



Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación



Universidad
Nacional
de Córdoba

EXTENSIONES MATRICIALES DE POLINOMIOS ORTOGONALES

LUCÍA MOREY

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte
de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Marzo, 2024

Director: Dr. PABLO MANUEL ROMÁN

Tribunal Especial:

Prof. Dra. Mirta María Castro Smirnova (U Sevilla, titular)

Dra. Rocío Díaz Martín (UNC - Vanderbilt U, titular)

Dr. Raúl Emilio Vidal (UNC, titular)

Dr. Manuel Domínguez de la Iglesia (UNA México, suplente)

Dr. Guillermo Javier Flores (UNC, suplente)



Extensiones matriciales de polinomios ortogonales © 2024 by Morey Lucía is licensed under
Attribution 4.0 International.

Resumen

La teoría de polinomios ortogonales matriciales fue introducida por Krein en la década de 1940 y, desde entonces, ha sido estudiada en distintos contextos. En este trabajo, nos enfocaremos en el estudio de propiedades de polinomios ortogonales matriciales en la recta real y trabajaremos casi exclusivamente con matrices de tamaño arbitrariamente grande. Nuestro interés radica en la exploración de extensiones matriciales de polinomios ortogonales escalares, así como también de sus propiedades destacadas.

Esta tesis está estructurada en tres partes independientes. Cada una de estas partes se dedica al estudio de una extensión matricial diferente de polinomios ortogonales escalares. En cada caso, se presenta una exposición detallada de la teoría general, seguida de la aplicación de esta teoría a un ejemplo particular.

El objetivo principal del Capítulo 2 es dar una generalización matricial del concepto de *sucesión dual de polinomios ortogonales*. Introducimos una noción de dualidad para polinomios ortogonales matriciales con respecto a medidas con soporte en los enteros no negativos. Mostramos que las familias duales están íntimamente relacionadas con ciertos operadores en diferencias actuando en los polinomios ortogonales matriciales. Estos operadores pertenecen a las llamadas álgebras de Fourier, las cuales tienen un papel fundamental en la construcción de familias. Aplicamos la teoría desarrollada a una familia de polinomios matriciales de tipo Charlier con *shift operators* explícitos, los cuales nos permiten encontrar fórmulas explícitas para la relación de recurrencia de tres términos, operadores en diferencias y normas cuadradas. En el caso escalar, los polinomios de Charlier son *autoduales*, sin embargo, en el caso matricial obtenemos tres sucesiones distintas de polinomios duales.

En el Capítulo 3 damos un análogo matricial de *polinomios excepcionales*. Los polinomios excepcionales pueden ser construidos considerando factorizaciones adecuadas de un operador diferencial de segundo orden dado y realizando transformaciones de Darboux. Discutimos ortogonalidad y densidad de la sucesión excepcional en detalle. Aplicamos la teoría general desarrollada en este capítulo a un ejemplo de polinomios excepcionales de tipo Laguerre de tamaño arbitrario.

En el Capítulo 4 estudiamos deformaciones de polinomios ortogonales matriciales. Estas deformaciones se construyen utilizando ciertos operadores matriciales simétricos con respecto al producto interno matricial inducido por el peso matricial. Mostramos que los coeficientes de la recurrencia asociada a estos operadores satisfacen generalizaciones de *ecuaciones no Abelianas de Toda*. Damos una formulación en *par de Lax* para estas ecuaciones, y discutimos en detalle un ejemplo de polinomios de tipo Hermite deformados.

Palabras claves: Polinomios ortogonales matriciales, medidas discretas, funciones hipergeométricas, ecuaciones de Toda, par de Lax, polinomios excepcionales, polinomios duales.

MSC 2020: 33C45, 33C47, 37K10, 42C05, 33C47, 33E30.

Abstract

The theory of matrix-valued orthogonal polynomials was introduced by Krein in the 1940's and, since then, has been studied in different contexts. In this work, we will focus on studying properties of matrix orthogonal polynomials on the real line, and we will almost exclusively work with matrices of arbitrarily large size. Our interest lies in exploring matrix extensions of scalar orthogonal polynomials, as well as their prominent properties.

This thesis is structured into three independent parts. Each of these parts is devoted to the study of a different matrix extension of scalar orthogonal polynomials. In each case, a detailed exposition of the general theory is presented, followed by the application of this theory to a specific example.

The main goal of Chapter 2 is to explore a matrix generalization of the concept of *dual sequences of orthogonal polynomials*. We introduce a notion of duality for matrix valued orthogonal polynomials with respect to a measure supported on the nonnegative integers. We show that the dual families are closely related to certain difference operators acting on the matrix orthogonal polynomials. These operators belong to the so called Fourier algebras, which play a key role in the construction of the families. In order to illustrate duality, we describe a family of Charlier type matrix orthogonal polynomials with explicit shift operators which allow us to find explicit formulas for three term recurrences, difference operators and squared norms. These are the essential ingredients for the construction of different dual families.

In Chapter 3 we give an analog of *exceptional polynomials* in the matrix valued setting by considering suitable factorizations of a given second order differential operator and performing Darboux transformations. Orthogonality and density of the exceptional sequence is discussed in detail. We give an example of matrix valued exceptional Laguerre polynomials of arbitrary size.

In Chapter 4 we study parameter deformations of matrix valued orthogonal polynomials. These deformations are built on the use of certain matrix valued operators which are symmetric with respect to the matrix valued inner product defined by the orthogonality weight. We show that the recurrence coefficients associated with these operators satisfy generalizations of the *non-Abelian Toda lattice equations*. We provide a *Lax pair* formulation for these equations, and an example of deformed Hermite-type matrix valued polynomials is discussed in detail.

Keywords: Matrix valued orthogonal polynomials, discrete measures, hypergeometric functions, Toda equations, Lax pair, exceptional polynomials, dual polynomials.

MSC 2020: 33C45, 33C47, 37K10, 42C05, 33C47, 33E30.

*A mis padres,
sin quienes nada de esto
sería posible.*

1. Introducción	1
1.1. Polinomios ortogonales escalares	1
1.2. Familias de polinomios ortogonales Clásicos	3
1.3. Polinomios ortogonales hipergeométricos	4
1.3.1. Funciones hipergeométricas	5
1.3.2. Askey-Scheme de polinomios ortogonales hipergeométricos	6
1.4. Polinomios ortogonales excepcionales	7
1.4.1. Transformaciones de Darboux y <i>seed functions</i>	8
1.4.2. Clasificación de polinomios excepcionales	10
1.5. Polinomios ortogonales matriciales	11
1.5.1. Definiciones formales y teoría general	12
1.5.2. Propiedades de polinomios ortogonales	15
1.5.3. Operadores simétricos	15
1.5.4. Álgebras de Fourier	17
2. Dualidad para polinomios matriciales	21
2.1. Introducción	21
2.2. Polinomios ortogonales y álgebras de Fourier discretas	25
2.2.1. Operadores en diferencias	25
2.2.2. Álgebras de Fourier discretas	26
2.2.3. Ecuaciones de Pearson débiles y álgebras de Fourier	28
2.2.4. Ecuaciones de Pearson fuertes y <i>shift operators</i>	30
2.2.5. Aplicaciones de los <i>shift operators</i>	33
2.3. Dualidad para polinomios ortogonales matriciales	35
2.3.1. Polinomios matriciales duales	35
2.3.2. Caracterización de las familias duales	37
2.3.3. Relaciones de ortogonalidad duales	41
2.3.4. Álgebras de Fourier duales	42
2.4. Polinomios matriciales de tipo Charlier	48
2.4.1. Peso matricial de tipo Charlier simétrico	50
2.5. Familia monoparamétrica de polinomios de tipo Charlier	52

2.5.1.	Propiedades de la matriz L	52
2.5.2.	Descomposición LDU de las normas	55
2.5.3.	Ecuación en diferencias de segundo orden	56
2.5.4.	Las entradas de los polinomios matriciales de tipo Charlier	58
2.6.	<i>Shift operators</i> y relación de recurrencia para Charlier	59
2.6.1.	Shift operators	60
2.6.2.	Expresiones explícitas de las normas	62
2.6.3.	Relación de recurrencia de tres términos para Charlier	64
2.6.4.	Relación entre los operadores en diferencias $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$, $\Delta S^{(\lambda)}$ y $S^{(\lambda-1)}\Delta$	65
2.7.	Expresión explícita de los polinomios de tipo Charlier	66
2.7.1.	Una relación de recurrencia en k para $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$	67
2.7.2.	Una relación de recurrencia en j para $\xi_{j,1,n}^{(\lambda)}$	67
2.7.3.	Los coeficientes $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ como polinomios dual Hahn	69
2.8.	Polinomios de Charlier duales	71
2.8.1.	Expresión explícita de $P_n(0)$	71
2.8.2.	Tres familias de polinomios duales	72
2.8.3.	Relaciones ortogonales duales	74
2.8.4.	<i>Shift operators</i> duales	75
2.8.5.	Normas cuadradas duales	77
2.8.6.	Álgebras de Lie asociadas al peso de Charlier	78
2.9.	Polinomios Dual–Dual	80
2.9.1.	Primer familia dual–dual: $P_n^{(\lambda)}$ como su propio dual–dual	80
2.9.2.	Segunda familia dual–dual	81
3.	Polinomios matriciales X-Laguerre	83
3.1.	Introducción	83
3.2.	Transformaciones de Darboux	85
3.2.1.	<i>Seed function</i> y relaciones de entrelazamiento	85
3.2.2.	<i>Seed function</i> con autovalor escalar	86
3.3.	Operadores simétricos y pesos excepcionales	87
3.4.	Polinomios matriciales excepcionales	91
3.5.	Polinomios excepcionales via operador diagonalizable	93
3.6.	Álgebras de Fourier excepcionales	94
3.6.1.	Relación entre las álgebras de Fourier estándares y las excepcionales	96
3.7.	Peso matricial de tipo Laguerre y operadores diferenciales	98
3.8.	<i>Seed functions</i> de T_0	99
3.9.	Relaciones de entrelazamiento para Laguerre	101
3.10.	Polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre	103
3.10.1.	Polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre	106
3.11.	Ceros de los polinomios X-Laguerre	107
4.	Ecuaciones no abelianas de tipo Toda	109
4.1.	Introducción	109
4.2.	Deformaciones matriciales de pesos	113
4.2.1.	Condiciones de simetría	113
4.2.2.	Ecuaciones de tipo Toda	115
4.2.3.	Par de Lax	118

4.3. Ecuaciones de Toda polinomiales	119
4.4. Polinomios matriciales deformados de tipo Hermite	123
4.4.1. El peso deformado	123
4.4.2. Álgebras de Fourier deformadas	124
4.4.3. Ejemplo: el peso deformado 2×2	125
A. Algunas demostraciones	126
A.1. Determinante Block Vandermonde	126
A.2. Demostración de la Proposición 2.8.1	128
A.3. Demostración del Lema 2.8.6	129
B. Quasideterminantes	133
C. Problema de momentos y densidad	134
C.1. Problema de momentos	134
C.2. Densidad de polinomios ortogonales en $L^2(\mu)$	136
D. Operadores no acotados	138
E. Ecuaciones diferenciales con singularidades	141

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1. Polinomios ortogonales escalares

La teoría de polinomios ortogonales tiene sus orígenes en los trabajos de A. M. Legendre a principios del siglo XIX, quien estudió la familia de polinomios p_n que surge de la función generatriz

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n.$$

A finales del siglo XIX, a partir de los trabajos de P.L. Chebyshev, A.A. Markov y T.J. Stieltjes se formalizó la noción general de polinomios ortogonales. Esta teoría tuvo un gran desarrollo en la primera mitad del siglo XX impulsado por una gran cantidad de aplicaciones a distintas áreas de la física y de la matemática.

En esta sección daremos la definición y propiedades generales de polinomios ortogonales respecto a medidas positivas. Comenzaremos con una medida de Borel positiva μ en \mathbb{R} , con infinitos puntos en su soporte. De acuerdo al Teorema de descomposición de Lebesgue [84, Corollary 7.10], toda medida de Borel μ se descompone de forma única como

$$\mu = w(x) dx + \mu_d + \mu_s,$$

donde $w(x) \geq 0$ es una función integrable en todo intervalo acotado, μ_d es una unión numerable de puntos de deltas tal que la suma de los pesos en cualquier intervalo acotado es finita y μ_s es una medida singular continua. Asumiremos que μ tiene *momentos finitos de todo orden*, es decir

$$\mu_j = \int_{\mathbb{R}} x^j d\mu(x) < \infty \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}_0. \quad (1.1.1)$$

Dada una medida de Borel positiva sobre \mathbb{R} con momentos finitos de todo orden, definimos un producto interno en $\mathbb{C}[x]$ mediante

$$\langle p, q \rangle_{\mu} = \int_{\mathbb{R}} p(x) \overline{q(x)} d\mu(x). \quad (1.1.2)$$

Observación 1. Notemos que como μ tiene momentos finitos de todo orden, $\langle p, q \rangle_\mu < \infty$ para todo par de polinomios $p, q \in \mathbb{C}[x]$.

Definición 1.1.1. Decimos que una sucesión de polinomios $(q_n)_{n \geq 0}$, con $\deg q_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, es una *sucesión de polinomios ortogonales* con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si

$$\langle q_n, q_m \rangle = \delta_{n,m} h_n \quad \text{para todo } n, m \geq 0,$$

donde h_n es un número positivo para todo n . Si $h_n = 1$ para todo n , decimos que $(q_n)_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortonormales. Si el producto interno está dado por $\langle p, q \rangle_\mu$, decimos que los polinomios son ortogonales (respectivamente ortonormales) con respecto a μ .

Sólo consideramos medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R} o medidas puramente discretas. Es decir consideramos productos internos que sean o bien integrales con pesos o sumas sobre un subconjunto de la recta real

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x) \overline{q(x)} w(x) dx, \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} p(x_i) \overline{q(x_i)} w(x_i),$$

donde los parametros a, b no son necesariamente finitos. En la literatura, estos dos casos se conocen como caso *continuo* y caso *discreto*, respectivamente.

Observación 2. Estas medidas abarcan gran parte de las medidas de ortogonalidad de las familias de polinomios ortogonales en el Askey-Scheme, ver Subsección 1.3.2. Las familias de polinomios clásicos de Hermite, Laguerre y Jacobi, por ejemplo, son ortogonales con respecto a una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Los polinomios de Charlier, Meixner, Krawtchouk, Hahn y Racah, por otro lado, son ortogonales con respecto a una medida puramente discreta. Más generalmente, los polinomios de Askey-Wilson son ortogonales con respecto a una medida de ortogonalidad que está dada por la suma de una absolutamente continua y discreta, ver [94].

Observación 3. Resulta también de interés estudiar casos en los que el soporte de la medida es finito. En este caso (1.1.2) no resulta ser un producto interno, puesto que podría existir $p \neq 0$ con $\langle p, p \rangle = 0$. Sin embargo, es posible definir ortogonalidad de polinomios con la diferencia que solo obtendremos una cantidad finita de polinomios ortogonales.

Aplicando argumentos estándares, podemos verificar que dada una medida de Borel positiva μ en \mathbb{R} con momentos finitos de todo orden, existe una única sucesión de polinomios ortogonales mónicos $(p_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}[x]$ con respecto a μ .

Dada una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a μ se puede verificar que ésta satisface la llamada *relación de recurrencia de tres términos*. La versión mónica de esta relación es:

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x), \quad p_{-1}(x) = 0, \quad (1.1.3)$$

donde $b_n \in \mathbb{R}$ y $c_n > 0$. Como consecuencia de la relación de recurrencia de tres términos tenemos la llamada Identidad de Christoffel-Darboux.

Teorema 1.1.2 (Identidad de Christoffel-Darboux). *Dado $N \in \mathbb{N}$ y $(p_n)_n$ la sucesión de*

polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ , las siguientes identidades se verifican:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{p_k(x)p_k(y)}{h_k} = \frac{p_N(x)p_{N-1}(y) - p_N(x)p_{N-1}(y)}{h_{N-1}(x-y)} \quad x \neq y.$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{p_k(x)^2}{h_k} = \frac{p'_N(x)p_{N-1}(y) - p_N(x)p'_{N-1}(y)}{h_{N-1}} \quad x \neq y.$$

El recíproco de la relación de recurrencia de tres términos es un importante resultado que se conoce con el nombre de Teorema de Favard. Este teorema, que demuestra que toda sucesión de polinomios que satisface una relación de recurrencia, es una sucesión de polinomios ortogonales, fue dado por J. Favard en 1935 [3, pp. 209] aunque aparentemente, fue descubierto al mismo momento e independientemente por J. Shohat y I. Natanson. A continuación damos el enunciado del Teorema de Favard, su demostración puede encontrarse en [3, Theorem 6.4] o [80, Theorem 2.5.2].

Teorema 1.1.3 (Teorema de Favard). *Sean $(b_n)_{n \geq 1}$ y $(c_n)_{n \geq 1}$ dos sucesiones de números reales con $c_n > 0$ para todo n . Sea $(p_n)_{n \geq 0}$ definida por la siguiente relación de recurrencia*

$$p_{n+1}(x) = (x - b_n)p_n(x) - c_n p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1.4)$$

con $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = 1$. Entonces, existe una medida de Borel positiva μ en \mathbb{R} tal que

$$\langle p_0, p_0 \rangle_\mu = c_1, \quad \langle p_m(x), p_n(x) \rangle_\mu = 0 \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

1.2. Familias de polinomios ortogonales Clásicos

Debido a su frecuente aparición en problemas de física y matemática aplicada, las familias de polinomios ortogonales asociados a los nombres Hermite, Laguerre y Jacobi son sin lugar a duda las más estudiadas y las de mayor importancia. A estas familias se las conoce como *Familias de polinomios ortogonales Clásicos*:

Hermite:	$w(x) = e^{-x^2}$	$(a, b) = \mathbb{R}$,	$p_n = H_n$,
Laguerre:	$w(x) = x^\alpha e^{-x}$	$(a, b) = (0, \infty)$,	$p_n = L_n^{(\alpha)}$,
Jacobi:	$w(x) = (1+x)^\alpha (1-x)^\beta$	$(a, b) = (-1, 1)$,	$p_n = P_n^{(\alpha, \beta)}$,

donde $\alpha, \beta > -1$. Los polinomios de Jacobi con parámetro $\alpha = \beta$ son llamados polinomios de Gegenbauer.

A lo largo de los años, se han podido probar muchas propiedades y caracterizaciones de estas familias. En 1929, S. Bochner [17] probó que si una sucesión de polinomios $(p_n)_{n \geq 0}$ satisface una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$f_2(x)p_n''(x) + f_1(x)p_n'(x) + f_0(x)p_n(x) = \lambda_n p_n(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.2.5)$$

entonces f_2, f_1 y f_0 deben ser polinomios de grado $\deg f_i \leq i$. Más aún, si $(p_n)_n$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a una medida de Borel positiva, entonces tiene que ser (salvo transformaciones afines) una de las familias de polinomios ortogonales clásicos de Hermite, Laguerre y Jacobi.

Observación 4. En (1.2.5) asumimos que tenemos soluciones polinomiales de todo grado. Esto resulta ser una hipótesis importante la cual puede ser relajada, ver Sección 1.4.

A partir de las expresiones explícitas de los polinomios pertenecientes a las Familias Clásicas, es sencillo verificar que las derivadas de estos polinomios forman una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a un peso positivo. Así, por ejemplo, la derivada de un polinomio de Hermite es un múltiplo de un polinomio de Hermite, y las derivadas de los polinomios de Laguerre y Jacobi son un múltiplo de polinomios de Laguerre y Jacobi con un parámetro distinto. En 1935, W. Hahn [77] probó que toda sucesión de polinomios ortogonales cuya sucesión de derivadas es ortogonal con respecto a un peso positivo satisface una ecuación de la forma (1.2.5) y, por lo tanto, debe ser una de las Familias Clásicas.

Otra caracterización importante fue dada por W. A. Al-Salam y T. S. Chihara en 1972. En su trabajo [4], se demuestra que las Familias Clásicas son las únicas que satisfacen una fórmula de estructura de la forma

$$\pi(x)p_n'(x) = (\alpha_n x + \beta_n)p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x), \quad (1.2.6)$$

donde $\pi(x)$ es un polinomio fijo.

Otras caracterizaciones importantes de las Familias Clásicas son que satisfacen una fórmula de Rodrigues:

$$p_n(x) = k_n^{-1} w(x)^{-1} \frac{d^n}{dx^n} (\phi(x)^n w(x)),$$

donde k_n es una constante positiva y ϕ es un polinomio de grado a lo sumo dos, y los pesos asociados satisfacen una ecuación de Pearson:

$$\frac{d}{dx} (\phi(x)w(x)) = \psi(x)w(x),$$

donde ϕ es un polinomio de grado ≤ 2 y ψ de grado 1.

1.3. Polinomios ortogonales hipergeométricos

Es natural complementar esta clasificación con familias de polinomios ortogonales que satisfacen una ecuación en diferencias de segundo orden. Así, en [59] se prueba que las familias de Hahn, Krawtchouk, Meixner, Charlier están caracterizadas por ser soluciones de una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes polinomiales. Sus diferencias $\Delta p_n(x) = p_n(x+1) - p_n(x)$ forman una sucesión de polinomios ortogonales, pueden ser expresados mediante una fórmula de Rodrigues discreta, verifican una fórmula de estructura y los pesos asociados a ellos satisfacen una ecuación del tipo Pearson discreta de la forma

$$\phi(x)w(x) - \phi(x-1)w(x-1) = \psi(x)w(x),$$

donde ϕ es un polinomio de grado ≤ 2 y ψ de grado 1. La familia más simple de polinomios ortogonales discretos son los polinomios de Charlier, denotados $c_n^{(a)}(x)$, donde el peso es $w^{(a)}(x) = \frac{a^x}{x!}$ con $a > 0$.

Las familias de polinomios ortogonales descritas anteriormente pertenecen a la clase de polinomios ortogonales hipergeométricos. A continuación, describimos brevemente las funciones hipergeométricas.

1.3.1. Funciones hipergeométricas

Una serie $\sum_{n \geq 0} c_n$ se dice hipergeométrica si el cociente $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ es una función racional en n . En tal caso, factorizando el cociente $\frac{c_{n+1}}{c_n}$, obtenemos

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(a_1 + n) \dots (a_p + n)}{(b_1 + n) \dots (b_q + n)} \alpha_n,$$

para algunos $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q, \alpha_n \in \mathbb{C}$. De esta fórmula, reemplazando $\alpha_n = \frac{z}{1+n}$, obtenemos que

$$c_n = \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n n!},$$

donde $(a)_k$ es el símbolo de Pochhammer que está dado por

$$(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1). \quad (1.3.7)$$

La función hipergeométrica es la serie de potencias

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_p)_k z^k}{(b_1, \dots, b_q)_k k!}, \quad (1.3.8)$$

donde $(a_1, \dots, a_p)_k = (a_1)_k \dots (a_p)_k$.

Asumimos que los parámetros son tales que los denominadores en los términos de la serie nunca son cero. Si algún parámetro del numerador a_i es igual a $-n$ para algún n entero no negativo, la serie hipergeométrica es un polinomio en z . Aplicando el test del cociente, se verifica que el radio de convergencia de la serie hipergeométrica está dado por

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{si } p < q + 1, \\ 1 & \text{si } p = q + 1, \\ 0 & \text{si } p > q + 1. \end{cases}$$

La función hipergeométrica (1.3.8) satisface la siguiente ecuación diferencial, ver por ejemplo [115, §2.1.2],

$$\left[z \frac{d}{dz} \left(z \frac{d}{dz} + b_1 - 1 \right) \left(z \frac{d}{dz} + b_2 - 1 \right) \dots \left(z \frac{d}{dz} + b_q - 1 \right) + z \left(z \frac{d}{dz} + a_1 \right) \dots \left(z \frac{d}{dz} + a_p \right) \right] {}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z \right) = 0. \quad (1.3.9)$$

En caso de que $p = 2$ y $q = 1$, la función hipergeométrica

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z \right),$$

se llama función hipergeométrica de Gauss. Para la función hipergeométrica de Gauss, la ecuación diferencial (1.3.9) se escribe de la forma

$$z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (c - (1+a+b)z) \frac{d}{dz} - ab = 0.$$

Estas funciones han sido estudiadas extensivamente por L. Euler, F. Pfaff, C. F. Gauss, E. Kummer y B. Riemann.

1.3.2. Askey-Scheme de polinomios ortogonales hipergeométricos

Las Familias Clásicas de Hermite, Laguerre y Jacobi junto con las de Hahn, Krawtchouk, Meixner y Charlier, conforman una clase muy importante de polinomios ortogonales. Estas familias están clasificadas y se agrupan en el llamado *Askey-Scheme* de polinomios ortogonales hipergeométricos, que fue introducido en 1985 por R. Askey y J.A. Wilson.

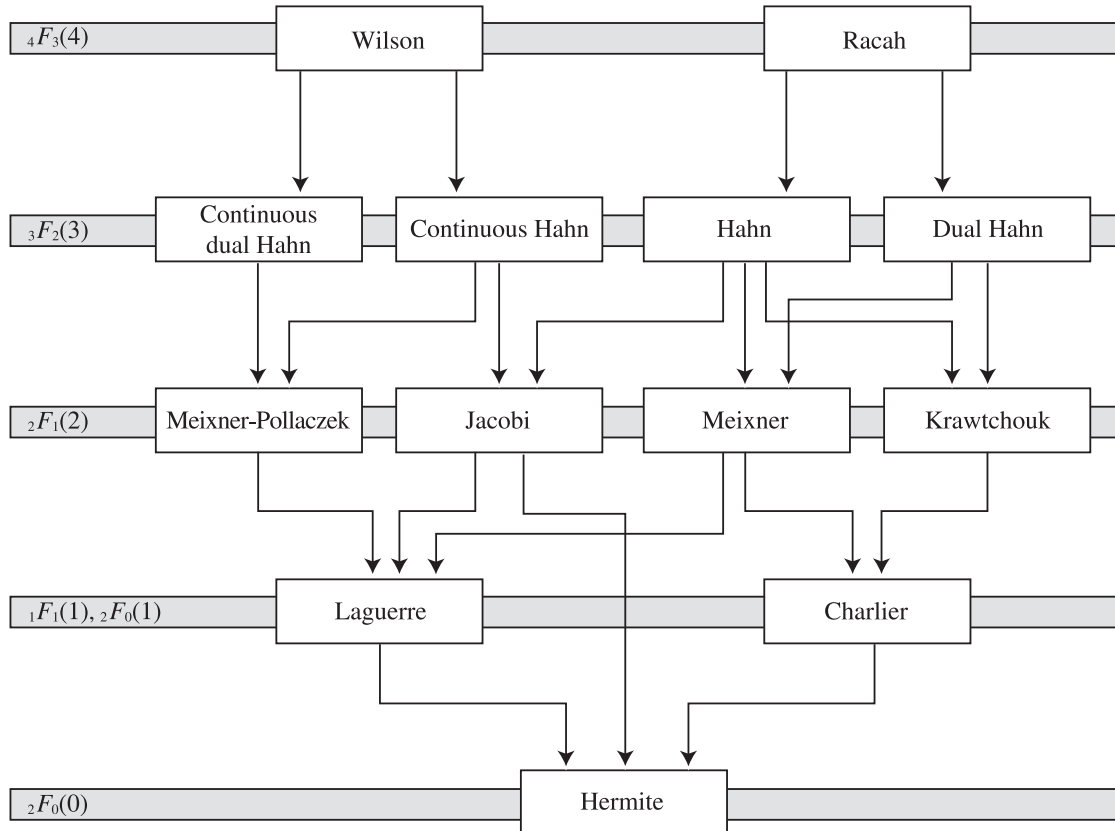


Figura 1.1: *Askey Scheme* de polinomios ortogonales hipergeométricos. Fuente: *NIST Digital Library of Mathematical Functions* [35].

Las familias de polinomios ortogonales en el *Askey-Scheme*, se escriben en términos de funciones hipergeométricas y se ubican en la Figura 1.1 de forma tal que las filas corresponden al número de parámetros libres en la familia. De esta forma, los polinomios de Hermite, que no tienen ningún parámetro libre se encuentran en el escalón más bajo, y los polinomios de Wilson y de Racah, con cuatro parámetros libres, se encuentran en la cima.

Las familias de una fila de la tabla pueden estar unidas a las de su fila inmediata inferior por una flecha que indica que es posible tomar una relación límite que lleve los polinomios de la fila superior a la inferior.

Las familias en el *Askey-Scheme* tienen propiedades muy similares a las de las Familias Clásicas. Estas propiedades incluyen ser autofunciones de un operador de segundo orden (ya sea diferencial o en diferencias), satisfacer ecuaciones de Pearson, y la existencia de *lowering* y *raising operators* explícitos. Como consecuencia de la existencia de estos operadores, los polinomios se pueden describir en términos de una fórmula de Rodrigues. Estas propiedades están recopiladas en [94] donde se listan todas las familias del *Askey-Scheme* y sus propiedades

en orden. Recomendamos [95] para una lectura con mayor detalle de polinomios ortogonales hipergeométricos.

Es posible obtener un q -análogo de este esquema, llamado q -*Askey-Scheme*. Tal como para las familias de polinomios ortogonales hipergeométricos en el *Askey-Scheme*, en [95] se da en detalle las definiciones, relaciones de ortogonalidad, relación de recurrencia de tres términos, ecuaciones en diferencias de segundo orden, *shift operators*, y fórmulas de Rodrigues para todos los q -análogos de los polinomios ortogonales hipergeométricos del *Askey-Scheme*. En la cima de este esquema se ubican los polinomios de Askey-Wilson, ver por ejemplo [35, §18.28].

1.4. Polinomios ortogonales excepcionales

Tal como ha sido mencionado anteriormente, las familias de polinomios ortogonales clásicos, es decir las familias de Hermite, Laguerre, y Jacobi, han sido muy estudiadas y se han encontrado diferentes aplicaciones tanto en áreas de la matemática como de la física debido a la propiedad de ser autofunciones de un operador diferencial de segundo orden. Recordemos que en 1929, S. Bochner [17] probó que si una sucesión de polinomios $(p_n)_{n \geq 0}$ satisface una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$f_2(x)p_n''(x) + f_1(x)p_n'(x) + f_0(x)p_n(x) = \lambda_n p_n(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

entonces f_2, f_1 y f_0 deben ser polinomios de grado $\deg f_i \leq i$. Más aún, si $(p_n)_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a una medida de Borel positiva, entonces tiene que ser una de las familias de polinomios ortogonales clásicos de Hermite, Laguerre y Jacobi.

Observación 5. Consideramos importante resaltar que en el Teorema de clasificación de Bochner, asumimos que p_n es una autofunción polinomial del operador diferencial para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Es decir, consideramos operadores diferenciales con autofunciones polinomiales de todos los grados, lo cual resulta ser una hipótesis importante.

Las familias de polinomios ortogonales del *Askey-scheme* y q -*Askey-scheme* generalizan las familias clásicas de Jacobi, Laguerre y Hermite y comparten muchas de sus propiedades notables. En los últimos años, las familias clásicas han sido extendidas en diferentes direcciones. Por un lado, una extensión importante son los polinomios ortogonales matriciales, ver Sección 1.5. Por otro lado, una extensión reciente fue obtenida relajando la condición sobre grados en (1.2.5). Estos son los llamados polinomios ortogonales excepcionales. En analogía con el contexto clásico, los polinomios excepcionales son sucesiones de polinomios ortogonales densas en $L^2(\hat{w})$, son autofunciones de un operador diferencial de orden dos (ahora con coeficientes racionales), pero *perdemos algunos grados*, i.e., hay un número finito de grados para los cuales no existe tal autofunción polinomial. El estudio de estos polinomios comenzó en [64] y [65] y continuó en, por ejemplo, [18, 42, 49, 66, 67, 72, 79, 98, 110–113]. Una herramienta importante para el estudio de polinomios excepcionales son las transformaciones de Darboux. Una clasificación de polinomios excepcionales fue dada en [60], donde los autores prueban que toda familia de polinomios excepcionales puede ser obtenida aplicando un número finito de transformaciones de Darboux a las familias clásicas.

En esta sección describiremos una de las familias de polinomios excepcionales X-Laguerre. Se pueden realizar construcciones similares para familias de polinomios excepcionales de tipo Hermite y Jacobi, ver por ejemplo [63, 68, 100, 102]. Los polinomios excepcionales de Laguerre

están clasificados según tipo I, tipo II, y tipo III X_m -Laguerre, ver por ejemplo [66, 68, 98]. Trabajaremos con los de tipo II:

$$L_{n,m}^{II,\alpha} = -A_m^{(\alpha+1)} \cdot L_{n-m}^{(\alpha+1)} \quad n \geq m, \quad (1.4.10)$$

donde $L_{n-m}^{(\alpha+1)}$ denota el polinomio de Laguerre de grado $n - m$ y parámetro $\alpha + 1$, ver por ejemplo [9, 80, 94, 95],

$$L_m^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_m}{m!} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -m \\ \alpha + 1 \end{matrix}; x \right), \quad (1.4.11)$$

y $A_m^{(\alpha+1)}$ es el *operador de entrelazamiento* de orden uno definido en (1.4.17). Este operador está relacionado a una factorización de la forma $T_0^{(\alpha+1)} = B^{(\alpha+1)}A^{(\alpha+1)} + \lambda$ del operador de Laguerre clásico:

$$T_0^{(\alpha)} = x \frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 1 - x) \frac{d}{dx}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.4.12)$$

El operador de entrelazamiento está construido de forma tal que $L_{n,m}^{II,\alpha}$ resulta ser un polinomio de grado n . En las Secciones 3.8 y 3.9 extenderemos este ejemplo al caso matricial.

