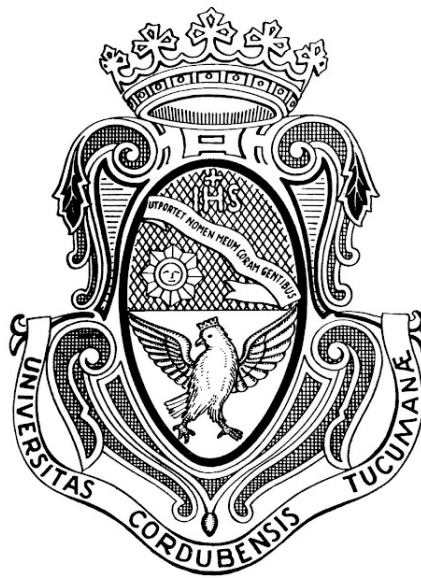


TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN FÍSICA

**COMPORTAMIENTO CRÍTICO EN MODELOS
DE ACTIVIDAD NEURONAL DEFINIDOS EN
REDES DE MUNDO PEQUEÑO CON
CORRELACIONES BIDIMENSIONALES**

Autora: María Florencia Molina

Director: Dr. Sergio A. Cannas



Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Febrero 2024

Esta obra está bajo una licencia [Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)
"Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Interna-
cional".



Agradecimientos

A este gran país y su Estado, que con la educación pública, gratuita, laica y de calidad que ofrece permite que miles podamos acceder a este nivel de estudios. Sin la universidad pública nunca hubiese podido llegar acá.

A la ciencia nacional, sin ella este trabajo no sería posible y la educación universitaria tampoco lo sería. Ojalá sepamos siempre defender la ciencia y la educación como se lo merecen.

A Sergio, mi director. Disfrute muchísimo hacer este trabajo, el tema me encantó. Gracias por todo lo que me enseñaste y toda la paciencia.

A mis amigos y amigas, los que hice desde chiquita, de adolescente y que me acompañaron siempre y a los que conocí estos años en la facultad. FAMAFA es hermosa gracias a su gente también y es gracias a ellos, a su apoyo, sus risas, su humor y su resiliencia que también me pude egresar. Agradezco acá al centro de estudiantes, que desde ingresante hasta ahora me ayudaron siempre que lo necesité y trabajan muchísimo para hacer en la facultad un lugar de contención para el estudiantado. Mención especial para mis amigas Flor, mi amiga desde que tengo 9 años por todo el cariño que me ha dado, a Juli y a Miky por haber estado siempre, en el secundario y todos los años que siguieron también, y a la Jose, mi amiga de la facultad que me acompañó desde primer año en todas las materias, parciales y finales y que siempre estuvo para contención académica y no académica también. Todos son importantes, y si sos amigo/a pero no te mencioné es porque no me alcanzan las páginas para todas las gracias que quiero dar.

A mi familia especialmente, los que están y los que ya se fueron. A mis hermanos Chuli y Guille que los quiero de la forma particular e irrepetible en la que sólo se puede querer a los hermanos. A mi mamá y mi papá, Bochi y Edmundo. Sin ustedes no soy nada, y les debo mi vida entera. Los adoro como a nadie en el mundo.

Este trabajo se lo dedico a mi mamá, la mujer más hermosa, increíble, fuerte y buena que conozco. Es malísimo ponerles metas inalcanzables siempre a las mujeres pero ella se merece estas palabras con creces

Resumen

La hipótesis de criticalidad en el cerebro ha sido respaldada empíricamente por numerosos experimentos, pero la ausencia de datos experimentales de fMRI del conectoma humano para mayor cantidad de nodos impide estudiar la dependencia de magnitudes físicas de este con el escaleo con el tamaño finito (finite size scaling), lo cual constituiría una evidencia contundente a favor de la criticalidad. Es de interés por tanto utilizar "conectomas artificiales" analizándolos mediante simulaciones numéricas. En este trabajo se utiliza una red de mundo pequeño de Watts-Strogatz definida en una red cuadrada con condiciones periódicas de contorno sobre la que se implementa una versión modificada del modelo de Greenberg-Hastings, análoga a la implementada por Zarepour en una dimensión con la finalidad de estudiar como afecta la dimensionalidad al comportamiento crítico del sistema, además de ser de interés en Neurociencia dado que el conectoma de los mamíferos posee estructura quasi-bidimensional. Como era esperado se observó el mismo comportamiento cualitativo que en el caso de una red de base unidimensional, existiendo no obstante diferencias cuantitativas entre los respectivos diagramas dinámicos sólo para valores relativamente bajos de $\langle k \rangle$.

Abstract

The critical brain hypothesis has been empirically supported by numerous experiments, but the absence of experimental fMRI data of the human connectome for a larger quantity of nodes hinders the possibility of studying the dependence of physical quantities with finite size scaling. This would constitute a forceful argument in favour of criticality. Hence, it is of interest the analysis of "artificial connectomes" by way of numerical simulations. In the present work we use a Watts-Strogatz small world network defined over a square lattice with periodic boundary conditions upon which is implemented a modified version of Greenberg-Hastings model, analogous to the network implemented by Zarepour in one dimension. The goal is to study how does dimensionality affect the critical behaviour of the system. Besides it is of interest in Neuroscience, since the mammalian connectome possesses a quasi two-dimensional structure. As expected, it was observed the same qualitative behaviour than that of a one-dimensional lattice. Nevertheless, there exists some quantitative differences between the respective dynamical diagrams only for relatively small values of $\langle k \rangle$.

Contenidos

Introducción	6
I Marco Teórico	10
1 Redes complejas	11
1.1 Introducción	11
1.2 Conceptos básicos de redes	11
1.2.1 Coeficiente de clustering global	12
1.2.2 Camino medio	13
1.2.3 Distribución de grados	13
1.3 Redes de mundo pequeño	14
1.4 Red estructural y funcional cerebral	15
2 Percolación	19
2.1 Introducción	19
2.2 Fenomenología	19
2.3 El parámetro de orden	20
2.4 El tamaño promedio de los clusters $\langle s \rangle$	21
2.5 Distribución del tamaño de los clusters	22
2.6 Teoría de escala	23
2.7 Radio de los clusters y dimensión fractal	25
2.8 Escaleo con el tamaño finito	29
2.9 Exponentes críticos	31
3 Modelo de Greenberg-Hastings	32
3.1 Los autómatas celulares como herramienta de modelado	32
3.2 Autómatas de Greenberg-Hastings	33
3.3 El modelado de la actividad neuronal y la emergencia de la criticalidad	33
II Implementación y Resultados	36
4 Implementación del algoritmo de Watts-Strogatz en dos dimensiones	37
4.1 Construcción de la red	37

4.2	Propiedades de mundo pequeño	42
5	Dinámica de Greenberg-Hastings	46
5.1	Tiempos de relajación	46
5.2	Propiedades críticas	48
5.2.1	Diagrama de criticalidad	52
III	Discusión y Conclusiones	54

Introducción

Cuando los sistemas físicos experimentan un cambio de un estado del sistema a otro, se dice que experimentan una transición de fase. Sin embargo, a veces la línea de transición que delimita una fase de otra desaparece en un punto llamado *punto crítico*. Cuando los sistemas se encuentran en su punto crítico, las fases se vuelven indistinguibles entre sí y los sistemas exhiben un comportamiento inusual. En particular, aparecen fluctuaciones en múltiples escalas de longitud o invariancia de escala (pequeñas fluctuaciones en una región afectan a la totalidad del sistema). Esto causa comportamiento no analítico de magnitudes físicas, que divergen con leyes de potencia en el punto crítico [1].

En 1987, Per Bak argumentó y demostró numéricamente que muchos sistemas dinámicos naturales evolucionan naturalmente hacia su punto crítico, un fenómeno que él llamó "self-organized criticality" (SOC) [2]. La criticalidad en estos sistemas no sería alcanzada ajustando un parámetro del sistema, sino que sería un estado atractor al cual el sistema tiende. Este trabajo inspiró una gran variedad de trabajos que exploraban la criticalidad en sistemas de lo más variados. En particular, en 1995, Herz y Hopfield [3] mostraron que la dinámica microscópica de los modelos de SOC para terremotos se asemejaban a las activaciones neuronales. En ese mismo año, Per Bak y coautores aplicaron un modelo de juguete del cerebro, que consistía en neuronas integrate-and-fire cuyas conexiones eran fortalecidas o debilitadas utilizando aprendizaje por refuerzos [4], y mostraron que dicho sistema llegaba a un punto crítico. En 1999, Per Bak y Chialvo [5] revisitaron el mismo modelo, enfatizando en que la criticalidad del sistema era fundamental para la plasticidad de las conexiones neuronales y por lo tanto el aprendizaje. Fue recién en 2003 que la hipótesis de la criticalidad en el cerebro obtuvo evidencia experimental. Beggs y Plenz [6] utilizaron cultivos de neuronas corticales de roedores y demostraron que su actividad estaba gobernada por las ecuaciones de avalanchas que proponía Per Bak en su trabajo de 1987, infiriendo que la criticalidad era una característica de las neuronas corticales. Desde estos informes iniciales de avalanchas en preparaciones de rodajas in vitro por Beggs y Plenz, la investigación sobre la actividad crítica similar a avalanchas en registros neuronales espaciotemporales ha avanzado a gran velocidad [7], [8]. Las observaciones de fluctuaciones espaciotemporales de ley de escala en datos fisiológicos espontáneos han progresado desde preparaciones de rodajas in vitro de Beggs y Plenz, registros in vivo de capas superficiales de la corteza [9], [10] hasta primates no humanos despiertos [11] (para una revisión, ver [12]). Se han reportado leyes de potencia en distribuciones de avalanchas

en datos magnetoencefalográficos (MEG) de cerebro humano completo [13], y dependencias espaciales complejas y de ley de escala consistentes con avalanchas se han descrito en datos de neuroimagen funcional de cerebro completo (fMRI) [14]. Es importante destacar que estos registros cruzan amplias escalas de apertura desde registros de unidades múltiples hasta potenciales de campo macroscópicos y datos de neuroimagen funcional de cerebro completo [15].

Desde un enfoque neurocientífico, la hipótesis de la criticalidad sostiene que cuando el cerebro se encuentra en su punto crítico está adecuadamente balanceado entre dos estados extremos: el estado supercrítico, en el cual las redes neuronales exhiben excitaciones descontroladas altamente ordenadas observadas en personas que sufren epilepsia; y el estado subcrítico, en el cual las sinapsis entre neuronas no logran establecer conexiones de largo alcance y las cascadas de conexiones mueren rápidamente, observadas en estados comatosos. Permaneciendo en el punto crítico, las redes neuronales estarían optimizadas para la transmisión de información y pequeños estímulos podrían desencadenar comportamientos complejos y de largo alcance en el cerebro. Esta perspectiva emergente se resume esquemáticamente en la figura 1. En la zona subcrítica, los estallidos de actividad cortical son esporádicos y descoordinados (cuadro rojo). Por encima del valor crítico, la actividad cortical está acoplada demasiado estrechamente y, por el contrario, inadecuadamente segregada (cuadro amarillo). Las redes en estado de reposo funcionan en el valor crítico, donde el cambio entre estados de red ocurre debido a débiles inestabilidades dinámicas (cuadro azul claro) [15].

En 2013, Haimovici y coautores aplicaron un modelo que combinaba los datos empíricos de la estructura de las conexiones neuroanatómicas junto con una regla dinámica sencilla [16]. En ese estudio se logró la primera demostración de que un modelado híbrido alcanza aspectos espacio temporales relevantes de la dinámica cerebral siempre que el sistema funcione en su estado crítico. En el modelo, el régimen crítico se presenta como una condición *necesaria* para la emergencia de aspectos neurobiológicamente relevantes de la estructura cerebral. Un aspecto interesante del estudio realizado por Haimovici y sus colaboradores es su enfoque en la dinámica neuronal, que se describe mediante la estadística de clusters instantáneos de neuronas activadas simultáneamente y conectadas a través de una subred. Esto abre la puerta a la descripción de un fenómeno altamente dinámico utilizando la teoría de percolación, un formalismo originalmente concebido para analizar sistemas en equilibrio.

En 2020, Zarepour y coautores repararon en la necesidad de replicar el trabajo de Haimovici para tamaños variables de redes, a los fines de poder estudiar la dependencia de magnitudes físicas del sistema con el escaleo con el tamaño finito (finite size-scaling) en las cercanías del punto crítico, entendiendo que la detección de este tipo de dependencia constituye uno de los argumentos más contundentes a favor de la existencia de criticalidad y al mismo tiempo una prueba crucial de su existencia [17]. Debido a que no existen datos experimentales del conectoma humano para redes con mayor número de nodos, se estudiaron modelos neuronales definidos en “conectomas artificiales”, esto es, redes gener-

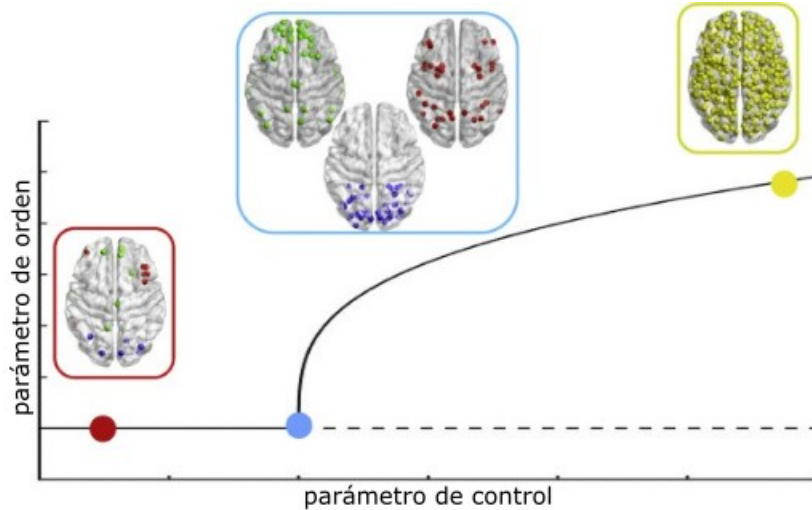


Figura 1: Propuesta del rol de la criticidad en la dinámica cerebral en reposo a gran escala. En la región subcrítica, las regiones cerebrales individuales están efectivamente desacopladas, mostrando una falta de integración (cuadro rojo). Por el contrario, en la región supercrítica, la integración es demasiado grande y hay una falta de segregación (amarillo). Cerca del punto crítico, un cuerpo emergente de trabajo en EEG, MEG y fMRI sugiere que los sistemas cerebrales muestran un equilibrio dinámico de integración y segregación (cuadro azul), fluctuando entre las diversas redes en estado de reposo (y ritmos EEG). La función cognitiva requiere una ligera incursión lejos del régimen crítico que conduce a la estabilización de una red particular. Figura extraída de [15].

adas artificialmente con propiedades topológicas análogas a las del conectoma humano, en particular sobre redes de mundo pequeño de Watts-Strogatz en una dimensión, que exhiben caminos medios bajos y coeficientes de clustering elevados, características observadas en el conectoma: un análisis topológico de las redes de Hangmann et al. muestra longitud promedio de los caminos $l = 3.07$, el coeficiente de clustering $C = 0.47$ y promedio de grado $\langle k \rangle = 36$. Estas propiedades demuestran carácter de mundo pequeño y alta conectividad. En [17] se verificó el comportamiento de escala característico de un sistema crítico y que el comportamiento crítico se presenta en una región amplia del espacio de parámetros que definen la topología de la red con valores de conectividad intermedios.

Un aspecto a considerar del trabajo realizado por Zarepour es cómo influye la dimensionalidad de la red en los resultados obtenidos. Si bien se espera que los resultados obtenidos en [17] sean independientes de la dimensionalidad de la red subyacente al algoritmo de Watts-Strogatz para desorden alto, para desorden bajo o intermedio la dimensionalidad puede tener una influencia importante en los comportamientos dinámicos. Esto resulta especialmente relevante cerca del punto crítico, donde habitualmente el rol de la dimensionalidad de la red es determinante [1]. En particular, la extensión a modelos de base bidimensional es de interés en neurociencia, ya que la estructura de la corteza cerebral en mamíferos es quasi-bidimensional. En este trabajo final analizamos el impacto de la dimensionalidad en el modelo utilizado en [17], replicando el mismo modelo en una red cuadrada de Watts-Strogatz con interacciones hasta vecinos de distancia variable y

condiciones periódicas de contorno. El objetivo es extender los resultados obtenidos en [17] a esta nueva red, esto es, se llevará a cabo el análisis de la dinámica crítica del modelo, variando el tamaño, la conectividad y el grado de desorden de la red de mundo pequeño (medido este último por la probabilidad de reconexión de la red).

Parte I

Marco Teórico

Capítulo 1

Redes complejas

1.1 Introducción

Las redes complejas describen una gran variedad de sistemas naturales y sociales. Una red (o un grafo) topológicamente esta formada por nodos (o vértices) que están conectados por enlaces, como se ve en la figura 1.1

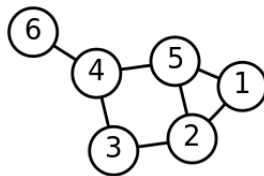


Figura 1.1: Una red sencilla de seis nodos

Por ejemplo, la célula se describe mejor como una red compleja de sustancias químicas conectadas por reacciones químicas; Internet es una red compleja de enrutadores y computadoras vinculadas por diversos enlaces físicos o inalámbricos; las modas e ideas se propagan en la red social, cuyos nodos son seres humanos y cuyos vínculos representan diversas relaciones sociales; la World Wide Web es una enorme red virtual de páginas web conectadas por hipervínculos. Estos sistemas son solo algunos ejemplos que han llevado a la comunidad científica a investigar los mecanismos que determinan la topología de las redes complejas.

