UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Trabajo Especial de Licenciatura en Física

Tipo de Weyl de perturbaciones de agujeros negros

Bernardo G. Araneda

Director: Dr. Gustavo Dotti

Marzo de 2014

A mi madre

Resumen

En este trabajo se estudian las perturbaciones lineales de soluciones algebraicamente especiales de las ecuaciones de Einstein, en particular, espaciotiempos tipo Petrov D. Se analiza la estructura de autovalores y las direcciones principales nulas de la geometría perturbada. Se demuestra que el espaciotiempo no retiene en general la especialidad algebraica bajo la perturbación, teniendo cuatro direcciones nulas que resultan no-analíticas en el parámetro perturbativo, y que representan una bifurcación de los dos pares coincidentes del background. Los resultados son válidos para todo espaciotiempo tipo D perturbado, en particular para la familia de agujeros negros de Kerr-Newman. Se aplican estos resultados a perturbaciones genéricas del agujero negro de Schwarzschild, demostrándose que las nuevas direcciones principales no pueden corresponder a modos armónicos puros de la perturbación, y obteniendo un efecto claro del modo par sobre la geometría.

Palabras clave

Relatividad General, Teoría de perturbaciones, Clasificación de Petrov, Espaciotiempos tipo D, Direcciones principales nulas, Agujeros Negros.

Clasificación

04.20.Jb Exact solutions

04.25.Nx Perturbation theory

04.70.-s Physics of black holes

Agradecimientos

A mi familia por ser el soporte en todo sentido en estos cinco años, a pesar de la distancia. A quienes me han acompañado y aguantado durante este período. A los profesores de la Facultad por su buena predisposición y atención. En particular, a Guido Raggio y Sergio Dain, quienes fueron siempre muy atentos. Y especialmente a Gustavo, mi director, por su paciencia, predisposición, e incentivo hacia la física y el formalismo matemático. Mi más profundo respeto para todos ellos.

Índice general

Introducción

En Relatividad General, la geometría es curvatura del espaciotiempo y ésta es a su vez gravedad. Las variedades diferenciales abstractas de la Geometría Diferencial se corresponden entonces con la estructura geométrica del espaciotiempo, o, equivalentemente, con campos gravitacionales. La relación entre la curvatura y la materia presente en el espaciotiempo está regida por las ecuaciones de Einstein. En virtud de que estas ecuaciones son altamente no-lineales, resolver de manera exacta el acoplamiento entre distinas geometrías es un problema muy difícil de afrontar, razón por la cual se recurre a la teoría perturbativa para modelar pequeñas desviaciones de una cierta geometría. Las perturbaciones de soluciones exactas constituyen entonces deformaciones de la estructura geométrica del espaciotiempo, y se utilizan en el estudio del problema de estabilidad de una dada métrica. Si una solución es inestable bajo perturbaciones, entonces no describe una situación realista y es físicamente irrelevante. En particular, en el sentido dado en este trabajo, las perturbaciones representan campos lineales (ondas gravitacionales) propagándose en un espaciotiempo tipo agujero negro.

Matemáticamente, el espaciotiempo perturbado y el de background son variedades diferenciales distintas. Para dar una noción del apartamiento de un cierto campo tensorial respecto de su valor de background, es necesario comparar ambos tensores en un mismo punto, por lo tanto, se requiere una forma de relacionar o identificar los puntos entre ambos espaciotiempos. En la práctica, esta identificación se realiza mediante un difeomorfismo. La no-unicidad de este mapa conduce a lo que se denomina libertad de gauge en teoría perturbativa, que se utiliza para intentar simplificar las ecuaciones. Ahora bien, las cantidades físicamente relevantes naturalmente no dependen de la elección de gauge, dado que éste no es más que un artificio matemático. Por lo tanto, en la descripción y análisis de la geometría perturbada se buscan en general variables que sean independientes del gauge.

Por otro lado, la caracterización invariante de geometrías (esto es, independiente del sistema de coordenadas) constituye una herramienta fundamental para describir los campos gravitacionales. Dentro de este marco, la clasificación de Petrov describe las simetrías algebraicas de la curvatura conforme sobre una variedad (pseudo)-riemanniana, y se aplica usualmente en el estudio de soluciones exactas de las ecuaciones de campo. Una de sus formulaciones consiste en el estudio de la estructura de autovalores y autobivectores del tensor de Weyl. Los autobivectores son 2-formas asociadas a ciertos vectores nulos en el espaciotiempo que se denominan direcciones principales nulas (lo cual da lugar a una formulación equivalente de la clasificación). De la estructura espectral se obtienen exactamente seis tipos de campos gravitacionales distintos que se conocen como tipos de Petrov. El llamado algebraicamente general o Petrov tipo I es, como su nombre lo indica, el caso más general en la clasificación, mientras que los restantes cinco casos se conocen como algebraicamente especiales, y entre ellos, el denominado tipo D resulta de gran relevancia dado que las soluciones de agujeros negros estacionarios de electrovacío (esto es, la familia de Kerr-Newman) pertenecen a esta clase.

Puede probarse que los autovalores del tensor de Weyl dependen únicamente de los invariantes de curvatura. Por lo tanto, la estructura algebraica del espaciotiempo está caracterizada por estos invariantes. Por otro lado, en [1] se demuestra que toda la información acerca de las perturbaciones métricas lineales impares de un agujero negro de Schwarzschild está codificada en la variación de primer orden de los invariantes de curvatura, y se utiliza este hecho para probar la estabilidad lineal no-modal de la métrica en este sector. Para perturbaciones pares, se prueba en [1] que es necesario incorporar invariantes diferenciales, esto es, que involucren derivadas covariantes del tensor de Weyl, ya que estos modos no dejan registro observable (invariante de gauge) en los invariantes algebraicos.

Dado que los invariantes caracterizan el tipo de Petrov, surge la pregunta de si las técnicas aplicadas en [1] se pueden generalizar a perturbaciones de otros espaciotiempos tipo D, en particular, a la solución de agujero negro rotante de Kerr, para lo cual resulta necesario analizar las propiedades de espacios tipo D perturbados. Como subproducto de este estudio, esperamos encontrar efectos observables de las perturbaciones pares de un agujero negro de Schwarzschild en el tensor de Weyl, sin necesidad de analizar sus derivadas covariantes.

Motivados por lo anterior, en este trabajo realizamos un estudio de las perturbaciones lineales de espaciotiempos tipo Petrov D, analizando la estructura de autovalores y las direcciones principales nulas (PNDs) del espaciotiempo perturbado. Como resultado principal, encontramos un desdoblamiento invariante de gauge de los dos pares dobles de PNDs del background, de manera que en general el espacio perturbado es tipo I en la clasificación de Petrov. Veremos que estas PNDs exhiben un comportamiento no-analítico en el parámetro perturbativo ϵ, de modo tal que el orden dominante es $\sqrt{\epsilon}$. Al aplicar estos resultados a perturbaciones del agujero negro de Schwarzschild, encontramos que las nuevas PNDs no corresponden a un modo armónico puro de la perturbación, pues no tienen números armónicos (ℓ, m) bien definidos. Además, el desdoblamiento invariante de gauge de las PNDs nos permite encontrar un efecto observable del sector par de la perturbación sobre la curvatura.

Para demostrar estos resultados, hemos organizado el trabajo del modo siguiente. El capítulo 1 expone el formalismo de la teoría estándar de perturbaciones y el concepto de invariancia de gauge. En el capítulo 2 se desarrolla la clasificación de Petrov; se comienza con la clasificación algebraica de campos de Maxwell, a fin de posteriormente establecer analogías al abordar el problema más complejo de la estructura algebraica del tensor de Weyl. El capítulo 3 trata sobre perturbaciones de espaciotiempos tipo D, se analiza la estructura de autovalores del tensor de Weyl perturbado, y luego se estudia finalmente el desdoblamiento de las direcciones principales nulas. Por último se aplican los resultados a perturbaciones lineales genéricas del espaciotiempo de Schwarzschild.

Capítulo 1

Teoría de perturbaciones e invariancia de gauge

En la teoría estándar de perturbaciones ([3],[4],[5]) se consideran dos espaciotiempos distintos: el espaciotiempo físico $(\mathcal{M}', g'_{ab})$, el cual se quiere describir en términos de perturbaciones, y el espaciotiempo no perturbado o *background* $(\mathcal{M}, g_{ab})$, que corresponde a alguna solución exacta conocida de las ecuaciones de Einstein.

Vagamente hablando, una perturbación δQ de alguna cantidad relevante, representada por un campo tensorial Q que se construye a partir de la métrica, se define como la diferencia entre el valor de Q en el espaciotiempo físico y su valor Q_0 en el background. No obstante, esta definición requiere inmediatamente ser precisada, dado que para comparar dos tensores es necesario considerarlos en el mismo punto. Como Q y Q_0 están definidos en distintos espaciotiempos, esta comparación sólo puede ser efectuada luego de hacer una prescripción para identificar puntos entre ambos espaciotiempos. Es decir, la anterior definición intuitiva de una perturbación asume implícitamente la existencia de un mapa $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ de identificación. Esta forma de identificar puntos entre el espaciotiempo físico y el background se denomina *elección de gauge*, y se efectúa mediante un difeomorfismo entre ambas variedades.

Notar que, dado un difeomorfismo $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, las variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ tienen idéntica estructura diferenciable y pueden entonces ser tratadas como la misma. No obstante, hemos adoptado el punto de vista "activo" de difeomorfismos [2], según el cual consideramos el mapa ϕ como una forma de asociar tensores T en un punto $p \in \mathcal{M}$ con tensores $\phi^* T$ en el punto $\phi(p) \in \mathcal{M}'$. En el punto de vista "pasivo", los difeomorfismos son tratados como cambios de coordenadas dentro de una misma variedad.

En virtud del principio de covariancia general, el espaciotiempo no posee un sistema de coordenadas privilegiado. Por lo tanto, la elección del mapa de identificación $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ no es única. Un cambio de este mapa es lo que se conoce en teoría perturbativa como *transformación de gauge*.

1.1. Formalismo general

Consideremos una familia monoparámetrica de espaciotiempos $(\mathcal{M}_\epsilon, g_{ab}(\epsilon))$, donde $\mathcal{M}_{\epsilon=0} = \mathcal{M}$ corresponde al espaciotiempo no perturbado y $\mathcal{M}_{\epsilon=1} = \mathcal{M}'$ al espaciotiempo físico. Con el fin de introducir mapas de identificación y las correspondientes transformaciones de gauge, es usual [6] definir una variedad 5-dimensional $\mathcal{N} := \mathcal{M} \times \mathbb{R}$, foliada por las subvariedades 4-dimensionales $\mathcal{M}_\epsilon$, que son difeomorfas a $\mathcal{M}$ y a $\mathcal{M}'$. Cada punto sobre $\mathcal{N}$ es identificado por un par (p_ϵ, ϵ), donde $p_\epsilon \in \mathcal{M}_\epsilon$ y los puntos del background corresponden a $\epsilon = 0$.

Si Q_0 es un campo tensorial sobre $\mathcal{M}$ construido a partir de g_{ab}, y Q_ϵ el correspondiente sobre $\mathcal{M}_\epsilon$ construido de $g_{ab}(\epsilon)$, podemos extender el campo a toda la variedad $\mathcal{N}$ definiendo $Q(p_\epsilon, \epsilon) := Q_\epsilon(p_\epsilon)$. Notar que los tensores así definidos son "horizontales", en el sentido de que su componente normal a las $\mathcal{M}_\epsilon$ es idénticamente cero.

La variedad $\mathcal{N}$ tiene una estructura diferenciable natural dada por el producto entre $\mathcal{M}$ y $\mathbb{R}$, y las variedades $\mathcal{M}_\epsilon$ de la foliación deben tener esta misma estructura. De este modo, requerimos que la perturbación sea continua en el sentido de que $(\mathcal{M}', g'_{ab})$ y $(\mathcal{M}, g_{ab})$ estén conectadas por una curva continua en $\mathcal{N}$. Esto implica que los posibles cambios en la estructura diferenciable debidos a la perturbación, como por ejemplo la formación de singularidades, están excluidos del tratamiento.

Para definir la perturbación de un campo Q, debemos comparar Q_ϵ con Q_0. Como dijimos anteriormente, esto requiere una forma de identificar puntos entre $\mathcal{M}_\epsilon$ y $\mathcal{M}$, lo cual puede ser hecho a través de un difeomorfismo $\phi_\epsilon : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ tal que $\phi_\epsilon|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_\epsilon$. Ahora, ya que un campo vectorial puede ser pensado como el generador infinitesimal de difeomorfismos, podemos tratar a ϕ_ϵ como un miembro del flujo $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ de algún campo $\xi \in \mathcal{N}$, correspondiendo el valor de ϵ al parámetro de grupo. Por lo tanto, en lugar del difeomorfismo podemos especificar el campo vectorial ξ que genera el flujo ϕ. Nos referiremos entonces a este campo como *gauge*.