1.4.1. Transformaciones de Darboux y *seed functions*

En esta sección describiremos formalmente las llamadas *transformaciones de Darboux racionales* de operadores diferenciales de orden dos. Por el momento no estaremos interesados en sus propiedades espectrales. Consideremos T_0 un operador diferencial de orden dos

$$T_0 = f_2(x)\partial_x^2 + f_1(x)\partial_x + f_0(x),$$

donde f_2, f_1, f_0 son funciones racionales de x .

Definición 1.4.1. Una *factorización racional* de T_0 es una relación de la forma

$$T_0 = BA + \lambda, \quad (1.4.13)$$

donde A, B son operadores diferenciales de orden uno con coeficientes racionales y λ es constante. Dada una factorización racional, consideramos un nuevo operador de orden dos

$$T_1 = AB + \lambda = \hat{f}_2(x)\partial_x^2 + \hat{f}_1(x)\partial_x + \hat{f}_0(x). \quad (1.4.14)$$

Decimos que T_1 se obtiene de T_0 realizando una *transformación de Darboux*, es decir intercambiando el orden en el cual aplicamos los operadores A y B .

Es sencillo verificar que las siguientes relaciones se satisfacen

$$T_1A = AT_0, \quad BT_1 = T_0B.$$

Por esta razón llamamos a A y B *operadores de entrelazamiento*.

Observación 6. La transformación de Darboux es puramente formal y su objetivo principal es relacionar autofunciones de T_0 y T_1 . Observemos que como consecuencia de las relaciones de entrelazamiento, dada p una autofunción de T_0 de autovalor λ , $A \cdot p$ es una autofunción de T_1 del mismo autovalor. Similarmente, dada q autofunción de T_1 , $B \cdot q$ es autofunción de T_0 del mismo autovalor.

Definición 1.4.2. Decimos que una función ϕ es una *seed function* de T_0 si

$$\frac{\phi(x)'}{\phi(x)} \text{ es una función racional y } T_0 \cdot \phi = \lambda \phi \text{ con } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo. Las *seed functions* con una parte polinomial del operador de Laguerre (1.4.12) son conocidas, ver por ejemplo [54, §6.1],

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= L_m^{(\alpha)}(x), & \lambda_1 &= -m. \\ \phi_2(x) &= x^{-\alpha} L_m^{(-\alpha)}(x), & \lambda_2 &= \alpha - m. \\ \phi_3(x) &= e^x L_m^{(\alpha)}(-x), & \lambda_3 &= \alpha + 1 + m. \\ \phi_4(x) &= x^{-\alpha} e^x L_m^{(-\alpha)}(-x), & \lambda_4 &= m + 1. \end{aligned}$$

La siguiente proposición indica que dado un operador diferencial T_0 de orden dos con coeficientes racionales, las *seed functions* ϕ de T_0 están en correspondencia con las factorizaciones racionales.

Proposición 1.4.3. [60, Proposition 3.5] *Supongamos que ϕ es una seed function de T_0 . Entonces T_0 admite una factorización racional de la forma (1.4.13) con*

$$A = b(x)(\partial_x - w(x)), \quad B = \hat{b}(x)(\partial_x - \hat{w}(x)), \quad (1.4.15)$$

donde

$$w = \frac{\phi'}{\phi}, \quad \hat{b} = \frac{f_1}{b}, \quad \hat{w} = -w - \frac{f_2}{f_1} + \frac{b'}{b}, \quad (1.4.16)$$

y $b(x)$ es una función racional no nula arbitraria. Recíprocamente, si T_0 admite una factorización racional de la forma (1.4.13), entonces existe una *seed function* de T_0 . Más aún si w, \hat{w}, b, \hat{b} están definidos según (1.4.15), entonces (1.4.16) se satisface.

Observación 7. El operador diferencial A tiene un rol fundamental en la construcción de los polinomios excepcionales. Notemos que $A \cdot \phi = 0$. Además, A puede ser escrito en términos de un Wronskiano

$$Ay = \frac{b(x)}{\phi(x)} \text{Wr}[\phi, y].$$

Observación 8. Observemos que en la Proposición 1.4.3, b es una función racional no nula arbitraria. Usualmente tomamos b de forma tal que el operador de entrelazamiento A *preserva polinomios*. De esta manera si p es una autofunción polinomial de T_0 entonces $A \cdot p$ es una autofunción polinomial de su transformación de Darboux T_1 . Más aún, si $(p_n)_n$ es una sucesión de autofunciones polinomiales de T_0 entonces $(A \cdot p_n)_n$ es una sucesión de autofunciones polinomiales de T_1 .

Proposición 1.4.4. [60, Proposition 3.6] *Supongamos que T_1 se obtiene de T_0 realizando una transformación de Darboux racional, ver (1.4.14). Entonces los coeficientes $\hat{f}_2, \hat{f}_1, \hat{f}_0$ de T_1 son:*

$$\begin{aligned} \hat{f}_2 &= f_2, \\ \hat{f}_1 &= f_1 + f_2' - \frac{2b'}{b} f_2, \\ \hat{f}_0 &= f_0 + f_1' + w f_2' - \frac{b'}{b} (f_1 + f_2') + \left(2 \left(\frac{b'}{b} \right)^2 - \frac{b''}{b} + 2w' \right) f_2. \end{aligned}$$

Ejemplo. Consideremos la *seed function* más simple del operador de Laguerre, $\phi_1(x) = L_0^{(\alpha)}(x) = 1$. La factorización resultante es

$$T_0^{(\alpha)} = BA, \quad \text{donde} \quad A = \partial_x, \quad B = x\partial_x + (\alpha + 1 - x).$$

Observemos que la correspondiente transformación de Darboux es $AB = T_0^{(\alpha+1)} - 1$. Dicho de otra forma, si utilizamos $L_0^{(\alpha)}(x)$ como *seed function* obtenemos nuevamente un operador de Laguerre pero con un *shift* en el parámetro.

Ejemplo. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha > m$, consideremos la *seed function* $\phi_2 = x^{-\alpha}L_m^{(-\alpha)}(x)$, del operador de Laguerre. Tomamos $b(x) = xL_m^{(-\alpha)}(x)$ y la factorización resultante es

$$T_0^{(\alpha)} = B^{(\alpha)}A^{(\alpha)} + (\alpha - m),$$

donde

$$A^{(\alpha)} = xL_m^{(-\alpha)}(x)\partial_x + (\alpha - m)L_m^{(-\alpha-1)}(x), \quad B^{(\alpha)} = \frac{1}{L_m^{(-\alpha)}(x)}(\partial_x - 1). \quad (1.4.17)$$

En este caso, la correspondiente transformación de Darboux es

$$T_1^{(\alpha)} = A^{(\alpha)}B^{(\alpha)} + (\alpha - m) = x\partial_x^2 + \left(\alpha - x - \frac{2xL_m^{(-\alpha)}(x)'}{L_m^{(-\alpha)}(x)} \right) \partial_x + \frac{2xL_m^{(-\alpha)}(x)'}{L_m^{(-\alpha)}(x)} - m.$$

Notemos que $A^{(\alpha)}$ preserva polinomios. Más aún, se verifica que $A^{(\alpha)} \cdot p$ es un polinomio de grado $n + m$ para todo polinomio p de grado n .

Ahora que sabemos aplicar transformaciones de Darboux para pasar de T_0 a T_1 , no hay razón por la cual parar aquí. Podemos aplicar la transformación nuevamente y en general tantas veces como quisieramos. Esto nos lleva a considerar la siguiente definición:

Definición 1.4.5. Dados dos operadores diferenciales T_0 y T_1 de orden dos con coeficientes racionales, decimos que T_0 está Darboux conectado a T_1 si existe un operador diferencial con coeficientes racionales L tal que $T_1L = LT_0$.

Observación 9. En la definición anterior el operador L puede tener cualquier orden, por lo cual si T_1 se obtiene a partir T_0 realizando una transformación de Darboux, entonces T_0 está Darboux conectado a T_1 .

1.4.2. Clasificación de polinomios excepcionales

En esta sección damos la definición de polinomios ortogonales excepcionales y enunciamos el Teorema de clasificación.

Definición 1.4.6. Una sucesión de polinomios ortogonales excepcionales es una sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0 \setminus A}$ tal que:

1. $\deg p_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0 \setminus A$, donde A es un conjunto finito de \mathbb{N}_0 .
2. Existe un intervalo (a, b) y una función peso $w > 0$ con momentos finitos de todos los órdenes tal que $\int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x)dx = h_n\delta_{n,m}$ para una sucesión $h_n > 0, n, m \in \mathbb{N}_0 \setminus A$.

3. Existe un operador diferencial de segundo orden con coeficientes racionales T tal que $T \cdot p_n = \lambda_n p_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0 \setminus A$.

4. Para $n \in A$ no existe autofunción polinomial de T de grado n .

Teorema 1.4.7. [60, Theorem 1.2] *Toda sucesión de polinomios ortogonales excepcionales puede ser obtenida aplicando una cantidad finita de transformaciones de Darboux a una de las familias Clásicas.*

Observación 10. En el teorema anterior el operador diferencial de segundo orden para el cual los polinomios excepcionales son autofunciones está Darboux conectado a uno de los operadores de las familias clásicas.

Ejemplo (X-Laguerre). Los polinomios X_m -Laguerre de tipo II son

$$L_{n,m}^{II,\alpha}(c) = -A_m^{(\alpha+1)} \cdot L_{n-m}^{(\alpha+1)}(x) \quad n \geq m.$$

Observemos que $\deg L_{n,m}^{II,\alpha} = n$. Por construcción estos polinomios satisfacen

$$T_1^{(\alpha+1)} L_{m,n}^{(\alpha+1)} = (m-n) L_{m,n}^{(\alpha+1)}, \quad n \geq m.$$

La sucesión $(L_{m,n}^{(\alpha)})_{n \geq m}$ es ortogonal con respecto al peso

$$\widehat{w}_{\alpha,m}(x) = \frac{x^\alpha e^{-x}}{L_m^{(-\alpha-1)}(x)^2}, \quad x \in (0, \infty).$$

Asumiendo $\alpha + 1 > m$, los ceros de $L_m^{(-\alpha-1)}$ no se encuentran dentro del intervalo de ortogonalidad $[0, \infty)$, ver [116, Theorem 6.73] y por lo tanto $\widehat{w}_{\alpha,m}$ tiene momentos finitos de todos los órdenes. Se puede probar que la sucesión $(L_{n,m}^{II,\alpha})_{n \geq m}$ es densa en el espacio de Hilbert $L^2([0, \infty), \widehat{w}_{\alpha,m} dx)$, ver [67].

1.5. Polinomios ortogonales matriciales

En esta sección discutiremos generalizaciones matriciales de polinomios ortogonales y en particular generalizaciones matriciales que tengan propiedades similares a las de los polinomios ortogonales clásicos. Estas propiedades pueden ser generalizadas de distintas formas y muchas de ellas dejan de ser equivalentes en el caso matricial. Por ejemplo, se ha demostrado en [22, 23] que, es posible tener una familia de polinomios ortogonales matriciales que sean autofunciones de un operador diferencial de segundo orden, pero cuyo peso matricial no cumple con una ecuación de Pearson adecuada. Por lo tanto, la versión matricial es más complicada y rica en comparación con su contraparte escalar.

La teoría de polinomios ortogonales matriciales tuvo sus inicios en los trabajos de M. Krein [97] y tiene conexiones y aplicaciones en diferentes áreas de la matemática y de la física matemática tales como *scattering theory* [62], *tiling problems* [37], sistemas integrables [7, 10, 11, 82], teoría espectral [73] y procesos estocásticos [33, 34, 74].

Al igual que en el caso escalar, hay un interés particular en comprender familias de polinomios ortogonales matriciales que actúen como autofunciones de operadores diferenciales de segundo orden [23, 44, 46, 47, 75, 91, 92], en diferencias [5, 8, 43] o en q -diferencias [5, 6]. El análisis armónico en espacios simétricos compactos ha desempeñado un papel crucial en

la construcción familias de polinomios ortogonales matriciales que cumplen esta propiedad. El primer ejemplo de este tipo se presentó en [75] para el par simétrico $(\text{SU}(3), \text{S}(\text{U}(2) \times \text{U}(1)))$ y posteriormente se ha extendido a varios pares de rango uno [79, 91, 92, 123], grupos cuánticos [6] y grupos de rango mayor [87, 93]. En este contexto, muchas de las propiedades fundamentales de los polinomios ortogonales matriciales tales como la ortogonalidad, las relaciones de recurrencia y las ecuaciones diferenciales, se comprenden a través de la teoría de representación de los espacios simétricos correspondientes.

En las últimas dos décadas, se han logrado avances significativos en la comprensión de cómo las propiedades algebraicas y diferenciales de los polinomios ortogonales escalares pueden extenderse al contexto matricial. En [47] A. Durán y M. Ismail, introdujeron los primeros *lowering* y *raising operators* para polinomios ortogonales matriciales. Estos operadores representaron un avance fundamental en la teoría de los polinomios ortogonales matriciales.

Recientemente R. Casper y M. Yakimov [24] han presentado un marco teórico general para abordar el problema matricial de Bochner, el cual fue inicialmente propuesto en [40]. El problema matricial de Bochner es la clasificación de pesos matriciales $N \times N$ para los cuales los polinomios ortogonales asociados actúan como autofunciones de un operador diferencial matricial de segundo orden. Vale la pena destacar que parte de la teoría desarrollada en [24] ha sido adaptada y aplicada en esta tesis.

1.5.1. Definiciones formales y teoría general

En esta sección introduciremos las definiciones formales y propiedades básicas de los polinomios ortogonales matriciales. Dado $N \in \mathbb{N}$, denotamos por $M_N(\mathbb{C})$ al anillo de matrices $N \times N$ con entradas complejas y por $M_N(\mathbb{C})[x]$ al módulo (a izquierda y derecha sobre $M_N(\mathbb{C})$) de polinomios con coeficientes matriciales. Más aún, denotamos por I a la matriz identidad y por 0 a la matriz cero. Dada $A \in M_N(\mathbb{C})$ denotamos $A > 0$ ($A \geq 0$) si la matriz es definida positiva (definida no negativa). Denotamos por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} .

Definición 1.5.1. Un producto interno matricial en $M_N(\mathbb{C})[x]$ es un mapa

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : M_N(\mathbb{C})[x] \times M_N(\mathbb{C})[x] \rightarrow M_N(\mathbb{C})$$

que satisface

1. $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle^*$ para todos $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$.
2. $\langle A_1 P_1 + A_2 P_2, Q \rangle = A_1 \langle P_1, Q \rangle + A_2 \langle P_2, Q \rangle$ donde $P_1, P_2, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$ y $A_i \in M_N(\mathbb{C})$.
3. $\langle P, P \rangle \geq 0$ para todo $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$.

Además, decimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es no degenerado si $\langle P, P \rangle = 0$ si y sólo si $P = 0$.

Observación 11. Consideremos un polinomio matricial $P(x) = A_n x^n + \dots + A_0$. La matriz $\langle P, P \rangle$ podría ser singular. Se puede verificar que si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es no degenerado y A_i es invertible para algún i , entonces $\langle P, P \rangle$ es no singular. En particular, si el producto interno es no degenerado y el polinomio P es mónico, entonces $\langle P, P \rangle$ es no singular.

Observación 12. Usualmente llamamos a $\langle P, P \rangle$ *norma cuadrada*. Consideramos importante aclarar que ésta no es una norma en el sentido clásico. Uno puede considerar

$$\|P\|_{tr} = (\text{Tr} \langle P, P \rangle)^{1/2}, \quad (1.5.18)$$

y de esta forma tener, al menos, una semi-norma en $M_N(\mathbb{C})[x]$. De hecho $\langle P, Q \rangle_{tr} = \text{Tr}(P, Q)$ es una forma sesquilineal definida no negativa y (1.5.18) es una semi-norma asociada a este producto interno. Notemos que dado $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$, si $\|P\|_{tr} = 0$ entonces $\langle P, P \rangle = 0$.

Definición 1.5.2. Una medida matricial Θ sobre \mathbb{R} es una función $\Theta : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ con

1. $\Theta(X) \geq 0$ para todo $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. $\Theta(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(X_n)$, para toda sucesión $(X_n)_n \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjunta 2 a 2.
3. $\Theta(\emptyset) = 0$.

Asociada a una medida matricial tenemos una medida de Borel en \mathbb{R} , $\tau_{\Theta}(E) = \text{Tr}(\Theta(E))$. Las medidas Θ_{ij} resultan ser absolutamente continuas con respecto a la medida traza τ_{Θ} . Luego, aplicando el Teorema de Radon-Nikodym, vemos que existe una función matricial $W(x)$ definida no negativa $d\tau_{\Theta}$ -p.p tal que

$$d\Theta_{ij}(x) = W_{ij}(x)d\tau_{\Theta}(x).$$

Recíprocamente, cualquier medida de Borel positiva ν y función matricial $W(x)$ definida no negativa $d\nu$ -p.p, define una medida matricial. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad consideraremos medidas matriciales de la forma

$$\Theta(E) = \int_E W(X)d\nu(x),$$

donde ν es una medida de Borel positiva sobre \mathbb{R} y $W(x)$ es una matriz definida no negativa $d\nu$ -p.p., ver [12, 29]. A la función W la llamaremos *peso matricial* asociado a Θ . Dado $k \in \mathbb{N}_0$, el k -ésimo *momento de* Θ está dado por

$$\Theta_k = \int_{\mathbb{R}} x^k W(x)d\nu(x). \quad (1.5.19)$$

Asumimos que Θ tiene *momentos finitos de todo orden*, es decir asumimos que la matriz Θ_k existe y tiene entradas finitas para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Denotamos $\Theta_k < \infty$ y usualmente diremos que W tiene *momentos finitos de todos los órdenes*.

Definimos un producto interno matricial $\langle \cdot, \cdot \rangle_W : M_N(\mathbb{C})[x] \times M_N(\mathbb{C})[x] \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ por

$$\langle P, Q \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P(x)W(x)Q(x)^*d\nu(x), \quad (1.5.20)$$

donde $*$ denota la transpuesta conjugada e integramos entrada a entrada. Nos referiremos al producto interno matricial (1.5.20) como *producto interno matricial inducido por* W .

Observación 13. Notemos que $\langle P, Q \rangle_W < \infty$ para todo par de polinomios $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$. Esto es consecuencia directa del hecho que W tenga momentos finitos de todo orden.

En esta tesis, sólo consideraremos los casos en que ν es la medida de Lebesgue dx sobre \mathbb{R} o el caso en que ν es una medida discreta con soporte en un número infinito de puntos de \mathbb{N}_0 , en cuyo caso reemplazamos la integral por una serie

$$\langle P, Q \rangle_W = \sum_{x=0}^{\infty} P(x)W(x)Q(x)^*.$$

Lema 1.5.3. Si $dv(x) = dx$ y $W(x)$ es una matriz definida positiva dx -p.p. dentro de un intervalo (a, b) y cero fuera del intervalo, el producto interno matricial (1.5.20) es no degenerado.

Observación 14. Dadas F, G funciones matriciales es suficiente que tanto F como G satisfagan

$$\int_{\mathbb{R}} \text{Tr}(F(x)F(x)^*)d\tau_{\Theta}(x) < \infty,$$

para que la integral

$$\langle F, G \rangle = \int_{\mathbb{R}} F(x)W(x)G(x)^*d\tau_{\Theta}(x)$$

converja, ver [29, Ecuación 1.26]. Denotaremos $L^2(W) = \{F : \mathbb{R} \rightarrow M_N(\mathbb{C}) : \langle F, F \rangle < \infty\}$. Consideramos la relación de equivalencia en $L^2(W) : F \sim G$ si $\|F - G\|_{tr} = 0$, y la completación \mathcal{H} del espacio $L^2(W)/\{F : \|F\|_{tr} = 0\}$ resulta ser un espacio de Hilbert en donde $\langle P, Q \rangle_{tr} = \text{Tr}\langle P, Q \rangle$ es el producto interno asociado.

Observación 15. En muchos casos es conveniente trabajar con funciones vectoriales fila en lugar de funciones matriciales. Las funciones vectoriales fila cuadrado integrables son funciones medibles $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$ que satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)W(x)(f(x))^*d\tau_{\Theta}(x) < \infty.$$

Luego de identificar las funciones τ_{Θ} -p.p. obtenemos el espacio de Hilbert $L^2(W)$ de funciones vectoriales fila cuadrado integrables. Asumimos que $\int_{\mathbb{R}} f(x)W(x)(f(x))^*d\tau_{\Theta}(x) = 0$ implica $f = 0$ τ_{Θ} -p.p., lo cual significa que el núcleo de W es trivial para casi todo punto (τ_{Θ} -p.p.). Esto será de gran utilidad en el Capítulo 3.

Definición 1.5.4. Decimos que una sucesión de polinomios matriciales $(Q_n)_{n \geq 0}$ es *simple* si Q_n tiene grado n y coeficiente director no singular para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Observación 16. Toda sucesión simple de polinomios matriciales forma una base de $M_N(\mathbb{C})[x]$, como módulo a izquierda sobre $M_N(\mathbb{C})$.

Definición 1.5.5. Decimos que una sucesión de polinomios matriciales $(Q_n)_{n \geq 0}$ es una *sucesión de polinomios ortogonales matriciales* con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, si es simple y

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = \mathcal{H}_n \delta_{n,m}, \quad (1.5.21)$$

para una matriz definida positiva \mathcal{H}_n . Si $\mathcal{H}_n = I$ para todo n los llamamos *ortonormales* y si el coeficiente director de Q_n es la matriz identidad I para todo n los llamamos *mónicos*. Si el producto interno está dado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ diremos que los polinomios son ortogonales (respectivamente ortonormales) respecto a W .

Observación 17. Se puede verificar que dado un producto interno matricial $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $(Q_n)_n$ una sucesión de polinomios ortogonales matriciales con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces el producto interno matricial resulta ser no degenerado.

Aplicando argumentos estándares podemos probar que dado un producto interno matricial no degenerado, existe una única sucesión $(P_n)_n$ de polinomios ortogonales matriciales mónicos (ver por ejemplo [29, 97]).

1.5.2. Propiedades de polinomios ortogonales

Tal como en el caso escalar, los polinomios ortogonales matriciales satisfacen una relación de recurrencia de tres términos, ver [?]. Enunciaremos la versión mónica y ortonormal de esta relación.

Teorema 1.5.6 (Relación de recurrencia de tres términos). *Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno matricial no degenerado y $(P_n)_n$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Si se cumple la condición de simetría*

$$\langle xP, Q \rangle = \langle P, xQ \rangle \quad \text{para todos } P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x], \quad (1.5.22)$$

entonces existen matrices $B_n, C_n \in M_N(\mathbb{C})$ tales que

$$xP_n(x) = P_{n+1} + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), \quad P_{-1} := 0, \quad (1.5.23)$$

Observación 18. El producto interno matricial inducido por W en (1.5.20) satisface la condición de simetría (1.5.22).

Observación 19. Notemos que los coeficientes matriciales en (1.5.23) multiplican a los polinomios ortogonales por la izquierda. A partir de las relaciones de ortogonalidad, obtenemos que

$$B_n = X_n - X_{n+1}, \quad C_n = \mathcal{H}_n \mathcal{H}_{n-1}^{-1}, \quad (1.5.24)$$

donde X_n es el coeficiente subdirector de P_n , es decir $P_n(x) = x^n + x^{n-1}X_n + \dots$.

Teorema 1.5.7. *Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno matricial no degenerado que satisface la condición de simetría (1.5.22) y $(Q_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales ortonormales. Se satisface una relación de recurrencia de la forma*

$$xQ_n(x) = A_n Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + A_{n-1}^* Q_{n-1}(x), \quad Q_{-1} := 0.$$

Además, B_n es hermitiana para todo n .

Tal como hemos visto en el caso escalar, una consecuencia inmediata de la relación de recurrencia de tres términos es la Identidad de Christoffel-Darboux, ver [?].

Teorema 1.5.8 (Identidad de Christoffel-Darboux). *Si $(Q_n)_{n \geq 0}$ es una sucesión de polinomios matriciales ortonormales con respecto a W entonces*

$$\sum_{j=0}^n Q_j^*(x) Q_j(y) = \frac{Q_n^*(x) A_n Q_{n+1}(y) - Q_{n+1}^*(x) A_n^* Q_n(y)}{y - x}. \quad (1.5.25)$$

En el caso matricial existe un resultado análogo al Teorema de Favard escalar 1.1.3 que es el recíproco de la relación de recurrencia de tres términos, ver por ejemplo [41].

1.5.3. Operadores simétricos

En esta sección enunciaremos algunos resultados relevantes sobre operadores lineales simétricos. Trabajaremos con productos internos matriciales asociados a pesos matriciales W de la forma (1.5.20). Sea $T : M_N(\mathbb{C})[x] \rightarrow M_N(\mathbb{C})[x]$ un operador lineal. Diremos que T es W -simétrico si

$$\langle TP, Q \rangle_W = \langle P, TQ \rangle_W, \quad \text{para todos } P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x].$$

Una de las propiedades fundamentales del producto interno matricial inducido por W (1.5.20) es el hecho de que el operador multiplicación por x es un operador simétrico. La relación de recurrencia de tres términos (1.5.23) es una consecuencia de este hecho, ver Teorema 1.5.6.

Definición 1.5.9. Una sucesión de polinomios ortogonales $(Q_n)_{n \geq 0}$ es una sucesión de autofunciones del operador T si existe una sucesión de matrices $\Lambda_n \in M_N(\mathbb{C})$ tal que

$$TQ_n = \Lambda_n Q_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Sea V_n el espacio vectorial de todos los polinomios en $M_N(\mathbb{C})[x]$ de grado menor o igual a n , es decir

$$V_n = \{H \in M_N(\mathbb{C})[x] : \deg(H) \leq n\}. \quad (1.5.26)$$

El siguiente teorema, indica que todo operador simétrico T que preserve los espacios vectoriales V_j , es decir que $TV_j \subset V_j$, donde V_j está dado en (1.5.26), tiene a cualquier sucesión de polinomios ortogonales como autofunciones, **ver [] para su demostración.**

Teorema 1.5.10. *Sea $(Q_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales matriciales asociada a W . Si $T : M_N(\mathbb{C})[x] \rightarrow M_N(\mathbb{C})[x]$ es simétrico respecto a W y preserva los espacios V_j , entonces, $TQ_n = \Lambda_n Q_n$, para alguna matriz Λ_n .*

Supongamos que tenemos n operadores lineales $T_j : M_N(\mathbb{C})[x] \rightarrow M_N(\mathbb{C})[x]$ tal que para todo polinomio P de grado m con coeficiente director inversible tenemos que $T_j P$ es un polinomio de grado $m - j$ con coeficiente director inversible si $j \leq m$ y cero si $j > m$. Entonces definimos T de la siguiente forma

$$T = F_n(x)T_n + \cdots + F_0(x)T_0, \quad (1.5.27)$$

donde F_j son funciones matriciales.

Proposición 1.5.11. [] *Supongamos que T es un operador lineal de la forma (1.5.27) que preserva los espacios V_j para todo $j = 0, \dots, n$. Entonces F_i es un polinomio de grado a lo sumo i para todo $i = 0, \dots, n$.*

Hemos visto en el Teorema 1.5.10 que todo operador simétrico que preserve el grado de los polinomios tiene a cualquier sucesión de polinomios ortogonales como autofunciones. En [46, Theorem 3.1] se dan condiciones para la simetría de un operador diferencial de orden dos.

Teorema 1.5.12. [46, Theorem 3.1] *Dado un peso matricial W con soporte (a, b) , consideremos el operador diferencial*

$$(P \cdot D)(x) = \frac{d^2 P}{dx^2}(x)A_2(x) + \frac{dP}{dx}(x)A_1(x) + P(x)A_0(x), \quad (1.5.28)$$

donde A_j es un polinomio matricial de grado menor o igual a j . Entonces D es simétrico con respecto a W si y sólo si las funciones A_2, A_1, A_0 satisfacen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a, b} A_2(x)W(x) &= 0, & \lim_{x \rightarrow a, b} (A_1(x)W(x) - \frac{d(A_2W)}{dx}(x)) &= 0, \\ A_2(x)W(x) &= W(x)A_2(x)^*, & 2\frac{d(A_2W)}{dx}(x) &= W(x)A_1(x)^* + A_1(x)W(x), \\ \frac{d^2(A_2W)}{dx^2}(x) - \frac{d(A_1W)}{dx}(x) + A_0(x)W(x) &= W(x)A_0(x)^*. \end{aligned}$$

Observación 20. En [46, Theorem 3.1] los autores consideran operadores diferenciales de la forma (1.5.28) con coeficientes polinomiales. Cabe aclarar que la demostración se realiza mediante integración por partes y que el resultado puede ser extendido para operadores de la forma (1.5.28) cuyos coeficientes A_j sean funciones C^2 en (a, b) . Esto será utilizado en el Capítulo 3.

Observación 21. Observemos que los coeficientes A_2, A_1, A_0 en (1.5.28) aparecen del lado derecho, por esta razón decimos que D actúa a derecha. En [40, Theorem 3.2] A. Durán probó que si un producto interno asociado un a peso matricial W como en (1.5.20) tiene un operador diferencial simétrico de segundo orden con coeficientes en el lado izquierdo, entonces el peso matricial se reduce a los ejemplos escalares clásicos. Por esta razón los operadores actuando a derecha son más naturales e interesantes.

1.5.4. Álgebras de Fourier de operadores diferenciales y en diferencias

En esta sección, siguiendo a [24], introducimos las llamadas álgebras de Fourier de operadores diferenciales y en diferencias para pesos matriciales W con soporte en intervalos reales. Para ello y como motivación notemos que la relación de recurrencia de tres términos (1.5.23) vincula la acción de dos operadores sobre la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $(P_n)_{n \geq 0}$. En el lado izquierdo tenemos el operador multiplicación por x , consideraremos que como operador diferencial x actúa sobre P_n desde la derecha $P_n(x) \cdot x = xP_n(x)$. El lado derecho de (1.5.23) puede interpretarse como la acción de un operador en diferencias \mathcal{L} sobre la sucesión $(P_n)_{n \geq 0}$. Más precisamente, si denotamos por δ^j el *shift operator* $\delta^j \cdot P_n(x) = P_{n+j}(x)$, podemos reescribir (4.1.12) como

$$P_n(x) \cdot x = \mathcal{L} \cdot P_n(x), \quad \mathcal{L} = \delta + B(n)\delta^0 + C(n)\delta^{-1}. \quad (1.5.29)$$

Observación 22. Notemos que en la operación en la variable n , cometemos un pequeño abuso de notación. Sería más preciso escribir

$$(\delta^j \cdot P)_n(x) = P_{n+j}(x),$$

pero en nuestra opinión esto puede resultar engorroso para leer. Esperamos que el abuso de notación no conduzca a ninguna confusión.

En general, consideramos un operador diferencial \mathcal{D} actuando sobre la variable x de $P_n(x)$ mediante

$$\mathcal{D} = \sum_{j=0}^m \partial_x^j F_j(x), \quad P_n(x) \cdot \mathcal{D} = \sum_{j=0}^m (\partial_x^j P_n(x)) F_j(x), \quad \partial_x^j := \frac{d^j}{dx^j}, \quad (1.5.30)$$

donde los coeficientes matriciales $F_j : \mathbb{C} \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ son funciones racionales de x , i.e. cada entrada es una función racional¹. Observamos que los coeficientes matriciales $F_j(x)$ multiplican los polinomios por la derecha. Análogamente, consideramos una acción por la izquierda sobre la sucesión $(P_n)_{n \geq 0}$ mediante operadores en diferencias de la forma

$$M = \sum_{j=-\ell}^k G_j(n)\delta^j, \quad M \cdot P_n(x) = \sum_{j=-\ell}^k G_j(n)\delta^j P_n(x) = \sum_{j=-\ell}^k G_j(n) P_{n+j}(x). \quad (1.5.31)$$

¹A partir de ahora nos referiremos a funciones matriciales con entradas racionales simplemente como funciones matriciales racionales.

Aquí, $G_j : \mathbb{N}_0 \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ para todo $j = -\ell, \dots, k$, y $P_n(x) = 0$ para todo $n < 0$. Denotamos por \mathcal{M}_N al álgebra de todos los operadores diferenciales de la forma (1.5.30) y por \mathcal{N}_N al álgebra de todos los operadores en diferencias de la forma (1.5.31).

Observación 23. Observemos que el conjunto \mathcal{M}_N es un álgebra con el producto $\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ actuado por la derecha. Como la acción de los elementos en \mathcal{M}_N es por la derecha, la acción del producto $\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ en los polinomios P_n está dada por aplicar primero \mathcal{D}_2 y luego \mathcal{D}_1 . Por otra parte, el producto de dos operadores discretos está definido por $M_1 \circ M_2$ actuando por la izquierda. De esta forma, la acción de un producto $M_1 \circ M_2$ en el polinomio P_n está dada por aplicar primero M_2 y luego M_1 . En lo que resta de esta tesis, utilizaremos la notación $\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1$ y $M_1 \circ M_2 = M_1 M_2$. Observamos que $(M \cdot P_n) \cdot \mathcal{D} = M \cdot (P_n \cdot \mathcal{D})$ y denotamos esta acción bilateral por $M \cdot P_n \cdot \mathcal{D}$.

Observación 24. Por simplicidad, hemos construido las álgebras de operadores \mathcal{M}_N y \mathcal{N}_N utilizando la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $(P_n)_{n \geq 0}$ con respecto a un peso W . Cabe destacar que la misma construcción puede realizarse considerando una función $Q_n(x) = Q(n, x)$, con dominio $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $Q_n(x)$ es infinitamente diferenciable x . Esto será utilizado en el Capítulo 3.