1.2 Conceptos básicos de redes

Tradicionalmente, el estudio de las redes complejas estuvo dentro del dominio de la teoría de grafos. Desde la década de los 1950's, la estructura de las grandes redes complejas con ningún diseño aparente ha sido descriptas como grafos aleatorios. El interés creciente en el estudio de estas redes ha llevado a reconsiderar la idea que detrás de las redes complejas que existen no hay ningún tipo de orden, y repensarlas como estructuras con un orden subyacente en su topología [18].

Matemáticamente una red corresponde a la pareja de conjuntos $G(n, m)$, donde n representa el número de nodos y m muestra el número de enlaces. Los enlaces, si existe flujo únicamente en una dirección, se les llama dirigidos (figura 1.2), y si tiene flujo en ambas direcciones se les llama no dirigidos. También existen redes en las cuales los enlaces entre los nodos tienen diferentes pesos, estas se llaman redes ponderadas o pesadas (figura 1.3).

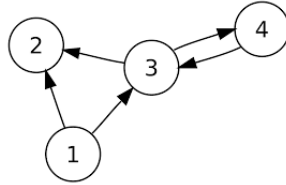


Figura 1.2: Un grafo dirigido de cuatro nodos

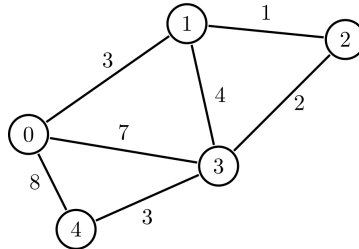


Figura 1.3: Un grafo pesado, los números que acompañan a los enlaces indican el peso de cada conexión.

Existen tres conceptos básicos que ocupan un papel importante en la forma en la que se piensan las redes complejas.

1.2.1 Coeficiente de clustering global

Las grandes redes tienen una tendencia a formar clusters y cliques. Un cluster es un conjunto de nodos en una red que están más densamente conectados entre sí en comparación con el resto de la red. Pueden tener una conectividad interna fuerte, pero no necesariamente todos los nodos dentro de un cluster están conectados directamente entre sí. Los clusters pueden tener diferentes niveles de densidad y se utilizan para identificar regiones más cohesionadas en una red. Por otro lado, un clique es un subgrafo en el que cada par de nodos está directamente conectado entre sí (en un clique, todos los tríos de nodos forman triángulos).

Elegimos un nodo i en la red con k_i vértices que lo conectan a k_i nodos. Si los vecinos son parte de un clique, habría $k_i \frac{(k_i - 1)}{2}$ vértices entre ellos. El cociente entre el número E_i de vértices que en realidad existen entre estos k_i nodos y el número total de vértices del clique da el coeficiente de clustering del nodo i :

$$C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}$$

El coeficiente de clustering de la red es el promedio sobre todos los C_i :

$$C = \langle C_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i \in N} C_i$$

En la mayoría de las redes reales el coeficiente de clustering es típicamente mucho mayor que el de una red aleatoria de tamaño comparable.

1.2.2 Camino medio

El camino medio en una red compleja se refiere a la longitud promedio de los caminos más cortos entre pares de nodos en esa red. Este concepto es fundamental para entender la eficiencia de la comunicación o la transferencia de información en la red.

Para cada par de nodos en la red, se identifica el camino más corto entre ellos. Un camino es una secuencia de enlaces (o aristas) que conecta los nodos, y la longitud de un camino se mide por el número de enlaces que contiene. Identificamos esta distancia como d_{ij} para los nodos i, j . El camino medio es el promedio de las longitudes de todos los caminos más cortos en la red. Se calcula sumando las longitudes de todos los caminos más cortos y dividiendo esa suma por el número total de pares de nodos:

$$l = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij}$$

donde N es el número de nodos de la red.

1.2.3 Distribución de grados

La característica individual más usada de un nodo es su grado. El grado k_i de un nodo i es el número de conexiones con otros nodos. El promedio de los grados de los nodos de una red se llama grado medio de la red, y se denota como $\langle k \rangle$. Si una red es dirigida, esto significa que existirá enlaces que entren y otros que salgan de los nodos. Entonces existen grados de salida y de entrada en función de la disposición de los enlaces entrantes y salientes de los nodos. No todos los nodos en una red tienen la misma cantidad de vértices. La distribución de los grados de los nodos está caracterizada por una función $P(k)$, que da la probabilidad de que un nodo elegido al azar tenga exactamente k vértices. En el caso de un grafo aleatorio, la mayoría de los nodos tienen aproximadamente el mismo grado, cercano al promedio $\langle k \rangle$ de grado de la red. La distribución $P(k)$ en un grafo aleatorio es una distribución de Poisson con un pico en $P(\langle k \rangle)$. Para la mayoría de las redes complejas, la distribución de grados se desvía significativamente de una distribución de Poisson, y suelen variar con una ley de potencias $P(k) \sim k^{-\gamma}$.

1.3 Redes de mundo pequeño

El concepto de mundo pequeño, en términos simples, describe el hecho de que en redes complejas del mundo real, a pesar de su gran tamaño, suele haber un camino relativamente corto entre dos nodos cualesquiera (como en una red aleatoria) pero con un coeficiente de clustering y conectividad mucho mayor al de una red aleatoria de tamaño comparable. La propiedad de mundo pequeño caracteriza a gran parte de las redes complejas. Fue esto lo que motivó a la definición de modelos en los cuales sea posible ajustar C a cualquier valor deseado. Inspirados por el hecho de que muchas redes sociales ([19], [20]) están altamente agrupadas al mismo tiempo que exhiben una pequeña distancia promedio entre vértices, Watts y Strogatz (1998) propusieron un modelo que interpola entre retículos ordenados (que tienen un coeficiente de clustering alto) y redes puramente aleatorias (que poseen una pequeña longitud de camino promedio), como puede verse en la figura 1.4 [21]. El algoritmo para una dimensión es el siguiente:

1. *Red ordenada*: Se empieza con un anillo con N nodos en el cual cada nodo está conectado con sus primeros k vecinos, $\frac{k}{2}$ a cada lado.
2. *Aleatorizar*: Cada vértice se reconecta con probabilidad π evitando conexiones entre un mismo nodo y conexiones dobles. Variando π se puede pasar de un grafo ordenado ($\pi = 0$) a un grafo aleatorio ($\pi = 1$).

Para este trabajo en particular, el anillo (que es una red unidimensional con condiciones periódicas de contorno) se reemplaza con un toro, es decir una red cuadrada bidimensional con condiciones periódicas de contorno. El modelo funciona exactamente de la misma forma, solo que el número de vecinos no aumenta de a dos, tendremos cuatro primeros vecinos, ocho segundos vecinos, doce terceros vecinos, veinte cuartos vecinos, y así sucesivamente.

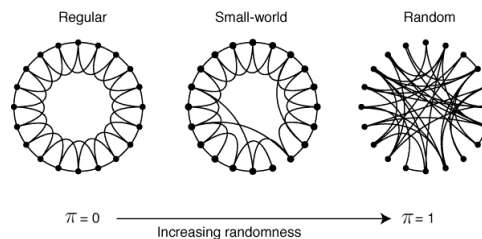


Figura 1.4: Un anillo de Watt-Strogatz con $N=20$ nodos y $\langle k \rangle = 4$ para distintas probabilidades de reconexión. Figura extraída de [18].

Puede verse en la figura 1.5 que existe un gran intervalo de valores de π para los cuales $l(\pi)$ es muy pequeño, casi cercano al camino medio de un grafo aleatorio ($l(0) \gg l(\pi)$), y el coeficiente de clustering C es muy alto ($C(\pi) \sim C(0)$). Este comportamiento es el que le da la característica de mundo pequeño a la red. Entonces si $\pi = 0$, la red es regular, y si $\pi = 1$ tenemos una red completamente aleatoria.

Para π pequeños, el camino medio escala linealmente con el tamaño de la red, mientras que para π altos escala logarítmicamente. El origen en la rápida caída de l es la aparición

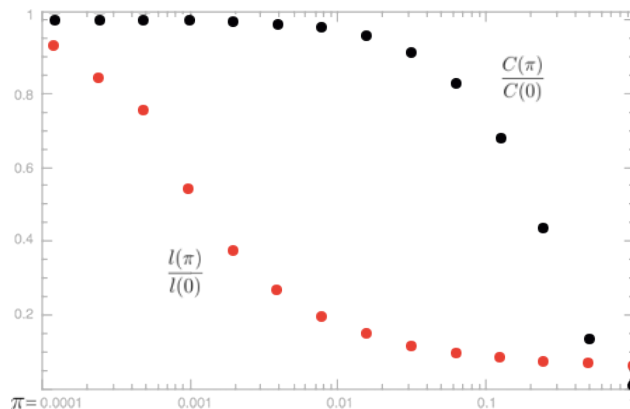


Figura 1.5: Camino medio y coeficiente de clustering normalizados para una red regular de Watts-Strogatz en función de la probabilidad de reconexión π . Se aplica escala logarítmica en el eje horizontal. Figura extraída de [18].

de atajos entre los nodos, producto del reconexionado. Gracias al algoritmo, partes muy alejadas de la red tienen probabilidades de ser conectadas, lo que tiene un impacto significativo en el camino libre medio de todo el grafo. Incluso una pequeña fracción de atajos es suficiente para disminuir drásticamente el camino medio.

Watts descubrió que, para un anillo, l no empieza a decrecer hasta que $\pi \geq \frac{2}{N\langle k \rangle}$, condición que garantiza la existencia de al menos un atajo [18]. Esto implica que la transición π depende del tamaño del sistema o, dicho de otra forma, existe un tamaño de *crossover* N^* que depende de π tal que si $N < N^*$, $l \sim N$ pero si $N > N^*$, $l \sim \ln(N)$. Es aceptado ahora que el camino medio obedece la relación de escala

$$l(N, \pi) \sim \frac{N^{\frac{1}{d}}}{\langle k \rangle} f(\pi \langle k \rangle N)$$

donde $f(u)$ es una función que obedece

$$f(u) = \begin{cases} \text{const} & u \ll 1 \\ \frac{\ln(u)}{u} & u \gg 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Esta relación de escala ha sido confirmada por simulaciones numéricas, técnicas del grupo de renormalización y expansiones en serie.

1.4 Red estructural y funcional cerebral

La corteza cerebral humana está formada por aproximadamente 10^{10} neuronas organizadas en una red compleja de circuitos locales y vías de fibras de largo alcance. Esta red compleja constituye el sustrato estructural para las interacciones distribuidas entre sistemas cerebrales especializados. Las conexiones anatómicas entre regiones del cortex (básicamente, las conexiones sinápticas entre neuronas) forman una red estructural sobre la cual la actividad neuronal se desarrolla. Por otro lado, las regiones corticales se acoplan

dinámicamente entre ellas formando redes funcionales asociadas con la percepción, la cognición y la acción, así como durante la actividad espontánea en el estado de reposo. Por lo tanto, es muy importante mapear la estructura de la corteza humana a gran escala. En la corteza humana, se ha investigado la topología de los patrones de conectividad funcional, y se han caracterizado atributos clave de estos patrones en diferentes condiciones de reposo o carga cognitiva [22].

Una manera de construir matrices de conectividad estructural cerebral es a través de datos de imágenes. Por ejemplo, Patric Hagmann y sus colegas usaron técnicas de imágenes de difusión tal como las imágenes por espectro de difusión (Diffusion Spectrum magnetic resonance Imaging, DSI) [38], que permiten mapear de manera no invasiva las rutas de fibras entre un gran número de regiones cerebrales que están distribuidas homogéneamente y construir mapas de conexión que cubren todo el cerebro entero. Hangmann et al. adquirieron DSI para cinco participantes sanos (edad promedio 29,4 años, todos varones). Para cada uno de ellos, toda la corteza se dividió en 998 regiones de interés de aproximadamente 2cm² y se aplicó la tractografía de materia blanca-materia gris (white matter-gray matter: WGM) [39] para inferir las fibras que las conectan. Las redes individuales se construyeron luego considerando cada región como un nodo, y el borde ponderado que conecta dos nodos denota la densidad de las fibras que unen las dos regiones. Se informó que una red representativa es el promedio en todas las redes individuales (ver Figura 2.8). Los análisis computacionales de la red del cerebro, demuestran regiones de la corteza que están conectadas altamente y son muy centrales, y forman un núcleo estructural del cerebro humano. Los componentes clave del núcleo son partes de la corteza medial posterior que se sabe están altamente activadas en el estado reposo, cuando el cerebro no está involucrado en una tarea cognitivamente. A fin de entender cómo se relaciona la estructura cerebral con la función cerebral, Hagmann y sus colegas registraron los patrones de activación cerebral del mismo grupo participante. Encontraron que los patrones de conexión estructural y las interacciones funcionales entre las regiones de la corteza se correlacionaron significativamente [40]. El trabajo mencionado y muchos trabajos relacionados abarcan un gran proyecto de colaboración denominado "Conectoma" del cerebro, en el cual, el objetivo final es comprender la arquitectura de la conectividad del cerebro completo y con detalles [41].

Por otro lado, es necesario comprender los mecanismos dinámicos que permiten el comportamiento complejo del sistema. Para responder a esta inquietud existe una referencia interesante que ha sido el estudio llamado condición de estado de reposo. En contraste con la mayoría de los experimentos que utilizan técnicas de neuroimagen, diseñadas para identificar las regiones del cerebro relacionadas con diferentes tareas, el estado de reposo se ocupa de las fluctuaciones espontáneas de la actividad cerebral sin ningún estímulo particular. Lejos de ser aleatorios, estas actividades espontáneas se organizan en patrones espaciales bien establecidos denominados Redes de estado de reposo (Restig State Networks: RSN) [42]. De hecho, las regiones del cerebro que están altamente correlacionadas en promedio forman las RSN, que fluctúan en el tiempo y que forman un repertorio de

estados metaestables [43, 7].

Una característica importante de la conectividad funcional cortical es la red predefinida o Resting State Network (RSN), un conjunto de regiones cerebrales acopladas dinámicamente que se activan más intensamente en reposo que durante la realización de tareas cognitivamente exigentes. Dentro de la corteza cerebral, los módulos estructurales dan forma a la conectividad funcional a gran escala. Los RSNs están formados por regiones del cerebro que están altamente correlacionadas en promedio, pero fluctúan en el tiempo y forman un repertorio de estados metaestables [17]. Una amplia gama de experimentos que utilizan resonancia magnética funcional (fMRI) ha destacado que estos grupos espaciales de actividad coherente (RSN), están asociados específicamente con sistemas neuronales responsables de funciones sensoriales, cognitivas y conductuales. Además, se ha demostrado que el patrón de correlaciones en estas redes cambia con diversas condiciones cognitivas y patofisiológicas [15]. Múltiples estudios muestran que la actividad de RSN exhibe propiedades de escalamiento peculiares, con correlaciones de largo alcance que divergían con el tamaño de los sistemas y auto similitud de la función de la correlación que se asemejan a la dinámica cerca del punto crítico de una transición de fase de segundo orden, en consonancia con evidencia que muestra que el cerebro en reposo está cerca de un punto crítico. Estos hallazgos empíricos están en línea con resultados de modelado computacional [23].

En 2013, Haimovici y coautores adaptaron el modelo paradigmático de Greenberg y Hastings de un sistema compuesto por unidades excitables (esto es, unidades discretas que presentan un período refractario para su reactivación), incorporando ciertos elementos que posibilitan una mejor interpretación del mismo como modelo neuronal (tales como por ejemplo la posibilidad de activación espontánea). El modelo consta entonces de un conjunto de neuronas artificiales, las cuales se representan por variables de tres estados (inactivo, activo y refractario) y reglas dinámicas sencillas que determinan una evolución paralela a tiempo discreto. Definiendo el modelo sobre una red que reproduce la conectividad empírica entre regiones del cerebro humano, Haimovici y coautores mostraron que el mismo reproduce ciertos patrones espacio-temporales característicos de la actividad cerebral (Resting State Network), solo si el modelo se ajusta a su punto crítico (definido en este contexto como un estado que exhibe correlaciones espaciales que abarcan la totalidad del sistema) [16].

Zarepour y coautores adaptaron el modelo anterior a una red de mundo pequeño con propiedades topológicas semejantes a las del conectoma utilizado por Haimovici y coautores. Esto posibilitó variar a voluntad el tamaño del sistema y con ello corroborar la existencia efectiva de un fenómeno crítico, mediante un análisis de las propiedades de escala con el tamaño (FSS). Más aún, en dicho trabajo se mostró que en redes con alto grado de desorden y alta conectividad la transición de fase dinámica cambia de orden, esto es, el sistema cambia de manera discontinua de un estado de alta a uno de baja actividad [17].

En este trabajo se adapta el trabajo realizado por Zarepour a una red de mundo

pequeño bidimensional, ya que el conectoma del cerebro humano es quasi bidimensional.

Capítulo 2

Percolación

2.1 Introducción

La palabra *percolación* refiere al movimiento de un fluido a través de un medio poroso: decimos que un fluido *percola* si logra atravesar el medio poroso en el que se encuentra. En Física Estadística, la teoría de percolación describe el comportamiento de una red cuando nodos o vértices son agregados. La teoría de percolación puede ser utilizada para estudiar y modelar una gran variedad de fenómenos y procesos, por ejemplo la gelación de polímeros, el comportamiento de los incendios forestales o cómo se distribuye el petróleo en reservorios con rocas porosas [24].

2.2 Fenomenología

Supongamos que se tiene un arreglo infinito de cuadrados en forma de grilla, y cada cuadrado puede ser rellenado o estar vacío. Los grupos de cuadrados vecinos (o sea, que comparten un lado) que están rellenos forman estructuras que denominamos *clusters*. La teoría de percolación, en un ejemplo sencillo como este, describe cuántos clusters existen y las propiedades de estos. Supongamos que cada cuadrado puede estar relleno con probabilidad p , entonces en una grilla con N cuadrados, tenemos pN cuadrados rellenos y $(p - 1)N$ cuadrados vacíos. Para valores de p pequeños el número de clusters que se forman y su tamaño son pequeños, y conforme aumenta p , el tamaño y la cantidad de clusters aumenta.