De este modo, la perturbación de una cantidad Q se define como

$$\delta Q_\epsilon := (\phi_\epsilon)_* Q|_{\mathcal{M}} - Q_0 \tag{1.1}$$

donde $(\phi_\epsilon)_*$ es el pullback asociado a ϕ_ϵ. Como estamos requiriendo analiticidad en ϵ, podemos expandir $(\phi_\epsilon)_* Q$ en serie de Taylor alrededor de $\epsilon = 0$, con lo que obtenemos

$$\delta Q_\epsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \left[\frac{d^k((\phi_\epsilon)_* Q)}{d\epsilon^k} \right] \Bigg|_{\epsilon=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \pounds_\xi^k Q. \tag{1.2}$$

donde $\pounds_\xi$ es la derivada de Lie en la dirección de ξ.

En particular, a orden lineal resulta

$$(\phi_\epsilon)_* Q = Q_0 + \epsilon \pounds_\xi Q + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{1.3}$$

Notar que el campo ξ tiene componente no trivial en la "dimensión" ϵ, por lo tanto $\pounds_\xi Q$ registra el cambio infinitesimal en el tensor Q al movernos *a través* de la foliación y no sobre una particular $\mathcal{M}_\epsilon$. Este término, $\pounds_\xi Q$ (que enfatizamos es un tensor sobre $\mathcal{M}$), se denomina *perturbación linealizada* de Q, y se calcula mediante

$$\pounds_\xi Q = \left[\frac{d((\phi_\epsilon)_* Q)}{d\epsilon} \right] \bigg|_{\epsilon=0} . \tag{1.4}$$

Ahora estamos en condiciones de discutir el efecto de cambiar el mapa de identificación, es decir de las transformaciones de gauge. Consideremos entonces otro campo $\eta \in \mathcal{N}$ cuyo flujo en $\mathcal{N}$ es ψ. A orden lineal tenemos:

$$Q^{(\xi)} := (\phi_\epsilon)_* Q = Q_0 + \epsilon \pounds_\xi Q + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{1.5}$$
$$Q^{(\eta)} := (\psi_\epsilon)_* Q = Q_0 + \epsilon \pounds_\eta Q + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{1.6}$$

Esto implica que

$$Q^{(\xi)} - Q^{(\eta)} = \epsilon \left(\pounds_\xi Q - \pounds_\eta Q \right) = \epsilon \pounds_{(\xi-\eta)} Q \tag{1.7}$$

donde hemos usado las propiedades de la derivada de Lie. Además, por el modo en que hemos definido ξ y η, el campo vectorial $V := \xi - \eta$ es un 4-vector sobre $\mathcal{M}$. Por lo tanto, hemos demostrado que la perturbación linealizada de una cantidad Q es invariante de gauge si y sólo si

$$\pounds_V Q = 0 \tag{1.8}$$

para todos los 4-vectores $V \in \mathcal{M}$. Esta condición está asegurada si *i*) Q es idénticamente cero, *ii*) Q es un campo escalar constante, o *iii*) Q es una combinación lineal de productos de deltas de Kronecker con coeficientes constantes.

Como hemos mencionado, una cierta cantidad es físicamente relevante módulo transformaciones de gauge. En particular, en la teoría linealizada, la métrica del espaciotiempo perturbado $\mathcal{M}'$ tiene la forma

$$g_{ab} = g^0_{ab} + \epsilon \delta g_{ab} \tag{1.9}$$

donde g^0_{ab} es la métrica del background $\mathcal{M}$, la cual es solución de las ecuaciones de Einstein

$$R^0_{ab} - \frac{1}{2} R^0 g^0_{ab} = 8\pi T^0_{ab}, \tag{1.10}$$

y $\delta g_{ab} = (dg_{ab}/d\epsilon)|_{\epsilon=0}$ es la linealización, que satisface las ecuaciones linealizadas

$$\Box \delta g_{ab} + \nabla_a \nabla_b (g^{cd} \delta g_{cd}) - 2\nabla^c \nabla_{(a} \delta g_{b)c} = 0. \tag{1.11}$$

La ecuación (1.9) tiene implícita una elección de gauge, ya que, según el formalismo recién expuesto, en rigor se tiene $g_{ab} = (\phi_\epsilon)_*[g_{ab}(\epsilon)]$ para $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ difeomorfismo. Al hacer una transformación de gauge (i.e al elegir un mapa $\widetilde{\phi}$ en lugar de ϕ), hemos visto que la relación entre las linealizaciones es

$$\widetilde{\delta} g_{ab} - \delta g_{ab} = \pounds_V g_{ab} \tag{1.12}$$

donde $V \in \mathcal{M}$. Por lo tanto, al tratar las ecuaciones linealizadas de Einstein, estaremos interesados en una clase de equivalencia de soluciones, donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por

$$\delta g_{ab} \sim \delta g_{ab} + \pounds_V g_{ab} \tag{1.13}$$

De este modo evitamos considerar soluciones "espurias", es decir, soluciones (físicamente equivalentes) relacionadas entre sí por un difeomorfismo (o, desde el punto de vista "pasivo", por un cambio de coordenadas).

Capítulo 2

Clasificación de Petrov

2.1. Clasificación de campos de Maxwell

En esta sección daremos las nociones de bivectores y su clasificación algebraica, aplicada al caso de campos electromagnéticos. La intención es hacer una especie de introducción para la sección siguiente, en la que abordaremos el problema más complejo de la clasificación de Petrov del tensor de Weyl. Consideraremos un espaciotiempo orientable $(\mathcal{M}, g)$, y usaremos la signatura de la métrica $(-+++)$.

Comencemos por repasar brevemente el concepto de tetradas nulas y la acción del grupo de Lorentz sobre las mismas, que será de gran utilidad en lo que sigue. Sea $\{e^a_\alpha\}$ una tetrada ortonormal en $p \in \mathcal{M}$. A partir de ésta podemos construir una tetrada nula compleja $\{l^a, k^a, m^a, \bar{m}^a\}$ en la forma

$$l^a := \frac{1}{\sqrt{2}}(e^a_0 - e^a_3), \qquad m^a := \frac{1}{\sqrt{2}}(e^a_1 - ie^a_2) \tag{2.1}$$

$$k^a := \frac{1}{\sqrt{2}}(e^a_0 + e^a_3), \qquad \bar{m}^a := \frac{1}{\sqrt{2}}(e^a_1 + ie^a_2) \tag{2.2}$$

Estos vectores satisfacen $l^a l_a = k^a k_a = m^a m_a = \bar{m}^a \bar{m}_a = 0$, $l^a k_a = -1, m^a \bar{m}_a = 1$, siendo cero los demás productos. La métrica del espaciotiempo se escribe en términos de la tetrada nula como

$$g_{ab} = 2m_{(a}\bar{m}_{b)} - 2k_{(a}l_{b)}. \tag{2.3}$$

Las transformaciones de Lorentz aplicadas a la tetrada se pueden dividir en distintos casos:

- Rotaciones nulas alrededor de l^a

$$l'^a = l^a, \quad k'^a = k^a + E\bar{E}l^a + \bar{E}m^a + E\bar{m}^a, \quad m'^a = m^a + El^a \tag{2.4}$$

- Rotaciones nulas alrededor de k^a

$$k'^a = k^a, \quad l'^a = l^a + B\bar{B}l^a + \bar{B}m^a + B\bar{m}^a, \quad m'^a = m^a + Bk^a \tag{2.5}$$

- Rotaciones espaciales (*de spin*) en el plano $m^a - \bar{m}^a$

$$m'^a = e^{i\theta}m^a \tag{2.6}$$

- *Boosts* en el plano $l^a - k^a$

$$k'^a = Ak^a, \qquad l'^a = A^{-1}l^a \tag{2.7}$$

donde $E, B \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$ y $A > 0$. Este conjunto de transformaciones posee seis parámetros reales independientes, correspondiendo a los seis parámetros del grupo de Lorentz.

2.1.1. Bivectores

Un bivector F_{ab} en $p \in \mathcal{M}$ es un tensor de segundo orden totalmente antisimétrico (o 2-forma). Si ϵ_{abcd} es la 4-forma de Levi-Civita que elegimos como orientación, definimos el bivector dual de F_{ab} como

$$^*F_{ab} := \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}F^{cd}. \tag{2.8}$$

Dado que la aplicación repetida del operador dual da como resultado $^{**}F_{ab} = -F_{ab}$, los posibles autovalores del operador dual son $\pm i$. En particular, un bivector F_{ab} se dice *autodual* si satisface

$$^*F_{ab} = -iF_{ab} \tag{2.9}$$

mientras que F_{ab} es *anti-autodual* si cumple

$$^*F_{ab} = iF_{ab} \tag{2.10}$$

Todo bivector autodual puede representarse por la 1-forma resultante de su contracción con un vector temporal:

$$\widetilde{F}_a := \widetilde{F}_{ab}T^b, \quad \widetilde{F}_aT^a = 0, \quad T_aT^a = -1, \tag{2.11}$$

siendo la fórmula de reconstrucción de $\widetilde{F}_{ab}$

$$\widetilde{F}_{ab} = 2T_{[a}\widetilde{F}_{b]} + i\epsilon_{abcd}T^c\widetilde{F}^d. \tag{2.12}$$

Observar que todo bivector complejo puede expresarse como combinación de un bivector autodual y uno anti-autodual, pues si $H_{ab} \in B_{\mathbb{C}}$, el espacio de bivectores complejos en p, entonces

$$H_{ab} = \frac{1}{2}(H_{ab} + i^*H_{ab}) + \frac{1}{2}(H_{ab} - i^*H_{ab}). \tag{2.13}$$

Separando H_{ab} en sus partes real e imaginaria podemos reescribir la parte autodual (anti-autodual) de (2.13) como $F_{ab} + i^*F_{ab}$ ($F_{ab} - i^*F_{ab}$), donde F_{ab} es real. Denotaremos por $S^+(p)$ el espacio de bivectores autoduales en el punto p y por $S^-(p)$ el de bivectores anti-autoduales. El espacio de bivectores se descompone en suma directa ortogonal de estos subespacios:

$$B_{\mathbb{C}} = S^+ \oplus S^-. \tag{2.14}$$

Al elegir una tetrada nula en el punto $p \in \mathcal{M}$, podemos construir explícitamente una base para el subespacio 3-dimensional S^+ de bivectores autoduales:

$$U_{ab} := 2\bar{m}_{[a}l_{b]} \tag{2.15}$$
$$W_{ab} := 2m_{[a}\bar{m}_{b]} - 2k_{[a}l_{b]} \tag{2.16}$$
$$V_{ab} := 2k_{[a}m_{b]} \tag{2.17}$$

mientras que una base para S^- se obtiene tomando los complejos conjugados de estos bivectores. Todas las contracciones entre estos elementos son nulas excepto

$$U_{ab}V^{ab} = 2, \qquad W_{ab}W^{ab} = -4. \tag{2.18}$$

Elementos del grupo de Lorentz actuando sobre la tetrada naturalmente inducen ciertas transformaciones en la base; por ejemplo, al hacer una rotación nula alrededor de l^a, resulta:

$$U'_{ab} = U_{ab} \tag{2.19}$$
$$W'_{ab} = W_{ab} - 2EU_{ab} \tag{2.20}$$
$$V'_{ab} = V_{ab} - EW_{ab} + E^2U_{ab}. \tag{2.21}$$

Desarrollaremos ahora una clasificación invariante de la estructura algebraica de bivectores, aprovechando que físicamente podemos corresponder estos objetos con campos electromagnéticos.