Definición 1.5.13. Dado un operador diferencial $\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N$, decimos que \mathcal{D}^\dagger es W -adjunto de \mathcal{D} en $M_N(\mathbb{C})[x]$ si

$$\langle P \cdot \mathcal{D}, Q \rangle_W = \langle P, Q \cdot \mathcal{D}^\dagger \rangle_W, \quad \text{para todos } P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x].$$

Similarmente, dado un operador en diferencias $M \in \mathcal{N}_N$, decimos que M^\dagger es W -adjunto de M en $M_N(\mathbb{C})[x]$ si

$$\langle M \cdot P_n, P_m \rangle_W = \langle P_n, M^\dagger \cdot P_m \rangle_W, \quad \text{para todos } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Los operadores \mathcal{D} y M son W -simétricos si $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\dagger$ y $M = M^\dagger$, respectivamente.

En lo que sigue, adaptando la construcción dada en [24, Definition 2.20] a nuestro contexto, tenemos las llamadas álgebras de Fourier de operadores asociadas a $(P_n)_{n \geq 0}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_L(P) &= \{M \in \mathcal{N}_N : \exists \mathcal{D} \in \mathcal{M}_N, M \cdot P = P \cdot \mathcal{D}\} \subset \mathcal{N}_N, \\ \mathcal{F}_R(P) &= \{\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N : \exists M \in \mathcal{N}_N, M \cdot P = P \cdot \mathcal{D}\} \subset \mathcal{M}_N. \end{aligned} \quad (1.5.32)$$

Observamos que la relación (1.5.29) implica que para cualquier peso matricial W y su correspondiente sucesión de polinomios ortogonales mónicos $(P_n)_{n \geq 0}$, tenemos que $x \in \mathcal{F}_R(P)$ y $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_L(P)$. Incluimos el siguiente resultado de unicidad dado en [30].

Lema 1.5.14. Dado $\mathcal{D} \in \mathcal{F}_R(P)$ existe un único $M \in \mathcal{F}_L(P)$ tal que $M \cdot P = P \cdot \mathcal{D}$. Recíprocamente dado $M \in \mathcal{F}_L(P)$ existe un único $\mathcal{D} \in \mathcal{F}_R(P)$ tal que $M \cdot P = P \cdot \mathcal{D}$.

Demostración. Asumiendo que existen $M_1, M_2 \in \mathcal{F}_L(P)$ tales que

$$(M_1 \cdot P)_n(x) = (P_n \cdot \mathcal{D})(x), \quad (M_2 \cdot P)_n(x) = (P_n \cdot \mathcal{D})(x),$$

entonces $((M_1 - M_2) \cdot P)_n(x) = 0$. Supongamos que $M_1 - M_2$ tiene la siguiente expresión

$$((M_1 - M_2) \cdot P)_n(x) = \sum_{j=-\ell}^k G_j(n) P_{n+j}(x).$$

Tomando el coeficiente director en la expresión anterior obtenemos que $G_k(n) = 0$. Procediendo recursivamente obtenemos que $G_j(n) = 0$ para todo $j = -\ell, \dots, k$. La recíproca se prueba de manera similar. \square

Es consecuencia directa de la definición que los elementos de $\mathcal{F}_L(P)$ se relacionan con los elementos de $\mathcal{F}_R(P)$. El Lema 1.5.14 implica que el mapa

$$\psi : \mathcal{F}_L(P) \rightarrow \mathcal{F}_R(P), \quad \psi(M) = D, \quad M \cdot P = P \cdot D,$$

es una biyección. En [24] este mapa es llamado *mapa de Fourier generalizado*. Siguiendo a [24], introducimos las álgebras biespectrales $\mathcal{B}_L(P)$ y $\mathcal{B}_R(P)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_L(P) &= \{M \in \mathcal{F}_L(P) : \text{orden}(\psi(M)) = 0\}, \\ \mathcal{B}_R(P) &= \{D \in \mathcal{F}_R(P) : \text{orden}(\psi^{-1}(D)) = 0\}, \end{aligned}$$

donde un operador diferencial de orden cero es una función racional $F : \mathbb{C} \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ y un operador discreto de orden cero es una sucesión $G : \mathbb{N}_0 \rightarrow M_N(\mathbb{C})$.

Observación 25. Dados $M_1, M_2 \in \mathcal{F}_L(P)$ tenemos que

$$M_1 M_2 \cdot P = M_1 \cdot P \cdot \psi(M_2) = P \cdot \psi(M_1) \psi(M_2), \quad (1.5.33)$$

lo que implica que $M_1 M_2 \in \mathcal{F}_L(P)$. Por lo tanto $\mathcal{F}_L(P)$ es una subálgebra de \mathcal{N}_N . Similarmenete $\mathcal{F}_R(P)$ es una subálgebra de \mathcal{M}_N . Siguiendo a [24] llamaremos a $\mathcal{F}_L(P)$ y $\mathcal{F}_R(P)$ *álgebras de Fourier* a izquierda y a derecha respectivamente.

Observación 26. Sigue de (1.5.33) que $M_1 M_2 \cdot P = P \cdot \psi(M_1) \psi(M_2)$ para todo $M_1, M_2 \in \mathcal{F}_L(P)$. Por otro lado, por definición de ψ tenemos que $M_1 M_2 \cdot P = P \cdot \psi(M_1 M_2)$ y como ψ es biyectiva, concluimos que es un isomorfismo de álgebras. En [24] se prueba que ψ es un isomorfismo de álgebras en un contexto más general.

De acuerdo a [24, Theorem 3.7], dado un operador diferencial $\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N$ simétrico se puede verificar que $\mathcal{D} \in \mathcal{F}_R(P)$. Esto será de gran utilidad en el Capítulo 4. Por completitud, incluimos el enunciado:

Teorema 1.5.15. [24, Theorem 3.7] *Las álgebras de Fourier asociadas a $(P_n)_{n \geq 0}$ están dadas por*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_L(P) &= \{M \in \mathcal{N}_N : Ad_{\mathcal{L}}^{k+1}(M) = 0 \text{ para algún } k \geq 0\}, \\ \mathcal{F}_R(P) &= \{\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N : \mathcal{D} \text{ tiene } W\text{-adjunta y } \mathcal{D}^\dagger \in \mathcal{M}_N\}, \end{aligned}$$

donde $Ad_{\mathcal{L}}(M) = \mathcal{L}M - M\mathcal{L}$.

Uno de los resultados de [24] que resulta de gran relevancia para el desarrollo de esta tesis es la existencia de una operación adjunta \dagger en $\mathcal{F}_L(P)$ y $\mathcal{F}_R(P)$, ver [24, §3.1]. Para introducir la adjunta en $\mathcal{F}_L(P)$, notemos primero que el álgebra de operadores discretos \mathcal{N}_N tiene una operación $*$ dada por

$$\left(\sum_{j=-\ell}^k G_j(n) \delta^j \right)^* = \sum_{j=-\ell}^k G_j(n-j)^* \delta^{-j}, \quad (1.5.34)$$

donde $A_j(n-j)^*$ denota la transpuesta conjugada de $A_j(n-j)$. La adjunta de $M \in \mathcal{F}_L(P)$ está dada por

$$M^\dagger = \mathcal{H}_n M^* \mathcal{H}_n^{-1}, \quad (1.5.35)$$

donde vemos a la norma cuadrada \mathcal{H}_n , dada en (1.5.21), como una sucesión. La siguiente relación se satisface

$$\langle M \cdot P_n, P_m \rangle = \langle P_n, M^\dagger \cdot P_m \rangle, \quad \text{para todos } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

En [76], A. Grünbaum y J. Tirao introdujeron una operación adjunta en el álgebra de todos los operadores diferenciales que tienen a los polinomios ortogonales como autofunciones. Esto fue generalizado en [24, Corollary 3.8] donde los autores muestran que para cada $\mathcal{D} \in \mathcal{F}_R(P)$ existe un único operador $\mathcal{D}^\dagger \in \mathcal{F}_R(P)$ tal que

$$\langle P \cdot \mathcal{D}, Q \rangle = \langle P, Q \cdot \mathcal{D}^\dagger \rangle,$$

para todos $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$. Más aún, $\mathcal{F}_L(P)$ es cerrada bajo la operación adjunta \dagger y $\psi(M^\dagger) = \psi(M)^\dagger$ para todo $M \in \mathcal{F}_L(P)$.

Para finalizar esta sección introducimos las llamadas *ladder relations* así como también las *lowering* y *raising relations*:

Definición 1.5.16. Dado un par (M, D) con $M \in \mathcal{F}_L(P)$ y $D \in \mathcal{F}_R(P)$, una relación de la forma

$$M \cdot P = P \cdot D, \quad \text{donde} \quad M = \sum_{j=-\ell}^k G_j(n) \delta^j,$$

es llamada *ladder relation*. Si el operador M solo contiene potencias negativas (positivas) de δ , decimos que es una *lowering (raising) relation*.

Observemos que si un par (M, \mathcal{D}) es una *raising relation*, sigue de (1.5.34) y (1.5.35) que $(M^\dagger, \mathcal{D}^\dagger)$ es una *lowering relation* y viceversa.

CAPÍTULO 2

Dualidad y operadores en diferencias para polinomios ortogonales matriciales en los enteros no negativos

Los resultados de este capítulo aparecen en “Duality and difference operators for matrix valued discrete polynomials on the nonnegative integers.” **Constructive Approximation** [53]. **Coautores: Bruno Eijvoogel y Pablo Román.** Parte de este trabajo fue realizada durante una visita a la Radboud University, Nijmegen, Holanda.

2.1. Introducción

Los polinomios escalares de Charlier $c_n^{(a)}$ son ortogonales con respecto a la distribución de Poisson, ver por ejemplo [35, 95],

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} c_n^{(a)}(x) c_m^{(a)}(x) = \frac{e^a n!}{a^n} \delta_{n,m}, \quad a > 0, \quad (2.1.1)$$

y pueden ser escritos explícitamente en términos de la función hipergeométrica ${}_2F_0$

$$c_n^{(a)}(x) = {}_2F_0 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ - \end{matrix}; -\frac{1}{a} \right). \quad (2.1.2)$$

Se ve fácilmente en la forma hipergeométrica que estos polinomios son invariantes si intercambiamos el rol del grado n y la variable x , i.e. $c_n^{(a)}(x) = c_x^{(a)}(n)$ para todo $x, n \in \mathbb{N}_0$. Por esta razón decimos que los polinomios de Charlier son *autoduales*. Los polinomios de Meixner y Krawtchouk también son autoduales.

Un concepto general de dualidad para polinomios ortogonales fue introducido por L. Douglas en [36]. Decimos que dos sucesiones de polinomios $(p_n)_n$ y $(q_x)_x$ con $x, n \in \{0, 1, \dots, K\}$, y K posiblemente infinito, tales que $\deg p_n = n$ y $\deg q_x = x$, son *duales* si existen sucesiones $(k_x)_{x=0}^K$ y $(\ell_n)_{n=0}^K$ llamadas *autovalores* con

$$k_x \neq k_y \quad \text{si } x \neq y, \quad \ell_n \neq \ell_m \quad \text{si } n \neq m, \quad (2.1.3)$$

tales que

$$p_n(k_x) = q_x(\ell_n), \quad \text{para todo } n, x \in \{0, \dots, K\}. \quad (2.1.4)$$

En [36] se muestra que los únicos polinomios ortogonales cuyos duales también son ortogonales son los polinomios de Askey–Wilson, límites de estos o sub–familias.

Teniendo en cuenta el resultado de L. Douglas [36], es natural investigar polinomios ortogonales matriciales con la propiedad extra de tener duales que sean también ortogonales. El objetivo de este capítulo es dar una noción de dualidad para polinomios ortogonales matriciales y construir ejemplos no triviales. En esta primera aproximación nos restringiremos a medidas discretas soportadas en un número infinito de puntos de \mathbb{N}_0 .

Sea $W : \mathbb{Z} \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ un peso matricial tal que $W(x)$ es definido positivo para todo $x \in \mathbb{N}_0$ y $W(x) = 0$ para todo $x \in -\mathbb{N}$. Asumimos que W tiene momentos finitos de todos los órdenes, es decir

$$\sum_{x=0}^{\infty} x^n W(x) < \infty,$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$, ver (1.5.19). Hemos visto que W define un producto interno matricial en $M_N(\mathbb{C})[x]$ por

$$\langle P, Q \rangle_W = \sum_{x=0}^{\infty} P(x)W(x)Q(x)^*, \quad (2.1.5)$$

donde $*$ denota la transpuesta conjugada, ver (1.5.20). Consideramos $(P_n)_{n \geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociados a W

$$\langle P_m(x), P_n(x) \rangle_W = \mathcal{H}_m \delta_{m,n}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \quad (2.1.6)$$

donde \mathcal{H}_m es una matriz definida positiva.

En este capítulo, extendemos la noción de dualidad de L. Douglas al contexto matricial permitiendo a uno de los autovalores en (2.1.4) ser una función matricial. Precisamente tomamos $k_x \mapsto x$ y $\ell_n \mapsto \rho(n)$, donde $\rho(n)$ es una función matricial. Tal como en el caso escalar (2.1.3), necesitamos asumir una condición que garantice la existencia de suficientes $\rho(n)$ diferentes y que tengan alguna propiedad de invertibilidad. En este contexto, decimos que dos sucesiones de polinomios matriciales $(P_n)_n$ y $(Q_x)_x$ son duales si están relacionadas por

$$P_n(x) = P_n(0)Q_x(\rho(n))\Upsilon(x), \quad n, x \in \mathbb{N}_0, \quad (2.1.7)$$

para cierta función matricial Υ , ver Definición 2.3.2 y Teorema 2.3.5. El significado de un polinomio matricial Q_x evaluado en la función matricial $\rho(n)$ se describe en detalle en (2.3.33). En la última sección de este capítulo, vemos que el estudio de los duales de las familias duales conduce a ejemplos explícitos en los que tanto k_x como ℓ_n son funciones matriciales.

La estructura del capítulo, que está esquematizada en la Figura 2.1, tiene tres partes principales. La primera parte consiste de las Secciones 2.2–2.3 y describe las principales herramientas y conceptos en general. En la Sección 2.2 revisamos algunos conceptos de polinomios ortogonales matriciales con respecto a una medida discreta y operadores en diferencias que actúan sobre estos polinomios. Siguiendo el trabajo de [24], presentamos las álgebras de Fourier asociadas al peso matricial W . Procedemos a distinguir entre ecuaciones de Pearson *débiles* y *fuertes*, las cuales son condiciones en el peso matricial que nos permiten encontrar relaciones para los polinomios ortogonales. Introducimos *backward* y *forward shift operators* y los utilizamos para obtener fórmulas de Rodrigues, operadores en diferencias y expresiones para las normas cuadradas y coeficientes de la relación de recurrencia de tres términos de los polinomios ortogonales matriciales. Las últimas dos serán esenciales en la construcción de familias duales.

La Sección 2.3 introduce el concepto de una sucesión de polinomios ortogonales matriciales *dual* a otra sucesión de polinomios ortogonales matriciales, extendiendo las ideas de [36] al contexto matricial. Describimos la relación entre operadores en diferencias de segundo orden que tienen a los polinomios ortogonales matriciales como autofunciones y las familias duales. Probamos que, bajo ciertas condiciones, las familias duales satisfacen relaciones de ortogonalidad que involucran un peso matricial relacionado con la inversa de la norma cuadrada de los polinomios ortogonales matriciales. También establecemos una relación entre las álgebras de Fourier de los polinomios ortogonales matriciales y las de los duales.

La segunda parte del capítulo consiste de las Secciones 2.4–2.7 y está dedicada a la construcción de una familia de polinomios matriciales de tipo Charlier. En la sección 2.4 a partir de una ecuación Pearson débil simple para un peso tipo Charlier bastante general, introducimos dos operadores en diferencias de primer orden $\mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger$ que son adjuntos entre sí. Siguiendo las ideas en [30] encontramos una ecuación no lineal para las normas cuadradas de los polinomios.

En la Sección 2.5 especializamos el peso de tipo Charlier y damos una expresión explícita para la primera norma cuadrada, la cual en este caso determina todas las otras normas cuadradas. Luego encontramos una descomposición LDU de la norma. En la sección 2.6 construimos una familia monoparamétrica de pesos matriciales $W^{(\lambda)}$ para $\lambda \in \mathcal{V} = \mathbb{N}_0$ de manera tal que la ecuación Pearson fuerte (2.2.20) se satisface. Como consecuencia, obtenemos una familia monoparamétrica de pesos matriciales y con *shift operators* explícitos, cuyas normas cuadradas y relaciones de recurrencia de tres términos son explícitas. En la sección 2.7 calculamos explícitamente las entradas de los polinomios ortogonales matriciales.

Finalmente, en las Secciones 2.8–2.9 construimos explícitamente familias de polinomios duales. En la Sección 2.8 aplicamos los resultados de la Sección 2.3 para encontrar tres sucesiones distintas de polinomios ortogonales matriciales que son duales a los polinomios matriciales de tipo Charlier. Finalmente en la Sección 2.9 iteramos el proceso de dualidad y construimos dos familias de polinomios ortogonales que son duales a una de las familias duales dadas.

Finalizamos la introducción del capítulo con un ejemplo no trivial de polinomios ortogonales 2×2 con una familia dual. Este es un caso particular de la primera familia dual considerada en la Sección 2.8. Las demostraciones siguen de las dadas en la Sección 2.3 y de las consideraciones de la Sección 2.8. Consideramos una familia monoparamétrica de pesos matriciales:

$$W^{(\lambda)}(x) = \frac{a^{x+\lambda}\lambda!}{2^\lambda x!} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x+\lambda}{\sqrt{a}} \\ \frac{x+\lambda}{\sqrt{a}} & \frac{(x+\lambda)^2 + a(\lambda+1)}{a} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{N}_0.$$

La única sucesión de polinomios ortogonales mónicos $P_n^{(\lambda)}(x)$ con respecto a $W^{(\lambda)}$ está explícitamente dada por

$$P_n^{(\lambda)}(x) = (-a)^n c_n^{(a)}(x)I + \Omega_1(n)c_{n-1}^{(a)}(x) + \Omega_2(n)c_{n-2}^{(a)}(x),$$

donde I es la matriz identidad y Ω_1, Ω_2 están dadas por

$$\Omega_1(n) = \frac{(-1)^n n a^{n-1}}{(\lambda+n+1)\sqrt{a}} \begin{pmatrix} (1-a-\lambda-n)\sqrt{a} & a \\ -(a^2+a\lambda+an+\lambda^2+2\lambda n+n^2-2a-\lambda-n) & (a+\lambda+n)\sqrt{a} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_2(n) = \frac{(-1)^n n a^{n-1}}{(\lambda+n+1)\sqrt{a}} \begin{pmatrix} (n-1)\sqrt{a} & 0 \\ (n-1)(a+\lambda+n) & 0 \end{pmatrix}.$$

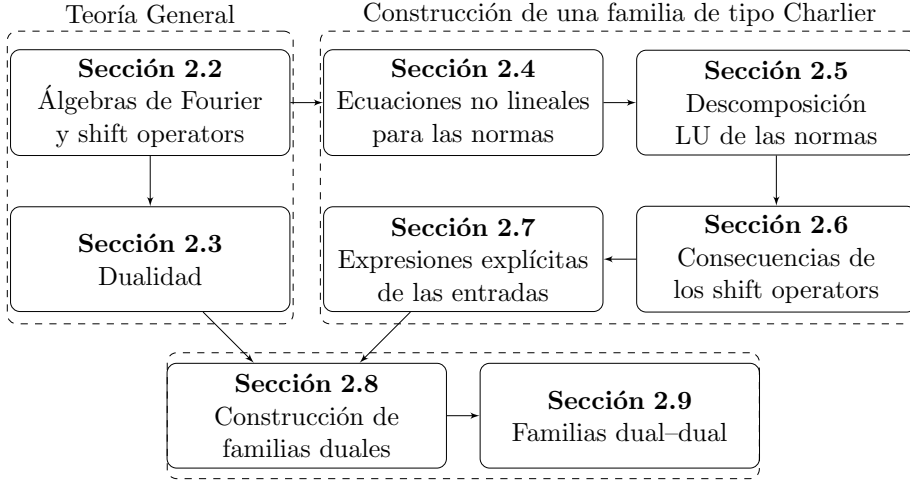


Figura 2.1: Este diagrama muestra la estructura del capítulo. Las Secciones 2.2–2.3 son el corazón del capítulo y están dedicadas a desarrollar las ideas principales de la dualidad. Las Secciones 2.4–2.7 describen con gran detalle una familia de polinomios matriciales de tipo Charlier. Las expresiones explícitas de las normas, los coeficientes de la relación de recurrencia de tres términos y las entradas de estos polinomios nos permiten finalmente construir las familias duales en la Sección 2.8.

La ortogonalidad de esta sucesión puede ser verificada directamente reemplazando la expresión de $P_n^{(\lambda)}$ en (2.1.5) y usando la ortogonalidad de los polinomios de Charlier escalares. Esta expresión simple para la sucesión de polinomios ortogonales mónicos vale únicamente en el caso 2×2 . En la Sección 2.7 daremos una expresión para dimensión arbitraria que involucra una suma de productos de polinomios de Charlier y dual Hahn. Para describir una familia de polinomios duales para $P_n^{(\lambda)}$ necesitamos las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{a} & 1 \end{pmatrix}.$$

En la Sección 2.8 introducimos tres familias de polinomios duales para $P_n^{(\lambda)}$. La familia más simple $(Q_{x,1}^{(\lambda)})_x = (Q_x^{(\lambda)})_x$ está dada en la Subsección 2.8.2. Esta familia está asociada al operador en diferencias en (2.8.126) y, por la Observación 35, está definida por la relación de recurrencia de tres términos

$$\mathcal{N}Q_x^{(\lambda)}(\mathcal{N}) = Q_{x+1}^{(\lambda)}(\mathcal{N}) - Q_x^{(\lambda)}(\mathcal{N})(J + x + \lambda(I + A)^{-1}) + Q_{x-1}^{(\lambda)}(\mathcal{N})ax,$$

donde $Q_0 = I$, $Q_{-1} = 0$. Aquí \mathcal{N} es una variable matricial y explicamos cómo evaluar un polinomio en una matriz en (2.3.33). En la Sección 2.8 mostraremos que las sucesiones $(P_n^{(\lambda)})_n$ y $(Q_x^{(\lambda)})_x$ son duales en el sentido de (2.1.7):

$$P_n^{(\lambda)}(x) = P_n^{(\lambda)}(0)Q_x^{(\lambda)}(\rho^{(\lambda)}(n))\Upsilon^{(\lambda)}(x),$$

donde

$$\rho^{(\lambda)}(n) = \frac{1}{a^2(\lambda + n + 1)} \begin{pmatrix} -na(a + \lambda) & na\sqrt{a} \\ \sqrt{a}(a + \lambda)(a\lambda + a - \lambda n) & na(a + \lambda) \end{pmatrix} + a - \lambda - n - J,$$

$$P_n^{(\lambda)}(0) = \frac{a^{n-1}n(-1)^n}{\lambda+n+1} \begin{pmatrix} \frac{-\lambda n+a\lambda+a}{-(a^2+a\lambda+\lambda^2-a+\lambda n)} & \frac{\sqrt{a}}{n} \\ \frac{2an+\lambda n+n^2+a\lambda+a}{\sqrt{a}} & \end{pmatrix}, \quad \Upsilon^{(\lambda)}(x) = a^{-x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{a}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Más aún, los polinomios $Q_x^{(\lambda)}$ satisfacen las relaciones de ortogonalidad:

$$\langle Q_y^{(\lambda)}, Q_x^{(\lambda)} \rangle^d = \sum_{n=0}^{\infty} Q_y^{(\lambda)}(\rho(n))^* U(n) Q_x^{(\lambda)}(\rho(n)) = \mathscr{W}_x^{(\lambda)} \delta_{x,y},$$

donde $\mathscr{W}_x^{(\lambda)} = (\Upsilon^{(\lambda)}(x)W^{(\lambda)}(x)\Upsilon^{(\lambda)}(x)^*)^{-1}$, y el peso matricial $U(n)$ es

$$(L_0^*)^{-1}(I+A^*)^\lambda U^{(\lambda)}(n)(I+A)^\lambda L_0^{-1} = \frac{e^{-a}2^\lambda a^{n-\lambda}}{(\lambda+1)!n!} \begin{pmatrix} \lambda+n+1 & \frac{n}{\sqrt{a}} \\ \frac{n}{\sqrt{a}} & \frac{n^2}{a(\lambda+n+1)} + \frac{\lambda+1}{\lambda+n+2} \end{pmatrix}.$$

2.2. Polinomios ortogonales matriciales y álgebras de Fourier discretas

En esta sección asociamos a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a (2.1.5) las llamadas álgebras de Fourier de operadores en diferencias, siguiendo el trabajo de Casper y Yakimov [24]. Recordemos que el caso de pesos matriciales con soporte en intervalos reales fue descrito en la Sección 1.5.4.

2.2.1. Operadores en diferencias

Consideramos los operadores en diferencias η^j y δ^j actuando en la sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos $(P_n)_n$. Estos operadores actúan a derecha en la variable x y a izquierda en la variable n respectivamente:

$$(P_n \cdot \eta^j)(x) = P_n(x+j), \quad (\delta^j \cdot P_n)(x) = P_{n+j}(x),$$

en donde asumimos que $P_{n-j}(x) = 0$ si $n < j$. Dada una función a valores matriciales $G: \mathbb{C} \rightarrow M_N(\mathbb{C})$, consideramos también los operadores en diferencias, $\Delta = \eta - 1$ y $\nabla = 1 - \eta^{-1}$, actuando en la variable x a derecha, definidos por

$$G \cdot \Delta(x) = G(x+1) - G(x), \quad G \cdot \nabla(x) = G(x) - G(x-1).$$

Observación 27. Dado un polinomio matricial P de grado n , es fácil verificar que $P \cdot \Delta(x)$ es un polinomio de grado $n-1$. En general, para $k \leq n$, $P \cdot \Delta^k$ es un polinomio de grado $n-k$ y si $k > n$, $P \cdot \Delta^k$ es igual a cero.

Dadas $F, G: \mathbb{C} \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ funciones matriciales, el siguiente análogo de suma por partes se puede verificar fácilmente

$$\sum_{x=0}^N G \cdot \Delta(x) F(x) = G(N+1)F(N+1) - G(0)F(0) - \sum_{x=0}^N G(x+1)F \cdot \Delta(x), \quad (2.2.8)$$

y el siguiente análogo discreto de la regla de Leibniz para Δ también puede ser verificado

$$(FG \cdot \Delta)(x) = F(x+1)G \cdot \Delta(x) + F \cdot \Delta(x)G(x) = F \cdot \Delta(x)G(x+1) + F(x)G \cdot \Delta(x). \quad (2.2.9)$$

2.2.2. Álgebras de Fourier discretas

En esta sección introducimos las llamadas álgebras de Fourier, siguiendo a [24], pero para polinomios ortogonales matriciales *discretos*. Sean \mathcal{M}_N y \mathcal{N}_N las álgebras de operadores en diferencias actuando en los polinomios a derecha e izquierda respectivamente:

$$\mathcal{M}_N = \left\{ D = \sum_{j=-\ell}^m \eta^j F_j(x) : F_j : \mathbb{C} \rightarrow M_N(\mathbb{C}) \text{ es una función matricial racional de } x \right\},$$

$$\mathcal{N}_N = \left\{ M = \sum_{j=-t}^s G_j(n) \delta^j : G_j : \mathbb{N}_0 \rightarrow M_N(\mathbb{C}) \text{ es una sucesión} \right\}.$$

Definición 2.2.1. Dado $D \in \mathcal{M}_N$ tal que $F_j(x) = 0$ para todo x y todo $j \neq 0$, decimos que D es de *orden* 0 . Similarmente para operadores en \mathcal{N}_N .

Observación 28. Un operador $D \in \mathcal{M}_N$ actúa en la variable x a derecha, y un operador $M \in \mathcal{N}_N$ actúa en la variable n a izquierda, i.e.

$$P_n \cdot D(x) = \sum_{j=-\ell}^m (P_n \cdot \eta^j)(x) F_j(x) = \sum_{j=-\ell}^m P_n(x+j) F_j(x),$$

$$M \cdot P_n(x) = \sum_{j=\max(-t, -n)}^s G_j(n) (\delta^j \cdot P_n)(x) = \sum_{j=\max(-t, -n)}^s G_j(n) P_{n+j}(x).$$

Las álgebras de Fourier están dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_R(P) &= \{ D \in \mathcal{M}_N : \exists M \in \mathcal{N}_N, \quad M \cdot P = P \cdot D \}, \\ \mathcal{F}_L(P) &= \{ M \in \mathcal{N}_N : \exists D \in \mathcal{M}_N, \quad M \cdot P = P \cdot D \}. \end{aligned}$$

En la siguiente proposición establecemos un isomorfismo entre las álgebras de Fourier a izquierda y a derecha.

Proposición 2.2.2. *Para todo $M \in \mathcal{F}_L(P)$, existe un único $D \in \mathcal{F}_R(P)$ tal que $M \cdot P = P \cdot D$. Recíprocamente, para todo $D \in \mathcal{F}_R(P)$, existe un único $M \in \mathcal{F}_L(P)$ tal que $M \cdot P = P \cdot D$.*

Demostración. Sea $D \in \mathcal{F}_R(P)$ tal que $P \cdot D = 0$ para todo $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$. Para probar la primera afirmación de la proposición es suficiente mostrar que $D = 0$. Asumimos que

$$D = \sum_{j=-\ell}^m \eta^j F_j(x).$$

Mostraremos primero que

$$\sum_{j=-\ell}^m j^k F_j(x) = 0, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}_0, \quad (2.2.10)$$

por inducción en k . Para $k = 0$, la ecuación (2.2.10) se verifica fácilmente usando la condición $I \cdot D = 0$, donde I denota la matriz identidad, lo cual implica que $\sum_{j=-\ell}^m F_j(x) = 0$. Asumimos

que (2.2.10) vale para $0 \leq i \leq k - 1$ y consideramos el polinomio escalar $p_k(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_0$, entonces tenemos

$$0 = (p_k \cdot D)(x) = \sum_{j=-\ell}^m (x+j)^k F_j(x) + \sum_{p=0}^{k-1} a_p \sum_{j=-\ell}^m (x+j)^p F_j(x),$$

lo que puede ser escrito como

$$0 = (p_k \cdot D)(x) = \sum_{j=-\ell}^m j^k F_j(x) + \sum_{q=1}^k \binom{k}{q} x^q \sum_{j=-\ell}^m j^{k-q} F_j(x) + \sum_{p=0}^{k-1} a_p \sum_{j=-\ell}^m (x+j)^p F_j(x). \quad (2.2.11)$$

Aplicando la hipótesis inductiva en el segundo y tercer sumando de (2.2.11), obtenemos (2.2.10).

El sistema (2.2.10) puede ser escrito como $A(F_{-\ell} \cdots F_0 \cdots F_m)^T = 0$, donde A es una matriz en bloques $(m + \ell + 1) \times (m + \ell + 1)$ con entradas $A_{i,j} = (-\ell + j - 1)^{i-1} I$. Esta matriz es la transpuesta de una matriz de Vandermonde en bloques. Como todos los bloques son múltiplos de la identidad I , es fácil ver que esta matriz es invertible. Sin embargo es también un caso especial de una matriz de Vandermonde en bloques para la cual hemos encontrado una fórmula para el determinante en el Lema A.1.1. Concluimos que $F_j = 0$ para todo $-\ell \leq j \leq m$, y por lo tanto $D = 0$. Finalmente, si $M \in \mathcal{F}_L(P)$ es tal que $M \cdot P = P \cdot D_1 = P \cdot D_2$, entonces $P \cdot (D_1 - D_2) = 0$ para todo polinomio P y por lo tanto $D_1 = D_2$. La unicidad de M es análoga a la dada en el Lema 1.5.14. \square

En consecuencia y por la Proposición 2.2.2 el mapa

$$\psi : \mathcal{F}_L(P) \rightarrow \mathcal{F}_R(P), \quad \psi(M) = D, \quad M \cdot P = P \cdot D, \quad (2.2.12)$$

es un isomorfismo de álgebras bien definido: en [24] este isomorfismo es llamado *mapa de Fourier generalizado*. Siguiendo a [24], introducimos las álgebras biespectrales $\mathcal{B}_L(P)$ y $\mathcal{B}_R(P)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_L(P) &= \{M \in \mathcal{F}_L(P) : \text{orden}(\psi(M)) = 0\}, \\ \mathcal{B}_R(P) &= \{D \in \mathcal{F}_R(P) : \text{orden}(\psi^{-1}(D)) = 0\}. \end{aligned}$$

Tal como fue explicado en la Sección 1.5.4, la relación de recurrencia de tres términos (1.5.23) puede ser escrita como $\mathcal{L} \cdot P_n = P_n \cdot x$, donde

$$\mathcal{L} = \delta + B_n + C_n \delta^{-1}, \quad (2.2.13)$$

y por lo tanto $\mathcal{L} \in \mathcal{B}_L(P) \subset \mathcal{F}_L(P)$ y $x \in \mathcal{F}_R(P)$ como operador de orden cero. De manera análoga al caso continuo (1.5.35), existe una adjunta natural en \mathcal{N}_N , digamos

$$M^\dagger = \sum_{j=-t}^s \mathcal{H}_n G_j(n-j)^* \mathcal{H}_{n-j}^{-1} \delta^{-j} \implies M^\dagger \cdot P_n(x) = \sum_{j=-t}^{\min(s,n)} \mathcal{H}_n G_j(n-j)^* \mathcal{H}_{n-j}^{-1} P_{n-j}(x). \quad (2.2.14)$$

2.2.3. Ecuaciones de Pearson débiles y álgebras de Fourier

En esta sección consideramos una clase de pesos matriciales con elementos distinguidos en las álgebras de Fourier. Decimos que el peso W satisface un sistema de *ecuaciones de Pearson débiles* si existe un conjunto no vacío de enteros $\{-\ell, \dots, m\}$ y polinomios matriciales F_j y \tilde{F}_j para $j = -\ell, \dots, m$ tales que

$$F_j(x-j)W(x-j) = W(x)\tilde{F}_j(x)^*, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{N}_0, \text{ y } j = -\ell, \dots, m. \quad (2.2.15)$$

Notemos que si $\ell > 0$, como W se anula para enteros negativos, las ecuaciones de Pearson débiles (2.2.15) implican que

$$F_j(x-j) = 0, \quad -\ell \leq j \leq -1, \quad j \leq x \leq -1.$$

Similarmente para $m > 0$ tenemos

$$\tilde{F}_j(x) = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq x \leq j-1.$$

Asociamos al peso W , el conjunto de operadores en diferencias $\{D_j\}_{j=-\ell}^m$

$$D_j = \eta^j F_j(x). \quad (2.2.16)$$

En la siguiente proposición mostramos que D_j tiene una adjunta simple D_j^\dagger y que ambos operadores son elementos de $\mathcal{F}_R(P)$.