Se puede ver que existe un p_c para el cual aparece el primer cluster que *percola*, es decir, se forma un cluster que contiene un camino de sitios ocupados que conecta lados opuestos de la red. Esta configuración define el problema de percolación de sitios, como se observa en la figura 2.1.

De manera análoga, se puede pensar en el problema de percolación de enlaces: cada enlace entre dos nodos de la red puede estar ocupado con probabilidad p (figura 2.2)

Ambas descripciones comparten la misma fenomenología: existe un valor crítico p_c tal que para $p < p_c$ se forman pequeños clusters de enlaces ocupados (por ende, de sitios

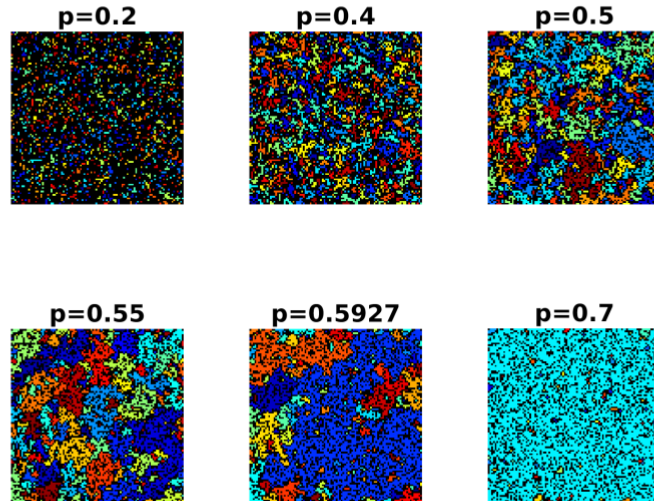


Figura 2.1: Percolación de sitios en dos dimensiones para $N=100 \times 100$. Los colores demuestran diferentes clusters con distintos tamaños. Cada sitio de la grilla está ocupado con una probabilidad p , correspondiendo los sitios negros a sitios vacíos. Para p muy pequeño, solo se forman pequeños clusters de sitios ocupados, pero cuando aumenta p , se forman los clusters más grandes, hasta que con $p = p_c = 0.5927$ se forma un cluster gigante de sitios ocupados que está conectado a dos fronteras opuestas. Figura extraída de [17].

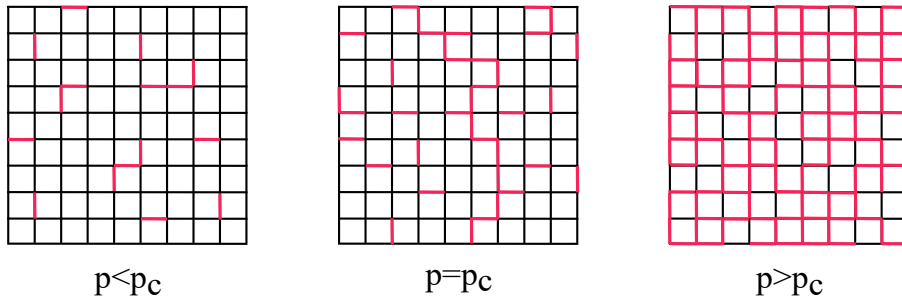


Figura 2.2: Percolación de enlaces en dos dimensiones. Cada enlace de la grilla está ocupado con una probabilidad p . Para p muy pequeña, solo se forman pequeños clusters de enlaces ocupados, pero al aumentar p , se forman los clusters más grandes, hasta que para $p = p_c$, se forma un cluster gigante de enlaces ocupados que está conectado a dos fronteras opuestas.

conectados) y para $p > p_c$ se forma un cluster gigante de enlaces que conecta dos sitios situados en lados opuestos de la red.

2.3 El parámetro de orden

La transición de percolación es una transición de fase geométrica de un estado desconectado a uno conectado. Notemos que si estamos tratando con una red infinita (o sea en el límite termodinámico), un cluster que percola posee infinitos sitios de red, ya que va

de un extremo a otro de la red. Como se dijo anteriormente, el *umbral de percolación* es el valor de probabilidad de ocupación p_c para el cuál aparece por primera vez un cluster que percola. Para el cluster infinito (en el límite termodinámico), se define

$$P_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_1}{N} \quad (2.1)$$

donde S_1 es el número de sitios pertenecientes al cluster de mayor tamaño, también denominado cluster gigante o componente gigante. De esta manera, P_∞ es la probabilidad de que un sitio ocupado pertenezca al cluster gigante. Notemos que de esta forma se tiene

$$P_\infty = \begin{cases} 0 & p < p_c \\ \neq 0 & p > p_c \end{cases} \quad (2.2)$$

De esta manera, P_∞ se comporta como un parámetro de orden, que define el exponente crítico β de la forma

$$P_\infty = (p - p_c)^\beta, \quad p \rightarrow p_c^+ \quad (2.3)$$

2.4 El tamaño promedio de los clusters $\langle s \rangle$

Para estudiar el fenómeno de la percolación independientemente de la forma de la red o su topología, es necesario estudiar la estadística de los clusters que se forman. Definimos

$$n_s(p) = \frac{N_s(p)}{N} \quad (2.4)$$

como el número de clusters con s sitios de red por cantidad de sitios, donde N es la cantidad de sitios y N_s es la cantidad de clusters de tamaño s .

La probabilidad de que un sitio arbitrario sea parte de un cluster arbitrario de tamaño s esta dada por $n_s s$, pues ese sitio puede ser cualquiera de los s sitios que son parte del cluster. Todo sitio ocupado *debe* pertenecer a un cluster, ya que un sitio ocupado rodeado de sitios vacíos es un cluster de tamaño $s = 1$. Por lo tanto, la probabilidad de que un sitio pertenezca a *algún* cluster es igual a la probabilidad p de que dicho sitio este ocupado, o sea

$$\sum_s n_s s = p \quad (p < p_c) \quad (2.5)$$

Notemos que la restricción $p < p_c$ hace que se deban contar por separado los sitios pertenecientes al cluster infinito, ya que la suma no esta definida si $s = \infty$. También podemos escribir, ahora sin restringir para $p < p_c$:

$$P_\infty + \sum_s n_s s = p \quad (2.6)$$

ya que un sitio de red pertenece a un cluster de tamaño s o bien al cluster de tamaño infinito.

Supongamos que tomamos un sitio al azar de la red y deseamos saber que tan grande

es, en promedio, el cluster al cuál pertenece. Existe una probabilidad $n_s s$ de que un sitio pertenezca a un cluster de tamaño s y una probabilidad $\sum_s n_s s$ de que pertenezca a cualquier cluster de cualquier tamaño (excepto el cluster infinito). Entonces

$$w = \frac{n_s s}{\sum_s n_s s} \quad (2.7)$$

es la probabilidad de que el cluster al que pertenece un sitio arbitrario tenga exactamente s sitios. El tamaño medio del cluster al que pertenece el sitio que tomamos es entonces

$$\langle s \rangle = \sum_s w_s s \quad (2.8)$$

$$= \frac{\sum_s n_s s^2}{\sum_s n_s s} \quad (p < p_c) \quad (2.9)$$

La suma se puede extender para $p > p_c$ si se excluye el cluster infinito. Dicho de otra forma

$$\langle s \rangle = \frac{\sum s' n_s s^2}{\sum s' n_s s} \quad (2.10)$$

donde s' indica que se excluye el cluster infinito de la suma. En el limite termodinámico, $\langle s \rangle$ es finito para $p < p_c$. A medida que p aumenta, $\langle s \rangle$ también aumenta; cuando $p \rightarrow p_c$ $\langle s \rangle$ diverge.¹ Para $p > p_c$ el tamaño promedio de los clusters toma valores finitos de nuevo y decrece a medida que $p \rightarrow 1$. Esto se debe a que a medida que $p \rightarrow 1$, el cluster infinito aumenta cada vez mas de tamaño, por lo que la probabilidad de que un sitio pertenezca a un cluster que no sea el cluster gigante es cada vez menor. Por lo tanto, $\langle s \rangle$ es una cantidad singular en $p = p_c$. En la figura 2.3 se aprecia el comportamiento cualitativo del parámetro de orden y el tamaño promedio de los clusters en función de la probabilidad de ocupación p . Para $p \rightarrow p_c$ se define el exponente crítico γ como

$$\langle s \rangle \propto |p - p_c|^{-\gamma} \quad (2.11)$$

2.5 Distribución del tamaño de los clusters

El tamaño medio de los clusters $\langle s \rangle$ diverge en $p = p_c$ junto con la aparición del cluster infinito. La cantidad $n_s(p)$ se comporta en las inmediaciones de p_c como

$$n_s = \begin{cases} s^{-\tau} f_-\left(\frac{s}{s_\xi}\right) & p < p_c \\ s^{-\tau} f_+\left(\frac{s}{s_\xi}\right) & p > p_c \end{cases} \quad (2.12)$$

¹La divergencia que muestra $\langle s \rangle$ en $p = p_c$ no está relacionada con la divergencia de P_∞ , ya que la suma que define a $\langle s \rangle$ siempre excluye al cluster gigante. Ambas divergencias tienen distintas causas. Explicar los motivos por los cuales diverge $\langle s \rangle$ excede a los contenidos de este trabajo.

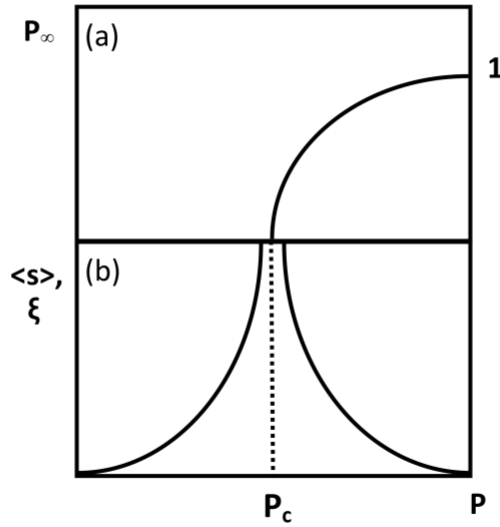


Figura 2.3: (a) Diagrama esquemático de la probabilidad P_∞ de que un nodo pertenezca al cluster gigante en función de la probabilidad de ocupación p . Para $p < p_c$, P_∞ es nulo en el límite termodinámico, mientras que toma valores estrictamente positivos para $p > p_c$. (b) Evolución del tamaño promedio de los clusters finitos y la longitud de correlación cerca de la transición. Como se ve en el diagrama, en el umbral crítico p_c aparece la componente gigante, hay clusters de todo tamaño y la longitud de correlación diverge (es decir, es proporcional al tamaño del sistema L). Figura extraída de [17].

Las funciones f_+ , f_- son dos funciones de escala que convergen a la misma constante cuando $x \rightarrow 0$ y decaen rápidamente para valores grandes de x . Se define s_ξ como el tamaño de cluster de *cutoff*. Los clusters de tamaño comparables a s_ξ o menores son los que están presentes en la red a una dada probabilidad p . Se observa que

$$s_\xi = |p - p_c|^{-\frac{1}{\sigma}} \quad (2.13)$$

o sea que s_ξ diverge cuando p tiende a p_c . Esto define un nuevo exponente crítico σ . Observemos que el comportamiento de n_s descrito por la ecuación 2.12 define también el exponente crítico τ .

2.6 Teoría de escala

Hemos visto que el comportamiento del proceso de percolación depende del régimen en cuál estemos. En el régimen subcrítico $p < p_c$ todos los clusters son finitos y la distribución del tamaño de los clusters tiene una cola que decae exponencialmente. En el régimen supercrítico $p > p_c$, donde existe un cluster gigante con probabilidad 1, la distribución tiene una cola que decae más lentamente que una exponencial. Sin embargo, cerca del punto crítico $p \sim p_c$, muchas cantidades se anulan o divergen exhibiendo un escalo de tipo ley de potencia. Existen diferentes exponentes críticos que caracterizan esta escala para distintas cantidades. Estos exponentes no son independientes entre sí,

pero pueden asociarse mediante las llamadas relaciones de escala. La teoría de escala ha hecho predicciones notables sobre el comportamiento del problema de percolación cerca de y en el punto crítico. A continuación explicamos cómo se relacionan los exponentes críticos cerca de p_c .

Definimos la longitud de correlación ξ como la distancia promedio entre dos sitios pertenecientes al mismo cluster:

$$\xi^2 = \frac{\sum r^2 g(r)}{\sum g(r)} \quad (2.14)$$

donde $g(r)$ es la función de correlación, definida como la probabilidad de que un sitio a distancia r de un sitio ocupado esté también ocupado y pertenezca al mismo cluster. La longitud de correlación diverge también cuando $p \rightarrow p_c$, y escala con el exponente crítico ν :

$$\xi = |p - p_c|^{-\nu} \quad (2.15)$$

El tamaño promedio de los clusters pequeños para $p \neq p_c$ queda caracterizado por la longitud de correlación.

Cerca de p_c , usando la relación de escaleo para n_s de la ecuación (2.12) y reemplazando la suma por una integral, la ecuación para calcular el tamaño promedio de los clusters para $p \sim p_c$ queda

$$\langle s \rangle = \frac{1}{p_c} \int s^2 s^{-\tau} f\left(\frac{s}{s^*}\right) ds \quad (2.16)$$

$$= s^{*3-\tau} \int x^{2-\tau} f(x) dx \quad (2.17)$$

$$\sim |p_c - p|^{\frac{\tau-3}{\sigma}} \quad (2.18)$$

donde se definió $x = \frac{s}{s^*}$. Esta relación predice que el tamaño promedio de los clusters escala con una ley de potencia. Cerca de p_c , la probabilidad de que un nodo pertenezca al cluster gigante puede estimarse reemplazando p_c en $p = \sum_s s n_s(p_c)$, pues en $p = p_c$ la probabilidad de que un sitio pertenezca al cluster infinito es nula, $P_\infty(p_c) = 0$. Reescribiendo la ecuación que tenemos para p , se tiene:

$$P_\infty = \sum_s s [n_s(p_c) - n_s(p)] \sim \int s^{1-\tau} \left[f(0) - f\left(\frac{s}{s^*}\right) \right] ds \quad (2.19)$$

$$= \int s^* (s^* x)^{1-\tau} [f(0) - f(x)] dx \sim s^{*2-\tau} \sim |p - p_c|^{\frac{2-\tau}{\sigma}} \quad (2.20)$$

Considerando que la suma $\sum_s s n_s(p_c)$ debe ser convergente, tenemos que $\tau > 2$. Asimismo, P_∞ tiende a 0 cuando $p \rightarrow p_c$.

De la forma de escaleo para $n_s(p)$ se deduce que tanto P_∞ como $\langle s \rangle$ siguen leyes de

potencia cuando $p \rightarrow p_c$.

$$\langle s \rangle \sim |p_c - p|^{-\gamma} P_\infty, \quad p > p_c \quad (2.21)$$

$$\sim (p - p_c)^\beta \quad (2.22)$$

donde los exponentes cumplen las siguientes relaciones de escala:

$$\gamma = \frac{3 - \tau}{\sigma} \quad (2.23)$$

$$\beta = \frac{\tau - 2}{\sigma} \quad (2.24)$$

Los exponentes β , ν y γ desempeñan un papel crucial al describir el comportamiento crítico de las cantidades asociadas a la transición de percolación, siendo denominados exponentes críticos. Al igual que en los fenómenos críticos en equilibrio, la percolación exhibe la universalidad en el comportamiento crítico y los exponentes. Esta propiedad universal es característica de las transiciones de fase, donde el parámetro de orden desaparece de manera continua en el punto crítico, marcando una transición de fase de segundo orden. Así, el comportamiento de ley de potencia y las funciones singulares observadas en el umbral de percolación representan un ejemplo típico de transición de fase crítica. En este contexto, la presencia de una estructura global conexas, que indica el inicio de una fase macroscópicamente ordenada, se anticipa mediante grandes fluctuaciones en las propiedades estadísticas del sistema. En el punto crítico, cuando estas fluctuaciones alcanzan el tamaño del sistema, el orden macroscópico se magnifica y el sistema ingresa a una nueva fase [25].

Es importante destacar que los valores exactos de los exponentes críticos no están vinculados a los detalles específicos del modelo de percolación, sino que dependen exclusivamente de la dimensión del sistema (d) y de las simetrías del parámetro de orden. Por lo tanto, aunque el valor preciso de p_c varíe con la geometría de la red, los exponentes críticos mantienen su independencia con respecto a ella. Esta independencia también se extiende al tipo de percolación, ya sea de enlaces o de sitios.

Además de los exponentes β , ν y γ , existen otros exponentes críticos, como τ , σ y α , que caracterizan la distribución del tamaño de los clusters de percolación. A pesar de su diversidad, existen relaciones interdependientes entre estos exponentes, de modo que conocer solo dos de ellos permite derivar los restantes.

2.7 Radio de los clusters y dimensión fractal

Los fractales son objetos irregulares que presentan invariancia de escala, esto es, su estructura básica se repite a diferentes escalas (lucen siempre iguales ante un zoom) [26]. En la naturaleza existen muchos ejemplos de fractales (figura 2.4). Matemáticamente, la propiedad más importante de un objeto fractal es que su dimensión métrica fractal es un número no entero menor que su dimensión euclídea. Si consideramos un cubo, se tiene



Figura 2.4: Geometría fractal en la estructura de un brócoli romanesco (*Brassica oleracea* var. *botrytis*).

que su masa escala con el cubo de la longitud de sus lados, un cuadrado escala con el cuadrado de la longitud de sus lados y la masa de una recta escala con su longitud; o sea $M \propto L^d$, donde d es la dimensión euclídea. En el caso de un fractal, por el contrario, se tiene que $M(L) \propto L^{d_f}$ donde d_f es un número no entero. Este parámetro d_f recibe el nombre de *dimensión fractal*. Benoit Mandelbrot introdujo la "geometría fractal" como una descripción unificadora de fenómenos naturales que no son uniformes pero que obedecen leyes de potencia de esta forma con dimensiones d no enteras [26].