2.1.2. Clasificación invariante

Un campo electromagnético en un punto $p \in \mathcal{M}$ viene representado por una 2-forma F_{ab} que satisface las ecuaciones de Maxwell. A partir de F_{ab} construimos el campo autodual

$$\widetilde{F}_{ab} := F_{ab} + i^*F_{ab}, \tag{2.22}$$

el cual puede expandirse en la base $\{U_{ab}, W_{ab}, V_{ab}\}$,

$$\widetilde{F}_{ab} = \phi_0 U_{ab} + \phi_1 W_{ab} + \phi_2 V_{ab} \tag{2.23}$$

donde los coeficientes complejos ϕ_i están dados por

$$\phi_0 \ := \ \frac{1}{2}\widetilde{F}_{ab}V^{ab} = \widetilde{F}_{ab}k^a m^b \tag{2.24}$$

$$\phi_1 \ := \ -\frac{1}{4}\widetilde{F}_{ab}W^{ab} = -\frac{1}{2}\widetilde{F}_{ab}(m^a\bar{m}^b - k^a l^b) \tag{2.25}$$

$$\phi_2 \ := \ \frac{1}{2}\widetilde{F}_{ab}U^{ab} = \widetilde{F}_{ab}\bar{m}^a l^b. \tag{2.26}$$

Usando el vector temporal T^a asociado a la tetrada nula, construimos la 1-forma $\widetilde{F}_a = \widetilde{F}_{ab}T^b = E_a + iB_a$ (los campos eléctrico y magnético medidos por un observador con velocidad T^a), cuya expresión en la tetrada $\{T^a, X^a, Y^a, Z^a\} = \{e_0^a, e_1^a, e_2^a, e_3^a\}$ usada en (2.1)- (2.2) es

$$\widetilde{F}_a = \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_0)X_a - \frac{i}{2}(\phi_2 + \phi_0)Y_a - \phi_1 Z_a. \tag{2.27}$$

Una formulación posible de la clasificación de campos de Maxwell es a través del escalar $\widetilde{F}_a\widetilde{F}^a$. Notar que, dado que no tiene componente temporal, y ya que estamos usando una tetrada ortonormal, $\widetilde{F}_a$ es equivalente a un vector en un espacio complejo con métrica euclídea, entonces

$$\Delta := \widetilde{F}_a\widetilde{F}^a = \phi_1^2 - \phi_2\phi_0, \tag{2.28}$$

y observar que

$$-4\Delta = \widetilde{F}^{ab}\widetilde{F}_{ab} = 2(F^{ab}F_{ab} + i^*F^{ab}F_{ab}), \tag{2.29}$$

es decir que Δ está directamente relacionado con los invariantes de Maxwell del campo electromagnético, $F^{ab}F_{ab}$ y ${}^*F^{ab}F_{ab}$.

Campos de Maxwell en los que $\Delta \neq 0$ se denominan *no-degenerados*, mientras que aquellos que satisfacen $\Delta = 0$ se denominan *nulos* o *degenerados*. Para campos nulos, ambos invariantes son cero. Físicamente, esto implica que los campos eléctrico y magnético son ortogonales e iguales en módulo (en unidades $c = 1$). Un ejemplo típico de un campo de Maxwell nulo es una onda plana.

Veamos ahora una formulación equivalente de la clasificación [8], que admite una interpretación más geométrica. Pensando $\widetilde{F}_{ab}$ como un operador lineal antisimétrico que actúa sobre el espacio tangente $T_p(\mathcal{M})$, es natural estudiar su estructura algebraica mediante el problema de autovalores

$$\widetilde{F}_{ab}k^b = \lambda k_a. \tag{2.30}$$

Notar que (2.30) implica que k^adebe ser nulo y equivale a

$$k^a\widetilde{F}_{a[b}k_{c]} = 0, \tag{2.31}$$

y por lo tanto, $k^aF_{a[b}k_{c]} = 0 = k^{a*}F_{a[b}k_{c]}$. Llamamos *dirección nula* al subespacio generado por el autovector k^a. Usando la expansión en bivectores en una tetrada adaptada al autovector k^a tendremos

$$k^a\widetilde{F}_{a[b}k_{c]} = \phi_0\bar{m}_{[b}k_{c]}, \tag{2.32}$$

con lo cual (2.31) implica que k^a será autovector de $\widetilde{F}_{ab}$ si y sólo si $\phi_0 = 0$ en dicha tetrada. Para hallar los autovectores partiendo de una tetrada arbitraria $e'_\alpha{}^a$ aplicamos rotaciones nulas alrededor de l'^a para que k'^a coincida con el autovector k^a:

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_{ab} &= \phi'_0 U'_{ab} + \phi'_1 W'_{ab} + \phi'_2 V'_{ab} && (2.33)\\ &= (\phi'_0 - 2\phi'_1 E + \phi'_2 E^2) U_{ab} + (\phi'_1 - \phi'_2 E) W_{ab} + \phi'_2 V_{ab}. && (2.34)\end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \phi'_0 - 2\phi'_1 E + \phi'_2 E^2 &= \phi_0 && (2.35)\\ \phi'_1 - \phi'_2 E &= \phi_1 && (2.36)\\ \phi'_2 &= \phi_2. && (2.37)\end{aligned}$$

A partir de la condición $\phi_0 = 0$ obtenemos la ecuación cuadrática en E

$$\phi'_0 - 2\phi'_1 E + \phi'_2 E^2 = 0. \tag{2.38}$$

Podemos clasificar los campos de Maxwell de acuerdo al número de raíces de esta ecuación. Notar que el discriminante es $\phi_1'^2 - \phi'_0\phi'_2 \equiv \Delta$, de esta forma vemos que la clasificación que haremos es equivalente a la anterior. El número de raíces es igual al número de direcciones k^a distintas en que podemos obtener $\phi_0 = 0$, esto es, la cantidad de direcciones nulas del campo.

Nuevamente, los campos que cumplen $\Delta \neq 0$ son no-degenerados. Si $\phi'_2 \neq 0$, se tienen en general dos raíces dadas por:

$$E_\pm = \frac{\phi'_1}{\phi'_2} \pm \frac{1}{\phi'_2}\sqrt{\Delta}, \tag{2.39}$$

y por lo tanto existen dos direcciones nulas principales. Si $\phi'_2 = 0$ entonces se tiene una sola raíz, pero $\phi'_2 = 0$ implica $\phi_2 = 0$ con lo cual se ve fácilmente que l^a es también autovector de $\widetilde{F}_{ab}$. Por lo tanto, los campos de Maxwell no degenerados son aquellos que poseen dos direcciones nulas principales.

Los campos que satisfacen $\Delta = 0$ son nulos; la ecuación posee una raíz doble y correspondientemente una dirección principal nula *repetida*.

2.2. Clasificación del tensor de Weyl

El estudio de las simetrías algebraicas de la curvatura da lugar a lo que se conoce como clasificación de Petrov. Más precisamente, esta clasificación se aplica a la parte sin traza de la curvatura, es decir al tensor conforme o de Weyl. Este tensor se define a partir del tensor de Riemann mediante

$$R^{ab}{}_{cd} = C^{ab}{}_{cd} - \frac{1}{2} R \delta^a_{[c} \delta^b_{d]} + 2\delta^{[a}_{[c} R^{b]}_{d]} \tag{2.40}$$

Para variedades Ricci-planas (vacío), los tensores de Riemann y Weyl coinciden, $R^{ab}{}_{cd} \equiv C^{ab}{}_{cd}$, y el espacio sólo tiene curvatura conforme.

El tensor de Weyl tiene diez componentes reales independientes, y satisface las siguientes simetrías:

$$C_{abcd} = -C_{bacd} = -C_{abdc} \tag{2.41}$$
$$C_{abcd} = C_{cdab} \tag{2.42}$$
$$C_{a[bcd]} = 0. \tag{2.43}$$

Además, ya que es libre de traza, la contracción de cualesquiera dos de sus índices es idénticamente cero. Para un tensor con estas simetrías, definimos el dual *izquierdo* como

$$^*C_{abcd} := \frac{1}{2} \epsilon_{abef} C^{ef}{}_{cd} \tag{2.44}$$

y el dual *derecho*

$$C^*_{abcd} := \frac{1}{2} C_{ab}{}^{ef} \epsilon_{cdef} \tag{2.45}$$

En virtud de que $C^a{}_{bad} = 0$, se tiene $^*C_{abcd} = C^*_{abcd}$. Usamos este hecho para definir el tensor de Weyl autodual como

$$\widetilde{C}_{abcd} := C_{abcd} + i^* C_{abcd} \tag{2.46}$$

siendo la posición de * irrelevante.

El tensor autodual tiene las mismas simetrías que el Weyl, en particular (2.42) implica que es autodual en ambos pares de índices, por lo que puede expandirse usando productos tensoriales de las 2-formas $\{U_{ab}, W_{ab}, V_{ab}\}$. Usando además la condición de traza nula resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\widetilde{C}_{abcd} = {} & \Psi_0 U_{ab} U_{cd} + \Psi_1 (U_{ab} W_{cd} + W_{ab} U_{cd}) + \Psi_2 (V_{ab} U_{cd} + U_{ab} V_{cd} + W_{ab} W_{cd}) \\ & + \Psi_3 (V_{ab} W_{cd} + W_{ab} V_{cd}) + \Psi_4 V_{ab} V_{cd} \end{aligned} \tag{2.47}$$

donde los cinco coeficientes complejos Ψ_i se denominan *escalares de Weyl* y representan las diez componentes reales del tensor de Weyl. Explícitamente:

$$\Psi_0 := C_{abcd} k^a m^b k^c m^d \tag{2.48}$$
$$\Psi_1 := C_{abcd} k^a l^b k^c m^d \tag{2.49}$$
$$\Psi_2 := C_{abcd} k^a m^b \bar{m}^c l^d = \tfrac{1}{2} C_{abcd} k^a l^b (k^c l^d - m^a \bar{m}^b) \tag{2.50}$$
$$\Psi_3 := C_{abcd} k^a l^b \bar{m}^c l^d \tag{2.51}$$
$$\Psi_4 := C_{abcd} \bar{m}^a l^b \bar{m}^c l^d. \tag{2.52}$$

2.2.1. Estructura de autovalores

El problema de autovalores para el tensor autodual de Weyl consiste en encontrar los bivectores Z_{ab} y los números complejos $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que

$$\frac{1}{4}\widetilde{C}_{abcd}Z^{cd} = \lambda Z_{ab}. \tag{2.53}$$

Es posible resolver este problema de una manera equivalente y mucho más simple [9], como veremos a continuación.

Al igual que hicimos anteriormente con bivectores, el tensor autodual puede representarse totalmente por su proyección sobre un vector unitario temporal:

$$-Q_{ac} := \widetilde{C}_{abcd}u^b u^d =: E_{ac} + iB_{ac}, \qquad u_c u^c = -1 \tag{2.54}$$

de acuerdo a la expresión

$$-\frac{1}{2}\widetilde{C}_{abcd} = 4u_{[a}Q_{b][d}u_{c]} + g_{a[c}Q_{d]b} - g_{b[c}Q_{d]a} + i\epsilon_{abef}u^e u_{[c}Q_{d]}{}^f + i\epsilon_{cdef}u^e u_{[a}Q_{b]}{}^f \tag{2.55}$$

En analogía con el campo de Maxwell, los tensores E_{ac} y B_{ac} se denominan parte *eléctrica* y parte *magnética* del tensor de Weyl, el cual se dice *puramente eléctrico* si Q_{ac} es real, y *puramente magnético* si Q_{ac} es imaginario. El tensor complejo Q_{ab} tiene las siguientes propiedades:

$$Q_{ab} = Q_{ba}, \qquad Q^a{}_a = 0, \qquad Q_{ab}u^b = 0 \tag{2.56}$$

Por lo tanto, puede considerarse como una matriz compleja 3×3 simétrica y de traza nula. En particular, si usamos la tetrada ortonormal $\{T^a, X^a, Y^a, Z^a\}$, podemos proyectar los bivectores autoduales U_{ab}, V_{ab}, W_{ab} sobre el vector unitario temporal T^a y usar la expansión de $\widetilde{C}_{abcd}$ con el fin de obtener una expresión explícita para Q_{ab}:

$$\begin{aligned} Q_{ab} \;=\; & \left(-\frac{1}{2}\Psi_0 + \Psi_2 - \frac{1}{2}\Psi_4\right)X_aX_b + \frac{i}{2}(\Psi_4 - \Psi_0)2X_{(a}Y_{b)} + (\Psi_1 - \Psi_3)2X_{(a}Z_{b)} \\ & + \left(\frac{1}{2}\Psi_0 + \Psi_2 + \frac{1}{2}\Psi_4\right)Y_aY_b + i(\Psi_1 + \Psi_3)2Y_{(a}Z_{b)} - 2\Psi_2 Z_aZ_c \end{aligned} \tag{2.57}$$

o en forma matricial (notar que las matrices de componentes de Q_{ab} y $Q^a{}_b$ coinciden):