Proposición 2.2.3. *Sea D_j el operador (2.2.16), entonces su adjunta está dada por*

$$D_j^\dagger = \eta^{-j} \tilde{F}_j(x).$$

En otras palabras, si el peso W satisface las ecuaciones de Pearson débiles (2.2.15), entonces

$$\langle P \cdot D_j, Q \rangle_W = \langle P, Q \cdot D_j^\dagger \rangle_W, \quad j \in \{-\ell, \dots, m\},$$

para todo par de polinomios matriciales P, Q .

Demostración. Sigue de la expresión explícita del producto interno (2.1.5) que

$$\langle P \cdot D_j, Q \rangle_W = \sum_{x=0}^{\infty} P(x+j)F_j(x)W(x)Q(x)^*. \quad (2.2.17)$$

Haciendo el cambio de variables $y = x + j$ en (2.2.17) y utilizando las ecuaciones de Pearson débiles (2.2.15), obtenemos

$$\begin{aligned} \langle P \cdot D_j, Q \rangle_W &= \sum_{x=0}^{\infty} P(x)F(x-j)W(x-j)Q(x-j)^* = \sum_{x=0}^{\infty} P(x)W(x) \left[Q(x-j)\tilde{F}_j(x) \right]^* \\ &= \langle P, Q \cdot D_j^\dagger \rangle_W. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración de la proposición. \square

De ahora en adelante trabajaremos con una suma no nula de dichos operadores

$$D = \sum_{j \in \mathcal{I}} \eta^j F_j(x), \quad \mathcal{I} \subseteq \{-\ell, \dots, m\}. \quad (2.2.18)$$

Proposición 2.2.4. Sea $(P_n)_n$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un peso matricial definido positivo W que satisface las ecuaciones de Pearson débiles (2.2.15). Tomamos \mathcal{I} no vacío tal como en (2.2.18) y entonces el correspondiente D y su adjunta D^\dagger satisfacen

$$(P_n \cdot D)(x) = M \cdot P_n(x), \quad (P_n \cdot D^\dagger)(x) = M^\dagger \cdot P_n(x),$$

donde M es el operador en diferencias

$$M = \sum_{j=-t}^s G_j(n) \delta^j, \quad G_j(n) = \langle P_n \cdot D, P_{n+j} \rangle \mathcal{H}_{n+j}^{-1},$$

y M^\dagger está definida como en (2.2.14). Los límites en la suma s, t están dados por

$$s = \max_{j \in \mathcal{I}} \deg F_j, \quad t = \max_{j \in \mathcal{I}} \deg \tilde{F}_j.$$

Más aún, $D, D^\dagger \in \mathcal{F}_R(P)$ y $M, M^\dagger \in \mathcal{F}_L(P)$.

Demostración. Sigue de (2.2.16) que $(P_n \cdot D)(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo $n + s$ y de la Proposición 2.2.3 que $(P_m \cdot D^\dagger)(x)$ es un polinomio grado de a lo sumo $m + t$. Entonces

$$(P_n \cdot D)(x) = \sum_{k=0}^{n+s} S_k(n) P_k(x), \quad (P_m \cdot D^\dagger)(x) = \sum_{k=0}^{m+t} T_k(m) P_k(x),$$

donde $S_k(n) = \langle P_n \cdot D, P_k \rangle \mathcal{H}_k^{-1}$ y $T_k(m) = \langle P_m \cdot D^\dagger, P_k \rangle \mathcal{H}_k^{-1}$. En conclusión tenemos

$$\langle P_n \cdot D, P_m \rangle = \langle P_n, P_m \cdot D^\dagger \rangle = \sum_{k=0}^{m+t} \langle P_n, P_k \rangle T_k(m)^*,$$

por lo tanto $\langle P_n \cdot D, P_m \rangle = 0$ si $m < n - t$. Ahora

$$(P_n \cdot D)(x) = \sum_{k=n-t}^{n+s} S_k(n) P_k(x) = \sum_{j=-t}^s S_{n+j}(n) P_{n+j}(x),$$

entonces podemos concluir que $(P_n \cdot D)(x) = M \cdot P_n(x)$. Por otro lado, $(P_m \cdot D^\dagger)(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo $m + t$ y entonces

$$\begin{aligned} P_m \cdot D^\dagger(x) &= \sum_{k=0}^{m+t} \langle P_m \cdot D^\dagger, P_k \rangle \mathcal{H}_k^{-1} P_k(x) = \sum_{k=0}^{m+t} \langle P_k \cdot D, P_m \rangle^* \mathcal{H}_k^{-1} P_k(x) \\ &= \sum_{k=m-s}^{m+t} \sum_{j=-t}^s \langle G_j(k) P_{k+j}, P_m \rangle^* \mathcal{H}_k^{-1} P_k(x) \\ &= \sum_{j=-t}^s \mathcal{H}_m G_j(m-j)^* \mathcal{H}_{m-j}^{-1} P_{m-j}(x) = M^\dagger \cdot P_m(x). \end{aligned}$$

Esto completa la prueba de la proposición. \square

2.2.4. Ecuaciones de Pearson fuertes y *shift operators*

Sea \mathcal{V} un subconjunto de enteros consecutivos de \mathbb{N}_0 con al menos dos elementos. Consideremos una familia $(W^{(\lambda)})_{\lambda \in \mathcal{V}}$ de pesos matriciales definidos positivos con momentos finitos de todos los órdenes y soporte \mathbb{N}_0 . Denotamos $\langle \cdot, \cdot \rangle^{(\lambda)}$ el producto interno matricial inducido por $W^{(\lambda)}$, i.e

$$\langle P, Q \rangle^{(\lambda)} = \sum_{x=0}^{\infty} P(x)W^{(\lambda)}(x)Q^*(x). \quad (2.2.19)$$

Denotamos $P_n^{(\lambda)}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $W^{(\lambda)}$, $\mathcal{H}_m^{(\lambda)}$ la norma cuadrada y $B_n^{(\lambda)}, C_n^{(\lambda)}$ los coeficientes de la relación de recurrencia de tres términos (1.5.23).

El siguiente teorema está inspirado en el Corolario 2.5 de [86], donde se introducen *shift operators* para una familia de polinomios matriciales de tipo Gegenbauer. En el caso discreto, el *lowering operator* es el operador en diferencias Δ . Utilizaremos la siguiente notación: $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V} \setminus (\text{máx } \mathcal{V})$ si \mathcal{V} es acotado por arriba y $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}$ caso contrario. Por otro lado, \mathcal{V} es siempre acotado por abajo y entonces tomamos $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V} \setminus (\text{mín } \mathcal{V})$.

Teorema 2.2.5 (Shift operators). *Sean $\mathcal{V}, \mathcal{V}^0, \mathcal{V}_0$ definidos anteriormente y consideremos una familia de pesos matriciales $(W^{(\lambda)})_{\lambda \in \mathcal{V}}$. Asumimos que existen dos familias de polinomios $(\Phi^{(\lambda)})_{\lambda \in \mathcal{V}^0}$ y $(\Psi^{(\lambda)})_{\lambda \in \mathcal{V}^0}$ con $\deg \Phi^{(\lambda)} \leq 2$ y $\deg \Psi^{(\lambda)} \leq 1$ para todo $\lambda \in \mathcal{V}^0$, tales que*

$$W^{(\lambda+1)}(x) = W^{(\lambda)}(x)\Phi^{(\lambda)}(x), \quad W^{(\lambda+1)} \cdot \nabla(x) = W^{(\lambda)}(x)\Psi^{(\lambda)}(x), \quad \forall \lambda \in \mathcal{V}^0, \quad (2.2.20)$$

con

$$\Phi^{(\lambda)}(x) = \mathcal{K}_2^{(\lambda)}x^2 + \mathcal{K}_1^{(\lambda)}x + \mathcal{K}_0^{(\lambda)}, \quad \Psi^{(\lambda)}(x) = \mathcal{J}_1^{(\lambda)}x + \mathcal{J}_0^{(\lambda)}.$$

Entonces

1. El operador Δ tiene adjunta $S^{(\lambda)} : L^2(W^{(\lambda+1)}) \rightarrow L^2(W^{(\lambda)})$, dada explícitamente por

$$S^{(\lambda)} = -(\nabla\Phi^{(\lambda)}(x)^* + \eta^{-1}\Psi^{(\lambda)}(x)^*) = -\Phi^{(\lambda)}(x)^* + \eta^{-1}(\Phi^{(\lambda)}(x)^* - \Psi^{(\lambda)}(x)^*),$$

tal que

$$\langle P \cdot \Delta, Q \rangle^{(\lambda+1)} = \langle P, Q \cdot S^{(\lambda)} \rangle^{(\lambda)}$$

para todos P, Q polinomios matriciales.

2. El operador en diferencias $\Delta = \eta - I$ es un backward shift operator:

$$\Delta : L^2(W^{(\lambda)}) \rightarrow L^2(W^{(\lambda+1)}), \quad P_n^{(\lambda)} \cdot \Delta(x) = nP_{n-1}^{(\lambda+1)}(x), \quad \forall \lambda \in \mathcal{V}^0.$$

3. El operador $S^{(\lambda)}$ es un forward shift operator:

$$P_{n-1}^{(\lambda+1)} \cdot S^{(\lambda)} = G_n^{(\lambda)}P_n^{(\lambda)}, \quad G_n^{(\lambda)} = -(n-1)\mathcal{K}_2^{(\lambda)*} - \mathcal{J}_1^{(\lambda)*}.$$

Observación 29. En la demostración del Teorema 2.2.6, en la ecuación (2.2.25), veremos que $G_n^{(\lambda)}$ es de hecho invertible.

Demostración. Para demostrar (1), observemos que para todo $k \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{x=0}^k (P \cdot \Delta)(x) W^{(\lambda+1)}(x) Q(x)^* \\
&= \sum_{x=0}^k \left[P(x+1) W^{(\lambda+1)}(x) Q(x)^* - P(x) W^{(\lambda+1)}(x) Q(x)^* \right] \\
&= \sum_{x=0}^k P(x+1) W^{(\lambda+1)}(x) Q(x)^* - \sum_{x=-1}^{k-1} P(x+1) W^{(\lambda+1)}(x+1) Q(x+1)^* \\
&= -P(0) W^{(\lambda+1)}(0) Q(0)^* + P(k+1) W^{(\lambda+1)}(k+1) Q(k+1)^* \\
&\quad - \sum_{x=0}^k P(x+1) \left[W^{(\lambda+1)}(x) Q(x)^* - W^{(\lambda+1)}(x+1) Q(x+1)^* \right] \\
&= -P(0) W^{(\lambda+1)}(0) Q(0)^* + P(k+1) W^{(\lambda+1)}(k+1) Q(k+1)^* \\
&\quad - \sum_{x=0}^k P(x+1) (W^{(\lambda+1)} Q)^* \cdot \Delta(x).
\end{aligned}$$

Aplicando la regla de Leibniz (2.2.9), y haciendo el cambio de variable $x \mapsto x-1$ en el índice de la suma, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{x=0}^k (P \cdot \Delta)(x) W^{(\lambda+1)}(x) Q(x)^* = P(0) W^{(\lambda+1)}(0) (Q^* \cdot \Delta)(-1) \\
&\quad + P(0) (W^{(\lambda+1)} \cdot \Delta)(-1) Q^*(-1) - P(0) W^{(\lambda+1)}(0) Q(0)^* + P(k+1) W^{(\lambda+1)}(k) Q(k)^* \\
&\quad - \sum_{x=0}^k P(x) \left[W^{(\lambda+1)}(x) (Q^* \cdot \Delta)(x-1) + (W^{(\lambda+1)} \cdot \Delta)(x-1) Q^*(x-1) \right]. \quad (2.2.21)
\end{aligned}$$

Ahora, como $W^{(\lambda+1)}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}_{<0}$, tenemos

$$-P(0) W^{(\lambda+1)}(0) Q(0)^* + P(0) W^{(\lambda+1)}(0) (Q^* \cdot \Delta)(-1) + P(0) (W^{(\lambda+1)} \cdot \Delta)(-1) Q^*(-1) = 0, \quad (2.2.22)$$

y por la ecuación de Pearson (2.2.20)

$$\begin{aligned}
& W^{(\lambda+1)}(x) (Q^* \cdot \nabla)(x) + (W^{(\lambda+1)} \cdot \nabla)(x) Q^*(x-1) \\
&= W^{(\lambda)}(x) \left[(Q \cdot \nabla)(x) \Phi^{(\lambda)}(x)^* + Q(x-1) \Psi^{(\lambda)}(x)^* \right]^*. \quad (2.2.23)
\end{aligned}$$

Reemplazando (2.2.22) y (2.2.23) en (2.2.21), obtenemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{x=0}^k (P \cdot \Delta)(x) W^{(\lambda+1)}(x) Q(x)^* = P(k+1) W^{(\lambda+1)}(k) Q(k)^* \\
&\quad - \sum_{x=0}^k P(x) W^{(\lambda)}(x) \left[(Q \cdot \nabla)(x) \Phi^{(\lambda)}(x)^* + Q(x-1) \Psi^{(\lambda)}(x)^* \right]^*. \quad (2.2.24)
\end{aligned}$$

Como hemos asumido que $W^{(\lambda)}$ tiene momentos finitos de todos los órdenes, tenemos que $P(k+1)W^{(\lambda+1)}(k)Q(k)^*$ se anula en el límite cuando $k \rightarrow \infty$. Por lo tanto, tomando límite $k \rightarrow \infty$ en ambos miembros de (2.2.24) obtenemos

$$\langle P \cdot \Delta, Q \rangle^{(\lambda+1)} = \langle P, Q \cdot S^{(\lambda)} \rangle^{(\lambda)}.$$

Para (2) notemos que $(Q \cdot S^{(\lambda)})(x) = -(Q \cdot \nabla)(x)\Phi^{(\lambda)}(x)^* - Q(x-1)\Psi^{(\lambda)}(x)^*$ es un polinomio de a lo sumo grado $\deg(Q) + 1$. Por lo tanto $P_n^{(\lambda)} \cdot \Delta$ es un polinomio de grado $n-1$ tal que

$$\langle P_n^{(\lambda)} \cdot \Delta, Q \rangle^{(\lambda+1)} = \langle P_n, Q \cdot S^{(\lambda)} \rangle^{(\lambda)} = 0,$$

para todo polinomio Q tal que $\deg Q < n-1$. Como $P_n^{(\lambda)} \cdot \Delta$ es ortogonal a todo polinomio de grado estrictamente menor a $n-1$ y su coeficiente director es nI , tenemos que $(P_n^{(\lambda)} \cdot \Delta)(x) = nP_{n-1}^{(\lambda+1)}(x)$.

Finalmente probemos (3). Observemos que, como $\Phi^{(\lambda)}$ y $\Psi^{(\lambda)}$ son polinomios de grado a lo sumo dos y uno, respectivamente, la parte (2) del teorema implica que $P_{n-1}^{(\lambda+1)} \cdot S^{(\lambda)}$ es un polinomio de grado a lo sumo n . Por lo tanto, existen matrices $\mathcal{G}_n^{(\lambda)}$ tales que

$$P_{n-1}^{(\lambda+1)} \cdot S^{(\lambda)} = \mathcal{G}_n^{(\lambda)} P_n^{(\lambda)} + \dots + \mathcal{G}_0^{(\lambda)} P_0^{(\lambda)}.$$

Ahora, usando que Δ y $S^{(\lambda)}$ son mutuamente adjuntos,

$$\mathcal{G}_m^{(\lambda)} = \langle P_{n-1}^{(\lambda+1)} \cdot S^{(\lambda)}, P_m^{(\lambda)} \rangle^{(\lambda)} = \langle P_{n-1}^{(\lambda+1)}, P_m^{(\lambda)} \cdot \Delta \rangle^{(\lambda+1)} = \langle P_{n-1}^{(\lambda+1)}, mP_{m-1}^{(\lambda+1)} \rangle^{(\lambda+1)} = 0,$$

para todo $n \neq m$. Denotamos al único coeficiente no nulo $G_n^{(\lambda)} = \mathcal{G}_n^{(\lambda)}$ para obtener

$$P_{n-1}^{(\lambda+1)} \cdot S^{(\lambda)} = G_n^{(\lambda)} P_n^{(\lambda)}.$$

La expresión de las matrices $G_n^{(\lambda)}$ sigue comparando coeficientes directores en la ecuación anterior. Esto completa la prueba del teorema. \square

Observación 30. Los requisitos en el peso (2.2.20) se denominan ecuaciones de Pearson *fuertes*. Se llaman de Pearson porque, al igual que las ecuaciones de Pearson *débiles*, en el caso escalar se reducen a ecuaciones escalares de Pearson. Y se llaman *fuertes* porque implican un sistema de ecuaciones de Pearson *débiles* muy específicas con $j \in \{0, 1\}$, ver (2.2.15),

$$F_0(x) = \tilde{F}_0(x) = F_1(x) = \Phi^{(\lambda)}(x)^*, \quad \tilde{F}_1(x) = \Phi^{(\lambda)}(x)^* - \Psi^{(\lambda)}(x)^*,$$

requerimos además que $W^{(\lambda)}(x)\Phi^{(\lambda)}(x)$ también sea un peso. Una de esas ecuaciones de Pearson débiles se obtiene combinando dos ecuaciones de Pearson fuertes, de modo que solo tenemos un peso $W^{(\lambda)}$

$$W^{(\lambda)}(x)\Phi^{(\lambda)}(x) - W^{(\lambda)}(x-1)\Phi^{(\lambda)}(x-1) = W^{(\lambda)}(x)\Psi^{(\lambda)}(x),$$

y posteriormente utilizando el hecho de que $W^{(\lambda)}(x)\Phi^{(\lambda)}(x)$ es nuevamente un peso y, por lo tanto, debe ser una matriz simétrica. Esto nos permite reorganizar la ecuación anterior

$$\Phi^{(\lambda)}(x-1)^* W^{(\lambda)}(x-1) = W^{(\lambda)}(x) \left(\Phi^{(\lambda)}(x) - \Psi^{(\lambda)}(x) \right).$$

La otra ecuación de Pearson débil se deriva directamente del hecho de que $W^{(\lambda)}(x)\Phi^{(\lambda)}(x)$ es una matriz simétrica, por lo que

$$\Phi^{(\lambda)}(x)^*W^{(\lambda)}(x) = W^{(\lambda)}(x)\Phi^{(\lambda)}(x).$$

Estas ecuaciones débiles de Pearson conducen a operadores adicionales

$$E_1 = \Phi^{(\lambda)}(x)^* = E_1^\dagger,$$

$$E_2 = \eta\Phi^{(\lambda)}(x)^*, \quad E_2^\dagger = \eta^{-1}(\Phi^{(\lambda)}(x)^* - \Psi^{(\lambda)}(x)^*),$$

que son todos elementos de $\mathcal{F}_R(P)$, ver Proposición 2.2.4.

2.2.5. Aplicaciones de los *shift operators*

En esta subsección obtendremos fórmulas de estructura explícitas para los polinomios mónicos $(P_n^{(\lambda)})_n$ usando los *shift operators*. Esto se aplicó con éxito para ejemplos de polinomios matriciales de tipo Hermite, Laguerre y Gegenbauer; véase, por ejemplo, [86, Theorem 3.1 y Theorem 3.3], [90], [82]. En el siguiente teorema aplicaremos esta estrategia al caso discreto. En [52] se muestra una aplicación reciente de ecuaciones fuertes de Pearson en el contexto de *time-band-limiting*. Observemos que las fórmulas de Rodrigues para polinomios ortogonales matriciales discretos fueron obtenidas mediante un método diferente en [50]. De aquí en adelante asumimos $\mathcal{V} = \mathbb{N}_0$, de modo que tenemos una familia infinita de pesos matriciales $W^{(\lambda)}$.

Teorema 2.2.6. *Sea $(W^{(\lambda)})_{\lambda \in \mathbb{N}_0}$ una familia de pesos, tal como en el Teorema 2.2.5. Entonces*

1. Normas cuadradas: Las normas cuadradas $\mathcal{H}_n^{(\lambda)}$ de $P_n^{(\lambda)}$ son iguales a

$$\mathcal{H}_n^{(\lambda)} = n!\mathcal{H}_0^{(\lambda+n)}((G_1^{(\lambda+n-1)})^*)^{-1} \dots ((G_n^{(\lambda)})^*)^{-1}. \quad (2.2.25)$$

2. Fórmula de Rodrigues: Los polinomios ortogonales mónicos con respecto a $W^{(\lambda)}$ están dados por

$$P_n^{(\lambda)}(x) = (-1)^n (G_1^{(\lambda+n-1)} \dots G_n^{(\lambda)})^{-1} W^{(\lambda+n)} \cdot \nabla^n(x) (W^{(\lambda)}(x))^{-1},$$

para todo n y λ en \mathbb{N}_0 donde las matrices $G_n^{(\lambda)}$ están dadas en el Teorema 2.2.5, (3).

3. Relación de recurrencia de tres términos: Los coeficientes de la relación de recurrencia de tres términos (1.5.23) están dados por

$$B_n^{(\lambda)} = nX_1^{(\lambda+n-1)} - (n+1)X_1^{(\lambda+n)} + n, \quad C_n^{(\lambda)} = \mathcal{H}_n^{(\lambda)}(\mathcal{H}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1},$$

donde $X_n^{(\lambda)}$ denota al coeficiente subdirector de $P_n^{(\lambda)}$.

4. Los operadores de segundo orden $S^{(\lambda-1)}\Delta$ y $\Delta S^{(\lambda)}$ tienen a los polinomios $P_n^{(\lambda)}$ como autofunciones. Precisamente

$$(P_n^{(\lambda)} \cdot S^{(\lambda-1)}\Delta)(x) = (n+1)G_{n+1}^{(\lambda-1)}P_n^{(\lambda)}(x), \quad (P_n^{(\lambda)} \cdot \Delta S^{(\lambda)})(x) = nG_n^{(\lambda)}P_n^{(\lambda)}(x). \quad (2.2.26)$$

Demostración. Para probar (1) observemos que para $\lambda \in \mathcal{V}_0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n^{(\lambda)} &= \langle P_n^{(\lambda)}, P_n^{(\lambda)} \rangle^{(\lambda)} = \frac{1}{n+1} \langle P_{n+1}^{(\lambda-1)} \cdot \Delta, P_n^{(\lambda)} \rangle^{(\lambda)} = \frac{1}{n+1} \langle P_{n+1}^{(\lambda-1)}, P_n^{(\lambda)} \cdot S^{(\lambda-1)} \rangle^{(\lambda-1)} \\ &= \frac{1}{n+1} \langle P_{n+1}^{(\lambda-1)}, P_{n+1}^{(\lambda-1)} \rangle^{(\lambda-1)} (G_{n+1}^{(\lambda-1)})^* = \frac{1}{n+1} \mathcal{H}_{n+1}^{(\lambda-1)} (G_{n+1}^{(\lambda-1)})^*. \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Iterando esto obtenemos (2.2.25). Notemos que (2.2.27) implica que las matrices $G_n^{(\lambda)}$ son invertibles para todo n, λ .

Probaremos (2) por inducción en n . Comenzamos mostrando que para cualquier polinomio matricial Q se cumple que

$$Q \cdot (S^{(\lambda+n-1)} \dots S^{(\lambda)}) = (-1)^n (QW^{(\lambda+n)} \cdot \nabla^n)(W^{(\lambda)})^{-1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.28)$$

Procedemos con el caso $n = 1$, utilizando la definición del operador $S^{(\lambda)}$ obtenemos

$$Q \cdot S^{(\lambda)}(x) = - \left[Q \cdot \Delta(x-1)(\Phi^{(\lambda)}(x))^* + Q(x-1)(\Psi^{(\lambda)}(x))^* \right]. \quad (2.2.29)$$

Utilizando las ecuaciones (2.2.20) y (2.2.9), el lado derecho de (2.2.29) se convierte en

$$\begin{aligned} - \left[(Q \cdot \Delta)(x-1)W^{(\lambda+1)}(x) + Q(x-1)(W^{(\lambda+1)} \cdot \Delta)(x-1) \right] W^{(\lambda)}(x)^{-1} \\ = -(QW^{(\lambda+1)} \cdot \Delta)(x-1)(W^{(\lambda)}(x))^{-1}. \end{aligned}$$

Utilizando la definición del operador ∇ , (2.2.29) puede ser escrita como

$$Q \cdot S^{(\lambda)}(x) = -(QW^{(\lambda+1)} \cdot \nabla)(x)(W^{(\lambda)}(x))^{-1}, \quad (2.2.30)$$

lo que completa el caso $n = 1$. Ahora asumimos que (2.2.28) vale para n . Entonces aplicando la hipótesis inductiva tenemos que

$$\begin{aligned} Q \cdot (S^{(\lambda+n)} \dots S^{(\lambda)})(x) &= (Q \cdot S^{((\lambda+1)+n-1)} \dots S^{(\lambda+1)}) \cdot S^{(\lambda)}(x) \\ &= (-1)^n \left((QW^{(\lambda+n+1)} \cdot \nabla^n)(x)W^{(\lambda+1)}(x)^{-1} \right) \cdot S^{(\lambda)}(x) \\ &= (-1)^{n+1} \left((QW^{(\lambda+n+1)} \cdot \nabla^{n+1})(x) \right) W^{(\lambda)}(x)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

en donde en la última línea hemos usado la acción de $S^{(\lambda)}$ dada en (2.2.30). Esto muestra que (2.2.28) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, a partir de la *forward shift relation* $(P_{n-1}^{(\lambda+1)} \cdot S^{(\lambda)}) = G_n^{(\lambda)} P_n^{(\lambda)}$ y (2.2.31) con Q reemplazado por la matriz identidad I , obtenemos

$$G_1^{(\lambda+n-1)} \dots G_n^{(\lambda)} P_n^{(\lambda)} = I \cdot (S^{(\lambda)} \dots S^{(\lambda+n-1)}) = (-1)^n (W^{(\lambda+n)} \cdot \nabla^n)(W^{(\lambda)})^{-1}.$$

Lo que concluye la prueba de (2).

Hemos indicado en (1.5.24) que $C_n^{(\lambda)} = \mathcal{H}_n^{(\lambda)} (\mathcal{H}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1}$ y $B_n^{(\lambda)} = X_n^{(\lambda)} - X_{n+1}^{(\lambda)}$. Ahora la *backward shift relation* $P_n^{(\lambda)}(x) \cdot \Delta = nP_{n-1}^{(\lambda+1)}(x)$ nos da una relación de recurrencia simple para $X_n^{(\lambda)}$:

$$(n-1)X_n^{(\lambda)} + \frac{n(n-1)}{2} = nX_{n-1}^{(\lambda+1)}.$$

Iterando esta ecuación obtenemos

$$X_n^{(\lambda)} = nX_1^{(\lambda+n-1)} - \frac{n(n-1)}{2}.$$

En consecuencia

$$B_n^{(\lambda)} = nX_1^{(\lambda+n-1)} - (n+1)X_1^{(\lambda+n)} + n. \quad (2.2.32)$$

Esto concluye la prueba de (3). Finalmente, (4) sigue directamente del Teorema 2.2.5. \square

Observación 31. Observamos que la parte (4) del Teorema 2.2.6 implica que los operadores en diferencias $S^{(\lambda-1)}\Delta$ y $\Delta S^{(\lambda)}$ pertenecen al álgebra de Fourier a derecha $\mathcal{F}_R(P)$. Por otro lado, los operadores de orden cero $(n+1)G_{n+1}^{(\lambda-1)}$ y $nG_n^{(\lambda)}$ pertenecen a las álgebras de Fourier a izquierda $\mathcal{F}_L(P)$.

2.3. Dualidad para polinomios ortogonales matriciales

En esta sección introducimos una noción de dualidad para polinomios ortogonales matriciales. Esto puede ser visto como una extensión de la noción de dualidad para polinomios ortogonales escalares desarrollada en [36].

2.3.1. Polinomios matriciales duales

Consideramos una sucesión $(Q_x)_x$ de polinomios matriciales con argumento matricial \mathcal{N} , tal que $\deg Q_x = x$ para todo $x \in \mathbb{N}_0$ y tal que la variable \mathcal{N} multiplica por la izquierda, es decir existen matrices $A_{x,x}, \dots, A_{x,0} \in M_N(\mathbb{C})$ tales que

$$Q_x(\mathcal{N}) = \mathcal{N}^x A_{x,x} + \mathcal{N}^{x-1} A_{x,x-1} + \dots + A_{x,0}. \quad (2.3.33)$$

Si la variable \mathcal{N} es un múltiplo de la matriz identidad, digamos $\mathcal{N} = nI$, escribiremos $Q_x(n) = Q_x(nI)$. Sumado a eso, asumimos que existe una función ρ a valores en las matrices $M_N(\mathbb{C})$, llamada *función de autovalores*, tal que la siguiente relación de recurrencia de tres términos se verifica:

$$\rho(n)Q_x(\rho(n)) = Q_{x+1}(\rho(n)) + Q_x(\rho(n))\mathcal{Y}_x + Q_{x-1}(\rho(n))\mathcal{Z}_x, \quad x \in \mathbb{N}_0, \quad Q_0 = I, \quad (2.3.34)$$

y $Q_{-1} = \mathcal{Z}_0 = 0$. Para asegurar que la sucesión de polinomios mónicos $(Q_x)_x$ que satisface (2.3.34) es única, debemos imponer cierta condición en la función de autovalores. Notemos que en (2.3.34), los coeficientes \mathcal{Y}_x y \mathcal{Z}_x multiplican a derecha, mientras que la función $\rho(n)$ multiplica a izquierda.

Condición 1. *Cada entrada de $\rho(n)$ es una función racional de n sin polos en \mathbb{N}_0 y para cada $x \in \mathbb{N}_0$, existen $k_0, \dots, k_x \in \mathbb{N}_0$ tales que la matriz de Vandermonde en bloques*

$$\begin{pmatrix} I & \rho(k_0) & \rho(k_0)^2 & \cdots & \rho(k_0)^x \\ I & \rho(k_1) & \rho(k_1)^2 & \cdots & \rho(k_1)^x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & \rho(k_x) & \rho(k_x)^2 & \cdots & \rho(k_x)^x \end{pmatrix}, \quad (2.3.35)$$

es invertible. En particular esto implica que los $\rho(n)$'s son diferentes e invertibles para infinitos $n \in \mathbb{N}_0$. En el Lema A.1.1 describimos una gran familia de funciones de autovalores que satisfacen la Condición 1.

Lema 2.3.1. *Sea $(Q_x)_x$ una sucesión de polinomios matriciales mónicos tales que (2.3.34) se satisface para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Si la función de autovalores $\rho(n)$ satisface la Condición 1, entonces $(Q_x)_x$ es única.*

Demostración. Sea $(\tilde{Q}_x)_x$ la única sucesión de polinomios matriciales mónicos definidos por la relación de recurrencia de tres términos

$$n\tilde{Q}_x(n) = \tilde{Q}_{x+1}(n) + \tilde{Q}_x(n)\mathcal{Y}_x + \tilde{Q}_{x-1}(n)\mathcal{Z}_x, \quad \tilde{Q}_0 = Q_0 = I.$$

Entonces, $\tilde{Q}_x(\rho(n))$ también satisface la recurrencia (2.3.34). Procediendo recursivamente en x , obtenemos

$$Q_x(\rho(n)) = \tilde{Q}_x(\rho(n)), \quad \forall x, n \in \mathbb{N}_0.$$

La demostración del lema estará completa si mostramos que si P es un polinomio matricial que satisface $P(\rho(n)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $P = 0$. Supongamos que $P(n) = n^x A_x + \dots + A_0$, con $A_x \neq 0$. Entonces por la Condición 1, existen $k_0, \dots, k_x \in \mathbb{N}_0$ tales que la matriz de Vandermonde en bloques (2.3.35) es invertible. Entonces la condición

$$P(\rho(k_j)) = \rho(k_j)^x A_x + \dots + \rho(k_j) A_1 + A_0 = 0, \quad j = 0, \dots, x,$$

implica que $A_x = \dots = A_1 = A_0 = 0$, y esto completa la prueba del lema. \square

Ahora estamos listos para introducir la noción de dualidad para polinomios ortogonales matriciales. Consideramos un peso matricial W y su sucesión de polinomios ortogonales mónicos $(P_n)_n$ como en (2.1.6).

Definición 2.3.2. *Sea $(Q_x)_x$ una familia de polinomios matriciales que satisface (2.3.34) y asumimos que los autovalores $\rho(n)$ satisfacen la Condición 1. Sean $M_1(n), M_2(x)$ funciones matriciales invertibles en \mathbb{N}_0 y asumimos que $M_2(x+1)^{-1}M_2(x)$ es una función racional de x . Decimos que la 4-upla (Q_x, M_1, M_2, ρ) es una familia dual para $(P_n)_n$ si*

$$P_n(x) = M_1(n)Q_x(\rho(n))M_2(x), \quad \text{para todos } x, n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.3.36)$$

Si no hay lugar a confusión, escribiremos simplemente $(Q_x)_x$.