En particular, el primer cluster percolante que aparece en $p = p_c$ es un fractal. Si se analiza cómo escala el tamaño del cluster infinito M con el tamaño del sistema L , se obtiene en general que $M(L) \propto L^{d_f}$, con d_f un real menor a la dimensión de la red. En la figura 2.5 se observa claramente la estructura fractal del cluster percolante: dentro del cluster se forman huecos que a su vez contienen otros clusters, produciéndose estos huecos en diferentes escalas.

Este comportamiento fractal desaparece para valores grandes de L y $p > p_c$: en general se observa que la longitud de correlación es tal que $M(L) \propto L^d$ para $L < \xi$ y $M(L) \propto L^d$ para $L > \xi$.

Dado que los clusters son objetos con geometrías irregulares para describirlos se utiliza el radio de giración R_s , definido como

$$R_s^2 = \frac{\sum_{i=1}^s |r_i - r_0|^2}{s} \quad (2.25)$$

donde r_0 es el centro de masa del cluster y r_i es la posición del i -ésimo sitio. La suma se hace sobre todos los sitios del cluster de tamaño s . Observemos que si se coloca el origen de coordenadas en el centro de masa del cluster $r_0 = 0$, podemos relacionar R_s con la distancia promedio entre dos sitios pertenecientes al mismo cluster:

$$2R_s^2 = \sum_{ij} \frac{|r_i - r_j|^2}{s^2} \quad (2.26)$$

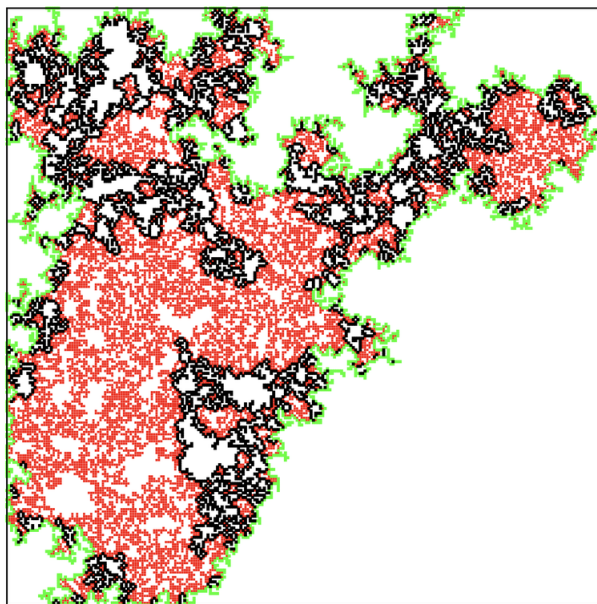


Figura 2.5: Estructura fractal del cluster percolante de un modelo que describe la fotosíntesis en bacterias, ligeramente por encima del umbral de percolación. Los sitios en el perímetro están de color verde, los sitios en el "cuerpo" (bulk) del cluster se aprecian en color rojo y en color blanco y negro los sitios adyacentes a sitios vacíos. Si bien esta imagen corresponde a un modelo que describe un fenómeno totalmente distinto al de este trabajo, es interesante apreciar como se forma la estructura fractal del cluster percolante en un sistema cualquiera. Imagen extraída de [27].

Dado que para un cluster específico R_s^2 es la distancia promedio al cuadrado entre dos sitios del cluster, dado que un sitio pertenece con probabilidad $n_s s$ a un s -cluster y dado que este está conectado a s sitios, entonces el promedio de R_s^2 sobre todos los clusters da el cuadrado de la distancia de correlación 2.14:

$$\xi^2 = \frac{2 \sum_s R_s^2 s^2 n_s}{\sum_s s^2 n_s} \quad (2.27)$$

De esta forma, la longitud de correlación es proporcional al radio de aquellos clusters que más contribuyen al segundo momento (la varianza) de la distribución del tamaño de los clusters cerca del umbral de percolación. Recordemos que, en el umbral de percolación, los clusters que más contribuyen a la distribución del tamaño de clusters n_s eran aquellos de tamaño comparables a s_ξ . Ahora podemos decir que la longitud de correlación es simplemente el radio de aquellos clusters que más contribuyen a las divergencias. Hay una única longitud ξ dominando el comportamiento crítico.

Deseamos estimar como varía el radio R_s con s en el umbral de percolación. Como $M \propto L^{d_f}$, es natural asumir que $s \propto R_s^{d_f}$. Se puede demostrar que d_f y ν se relacionan de la forma

$$\frac{1}{d_f} = \sigma \nu \quad (2.28)$$

y también la relación de escala que relaciona ν con el resto de los exponentes

$$d\nu = \gamma + 2\beta = 2 - \alpha = \frac{\tau - 1}{\alpha} \quad (2.29)$$

En dos dimensiones, la dimensión d_f da 1.896 y en tres dimensiones da aproximadamente 2.5. Se demuestra entonces que los clusters finitos en el umbral de percolación son fractales en el sentido de que su dimensión fractal d_f es menor que la dimensión d de la red. Puede verse que para $p > p_c$, $d_f = d$: los clusters que se forman para $p > p_c$ no son fractales sino objetos "normales", cuya dimensión fractal es igual a su dimensión euclídea, dado que $s \gg s_\xi$.

Notemos que si la longitud de la red es rescaleada por un factor b (proceso de renormalización), entonces [28]

$$M\left(\frac{L}{b}\right) = \left(\frac{L}{b}\right)^{d_f} = \frac{L^{d_f}}{b^{d_f}} = \frac{M(L)}{b^{d_f}} \quad (2.30)$$

por lo que la masa se reduce en un factor b^{d_f} . Podemos utilizar esto para encontrar como escala la masa del cluster percolante $M(L, \xi)$. Rescalamos las distancias por un factor b , es decir $L \rightarrow \frac{L}{b}$ y $\xi \rightarrow \frac{\xi}{b}$. Se tiene

$$M(L, \xi) = b^{d_f} M\left(\frac{L}{b}, \frac{\xi}{b}\right) \quad (2.31)$$

$$= b^{d_f} b^{d_f} M\left(\frac{L}{b^2}, \frac{\xi}{b^2}\right) \quad (2.32)$$

$$\vdots \quad (2.33)$$

$$= b^{ld_f} M\left(\frac{L}{b^l}, \frac{\xi}{b^l}\right) \quad (2.34)$$

En el punto crítico $p = p_c$, $\xi \propto |p - p_c|^{-\nu} \rightarrow \infty$, con lo cual $\frac{\xi}{b^l} \rightarrow \infty$. Si detenemos el proceso de renormalización cuando $b^l = L$ encontramos

$$M(L, \xi) = b^{ld_f} M\left(\frac{L}{b^l}, \frac{\xi}{b^l} = \infty\right) \quad (2.35)$$

$$= L^{d_f} M(1, \infty) \quad (2.36)$$

$$= L^{d_f} \quad (2.37)$$

Esto demuestra que la autosimilitud se expresa matemáticamente en el comportamiento de la ley de potencia. Supongamos $p > p_c$ con $\xi \propto |p - p_c|^{-\nu} < \infty$ con

$$M(L, \xi) = b^{ld_f} M\left(\frac{L}{b^l}, \frac{\xi}{b^l}\right) \quad (2.38)$$

Ahora debemos considerar dos casos dependiendo del cociente $\frac{L}{\xi}$

- i. Si $\frac{L}{\xi} \ll 1 \iff L \ll \xi$ (lo cual siempre sucede en $p = p_c$) detenemos el proceso

de renormalización cuando se alcanza la menor longitud $b^l = L$ y "recuperamos"

$$M(L, \xi) = L^{d_f} M\left(1, \frac{\xi}{L}\right) = L^{d_f} M(1, \infty) \propto L^{d_f} \quad (2.39)$$

ii. Si $\frac{L}{\xi} \gg 1 \iff L \gg \xi$ detenemos el proceso de iteración cuando $b^l \xi$ y encontramos

$$M(L, \xi) = \xi^{d_f} M\left(\frac{L}{\xi}, 1\right) \propto \xi^{d_f} \left(\frac{L}{\xi}\right)^{d_f} = \xi^{d_f - d} L^d \quad (2.40)$$

dado que para un sistema uniforme $M\left(\frac{L}{\xi}, 1\right) \propto \left(\frac{L}{\xi}\right)^d$

2.8 Escaleo con el tamaño finito

Todas las definiciones que hemos visto hasta ahora corresponden a redes de tamaño infinito que son imposibles de simular. Es de interés describir como varían los resultados obtenidos para redes de tamaño finito. Consideremos el problema de percolación para $p \neq p_c$ donde la longitud de correlación es finita

$$\xi \propto |p - p_c|^{-\nu} \implies |p - p_c| \propto \xi^{-\frac{1}{\nu}} \quad (2.41)$$

El tamaño del cluster infinito para $p > p_c$ puede ser expresado entonces en términos de la longitud de correlación finita

$$P(p) \propto (p - p_c)^\beta \propto \xi^{-\frac{\beta}{\nu}} \quad (2.42)$$

y similarmente para el tamaño promedio de los clusters

$$\langle s \rangle \propto |p - p_c|^{-\gamma} \propto \xi^{\frac{\gamma}{\nu}} \quad (2.43)$$

Estos son los resultados obtenidos para redes infinitas con $L = \infty$. ¿Qué sucede para redes de tamaño finito cuando $L < \infty$? La respuesta es que nada cambia mientras $L \gg \xi$. La única longitud relevante es la longitud de correlación ξ . Sin embargo, cuando $L \ll \xi$, la longitud de escala esta dada por L . Siendo P la densidad del cluster gigante (básicamente,

la cantidad de sitios que pertenecen al cluster por sitio de red) se tiene

$$P(L, \xi) = \rho(L, \xi) \quad (2.44)$$

$$= \frac{M(L, \xi)}{L^d} \quad (2.45)$$

$$= \begin{cases} L^{d_f-d} & L \ll \xi \\ \xi^{d_f-d} & L \gg \xi \end{cases} \quad (2.46)$$

$$= \begin{cases} L^{-\frac{\beta}{\nu}} & L \ll \xi \\ \xi^{-\frac{\beta}{\nu}} & L \gg \xi \end{cases} \quad (2.47)$$

$$= \xi^{-\frac{\beta}{\nu}} f\left(\frac{L}{\xi}\right) \quad (2.48)$$

donde la función de escala f se define como

$$f\left(\frac{L}{\xi}\right) = \begin{cases} \left(\frac{L}{\xi}\right)^{-\frac{\beta}{\nu}} & \frac{L}{\xi} \ll 1 \\ \text{constante} & \frac{L}{\xi} \gg 1 \end{cases} \quad (2.49)$$

De manera similar, para el tamaño promedio de los clusters deberíamos esperar

$$\langle s \rangle \propto \begin{cases} L^{-\frac{\gamma}{\nu}} & L \ll \xi \\ \xi^{\frac{\gamma}{\nu}} & \frac{L}{\xi} \gg 1 \end{cases} \quad (2.50)$$

Generalmente, si tenemos una magnitud X , $X \propto |p - p_c|^{-x} \propto \xi^{\frac{x}{\nu}}$ para $L \gg \xi$, esperaríamos

$$X(L, \xi) \propto \begin{cases} L^{\frac{x}{\nu}} & L \ll \xi \\ \xi^{\frac{x}{\nu}} & \frac{L}{\xi} \gg 1 \end{cases} \quad (2.51)$$

$$= \xi^{\frac{x}{\nu}} x_1\left(\frac{L}{\xi}\right) \quad (2.52)$$

o, en términos de probabilidades de ocupación

$$X(L, p) = |p - p_c|^{-x} x_2(L^{\frac{1}{\nu}}(p - p_c)) \quad (2.53)$$

Lo importante a destacar es que estudiando el escaleo con el tamaño finito, o sea, estudiando X como función de tamaños L de sistemas finitos en $p = p_c$, es posible calcular el exponente $\frac{x}{\nu}$. Para redes de tamaño finito, el mayor valor que podrá adoptar ξ será $\xi \sim L$. Este valor corresponde entonces al máximo que podrá adoptar $\langle s \rangle$, esto es

$$\langle s \rangle \sim L^{\frac{\gamma}{\nu}} \sim N^{\frac{\gamma}{\nu d}} \quad (2.54)$$

2.9 Exponentes críticos

Los exponentes críticos que fueron definidos a lo largo de la sección anterior toman diferentes valores dependiendo de la dimensión y la topología de la red. Abajo se encuentra una lista con los valores que estos exponentes críticos toman para una red cuadrada de dos dimensiones, que es el caso que trataremos en este trabajo.

Exponente	Magnitud	2D	$d_c(d > 6)$
α		$-2/3$	-1
β	P_∞	$5/36$	1
γ	$\langle s \rangle$	$43/18$	1
ν	ξ	$4/3$	$1/2$
σ	s_ξ	$36/91$	$1/2$
τ	n_s	$187/91$	$5/2$
$d_f(p = p_c)$	Dimensión fractal	$91/48$	4
$\gamma/\nu d$	Escaleo de $\langle s \rangle$ con N	0.895833	$1/3$

Capítulo 3

Modelo de Greenberg-Hastings

3.1 Los autómatas celulares como herramienta de modelado

Los autómatas celulares (cellular automaton CA) son modelos matemáticos y computacionales para sistemas dinámicos que evolucionan en pasos discretos. Son definidos sobre arreglos regulares de celdas del mismo tipo y pueden ser finitos o infinitos en extensión. Cada celda puede tener un conjunto finito de estados discretos que evolucionan en pasos temporales discretos. En general, las reglas para la evolución dependen de los estados de los vecinos cercanos.

Un ejemplo famoso que ayuda a ilustrar el concepto es el "Juego de la Vida" de J.H. Conway [29]. En él, las celdas de una red que puede ser finita o infinita poseen dos estados: las celdas pueden estar "vivas" o "muertas". Se empieza con un estado inicial arbitrario y las celdas evolucionan en pasos discretos (turnos) de la siguiente manera:

- Nace: una célula pasa de estar "muerta" en un turno a "viva" en el siguiente si tiene exactamente tres células vecinas vivas
- Muere: una célula puede morir si pasa alguna de las siguientes:
 - Sobrepoblación: si tiene mas de tres células vivas vecinas.
 - Aislamiento: si tiene sólo una célula vecina viva o ninguna.
- Vive: la célula se mantiene viva si tiene dos o tres células vecinas vivas

Estas reglas se aplican iterativamente a cada generación del tablero, lo que lleva a la evolución de patrones complejos a partir de estados iniciales simples. El juego de la vida ha sido objeto de estudio en campos como la teoría de la complejidad, la informática y la biología teórica debido a su capacidad para generar comportamientos complejos a partir de reglas simples. También ha sido utilizado como una herramienta de modelado en diversos campos, incluyendo la evolución biológica y la auto organización en sistemas complejos [30].

Los modelos de autómatas celulares han sido aplicados a múltiples problemas físicos concretos.

3.2 Autómatas de Greenberg-Hastings

En 1978, James M. Greenberg y Stuart Hastings introdujeron un CA para modelar medios excitables, es decir, sistemas dinámicos no lineales con la capacidad de propagar una perturbación de cualquier tipo y que no permiten el paso de una nueva perturbación durante un periodo de tiempo, llamado tiempo refractario [31]. El modelo se definió originalmente en una red bidimensional, donde cada sitio tiene asociada una variable de tres estados x_i . Cada sitio está conectado solamente a sus vecinos más cercanos y la variable de estado puede tomar los valores $x_i = 0$ (estado quiescente), $x_i = 1$ (estado excitado) y $x_i = 2$ (estado refractario).

Se comienza con una distribución aleatoria de los valores de las variables de estado iniciales, y la dinámica evoluciona en pasos temporales discretos de acuerdo a las siguientes reglas de transición:

- Si un sitio está excitado en el tiempo t , $x_i(t) = 1$, entonces en el paso temporal siguiente pasa a estar en el estado refractario, $x_i(t + 1) = 2$
- Si un sitio está en el estado refractario en el tiempo t , $x_i(t) = 2$, en el paso siguiente estará en el estado quiescente, $x_i(t + 1) = 0$
- Si un sitio está en el estado quiescente en el tiempo t , $x_i(t) = 0$, y al menos un vecino está en el estado excitado, $x_j(t) = 1$, entonces en el paso siguiente cambia al estado excitado, $x_i(t + 1) = 1$. Caso contrario, permanece en el estado de reposo, $x_i(t + 1) = 0$

A través de este trabajo, Greenberg y Hastings mostraron como las inhomogeneidades espaciales en un medio excitable tienden a llegar a un estado ordenado, produciendo patrones espaciales que oscilan periódicamente en el tiempo. Numerosas variaciones del modelo original arriba descrito han sido propuestas desde la publicación del trabajo original, ya sea para analizar las propiedades generales de los medios excitables o para estudiar sistemas físicos específicos. En la siguiente sección nos enfocamos en las aplicaciones del modelo a la actividad neuronal.

3.3 El modelado de la actividad neuronal y la emergencia de la criticalidad

En un intento de estudiar la relación entre la arquitectura neuronal y las fluctuaciones espontáneas de actividad neuronal, Haimovici y coautores [16] introdujeron una variación estocástica del modelo de Greenberg-Hastings y lo aplicaron sobre una estructura de conexiones neuronales obtenida empíricamente por Hangmann *et al.* [22]. En dicho trabajo se encontraron características de mundo pequeño y alta conectividad. La distribución del peso de las conexiones se pueden representar bien por una función exponencial.

El modelo también incorpora algunos aspectos que son importantes desde el punto de vista neurofisiológico y que pueden tener consecuencias dinámicas relevantes. Una de ellas

es la presencia de una probabilidad de excitación espontánea, es decir, cada sitio (que puede representar una sola neurona o un grupo de neuronas) tiene una pequeña probabilidad de disparar r_1 en ausencia total de estímulo. Tal ingrediente descarta completamente la posibilidad de tener un estado absorbente inactivo.