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\Psi_0 + \Psi_2 - \frac{1}{2}\Psi_4 & \frac{i}{2}(\Psi_4 - \Psi_0) & \Psi_1 - \Psi_3 \\ \frac{i}{2}(\Psi_4 - \Psi_0) & \frac{1}{2}\Psi_0 + \Psi_2 + \frac{1}{2}\Psi_4 & i(\Psi_1 + \Psi_3) \\ \Psi_1 - \Psi_3 & i(\Psi_1 + \Psi_3) & -2\Psi_2 \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

Estudiar la estructura algebraica del tensor de Weyl es equivalente a estudiar el problema de autovalores para esta matriz $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Qr} = \lambda\mathbf{r}. \tag{2.59}$$

Debe resolverse entonces la ecuación

$$\det(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) = 0 =: p(\lambda) \tag{2.60}$$

cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^3 - I\lambda - 2J, \tag{2.61}$$

donde se han definido los escalares *invariantes*

$$I := -4\Psi_1\Psi_3 + \Psi_0\Psi_4 + 3\Psi_2^2, \tag{2.62}$$

$$J := \begin{vmatrix} \Psi_0 & \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \\ \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 \end{vmatrix} = -\Psi_2^3 + \Psi_0\Psi_2\Psi_4 + 2\Psi_1\Psi_2\Psi_3 - \Psi_4\Psi_1^2 - \Psi_0\Psi_3^2. \tag{2.63}$$

Estos escalares no dependen de la elección de la tetrada, y son además invariantes de curvatura:

$$\widetilde{C}_{abcd}\widetilde{C}^{abcd} = 2(C_{abcd} + i^*C_{abcd})C^{abcd} \equiv 32I \tag{2.64}$$

$$\widetilde{C}_{abcd}\widetilde{C}^{cd}{}_{mn}\widetilde{C}^{mnab} \equiv 384J \tag{2.65}$$

En espaciotiempos vacíos, $\frac{1}{2}\Re(32I)$ es el invariante de Kretschmann $K \equiv R_{abcd}R^{abcd}$. En términos de los autovalores, se tiene:

$$I = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2), \tag{2.66}$$

$$J = \frac{1}{6}(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3) = \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{2.67}$$

Las raíces del polinomio característico son:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}(R_+ + R_-) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(R_+ - R_-) \tag{2.68}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}(R_+ + R_-) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(R_+ - R_-) \tag{2.69}$$

$$\lambda_3 = R_+ + R_- \tag{2.70}$$

donde

$$R_\pm := \left(J \pm \sqrt{J^2 - \frac{I^3}{27}}\right)^{1/3}. \tag{2.71}$$

Si $I^3 \neq 27J^2$ las tres raíces son distintas y el espaciotiempo se denomina **Petrov tipo I**. La matriz $\mathbf{Q}$ debe satisfacer entonces:

$$(\mathbf{Q} - \lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{Q} - \lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{Q} - \lambda_3\mathbf{I}) = 0. \tag{2.72}$$

Estos espacios serán puramente eléctricos si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son todos reales, y puramente magnéticos si son imaginarios.

El caso $I^3 = 27J^2$ se conoce como *algebraicamente especial* y al menos dos de las raíces coinciden:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2J^{1/3} \tag{2.73}$$
$$\lambda_3 = 4J^{1/3} \tag{2.74}$$

Si $I^3 = 27J^2 \neq 0$, tenemos $\dim(\ker(\mathbf{Q} - \lambda_3 \mathbf{I})) = 1$ y podemos distinguir dos casos para $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv -\lambda/2$ de acuerdo a la multiplicidad geométrica del autovalor:

- **Petrov tipo II**: $\dim(\ker(\mathbf{Q} - \lambda_2 \mathbf{I})) = 1, \qquad (\mathbf{Q} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{I})^2(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) = 0$
- **Petrov tipo D**: $\dim(\ker(\mathbf{Q} - \lambda_2 \mathbf{I})) = 2, \qquad (\mathbf{Q} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{I})(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$

En tipo **D**, existen tres autovectores linealmente independientes (L.I) de **Q** y por lo tanto la matriz es diagonalizable. En cambio, en el tipo **II** hay sólo dos autovectores L.I y **Q** no es diagonalizable.

Supongamos ahora $I = J = 0$, con lo cual los tres autovalores son cero, la matriz **Q** debe ser nilpotente de grado ≤ 3 y por lo tanto no es diagonalizable (salvo $\mathbf{Q} \equiv 0$). Tenemos entonces tres casos:

- **Petrov tipo III**: $\dim(\ker(\mathbf{Q})) = 1, \qquad \mathbf{Q}^3 \equiv 0$
- **Petrov tipo N**: $\dim(\ker(\mathbf{Q})) = 2, \qquad \mathbf{Q}^2 \equiv 0$
- **Petrov tipo O**: $\dim(\ker(\mathbf{Q})) = 3, \qquad \mathbf{Q} \equiv 0$

Estos 6 tipos son las únicas posibilidades para la estructura algebraica de **Q** (y por lo tanto del tensor de Weyl). En resumen, de acuerdo a su estructura espectral, un espaciotiempo puede ser algebraicamente general (Petrov **I**) o algebraicamente especial (Petrov **II**, **D**, **III**, **N** y **O**).

Los cambios de base que llevan la matriz **Q** a su forma más simple (es decir, a su forma diagonal o a su forma de Jordan) se realizan mediante elementos del grupo $SO(3, \mathbb{C})$ (el cual es isomorfo al grupo restringido de Lorentz $SO^+(3, 1)$). Esta forma simple de **Q** se denomina *forma normal*, y la base que conduce a la misma se conoce como *tetrada principal de Weyl* o *canónica*.

En el caso algebraicamente general o Petrov **I**, la tetrada canónica produce

$$\Psi_1 = \Psi_3 = 0 \tag{2.75}$$
$$\Psi_0 = \Psi_4 = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) \tag{2.76}$$
$$\Psi_2 = -\frac{1}{2}\lambda_3. \tag{2.77}$$

La expresión para el tensor de Weyl autodual es entonces:

$$\widetilde{C}_{abcd} = 2\Psi_0(U_{ab}U_{cd} + V_{ab}V_{cd}) + 2\Psi_2(V_{ab}U_{cd} + U_{ab}V_{cd} + W_{ab}W_{cd}) \tag{2.78}$$

y de aquí pueden deducirse los autobivectores:

$$Z^{(1)}_{ab} := V_{ab} - U_{ab} = 2(T_{[a}X_{b]} + iY_{[a}Z_{b]}) \tag{2.79}$$
$$Z^{(2)}_{ab} := i(V_{ab} + U_{ab}) = 2(T_{[a}Y_{b]} + iZ_{[a}X_{b]}) \tag{2.80}$$
$$Z^{(3)}_{ab} := W_{ab} = 2(T_{[a}Z_{b]} + iX_{[a}Y_{b]}). \tag{2.81}$$

Estos objetos son suma de dos bivectores, los cuales representan un plano temporal ($T_{[a}X_{b]}$, $T_{[a}Y_{b]}$ y $T_{[a}Z_{b]}$) y un plano espacial ($Y_{[a}Z_{b]}$, $Z_{[a}X_{b]}$ y $X_{[a}Y_{b]}$). La intersección de estos planos determina la tetrada principal ([7],[9]).

Los espacios Petrov **D** resultan de gran interés, dado que la familia de Kerr (y, en particular, la solución de Schwarzschild) pertenece a esta clase. Puede obtenerse la estructura algebraica de este espaciotiempo a partir de la de Petrov **I** haciendo $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ (notar, no obstante, que el caso de Petrov **II** no se obtiene de Petrov **I** ya que no posee tres autovectores L.I). Para los escalares de Weyl tenemos entonces:

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \qquad \Psi_2 = \lambda, \tag{2.82}$$

mientras que el tensor autodual tiene la forma

$$\widetilde{C}_{abcd} = 2\Psi_2(V_{ab}U_{cd} + U_{ab}V_{cd} + W_{ab}W_{cd}). \tag{2.83}$$

Los autobivectores son U_{ab} y V_{ab} con autovalor $4\Psi_2$, y W_{ab} con autovalor $-8\Psi_2$.

La tetrada principal en este caso no está unívocamente determinada, dado que el tensor autodual es invariante bajo rotaciones de spin y boosts. Por lo tanto, el subgrupo del grupo de Lorentz compuesto por estas transformaciones preserva la forma normal del tensor autodual.

Obsérvese que estos espacios serán puramente eléctricos si en la tetrada principal Ψ_2 es real, y puramente magnéticos si es imaginario. Más aún, puede probarse que no hay espacios Petrov **D** vacíos con un tensor de Weyl puramente magnético [11].

2.2.2. Direcciones principales nulas

Además de la estructura de autovalores del tensor de Weyl, existen distintos enfoques equivalentes para la clasificación de Petrov. Uno de ellos se basa en el número de direcciones principales nulas, las cuales se definen como las direcciones expandidas por aquellos vectores k^a que cumplen

$$k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c = 0. \tag{2.84}$$

Estos vectores son reales, entonces satisfacen la misma relación reemplazando $\widetilde{C}_{abcd}$ por C_{abcd} o por ${}^*C_{abcd}$.

Usando la expansión del tensor autodual con respecto a una tetrada nula arbitraria $\{l^a, k^a, m^a, \bar{m}^a\}$, se prueba fácilmente que

$$\frac{1}{2}k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c = \Psi_0 k_{[e}\bar{m}_{a]}\bar{m}_{[d}k_{f]} \tag{2.85}$$

Por lo tanto, la condición (2.84) es equivalente a $\Psi_0 = 0$. Para determinar las direcciones principales nulas, se expande el tensor autodual en términos de otra tetrada nula arbitraria $\{l^{a'}, k^{a'}, m^{a'}, \bar{m}^{a'}\}$, y al igual que hicimos anteriormente con bivectores autoduales, inducimos transformaciones de Lorentz para encontrar aquellos vectores k^a que satisfacen $\Psi_0 = 0$. Bajo una rotación nula alrededor de l^a, tenemos:

$$\Psi_0 = \Psi_0' - 4E\Psi_1' + 6E^2\Psi_2' - 4E^3\Psi_3' + E^4\Psi_4' \tag{2.86}$$

Al requerir $\Psi_0 = 0$, obtenemos una ecuación cuártica para el parámetro E. De acuerdo al número de raíces de esta ecuación, tendremos hasta cuatro direcciones nulas k^a para las que $\Psi_0 = 0$. Los espacios Petrov son entonces los siguientes

- **Petrov I**: cuatro raíces distintas
- **Petrov II**: una raíz doble y dos simples
- **Petrov D**: dos raíces dobles
- **Petrov III**: una raíz triple y una simple
- **Petrov N**: una raíz cuádruple
- **Petrov O**: el tensor de Weyl es idénticamente cero (espacios conformemente planos)

Para determinar las raíces, podemos empezar con las formas normales de la matriz **Q** estudiadas anteriormente, es decir con la tetrada principal en la que algunos coeficientes de Weyl son cero.

En Petrov **I**, tenemos $\Psi_1 = \Psi_3 = 0$, $\Psi_0 = \Psi_4 = (\lambda_2 - \lambda_1)/2$, $\Psi_2 = (\lambda_2 + \lambda_1)/2$, con lo cual las raíces son:

$$E_{(\zeta,\eta)} \equiv \zeta \frac{\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1} + \eta\sqrt{\lambda_3 - \lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}} \equiv \zeta \frac{\sqrt{2\lambda_1 + \lambda_2} + \eta\sqrt{2\lambda_2 + \lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}} \tag{2.87}$$

donde ζ y η asumen independientemente los valores ± 1. Es importante notar que las 4 direcciones nulas en Petrov **I** no necesariamente expanden un espacio 4-dimensional: si existe un observador (es decir un vector unitario temporal) para el cual el tensor de Weyl es puramente eléctrico o puramente magnético, las direcciones principales nulas son linealmente dependientes (ver [9], p.54).

En Petrov **D** tenemos $\lambda_2 = \lambda_1$, con lo que las raíces son $E = 0$ y $E = \infty$, ambas con degeneración 2. Para $E = 0$, esto indica que el vector k^a de la tetrada nula asociada a la tetrada principal constituye en sí mismo una dirección principal nula. La raíz $E = \infty$ indica que hay una dirección principal que no puede obtenerse a partir de la transformación (3.21). Como esta transformación es una rotación alrededor de l^a, esto claramente quiere decir que la otra dirección principal es justamente l^a [1]. Por lo tanto, las direcciones principales nulas en espacios Petrov **D** son aquellas expandidas por los vectores nulos k^a y l^a asociados a la tetrada ortonormal.

2.2.3. Tipo de Petrov de la solución de Schwarzschild

Ilustraremos ahora la clasificación algebraica recién desarrollada, tomando como ejemplo la solución de Schwarzschild, dado que será de utilidad más adelante en las aplicaciones.