La relación dual (2.3.36) puede ser escrita como $M_1(n)^{-1}P_n(x) = Q_x(\rho(n))M_2(x)$, en donde el lado izquierdo es un polinomio en x y el lado derecho es un polinomio en n evaluado en $\rho(n)$. Notemos que (2.3.36) junto con la invertibilidad de $M_1(n)$ y $M_2(x)$ implica que $P_n(0)$ es invertible para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $Q_x(\rho(0))$ es invertible para todo $x \in \mathbb{N}_0$.

Estableceremos una relación de equivalencia entre familias duales. Sea (Q_x, M_1, M_2, ρ) una familia dual y sea R una matriz constante invertible. Denotamos por \check{Q}_x el polinomio

$$\check{Q}_x(\mathcal{N}) = \mathcal{N}^x(R^{-1}A_{x,x}R) + \mathcal{N}^{x-1}(R^{-1}A_{x,x-1}R) + \dots + R^{-1}A_{x,0}R,$$

de modo que $R^{-1}Q_x(\mathcal{N})R = \check{Q}_x(R^{-1}\mathcal{N}R)$. Podemos reescribir la condición de dualidad (2.3.36) como

$$P_n(x) = (M_1(n)R)(R^{-1}Q_x(\rho(n))R)(R^{-1}M_2(x)) = (M_1(n)R)\check{Q}_x(R^{-1}\rho(n)R)(R^{-1}M_2(x)),$$

para todo $x, n \in \mathbb{N}_0$. Diremos que dos familias duales (Q_x, M_1, M_2, ρ) y (S_x, N_1, N_2, ν) son equivalentes si existe una matriz constante invertible R tal que $N_1 = M_1R$, $N_2 = R^{-1}M_2$ y

$$S_x(\mathcal{N}) = R^{-1}Q_x(\mathcal{N})R = \check{Q}_x(R^{-1}\mathcal{N}R), \quad \nu = R^{-1}\rho R. \quad (2.3.37)$$

Como consecuencia del Corolario A.1.2, si ρ satisface la Condición 1 entonces ν también la satisface. Los polinomios matriciales $(\check{Q}_x)_x$ satisfacen una relación de recurrencia de tres términos de la forma

$$\nu(n)\check{Q}_x(\nu(n)) = \check{Q}_{x+1}(\nu(n)) + \check{Q}_x(\nu(n))R^{-1}\mathcal{Y}_xR + \check{Q}_{x-1}(\nu(n))R^{-1}\mathcal{Z}_xR, \quad (2.3.38)$$

para todo $x \in \mathbb{N}_0$, con condición inicial $\check{Q}_0 = I$.

Observación 32. El grupo de matrices complejas invertibles $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ actúa en el conjunto de familias duales (Q_x, M_1, M_2, ρ) por

$$(Q_x, M_1, M_2, \rho) \cdot R \mapsto (R^{-1}Q_xR, M_1R, R^{-1}M_2, R^{-1}\rho R).$$

Las clases de equivalencia de familias duales corresponden a las órbitas de esta acción.

Dada una familia de polinomios duales *mónicos* (Q_x, M_1, M_2, ρ) tendremos siempre un representante (S_x, N_1, N_2, ν) de su órbita con $N_1(0) = N_2(0) = I$, el cual puede ser obtenido eligiendo $R = M_1(0)^{-1} = M_2(0)$. La última igualdad se debe a que $(Q_x)_x$ y $(P_n)_n$ son mónicos.

Sin pérdida de generalidad nos restringiremos a familias duales (Q_x, M_1, M_2, ρ) con la condición $M_1(0) = M_2(0) = I$. En tal caso sigue de (2.3.36) que

$$M_1(n) = P_n(0), \quad M_2(x) = Q_x(\rho(0))^{-1}.$$

2.3.2. Caracterización de las familias duales

Sea $(P_n)_n$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al peso matricial W . Tal como en el caso escalar discutido en [36], los polinomios mónicos $(P_n)_n$ pueden tener muchos duales. En esta sección identificamos las familias duales con ciertos operadores en diferencias que tienen a los polinomios $(P_n)_n$ como autofunciones. Consideramos (Q_x, M_1, M_2, ρ) una familia dual y asumimos que $M_1(0) = M_2(0) = I$. Aplicando (2.3.36) podemos reescribir la relación de recurrencia de tres términos (2.3.34) en función de los polinomios P_n de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P_n(x+1)M_2(x+1)^{-1}M_2(x) + P_n(x)M_2(x)^{-1}\mathcal{Y}_xM_2(x) + P_n(x-1)M_2(x-1)^{-1}\mathcal{Z}_xM_2(x) \\ = M_1(n)\rho(n)M_1(n)^{-1}P_n(x), \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

para todo $x \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$, y

$$P_n(1)M_2(1)^{-1} + P_n(0)\mathcal{Y}_0 = M_1(n)\rho(n)M_1(n)^{-1}P_n(0), \quad (2.3.40)$$

para $x = 0$. En lo que sigue, mostraremos que estas relaciones pueden ser vistas como la acción de un elemento del álgebra biespectral $\mathcal{B}_R(P)$ en los polinomios $(P_n)_n$.

Lema 2.3.3. *Sea $(Q_x)_x$ una familia dual de $(P_n)_n$ como en la Definición 2.3.2. Entonces existen funciones racionales $F_1(x)$, $F_0(x)$ y $F_{-1}(x)$ tales que*

$$F_1(x) = M_2(x+1)^{-1}M_2(x), \quad F_0(x) = M_2(x)^{-1}\mathcal{Y}_xM_2(x), \quad (2.3.41)$$

$$F_{-1}(x) = M_2(x-1)^{-1}\mathcal{Z}_xM_2(x). \quad (2.3.42)$$

para todo $x \in \mathbb{N}$. Más aún

$$D = \eta F_1(x) + F_0(x) + \eta^{-1}F_{-1}(x) \in \mathcal{B}_R(P),$$

y $P_n(0)^{-1}P_n(-1)F_{-1}(0) = \mathcal{Y}_0 - F_0(0)$.

Demostración. Como los polinomios ortogonales mónicos $(P_n)_{n=0}^m$ generan el espacio de polinomios de grado menor o igual a m , podemos escribir x^n en términos de P_j , $j = 0, \dots, n$. Es decir, existen $A_j^n \in M_N(\mathbb{C})$ tales que

$$x^n = P_n(x) + A_{n-1}^n P_{n-1}(x) + \dots + A_0^n P_0(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Si reemplazamos esto en (2.3.39), aplicamos (2.3.39) nuevamente, y juntamos todos los términos que involucran a un múltiplo de P_j 's a derecha, obtenemos

$$(x+1)^n \tilde{F}_1(x) + x^n \tilde{F}_0(x) + (x-1)^n \tilde{F}_{-1}(x) = \mathcal{R}_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{N}, \quad (2.3.43)$$

donde

$$\tilde{F}_1(x) = M_2(x+1)^{-1} M_2(x), \quad \tilde{F}_0(x) = M_2(x)^{-1} \mathcal{Y}_x M_2(x), \quad \tilde{F}_{-1}(x) = M_2(x-1)^{-1} \mathcal{Z}_x M_2(x),$$

y \mathcal{R}_n es un polinomio en x . Notemos que por la Definición 2.3.2, $\tilde{F}_1(x) = M_2(x+1)^{-1} M_2(x)$ es una función racional de x . Sin embargo, $\tilde{F}_0(x)$ y $\tilde{F}_{-1}(x)$ son sucesiones que están únicamente definidas en $x \in \mathbb{N}_0$ y $x \in \mathbb{N}$ respectivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, y $x \in \mathbb{N}$, tenemos que \tilde{F}_1, \tilde{F}_0 y \tilde{F}_{-1} son soluciones al sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} F_1(x) & F_0(x) & F_{-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x+1)^n & (x+1)^{n+1} & (x+1)^{n+2} \\ x^n & x^{n+1} & x^{n+2} \\ (x-1)^n & (x-1)^{n+1} & (x-1)^{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_n(x) & \mathcal{R}_{n+1}(x) & \mathcal{R}_{n+2}(x) \end{pmatrix}.$$

donde F_1, F_0 y F_{-1} son las incógnitas. Como las matrices en la ecuación anterior son invertibles para todo $x \in \mathbb{N}_{>1}$ y tienen entradas polinomiales en x , la solución general (F_1, F_0, F_{-1}) es una función racional de x . Más aún, tenemos que

$$F_1(x) = M_2(x+1)^{-1} M_2(x), \quad F_0(x) = M_2(x)^{-1} \mathcal{Y}_x M_2(x), \quad F_{-1}(x) = M_2(x-1)^{-1} \mathcal{Z}_x M_2(x),$$

para todo $x \in \mathbb{N}_{>1}$. Como F_1 y \tilde{F}_1 son funciones racionales de x y son iguales para todo $x \in \mathbb{N}_{>1}$, la igualdad vale para todo $x \in \mathbb{C}$.

Reescribiendo (2.3.43) en términos de las funciones racionales F_1, F_0, F_{-1} obtenemos

$$(x+1)^n F_1(x) + x^n F_0(x) + (x-1)^n F_{-1}(x) = \mathcal{R}_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{N}_{>1}. \quad (2.3.44)$$

El lado derecho y el lado izquierdo de (2.3.44) son funciones racionales que coinciden para todo $x \in \mathbb{N}_{>1}$. Por lo tanto (2.3.44) vale para todo $x \in \mathbb{C}$. Esto implica que

$$P_n(x+1)F_1(x) + P_n(x)F_0(x) + P_n(x-1)F_{-1}(x) = \Gamma_n P_n(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad (2.3.45)$$

donde $\Gamma_n = M_1(n)\rho(n)M_1(n)^{-1}$. Por lo tanto $D = \eta F_1(x) + F_0(x) + \eta^{-1}F_{-1}(x) \in \mathcal{B}_R(P)$.

Tomando $x = 0$ en (2.3.44), obtenemos $Q_1(\rho(n)) = \rho(n) - \mathcal{Y}_0$. Por otro lado, tomando $x = 0$ en (2.3.45) y reorganizando usando que $F_1(0) = M_2(1)^{-1} M_2(0)$, obtenemos

$$Q_1(\rho(n)) + F_0(0) + P_n(0)^{-1} P_n(-1) F_{-1}(0) = \rho(n).$$

Por lo tanto concluimos que $P_n(0)^{-1} P_n(-1) F_{-1}(0) = \mathcal{Y}_0 - F_0(0)$ es independiente de n .

Para completar la prueba del lema debemos probar que (2.3.41) vale para $x = 1$. Si reemplazamos $x = 1$ en (2.3.34) y (2.3.45) obtenemos respectivamente que

$$\begin{aligned} Q_2(\rho(n)) + Q_1(\rho(n))\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Z}_1 &= \rho(n)Q_1(\rho(n)), \\ Q_2(\rho(n)) + Q_1(\rho(n))M_2(1)F_0(1)M_2(1)^{-1} + F_{-1}(1)M_2(1)^{-1} &= \rho(n)Q_1(\rho(n)). \end{aligned}$$

Estas ecuaciones implican que

$$Q_1(\rho(n))(\mathcal{Y}_1 - M_2(1)F_0(1)M_2(1)^{-1}) + \mathcal{Z}_1 - F_{-1}(1)M_2(1)^{-1} = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Ahora por un argumento similar al de la prueba del Lema 2.3.1 obtenemos $\mathcal{Y}_1 = M_2(1)F_0(1)M_2(1)^{-1}$ y $\mathcal{Z}_1 = F_{-1}(1)M_2(1)^{-1}$. Esto completa la prueba del lema. \square

Observación 33. Familias de polinomios duales equivalentes están asociadas al mismo operador $D \in \mathcal{B}_R(P)$. De hecho, si (Q_x, M_1, M_2, ρ) y $(\check{Q}_x, M_1R, R^{-1}M_2, R^{-1}\rho R)$ son equivalentes, donde R es una matriz constante invertible, obtenemos de (2.3.38) y del Lema 2.3.3 que inducen las mismas funciones racionales F_1, F_0, F_{-1} .

Definición 2.3.4. Denotaremos por $\mathcal{B}_R^2(P)$ al subconjunto de todos los operadores en diferencias

$$D = \eta F_1(x) + F_0(x) + \eta^{-1}F_{-1}(x) \in \mathcal{B}_R(P),$$

tales que $P_n(0)^{-1}P_n(-1)F_{-1}(0)$ es independiente de n , $F_1(x)$ es no singular para todo $x \in \mathbb{N}_0$ y existe una matriz invertible $M_1(n)$ tal que $\rho(n) = M_1(n)^{-1}\psi^{-1}(D)M_1(n)$ satisface la Condición 1, donde ψ es el mapa de Fourier generalizado dado en (2.2.12).

Observación 34. Si D es un operador en diferencias como en la Definición 2.3.4 tal que $F_{-1}(0) = 0$, entonces $P_n(0)^{-1}P_n(-1)F_{-1}(0)$ es trivialmente independiente de n . Este es el caso de todos los ejemplos dados en la Sección 2.8.

Teorema 2.3.5. Sea $(P_n)_n$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un peso discreto W tal como en la Sección 2.2. Cada familia dual (Q_x, M_1, M_2, ρ) determina un operador en diferencias $D \in \mathcal{B}_R^2(P)$. Recíprocamente, si $D \in \mathcal{B}_R^2(P)$ está dado por

$$D = \eta F_1(x) + F_0(x) + \eta^{-1}F_{-1}(x),$$

entonces existe una única sucesión de polinomios $(Q_x)_x$ dada por

$$P_n(x) = P_n(0)Q_x(\rho(n))\Upsilon(x), \quad \rho(n) = P_n(0)^{-1}\psi^{-1}(D)P_n(0), \quad \Upsilon(x) = F_1(0)^{-1} \cdots F_1(x-1)^{-1},$$

$\Upsilon(0) = I$. Más aún, la sucesión de polinomios duales satisface la relación de recurrencia de tres términos (2.3.34) con coeficientes

$$\mathcal{Y}_x = \Upsilon(x)F_0(x)\Upsilon(x)^{-1}, \quad \mathcal{Z}_x = \Upsilon(x-1)F_{-1}(x)\Upsilon(x)^{-1}, \quad x \in \mathbb{N},$$

y $\mathcal{Y}_0 = F_0(0) + P_n(0)^{-1}P_n(-1)F_{-1}(0)$, $\mathcal{Z}_0 = 0$.

Demostración. Hemos probado en el Lema 2.3.3 que las familias duales se corresponden con los operadores $D = \eta F_1(x) + F_0(x) + \eta^{-1}F_{-1}(x) \in \mathcal{B}_R(P)$. A partir de las expresiones explícitas en el Lema 2.3.3 tenemos que $F_1(x)$ es invertible para todo $x \in \mathbb{N}_0$ y que $P_n(0)^{-1}P_n(-1)F_{-1}(0)$ es independiente de n . Finalmente, ρ satisface la Condición 1 por la Definición 2.3.2. En conclusión $D \in \mathcal{B}_R^2(P)$.

Para la recíproca, sea $D \in \mathcal{B}_R^2(P)$ tal que

$$P_n \cdot D = P_n(x+1)F_1(x) + P_n(x)F_0(x) + P_n(x-1)F_{-1}(x) = \psi^{-1}(D) \cdot P_n(x). \quad (2.3.46)$$

Como $D \in \mathcal{B}_R^2(P)$, tenemos que $F_1(x)$ es invertible para todo $x \in \mathbb{N}_0$ y por lo tanto la matriz $\Upsilon(x) = F_1(0)^{-1} \cdots F_1(x-1)^{-1}$ también es invertible. Sea $\hat{Q}_x(n) = P_n(0)^{-1}P_n(x)\Upsilon(x)^{-1}$. Si reemplazamos $P_n(x) = P_n(0)\hat{Q}_x(n)\Upsilon(x)$ en (2.3.46), obtenemos la siguiente relación de recurrencia para \hat{Q}_x :

$$\rho(n)\hat{Q}_x(n) = \hat{Q}_{x+1}(n) + \hat{Q}_x(n)\mathcal{Y}_x + \hat{Q}_{x-1}(n)\mathcal{Z}_x,$$

con \mathcal{Y}_x y \mathcal{Z}_x tal como en el enunciado del teorema. Como $D \in \mathcal{B}_R^2(P)$, tenemos que ρ satisface la Condición 1, y por el Lema 2.3.1 existe un único polinomio matricial Q_x que satisface (2.3.34). En conclusión

$$Q_x(\rho(n)) = \hat{Q}_x(n) = P_n(0)^{-1}P_n(x)\Upsilon(x)^{-1}, \quad x \in \mathbb{N}_0.$$

Como $D \in \mathcal{B}_R^2(P) \subset \mathcal{M}_N$, todas las condiciones de la Definición 2.3.2 se satisfacen y $(Q_x)_x$ es una familia dual. \square

Observación 35. A partir del Teorema 2.3.5 y el Lema 2.3.1, si $D = \eta F_1(x) + F_0(x) + \eta^{-1}F_{-1}(x)$ es un elemento de $\mathcal{B}_R^2(P)$, entonces la sucesión de polinomios duales $(Q_x)_x$ asociados a D está definida por la relación de recurrencia de tres términos

$$nQ_x(n) = Q_{x+1}(n) + Q_x(n)\mathcal{Y}_x + Q_{x-1}(n)\mathcal{Z}_x, \quad Q_0 = I.$$

Observación 36. Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de operadores en diferencias de segundo orden $\mathcal{B}_R^2(P)$ y el conjunto de familias duales mónicas. El Teorema 2.3.5 establece que cada elemento de $\mathcal{B}_R^2(P)$ determina una única sucesión de polinomios duales mónicos (Q_x, M_1, M_2, ρ) , donde $M_1(n) = P_n(0)$, $M_2(x) = \Upsilon(x)$, $\rho(n) = P_n(0)^{-1}\psi^{-1}(D)P_n(0)$, con la normalización estándar $M_1(0) = M_2(0) = I$. Por otro lado, por el Lema 2.3.3 cada familia dual (Q_x, M_1, M_2, ρ) determina unívocamente un operador $D \in \mathcal{B}_R^2(P)$.

Observación 37. Consideremos $D \in \mathcal{B}_R^2(P)$ y $(Q_x, P_n(0), \Upsilon(x), \rho(n))$ una familia dual asociada, entonces para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, tenemos $\tilde{D} = \alpha D + \beta \in \mathcal{B}_R^2(P)$. Por lo tanto, el operador \tilde{D} tiene una familia dual asociada $(\tilde{Q}_x, \tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{\rho})$. Una cuenta sencilla muestra que

$$\tilde{M}_1 = P_n(0), \quad \tilde{M}_2(x) = \alpha^x \Upsilon(x), \quad \tilde{\rho}(n) = \alpha \rho(n) + \beta, \quad \tilde{Q}_x(\tilde{\rho}(n)) = \alpha^x Q_x(\rho(n)).$$

Si $D_1, D_2 \in \mathcal{B}_R^2(P)$ y $\alpha D_1 + \beta D_2 \in \mathcal{B}_R^2(P)$, entonces los polinomios duales correspondientes a D_1, D_2 y $\alpha D_1 + \beta D_2$ no se relacionan de manera fácil. Discutiremos un ejemplo de esta situación en la Sección 2.8.

De aquí en adelante, consideraremos la normalización $M_1(n) = P_n(0)$ y $M_2(x) = \Upsilon(x)$ como en el Teorema 2.3.5.

2.3.3. Relaciones de ortogonalidad duales

Teniendo en cuenta la relación de recurrencia (2.3.34), nos interesan sucesiones de polinomios ortogonales $(P_n)_n$ con polinomios duales $(Q_x)_x$ que también sean polinomios ortogonales. A continuación relacionamos las medidas de ortogonalidad de las sucesiones $(P_n)_n$ y $(Q_x)_x$. Para ello necesitamos el siguiente análogo matricial de la Identidad de Christoffel-Darboux para polinomios mónicos. Se trata de un resultado estándar para polinomios matriciales ortonormales, 1.5.25. Incluimos la demostración para adaptar este resultado a la normalización mónica.

Proposición 2.3.6. *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, los polinomios ortogonales matriciales mónicos $(P_n)_n$ satisfacen*

$$\sum_{k=0}^n P_k(y)^* \mathcal{H}_k^{-1} P_k(x) = \frac{1}{y-x} (P_{n+1}(y)^* \mathcal{H}_n^{-1} P_n(x) - P_n(y)^* \mathcal{H}_n^{-1} P_{n+1}(x)), \quad x \neq y.$$

Demostración. Aplicando la relación de recurrencia de tres términos obtenemos

$$\begin{aligned} x P_k(y)^* \mathcal{H}_k^{-1} P_k(x) &= P_k(y)^* \mathcal{H}_k^{-1} P_{k+1}(x) + P_k(y)^* \mathcal{H}_k^{-1} B_k P_k(x) + P_k(y)^* \mathcal{H}_k^{-1} C_k P_{k-1}(x), \\ y P_k(y)^* \mathcal{H}_k^{-1} P_k(x) &= P_{k+1}(y)^* \mathcal{H}_k^{-1} P_k(x) + P_k(y)^* B_k^* \mathcal{H}_k^{-1} P_k(x) + P_{k-1}(y)^* C_k^* \mathcal{H}_k^{-1} P_k(x). \end{aligned}$$

Restando estas ecuaciones, aplicando (1.5.24) y sumando sobre todo k obtenemos el resultado deseado. \square

Ahora estamos listos para identificar las relaciones de ortogonalidad para los polinomios duales $(Q_x)_x$ bajo el supuesto que la inversa de la norma cuadrada \mathcal{H}_n^{-1} decae suficientemente rápido cuando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 2.3.7. *Sea $(P_n)_n$ una sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos con una sucesión dual $(Q_x)_x$ y función de autovalores ρ como en el Teorema 2.3.5, tales que $P_n(x) = P_n(0)Q_x(\rho(n))\Upsilon(x)$. Consideremos el peso matricial $U(n) = P_n(0)^* \mathcal{H}_n^{-1} P_n(0)$. Asumiendo que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n)U(n) < \infty, \quad (2.3.47)$$

para cualquier función matricial F con entradas racionales y sin polos en \mathbb{N}_0 , y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_1(\rho(n))P_n(0)^* \mathcal{H}_n^{-1} P_{n+1}(0)R_2(\rho(n)) = 0, \quad \text{para todos } R_1, R_2 \in M_N(\mathbb{C})[n], \quad (2.3.48)$$

entonces la sucesión dual $(Q_x)_x$ satisface la relación de ortogonalidad

$$\langle Q_x, Q_y \rangle^d = \sum_{n=0}^{\infty} Q_x(\rho(n))^* U(n) Q_y(\rho(n)) = \mathcal{W}_x \delta_{x,y},$$

donde $\mathcal{W}_x \in M_N(\mathbb{C})$. Más aún, \mathcal{W}_x es definida positiva para todo $x \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. El hecho de que $\langle Q_x, Q_x \rangle^d$ es finito e igual a la matriz \mathcal{W}_x es consecuencia de (2.3.47). Para $x \neq y$, sustituyendo (2.3.36) en la Identidad de Christoffel-Darboux obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n Q_x(\rho(k))^* M_1(k)^* \mathcal{H}_k^{-1} M_1(k) Q_y(\rho(k)) &= \\ \frac{1}{x-y} (Q_x(\rho(n+1))^* M_1(n+1)^* \mathcal{H}_n^{-1} M_1(n) Q_y(\rho(n)) & \\ - Q_x(\rho(n))^* M_1(n)^* \mathcal{H}_n^{-1} M_1(n+1) Q_y(\rho(n+1))) &. \quad (2.3.49) \end{aligned}$$

Ahora tomamos límite $n \rightarrow \infty$ en ambos miembros de (2.3.49). El límite en los dos términos del lado derecho de (2.3.49) es cero por las hipótesis del teorema. Esto implica la ortogonalidad de la sucesión $(Q_x)_x$.

Finalmente, dado $\xi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tenemos que $\xi^* \mathcal{W}_x \xi = \xi^* \langle Q_x, Q_x \rangle^d \xi = \langle Q_x \xi, Q_x \xi \rangle^d > 0$, en donde hemos usado que $U(n)$ es definida positiva para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Esto implica que \mathcal{W}_x es definida positiva. \square

Observación 38. En el resto de esta sección, asumiremos que las hipótesis (2.3.47) y (2.3.48) del Teorema 2.3.7 se cumplen.

Procediendo como en [29, §1.2], tenemos que $\|F\| = (\text{tr}(\langle F, F \rangle))^{\frac{1}{2}}$ es una seminorma en el espacio

$$L^2(W) = \{F : \mathbb{R} \rightarrow M_N(\mathbb{C}) : \langle F, F \rangle < \infty\}.$$

Tomamos \mathcal{H} la completación de $L^2(W)/\{F : \|F\| = 0\}$. Si la sucesión de polinomios $(P_n)_n$ es densa en \mathcal{H} , obtenemos un análogo matricial de [94, Theorem 3.8], que describe la norma cuadrada dual.

Teorema 2.3.8. *Sea $(Q_x)_x$ una familia dual de $(P_n)_n$ y asumimos que el peso dual $U(n)$ satisface las hipótesis del Teorema 2.3.7. Si la sucesión de polinomios $(P_n)_n$ es densa en \mathcal{H} , entonces*

$$\langle Q_x, Q_x \rangle^d = \sum_{n=0}^{\infty} Q_x(\rho(n))^* U(n) Q_x(\rho(n)) = (\Upsilon(x) W(x) \Upsilon(x)^*)^{-1}.$$

Demostración. Consideremos $\hat{P}_n(x) = \mathcal{H}_n^{-\frac{1}{2}} P_n(x)$ una sucesión de polinomios ortonormales y sea $F_y(x) = \delta_{x,y} I$. Entonces, tenemos que

$$\langle F_y, F_y \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} F_y(x) W(x) F_y(x)^* = W(y). \quad (2.3.50)$$

Por otro lado,

$$\langle F_y, \hat{P}_n \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} F_y(x) W(x) \hat{P}_n(x)^* = W(y) \hat{P}_n(y)^*,$$

y por lo tanto la relación de Parseval en [29, Ecuación (1.42)] para F_y nos da

$$\begin{aligned} \langle F_y, F_y \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle F_y, \hat{P}_n \rangle \langle F_y, \hat{P}_n \rangle^* = \sum_{n=0}^{\infty} W(y) \hat{P}_n(y)^* \hat{P}_n(y) W(y) \\ &= W(y) \left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(y)^* \mathcal{H}_n^{-1} P_n(y) \right) W(y). \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

Combinando (2.3.50) y (2.3.51), usando que $W(y)$ es invertible para todo $y \in \mathbb{N}_0$ y la condición de dualidad (2.3.36), completamos la prueba del teorema. \square

2.3.4. Álgebras de Fourier duales

Procediendo como en la Sección 2.2.2, introducimos las álgebras de Fourier para los polinomios duales $(Q_x)_x$. Intercambiando los roles de x y n , consideramos las siguientes álgebras

de operadores en diferencias:

$$\mathcal{M}_N^d = \left\{ \tilde{D} = \sum_{j=-\ell}^m \eta^j F_j(x) : F_j : \mathbb{N}_0 \rightarrow M_N(\mathbb{C}) \text{ es una sucesión a valores matriciales} \right\},$$

$$\mathcal{N}_N^d = \left\{ \tilde{M} = \sum_{j=-t}^s G_j(n) \delta^j : G_j : \mathbb{C} \rightarrow M_N(\mathbb{C}) \text{ es una función matricial racional de } n \right\}.$$

Estamos interesados en la acción de los elementos de \mathcal{N}_N^d y \mathcal{M}_N^d en la sucesión dual $(Q_x)_x$. Definimos la acción de los operadores $\tilde{M} = \sum_{j=-t}^s G_j(n) \delta^j \in \mathcal{N}_N^d$ y $\tilde{D} = \sum_{j=-\ell}^m \eta^j F_j(x) \in \mathcal{M}_N^d$ por

$$(Q_x \cdot \tilde{D})(\rho(n)) = \sum_{j=-\ell}^m Q_{x+j}(\rho(n)) F_j(x), \quad (\tilde{M} \cdot Q_x)(\rho(n)) = \sum_{j=-t}^s G_j(n) Q_x(\rho(n+j)).$$

Las álgebras de Fourier duales para la sucesión $(Q_x)_x$ están dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_R^d(Q) &= \{ \tilde{D} \in \mathcal{M}_N^d : \exists \tilde{M} \in \mathcal{N}_N^d, \tilde{M} \cdot Q_x = Q_x \cdot \tilde{D} \}, \\ \mathcal{F}_L^d(Q) &= \{ \tilde{M} \in \mathcal{N}_N^d : \exists \tilde{D} \in \mathcal{M}_N^d, \tilde{M} \cdot Q_x = Q_x \cdot \tilde{D} \}. \end{aligned}$$

Procediendo como en (2.2.12) tenemos que el mapa $\psi^d : \mathcal{F}_R^d(Q) \rightarrow \mathcal{F}_L^d(Q)$ definido por

$$\psi^d(\tilde{D}) = \tilde{M}, \quad \tilde{M} \cdot Q_x = Q_x \cdot \tilde{D}, \quad (2.3.52)$$

es un isomorfismo de álgebras bien definido. La prueba de que este mapa está bien definido es análoga a la dada en la Proposición 2.2.2 y la omitimos. Estamos interesados en la relación entre las álgebras de Fourier de los polinomios P_n y las álgebras de Fourier duales para los polinomios Q_x . Asumiendo que $M \in \mathcal{F}_L(P)$ y $D = \psi(M) \in \mathcal{F}_R(P)$ están dados por

$$M = \sum_{j=-t}^s G_j(n) \delta^j, \quad D = \sum_{k=-\ell}^m \eta^k F_k(x) \in \mathcal{M}_N,$$

la condición $M \cdot P_n = P_n \cdot D$ está dada explícitamente por

$$\sum_{j=-t}^s G_j(n) P_{n+j}(x) = \sum_{k=-\ell}^m P_n(x+k) F_k(x), \quad n, x \in \mathbb{N}_0. \quad (2.3.53)$$

Quisieramos transformar la ecuación anterior en una para los polinomios duales usando la relación (2.3.36). Sin embargo, (2.3.36) es únicamente válida para $n, x \in \mathbb{N}_0$ y (2.3.53) puede incluir términos con valores negativos de n, x . Para superar estas dificultades nos limitaremos a una subálgebra más pequeña de las álgebras de Fourier. Sea $\hat{\mathcal{F}}_R(P)$ dada por

$$\hat{\mathcal{F}}_R(P) = \left\{ D = \sum_{k=-\ell}^m \eta^k F_k(x) \in \mathcal{F}_R(P) : F_k(x) = 0, \quad k = -\ell, \dots, -1, \quad x = 0, \dots, -k-1 \right\}.$$

Lema 2.3.9. $\hat{\mathcal{F}}_R(P)$ es una subálgebra de $\mathcal{F}_R(P)$.

Demostración. Es fácil verificar que $\hat{\mathcal{F}}_R(P)$ es un subespacio. Para probar que $\hat{\mathcal{F}}_R(P)$ es cerrado bajo la operación producto tomamos $D_1, D_2 \in \hat{\mathcal{F}}_R(P)$. Sin pérdida de generalidad, y permitiendo que alguno de los coeficientes sean nulos, asumimos que

$$D_1 = \sum_{j=-\ell}^{\ell} \eta^j F_j(x), \quad D_2 = \sum_{k=-\ell}^{\ell} \eta^k G_k(x).$$

La condición $D_1, D_2 \in \hat{\mathcal{F}}_R(P)$ implica que $F_j(x) = G_j(x) = 0$ para todo $j = -\ell, \dots, -1$, $x = 0, \dots, -j - 1$. El producto $D_1 D_2$ está dado por

$$D_1 D_2 = \sum_{j,k=-\ell}^{\ell} \eta^{k+j} F_j(x+k) G_k(x).$$

La prueba estará completa si mostramos que $F_j(x+k) G_k(x) = 0$ para todo

$$k+j = -2\ell, \dots, -1, \quad x = 0, \dots, -k-j-1. \quad (2.3.54)$$

Si $-\ell \leq k \leq -1$, entonces $G_k(x) = 0$ para todo $x = 0, \dots, -k-1$. Por otro lado, si $-k \leq x \leq -k-j-1$, entonces $0 \leq x+k \leq -j-1$ lo que implica que $j < 0$ y por lo tanto $F_j(x+k) = 0$.

Si $k \geq 0$ entonces la ecuación del lado derecho de (2.3.54) implica que $j < 0$. Más aún, la ecuación en el lado derecho de (2.3.54) nos da $0 \leq k \leq x+k \leq -j-1$ y por lo tanto $F_j(x+k) = 0$. \square

Observación 39. Notemos que $x \in \hat{\mathcal{F}}_R(P)$, y por lo tanto $\hat{\mathcal{F}}_R(P)$ es no vacío. Más aún, todo operador D asociado a una ecuación de Pearson débil de la forma (2.2.3) está contenido en $\hat{\mathcal{F}}_R(P)$ tal como su adjunta D^\dagger . Finalmente todo operador D en $\mathcal{B}_R^2(P)$ que satisface la condición de la Observación 34 está contenido en $\hat{\mathcal{F}}_R(P)$. Este será el caso para todos los ejemplos de la Sección 2.8.