En el modelo de Haimovici y colaboradores, las reglas originales del modelo de Greenberg-Hastings se reemplazan por las siguientes:

- Si un sitio está en el estado excitado en el tiempo t , $x_i(t) = 1$, entonces en el paso siguiente estará en el estado refractario, $x_i(t + 1) = 2$
- Si un sitio está en el estado refractario en el tiempo t , $x_i(t) = 2$, entonces en el paso siguiente estará en el estado de reposo, $x_i(t + 1) = 0$ con probabilidad r_2 y permanecerá en el estado refractario, $x_i(t + 1) = 2$, con probabilidad $1 - r_2$
- Si un sitio está en el estado de reposo en el tiempo t , $x_i(t) = 0$, entonces en el paso siguiente estará en el estado excitado, $x_i(t + 1) = 1$, con probabilidad r_1 o si $\sum_j \omega_{ij} \delta(x_j(t), 1) > T$, donde T es el umbral de excitación y $\delta(x, y)$ es la función delta de Kroenecker. Caso contrario, el sitio permanece en el estado de reposo, $x_i(t + 1) = 0$.

La suma sobre j se ejecuta sobre todos los vecinos del nodo i . En la figura 3.1 se esquematizan las reglas de transición.

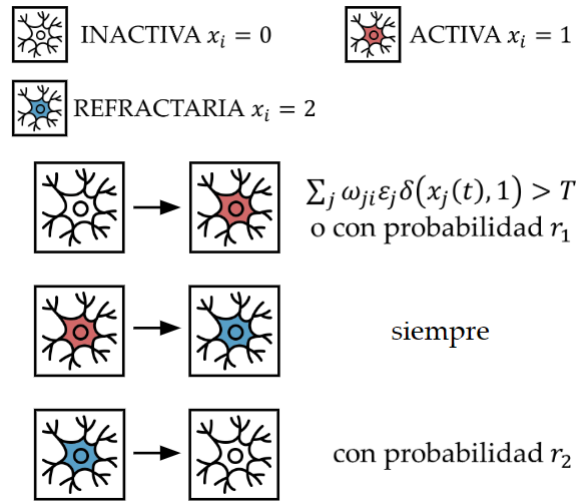


Figura 3.1: Reglas de evolución del modelo modificado de Greenberg-Hastings, adaptado por Haimovici *et al.*.

Se observó [16] que este modelo presenta diferentes fases dinámicas, dependiendo del valor del umbral T , que por lo tanto actúa como un parámetro de control. Si T es pequeño, incluso las conexiones más débiles w_{ij} pueden propagar la actividad, favoreciendo altos niveles de actividad global. Los altos valores de T , por el contrario, inhiben la propagación de la señal, excepto a través de las conexiones más fuertes y por lo tanto la actividad global se reduce. Se puede obtener una caracterización cuantitativa de los regímenes dinámicos

a través de las estadísticas de tamaño de los clusters activos en el estado estacionario durante un tiempo suficiente. Los clusters se definen como conjuntos de nodos conectados que están activos simultáneamente. Luego, el tamaño de los diferentes clusters se puede calcular en cada paso de tiempo. Esto permite el uso de las herramientas de la teoría de percolación analizadas en el capítulo 3. En el ejemplo de la figura 3.2 demuestra el comportamiento típico del promedio del primer y segundo mayor cluster en función de T [17]. Los resultados recuerdan fuertemente una transición de fase de segundo orden

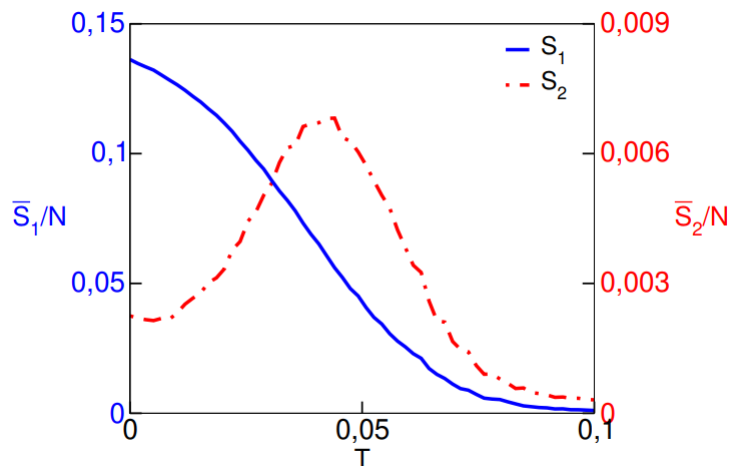


Figura 3.2: Comportamiento típico de promedio del cluster gigante S_1 y del segundo mayor cluster S_2 en función de T en el modelo de Hamovici *et al.* definido en el conectoma humano [16]. Imagen extraída de [17].

a cierto valor crítico T_c . Así, el cluster dinámico más grande actúa como el parámetro de orden correspondiente. Este comportamiento sugiere un fenómeno crítico del tipo percolación y está de acuerdo con las observaciones empíricas en los experimentos de fMRI en seres humanos [14]. Consistentemente, diferentes cantidades también exhiben el comportamiento esperado en un fenómeno crítico. Por ejemplo, se observó que la longitud de correlación escala con el tamaño del cluster en el punto crítico [16], también de acuerdo con los resultados experimentales de RSN [32]. Además, la distribución del tamaño de los clusters en T_c exhibe un comportamiento de ley de potencia, otra vez de acuerdo con las observaciones de fMRI [17]. Finalmente, la variabilidad de la duración de la actividad exhibe un máximo en T_c .

Pero la información más relevante que se puede extraer del trabajo de Haimovici *et al.*, es que muchas observaciones experimentales asociadas con la RSN se manifiestan en el modelo sólo en el punto crítico. Por lo tanto, los resultados mencionados anteriormente indican fuertemente la criticalidad como una condición necesaria para la emergencia de varias características relevantes de la dinámica del cerebro [17].

Parte II

Implementación y Resultados

Capítulo 4

Implementación del algoritmo de Watts-Strogatz en dos dimensiones

4.1 Construcción de la red

Supongamos que se tiene una red cuadrada de $L^2 = N$ nodos. Contando las filas i y columnas j de la red desde 0 hasta $L-1$, se le asigna al nodo (i, j) un índice z dado por $z = Li + j$, como se ve en la figura 4.1.

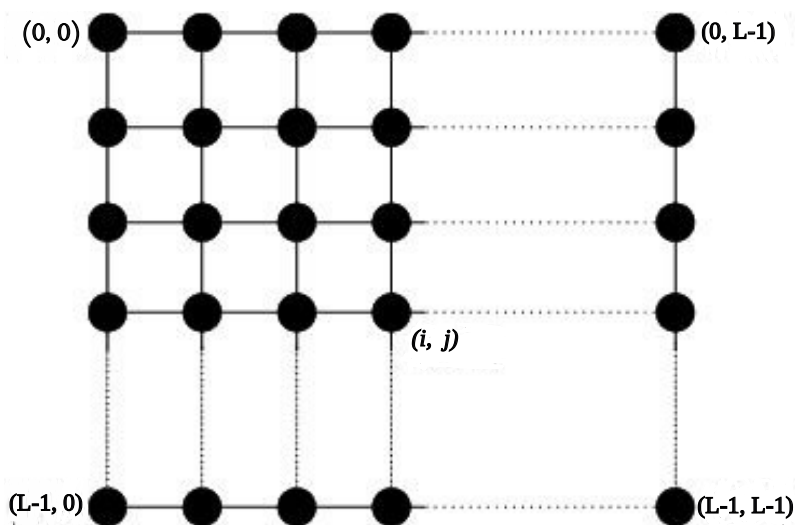


Figura 4.1: Asignación de índices para los nodos de la red cuadrada.

Notemos que con estos índices se pueden formar vectores de N componentes donde cada componente refiere a un nodo de la red. El mapeo inverso para llevar del índice z de cada nodo a sus coordenadas (i, j) de la red está dado por

$$i = \frac{z}{L} \quad (4.1)$$

$$j = z \bmod(L) \quad (4.2)$$

donde la división entre z y L es entera. En la figura 4.2 se aprecia como se construye

el vector de componentes z .

Con este vector de dimensión N , $(0, 1, \dots, N - 1)$, en el cual cada índice corresponde a un nodo de la red cuadrada se construye la matriz de adyacencia de la red. Esta matriz $N \times N$ está definida de la siguiente manera:

$$A_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } z = k \text{ y } z = l \text{ estan conectados} \\ 0 & \text{si } z = k \text{ y } z = l \text{ no estan conectados} \end{cases} \quad (4.3)$$

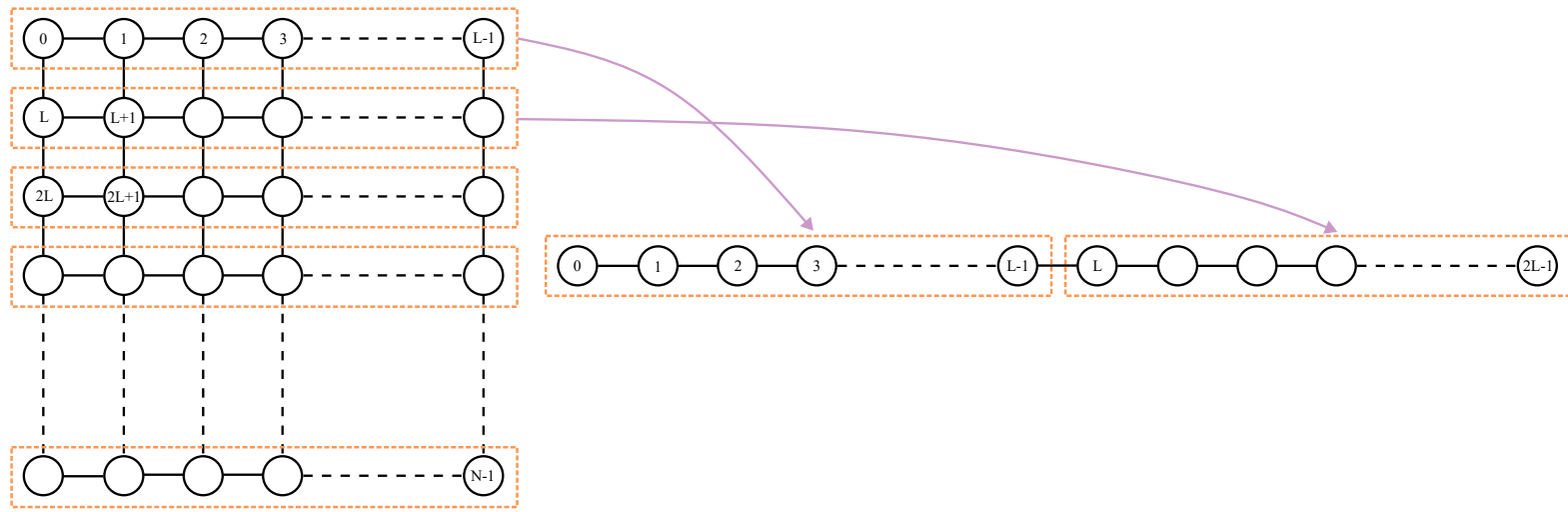


Figura 4.2: Asignación del valor de z dado por $z = Li + j$ a cada nodo de la red cuadrada.

El desafío que se presenta ahora es poder escribir la matriz de adyacencia de la red con conexiones a k primeros vecinos, teniendo en cuenta que deben cumplirse condiciones periódicas de contorno. Se definen dos distancias entre los nodos z_k, z_l que dependen de sus coordenadas (i_k, j_k) y (i_l, j_l) :

$$\begin{cases} d_i = |i_k - i_l| \\ d_j = |j_k - j_l| \end{cases} \quad (4.4)$$

d_i y d_j dan cuenta de la distancia euclídea entre filas o columnas respectivamente entre dos nodos, como se ve en la figura 4.3. La distancia entre dos nodos está dada por $\sqrt{d_i^2 + d_j^2}$. En la figura 4.4 se pueden ver las distancias hasta sextos vecinos desde un nodo de la red, así como la localización de estos en la red bidimensional.

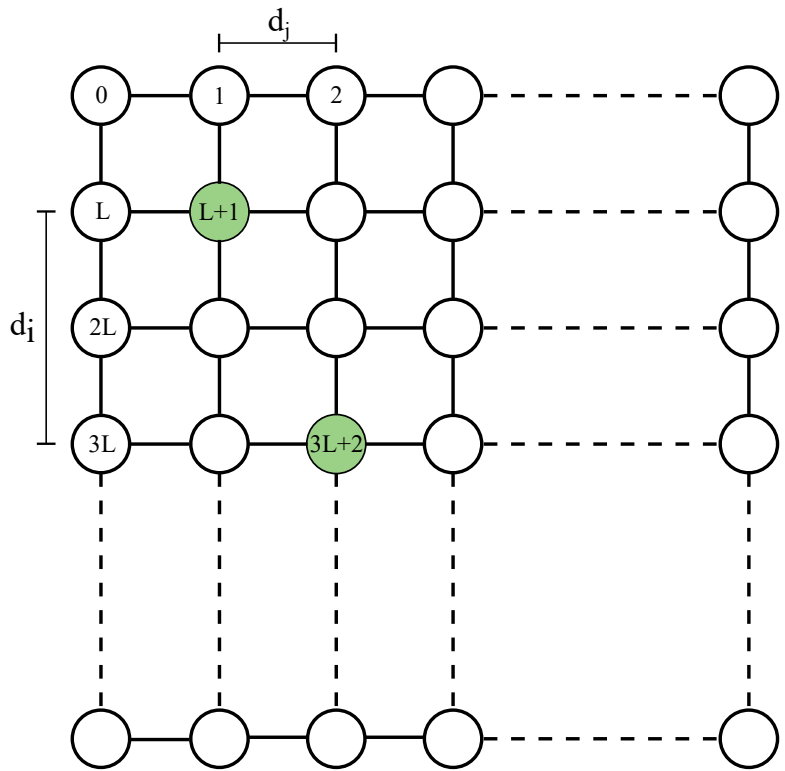


Figura 4.3: Distancias d_i y d_j entre dos nodos. Los números dentro de los círculos corresponden al valor de z .

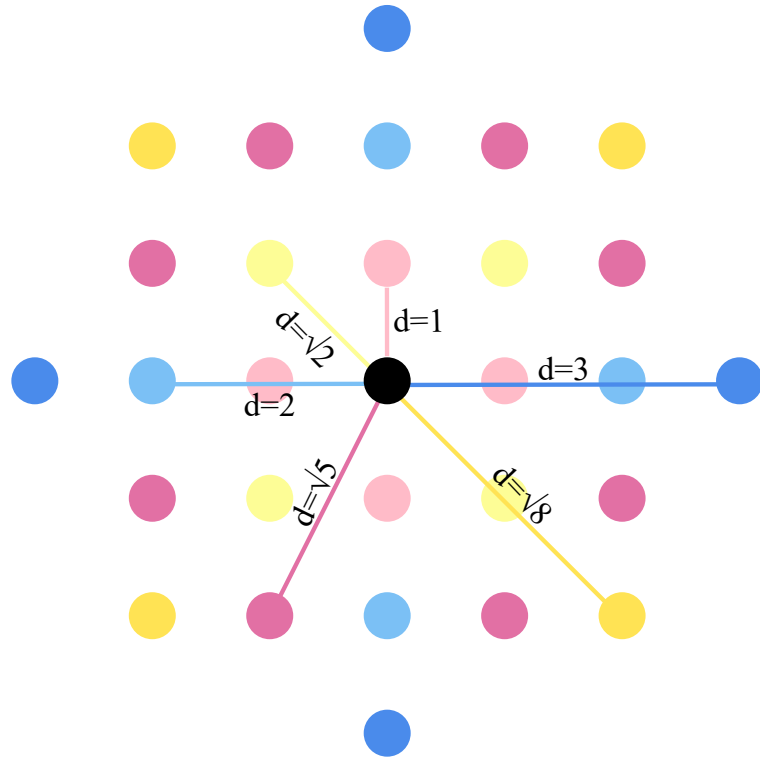


Figura 4.4: Primeros a sextos vecinos de un nodo arbitrario junto con las distancias entre ellos.

Notemos que debido a las condiciones periódicas de contorno, esta distancia puede ser grande aunque dos nodos sean vecinos cercanos. Tomemos por ejemplo los nodos $z = 0$ y $z = N - 1$. Ambos son segundos vecinos uno del otro gracias a las condiciones periódicas de contorno como se puede ver en la figura 4.5(b), pero tienen una distancia $d_i = d_j = L - 1$ entre sus filas y columnas, como se ve en la figura 4.6. Comparando estas figuras se puede ver como son las conexiones hasta terceros vecinos para el nodo $z=0$ sobre la superficie del toro y en la red bidimensional en el plano.