La métrica en coordenadas (t, r, θ, ϕ) es

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.88}$$

donde $f(r) = 1 - 2M/r$.

Usando la tetrada ortonormal definida por

$$T^a = \frac{1}{\sqrt{f}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, \quad X^a = \sqrt{f}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a, \quad Y^a = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^a, \quad Z^a = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a \tag{2.89}$$

construimos la tetrada nula

$$l^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^a - X^a), \qquad m^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y^a - iZ^a) \tag{2.90}$$

$$k^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^a + X^a), \qquad \bar{m}^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y^a + iZ^a). \tag{2.91}$$

[1] esto puede verificarse fácilmente reemplazando la contracción (2.84) con l^a en lugar de k^a, y haciendo rotaciones que dejan invariante k^a.

Los escalares de Weyl asociados a esta tetrada resultan:

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \qquad \Psi_2 = -\frac{M}{r^3}, \tag{2.92}$$

por lo tanto el espaciotiempo es Petrov tipo **D** con direcciones principales nulas (repetidas) k^a y l^a. Como $\Psi_2 \in \mathbb{R}$, el tensor de Weyl es puramente eléctrico, y contrayendo el tensor autodual con T^a para formar Q_{ab} tenemos:

$$\mathbf{Q} = \mathrm{diag}\left(\frac{2M}{r^3}, -\frac{M}{r^3}, -\frac{M}{r^3}\right) \tag{2.93}$$

Los invariantes de curvatura I y J son:

$$I = \frac{3M^2}{r^6}, \qquad J = \frac{M^3}{r^9}. \tag{2.94}$$

Capítulo 3

Perturbaciones de espaciotiempos tipo D

En el capítulo anterior formulamos la clasificación de Petrov a partir de la estructura de autovalores del tensor autodual de Weyl. Usando un vector temporal unitario, este tensor viene representado por una matriz $\mathbf{Q}$ compleja, 3×3, simétrica y de traza nula que contiene la información de la curvatura mediante combinaciones de los escalares de Weyl. Vimos además que, alternativamente, el tipo de Petrov puede caracterizarse en base al número de direcciones principales nulas del espacio. Nos proponemos estudiar ahora cómo es afectada esta estructura algebraica y sus direcciones nulas bajo perturbaciones lineales de un cierto espaciotiempo. En particular, asumiremos que el background es Petrov tipo D, dado que deseamos estudiar perturbaciones de agujeros negros.

Consideremos entonces una perturbación lineal donde la métrica es $g_{ab}(\epsilon) = g_{ab}(0) + \epsilon\delta g_{ab}$. En la literatura [12] se ha definido el *índice de especialidad* $\mathcal{S} := 27J^2/I^3$ como un parámetro que mide *en soluciones exactas* si un espaciotiempo es algebraicamente especial o no. En los espacios algebraicamente especiales en que $I \neq J \neq 0$ (Petrov D ó II), se tiene $\mathcal{S} = 1$, mientras que el caso algebraicamente general se caracteriza por $\mathcal{S} \neq 1$. Usando variaciones de segundo orden, puede demostrarse que el desarrollo perturbativo del índice de especialidad alrededor de un background tipo D es [12]

$$\mathcal{S}(\epsilon) = 1 - 3\frac{\delta\Psi_0\delta\Psi_4}{\Psi_2^2}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{3.1}$$

Ya que $\mathcal{S}(\epsilon)$ se aparta de la unidad recién a segundo orden perturbativo, esto en principio puede interpretarse como que la especialidad algebraica no es afectada por perturbaciones lineales, lo cual indicaría que espaciotiempos tipo D perturbados retienen su carácter de algebraicamente especiales. No obstante, veremos a continuación que esta interpretación no es correcta. Tanto el enfoque de autovalores como el de direcciones principales nulas nos llevarán a concluir que el espacio perturbado es tipo I en la clasificación de Petrov.

Es fácil ver que en la teoría linealizada (1.9) el tensor de Weyl adquiere correcciones a primer orden:

$$C_{abcd}(\epsilon) = C_{abcd}(0) + \epsilon\delta C_{abcd}(\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{3.2}$$

y que es posible construir una tetrada, ortonormal a primer orden para la métrica (1.9), de la forma:

$$e^a_\alpha(\epsilon) = e^a_\alpha + \epsilon\delta e^a_\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.3}$$

con $e^a_\alpha \equiv e^a_\alpha(0)$. La elección (3.3) no es única, es fácil ver que, *a primer orden en* ϵ, $e'^a_\alpha(\epsilon) := e^a_\alpha(\epsilon) + \Lambda^\beta{}_\alpha(\epsilon)e^a_\beta(\epsilon)$, $\Lambda^\beta{}_\alpha(\epsilon = 0) = \delta^\beta{}_\alpha$ es también una tetrada ortonormal de (1.9). Los efectos de esta *libertad de gauge de tetrada* se analizan debajo en (3.6)-(3.8)

3.1. Escalares de Weyl

Comencemos por estudiar la linealización de los escalares de Weyl, pues los dos enfoques que utilizaremos para la clasificación de Petrov están basados en estos escalares. Su linealización se obtiene a partir de la definición general utilizando el tensor de Weyl perturbado y la tetrada nula perturbada; por ejemplo:

$$\Psi_2(\epsilon) = C_{abcd}(\epsilon)k^a(\epsilon)m^b(\epsilon)\bar{m}^c(\epsilon)l^a(\epsilon) = \Psi_2 + \epsilon\delta\Psi_2 \tag{3.4}$$

con $\Psi_2 = \Psi_2(0)$, y

$$\begin{aligned}\delta\Psi_2 = \left.\frac{d\Psi_2(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} &= C_{abcd}(0)(\delta k^a m^b\bar{m}^c l^d + k^a\delta m^b\bar{m}^c l^d + k^a m^b\delta\bar{m}^c l^d + k^a m^b\bar{m}^c\delta l^d) \\ &\quad +\delta C_{abcd}k^a m^b\bar{m}^c l^d. \end{aligned}\tag{3.5}$$

La tetrada de background ha sido elegida. Recordar que, salvo por el subgrupo 2-dimensional del grupo de Lorentz correspondiente a transformaciones de boost que fijen las dos direcciones nulas, y rotaciones de spin, esta es única. Sin embargo, la tetrada perturbada posee la libertad completa de transformaciones de Lorentz infinitesimales (3.3) (ver también [3]), las cuales son elementos del grupo de Lorentz que dependen del parámetro ϵ pero se reducen a la identidad para $\epsilon \to 0$. Como antes, resulta conveniente separar el grupo de Lorentz en tres subgrupos biparamétricos:

- Rotaciones nulas alrededor de l^a

$$\delta l'^a = \delta l^a, \quad \delta k'^a = \delta k^a + \epsilon(\bar{a}m^a + a\bar{m}^a), \quad \delta m'^a = \delta m^a + \epsilon a l^a \tag{3.6}$$

- Rotaciones nulas alrededor de k^a

$$\delta k'^a = \delta k^a, \quad \delta l'^a = \delta l^a + \epsilon(\bar{b}m^a + b\bar{m}^a), \quad \delta m'^a = \delta m^a + \epsilon b k^a \tag{3.7}$$

- Boosts y rotaciones de spin

$$\delta l'^a = \delta l^a + \epsilon c l^a, \quad \delta k'^a = \delta k^a - \epsilon c k^a, \quad \delta m'^a = \delta m^a - i\epsilon\theta m^a \tag{3.8}$$

Aquí, a y b son campos escalares complejos mientras que c y θ son reales. Los escalares de Weyl naturalmente se tranforman bajo la acción de estas rotaciones. Por ejemplo, para rotaciones que dejan invariante la dirección l^a:

$$\delta\Psi_{4-n} \to \delta\Psi'_{4-n} = \delta\Psi_{4-n} + \epsilon n a \Psi_{5-n}, \quad n = 0, ..., 4; \;\; \Psi_5 \equiv 0, \tag{3.9}$$

mientras que las rotaciones alrededor de k^a producen

$$\delta\Psi_n \to \delta\Psi'_n = \delta\Psi_n + \epsilon n \bar{b} \Psi_{n-1}, \quad n = 0, ..., 4; \;\; \Psi_{-1} \equiv 0. \tag{3.10}$$

Puede probarse que $\delta\Psi_0$, $\delta\Psi_2$, y $\delta\Psi_4$ en un background tipo D son invariantes frente a todas estas transformaciones.

Al perturbar un espaciotiempo tipo D alrededor de la tetrada canónica, los escalares de Weyl serán en general

$$\begin{aligned} \Psi_k(\epsilon) &= \delta\Psi_k\epsilon, \quad k = 0, ..., 4, \quad k \neq 2, \\ \Psi_2(\epsilon) &= \Psi_2 + \epsilon\delta\Psi_2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nótese que el hecho de perturbar la tetrada canónica implica que, excepto por $\delta\Psi_2$, las demás linealizaciones son invariantes de gauge.

3.2. Autovalores

Para estudiar la estructura espectral, consideramos el tensor $Q_{ac}(\epsilon)$, que está dado por

$$Q_{ac}(\epsilon) = -\widetilde{C}_{abcd}(\epsilon) T^b(\epsilon) T^d(\epsilon) = Q_{ac}(0) + \epsilon\delta Q_{ac} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{3.12}$$

donde $T^a \equiv e^a_0$ y

$$\delta Q_{ac} \equiv \left.\frac{dQ_{ac}(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = -\delta\widetilde{C}_{abcd} T^b T^d - 2\widetilde{C}_{abcd}(0)\delta T^{(b} T^{d)}. \tag{3.13}$$

Utilizando la expansión de $\widetilde{C}_{abcd}(\epsilon)$ en bivectores autoduales y el hecho de que la tetrada perturbada es ortonormal a primer orden, la expresión matricial de $\mathbf{Q}(\epsilon)$ es, como vimos en el capítulo anterior,

$$\mathbf{Q}(\epsilon) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\Psi_0(\epsilon) + \Psi_2(\epsilon) - \frac{1}{2}\Psi_4(\epsilon) & \frac{i}{2}(\Psi_4(\epsilon) - \Psi_0(\epsilon)) & \Psi_1(\epsilon) - \Psi_3(\epsilon) \\ \frac{i}{2}(\Psi_4(\epsilon) - \Psi_0(\epsilon)) & \frac{1}{2}\Psi_0(\epsilon) + \Psi_2(\epsilon) + \frac{1}{2}\Psi_4(\epsilon) & i(\Psi_1(\epsilon) + \Psi_3(\epsilon)) \\ \Psi_1(\epsilon) - \Psi_3(\epsilon) & i(\Psi_1(\epsilon) + \Psi_3(\epsilon)) & -2\Psi_2(\epsilon) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Con los escalares de Weyl dados por (3.11), reemplazamos en esta expresión y calculamos los autovalores. El resultado es

$$\lambda_1(\epsilon) = -2\Psi_2 - 2\delta\Psi_2\epsilon, \tag{3.15}$$

$$\lambda_2(\epsilon) = \Psi_2 + (\delta\Psi_2 + i\sqrt{-\delta\Psi_0\delta\Psi_4})\epsilon, \tag{3.16}$$

$$\lambda_3(\epsilon) = \Psi_2 + (\delta\Psi_2 - i\sqrt{-\delta\Psi_0\delta\Psi_4})\epsilon. \tag{3.17}$$

Si $\delta\Psi_0 \neq 0$ y $\delta\Psi_4 \neq 0$, los tres autovalores son distintos. Según el esquema desarrollado en el capítulo 2, esto implica que el espaciotiempo es algebraicamente general o tipo I. El autovalor Ψ_2 del background sufre un desdoblamiento bajo la perturbación, y su corrección está dada por las variaciones $\delta\Psi_2$, $\delta\Psi_0$ y $\delta\Psi_4$. Notar que, dado que precisamente estos escalares son invariantes bajo transformaciones de la tetrada perturbada, esto es consistente con el hecho de que los autovalores no dependen de la base.