Si $D \in \hat{\mathcal{F}}_R(P)$ está dado por

$$D = \sum_{j=-\ell}^m \eta^j F_j(x), \quad (2.3.55)$$

entonces para cada $j = -\ell, \dots, m$, $x \mapsto \Upsilon(x+j) F_j(x) \Upsilon(x)^{-1}$ define una sucesión que es cero para todo $x = 0, \dots, \max(-j, 0) - 1$. En conclusión tenemos un mapa $\sigma: \hat{\mathcal{F}}_R(P) \rightarrow \mathcal{M}_N^d$ dado por

$$\sigma(D) = \Upsilon D \Upsilon^{-1} = \sum_{j=-\ell}^m \eta^j \Upsilon(x+j) F_j(x) \Upsilon^{-1}(x). \quad (2.3.56)$$

La acción de $\sigma(D)$ en los polinomios duales está dada por

$$\begin{aligned} (Q_x \cdot \sigma(D))(\rho(n)) &= \sum_{j=-\ell}^m Q_{x+j}(\rho(n)) \Upsilon(x+j) F_j(x) \Upsilon^{-1}(x) \\ &= P_n(0)^{-1} \sum_{j=-\ell}^m P_n(x+j) F_j(x) \Upsilon^{-1}(x) = P_n(0)^{-1} (P_n \cdot D)(x) \Upsilon^{-1}(x), \end{aligned} \quad (2.3.57)$$

para todo $x, n \in \mathbb{N}_0$. En la segunda igualdad, hemos usando la relación de dualidad (2.3.36) y el hecho de que el coeficiente $F_j(x)$ es cero cuando $x + j$ es un entero negativo. Esto implica que

$$P_n(0)(Q_x \cdot \sigma(D))(\rho(n))\Upsilon(x) = (P_n \cdot D)(x), \quad \text{para todo } x, n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.3.58)$$

Ahora introducimos la subálgebra $\hat{\mathcal{F}}_L(P) \subset \mathcal{F}_L(P)$ considerando la imagen de $\hat{\mathcal{F}}_R(P)$ bajo el homomorfismo de álgebras ψ^{-1} :

$$\hat{\mathcal{F}}_L(P) = \psi^{-1}(\hat{\mathcal{F}}_R(P)).$$

Para un operador $D \in \hat{\mathcal{F}}_R(P)$ como en (2.3.55), sea $M = \psi^{-1}(D) \in \hat{\mathcal{F}}_L(P)$ de la forma

$$M = \sum_{j=-t}^s G_j(n)\delta^j.$$

Entonces la relación $M \cdot P_n = P_n \cdot D$ para $n \in \mathbb{N}_0$ se traduce en las siguientes relaciones para los polinomios duales:

$$\begin{aligned} (P_n \cdot D)(x) &= (M \cdot P_n)(x) = \sum_{j=\max(-t, -n)}^s G_j(n)P_{n+j}(x) \\ &= \sum_{j=\max(-t, -n)}^s G_j(n)P_{n+j}(0)Q_x(\rho(n+j))\Upsilon(x). \end{aligned}$$

En conclusión, usando (2.3.57) obtenemos

$$(Q_x \cdot \sigma(D))(\rho(n)) = P_n(0)^{-1}(P_n \cdot D)(x)\Upsilon(x)^{-1} = \sum_{j=\max(-t, -n)}^s \tilde{G}_j(n)Q_x(\rho(n+j)), \quad (2.3.59)$$

donde las sucesiones $\tilde{G}_j(n)$ están dadas por

$$\tilde{G}_j(n) = P_n(0)^{-1}G_j(n)P_{n+j}(0), \quad j = \max(-t, -n), \dots, s.$$

Los coeficientes $\tilde{G}_j(n)$ están únicamente definidos para $n \in \mathbb{N}_0$ dado que están dados en términos de las sucesiones $G_j(n)$. En lo que sigue probaremos que pueden ser extendidos a funciones racionales de n .

Lema 2.3.10. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ existen matrices M_0, \dots, M_k tales que*

$$\rho(n)^k = Q_k(\rho(n))M_k + \dots + Q_0(\rho(n))M_0.$$

Demostración. Procedemos por inducción en k . El lema es trivial para $k = 0$, teniendo en cuenta que $Q_0(\rho(n))$ es la matriz identidad. Asumimos que el lema vale para $k \in \mathbb{N}$ dado; usando la hipótesis inductiva y la relación de recurrencia de tres términos dual (2.3.34) obtenemos

$$\begin{aligned} \rho(n)^{k+1} &= \rho(n)(Q_k(\rho(n))M_k + \dots + Q_0M_0) = \rho(n)Q_k(\rho(n))M_k + \dots + \rho(n)Q_0M_0 \\ &= Q_{k+1}(\rho(n))M_k + Q_k(\rho(n))(\mathcal{Y}_kM_k + M_{k-1}) + \dots + Q_0(\rho(n))(\mathcal{Z}_1M_1 + \mathcal{Y}_0M_0). \end{aligned}$$

Esto completa la inducción y prueba el lema. \square

En lo que sigue mostraremos que los coeficientes \tilde{G}_j de (2.3.59) se extienden a una única función racional. Para esto debemos refinar la Condición 1 sobre la función matricial ρ .

Condición 2. Para cada $\nu \in \mathbb{N}_0$ y $x \in \mathbb{N}_0$, la matriz de Vandermonde en bloques de la Condición 1 es invertible para $k_0 = \nu, k_1 = \nu + 1, \dots, k_x = \nu + x$.

Lema 2.3.11. Sea $M \in \hat{\mathcal{F}}_L(P)$. Entonces existe un único operador $\tau(M) \in \mathcal{F}_L^d(Q)$ tal que

$$(\tau(M) \cdot Q_x)(\rho(n)) = (Q_x \cdot \sigma(D))(\rho(n)), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{N}_0,$$

donde $D = \psi(M)$, y

$$(\tau(M) \cdot Q_x)(\rho(n)) = (P_n(0)^{-1} M P_n(0) \cdot Q_x)(\rho(n)), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.3.60)$$

Más aún τ es invertible y $\tau^{-1} : \tilde{M} \mapsto P_n(0) \tilde{M} P_n(0)^{-1}$.

Demostración. El primer paso de la demostración consiste en mostrar que las sucesiones \tilde{G}_j dadas en (2.3.59) se extienden de forma única a funciones racionales de n . Sea $k \in \mathbb{N}_0$. Por el Lema 2.3.10 y la relación (2.3.59), tenemos

$$\sum_{j=-t}^s \tilde{G}_j(n) \rho(n+j)^k = \sum_{i=0}^k \left[\sum_{j=-t}^s \tilde{G}_j(n) Q_i(\rho(n+j)) \right] M_i = \sum_{i=0}^k (Q_i \cdot \sigma(D))(\rho(n)) M_i,$$

para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq t}$. En otras palabras, para todo $k \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\tilde{G}_{-t}(n) \rho(n-t)^k + \dots + \tilde{G}_s(n) \rho(n+s)^k = R_k(n),$$

donde $R_k(n)$ es una función matricial cuyas entradas son funciones racionales de n . Si consideramos $k = 0, \dots, s+t$, la ecuación anterior da el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \tilde{G}_{-t}(n) & \dots & \tilde{G}_s(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \rho(n-t) & \dots & \rho(n-t)^{s+t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & \rho(n+s) & \dots & \rho(n+s)^{s+t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0(n) & \dots & R_{s+t}(n) \end{pmatrix}, \quad (2.3.61)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq t}$. Como la matriz de Vandermonde en bloques en (2.3.61) es invertible por la Condición 2 con $\nu = n-t$ y $x = s+t$, existen funciones racionales matriciales de n unívocamente determinadas que coinciden con $\tilde{G}_{-t}, \dots, \tilde{G}_s$ para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq t}$. Denotaremos también a estas funciones como $\tilde{G}_{-t}, \dots, \tilde{G}_s$. Más aún, estas funciones son las únicas con esta propiedad.

Ahora introducimos un operador en diferencias $\tau(M) \in \mathcal{N}_N^d$ del siguiente modo:

$$\tau(M) = \sum_{j=-t}^s \tilde{G}_j(n) \delta^j,$$

luego (2.3.59) da

$$(\tau(M) \cdot Q_x)(\rho(n)) = (Q_x \cdot \sigma(D))(\rho(n)), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_{\geq t}.$$

Como para cada $x \in \mathbb{N}_0$ fijo, $(\tau(M) \cdot Q_x)(\rho(n))$ y $(Q_x \cdot \sigma(D))(\rho(n))$ son funciones racionales de n y coinciden en $\mathbb{N}_{\geq t}$, concluimos que

$$(\tau(M) \cdot Q_x)(\rho(n)) = (Q_x \cdot \sigma(D))(\rho(n)) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{C},$$

por lo tanto $\tau(M) \in \mathcal{F}_L^d(Q)$ y $\sigma(D) \in \mathcal{F}_R^d(Q)$. Para la segunda parte del lema, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} (\tau(M) \cdot Q_x)(\rho(n)) &= (Q_x \cdot \sigma(D))(\rho(n)) = P_n(0)^{-1}(P_n \cdot D)(x)\Upsilon(x)^{-1} \\ &= P_n(0)^{-1}(M \cdot P_n)(x)\Upsilon(x)^{-1} = (P_n(0)^{-1}MP_n(0) \cdot Q_x)(\rho(n)), \end{aligned}$$

en donde hemos aplicado (2.3.58) en la segunda igualdad. La expresión de la inversa de τ es directa. \square

Finalmente, denotamos $\hat{\mathcal{F}}_L^d(Q) = \tau(\hat{\mathcal{F}}_L(P))$, de modo que

$$\hat{\mathcal{F}}_R^d(Q) = \sigma(\hat{\mathcal{F}}_R(P)), \quad \hat{\mathcal{F}}_L(P) = \psi^{-1}(\hat{\mathcal{F}}_R(P)), \quad \hat{\mathcal{F}}_L^d(Q) = \tau(\hat{\mathcal{F}}_L(P)).$$

Hemos visto que $\tau : \hat{\mathcal{F}}_L(P) \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_L^d(Q)$ y $\sigma : \hat{\mathcal{F}}_R(P) \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_R^d(Q)$ son isomorfismos de álgebras.

Teorema 2.3.12. *Sean P_n y Q_n dos familias duales y sean σ y τ como en (2.3.56) y Lema 2.3.11 respectivamente, entonces el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{F}}_L(P) & \xrightarrow{\psi} & \hat{\mathcal{F}}_R(P) \\ \downarrow \tau & & \downarrow \sigma \\ \hat{\mathcal{F}}_L^d(Q) & \xleftarrow{\psi^d} & \hat{\mathcal{F}}_R^d(Q) \end{array}$$

Demostración. El teorema es consecuencia del Lema 2.3.11. Para todo $M \in \hat{\mathcal{F}}_L(P)$ tenemos que $\tau(M) \cdot Q_x = Q_x \cdot \sigma(\psi(M))$. Entonces (2.3.52) implica que

$$\tau(M) = \psi^d(\sigma(\psi(M))).$$

Esto completa la demostración. \square

El último resultado de la sección relaciona los operadores adjuntos en el álgebra $\hat{\mathcal{F}}_R(P)$ con respecto al producto interno matricial $\langle \cdot, \cdot \rangle$ con el operador adjunto en el álgebra dual $\hat{\mathcal{F}}_R^d(Q)$ con respecto al producto interno matricial $\langle \cdot, \cdot \rangle^d$.

Corolario 2.3.13. *Sea $D \in \hat{\mathcal{F}}_R(P)$ y asumimos que existe $D^\dagger \in \hat{\mathcal{F}}_R(P)$. Sea $M = \psi^{-1}(D)$. Entonces*

$$\tau(M)^\dagger = \tau(M^\dagger), \quad \sigma(D)^\dagger = \sigma(D^\dagger).$$

Demostración. Como $D, D^\dagger \in \hat{\mathcal{F}}_R(P)$ tenemos que $M, M^\dagger \in \hat{\mathcal{F}}_L(P)$. Suponiendo $M = \sum_{j=-t}^s G_j(n)\delta^j$, y tomando $\tau(M) \in \hat{\mathcal{F}}_L^d(Q)$ como en el Lema 2.3.11, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \tau(M) \cdot Q_x, Q_y \rangle^d &= \sum_{n=0}^{\infty} (\tau(M) \cdot Q_x)(\rho(n))^* U(n) Q_y(\rho(n)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=\max(-t, -n)}^s Q_x(\rho(n+j))^* P_{n+j}(0)^* G_j(n)^* (P_n(0)^*)^{-1} U(n) Q_y(\rho(n)) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=-t}^{\min(s, r)} Q_x(\rho(r))^* U(r) P_r(0)^{-1} \mathcal{H}_r G_j(r-j)^* \mathcal{H}_{r-j}^{-1} P_{r-j}(0) Q_y(\rho(r-j)) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} Q_x(\rho(r))^* U(r) (\tau(M^\dagger) \cdot Q_y)(\rho(r)) = \langle Q_x, \tau(M^\dagger) \cdot Q_y \rangle^d, \end{aligned}$$

en donde hemos usado la expresión para la adjunta de M en (2.2.14). Esto demuestra la primer fórmula del corolario. Para la segunda fórmula tenemos que

$$\langle Q_x \cdot \sigma(D), Q_y \rangle^d = \langle \tau(M) \cdot Q_x, Q_y \rangle^d = \langle Q_x, \tau(M^\dagger) \cdot Q_y \rangle^d = \langle Q_x, Q_y \cdot \sigma(D^\dagger) \rangle^d,$$

para todo $x, y \in \mathbb{N}_0$. Esto concluye la prueba del corolario. \square

El resto del capítulo está dedicado a la construcción de una familia adecuada de polinomios ortogonales matriciales y sus familias duales.

2.4. Polinomios matriciales de tipo Charlier

En esta sección comenzamos con un peso matricial W que satisface el sistema más simple de ecuaciones Pearson débiles de la forma (2.2.15), es decir una única ecuación en diferencias. Tomamos $F_j(x) = \mathcal{A}$, $\tilde{F}_j(x)^* = x\mathcal{B}$, donde \mathcal{A} y \mathcal{B} son matrices constantes invertibles, y asumimos que W satisface

$$\mathcal{A}W(x-1) = W(x)\mathcal{B}x. \quad (2.4.62)$$

Iterando esta ecuación obtenemos

$$W(x) = \mathcal{A}^x \frac{W(0)}{x!} \mathcal{B}^{-x}, \quad x \in \mathbb{N}_0. \quad (2.4.63)$$

Como W es un peso matricial, es definido positivo por definición, pese a que esto no sea directo de (2.4.63). Sin embargo, aún no asumiremos nada extra sobre \mathcal{A} y \mathcal{B} . Los operadores D y D^\dagger , introducidos en la ecuación (2.2.16) y la Proposición 2.2.3, están ahora dados por

$$P \cdot D(x) = P(x+1)\mathcal{A}, \quad P \cdot D^\dagger(x) = P(x-1)\mathcal{B}^*x. \quad (2.4.64)$$

Los correspondientes operadores en el álgebra de Fourier a izquierda $\mathcal{F}_L(P)$ de la Proposición 2.2.4 pueden ser escritos en términos de las normas cuadradas de los polinomios ortogonales mónicos.

Proposición 2.4.1. *Sea $(P_n)_n$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto al peso matricial definido positivo W de la forma (2.4.63). Entonces los polinomios satisfacen las siguientes ecuaciones*

$$P_n \cdot D = M \cdot P_n, \quad M = \mathcal{A} + \mathcal{H}_n \mathcal{B} \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \delta^{-1}, \quad (2.4.65)$$

$$P_n \cdot D^\dagger = M^\dagger \cdot P_n, \quad M^\dagger = \mathcal{B}^* \delta + \mathcal{H}_n \mathcal{A}^* \mathcal{H}_n^{-1}, \quad (2.4.66)$$

donde D y D^\dagger están dados en (2.4.64).

Demostración. Estamos en la situación de la Proposición 2.2.4, con $s = 0$ y $t = 1$. Esto significa que tenemos *ladder equations* y que los operadores que actúan a izquierda son de la forma

$$M = G_0(n) + G_{-1}(n)\delta^{-1}, \quad M^\dagger = \mathcal{H}_n G_{-1}(n+1)^* \mathcal{H}_{n+1}^{-1} \delta + \mathcal{H}_n G_0(n)^* \mathcal{H}_n^{-1},$$

donde $G_0(n) = \langle P_n \cdot D, P_n \rangle \mathcal{H}_n^{-1}$ y $G_{-1}(n) = \langle P_n \cdot D, P_{n-1} \rangle \mathcal{H}_{n-1}^{-1}$. Estos coeficientes pueden ser determinados directamente mirando los coeficientes directores en las *ladder relations*. Primero, el coeficiente de x^n en la relación $P_n \cdot D = M \cdot P_n$ nos da

$$G_0(n) = \mathcal{A}.$$

Por otro lado, el coeficiente de x^{n+1} en $P_n \cdot D^\dagger = M^\dagger \cdot P_n$ nos da $\mathcal{B}^* = \mathcal{H}_n G_{-1}(n+1)^* \mathcal{H}_{n+1}^{-1}$ y luego

$$G_{-1}(n) = \mathcal{H}_n \mathcal{B} \mathcal{H}_{n-1}^{-1},$$

dado que las normas cuadradas son matrices autoadjuntas. \square

Observación 40. Las ecuaciones (2.4.65), (2.4.66) pueden ser escritas como

$$\psi(M) = D, \quad \psi(M^\dagger) = D^\dagger.$$

En consecuencia el isomorfismo de las álgebras de Fourier ψ preserva la operación \dagger en la subálgebra generada por M , M^\dagger y I .

Corolario 2.4.2. *Sea W un peso matricial de la forma (2.4.63) y sea $(P_n)_n$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos. Entonces el coeficiente B_n de la relación de recurrencia (1.5.23) está dado por*

$$B_n = (\mathcal{B}^*)^{-1} \mathcal{H}_n \mathcal{A}^* \mathcal{H}_n^{-1} + \mathcal{H}_n (\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{B}^*, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.4.67)$$

y

$$B_0 = (\mathcal{B}^*)^{-1} \mathcal{H}_0 \mathcal{A}^* \mathcal{H}_0^{-1}. \quad (2.4.68)$$

Demostración. Si reemplazamos $x = 0$ en la ladder relation $P_n \cdot D^\dagger = M^\dagger \cdot P_n$ y aplicamos (2.4.66), obtenemos

$$0 = P_{n+1}(0) + (\mathcal{B}^*)^{-1} \mathcal{H}_n \mathcal{A}^* \mathcal{H}_n^{-1} P_n(0). \quad (2.4.69)$$

Observemos que la matriz $P_n(0)$ es invertible para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Esto es trivial si $P_0(0) = I$. Para $n \geq 1$ sigue de (2.4.69) y del hecho de que $(\mathcal{B}^*)^{-1} \mathcal{H}_n \mathcal{A}^* \mathcal{H}_n^{-1}$ es invertible para todo $n \geq 1$. Tomamos $x = 0$ en la relación de recurrencia de tres términos (1.5.23) para $n \geq 1$:

$$P_{n+1}(0) = -B_n P_n(0) - C_n P_{n-1}(0).$$

Eliminando $P_{n+1}(0)$ obtenemos

$$B_n = (\mathcal{B}^*)^{-1} \mathcal{H}_n \mathcal{A}^* \mathcal{H}_n^{-1} - \mathcal{H}_n \mathcal{H}_{n-1}^{-1} P_{n-1}(0) P_n(0)^{-1},$$

y aplicando (2.4.69) nuevamente

$$B_n = (\mathcal{B}^*)^{-1} \mathcal{H}_n \mathcal{A}^* \mathcal{H}_n^{-1} + \mathcal{H}_n (\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{B}^*.$$

Para $n = 0$ la relación de recurrencia de tres términos tiene un término menos. La expresión correspondiente puede ser obtenida de forma análoga. \square

Corolario 2.4.3. *Los polinomios ortogonales mónicos $(P_n)_n$ con respecto al peso matricial definido positivo W de la forma (2.4.63) satisfacen la siguiente ecuación en diferencias de segundo orden en x ,*

$$\begin{aligned} P_n(x+1) \mathcal{A} + (\mathcal{H}_n \mathcal{B} (\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{B}^* - x \mathcal{H}_n \mathcal{B} \mathcal{H}_n^{-1} - \mathcal{A}) P_n(x) \\ + x \mathcal{H}_n \mathcal{B} \mathcal{H}_n^{-1} (\mathcal{B}^*)^{-1} P_n(x-1) \mathcal{B}^* = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.4.70)$$

Observación 41. Observemos que (2.4.70) es una relación mixta. Aparecen matrices multiplicando a izquierda y a derecha.

Demostración. Comenzamos con la relación de recurrencia de tres términos (1.5.23)

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_nP_n(x) + C_nP_{n-1}(x),$$

y eliminamos P_{n+1} y P_{n-1} aplicando las *ladder relations* de la Proposición 2.4.1

$$\begin{aligned} P_{n-1}(x) &= \mathcal{H}_{n-1}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{H}_n^{-1}(P_n(x+1)\mathcal{A} - \mathcal{A}P_n(x)), \\ P_{n+1}(x) &= (\mathcal{B}^*)^{-1}(P_n(x-1)\mathcal{B}^*x - \mathcal{H}_n\mathcal{A}^*\mathcal{H}_n^{-1}P_n(x)). \end{aligned}$$

Luego de reemplazar estas expresiones en la relación de recurrencia de tres términos y multiplicando por $\mathcal{H}_n\mathcal{B}\mathcal{H}_n^{-1}$ a izquierda, obtenemos

$$\begin{aligned} P_n(x+1)\mathcal{A} + (\mathcal{H}_n\mathcal{B}\mathcal{H}_n^{-1}(B_n - x - (\mathcal{B}^*)^{-1}\mathcal{H}_n\mathcal{A}^*\mathcal{H}_n^{-1}) - \mathcal{A})P_n(x) \\ + x\mathcal{H}_n\mathcal{B}\mathcal{H}_n^{-1}(\mathcal{B}^*)^{-1}P_n(x-1)\mathcal{B}^* = 0. \end{aligned}$$

Finalmente aplicamos el Corolario 2.4.2, la ecuación se simplifica y obtenemos (2.4.70). \square

2.4.1. Peso matricial de tipo Charlier simétrico

Consideramos el peso W de la forma (2.4.63) con la restricción extra que $\mathcal{B} = (a\mathcal{A}^*)^{-1}$, para un escalar positivo a . De esta forma, derivamos una relación en recurrencias en n de segundo orden que solo involucra las normas cuadradas. Nuestro peso se simplifica a

$$W(x) = \frac{a^x}{x!} \mathcal{A}^x W(0) (\mathcal{A}^*)^x, \quad a > 0. \quad (2.4.71)$$

A partir de ahora asumimos que $W(0)$ es definida positiva de forma tal que cada matriz $W(x)$ de la forma (2.4.71) es definida positiva.

Teorema 2.4.4. *Sea W como en (2.4.71). Entonces las normas cuadradas de los polinomios ortogonales mónicos satisfacen*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n &= a^2 \mathcal{A}^2 \mathcal{H}_{n-1} (\mathcal{A}^*)^2 - a^2 \mathcal{A} \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{A}^* \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{A}^* \\ &+ a \mathcal{A} \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{A}^* + \mathcal{A} \mathcal{H}_{n-1} (\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-2}^{-1} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{A}^*, \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \end{aligned} \quad (2.4.72)$$

y

$$\mathcal{H}_1 = a^2 \mathcal{A}^2 \mathcal{H}_0 \mathcal{A}^* (\mathcal{A}^*)^2 - a^2 \mathcal{A} \mathcal{H}_0 \mathcal{A}^* \mathcal{H}_0^{-1} \mathcal{A} \mathcal{H}_0 \mathcal{A}^* + a \mathcal{A} \mathcal{H}_0 \mathcal{A}^*. \quad (2.4.73)$$

Demostración. Recordemos que el operador x actúa a derecha, y notemos que $[D, x] = -D$. Entonces, por el significado del isomorfismo ψ de (2.2.12) obtenemos $[M, \mathcal{L}] = -M$, recordando que $\psi^{-1}(x) = \mathcal{L}$ de (2.2.13). Introducimos la notación $\beta(n) = \frac{1}{a} \mathcal{H}_n (\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-1}^{-1}$, y haciendo una cuenta directa obtenemos

$$\begin{aligned} [M, \mathcal{L}] &= (\beta(n) - \beta(n+1)) + [\mathcal{A}, B_n] \\ &+ (\beta(n)B_{n-1} - B_n\beta(n)) + [\mathcal{A}, C_n]\delta^{-1} \\ &+ (\beta(n)C_{n-1} - C_n\beta(n-1))\delta^{-2}. \end{aligned} \quad (2.4.74)$$

Ahora aplicando (2.4.67) para $n \geq 2$ obtenemos que el coeficiente de δ^{-1} en la ecuación (2.4.74) es

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{A}^* \mathcal{H}_{n-1}^{-1} + \frac{1}{a^2} \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-2} \mathcal{H}_{n-2}^{-1} \mathcal{A}^{-1} \\ & - \frac{1}{a^2} \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-1}^{-1} - \mathcal{H}_n \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{A}, \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \end{aligned} \quad (2.4.75)$$

y para $n = 1$ aplicamos (2.4.67) y (2.4.68), este coeficiente es

$$\mathcal{H}_1(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_0^{-1} \mathcal{A} \mathcal{H}_0 \mathcal{A}^* \mathcal{H}_0^{-1} - \frac{1}{a^2} \mathcal{H}_1(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_0^{-1} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{H}_1(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_0^{-1} - \mathcal{H}_1 \mathcal{H}_0^{-1} \mathcal{A}. \quad (2.4.76)$$

Ahora usamos $[M, \mathcal{L}] = -M$, para equiparar la expresión en (2.4.75) a $-\beta(n)$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{A}^* \mathcal{H}_{n-1}^{-1} + \frac{1}{a^2} \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-2} \mathcal{H}_{n-2}^{-1} \mathcal{A}^{-1} - \mathcal{H}_n \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{A} \\ & - \frac{1}{a^2} \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-1}^{-1} = -\frac{1}{a} \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-1}^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \end{aligned} \quad (2.4.77)$$

y (2.4.76) a $-\beta(1)$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_1(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_0^{-1} \mathcal{A} \mathcal{H}_0 \mathcal{A}^* \mathcal{H}_0^{-1} - \frac{1}{a^2} \mathcal{H}_1(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_0^{-1} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{H}_1(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_0^{-1} - \mathcal{H}_1 \mathcal{H}_0^{-1} \mathcal{A} \\ & = -\frac{1}{a} \mathcal{H}_1(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_0^{-1}. \end{aligned} \quad (2.4.78)$$

Multiplicamos (2.4.77) y (2.4.78) a derecha por \mathcal{H}_{n-1} y \mathcal{H}_0 respectivamente, y a izquierda por $a\mathcal{A}^*\mathcal{H}_n^{-1}$ y $a\mathcal{A}^*\mathcal{H}_1^{-1}$. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} & a\mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{A}^* + \frac{1}{a} (\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-2}^{-1} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{H}_{n-1} \\ & - a\mathcal{A}^* \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{H}_{n-1} - \frac{1}{a} \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-1} = -I \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \end{aligned}$$

y para $n = 1$

$$\mathcal{H}_0^{-1} \mathcal{A} \mathcal{H}_0 \mathcal{A}^* - a\mathcal{A}^* \mathcal{H}_0^{-1} \mathcal{A} \mathcal{H}_0 - \frac{1}{a} \mathcal{H}_0^{-1} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{H}_1(\mathcal{A}^*)^{-1} = -I.$$

Ahora aislando \mathcal{H}_n obtenemos

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_n = a^2 \mathcal{A}^2 \mathcal{H}_{n-1} (\mathcal{A}^*)^2 - a^2 \mathcal{A} \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{A}^* \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{A}^* \\ & + a\mathcal{A} \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{A}^* + \mathcal{A} \mathcal{H}_{n-1} (\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_{n-2}^{-1} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{A}^*, \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \end{aligned}$$

y para $n = 1$

$$\mathcal{H}_1 = a^2 \mathcal{A}^2 \mathcal{H}_0 \mathcal{A}^* (\mathcal{A}^*)^2 - a^2 \mathcal{A} \mathcal{H}_0 \mathcal{A}^* \mathcal{H}_0^{-1} \mathcal{A} \mathcal{H}_0 \mathcal{A}^* + a\mathcal{A} \mathcal{H}_0 \mathcal{A}^*.$$

Esto completa la prueba del teorema. \square

Observación 42. Verifiquemos que el resultado anterior se cumple en el caso escalar. Tenemos $\mathcal{A} = 1$ y las ecuaciones (2.4.72) y (2.4.73) son

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{H}_{n-2}^{-1} \mathcal{H}_{n-1} + a\mathcal{H}_{n-1}, \quad \mathcal{H}_1 = a\mathcal{H}_0.$$

Se puede verificar que las normas cuadradas de los polinomios mónicos de Charlier $\mathcal{H}_n = n! a^n e^a$ satisfacen estas relaciones.

Observación 43. El peso simétrico (2.4.71) nos permite simplificar la ecuación en diferencias en x para los P_n del Corolario 2.4.3 del siguiente modo

$$P_n(x+1)\mathcal{A} + \left(\frac{1}{a^2} \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-2} \mathcal{H}_{n-1}^{-1} \mathcal{A}^{-1} - \frac{x}{a} \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_n^{-1} - \mathcal{A} \right) P_n(x) + \frac{x}{a} \mathcal{H}_n(\mathcal{A}^*)^{-1} \mathcal{H}_n^{-1} \mathcal{A} P_n(x-1) \mathcal{A}^{-1} = 0. \quad (2.4.79)$$

Si consideramos la correspondiente relación de recurrencia en x para $P_n(x)\mathcal{A}^x$, obtendríamos una relación de recurrencia con coeficientes multiplicando a los P_n solo por la izquierda. Pero dejaremos esto para la Sección 2.7 en la cual podremos simplificarla aún más.

Observación 44. En esta sección, asumimos que \mathcal{A} y \mathcal{B} son dos matrices arbitrarias invertibles. En particular, pueden ser tomadas como un múltiplo de una matriz diagonal. En ese caso, el peso matricial es reducible, ver por ejemplo [120] y [89], y los polinomios ortogonales matriciales se reducen esencialmente a suma directas de polinomios escalares de Charlier.

2.5. Familia monoparamétrica de polinomios matriciales de tipo Charlier

En esta sección especializamos el peso matricial (2.4.71). Esto nos permite dar una expresión explícita para la norma \mathcal{H}_0 , la cual por el Teorema 2.4.4 determina todas las normas cuadradas. La elección está motivada por trabajos previos en familias de polinomios ortogonales matriciales de tipo Gegenbauer, Laguerre y Hermite en [5, 82, 90].

Sea $\lambda \in \mathbb{N}_0$ y sean $A, T^{(\lambda)}$ dos matrices constantes definidas por

$$A_{j,k} = \begin{cases} \frac{\mu_j}{\mu_{j-1}}, & j = k + 1 \\ 0, & j \neq k + 1 \end{cases}, \quad T^{(\lambda)} = \text{diag}(\delta_1^{(\lambda)} \dots \delta_N^{(\lambda)}),$$

con $\delta_j^{(\lambda)} > 0$ y $\mu_j > 0$. Tomamos $\mathcal{A} = (A + I)$ y $W^{(\lambda)}(0) = (I + A)^\lambda T^{(\lambda)} (I + A^*)^\lambda$ en (2.4.71) de forma tal que tenemos una familia de pesos matriciales

$$W^{(\lambda)}(x) = \frac{a^x}{x!} (I + A)^{x+\lambda} T^{(\lambda)} (I + A^*)^{x+\lambda}, \quad a > 0. \quad (2.5.80)$$

Esta familia tiene $2N+1$ parámetros libres, digamos $\lambda, \mu_1, \dots, \mu_N, \delta_1^{(\lambda)}, \dots, \delta_N^{(\lambda)}$. El parámetro $\lambda \in \mathbb{N}_0$ está en correspondencia con la Sección 2.2.5. Sin embargo, λ solo tendrá un rol relevante en la próxima sección. El producto interno correspondiente será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle^{(\lambda)}$ como en (2.2.19).

Ahora somos capaces de calcular explícitamente la norma $\mathcal{H}_0^{(\lambda)}$ y encontrar una descomposición LDU de todas las normas cuadradas, pese a que la matriz diagonal en esta descomposición aún no puede ser determinada explícitamente. Antes de hacer esto, introducimos un polinomio matricial triangular inferior unipotente que será útil en lo que viene.

2.5.1. Propiedades de la matriz L

Recordemos algunos hechos clásicos sobre los polinomios de Charlier escalares, ver por ejemplo [35, 95]. El hecho más básico es su representación hipergeométrica (2.1.2), las rela-

ciones de ortogonalidad (2.1.1) y la función generatriz

$$e^t \left(1 - \frac{t}{a}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^{(a)}(x)}{n!} t^n, \quad |t| < |a|. \quad (2.5.81)$$

Necesitaremos los *shift operators*

$$c_n^{(a)}(x+1) = c_n^{(a)}(x) - \frac{n}{a} c_{n-1}^{(a)}(x), \quad c_{n+1}^{(a)}(x) = c_n^{(a)}(x) - \frac{x}{a} c_n^{(a)}(x-1), \quad (2.5.82)$$

y la ecuación en diferencias de segundo orden en x

$$ac_n^{(a)}(x+1) - (x+a)c_n^{(a)}(x) + xc_n^{(a)}(x-1) = -nc_n^{(a)}(x). \quad (2.5.83)$$

También necesitaremos el siguiente resultado un poco menos estándar.