Analicemos el caso de dos nodos que son primeros vecinos entre sí. Si son primeros vecinos, entonces $d_i = 0$ y $d_j = 1$, o bien $d_i = 1$ y $d_j = 0$. También puede pasar que $d_i = L - 1$ y $d_j = 0$, como es el caso de los nodos $z=0$ y $z=N-L$ (figuras 4.5(b) y 4.6) o al revés; $d_i = 0$ y $d_j = L - 1$ como los nodos $z = 0$ y $z = L - 1$ que se ven en las figuras 4.5(b) y 4.6. Si se cumplen cualquiera de estos casos, entonces dos nodos son primeros vecinos entre sí. Resumiendo, se tiene que dos nodos son primeros vecinos si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $d_i = 0$ y $d_j = 1$
- $d_i = 1$ y $d_j = 0$
- $d_i = L - 1$ y $d_j = 0$
- $d_i = 0$ y $d_j = L - 1$

Para conexiones a segundos vecinos, se encara el problema de la misma manera. Dos nodos son segundos vecinos entre ellos si se cumplen algunas de las siguientes condiciones (entre paréntesis se ejemplifican nodos que cumplen cada una de las condiciones abajo enumeradas, se puede chequear que estas se cumplen observando las figuras 4.5 y 4.6):

- $d_i = 1$ y $d_j = 1$ (Por ejemplo, los nodos $z = 0$, $z = L + 1$)
- $d_i = L - 1$ y $d_j = 1$ (Nodos $z = 0$ y $z = N - L + 1$)
- $d_i = 1$ y $d_j = L - 1$ (Nodos $z = 0$ y $z = 2L - 1$)
- $d_i = L - 1$ y $d_j = L - 1$ (Nodos $z = 0$ y $z = N - 1$)

Para conexiones a terceros vecinos se procede de igual manera que para las conexiones a primeros vecinos, solo que ahora las distancias serán $d_{i,j} = 2$ o $d_{i,j} = L - 2$. Se continúa con este razonamiento para conexiones a grados más altos. Naturalmente, a medida que aumenta el grado de los nodos el proceso se vuelve más largo y engorroso, ya que aumenta el número de vecinos y la cantidad de condiciones que dos nodos pueden cumplir para que sean vecinos. Por ejemplo, se puede ver que se debe cumplir alguna de estas condiciones para que dos nodos sean vecinos de cuarto grado:

- $d_i = 2$ y $d_j = 1$
- $d_i = 1$ y $d_j = 2$

- $d_i = L - 1$ y $d_j = 2$
- $d_i = 2$ y $d_j = L - 1$
- $d_i = 1$ y $d_j = L - 2$
- $d_i = L - 2$ y $d_j = 1$
- $d_i = L - 1$ y $d_j = L - 2$
- $d_i = L - 2$ y $d_j = L - 1$

En este trabajo se llegó a programar hasta conexiones a séptimos vecinos, lo que da un grado $k = 36$, pero finalmente sólo fue necesario usar hasta sextos vecinos, lo que corresponde a un grado $k = 28$.

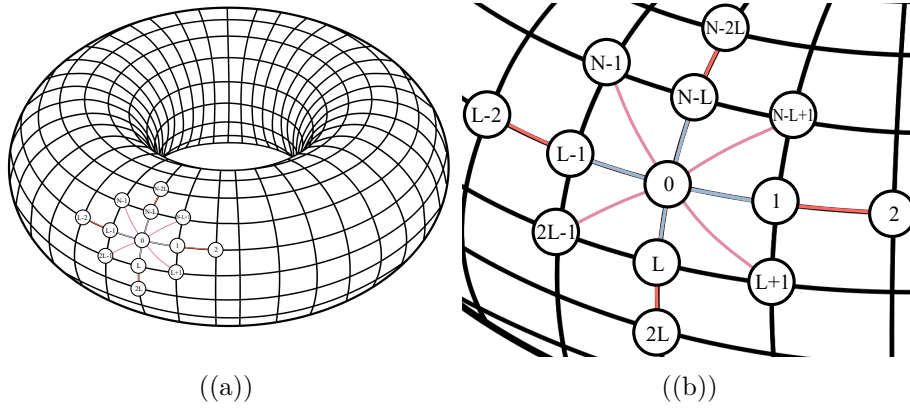


Figura 4.5: (a) Conexiones hasta terceros vecinos para el nodo $z = 0$ sobre la superficie del toro. (b) Zoom de la figura (a).

De esta forma se conformó la matriz de adyacencia: para una red con conexiones a k primeros vecinos, se calcularon las distancias arriba mencionadas para cada par de nodos y se observó si cumplían las condiciones también mencionadas arriba, si eran vecinos de orden k o menor se fijaba $A_{kl} = 1 = A_{lk}$, caso contrario esos elementos de matriz quedaban nulos.

Una vez que se tuvo la matriz de adyacencia de la red regular, se procedió a aplicar el algoritmo de Watts-Strogatz. Para desconectar dos nodos y conectar uno de ellos con otro aleatorio, basta con anular los elementos no nulos (A_{kl} y su simétrico A_{lk}) de la matriz de adyacencia asociados a estos nodos e igualar a uno los elementos de matriz asociados a la nueva conexión. Dicho de otra forma, para cada elemento no nulo A_{jk} (asociado a la conexión entre los nodos $z = j$ y $z = k$) se sortea un número entre 0 y 1. Si el número sorteado es menor a la probabilidad π de reconexión, entonces se anulan los A_{jk} y A_{kj} y se sortea otro nodo aleatorio $z = l$, cuidando que el nodo que resulte de este sorteo no corresponda a un nodo ya conectado con el primero $z = j$. Si esto se cumple, se fija $A_{jl} = 1 = A_{lj}$, caso contrario se sortea otro nodo. Procediendo de esta forma para todos

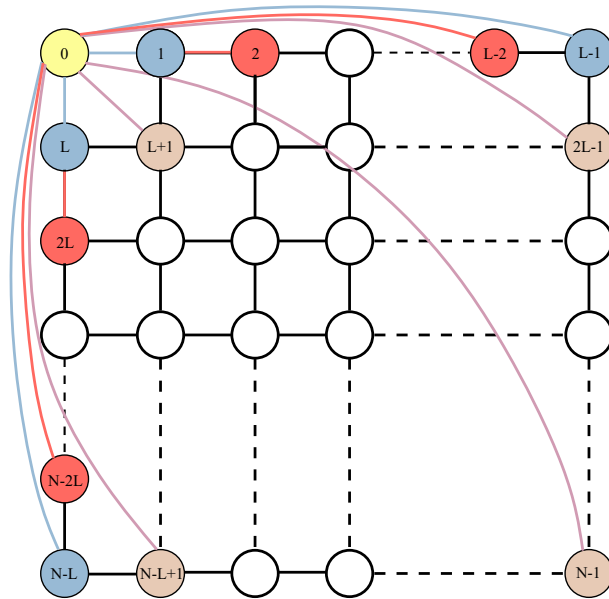


Figura 4.6: Conexiones a primeros, segundos y terceros vecinos en colores azul, rosa y rojo respectivamente para el nodo $z = 0$.

los elementos de la matriz de adyacencia de la red regular se obtuvo finalmente la matriz de adyacencia asociada a la red de Watts-Strogatz.

Verificar que la red ordenada esté correctamente implementada no es complicado de realizar. En las etapas preliminares se verificó que la matriz de adyacencia esté bien calculada para redes pequeñas, comparando la matriz que arroja el programa con las calculadas a mano para la red regular. También se realizaron gráficos de la red ordenada con los nodos conectados arrojados por el programa para verificar que estuviera realizando las conexiones de manera correcta para distintos valores de k .

4.2 Propiedades de mundo pequeño

Para verificar que el algoritmo de Watts-Strogatz esté bien implementado se estudió el comportamiento de el camino medio $\frac{\langle l \rangle_\pi}{\langle l \rangle_0}$ y el coeficiente de clustering $\frac{\langle C \rangle_\pi}{\langle C \rangle_0}$ normalizados de la red, donde $\langle l \rangle_\pi$ y $\langle C \rangle_\pi$ son el camino medio y el coeficiente de clustering de la red para un valor π de probabilidad de reconexión. En particular, $\langle l \rangle_0$ y $\langle C \rangle_0$ corresponden a estos valores para un valor de probabilidad $\pi = 0$.

Sabemos que para una red de mundo pequeño, el camino medio experimenta una caída drástica conforme aumenta π , mientras que el coeficiente de clustering mantiene un valor elevado, cayendo abruptamente para valores grandes de π . Además, de acuerdo con [18], el camino medio depende fuertemente del tamaño de la red, escalando linealmente con N para pequeños valores de π y logarítmicamente para valores de π grandes; mientras que el coeficiente de clustering deja de depender de N para valores grandes de N . Si la red reproduce estas propiedades de mundo pequeño esperadas, es indicio de que el algoritmo

está funcionando correctamente. Graficando estas métricas para distintos tamaños de red se obtuvieron los resultados esperados, como se observa en la figura 4.7.

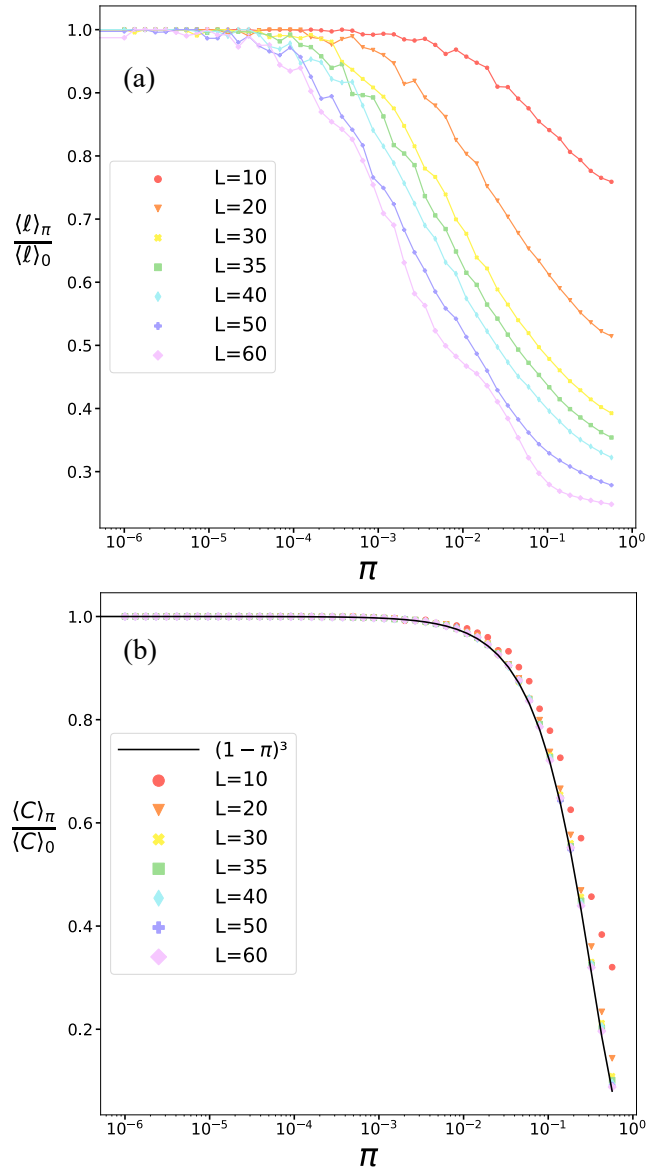


Figura 4.7: Propiedades topológicas de las redes generadas con el algoritmo de Watts-Strogatz para diferentes tamaños de red. (a) Camino medio. (b) Coeficiente de clustering

En la figura 4.7 se aprecia como el coeficiente de clustering normalizado tiende a $(1-\pi)^3$ cuando $N \rightarrow \infty$ tal como fue predicho en [18].

También se analizó cómo escala el camino libre medio con N , π y $\langle k \rangle$. De acuerdo con [18], el camino libre medio escala con N de la siguiente forma:

$$\langle l \rangle_\pi = \frac{N^{\frac{1}{d}}}{\langle k \rangle} f(\pi \langle k \rangle N) \quad (4.5)$$

donde $f(u)$ obedece

$$f(u) = \begin{cases} \text{const} & u \ll 1 \\ \frac{\ln(u)}{u} & u \gg 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

De esta forma, para valores grandes de N , se ve que:

$$\langle l \rangle_\pi \sim \frac{N^{\frac{1}{d}} \ln(N\pi \langle k \rangle)}{\langle k \rangle N\pi \langle k \rangle} \quad (4.7)$$

En particular, para $\pi = 0$ se tiene

$$\langle l \rangle_0 \sim \frac{N^{\frac{1}{d}}}{\langle k \rangle} f(0) \quad (4.8)$$

por lo que el camino medio normalizado queda

$$\frac{\langle l \rangle_\pi}{\langle l \rangle_0} \sim \frac{f(N\pi \langle k \rangle)}{f(0)} \propto f(N\pi \langle k \rangle) \quad (4.9)$$

Si se deja $\langle k \rangle$ fijo (para esta parte de testeo se eligió $\langle k \rangle = 12$) entonces las curvas del camino medio normalizado en función de $N\pi$ deben colapsar para valores suficientemente grandes de N . Esto es lo que se observa en el gráfico de la figura 4.8.

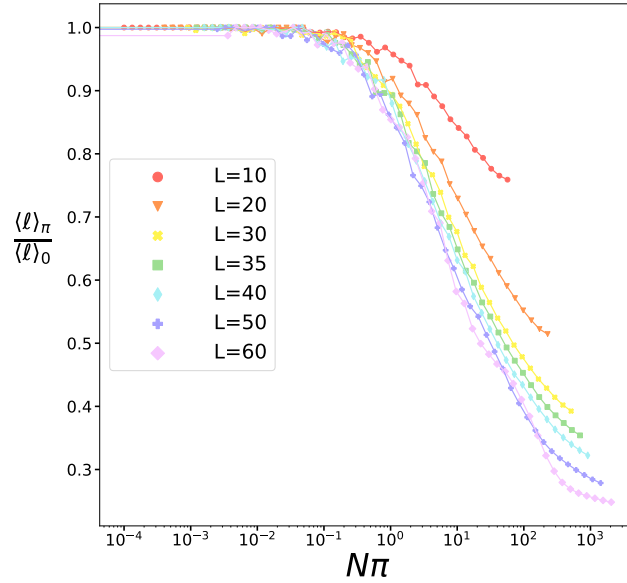


Figura 4.8: Camino medio normalizado en función de $N\pi$ para diferentes valores de L . Se observa que las curvas colapsan para valores suficientemente grandes de L .

El último test que se aplicó consiste en estudiar la dependencia con N del camino medio normalizado para el valor de probabilidad más alto que fue utilizado (aproximadamente $\pi \sim 0.6$). Tomando el valor de π mas grande y dejando $\langle k \rangle$ fijo se asegura que $\pi k N \gg 1$. Aplicando logaritmo a ambos lados de la ecuación 4.6 para $u \gg 1$ se tiene

$$\ln\left(\frac{\langle l \rangle_\pi}{\langle l \rangle_0}\right) \propto \ln(f(u)) = \ln(\ln(u)) - \ln(u) \quad (4.10)$$

Para $u \gg 1$, $\ln(u) \gg \ln(\ln(u))$. Graficando el camino medio normalizado en función de u para el valor de probabilidad más alto en escala logarítmica, deberíamos ver una dependencia lineal del camino medio con u , ya que

$$\ln\left(\frac{\langle l \rangle_\pi}{\langle l \rangle_0}\right) \propto -\ln(u) \quad (4.11)$$

En la figura 4.9 se puede apreciar dicho comportamiento.

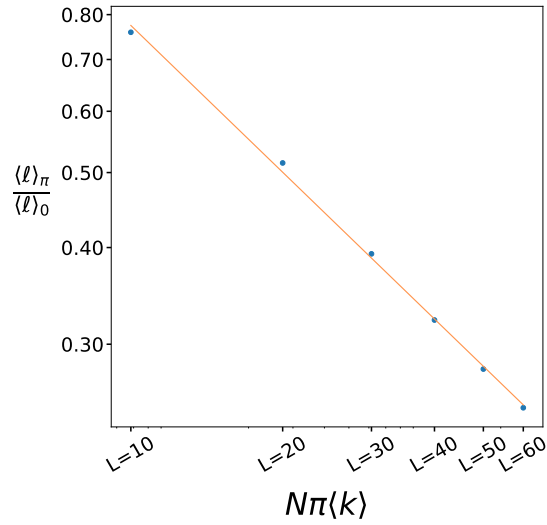


Figura 4.9: Camino medio normalizado para $\pi \sim 0.6$ y $\langle k \rangle = 12$ en función de $N\pi\langle k \rangle$ con escala logarítmica en ambos ejes.

Capítulo 5

Dinámica de Greenberg-Hastings

Sobre la red de mundo pequeño de Watts-Strogatz se implementó la dinámica de Greenberg-Hastings. Cada nodo de la red tendrá un estado $x_i(t)$ asociado que evoluciona en cada paso temporal de acuerdo a las reglas del modelo de Haimovici [16]. Para este trabajo, los valores de los parámetros son los mismos que los utilizados en [17]. La matriz de pesos aleatorios ω_{ij} que, recordemos, da cuenta de la "importancia" de la conexión entre los nodos i y j , imita la distribución de pesos del conectoma humano. Los ω_{ij} no nulos se eligen aleatoriamente de una distribución exponencial $p(\omega) = \lambda e^{-\lambda\omega}$, con $\lambda = 12.5$.

5.1 Tiempos de relajación

Es necesario estimar, antes de estudiar la criticalidad del sistema, cuánto tiempo demora éste en llegar a un estado estacionario a partir de un estado inicial aleatorio para distintos valores de T . Para esto usamos como estimador el tamaño del primer cluster gigante $\frac{\langle S_1 \rangle}{N}$ en cada paso temporal. Dicho de otra forma, estudiamos el tiempo de relajación del sistema a su estado estacionario. Esto se realizó para conexiones a terceros vecinos ($\langle k \rangle = 12$), $\pi = 0.2$ y distintos tamaños de red, como se ve en la figura 5.1.

Se observó que 100 pasos temporales es un tiempo suficiente para que el sistema llegue a un estado estacionario para todos los valores de T estudiados, por lo que se estableció ese transitorio para todo el trabajo. Algo interesante a notar en los gráficos es que a medida que el parámetro T aumenta, al sistema le cuesta menos llegar al estado estacionario. Esto tiene sentido, ya que si el umbral de activación es alto es más difícil que una neurona se active si tiene pocas vecinas activas, por lo que se forman clusters más pequeños de neuronas activas debido a la actividad espontánea.

Una vez establecidos el transitorio y los parámetros del modelo, podemos empezar a explorar el sistema para estudiar sus propiedades críticas.