Los autovectores asociados resultan:

$$\begin{aligned}
V_1^i(\epsilon) &= X^i - \frac{1}{3\Psi_2}(\delta\Psi_1 - \delta\Psi_3)\epsilon Y^i - \frac{i}{3\Psi_2}(\delta\Psi_1 + \delta\Psi_3)\epsilon Z^i \\
V_2^i(\epsilon) &= \epsilon X^i + \left(\frac{3\Psi_2[(\delta\Psi_1 + \delta\Psi_3)\sqrt{-\delta\Psi_0\delta\Psi_4}i - \delta\Psi_1\delta\Psi_4 - \delta\Psi_0\delta\Psi_3]}{2(\delta\Psi_0\delta\Psi_3^2 - \delta\Psi_4\delta\Psi_1^2)} + \mathcal{O}(\epsilon)\right) Y^i \\
&\quad + \left(\frac{3i\Psi_2[(\delta\Psi_1 - \delta\Psi_3)\sqrt{-\delta\Psi_0\delta\Psi_4}i + \delta\Psi_1\delta\Psi_4 - \delta\Psi_0\delta\Psi_3]}{2(\delta\Psi_0\delta\Psi_3^2 - \delta\Psi_4\delta\Psi_1^2)} + \mathcal{O}(\epsilon)\right) Z^i \\
V_3^i(\epsilon) &= \epsilon X^i - \left(\frac{3\Psi_2[(\delta\Psi_1 + \delta\Psi_3)\sqrt{-\delta\Psi_0\delta\Psi_4}i + \delta\Psi_1\delta\Psi_4 + \delta\Psi_0\delta\Psi_3]}{2(\delta\Psi_0\delta\Psi_3^2 - \delta\Psi_4\delta\Psi_1^2)} + \mathcal{O}(\epsilon)\right) Y^i \\
&\quad - \left(\frac{3i\Psi_2[(\delta\Psi_1 - \delta\Psi_3)\sqrt{-\delta\Psi_0\delta\Psi_4}i - \delta\Psi_1\delta\Psi_4 - \delta\Psi_0\delta\Psi_3]}{2(\delta\Psi_0\delta\Psi_3^2 - \delta\Psi_4\delta\Psi_1^2)} + \mathcal{O}(\epsilon)\right) Z^i
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Estos autovectores permiten reconstruir las 2-formas autoduales mediante la expresión (2.12). Para un autovector $U = (U_1, U_2, U_3)$ de los anteriores, las componentes de la 2-forma autodual asociada son

$$\widetilde{F}_{0i} = -U_i, \qquad \widetilde{F}_{12} = iU_3 \qquad \widetilde{F}_{13} = -iU_2 \qquad \widetilde{F}_{23} = iU_1. \tag{3.19}$$

3.3. Desdoblamiento de las Direcciones Principales Nulas

Deseamos estudiar ahora el efecto de perturbaciones lineales de la métrica sobre las direcciones principales nulas. En primer lugar, recordemos que para cualquier espaciotiempo, el tensor de Weyl autodual satisface

$$\frac{1}{2} k_{[e} \widetilde{C}_{a]bc[d} k_{f]} k^b k^c = \Psi_0 k_{[e} \bar{m}_{a]} \bar{m}_{[d} k_{f]} \tag{3.20}$$

para una tetrada nula arbitraria $\{k^a, l^a, m^a, \bar{m}^a\}$. Hacemos ahora una rotación nula alrededor de l^a:

$$l^a \to l^a, \quad k^a \to k^a + E\bar{E} l^a + \bar{E} m^a + E \bar{m}^a, \quad m^a \to m^a + E l^a \tag{3.21}$$

la cual ocasiona la siguiente transformación del escalar de Weyl Ψ_0:

$$\Psi_0 \to \Psi_0 + 4E\Psi_1 + 6E^2\Psi_2 + 4E^3\Psi_3 + E^4\Psi_4 =: P(E) \tag{3.22}$$

La ecuación (3.20) pasa a ser ahora

$$\frac{1}{2} k_{[e} \widetilde{C}_{a]bc[d} k_{f]} k^b k^c = (\Psi_0 + 4E\Psi_1 + 6E^2\Psi_2 + 4E^3\Psi_3 + E^4\Psi_4) k_{[e} \bar{m}_{a]} \bar{m}_{[d} k_{f]}. \tag{3.23}$$

Al perturbar linealmente el espaciotiempo, todas las cantidades en (3.23) pasan a depender del parámetro perturbativo ϵ. Para un background tipo D perturbado alrededor de la tetrada canónica, tenemos

$$\begin{aligned} P(E) &= \epsilon\delta\Psi_0 + 4\epsilon\delta\Psi_1 E + 6(\Psi_2 + \epsilon\delta\Psi_2)E^2 + 4\epsilon\delta\Psi_3 E^3 + \epsilon\delta\Psi_4 E^4 & (3.24) \\ &= \epsilon\delta\Psi_0 + 6\Psi_2 E^2 + \left[4\delta\Psi_1 E + 6\delta\Psi_2 E^2 + 4\delta\Psi_3 E^3 + \delta\Psi_4 E^4\right]\epsilon & (3.25) \end{aligned}$$

Ahora, notemos que si comenzamos por resolver

$$0 = \delta\Psi_0\epsilon + 6\Psi_2 E^2, \tag{3.26}$$

cuyas soluciones son

$$E_\pm = \pm\sqrt{-\frac{\delta\Psi_0}{6\Psi_2}}\sqrt{\epsilon}, \tag{3.27}$$

entonces el término entre corchetes en (3.25) es de orden $\mathcal{O}(\epsilon^{3/2})$, por lo que las raíces (3.27) son solución a orden lineal:

$$P(E_\pm) = 0 + \mathcal{O}(\epsilon^{3/2}). \tag{3.28}$$

Por lo tanto, hasta orden $\mathcal{O}(\epsilon^{3/2})$ tenemos

$$k_{[e}(\epsilon) \widetilde{C}_{a]bc[d}(\epsilon) k_{f]}(\epsilon) k^b(\epsilon) k^c(\epsilon) = 0. \tag{3.29}$$

Ya que tenemos dos raíces $E_\pm$ que resuelven esta ecuación, esto nos indica que la perturbación lineal tiene el efecto de *desdoblar* la dirección nula k^a del background. A orden dominante (es decir $\epsilon^{1/2}$), resulta

$$k^a_\pm(\epsilon) = k^a \pm \epsilon^{1/2}\left[\sqrt{-\frac{\delta\Psi_0}{6\Psi_2}}\bar{m}^a + \overline{\left(\sqrt{-\frac{\delta\Psi_0}{6\Psi_2}}\right)}m^a\right]. \tag{3.30}$$

De modo totalmente análogo puede obtenerse el desdoblamiento de la dirección nula l^a bajo la perturbación, siendo $\delta\Psi_4$ el escalar de Weyl relevante en este caso.

De esta manera, hemos arribado al resultado principal de este trabajo:

Las perturbaciones lineales de espaciotiempos tipo Petrov D provocan una bifurcación invariante de gauge de los pares dobles de direcciones principales nulas (PNDs) del background. El orden dominante de las PNDs es $\sqrt{\epsilon}$, y en forma explícita se tiene

$$\begin{aligned} k^a_\pm(\epsilon) &= k^a \pm \epsilon^{1/2}\left[\sqrt{-\frac{\delta\Psi_0}{6\Psi_2}}\bar{m}^a + \overline{\left(\sqrt{-\frac{\delta\Psi_0}{6\Psi_2}}\right)}m^a\right] && (3.31)\\ l^a_\pm(\epsilon) &= l^a \pm \epsilon^{1/2}\left[\overline{\left(\sqrt{-\frac{\delta\Psi_4}{6\Psi_2}}\right)}\bar{m}^a + \sqrt{-\frac{\delta\Psi_4}{6\Psi_2}}m^a\right] && (3.32)\end{aligned}$$

donde k^a y l^a son las PNDs del background, y $\delta\Psi_0$ y $\delta\Psi_4$ son las linealizaciones asociadas a la tetrada canónica.

Para chequear que se cumple a primer orden la ecuación (3.29) de direcciones nulas, analicemos su desarrollo perturbativo. Encontraremos una fórmula general que será de utilidad más adelante cuando apliquemos los resultados a la solución de Schwarzschild.

La expansión del tensor autodual de Weyl es $\widetilde{C}_{abcd}(\epsilon) = \widetilde{C}_{abcd} + \epsilon\delta\widetilde{C}_{abcd}$, mientras que para $k^a(\epsilon)$ la fórmula (3.21) nos indica que

$$k^a(\epsilon) = k^a + \sqrt{\epsilon}k^a_{(1)} + \epsilon k^a_{(2)} \tag{3.33}$$

donde

$$\begin{aligned} k^a_{(1)} &= z\bar{m}^a + \bar{z}m^a, && (3.34)\\ k^a_{(2)} &= |z|^2 l^a + \delta k^a, && (3.35)\end{aligned}$$

con $\sqrt{2}\delta k^a = \delta T^a + \delta X^a$ la corrección dada por la nueva tetrada ortonormal, y

$$z := \sqrt{-\frac{\delta\Psi_0}{6\Psi_2}} \tag{3.36}$$

La notación será la siguiente: cantidades perturbadas serán denotadas indicando su dependencia en ϵ (por ejemplo $k^a(\epsilon)$), mientras que las del background no tendrán sub/supraíndices adicionales (por ejemplo k^a corresponde al background, etc.).

El procedimiento consiste entonces en expandir la ecuación (3.29)

$$0 = \left(k_{[e} + \sqrt{\epsilon}k^{(1)}_{[e} + \epsilon k^{(2)}_{[e}\right)\left(\widetilde{C}_{a]bc[d} + \epsilon\delta\widetilde{C}_{a]bc[d}\right)\left(k_{f]} + \sqrt{\epsilon}k^{(1)}_{f]} + \epsilon k^{(2)}_{f]}\right)\left(k^b + ...\right), \tag{3.37}$$

e igualar a cero, orden por orden. Explícitamente, tenemos:

Orden $\epsilon = 0$

$$0 = k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c \tag{3.38}$$

Esta ecuación se satisface trivialmente pues k^a es dirección nula del background.

Orden $\sqrt{\epsilon}$

$$0 = k^{(1)}_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c + k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k^{(1)}_{f]}k^b k^c + k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b_{(1)}k^c + k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c_{(1)} \tag{3.39}$$

Los primeros dos términos son cero en virtud de las simetrías del background. Veamos el tercer término. Usando que

$$k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^c = -2\Psi_2 k_{[e}m_{a]}k_b\bar{m}_{[d}k_{f]},$$

se ve que al contraer con $k^b_{(1)} = z\bar{m}^b + \bar{z}m^b$, como $k^a m_a = 0 = k^a\bar{m}_a$, este término será idénticamente cero. Similarmente ocurre con el cuarto término. Por lo tanto todos los términos en (3.39) son cero.

Orden ϵ

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \epsilon \Big\{ k_{[e}\delta\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c \\
& + \Big(k^{(1)}_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k^{(1)}_{f]}k^b k^c + k^{(1)}_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b_{(1)}k^c + k^{(1)}_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c_{(1)} \\
& + k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k^{(1)}_{f]}k^b_{(1)}k^c + k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k^{(1)}_{f]}k^b k^c_{(1)} + k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b_{(1)}k^c_{(1)} \Big) \\
& + \Big(k^{(2)}_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c + k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k^{(2)}_{f]}k^b k^c + k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b_{(2)}k^c + k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c_{(2)} \Big) \Big\}
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

La segunda línea de esta ecuación, al igual que la tercera, involucra dos productos con $k^a_{(1)}$, la corrección de orden $\sqrt{\epsilon}$ de la dirección nula. La cuarta línea involucra la corrección de orden ϵ, $k^a_{(2)}$.