Proposición 2.5.1. *Para $a \neq 0$ los polinomios escalares de Charlier satisfacen la siguiente convolución*

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{c_{n-m}^{(a)}(x)}{(n-m)!} \frac{c_m^{(-a)}(-x)}{m!} = \delta_{n,0}.$$

Demostración. Es claro que la suma es igual a 1 para $n = 0$. Para $n \geq 1$ tomamos una copia de la función generatriz en (2.5.81) pero con los signos cambiados de t , x y a

$$e^{-t} \left(1 - \frac{t}{a}\right)^{-x} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{c_m^{(-a)}(-x)}{m!} t^m,$$

y la multiplicamos por la función generatriz ordinaria para obtener 1. Entonces tenemos

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{c_n^{(a)}(x)}{n!} \frac{c_m^{(-a)}(-x)}{m!} t^{n+m}.$$

Haciendo el cambio de variables $s = n + m$ en la suma

$$1 = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m=0}^s (-1)^m \frac{c_{s-m}^{(a)}(x)}{(s-m)!} \frac{c_m^{(-a)}(-x)}{m!} t^s,$$

y viendo que los coeficientes con potencias positivas de t deben anularse, obtenemos el resultado deseado. \square

Consideramos el siguiente polinomio matricial triangular inferior

$$L(x)_{j,k} = \frac{\mu_j}{\mu_k} (-a)^{j-k} \frac{c_{j-k}^{(a)}(x)}{(j-k)!}, \quad j \geq k, \quad L(x)_{j,k} = 0, \quad j < k, \quad (2.5.84)$$

donde $c_{j-k}^{(a)}$ es el polinomio de Charlier escalar de grado $j - k$. La matriz L considerada en este caso es análoga a las que aparecen relacionadas a los polinomios ortogonales de tipo Gegenbauer, Laguerre y Hermite en [82, 86, 90]. Ver también [19] para una matriz triangular inferior que involucra polinomios de Jacobi.

Lema 2.5.2. *Las siguientes propiedades de L se satisfacen.*

1. $\det(L(x)) = 1$.
2. $L(x+1) = L(x)(I+A)$.
3. $L(x)A = AL(x)$.
4. $L(x) = L_0(I+A)^x = (I+A)^x L_0$, $x \in \mathbb{Z}$.

Aquí usamos la notación $L_0 = L(0)$.

Demostración. (1) y (3) siguen automáticamente de la definición. (2) sigue de la *forward shift equation* (2.5.82) y (4) sigue iterando (2). \square

Observación 45. Asumiendo que $\lambda \in \mathbb{Z}$, por (4) del Lema 2.5.2 tenemos que $L(x+\lambda) = (I+A)^\lambda L(x)$. Por lo tanto podemos reescribir el peso matricial (2.5.80) como:

$$\begin{aligned} W^{(\lambda)}(x) &= \frac{a^x}{x!} L_0^{-1} L(x+\lambda) T^{(\lambda)} L(x+\lambda)^* (L_0^*)^{-1} \\ &= \frac{a^x}{x!} L_0^{-1} (I+A)^\lambda L(x) T^{(\lambda)} L(x)^* (I+A^*)^\lambda (L_0^*)^{-1}. \end{aligned}$$

La prueba del resultado siguiente es análoga a la dada en [19] para polinomios de Jacobi.

Lema 2.5.3. *La inversa de L es la matriz triangular inferior*

$$L(x)_{j,k}^{-1} = \frac{\mu_j}{\mu_k} a^{j-k} \frac{c_{j-k}^{(-a)}(-x)}{(j-k)!}, \quad j \geq k, \quad L(x)_{j,k}^{-1} = 0, \quad j < k.$$

Demostración. Denotemos a la matriz del enunciado del lema por $K(x)$. Observemos que las entradas bajo la diagonal principal de $L(x)K(x)$ son inmediatamente 0 por definición. Nos queda $(L(x)K(x))_{j,k}$ para $j \geq k$ que está dada por

$$\sum_{\ell=k}^j \frac{\mu_j}{\mu_\ell} (-a)^{j-\ell} \frac{c_{j-\ell}^{(a)}(x)}{(j-\ell)!} \frac{\mu_\ell}{\mu_k} a^{\ell-k} \frac{c_{\ell-k}^{(-a)}(-x)}{(\ell-k)!} = (-1)^{j-k} a^{j-k} \frac{\mu_j}{\mu_k} \sum_{\ell=k}^j (-1)^{k-\ell} \frac{c_{j-\ell}^{(a)}(x)}{(j-\ell)!} \frac{c_{\ell-k}^{(-a)}(-x)}{(\ell-k)!}.$$

Haciendo un shift en el índice de la primera suma en la última ecuación, obtenemos una suma como en la Proposición 2.5.1, entonces nos dará 1 si $j = k$ y 0 si no. Esto completa la prueba. \square

La inversa de L tiene una estructura similar e involucra polinomios de Charlier con parámetros negativos. Este hecho es compatible con resultados previos [19, 82, 86, 90]. Para la matriz L considerada en este capítulo, esto es esencialmente una consecuencia de la función generatriz de los polinomios escalares de Charlier, tal como en los casos de Hermite y Laguerre [82, 90].

Concluimos esta subsección introduciendo otra matriz útil, $J = \text{diag}(1, \dots, N)$. En lo que sigue utilizamos el corchete $[A, B] = AB - BA$.

Lema 2.5.4. *J satisface las siguientes ecuaciones, para $k \in \mathbb{Z}$.*

1. $[J, A] = A$.
2. $[J, (I+A)^k] = kA(I+A)^{k-1} = k(I+A)^k - k(I+A)^{k-1}$.

3. $[J, L(x)] = xA(I + A)^{-1}L(x) - aAL(x)$.
4. $(I + A)^k J(I + A)^{-k} = J - kA(I + A)^{-1}$.
5. $L(x)^{-1} J L(x) = J - aA + xA(I + A)^{-1}$.

Demostración. (1) sigue inmediatamente de la definición. (2) sigue iterando (1) y del hecho que $A(I + A)^{-1} = I - (I + A)^{-1}$. Para (3) podemos utilizar la *backward shift equation* en (2.5.82) para mostrar que

$$[J, L(x)] = -aAL(x) - aAL(x - 1),$$

y entonces el resultado sigue del Lema 2.5.3. Finalmente (4) sigue de (2) y (5) de (3). \square

2.5.2. Descomposición LDU de las normas

En esta subsección daremos una descomposición LDU de las normas cuadradas $\mathcal{H}_n^{(\lambda)}$. Para esto necesitamos encontrar una expresión para la primer norma cuadrada $\mathcal{H}_0^{(\lambda)}$. La expresión de la matriz L en términos de polinomios escalares de Charlier juega un rol fundamental en esta prueba. Luego usaremos las relaciones de recurrencia no lineales del Teorema 2.4.4, para extender esta descomposición a todas las $\mathcal{H}_n^{(\lambda)}$.

Proposición 2.5.5. *El momento 0 del peso (2.5.80), tiene la siguiente factorización LDU*

$$\mathcal{H}_0^{(\lambda)} = L_0^{-1}(I + A)^\lambda \mathcal{D}_0^{(\lambda)} (I + A^*)^\lambda (L_0^*)^{-1}, \quad (2.5.85)$$

donde $\mathcal{D}_0^{(\lambda)}$ es una matriz diagonal con entradas

$$(\mathcal{D}_0^{(\lambda)})_{jj} = \mu_j^2 a^j e^a \sum_{\ell=1}^j \frac{\delta_\ell^{(\lambda)}}{\mu_\ell^2} \frac{a^{-\ell}}{(j-\ell)!}. \quad (2.5.86)$$

Demostración. Aplicando la Observación 45, tenemos que

$$\mathcal{H}_0^{(\lambda)} = \sum_{x=0}^{\infty} W^{(\lambda)}(x) = L_0^{-1}(I + A)^\lambda \left(\sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} L(x) T^{(\lambda)} L(x)^* \right) (I + A^*)^\lambda (L_0^*)^{-1}, \quad (2.5.87)$$

lo que nos da (2.5.85) tomando $\mathcal{D}_0^{(\lambda)}$ como en (2.5.87). Ahora podemos tomar ventaja de las relaciones de ortogonalidad de los polinomios escalares de Charlier. Mirando entrada a entrada, tenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_0^{(\lambda)})_{j,k} &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} \sum_{\ell=1}^{\min(j,k)} (-a)^{j+k-2\ell} \frac{\mu_j}{\mu_\ell} \frac{c_{j-\ell}^{(a)}(x)}{(j-\ell)!} \delta_\ell^{(\lambda)} \frac{\mu_k}{\mu_\ell} \frac{c_{k-\ell}^{(a)}(x)}{(k-\ell)!} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\min(j,k)} \frac{\mu_j}{\mu_\ell} \frac{(-a)^{j+k-2\ell} \delta_\ell^{(\lambda)}}{(j-\ell)!(k-\ell)!} \frac{\mu_k}{\mu_\ell} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} c_{j-\ell}^{(a)}(x) c_{k-\ell}^{(a)}(x) \\ &= \delta_{j,k} \sum_{\ell=1}^j a^{j-\ell} \frac{\mu_j^2}{\mu_\ell^2} \frac{e^a \delta_\ell^{(\lambda)}}{(j-\ell)!}. \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado las relaciones de ortogonalidad (2.1.1). \square

Corolario 2.5.6. *Las normas cuadradas de los polinomios ortogonales mónicos $(P_n^{(\lambda)})_n$ con respecto al peso (2.5.80) tienen la siguiente descomposición LDU*

$$\mathcal{H}_n^{(\lambda)} = L_0^{-1}(I + A)^{n+\lambda} \mathcal{D}_n^{(\lambda)} (I + A^*)^{n+\lambda} (L_0^*)^{-1},$$

donde $\mathcal{D}_n^{(\lambda)}$ es una matriz diagonal definida positiva que satisface la recurrencia

$$\mathcal{D}_n^{(\lambda)} = a^2 A \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)} A^* - a^2 \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)} A^* (\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1} A \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)} + a \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)} + \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)} (\mathcal{D}_{n-2}^{(\lambda)})^{-1} \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)}, \quad (2.5.88)$$

para $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, y

$$\mathcal{D}_1^{(\lambda)} = a^2 A \mathcal{D}_0^{(\lambda)} A^* - a^2 \mathcal{D}_0^{(\lambda)} A^* (\mathcal{D}_0^{(\lambda)})^{-1} A \mathcal{D}_0^{(\lambda)} + a \mathcal{D}_0^{(\lambda)}. \quad (2.5.89)$$

Demostración. Comencemos definiendo

$$\mathcal{D}_n^{(\lambda)} = L_0 (I + A)^{-n-\lambda} \mathcal{H}_n^{(\lambda)} (I + A^*)^{-n-\lambda} L_0^*,$$

y veamos por inducción que son diagonales. Notemos que el caso $n = 0$ fue dado en la Proposición 2.5.5. Demostraremos primero que satisfacen la relación en recurrencias en n dada en (2.5.88) y (2.5.89). Para $n = 1$ aplicamos el resultado con $n = 1$ del Teorema 2.4.4 y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1^{(\lambda)} &= L_0 (I + A)^{-\lambda-1} \mathcal{H}_1^{(\lambda)} (I + A^*)^{-\lambda-1} L_0^* \\ &= a^2 (I + A) \mathcal{D}_0^{(\lambda)} (I + A^*) - a^2 \mathcal{D}_0^{(\lambda)} (I + A^*) (\mathcal{D}_0^{(\lambda)})^{-1} (I + A) \mathcal{D}_0^{(\lambda)} + a \mathcal{D}_0^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos (2.5.89). Similarmente para $n \geq 2$ aplicamos el Teorema 2.4.4 para mostrar que

$$\begin{aligned} L_0 (I + A)^{-\lambda-n} \mathcal{H}_n^{(\lambda)} (I + A^*)^{-\lambda-n} L_0^* &= a^2 (I + A) \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)} (I + A^*) + \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)} (\mathcal{D}_{n-2}^{(\lambda)})^{-1} \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)} \\ &\quad - a^2 \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)} (I + A^*) (\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1} (I + A) \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)} + a \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)}, \end{aligned}$$

y luego expandimos $(I + A)$ nuevamente para obtener (2.5.88).

Hemos mostrado que $\mathcal{D}_0^{(\lambda)}$ es diagonal en la Proposición 2.5.5. Debido a la forma subdiagonal de A , sigue de (2.5.89) que $\mathcal{D}_1^{(\lambda)}$ es también diagonal. El mismo razonamiento vale para $n \geq 2$ y (2.5.88). Esto completa la prueba. \square

2.5.3. Ecuación en diferencias de segundo orden

En esta subsección daremos un operador en diferencias de segundo orden que tiene a los polinomios $P_n^{(\lambda)}$ como autofunciones. Observemos que los operadores D y D^\dagger tienen una forma más específica debido a que estamos trabajando con el peso específico (2.5.80),

$$D = \eta(I + A), \quad D^\dagger = \eta^{-1} \frac{x}{a} (I + A)^{-1}. \quad (2.5.90)$$

El operador $D + D^\dagger \in \mathcal{F}_R(P)$ es un operador autoadjunto. Es un hecho conocido, ver [8], que un operador en diferencias de segundo orden autoadjunto que preserva el grado de los polinomios tiene a la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales como autofunciones. Sin embargo, sigue de (2.5.90) que $D + D^\dagger$ no preserva el grado de los polinomios. Teniendo esto en cuenta, construimos un segundo operador autoadjunto.

Proposición 2.5.7. *Consideremos el peso matricial $W^{(\lambda)}$ como en (2.5.80). Entonces el operador*

$$\mathfrak{J}^{(\lambda)} = J + (x + \lambda)(I + A)^{-1}, \quad (2.5.91)$$

es un operador autoadjunto con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle^{(\lambda)}$, i.e

$$\langle P \cdot \mathfrak{J}^{(\lambda)}, Q \rangle^{(\lambda)} = \langle P, Q \cdot \mathfrak{J}^{(\lambda)} \rangle^{(\lambda)}$$

para todos P y Q polinomios matriciales.

Demostración. Aplicando el Lema 2.5.4 obtenemos

$$\begin{aligned} JW^{(\lambda)}(x) &= J(I + A)^{x+\lambda}T^{(\lambda)}(I + A^*)^{x+\lambda} \\ &= (I + A)^{x+\lambda}T^{(\lambda)}J(I + A^*)^{x+\lambda} + (x + \lambda)W^{(\lambda)}(x) - (x + \lambda)(I + A)^{-1}W^{(\lambda)}(x) \\ &= W^{(\lambda)}(x)J - (x + \lambda)(I + A)^{-1}W^{(\lambda)}(x) + W^{(\lambda)}(x)(x + \lambda)(I + A^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Esto implica $\mathfrak{J}^{(\lambda)}(x)W^{(\lambda)}(x) = W^{(\lambda)}(x)\mathfrak{J}^{(\lambda)}(x)^*$, que es una ecuación de Pearson débil (2.2.15) para $\ell = m = 0$, y $F_0(x) = \tilde{F}_0(x) = \mathfrak{J}^{(\lambda)}(x)$. Por lo tanto la Proposición 2.2.3 implica que $\mathfrak{J}^{(\lambda)}$ es un operador autoadjunto. \square

Observación 46. $\mathfrak{J}^{(\lambda)}$ es un operador de orden cero que actúa multiplicando por $J + (x + \lambda)(I + A)^{-1}$ a derecha, ver Definición 2.2.1. En lo que queda del capítulo denotaremos a este operador $\mathfrak{J}^{(\lambda)}$. Sin embargo, cuando deseemos referirnos a su (único) coeficiente polinomial, escribiremos $\mathfrak{J}^{(\lambda)}(x)$.

En la prueba de la Proposición 2.5.7, encontramos la ecuación de Pearson débil

$$\mathfrak{J}^{(\lambda)}(x)W^{(\lambda)}(x) = W^{(\lambda)}(x)\mathfrak{J}^{(\lambda)}(x)^*.$$

Tal como en la Proposición 2.2.4 esto implica que $\mathfrak{J}^{(\lambda)} \in \mathcal{F}_R(P)$. Es claro de la definición que $\mathfrak{J}^{(\lambda)}$ no preserva el grado de los polinomios. Esto nos motiva a considerar el siguiente operador en diferencias de segundo orden autoadjunto

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^{(\lambda)} &= aD - \mathfrak{J}^{(\lambda)} + aD^\dagger \\ &= \eta a(I + A) - J - (x + \lambda)(I + A)^{-1} + \eta^{-1}x(I + A)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.5.92)$$

dado que los términos que aumentan el grado de los polinomios se cancelan.

Teorema 2.5.8. *Los polinomios ortogonales mónicos con respecto a $W^{(\lambda)}$ en (2.5.80) satisfacen*

$$P_n^{(\lambda)} \cdot \mathfrak{D}^{(\lambda)} = \Gamma_n^{(\lambda)} P_n^{(\lambda)}, \quad \Gamma_n^{(\lambda)} = a(I + A) - J - (n + \lambda)(I + A)^{-1}. \quad (2.5.93)$$

Demostración. Como el operador $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$ es autoadjunto y preserva el grado de los polinomios, este tiene a $P_n^{(\lambda)}$ como autofunciones, ver [8]. Podemos encontrar el autovalor $\Gamma_n^{(\lambda)}$ mirando los coeficientes directores de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} P_n^{(\lambda)} \cdot \mathfrak{D}^{(\lambda)}(x) &= P_n^{(\lambda)}(x + 1)a(I + A) - P_n^{(\lambda)}(x)J - P_n^{(\lambda)}(x)x(I + A)^{-1} \\ &\quad - P_n^{(\lambda)}(x)\lambda(I + A)^{-1} + P_n^{(\lambda)}(x - 1)x(I + A)^{-1} \\ &= (a(I + A) - J - \lambda(I + A)^{-1} - n(I + A)^{-1})x^n + \dots \end{aligned}$$

Esto completa la prueba del teorema. \square

Observación 47. El peso matricial $W^{(\lambda)}$ está estrechamente relacionado a uno de los ejemplos de [8]. Tomando $\lambda = 0$ y considerando una matriz triangular superior A , podemos identificar el operador en diferencias $\mathfrak{D}^{(0)}(x)$ con el que aparece en [8].

Observación 48. Como consecuencia del teorema anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\mathfrak{J}^{(\lambda)}) &= a\psi^{-1}(D) + a\psi^{-1}(D^\dagger) - \psi^{-1}(\mathfrak{D}^{(\lambda)}) = aM + aM^\dagger - \Gamma_n^{(\lambda)} \\ &= (I + A)^{-1}\delta + \left(J + (n + \lambda)(I + A)^{-1} + a\mathcal{H}_n^{(\lambda)}(I + A^*)(\mathcal{H}_n^{(\lambda)})^{-1} \right) \\ &\quad + \mathcal{H}_n^{(\lambda)}(I + A^*)^{-1}(\mathcal{H}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1}\delta^{-1}. \end{aligned}$$

En las Secciones 2.8 y 2.9 veremos que la ecuación $\psi^{-1}(\mathfrak{J}^{(\lambda)}) \cdot P_n = P_n \cdot \mathfrak{J}^{(\lambda)}$ funcionará como una relación de recurrencia de tres términos alternativa.

2.5.4. Las entradas de los polinomios matriciales de tipo Charlier

En esta subsección escribiremos las entradas de los polinomios mónicos $(P_n^{(\lambda)})_n$ explícitamente en términos de polinomios de Charlier escalares. La expresión involucra ciertos coeficientes que serán descritos en detalle en la Sección 2.7. Primero definimos un polinomio matricial auxiliar

$$R_n^{(\lambda)}(x) = L_0(I + A)^{-n-\lambda} P_n^{(\lambda)}(x)(I + A)^{\lambda+x},$$

para el cual la correspondiente ecuación (2.5.93) es diagonal. Notemos que como A es una matriz nilpotente, $R_n^{(\lambda)}$ es un polinomio en x .

Proposición 2.5.9. *Las entradas de $R_n^{(\lambda)}(x)$ están dadas por*

$$\left(R_n^{(\lambda)}(x) \right)_{j,k} = \xi_{j,k,n}^{(\lambda)} c_{n+j-k}^{(a)}(x), \quad n + j - k \geq 0, \quad (2.5.94)$$

y son iguales a 0 para $n + j - k < 0$. Las $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ son independientes de x .

Demostración. Aplicando el Lema 2.5.4 podemos mostrar que (2.5.93) para este nuevo polinomio se convierte en

$$R_n^{(\lambda)}(x) (\eta a I - (J + (x + \lambda)I) + \eta^{-1} x I) = ((a - n - \lambda)I - J) R_n^{(\lambda)}(x).$$

Mirando entrada a entrada obtenemos

$$a \left(R_n^{(\lambda)}(x + 1) \right)_{j,k} - (x + a) \left(R_n^{(\lambda)}(x) \right)_{j,k} + x \left(R_n^{(\lambda)}(x - 1) \right)_{j,k} = -(n + j - k) \left(R_n^{(\lambda)}(x) \right)_{j,k}.$$

Esta es la ecuación en diferencias (2.5.83) que satisfacen los polinomios escalares de Charlier $c_{n+j-k}^{(a)}(x)$ y, como $R_n^{(\lambda)}$ es un polinomio en x , esto determina la dependencia de x de las entradas salvo un múltiplo constante que denotaremos $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$. \square

Observación 49. Si usamos la autodualidad de los polinomios escalares de Charlier en (2.5.94) para valores genéricos de n obtenemos la siguiente relación dual para las entradas de los polinomios $R_n^{(\lambda)}(x)$:

$$(\xi_{j,k,n}^{(\lambda)})^{-1} \left(R_n^{(\lambda)}(x + j - k) \right)_{j,k} = (\xi_{j,k,x}^{(\lambda)})^{-1} \left(R_x^{(\lambda)}(n + j - k) \right)_{j,k}, \quad j, k = 1, \dots, N.$$

Esta es una relación dual de la forma (2.1.4). Sin embargo, el grado de $(R_n^{(\lambda)})_{j,k}$ no es en general igual a n .

En la Sección 2.7 seremos capaces de determinar $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ y por lo tanto tendremos expresiones explícitas para los $P_n^{(\lambda)}$ como la del siguiente corolario.

Corolario 2.5.10. *Las entradas de los polinomios ortogonales mónicos están dadas por*

$$\left(P_n^{(\lambda)}(x)\right)_{jk} = \sum_{\ell=1}^j \sum_{s=1}^{(n+\ell) \wedge N} \sum_{t=k}^s \frac{\mu_j \mu_s}{\mu_k \mu_\ell} \frac{(-1)^{t-k} a^{j+s-\ell-k} \xi_{\ell,s,n}^{(\lambda)}}{(j-\ell)!(s-t)!(t-k)!} c_{j-\ell}^{(-a)} (n+\lambda) c_{n+\ell-s}^{(a)}(x) c_{s-t}^{(-a)}(-x-\lambda),$$

donde $(n+\ell) \wedge N$ denota $\min((n+\ell), N)$.

Demostración. Para tener toda la dependencia de x en términos de polinomios de Charlier escalares, multiplicamos por $L_0^{-1}L_0$ a derecha. Entonces tenemos

$$P_n^{(\lambda)}(x) = L(-n-\lambda)^{-1} R_n^{(\lambda)}(x) L(x+\lambda)^{-1} L_0. \quad (2.5.95)$$

Luego solo resta juntar todas las entradas matriciales de (2.5.84), (2.5.94) y Lema 2.5.3. \square

Observación 50. Los factores de L^{-1} son responsables de los polinomios escalares de Charlier con parámetro negativo $c^{(-a)}$. Algo similar ocurre con las entradas de los polinomios ortogonales matriciales de tipo Hermite [82, Theorem 3.13] y tipo Gegenbauer [86, Theorem 3.4]. En estos casos las expresiones análogas de (2.5.95) no tienen el factor dependiente de n a izquierda, pero tienen el factor dependiente de x a derecha.

2.6. *Shift operators* y relación de recurrencia para los polinomios matriciales de tipo Charlier

El objetivo de esta sección es construir una familia de pesos matriciales $W^{(\lambda)}$ con $\lambda \in \mathcal{V} = \mathbb{N}_0$, de forma tal que satisfagan una ecuación de Pearson fuerte (2.2.20). En consecuencia, obtendremos una familia de pesos matriciales con *shift operators* explícitos cuyas normas cuadradas y relación de recurrencia de tres términos pueden ser dadas explícitamente. Estos resultados serán el ingrediente principal de la Sección 2.8, en donde describimos las entradas de $P_n^{(\lambda)}$ en términos de polinomios escalares de Charlier y polinomios escalares dual Hahn. Para esto, necesitamos imponer condiciones en los parámetros μ_i y $\delta_i^{(\lambda)}$. Asumimos que existen números reales $d^{(\lambda)} \neq 0$ y $c^{(\lambda)}$ tales que:

$$\frac{\delta_i^{(\lambda+1)}}{\delta_i^{(\lambda)}} - \frac{\delta_{i+1}^{(\lambda+1)}}{\delta_{i+1}^{(\lambda)}} = -\frac{d^{(\lambda)}a}{2}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (2.6.96)$$

$$\frac{\mu_i^2}{\mu_{i-1}^2} \frac{\delta_{i-1}^{(\lambda+1)}}{\delta_i^{(\lambda)}} - \frac{\mu_{i+1}^2}{\mu_i^2} \frac{\delta_i^{(\lambda+1)}}{\delta_{i+1}^{(\lambda)}} = d^{(\lambda)}i + c^{(\lambda)}, \quad i = 2, \dots, N-1. \quad (2.6.97)$$

Observemos que sistemas de ecuaciones no lineales similares fueron obtenidos para los casos de polinomios ortogonales matriciales de tipo Hermite y Laguerre, ver [82, 90].

2.6.1. Shift operators

En esta subsección estableceremos condiciones suficientes para que se satisfagan las hipótesis del Teorema 2.2.5 y por lo tanto obtendremos *shift operators* explícitos para la familia de pesos matriciales $W^{(\lambda)}$. Primero necesitamos la siguiente observación.

Observación 51. Dada $M \in M_N(\mathbb{C})$ tenemos que

$$\begin{aligned} ((A^* + I)^{-x} M (A^* + I)^x) \cdot \Delta &= (A^* + I)^{-x-1} M (A^* + I)^{x+1} - (A^* + I)^{-x} M (A^* + I)^x \\ &= (A^* + I)^{-x-1} [M, A^*] (A^* + I)^x. \end{aligned} \quad (2.6.98)$$

Si $P(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$ es un polinomio matricial de grado dos, entonces

$$A_2 = \frac{1}{2}(P \cdot \Delta^2)(x), \quad A_1 = (P \cdot \Delta)(0) - A_2.$$

Teorema 2.6.1. *Sea W un peso matricial como en (2.5.80) tal que (2.6.96) y (2.6.97) se satisfacen. Sean $\Phi^{(\lambda)}$ y $\Psi^{(\lambda)}$ dadas por*

$$\Phi^{(\lambda)}(x) = W^{(\lambda)}(x)^{-1} W^{(\lambda+1)}(x), \quad \Psi^{(\lambda)}(x) = W^{(\lambda)}(x)^{-1} (W^{(\lambda+1)} \cdot \Delta)(x-1).$$

Entonces $\Phi^{(\lambda)}$ es un polinomio matricial de grado a lo sumo dos y $\Psi^{(\lambda)}$ es un polinomio matricial de grado a lo sumo uno. Más aún, tenemos que

$$\Phi^{(\lambda)}(x) = x^2 \mathcal{K}_2^{(\lambda)} + x \mathcal{K}_1^{(\lambda)} + \mathcal{K}_0^{(\lambda)}, \quad \Psi^{(\lambda)}(x) = x \mathcal{J}_1^{(\lambda)} + \mathcal{J}_0^{(\lambda)},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2^{(\lambda)} &= -\frac{d^{(\lambda)}}{2} A^* (A^* + I)^{-1}, & \mathcal{K}_1^{(\lambda)} &= \frac{d^{(\lambda)}}{2} (2J - aA^* - (2\lambda + 1)A^* (A^* + I)^{-1}) + c^{(\lambda)}, \\ \mathcal{K}_0^{(\lambda)} &= (A^* + I)^{-\lambda} (T^{(\lambda)})^{-1} (A + I) T^{(\lambda+1)} (A^* + I)^{\lambda+1}, \\ \mathcal{J}_1^{(\lambda)} &= \mathcal{K}_2^{(\lambda)} + \mathcal{K}_1^{(\lambda)} - \frac{1}{a} (A^* + I)^{-\lambda-1} (T^{(\lambda)})^{-1} T^{(\lambda+1)} (A^* + I)^{\lambda+1}, & \mathcal{J}_0^{(\lambda)} &= \mathcal{K}_0^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

Demostración. Dividiremos la prueba en tres partes.

Parte 1: Probemos primero que $\Phi^{(\lambda)}$ es un polinomio de grado a lo sumo dos. Tenemos

$$\Phi^{(\lambda)}(x) = (W^{(\lambda)}(x))^{-1} W^{(\lambda+1)}(x) = (A^* + I)^{-x-\lambda} (T^{(\lambda)})^{-1} (A + I) T^{(\lambda+1)} (A^* + I)^{x+\lambda+1}. \quad (2.6.99)$$

Por lo tanto, $\Phi^{(\lambda)}$ es un polinomio matricial. Escribimos

$$M^{(\lambda)} = M_1^{(\lambda)} + M_2^{(\lambda)}, \quad M_1^{(\lambda)} = (T^{(\lambda)})^{-1} A T^{(\lambda+1)}, \quad M_2^{(\lambda)} = (T^{(\lambda)})^{-1} T^{(\lambda+1)},$$

de modo que

$$\Phi^{(\lambda)}(x) = (A^* + I)^{-x-\lambda} M^{(\lambda)} (A^* + I)^{x+\lambda+1}. \quad (2.6.100)$$

Como $\Phi^{(\lambda)}$ es un polinomio, es suficiente chequear que $\Phi^{(\lambda)} \cdot \Delta^2$ es constante. Si aplicamos el operador Δ a (2.6.100), por (2.6.98) obtenemos

$$(\Phi^{(\lambda)} \cdot \Delta)(x) = (A^* + I)^{-x-\lambda-1} [M^{(\lambda)}, A^*] (A^* + I)^{x+\lambda+1}. \quad (2.6.101)$$

Aplicando el operador Δ y (2.6.98) nuevamente, obtenemos

$$(\Phi^{(\lambda)} \cdot \Delta^2)(x) = (A^* + I)^{-x-\lambda-2} [[M^{(\lambda)}, A^*], A^*] (A^* + I)^{x+\lambda+1}. \quad (2.6.102)$$

Usando las relaciones no lineales (2.6.96) obtenemos

$$[M_1^{(\lambda)}, A^*] = d^{(\lambda)}J + c^{(\lambda)}, \quad [M_2^{(\lambda)}, A^*] = -\frac{d^{(\lambda)}a}{2}A^*. \quad (2.6.103)$$

Por lo tanto

$$[[M^{(\lambda)}, A^*], A^*] = d^{(\lambda)}[J, A^*] = -d^{(\lambda)}A^*,$$

de modo que (2.6.102) se convierte en

$$(\Phi^{(\lambda)} \cdot \Delta^2)(x) = -d^{(\lambda)}A^*(A^* + I)^{-1}. \quad (2.6.104)$$

En conclusión, obtenemos que $\Phi^{(\lambda)}$ es un polinomio de grado menor o igual a dos.

Parte 2: Probemos que $\Psi^{(\lambda)}$ es un polinomio de grado a lo sumo uno. Aplicando la definición de $W^{(\lambda)}$, $\Phi^{(\lambda)}$ y $M_2^{(\lambda)}$ obtenemos

$$\Psi^{(\lambda)}(x) = (W^{(\lambda)}(x))^{-1}(W^{(\lambda+1)} \cdot \Delta)(x-1) = \Phi^{(\lambda)}(x) - \frac{x}{a}(A^* + I)^{-x-\lambda}M_2^{(\lambda)}(A^* + I)^{x+\lambda}. \quad (2.6.105)$$

Por lo tanto, $\Psi^{(\lambda)}$ es un polinomio matricial. Para probar que el grado de $\Psi^{(\lambda)}$ es a lo sumo uno, mostraremos que $\Psi^{(\lambda)} \cdot \Delta^2 = 0$. Aplicando la regla de Leibniz (2.2.9) para Δ en el segundo término del lado derecho de (2.6.105) resulta

$$\begin{aligned} \left(-\frac{x}{a}(I + A^*)^{-x-\lambda}M_2^{(\lambda)}(I + A^*)^{x+\lambda}\right) \Delta &= -\frac{1}{a}(I + A^*)^{-x-\lambda-1}M_2^{(\lambda)}(I + A^*)^{x+\lambda+1} \\ &\quad - \frac{x}{a}(I + A^*)^{-x-\lambda-1}[M_2^{(\lambda)}, A^*](I + A^*)^{x+\lambda}, \end{aligned}$$

y usando (2.6.98) y (2.6.103) obtenemos

$$(\Psi^{(\lambda)} \cdot \Delta)(x) = (\Phi^{(\lambda)} \cdot \Delta)(x) - \frac{1}{a}(A^* + 1)^{-x-\lambda-1}M_2^{(\lambda)}(A^* + 1)^{x+\lambda+1} + \frac{xd^{(\lambda)}}{2}A^*(A^* + 1)^{-1}. \quad (2.6.106)$$

Aplicando Δ en (2.6.106) junto con (2.6.98), (2.6.103) y (2.6.104) obtenemos

$$(\Psi^{(\lambda)} \cdot \Delta^2)(x) = (\Phi^{(\lambda)} \cdot \Delta^2)(x) + \frac{d^{(\lambda)}}{2}A^*(A^* + 1)^{-1} + \frac{d^{(\lambda)}}{2}A^*(A^* + 1)^{-1} = 0.$$

Concluimos que el grado de $\Psi^{(\lambda)}$ es estrictamente menor a dos.