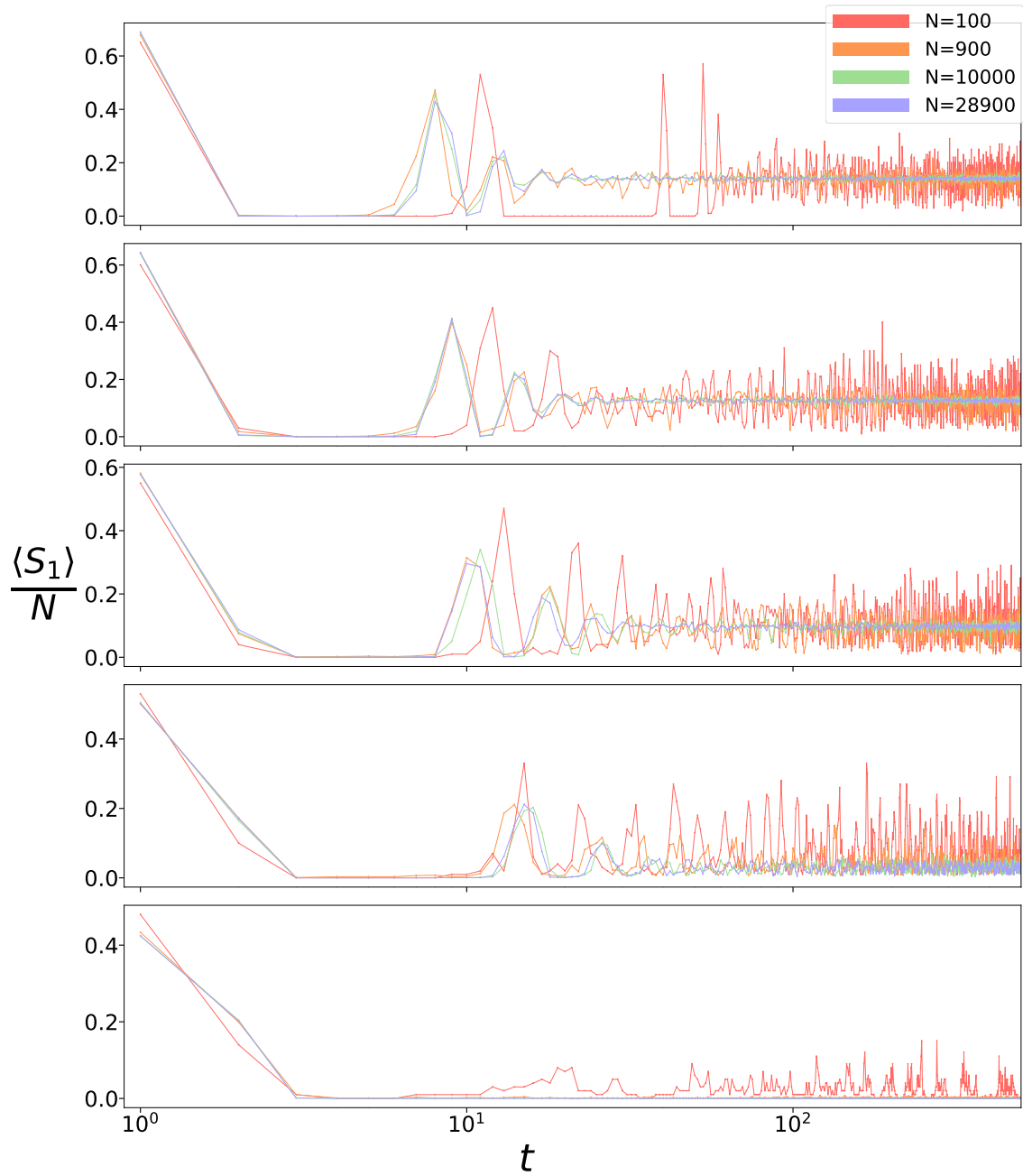


Figura 5.1: Evolución y tiempo de relajación del tamaño del cluster gigante en función de los pasos temporales para diferentes tamaños de red N y distintos umbrales T , de arriba hacia abajo: $T=0, 0.05, 0.1, 0.15$ y 0.2

5.2 Propiedades críticas

La idea ahora es explorar el comportamiento del sistema para distintos valores de probabilidad de reconexión π y valor medio del grado $\langle k \rangle$, y poder realizar un mapa de criticalidad en $(\pi, \langle k \rangle)$. La estadística de clusters se analizó utilizando cantidades estándar de la teoría de percolación, a saber, el tamaño del primer cluster gigante $\frac{\langle S_1 \rangle}{N}$ que es el parámetro de orden, y el tamaño medio de los clusters $\langle s \rangle$ que sería el equivalente a la susceptibilidad de un sistema magnético. Primero se exploraron probabilidades $\pi = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ para primeros a sextos vecinos, equivalentes a $\langle k \rangle = 4, 8, 12, 20, 24, 28$ respectivamente. En las zonas donde se veía que podría haber una transición de fase o un cambio en el tipo de transición se exploraba más finamente esa área.

Para valores bajos de $\langle k \rangle$ y π los comportamientos típicos se ilustran en la figura 5.2. Se observa que el parámetro de orden toma valores finitos para $T = 0$ sucesivamente más pequeños conforme se aumenta el tamaño del sistema, y se anula rápidamente al aumentar T . En el límite termodinámico, se obtendría $\frac{\langle S_1 \rangle}{N}$ nulo para todo T , lo cual indica que en esta zona no existe transición de fase. De manera consistente, la susceptibilidad muestra un valor pequeño, con un decaimiento monótono con T (sin un máximo para $T \neq 0$) para todo valor de N .

A medida que se aumenta el grado medio $\langle k \rangle$ y el valor de probabilidad π , se observa un comportamiento dinámico diferente. Existe un valor T_c tal que para $T < T_c$ el parámetro de orden converge a un valor finito cuando $N \rightarrow \infty$ y converge a cero cuando $T > T_c$. Por otro lado la susceptibilidad exhibe picos en $T = T_c$ que escalan conforme aumenta el tamaño de la red y divergen para $N \rightarrow \infty$. Este es el comportamiento típico de estas magnitudes en presencia de una transición de fase de segundo orden. Tomando los valores de estos picos $\langle s \rangle_{max}$ para cada N y realizándoles un ajuste lineal en escala logarítmica obtenemos la relación de escala $\frac{\gamma}{\nu d}$ de la ecuación 2.54. En promedio, para todos los valores de $(\pi, \langle k \rangle)$ se obtiene $\frac{\gamma}{\nu d} = 0.34 \pm 0.02$, lo que resulta consistente con la clase de universalidad de campo medio en percolación estandar (ver tabla 2.9) y se corresponde con lo observado en una red de Watts-Strogatz unidimensional [17].

Conforme aumentan los valores de $(\pi, \langle k \rangle)$, se sigue obteniendo un comportamiento similar al anterior tanto en el parámetro de orden como en la susceptibilidad. Dicho de otra forma, el comportamiento de estas dos magnitudes sigue siendo consistente con una transición de segundo orden. La diferencia ahora es que los exponentes críticos obtenidos $\frac{\gamma}{\nu d}$ no sólo no son consistentes con ninguna clase de universalidad, sino que además varían continuamente con los parámetros topológicos π y $\langle k \rangle$. De esta forma, aunque la transición de fase sea cualitativamente similar a la anteriormente descrita, muestra comportamiento no universal. Esto se observa en la figura 5.4. La pendiente del ajuste del panel (b) para los parámetros $(\pi, \langle k \rangle)$ correspondientes a dicha figura arrojó un resultado significativamente

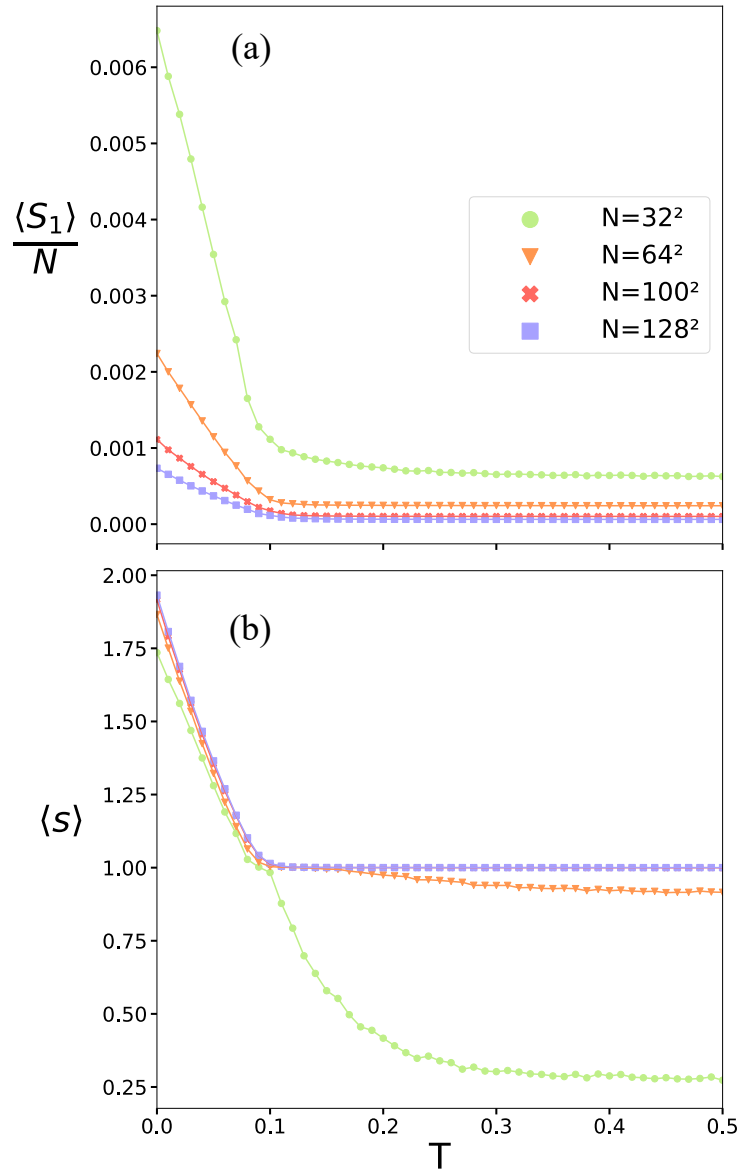


Figura 5.2: Parámetro de orden (a) y $\langle s \rangle$ (b) para $\pi = 0.6$ y conexiones a primeros vecinos ($\langle k \rangle = 4$) en función del umbral T

distinto a los valores obtenidos anteriormente. Las pendientes de estos ajustes para valores de $(\pi, \langle k \rangle)$ cercanos a los correspondientes a la figura 5.4 variaban desde 0.285 hasta 0.089 aproximadamente.

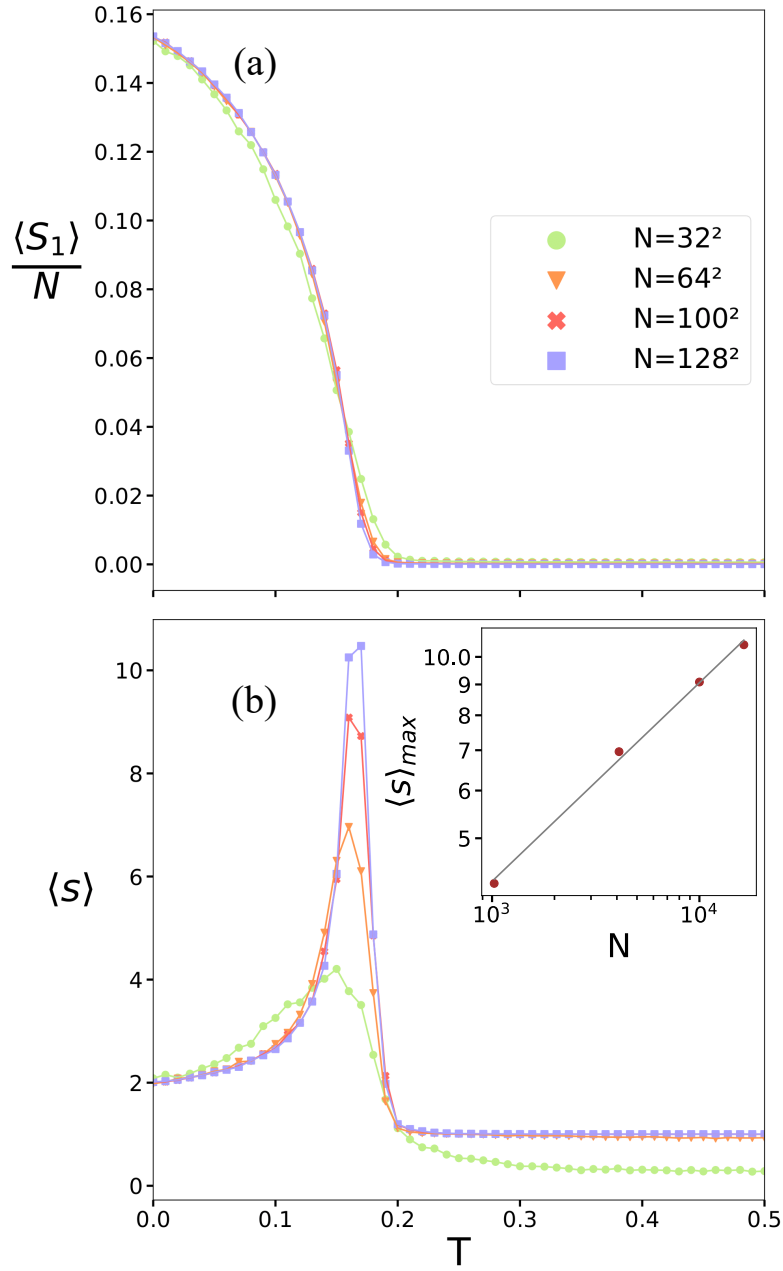


Figura 5.3: Parámetro de orden (a) y $\langle s \rangle$ (b) para $\pi = 0.4$ y conexiones a terceros vecinos en función del umbral T . El ajuste corresponde a los picos de la susceptibilidad en función de N , pendiente ~ 0.33 .

Para valores muy altos de $(\pi, \langle k \rangle)$ los valores máximos de $\langle s \rangle$ dejan de escalar con el tamaño de la red, obteniendo un exponente crítico γ nulo; $\frac{\gamma}{\nu d} \sim 0$. Esto se corresponde con un comportamiento discontinuo en la susceptibilidad, como se observa en la figura 5.5. El parámetro de orden también empieza a mostrar comportamiento discontinuo, ya que aparecen loops de histéresis para valores grandes de N , como se puede observar también en la figura 5.5. Esta discontinuidad, tanto en la susceptibilidad como en el parámetro de orden, se da en $T = T_c$. Estos comportamientos son consistentes con una transición de fase

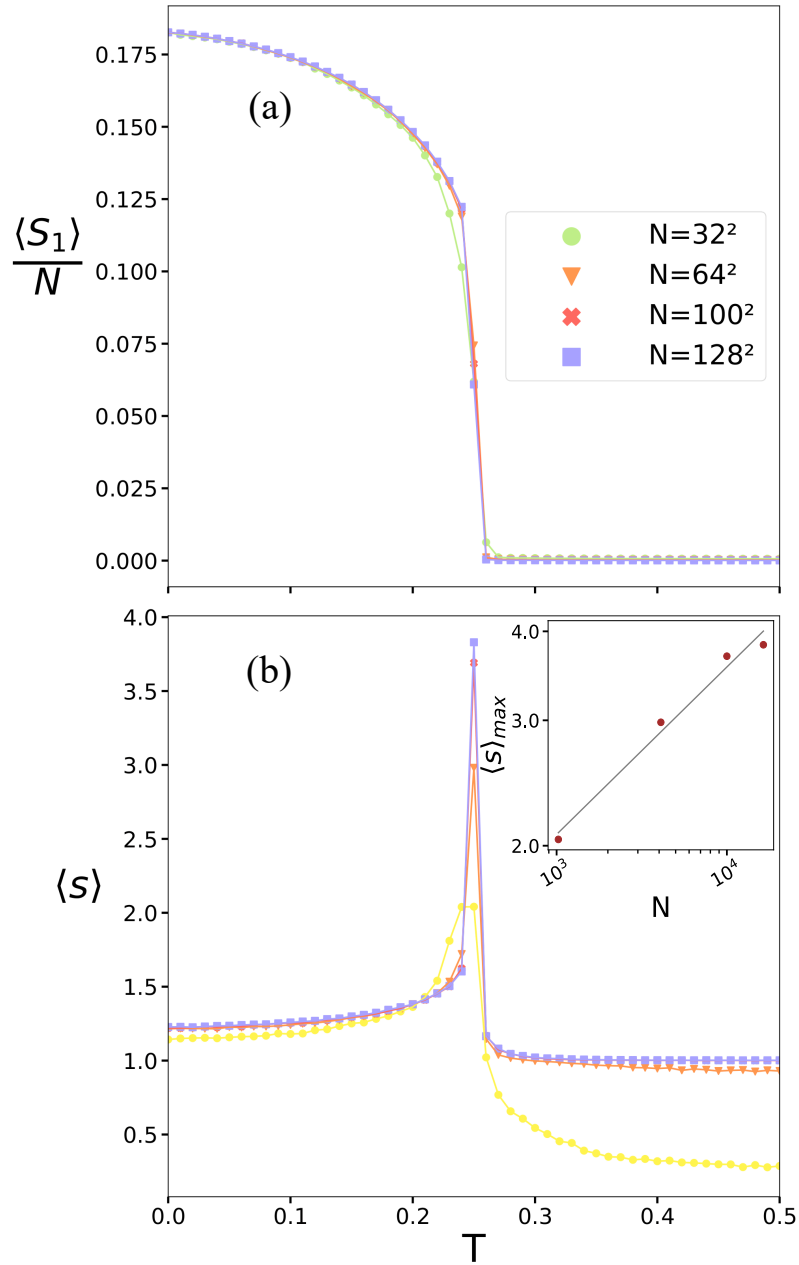


Figura 5.4: Parámetro de orden (a) y $\langle s \rangle$ (b) para $\pi = 0.4$ y conexiones a cuartos vecinos en función del umbral T . El ajuste corresponde a los picos de la susceptibilidad en función de N , pendiente ~ 0.235 .

de primer orden. La frontera entre la zona de transición de segundo orden no universal y la transición discontinua se estimó analizando la existencia de loops de histéresis en el parámetro de orden y también la independencia de los valores máximos de $\langle s \rangle$ con los tamaños de red N .