Comencemos por analizar las segunda y tercera línea. Al reemplazar $k^a_{(1)} = z\bar{m}^a + \bar{z}m^a$, nos queda

$$\Big(k^{(1)}_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k^{(1)}_{f]}k^b k^c + k^{(1)}_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b_{(1)}k^c + ... \Big) = z^2 Q_{eadf} + \bar{z}^2 T_{eadf} + |z|^2 S_{eadf} \tag{3.41}$$

donde Q_{abcd}, T_{abcd} y S_{abcd} son tensores sobre el background. Explícitamente, las simetrías de fondo nos permiten deducir

$$
\begin{aligned}
Q_{abcd} &\equiv 12\Psi_2 \bar{m}_{[a}k_{b]}\bar{m}_{[c}k_{d]}, && (3.42)\\
T_{abcd} &\equiv 0 && (3.43)\\
S_{abcd} &\equiv 2\Psi_2 (m_{[a}k_{b]}\bar{m}_{[c}k_{d]} + k_{[a}\bar{m}_{b]}k_{[c}m_{d]}). && (3.44)
\end{aligned}
$$

Analicemos ahora la última línea de la ecuación (3.40). Los primeros dos términos son cero debido nuevamente a las simetrías de fondo. No obstante, los últimos dos términos no son cero:

$$
\begin{aligned}
k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b_{(2)}k^c &= \left(-2\Psi_2 k_{[e}m_{a]}\bar{m}_{[d}k_{f]}\right) k_b k^b_{(2)} && (3.45)\\
k_{[e}\widetilde{C}_{a]bc[d}k_{f]}k^b k^c_{(2)} &= \left(-2\Psi_2 k_{[e}\bar{m}_{a]}m_{[d}k_{f]}\right) k_c k^c_{(2)} && (3.46)\\
& && (3.47)
\end{aligned}
$$

donde

$$k_a k^a_{(2)} = k_a \left(|z|^2 l^a + \delta k^a\right) = -|z|^2 + k_a \delta k^a. \tag{3.48}$$

Por lo tanto, la ecuación (3.40) es:

$$0 = \epsilon \Big\{ k_{[a}\delta\widetilde{C}_{b]ef[c}k_{d]}k^e k^f + z^2 12\Psi_2 \bar{m}_{[a}k_{b]}\bar{m}_{[c}k_{d]} + |z|^2 2\Psi_2 (m_{[a}k_{b]}\bar{m}_{[c}k_{d]} + k_{[a}\bar{m}_{b]}k_{[c}m_{d]}) \\ + \left[+2\Psi_2 m_{[a}k_{b]}\bar{m}_{[c}k_{d]} + 2\Psi_2 k_{[a}\bar{m}_{b]}k_{[c}m_{d]}\right] (-|z|^2 + k_e \delta k^e) \Big\} \tag{3.49}$$

Los términos con $|z|^2$ se cancelan. Reemplazando $z = \sqrt{-\delta\Psi_0/6\Psi_2}$, el resultado final es que la condición de que $k^a(\epsilon)$ sea dirección principal nula del espaciotiempo perturbado, implica que debe cumplirse

$$0 = \epsilon \left\{ k_{[a}\delta\widetilde{C}_{b]ef[c}k_{d]}k^e k^f - 2\delta\Psi_0 \bar{m}_{[a}k_{b]}\bar{m}_{[c}k_{d]} + 2\Psi_2 \left(m_{[a}k_{b]}\bar{m}_{[c}k_{d]} + k_{[a}\bar{m}_{b]}k_{[c}m_{d]} \right) k_e \delta k^e \right\}. \tag{3.50}$$

En la sección siguiente, esta fórmula nos dará información sobre las PNDs de perturbaciones genéricas del agujero negro de Schwarzschild.

Notar que, contrayendo con $l^a m^b l^c m^d$ y desarrollando los productos antisimetrizados, el último término se anula y obtenemos una fórmula para $\delta\Psi_0$:

$$\delta\Psi_0 = +\frac{1}{2}\delta\widetilde{C}_{abcd} m^a k^b m^c k^d, \tag{3.51}$$

que puede verificarse usando las simetrías del background.

Analicemos ahora los resultados generales que hemos obtenido, ecuaciones (3.31) y (3.32). Por un lado, encontramos que la perturbación provoca un desdoblamiento de los dos pares de direcciones nulas coincidentes del background. Se tienen entonces cuatro direcciones principales nulas, por lo que el espacio resultante es tipo I en la clasificación de Petrov. Esto coincide con el resultado obtenido usando el esquema de autovalores. Como dijimos antes, en algunos trabajos (ver por ej. [12]), el hecho de que el desarrollo perturbativo del índice de especialidad alrededor del tipo D no contenga términos lineales en ϵ se ha utilizado para argumentar que las perturbaciones lineales no cambian la especialidad algebraica del espaciotiempo. Sin embargo, nuestro análisis indica que esta interpretación no es correcta, pues encontramos que el espacio perturbado es algebraicamente general. Nótese que el desdoblamiento es proporcional a $\delta\Psi_0\delta\Psi_4$ y compárese con el índice de especialidad (3.1). Un modelo muy sencillo ilustra esta situación: consideremos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} A-\epsilon & 0 \\ 0 & A+\epsilon \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

El polinomio característico es $p(x) = (x-A)^2 - \epsilon^2$, a orden ϵ no advierte el desdoblamiento de autovalores de M (es el equivalente al índice de especialidad), pero si resolvemos la ecuación de autovectores veremos que los autovalores son $A+\epsilon$ y $A-\epsilon$ con autovectores $(1,0)$ y $(0,1)$ respectivamente.

Por otro lado, hemos hallado un comportamiento no-analítico en las direcciones principales nulas. Hay antecedentes de este resultado en [13], donde se perturba linealmente una cosmología de Kasner alrededor del tipo D, obteniéndose un comportamiento idéntico al recién encontrado. No obstante, nuestro análisis no se limita a un ejemplo particular sino que parece indicar una característica general de las perturbaciones de espaciotiempos tipo Petrov D.

3.4. Aplicaciones a la solución de Schwarzschild

Aplicaremos ahora los resultados anteriores a perturbaciones genéricas del agujero negro de Schwarzschild. La teoría de perturbaciones de espacios con simetría esférica es complicada y no la desarrollaremos aquí (ver por ejemplo [14], [15]). La variedad se descompone en el espacio orbital $\mathcal{M}/SO(3)$ y el esférico $\mathcal{S}^2$. Las simetrías del background se utilizan para separar la perturbación métrica en los llamados sector par $(+)$ e impar $(-)$, con modos armónicos (ℓ, m), y la linealización de las ecuaciones permite trabajar con modos aislados. En cada sector se define un campo $\phi^{(\pm,\ell,m)}$ que satisface una ecuación de onda sobre el espacio orbital:

$$0 = \frac{\partial^2 \phi^{(\pm,\ell,m)}}{\partial t^2} + \mathcal{H}^{(\pm,\ell)} \phi^{(\pm,\ell,m)} \tag{3.53}$$

$$\mathcal{H}^{(\pm,\ell)} = -\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + V^{(\pm,\ell)} \tag{3.54}$$

donde $\mathcal{H}^{(\pm,\ell)}$ es un operador de tipo Hamiltoniano cuántico definido positivo, cuyo potencial es distinto en cada sector, y la coordenada r^* se define por medio de $dr^*/dr = 1/f(r)$.

En el sector impar, trabajado en [17], (3.53) se conoce como ecuación de Regge-Wheeler, y el potencial es

$$V^{(-,\ell)} = f(r)\left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r}\right), \tag{3.55}$$

mientras que el sector par es caracterizado por la ecuación de Zerilli [18], con potencial

$$V^{(+,\ell)} = f(r)\frac{\Lambda r^2[(r^2+2)r + 6M] + 36M^2(\Lambda r + 2M)}{r^3(\Lambda r + 6M)^2} \tag{3.56}$$

donde $\Lambda := (\ell-1)(\ell+2)$.

Hallaremos a continuación las direcciones principales nulas para perturbaciones impares. La métrica es en forma explícita:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r)dt^2 - 2\epsilon\frac{f(r)}{\sin\theta}\left(\Phi + r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\frac{\partial Y}{\partial\phi}dtd\theta + 2\epsilon f(r)\sin\theta\left(\Phi + r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\frac{\partial Y}{\partial\theta}dtd\phi \\ &\quad + \frac{dr^2}{f(r)} - 2\epsilon\frac{r}{f(r)\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial Y}{\partial\phi}drd\theta + 2\epsilon\frac{r\sin\theta}{f(r)}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial Y}{\partial\theta}drd\phi + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \end{aligned} \tag{3.57}$$

donde $\Phi \equiv \phi^{(-,\ell,m)}$, y $Y \equiv Y^{(\ell,m)}$ son armónicos esféricos escalares. Mediante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, construimos una tetrada ortonormal a primer orden[1], que representa una perturbación de la tetrada canónica del background. A partir de esta definimos la tetrada nula asociada en la forma usual (ver (2.90), (2.91)).

Utilizando armónicos esféricos con peso de spin (ver apéndice A), la variación de Ψ_0 para un modo armónico (ℓ, m) en esta tetrada está dada por

$$\delta\Psi_0^{(-,\ell,m)} = iA_\ell^{(-)}(t,r)_{-2}Y^{(\ell,m)} \tag{3.58}$$

donde $A_\ell^{(-)}(t,r)$ es una función sobre el espacio orbital.

La tetrada ortonormal a primer orden satisface $k_a\delta k^a = \mathcal{O}(\epsilon)$, por lo que el último término en (3.50) es orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, y nos queda:

$$0 = k_{[a}\delta\widetilde{C}_{b]ef[c}k_{d]}k^e k^f - 2\delta\Psi_0\bar{m}_{[a}k_{b]}\bar{m}_{[c}k_{d]}. \tag{3.59}$$

El desdoblamiento de la dirección nula k^a bajo la perturbación es, a orden dominante,

$$k^a(\epsilon) = k^a \pm \sqrt{\epsilon}(z\bar{m}^a + \bar{z}m^a) = k^a \pm \sqrt{\frac{r^3}{12M}}\left(\sqrt{\delta\Psi_0^{(-)}}\bar{m}^a + \overline{\sqrt{\delta\Psi_0^{(-)}}}m^a\right)\epsilon^{1/2} \tag{3.60}$$

donde hemos usado que $\Psi_2 = -M/r^3$.

Nos preguntamos si $k^a(\epsilon)$ se corresponde con un modo puro (ℓ, m). Para que esto suceda, debe tenerse

$$\sqrt{\delta\Psi_0^{(-)}} \sim e^{im\phi}. \tag{3.61}$$

Ahora bien, esto implica que

$$\delta\Psi_0^{(-)} = \left(\sqrt{\delta\Psi_0^{(-)}}\right)^2 \sim e^{2im\phi}. \tag{3.62}$$

Por otro lado, sabemos que $\delta\widetilde{C}_{abcd} \sim e^{im\phi}$. Al insertar esto en la ecuación (3.59), encontramos que un término va como $e^{im\phi}$ mientras que el otro iría como $e^{2im\phi}$. Dado que

[1] la expresión explícita puede verse en el apéndice B.

estamos igualando a cero, ésto sólo es posible si $m = 0$, lo cual es absurdo. Luego, la dirección nula perturbada no puede corresponder a un modo armónico puro.

De modo similar, la bifurcación de la dirección principal nula l^a está dada por

$$l^a(\epsilon) = l^a \pm \sqrt{\frac{r^3}{12M}} \left(\sqrt{\delta\Psi_4^{(-)}}\bar{m}^a + \overline{\sqrt{\delta\Psi_4^{(-)}}} m^a \right) \epsilon^{1/2}, \tag{3.63}$$

donde

$$\delta\Psi_4^{(-,\ell,m)} = iD_\ell^{(-)}(t,r)_2 Y^{(\ell,m)}. \tag{3.64}$$

Para perturbaciones pares ocurre un comportamiento idéntico. El escalar de Weyl perturbado $\delta\Psi_0$ está dado por

$$\delta\Psi_0^{(+,\ell,m)} = A_\ell^{(+)}(t,r)_{-2} Y^{(\ell,m)}, \tag{3.65}$$

con $A_\ell^{(+)}(t,r)$ función sobre el espacio de órbitas. Las direcciones nulas en las que se bifurca k^a son

$$k^a(\epsilon) = k^a \pm \sqrt{\frac{r^3}{12M}} \left(\sqrt{\delta\Psi_0^{(+)}}\bar{m}^a + \overline{\sqrt{\delta\Psi_0^{(+)}}} m^a \right) \epsilon^{1/2} \tag{3.66}$$

En este caso, la tetrada perturbada produce $k_a \delta k^a \neq 0$, no obstante este término va como $e^{im\phi}$ y por lo tanto el análisis hecho para el sector impar, según el cual la dirección nula no puede estar asociada a un modo armónico puro, también es aplicable aquí.

Conclusiones

El objetivo de este trabajo es contribuir a la generalización a la familia de Kerr-Newman de la prueba de estabilidad no modal del agujero negro de Schwarzschild dada en [1]. Uno de los problemas encontrados en [1] es la falta de efectos medibles en modos pares, lo que obligó a analizar invariantes obtenidos a partir de la derivada covariante del tensor de Weyl. Para evitar trabajar con derivadas superiores, en este trabajo buscamos los efectos de las perturbaciones en el tipo algebraico del tensor de Weyl.

Se encontró que el espaciotiempo en general no conserva la especialidad algebraica, sino que pasa a ser tipo I en la clasificación de Petrov. Esto indica que algunos criterios empleados en soluciones exactas, que se basan en el uso de relaciones entre los invariantes de curvatura (tales como el índice de especialidad), no resultan válidos para determinar el tipo de Petrov de un espaciotiempo perturbado linealmente.