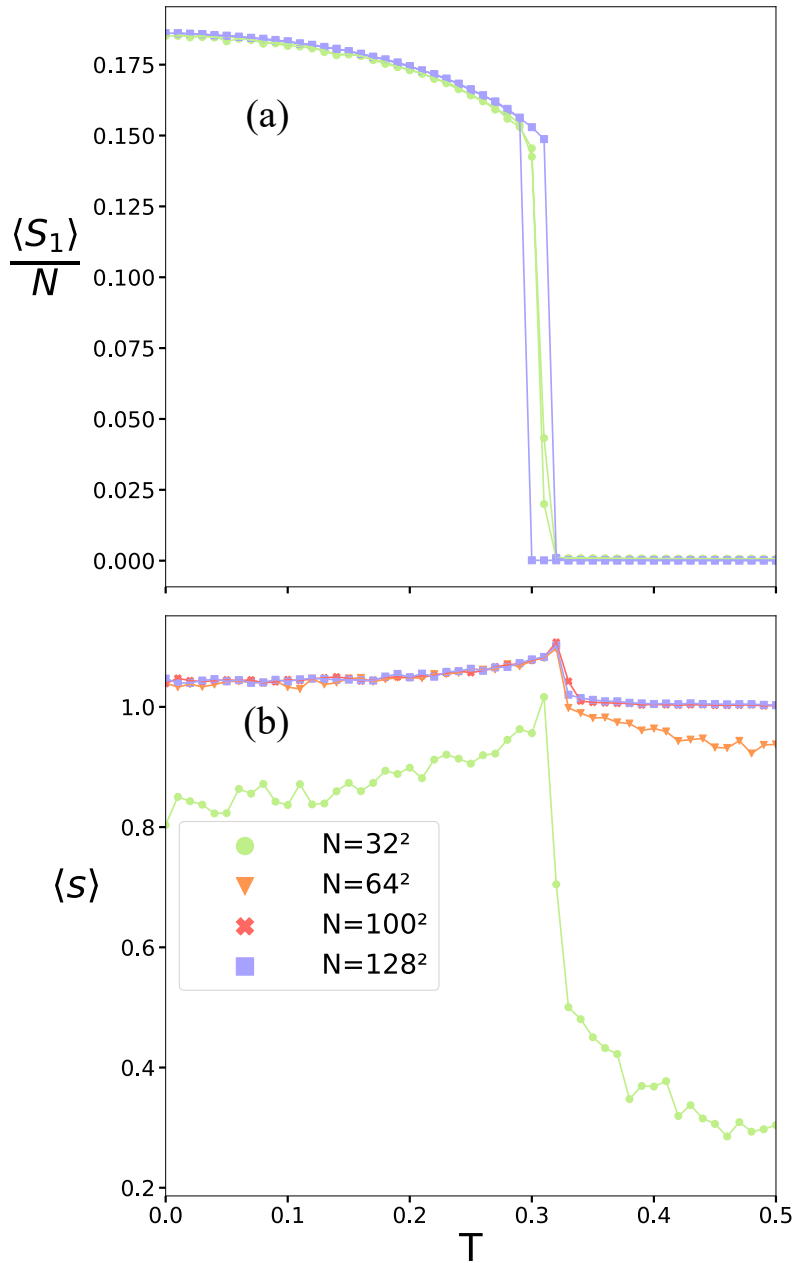


Figura 5.5: Parámetro de orden (a) y $\langle s \rangle$ (b) para $\pi = 0.8$ y conexiones a sextos vecinos en función del umbral T . En el parámetro de orden se observan loops de histéresis en $T = T_C$ que aparecen cuando aumenta N .

5.2.1 Diagrama de criticalidad

Con los comportamientos observados del sistema para valores de $(\pi, \langle k \rangle)$ fue posible esbozar el diagrama de criticalidad de la red en el plano $(\pi, \langle k \rangle)$. Los resultados se plasman abajo en la figura 5.6.

Notemos que en la zona $\pi > 0.6$, la red de Watts-Strogatz ya no posee propiedades de mundo pequeño. Para estos valores de probabilidad de reconexión π , la red exhibe caminos medios bajos y coeficientes de clustering bajos como se observa en la Figura 4.7,

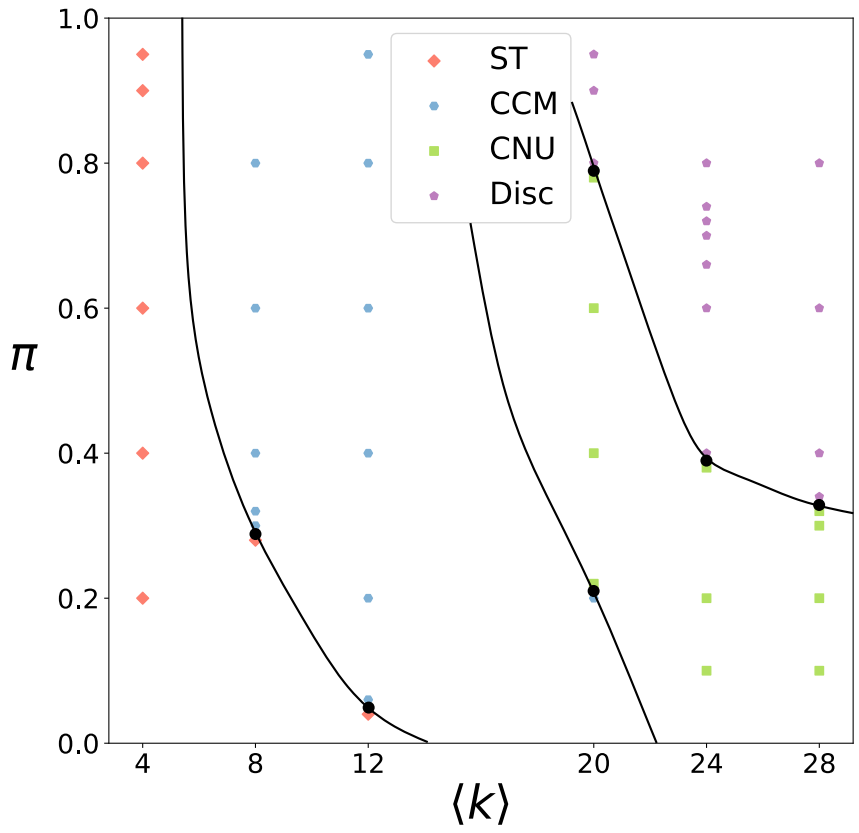


Figura 5.6: Diagrama de criticalidad. ST: zona sin transición de fase. CCM: Criticalidad de campo medio, zona con exponentes de campo medio en percolación estándar. CNU: Criticalidad no universal, zona con exponentes críticos no universales. Disc: zona con transición de fase discontinua

lo cual hace que su comportamiento sea más parecido al de una red aleatoria.

Las siglas para cada tipo de transición (o ausencia de ella) están explicadas en el epígrafe de la figura. Los puntos negros en la imagen corresponden a la estimación de los valores de transición, donde las barras de error son del orden del tamaño de los símbolos. El margen de error es de ± 0.01 en la probabilidad de reconexión, ya que fue este el $\delta\pi$ más pequeño utilizado para explorar el mapa de criticalidad. Las líneas son puramente cualitativas y sirven de guía para estimar las zonas de separación entre distintos tipos de transición. Notemos que debido a la topología de la red cuadrada, en la cual los grados medios de vecinos $\langle k \rangle$ aumentan de a cuatro o incluso de a ocho (ver Figura 4.4) existen zonas que no fue posible explorar, como por ejemplo la zona $12 < \langle s \rangle < 20$. En estas zonas no es posible trazar una frontera entre regiones con distintas transiciones de fase de manera exacta, y las curvas que se observan en el diagrama son estimativas en estas áreas.

Parte III

Discusión y Conclusiones

Discusión y Conclusiones

En este trabajo se utilizó el modelo de autómatas celulares de Greenberg-Hastings modificado por Haimovici y coautores. Dicho modelo fue implementado sobre una red cuadrada con condiciones periódicas de contorno sobre la que se le aplica el algoritmo de Watts-Strogatz. Este tipo de redes de mundo pequeño exhiben altos coeficientes de clustering y caminos medios cortos para un intervalo significativo de valores de probabilidad de reconexión π , estableciendo correlaciones a largo alcance entre nodos alejados de la red, características que se observan empíricamente en el conectoma del cerebro de los mamíferos, de aquí la motivación de elegir este tipo de redes para el modelado. Este trabajo sigue los mismos lineamientos del estudio llevado a cabo por Zarepour y coautores [17] en una red de Watts-Strogatz definida a partir de una red ordenada unidimensional (anillo). El objetivo principal es investigar en qué medida las propiedades críticas del modelo se modifican al incluir correlaciones bidimensionales, esto es, reemplazar el anillo por un toro al construir la red de Watts-Strogatz sobre la cual se define el modelo de Greenberg-Hastings.

Se exploró la topología de la red para distintos valores de probabilidad de reconexión π y grado medio de vecinos $\langle k \rangle$, logrando detectar en cuáles zonas del mapa de parámetros $(\pi, \langle k \rangle)$ se produce una transición de fase y de qué tipo. Con los resultados obtenidos se esbozó un diagrama de criticalidad del mapa de parámetros topológicos de la red. Para valores de conectividad bajos (valores bajos de π y $\langle k \rangle$) no se observan transiciones de fase, es decir, no se forman clusters activos de neuronas que ocupen regiones alejadas de la red y el tamaño del cluster gigante tiende a cero en el límite termodinámico. Este régimen se corresponde con estados de actividad cerebral decoherente, correspondiente a estados comatosos o vegetativos. Para valores intermedios de conectividad se observa una transición de fase de segundo orden para un valor crítico de umbral T_c con exponentes críticos correspondientes a los de clase de universalidad de percolación estándar en campo medio. Este régimen es el observado en cerebros en reposo de individuos sanos, es decir, se corresponde con el comportamiento de la RSN del cerebro. Para valores superiores de conectividad se sigue observando el mismo comportamiento correspondiente a una transición de fase de segundo orden, pero los exponentes críticos asociados cambian continuamente y no son consistentes con ninguna clase de universalidad conocida. Para valores muy altos de conectividad se observan comportamientos compatibles con una transición de fase de primer orden: el exponente crítico γ se anula y el parámetro de orden

exhibe comportamiento discontinuo en la forma de loops de histéresis en $T = T_c$. Este comportamiento se corresponde con un comportamiento neuronal hipercorrelacionado, con clusters grandes de neuronas activas de actividad coherente. Este tipo de comportamientos se observa en cerebros epilépticos. En términos generales, los resultados obtenidos en el presente trabajo reproducen cualitativamente los de Zarepour y coautores. Cuantitativamente se observa, como era de esperar, una modificación de los contornos entre regiones del diagrama de fases dinámico (Fig. 5.6), especialmente para valores bajos de $\langle k \rangle$, mientras que para valores altos de dicho parámetro el diagrama prácticamente se vuelve independiente de $\langle k \rangle$, como era de esperar. En particular, se observa un ensanchamiento del área relativa ocupada por la región de actividad crítica, lo cual resulta consistente con la hipótesis de criticalidad en los sistemas nerviosos.

Un aspecto a notar es que la topología de la red cuadrada hace que queden muchos valores de $\langle k \rangle$ sin explorar. En un futuro debería idearse computacionalmente algún algoritmo que permita eliminar conexiones de cada nodo de modo que los nodos que se eliminen sean simétricos para no alterar la homogeneidad de la red, y así poder obtener un diagrama de criticalidad con mayor detalle.

Bibliografía

- ¹H. Nishimori and G. Ortiz, *Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, Dec. 2010).
- ²P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, “Bak, p., tang, c. wiesenfeld, k. self-organized criticality: an explanation of 1/f noise. phys. rev. lett. 59, 381-384”, [Physical Review Letters](#) **59**, 381–384 (1987).
- ³A. V. M. Herz and J. J. Hopfield, “Earthquake cycles and neural reverberations: collective oscillations in systems with pulse-coupled threshold elements”, [Phys. Rev. Lett.](#) **75**, 1222–1225 (1995).
- ⁴D. Stassinopoulos and P. Bak, “Democratic reinforcement: a principle for brain function”, [Phys. Rev. E](#) **51**, 5033–5039 (1995).
- ⁵D. Chialvo and P. Bak, “Learning from mistakes”, [Neuroscience](#) **90**, 1137–1148 (1999).
- ⁶J. M. Beggs and D. Plenz, “Neuronal avalanches in neocortical circuits”, [Journal of Neuroscience](#) **23**, 11167–11177 (2003).
- ⁷D. Plenz and T. Thiagarajan, “Plenz, d. thiagarajan, t. c. the organizing principles of neuronal avalanches: cell assemblies in the cortex? trends neurosci. 30, 101-110”, [Trends in neurosciences](#) **30**, 101–10 (2007).
- ⁸D. Plenz, E. Niebur, and H. Schuster, *Criticality in neural systems*, Reviews of Nonlinear Dynamics and Complexity (Wiley, 2014).
- ⁹S. H. Gautam, T. T. Hoang, K. McClanahan, S. K. Grady, and W. L. Shew, “Maximizing sensory dynamic range by tuning the cortical state to criticality”, [PLOS Computational Biology](#) **11**, 1–15 (2015).
- ¹⁰E. D. Gireesh and D. Plenz, “Neuronal avalanches organize as nested theta- and beta/gamma-oscillations during development of cortical layer 2/3”, [Proceedings of the National Academy of Sciences](#) **105**, 7576–7581 (2008).
- ¹¹T. Petermann, T. C. Thiagarajan, M. A. Lebedev, M. A. L. Nicolelis, D. R. Chialvo, and D. Plenz, “Spontaneous cortical activity in awake monkeys composed of neuronal avalanches”, [Proceedings of the National Academy of Sciences](#) **106**, 15921–15926 (2009).
- ¹²W. Shew and D. Plenz, “The functional benefits of criticality in the cortex”, [The Neuroscientist : a review journal bringing neurobiology, neurology and psychiatry](#) **19**, 10.1177/1073858412445487 (2012).

- ¹³O. Shriki, J. Alstott, F. Carver, T. Holroyd, R. N. Henson, M. L. Smith, R. Coppola, E. Bullmore, and D. Plenz, “Neuronal avalanches in the resting meg of the human brain”, *Journal of Neuroscience* **33**, 7079–7090 (2013).
- ¹⁴E. Tagliazucchi, P. Balenzuela, D. Fraiman, and D. R. Chialvo, “Criticality in large-scale brain fmri dynamics unveiled by a novel point process analysis”, *Frontiers in Physiology* **3**, 10.3389/fphys.2012.00015 (2012).
- ¹⁵L. Cocchi, L. L. Gollo, A. Zalesky, and M. Breakspear, “Criticality in the brain: a synthesis of neurobiology, models and cognition”, *Progress in Neurobiology* **158**, 132–152 (2017).
- ¹⁶A. Haimovici, E. Tagliazucchi, P. Balenzuela, and D. R. Chialvo, “Brain organization into resting state networks emerges at criticality on a model of the human connectome”, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 178101 (2013).
- ¹⁷M. Zarepour, J. I. Perotti, O. V. Billoni, D. R. Chialvo, and S. A. Cannas, “Universal and nonuniversal neural dynamics on small world connectomes: a finite-size scaling analysis”, *Phys. Rev. E* **100**, 052138 (2019).
- ¹⁸R. Albert and A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks”, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47–97 (2002).
- ¹⁹S. Milgram, “The Small-World Problem”, *Psychology Today* **1**, 61–67 (1967).
- ²⁰S. Wasserman and K. Faust, “Social network analysis: methods and applications”, in (1994).
- ²¹A. Barrat, M. Barthélemy, and A. Vespignani, *Dynamical processes on complex networks* (Cambridge University Press, 2008).
- ²²P. Hagmann, L. Cammoun, X. Gigandet, R. Meuli, C. Honey, V. Wedeen, and O. Sporns, “Mapping the structural core of human cerebral cortex”, *PLoS biology* **6**, e159 (2008).
- ²³D. R. Chialvo, “Emergent complex neural dynamics”, *Nature Physics* **6**, 744–750 (2010).
- ²⁴A. Aharony and D. Stauffer, *Introduction to percolation theory* (Taylor & Francis, 2003).
- ²⁵J. Binney, *The theory of critical phenomena: an introduction to the renormalization group* (Clarendon Press, 2023).
- ²⁶B. Mandelbrot and J. Llosa, *La geometría fractal de la naturaleza*, Libros para pensar la ciencia (Tusquets Editores, 1997).
- ²⁷J.-C. A. d’Auriac and F. Iglói, “Statistics of percolating clusters in a model of photosynthetic bacteria”, *Phys. Rev. E* **103**, 052103 (2021).
- ²⁸I. Brodsky, “Percolation theory”, in (2013).
- ²⁹M. Gardner, “Mathematical games”, *Scientific American* **223**, 120–123 (1970).
- ³⁰E. M. Izhikevich, J. H. Conway, and A. Seth, “Game of Life”, *Scholarpedia* **10**, revision #150735, 1816 (2015).

- ³¹J. M. Greenberg and S. P. Hastings, “Spatial patterns for discrete models of diffusion in excitable media”, [SIAM Journal on Applied Mathematics](#) **34**, 515–523 (1978).
- ³²D. Fraiman and D. R. Chialvo, “What kind of noise is brain noise: anomalous scaling behavior of the resting brain activity fluctuations”, [Frontiers in Physiology](#) **3**, 10.3389/fphys.2012.00307 (2012).

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de evaluación de tesis, damos fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por este Tribunal.