Se vio además que la perturbación tiene el efecto de desdoblar los pares coincidentes de direcciones principales nulas del background. Esta bifurcación resulta no-analítica en el parámetro perturbativo ϵ, de manera tal que el orden dominante es $\sqrt{\epsilon}$. Estos resultados son válidos para las perturbaciones de cualquier espaciotiempo tipo D, generalizando lo obtenido en [13] para la solución de Kasner.

Por último se aplicaron estos resultados a perturbaciones lineales genéricas de la solución de Schwarzschild, encontrándose expresiones explícitas para el desdoblamiento de las direcciones principales nulas. Se obtuvo un efecto observable del sector par sobre la geometría. Se demostró además que las nuevas direcciones nulas, a orden dominante, no pueden corresponder a un modo armónico puro de la perturbación.

Apéndice A: Armónicos esféricos con peso de spin

Los armónicos esféricos con peso de spin son funciones sobre la esfera que poseen simetría $U(1)$ y generalizan los armónicos esféricos escalares (ver [20] para una descripción detallada).

En primer lugar, una vez que un punto en la esfera se elige como polo norte, se dice que una cantidad η tiene *peso de spin* s si bajo una rotación por un ángulo ψ alrededor del polo, η se transforma como $\eta \to e^{i\psi s}\eta$.

En coordenadas esféricas estándar, se define el operador diferencial $\eth$, actuando sobre una cantidad η con peso de spin s, como

$$\eth\eta := -(\sin\theta)^s \left[\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right](\sin\theta)^{-s}\eta.$$

Ya que $\eth\eta$ transforma como $\eth\eta \to e^{i\psi(s+1)}\eth\eta$, el operador $\eth$ tiene la propiedad de subir el peso de spin en $+1$. Similarmente, definiendo

$$\bar{\eth}\eta := -(\sin\theta)^{-s} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right](\sin\theta)^{s}\eta,$$

puede verse que $\bar{\eth}$ baja el peso de spin en -1. Se tiene además

$$[\eth, \bar{\eth}]\eta = 2s\eta.$$

Haciendo actuar $\eth$ y $\bar{\eth}$ sobre armónicos esféricos ordinarios, se construyen los armónicos con peso de spin como

$$\begin{aligned}
{}_sY^{(\ell,m)} &:= \sqrt{\frac{(l-s)!}{(l+s)!}}\eth^s Y^{(\ell,m)}, \qquad 0 \le s \le l \\
{}_sY^{(\ell,m)} &:= \sqrt{\frac{(l+s)!}{(l-s)!}}(-)^s\bar{\eth}^{-s} Y^{(\ell,m)}, \qquad -l \le s \le 0 \\
{}_sY^{(\ell,m)} &:= 0, \qquad l \le |s|
\end{aligned}$$

Como los ${}_sY^{(\ell,m)}$ forman una base ortonormal, toda función con peso de spin s puede expandirse en serie de ${}_sY^{(\ell,m)}$. Propiedades importantes de estos armónicos son:

$$\begin{aligned}
{}_s\bar{Y}^{(\ell,m)} &= (-)^{m+s}{}_{-s}Y^{(\ell,m)} \\
\eth_sY^{(\ell,m)} &= \sqrt{(l-s)(l+s+1)}_{s+1}Y^{(\ell,m)} \\
\bar{\eth}_sY^{(\ell,m)} &= -\sqrt{(l+s)(l-s+1)}_{s-1}Y^{(\ell,m)} \\
\bar{\eth}\eth_sY^{(\ell,m)} &= -(l-s)(l+s+1)_sY^{(\ell,m)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\eth$ y $\bar{\eth}$ funcionan como los operadores *ladder* usuales en mecánica cuántica, subiendo o bajando el "número cuántico" s, mientras que los ${}_sY^{(\ell,m)}$ son autofunciones de $\bar{\eth}\eth$.

Una fórmula explícita de los ${}_sY^{(\ell,m)}$ que puede resultar útil, en la que se aprecia su dependencia angular, es

$$\begin{aligned}
{}_sY^{(\ell,m)}(\theta,\phi) &= (-)^m\sqrt{\frac{(\ell+m)!(\ell-m)!(2\ell+1)}{4\pi(l+s)!(l-s)!}}\sin^{2\ell}(\theta/2) \\
&\quad\times\sum_{r=0}^{\ell-s}\binom{\ell-s}{r}\binom{\ell+s}{r+s-m}(-)^{\ell-r-s}e^{im\phi}\cot^{2r+s-m}(\theta/2).
\end{aligned}$$

En particular, algunos ejemplos son:

$$\begin{aligned}
\bar{\eth}\bar{\eth}Y^{(\ell,m)} &= \frac{1}{\sin^2\theta}\left[-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}^{(\ell,m)} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}^{(\ell,m)} + 2i\cos\theta\frac{\partial Y}{\partial\phi}^{(\ell,m)}\right] \\
&\quad+\frac{1}{\sin^2\theta}\left[-2i\sin\theta\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta\partial\phi}^{(\ell,m)} - \frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}^{(\ell,m)}\right] \\
\bar{\eth}Y^{(\ell,m)} &= -\frac{\partial Y}{\partial\theta}^{(\ell,m)} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial\phi}^{(\ell,m)} \\
\eth Y^{(\ell,m)} &= -\frac{\partial Y}{\partial\theta}^{(\ell,m)} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial\phi}^{(\ell,m)} \\
\eth\eth Y^{(\ell,m)} &= \frac{1}{\sin^2\theta}\left[-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}^{(\ell,m)} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2}^{(\ell,m)} - 2i\cos\theta\frac{\partial Y}{\partial\phi}^{(\ell,m)}\right] \\
&\quad+\frac{1}{\sin^2\theta}\left[2i\sin\theta\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta\partial\phi}^{(\ell,m)} - \frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}^{(\ell,m)}\right]
\end{aligned}$$

Apéndice B: Escalares de Weyl linealizados

La tetrada perturbada ortonormal que hemos utilizado para calcular los escalares de Weyl en perturbaciones impares de Schwarzschild es

$$
\begin{aligned}
T^a &= \left(\frac{1}{\sqrt{f}}, 0, \frac{\sqrt{f}}{r^2\sin\theta}\left(\Phi + r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\frac{\partial Y}{\partial\phi}\epsilon, -\frac{\sqrt{f}}{r^2\sin\theta}\left(\Phi + r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\frac{\partial Y}{\partial\theta}\epsilon\right)^T && (3.67)\\
X^a &= (\sqrt{f}, 0, 0, 0)^T && (3.68)\\
Y^a &= \left(0, \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial Y}{\partial\phi}\epsilon, \frac{1}{r}, 0\right)^T && (3.69)\\
Z^a &= \left(0, -\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial Y}{\partial\theta}\epsilon, 0, \frac{1}{r\sin\theta}\right)^T. && (3.70)
\end{aligned}
$$

Esta tetrada produce los siguientes escalares:

$$
\begin{aligned}
\delta\Psi_0^{(-)} &= iA^{(-)}(t,r)\bar{\eth}\bar{\eth}Y \equiv iA_\ell^{(-)}(t,r)_{-2}Y\\
\delta\Psi_1^{(-)} &= iB^{(-)}(t,r)\bar{\eth}Y \equiv iB_\ell^{(-)}(t,r)_{-1}Y\\
\delta\Psi_2^{(-)} &= -\frac{i}{4}\frac{(l+2)!}{(l-2)!}\frac{\Phi}{r}Y\\
\delta\Psi_3^{(-)} &= iC^{(-)}(t,r)\eth Y \equiv iC_\ell^{(-)}(t,r)_1Y\\
\delta\Psi_4^{(-)} &= iD^{(-)}(t,r)\eth\eth Y \equiv iD_\ell^{(-)}(t,r)_2Y,
\end{aligned}
$$

Las funciones $A_\ell^{(-)}, B_\ell^{(-)}, C_\ell^{(-)}, D_\ell^{(-)}$ son explícitamente:

$$\begin{aligned}
A_\ell^{(-)}(t,r) &= \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}}\frac{1}{4r^3}\left[-2(r-M)\frac{\partial\Phi}{\partial r} - 2r\left(\frac{r-3M}{r-2M}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial t} - 2r(r-2M)\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right.\\
&\qquad\left. -2r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial r} + \left(\ell(\ell+1) - \frac{6M}{r}\right)\Phi\right]\\
B_\ell^{(-)}(t,r) &= -\sqrt{\ell(\ell+1)}\frac{1}{4r^3}\frac{1}{\sqrt{1-2M/r}}\left[(\ell(\ell+1)-2)(r-2M)\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right.\\
&\qquad\left. +(\ell(\ell+1)r - 2(r-3M))\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\\
C_\ell^{(-)}(t,r) &= \sqrt{\ell(\ell+1)}\frac{1}{4r^3}\frac{1}{\sqrt{1-2M/r}}\left[-(\ell(\ell+1)-2)(r-2M)\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right.\\
&\qquad\left. +(\ell(\ell+1)r - 2(r-3M))\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]\\
D_\ell^{(-)}(t,r) &= \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}}\frac{1}{4r^3}\left[2(r-M)\frac{\partial\Phi}{\partial r} - 2r\left(\frac{r-3M}{r-2M}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + 2r(r-2M)\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right.\\
&\qquad\left. -2r^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial r} - \left(\ell(\ell+1) - \frac{6M}{r}\right)\Phi\right]
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la ecuación de Regge-Wheeler para simplificar las expresiones.

Bibliografía

[1] G. Dotti, *Non-modal linear stability of the Schwarzschild black hole*, arXiv:1307.3340 [gr-qc].

[2] R. M. Wald, “General Relativity,” Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984)

[3] J. M. Stewart and M. Walker, *Perturbations of spacetimes in general relativity*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **341**, 49 (1974).

[4] J. Stewart. “Advanced general relativity”, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[5] M. Bruni, S. Matarrese, S. Mollerach and S. Sonego, *Perturbations of spacetime: Gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond*,” Class. Quant. Grav. **14**, 2585 (1997) [gr-qc/9609040].

[6] R. P. Geroch, *Limits of spacetimes*, Commun. Math. Phys. **13** (1969) 180.

[7] G.S. Hall, “Symmetries and Curvature Structure in General Relativity”, World Scientific, Singapore, (2004).

[8] H. Stephani, “Relativity: An introduction to special and general relativity,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004)

[9] H. Stephani, D. Kramer, M. A. H. MacCallum, C. Hoenselaers and E. Herlt, “Exact solutions of Einstein’s field equations,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (2003)

[10] S. Chandrasekhar, “The mathematical theory of black holes,” OXFORD, UK: CLARENDON (1985)

[11] C.B.G. McIntosh, R. Arianrhod, S.T. Wade, and C. Hoenselaers, *Electric and magnetic Weyl tensors: classification and analysis* Class. Quant. Grav. **11** 1555 (1994).

[12] J. G. Baker and M. Campanelli, *Making use of geometrical invariants in black hole collisions*, Phys. Rev. D **62**, 127501 (2000) [gr-qc/0003031].

[13] C. Cherubini, D. Bini, M. Bruni and Z. Perjes, *Petrov classification of perturbed space-times: The Kasner example*, Class. Quant. Grav. **21**, 4833 (2004) [gr-qc/0404075].

[14] O. Sarbach and M. Tiglio, *Gauge invariant perturbations of Schwarzschild black holes in horizon penetrating coordinates*, Phys. Rev. D **64**, 084016 (2001) [gr-qc/0104061].

[15] O. Sarbach, Ph.D. thesis, 2000. Institute for Theoretical Physics, preprint 2001031, University of Zurich http://www.ifm.umich.mx/ sarbach/ publications/total.pdf

[16] A. Ishibashi and H. Kodama, *Perturbations and Stability of Static Black Holes in Higher Dimensions*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **189**, 165 (2011) [arXiv:1103.6148 [hep-th]].

[17] T. Regge and J. A. Wheeler, *Stability of a Schwarzschild singularity*, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957).

[18] F. J. Zerilli, *Effective potential for even parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations*, Phys. Rev. Lett. **24**, 737 (1970).

[19] P. T. Leung, A. Maassen van den Brink, W. M. Suen, C. W. Wong and K. Young, *SUSY transformations for quasinormal and total transmission modes of open systems*, math-ph/9909030.

[20] J. N. Goldberg, A. J. MacFarlane, E. T. Newman, F. Rohrlich and E. C. G. Sudarshan, *Spin s spherical harmonics and* $\eth$, J. Math. Phys. **8**, 2155 (1967).

[21] B. Araneda y G. Dotti, trabajo en desarrollo.