Parte 3: De la Parte 1 y Parte 2 obtenemos que

$$\Phi^{(\lambda)}(x) = x^2\mathcal{K}_2^{(\lambda)} + x\mathcal{K}_1^{(\lambda)} + \mathcal{K}_0^{(\lambda)}, \quad \Psi^{(\lambda)}(x) = x\mathcal{J}_1^{(\lambda)} + \mathcal{J}_0^{(\lambda)},$$

para ciertas matrices $\mathcal{K}_2^{(\lambda)}, \mathcal{K}_1^{(\lambda)}, \mathcal{K}_0^{(\lambda)}$ y $\mathcal{J}_1^{(\lambda)}, \mathcal{J}_0^{(\lambda)}$. La expresión de $\mathcal{K}_2^{(\lambda)}$ sigue directamente de (2.6.104) y la Observación 51. La expresión de $\mathcal{K}_0^{(\lambda)}$ y $\mathcal{J}_0^{(\lambda)}$ sigue evaluando (2.6.99) y (2.6.105) en $x = 0$. Si reemplazamos $x = 0$ en (2.6.101) obtenemos

$$\mathcal{K}_1^{(\lambda)} = (\Phi^{(\lambda)} \cdot \Delta)(0) - \mathcal{K}_2^{(\lambda)}.$$

Ahora la expresión de $\mathcal{K}_1^{(\lambda)}$ sigue directamente de (2.6.103) y Lema 2.5.4. Finalmente si tomamos $x = 0$ en (2.6.106) y usamos la Observación 51, obtenemos

$$\mathcal{J}_1^{(\lambda)} = (\Psi^{(\lambda)} \cdot \Delta)(0) = \mathcal{K}_2^{(\lambda)} + \mathcal{K}_1^{(\lambda)} - \frac{1}{a}(A^* + 1)^{-\lambda-1}M_2^{(\lambda)}(A^* + 1)^{\lambda+1}.$$

Esto completa la prueba del teorema. \square

Observación 52. A partir del Teorema 2.2.5 obtenemos los *shift operators* Δ y $S^{(\lambda)}$

$$P_n^{(\lambda)} \cdot \Delta = nP_{n-1}^{(\lambda+1)}, \quad P_{n-1}^{(\lambda+1)} \cdot S^{(\lambda)} = G_n^{(\lambda)} P_n^{(\lambda)}, \quad (2.6.107)$$

donde $G_n^{(\lambda)} = -(n-1)\mathcal{K}_2^{(\lambda)*} - \mathcal{J}_1^{(\lambda)*}$. Además por el Teorema 2.2.6 los polinomios ortogonales matriciales satisfacen

$$(P_n^{(\lambda)} \cdot S^{(\lambda-1)} \Delta)(x) = (n+1)G_{n+1}^{(\lambda-1)} P_n^{(\lambda)}(x), \quad (P_n^{(\lambda)} \cdot \Delta S^{(\lambda)})(x) = nG_n^{(\lambda)} P_n^{(\lambda)}(x).$$

En lo que sigue usamos la descomposición LDU de las normas cuadradas $\mathcal{H}_n^{(\lambda)}$ para dar una diagonalización explícita de $G_n^{(\lambda)}$.

Lema 2.6.2. *Las matrices $G_n^{(\lambda)}$ para los polinomios matriciales de tipo Charlier se diagonalizan de la siguiente forma*

$$\frac{1}{n+1} G_{n+1}^{(\lambda-1)} = L_0^{-1} (I+A)^{n+\lambda} \mathcal{D}_n^{(\lambda)} (\mathcal{D}_{n+1}^{(\lambda-1)})^{-1} (I+A)^{-n-\lambda} L_0. \quad (2.6.108)$$

Demostración. Tal como lo hemos visto en la ecuación (2.2.27), las normas cuadradas de los polinomios ortogonales mónicos $P_n^{(\lambda)}$ se relacionan por

$$n\mathcal{H}_{n-1}^{(\lambda+1)} = G_n^{(\lambda)} \mathcal{H}_n^{(\lambda)}. \quad (2.6.109)$$

A partir de la descomposición LDU de las normas cuadradas $\mathcal{H}_n^{(\lambda)}$ del Corolario 2.5.6 obtenemos

$$\mathcal{H}_n^{(\lambda)} = L_0^{-1} (I+A)^{n+\lambda} \mathcal{D}_n^{(\lambda)} (I+A^*)^{n+\lambda} (L_0^*)^{-1}, \quad (2.6.110)$$

para una matriz diagonal definida positiva $\mathcal{D}_n^{(\lambda)}$. De (2.6.109) y (2.6.110) obtenemos (2.6.108). \square

2.6.2. Expresiones explícitas de las normas

Dado que las ecuaciones (2.6.96) y (2.6.97) son no lineales, no podemos encontrar todas las soluciones en general. En lo que resta del capítulo consideraremos un conjunto de soluciones de estas ecuaciones, que es lo suficientemente simple para describir en detalle los operadores en diferencias, normas cuadradas y las entradas de los polinomios ortogonales mónicos. Estas fórmulas serán el ingrediente principal para describir los polinomios de Charlier duales en la Sección 2.8. Tomamos $d^{(\lambda)} = 1$, $c^{(\lambda)} = -\frac{(N+1)}{2}$, y los parámetros de la forma

$$\left(\frac{\mu_j}{\mu_k} \right)^2 = a^{k-j} \frac{(N-k)!}{(N-j)!}, \quad \delta_k^{(\lambda)} = \left(\frac{a}{2} \right)^\lambda \frac{(\lambda+k-1)!}{(k-1)!}. \quad (2.6.111)$$

Es sencillo verificar que μ_j 's y $\delta_j^{(\lambda)}$ son soluciones de (2.6.96) y (2.6.97). Algunos productos de matrices que serán útiles en esta sección son

$$\begin{aligned} \left(T^{(\lambda+1)} (T^{(\lambda)})^{-1} \right)_{jj} &= \frac{\delta_j^{(\lambda+1)}}{\delta_j^{(\lambda)}} = \frac{a}{2} (j+\lambda), & T^{(\lambda+1)} (T^{(\lambda)})^{-1} &= \frac{a}{2} (J+\lambda I), \\ \left(T^{(\lambda+1)} A^* (T^{(\lambda)})^{-1} \right)_{j,j+1} &= \frac{\delta_j^{(\lambda+1)}}{\delta_{j+1}^{(\lambda)}} \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} = \frac{\sqrt{a}}{2} j \sqrt{N-j}, & T^{(\lambda+1)} A^* (T^{(\lambda)})^{-1} &= \frac{a}{2} J A^*. \end{aligned} \quad (2.6.112)$$

Teorema 2.6.3. Con los parámetros dados en (2.6.111) las matrices diagonales $\mathcal{D}_n^{(\lambda)}$ están dadas por

$$(\mathcal{D}_n^{(\lambda)})_{jj} = (-1)^j e^a n! a^n \left(\frac{a}{2}\right)^\lambda \frac{(\lambda + N - j)!}{(j-1)!} \frac{(-N - \lambda - n)_j}{(\lambda + n + 1)_{N-j+1}}, \quad (2.6.113)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Más aún, la siguiente recurrencia se satisface

$$\mathcal{D}_n^{(\lambda)} = n! 2^n \mathcal{D}_0^{(\lambda+n)} \left(\Lambda_n^{(\lambda)}\right)^{-1}, \quad \Lambda_n^{(\lambda)} = \prod_{m=1}^n (N + \lambda + m - J). \quad (2.6.114)$$

Demostración. Comenzamos considerando el caso $n = 0$. Si reemplazamos los parámetros (2.6.111) en (2.5.86) obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_0^{(\lambda)})_{j,j} &= e^a \sum_{k=1}^j \left(\frac{\mu_j}{\mu_k}\right)^2 \frac{a^{j-k}}{(j-k)!} \delta_k^{(\lambda)} = e^a \left(\frac{a}{2}\right)^\lambda \frac{1}{(N-j)!} \sum_{k=1}^j \frac{(N-k)! (\lambda+k-1)!}{(j-k)! (k-1)!} \\ &= e^a \left(\frac{a}{2}\right)^\lambda \frac{\lambda! (N-1)!}{(N-j)! (j-1)!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1-j, \lambda+1 \\ 1-N \end{matrix}; 1 \right) = e^a \left(\frac{a}{2}\right)^\lambda \lambda! \binom{N+\lambda}{j-1}. \end{aligned} \quad (2.6.115)$$

En la última línea hemos usado un resultado de tipo Chu-Vandermonde.

El Lema 2.6.2 implica que

$$\mathcal{D}_n^{(\lambda)} (\mathcal{D}_{n+1}^{(\lambda-1)})^{-1} = \frac{1}{n+1} L_0 (I + A)^{-n-\lambda} G_{n+1}^{(\lambda-1)} (I + A)^{n+\lambda} L_0^{-1}.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 2.2.5 escribimos $G_n^{(\lambda)} = -(n-1) \mathcal{K}_2^{(\lambda)*} - \mathcal{J}_1^{(\lambda)*}$. A su vez tenemos expresiones simples para los coeficientes del Teorema 2.6.1. Con los nuevos parámetros las matrices $\mathcal{K}_2^{(\lambda)}$ y $\mathcal{J}_1^{(\lambda)}$ se simplifican, quedando

$$\mathcal{K}_2^{(\lambda)} = -\frac{1}{2} A^* (A^* + I)^{-1},$$

$$\mathcal{J}_1^{(\lambda)} = \frac{1}{2} (J - aA^* - N - 1 - \lambda - (\lambda+1)A^* (I + A^*)^{-1}).$$

Por lo tanto la única contribución a la diagonal de $\frac{1}{n+1} L_0 (I + A)^{-n-\lambda} G_{n+1}^{(\lambda-1)} (I + A)^{n+\lambda} L_0^{-1}$ está dada por el término $\frac{1}{2} (N + \lambda - J)$. Aplicando propiedades de las matrices J y $L(x)$ y el hecho de que $\mathcal{D}_n^{(\lambda)}$ es una matriz diagonal obtenemos

$$\mathcal{D}_n^{(\lambda)} (\mathcal{D}_{n+1}^{(\lambda-1)})^{-1} = \frac{1}{2(n+1)} (N + \lambda - J). \quad (2.6.116)$$

Iterando esta ecuación obtenemos

$$(\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1} = \frac{1}{n! 2^n} (\mathcal{D}_0^{(\lambda+n)})^{-1} \Lambda_n^{(\lambda)},$$

donde $\Lambda_n^{(\lambda)} = (\lambda + n + N - J) \cdots (\lambda + 2 + N - J) (\lambda + 1 + N - J)$. Entonces $\Lambda_n^{(\lambda)}$ es una matriz diagonal con entradas

$$(\Lambda_n^{(\lambda)})_{i,i} = (\lambda + N - i + 1)_n.$$

Aplicando (2.6.115) y (2.6.114), las entradas de $\mathcal{D}_n^{(\lambda)}$ son

$$(\mathcal{D}_n^{(\lambda)})_{jj} = e^a n! a^n \left(\frac{a}{2}\right)^\lambda \frac{(\lambda + n)!}{(N + \lambda - j + 1)_n} \binom{N + \lambda + n}{j-1}. \quad (2.6.117)$$

Finalmente obtenemos (2.6.113) haciendo una manipulación simple de la expresión (2.6.117). \square

2.6.3. Relación de recurrencia de tres términos para los polinomios matriciales de tipo Charlier

Estamos listos para calcular explícitamente los coeficientes de la relación de recurrencia de tres términos de los polinomios mónicos $(P_n^{(\lambda)})_n$. Estos coeficientes serán escritos en términos de la siguiente matriz triangular superior,

$$\mathcal{A}_\lambda = (N + \lambda - J)^{-1} J A^*. \quad (2.6.118)$$

La matriz \mathcal{A}_λ reaparecerá en la Sección 2.8 en donde jugará, para los polinomios duales, un rol similar al de la matriz A en este contexto.

Teorema 2.6.4. *El coeficiente $C_n^{(\lambda)}$ de la relación de recurrencia de tres términos es*

$$C_n^{(\lambda)} = L_0^{-1} (I + A)^{n+\lambda} \mathcal{D}_n^{(\lambda)} (I + A^*) (\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1} (I + A)^{-n-\lambda+1} L_0, \quad (2.6.119)$$

y el coeficiente $B_n^{(\lambda)}$ de la relación de recurrencia de tres términos es

$$B_n^{(\lambda)} = a L_0^{-1} (I + A)^{n+\lambda} \left((n+1)(I + A) \mathcal{A}_{n+\lambda+1} - n \mathcal{A}_{n+\lambda} (I + A) + I + A + \frac{n}{a} \right) (I + A)^{-\lambda-n} L_0.$$

Demostración. La primer parte es consecuencia de $C_n^{(\lambda)} = \mathcal{H}_n^{(\lambda)} (\mathcal{H}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1}$ y del Corolario 2.5.6. Para la segunda parte, recordemos de (2.2.32) que

$$B_n^{(\lambda)} = n X_1^{(\lambda+n-1)} - (n+1) X_1^{(\lambda+n)} + n,$$

donde $X_1^{(\lambda)}$ es el coeficiente subdirector de $P_1^{(\lambda)}$. Como $X_1^{(\lambda)} = -B_0^{(\lambda)}$, aplicando (2.4.68) y la Proposición 2.5.5 obtenemos

$$B_0^{(\lambda)} = a L_0^{-1} (I + A)^{\lambda+1} \mathcal{D}_0^{(\lambda)} (I + A^*) (\mathcal{D}_0^{(\lambda)})^{-1} (I + A)^{-\lambda} L_0.$$

Aplicando (2.6.113) obtenemos

$$\frac{(\mathcal{D}_0^{(\lambda)})_{j,j}}{(\mathcal{D}_0^{(\lambda)})_{(j+1),(j+1)}} = \frac{j}{N + \lambda + 1 - j},$$

lo que nos dice que

$$\mathcal{D}_0^{(\lambda)} A^* (\mathcal{D}_0^{(\lambda)})^{-1} = (N + \lambda + I - J)^{-1} J A^* = \mathcal{A}_{\lambda+1}.$$

Por lo tanto tenemos que

$$X_1^{(\lambda)} = -a L_0^{-1} (I + A)^{\lambda+1} (I + \mathcal{A}_{\lambda+1}) (I + A)^{-\lambda} L_0,$$

y esto completa la prueba del teorema. \square

Terminamos esta subsección mostrando que la sucesión de matrices $C_n^{(\lambda)}$ se anula en $n = 0$. Este hecho será crucial en la Sección 2.9.

Corolario 2.6.5. *El coeficiente $C_n^{(\lambda)}$ se extiende a una única función racional en n tal que $C_0^{(\lambda)} = 0$.*

Demostración. Sigue directamente de la expresión de $\mathcal{D}_n^{(\lambda)}$ en (2.6.113) que el lado derecho de (2.6.119) es una función racional de n . Precisamente, tenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_n^{(\lambda)}(\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1})_{j,j} &= \frac{na(\lambda+n)(N+\lambda+n)}{(n+N+\lambda-j)(N+\lambda+n-j+1)}, \\ (\mathcal{D}_n^{(\lambda)}A^*(\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1})_{j,j+1} &= \frac{\mu_j}{\mu_{j-1}} \frac{na(\lambda+n)(N+\lambda-j)(N+\lambda+n)j}{(n+N+\lambda-j)^2(N+\lambda+n-j+1)(N+\lambda+n-j-1)}, \end{aligned}$$

que claramente se anulan en $n = 0$. Como $L_0^{-1}(I+A)^{n+\lambda}$ y $(I+A)^{-n-\lambda+1}L_0$ son polinomios en n , aplicando (2.6.119) concluimos que $C_0^{(\lambda)} = 0$. \square

2.6.4. Relación entre los operadores en diferencias $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$, $\Delta S^{(\lambda)}$ y $S^{(\lambda-1)}\Delta$

A lo largo de este capítulo, hemos mostrado que los polinomios matriciales de Charlier $P_n^{(\lambda)}$ son soluciones de cuatro ecuaciones en diferencias de segundo orden. La ecuación en diferencias del Corolario 2.4.3 involucra multiplicaciones a derecha y a izquierda por matrices no triviales y no será tratada en esta sección.

Tenemos tres operadores en diferencias no triviales $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$, $\Delta S^{(\lambda)}$, $S^{(\lambda-1)}\Delta \in \mathcal{B}_R(P)$, dados respectivamente en (2.5.92) y Teorema 2.2.6. Observemos que los operadores $\Delta S^{(\lambda)}$, $S^{(\lambda-1)}\Delta$ pueden pensarse como transformaciones de Darboux. En el siguiente teorema mostramos que existe una relación lineal entre estos operadores.

Teorema 2.6.6. *Los operadores en diferencias de segundo orden $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$, $\Delta S^{(\lambda)}$, $S^{(\lambda-1)}\Delta$ están relacionados del siguiente modo:*

$$2(\Delta S^{(\lambda)} - S^{(\lambda-1)}\Delta) = (a - N - 2\lambda)I - \mathfrak{D}^{(\lambda)}.$$

Demostración. El operador $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$ fue dado en (2.5.92) y los operadores $\Delta S^{(\lambda)}$, $S^{(\lambda-1)}\Delta$ se construyen usando el Teorema 2.2.5,

$$\begin{aligned} \Delta S^{(\lambda)} &= -\eta\Phi^{(\lambda)*}(x) + 2\Phi^{(\lambda)*}(x) - \Psi^{(\lambda)*}(x) + \eta^{-1} \left(\Psi^{(\lambda)*}(x) - \Phi^{(\lambda)*}(x) \right), \\ S^{(\lambda-1)}\Delta &= -\eta\Phi^{(\lambda-1)*}(x+1) + \Phi^{(\lambda-1)*}(x+1) + \Phi^{(\lambda-1)*}(x) - \Psi^{(\lambda-1)*}(x+1) \\ &\quad + \eta^{-1} \left(\Psi^{(\lambda-1)*}(x) - \Phi^{(\lambda-1)*}(x) \right). \end{aligned} \tag{2.6.120}$$

Con la ayuda de (2.6.112), obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi^{(\lambda)*}(x) &= \frac{a}{2}(I+A)^{x+\lambda+1}(J(I+A^*) + \lambda)(I+A)^{-x-\lambda}, \\ \Phi^{(\lambda)*}(x) - \Psi^{(\lambda)*}(x) &= \frac{x}{2}(I+A)^{x+\lambda}(J + \lambda I)(I+A)^{-x-\lambda}. \end{aligned} \tag{2.6.121}$$

Los coeficientes de η y η^{-1} en $2(\Delta S^{(\lambda)} - S^{(\lambda-1)}\Delta)$ son

$$\begin{aligned} 2 \left(\Phi^{(\lambda-1)*}(x+1) - \Phi^{(\lambda)*}(x) \right) &= -a(I+A), \\ 2 \left(\Psi^{(\lambda)*}(x) - \Phi^{(\lambda)*}(x) - \left(\Psi^{(\lambda-1)*}(x) - \Phi^{(\lambda-1)*}(x) \right) \right) &= -x(I+A)^{-1}, \end{aligned}$$

respectivamente, en donde hemos usado el Lema 2.5.4 en el último paso. Lo anterior concuerda con los correspondientes coeficientes de η^\pm de $-\mathfrak{D}^{(\lambda)}$. Para el término η^0 en $2(\Delta S^{(\lambda)} - S^{(\lambda-1)}\Delta)$, consideramos

$$4\Phi^{(\lambda)*}(x) - 2\Psi^{(\lambda)*}(x) - 2\left(\Phi^{(\lambda-1)*}(x+1) + \Phi^{(\lambda-1)*}(x) - \Psi^{(\lambda-1)*}(x+1)\right),$$

lo que puede ser reorganizado como:

$$\begin{aligned} & 2\left(\Phi^{(\lambda)*}(x) - \Psi^{(\lambda)*}(x) - \left(\Phi^{(\lambda-1)*}(x) - \Psi^{(\lambda-1)*}(x)\right)\right) \\ & \quad + 2\left(\Phi^{(\lambda)*}(x) - \Phi^{(\lambda-1)*}(x+1)\right) + 2\left(\Psi^{(\lambda-1)*}(x+1) - \Psi^{(\lambda-1)*}(x)\right) \\ & = x(I+A)^{-1} + a(I+A) + 2\mathcal{J}_1^{(\lambda-1)*} \\ & = \mathfrak{J}^{(\lambda)} + (a - N - 2\lambda)I. \end{aligned}$$

En la última línea hemos usado (2.5.91) y que el coeficiente director de $\Psi^{(\lambda)}$ se simplifica a

$$2\mathcal{J}_1^{(\lambda)} = J - aA^* - (\lambda+1)A^*(I+A^*)^{-1} - N - 1 - \lambda.$$

Esto completa la demostración. \square

Observación 53. Extensos cálculos simbólicos indican que el peso matricial W es irreducible, ver [120] y [89]. Una prueba de este hecho puede ser realizada de manera similar a la dada en los casos [82, 86, 89, 90].

2.7. Expresiones explícitas de las entradas de los polinomios matriciales de Charlier

En la Sección 2.5.3 vimos que es posible simplificar una ecuación en diferencias para $P_n^{(\lambda)}$ considerando la siguiente modificación de los polinomios

$$R_n^{(\lambda)}(x) = L_0(I+A)^{-n-\lambda}P_n^{(\lambda)}(x)(I+A)^{\lambda+x}. \quad (2.7.122)$$

Recordemos que las entradas de $R_n^{(\lambda)}(x)$ están dadas por

$$R_n^{(\lambda)}(x)_{j,k} = \xi_{j,k,n}^{(\lambda)} c_{n+j-k}^{(a)}(x), \quad (2.7.123)$$

con los $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ independientes de x , ver Proposición 2.5.9. El objetivo de esta sección es dar expresiones explícitas para $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$, lo que además, por el Corolario 2.5.10, nos dará expresiones explícitas para las entradas de los polinomios ortogonales mónicos $P_n^{(\lambda)}$. Los ingredientes principales para esto son dos ecuaciones en diferencias. La primera es la ecuación en diferencias (2.4.79). La segunda es $(P^{(\lambda)} \cdot \Delta S^{(\lambda)})_n = nG_n^{(\lambda)}P_n^{(\lambda)}$, el lado izquierdo de esta ecuación ha sido desarrollado en (2.6.120).

Observación 54. Queremos remarcar que $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ solo ha sido definida para $n+j-k \geq 0$, ver (2.5.94). Es conveniente definir $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)} = 0$ siempre que $j < 1$, $k < 1$, $j > N$, $k > N$ o $n+j-k < 0$.

2.7.1. Una relación de recurrencia en k para $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$

Primero, escribimos $P_n^{(\lambda)} \cdot \Delta S^{(\lambda)} = nG_n^{(\lambda)} P_n^{(\lambda)}$ en términos de $R_n^{(\lambda)}$.

Proposición 2.7.1. *La ecuación en diferencias $(P^{(\lambda)} \cdot \Delta S^{(\lambda)})_n = nG_n^{(\lambda)} P_n^{(\lambda)}$ en términos de $R_n^{(\lambda)}$ como en (2.7.122) está dada por*

$$\begin{aligned} n((N + \lambda + 1)I - J) R_n^{(\lambda)}(x) &= -R_n^{(\lambda)}(x + 1)a(J(I + A^*) + \lambda I) \\ &\quad + R_n^{(\lambda)}(x)(a(I + A)(J(I + A^*) + \lambda I) + x(J + \lambda I)) \\ &\quad - R_n^{(\lambda)}(x - 1)x(I + A)(J + \lambda I). \end{aligned}$$

Demostración. Sigue directamente de (2.7.122), (2.6.116), (2.6.120) y del Lema 2.6.2. \square

En la siguiente proposición mostraremos que la ecuación en diferencias para $R_n^{(\lambda)}$ de la Proposición 2.7.1 induce una relación de recurrencia de tres términos para $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$.

Proposición 2.7.2. *Los coeficientes $\phi_k := \xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ satisfacen la siguiente relación en k :*

$$\begin{aligned} 0 &= (\sqrt{a}(k + \lambda)\sqrt{N - k})\phi_{k+1} \\ &\quad + (j\lambda - n(N + 1 - j) - N - 1 + k(N + j - \lambda + n + 2) - 2k^2)\phi_k \\ &\quad + \left(a^{-\frac{1}{2}}(n + j - k + 1)(k - 1)\sqrt{N - k + 1}\right)\phi_{k-1}, \end{aligned}$$

que vale para $1 \leq k \leq K$ con $K := \min(N, n + j)$.

Demostración. El ingrediente principal de la demostración es la ecuación en diferencias de la Proposición 2.7.1 pero con $x = 0$. Esto se reduce a

$$\begin{aligned} n((N + \lambda + 1)I - J) R_n^{(\lambda)}(0) \\ = -aR_n^{(\lambda)}(1)(J(I + A^*) + \lambda I) + R_n^{(\lambda)}(0)a(I + A)(J(I + A^*) + \lambda I). \end{aligned} \quad (2.7.124)$$

A partir de (2.7.123) obtenemos $R_n^{(\lambda)}(0)_{j,k} = \xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ y $R_n^{(\lambda)}(1)_{j,k} = \xi_{j,k,n}^{(\lambda)} c_{n+j-k}^{(a)}(1) = \xi_{j,k,n}^{(\lambda)} (1 - \frac{n+j-k}{a})$. Para el resto de las matrices involucradas en la ecuación anterior, recordemos que para $1 \leq k \leq N - 1$

$$\begin{aligned} A_{k+1,k} &= \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{N - k}, & (AJ)_{k+1,k} &= \frac{1}{\sqrt{a}}k\sqrt{N - k}, \\ (JA^*)_{k,k+1} &= \frac{1}{\sqrt{a}}(k - 1)\sqrt{N - k + 1}, & (AJA^*)_{k,k} &= \frac{1}{a}(k - 1)(N - k + 1), \end{aligned}$$

donde la expresión de AJA^* valen también para $k = N$. Usamos esto para escribir la entrada (j, k) de (2.7.124) y llegar al resultado deseado. \square

2.7.2. Una relación de recurrencia en j para $\xi_{j,1,n}^{(\lambda)}$

La relación de recurrencia de la Proposición 2.7.2 determina los coeficientes $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ en términos de los valores iniciales $\xi_{j,1,n}^{(\lambda)}$. Para poder encontrar una recurrencia para estos coeficientes, escribimos (2.4.79) en términos de $R_n^{(\lambda)}$.

Proposición 2.7.3. *La ecuación en diferencias (2.4.79) en términos de $R_n^{(\lambda)}$ está dada por*

$$R_n^{(\lambda)}(x+1) + \left(\frac{1}{a^2} \mathcal{D}_n^{(\lambda)}(I+A^*)^{-1}(\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1} - \frac{x}{a} \mathcal{D}_n^{(\lambda)}(I+A^*)^{-1}(\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1} - (I+A) \right) R_n^{(\lambda)}(x) \\ + \frac{x}{a} \mathcal{D}_n^{(\lambda)}(I+A^*)^{-1}(\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1}(I+A)R_n^{(\lambda)}(x-1) = 0.$$

Demostración. Recordemos la descomposición LDU del Corolario 2.5.6 y que $\mathcal{A} = I + A$. El resultado sigue haciendo un cálculo directo. \square

Tal como en la subsección previa, en la siguiente proposición derivamos una relación de recurrencia de tres términos para $\xi_{j,1,n}^{(\lambda)}$ aplicando la Proposición 2.7.3.

Proposición 2.7.4. *Los coeficientes $\psi_j := \xi_{j,1,n}^{(\lambda)}$ satisfacen la siguiente relación de recurrencias en j :*

$$0 = \psi_{j+1} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} j(N+\lambda-j)(n+j)\sqrt{N-j} \right) \\ + \psi_j \left((n+j-1)(N+n+\lambda-j)(N+n+\lambda-j+1) \right. \\ \left. - n(\lambda+n)(N+\lambda+n) + j(N-j)(N+\lambda-j) \right) \\ + \psi_{j-1} \left(\sqrt{a}(N+n+\lambda-j)(N+n+\lambda-j+1)\sqrt{N-(j-1)} \right),$$

para $1 \leq j \leq N$.

Demostración. El ingrediente principal de la demostración es la Proposición 2.7.3 para $x = 0$. Esto se reduce a

$$a\mathcal{D}_n^{(\lambda)}(I+A^*)(\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1}R_n^{(\lambda)}(1) \\ = \left(a\mathcal{D}_n^{(\lambda)}(I+A^*)(\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1}(I+A) - \frac{1}{a}\mathcal{D}_n^{(\lambda)}(\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1} \right) R_n^{(\lambda)}(0). \quad (2.7.125)$$

Como antes, (2.7.123) nos da $R_n^{(\lambda)}(0)_{jk} = \xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ y $R_n^{(\lambda)}(1)_{jk} = \xi_{j,k,n}^{(\lambda)} c_{n+j-k}^{(a)}(1) = \xi_{j,k,n}^{(\lambda)} \left(1 - \frac{n+j-k}{a}\right)$. Para las otras entradas matriciales de la ecuación anterior miramos (2.6.111) para $A_{j+1,j} = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{N-j}$ y (2.6.113) para

$$\left(\mathcal{D}_n^{(\lambda)} \right)_{jj} \left((\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1} \right)_{jj} = \frac{na(N+\lambda+n)(\lambda+n)}{(N+\lambda+n-j)(N+\lambda+n+1-j)}, \\ \left(\mathcal{D}_n^{(\lambda)} \right)_{jj} (A^*)_{j,j+1} \left((\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1} \right)_{j+1,j+1} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{j(N+\lambda-j)\sqrt{N-j}}{(N+\lambda+n-j)(N+\lambda+n+1-j)}.$$

Usamos estas expresiones para las entradas $(j, 1)$ de (2.7.125) y multiplicando por $(N+\lambda+n-j)(N+\lambda+n+1-j)$ llegamos al resultado deseado. \square

2.7.3. Los coeficientes $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ como polinomios dual Hahn

En el paso final para determinar los coeficientes $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$, resolvemos las relaciones de recurrencia de las secciones previas en términos de polinomios dual Hahn. Los polinomios dual Hahn están dados por

$$\mathcal{R}_k(\ell(x); \gamma, \delta, \mathcal{N}) = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -k, -x, x + \gamma + \delta + 1 \\ \gamma + 1, -\mathcal{N} \end{matrix}; 1 \right), \quad k = 0, 1, \dots, \mathcal{N},$$

ver por ejemplo [95].

Proposición 2.7.5. *Sea $K = \min(N, n + j)$ y $\mathcal{K} = \max(N, n + j)$. Entonces para $k \in \{1, \dots, K\}$ tenemos*

$$\begin{aligned} \xi_{j,k,n}^{(\lambda)} &= \xi_{j,1,n}^{(\lambda)} a^{-(k-1)/2} (1-K)_{k-1} \sqrt{\frac{(N-k)!}{(N-1)!}} \\ &\quad \times \mathcal{R}_{k-1}((K-j)(\mathcal{K}-j+\lambda+1); \lambda, \mathcal{K}-K, K-1), \end{aligned}$$

y 0 para $k > K$.

Demostración. Como consecuencia de la Observación 54, $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)} = 0$ cuando $k > K$. Tomamos la Proposición 2.7.2 y sustituimos $\zeta_k = (\lambda + 1)_k a^{k/2} \sqrt{\frac{(N-k-1)!}{(N-1)!} \frac{\xi_{j,k+1,n}^{(\lambda)}}{\xi_{j,1,n}^{(\lambda)}}}$, para llegar a una recurrencia que nos recuerde a una relación de recurrencia de términos para polinomios ortogonales mónicos

$$\begin{aligned} 0 &= \zeta_{k+1} + (-2k^2 + k(j - \lambda + n + N - 2) + j(n + \lambda + 1) - (nN + \lambda + 1)) \zeta_k \\ &\quad + k(k + \lambda)(k - (n + j))(k - N) \zeta_{k-1}, \end{aligned}$$

para $0 \leq k \leq K - 1$. Es fácil verificar, comparando con [95], que ésta es la relación de recurrencia de tres términos para los polinomios mónicos dual Hahn con $\gamma = \lambda$, $\delta = \mathcal{K} - K$, $\mathcal{N} = K - 1$ donde $(K - j)(\mathcal{K} - j + \lambda + 1)$ juega el rol de la variable. Finalmente los polinomios mónicos se relacionan con los polinomios estándares mediante $p_{k-1} = (\lambda + 1)_{k-1} (1 - K)_{k-1} \mathcal{R}_{k-1}$. \square

Proposición 2.7.6. *Para $j \in \{1, \dots, N\}$ tenemos*

$$\xi_{j,1,n}^{(\lambda)} = (-1)^{j-1} \xi_{1,1,n}^{(\lambda)} \sqrt{\frac{(N-1)!}{(N-j)!} \frac{a^{(j-1)/2} (1-N-\lambda-n)_{j-1}}{(j-1)!(1-N-\lambda)_{j-1}}}.$$

Demostración. Tomamos la recurrencia obtenida en la Proposición 2.7.4 y sustituimos $\sigma_j = \frac{j!(n+1)_j(1-N-\lambda)_j}{a^{j/2}(1-N-\lambda-n)_j} \sqrt{\frac{(N-1)!}{(N-j-1)!} \frac{\xi_{j+1,1,n}^{(\lambda)}}{\xi_{1,1,n}^{(\lambda)}}}$. Tal como en la prueba de la Proposición 2.7.5, obtenemos la relación de recurrencia de tres términos para polinomios mónicos dual Hahn

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_{j+1} + (-2j^2 + j(2N + \lambda - n - 2) + n(N - 1) + N - 1) \sigma_j \\ &\quad + j(j - (N + \lambda))(j - N)(j + n) \sigma_{j-1}, \end{aligned}$$

pero con parámetros más simples. Ahora tenemos $\sigma_j = p_j(0; n, \lambda, N - 1) = (n + 1)_j (1 - N)_j$. Sustituyendo nuevamente obtenemos el resultado deseado. \square

Solo resta obtener los valores iniciales y finales.

Lema 2.7.7. *Los valores iniciales y finales son*

$$\xi_{N,1,n}^{(\lambda)} = (-1)^{n+N-1} \frac{a^{n+(N-1)/2}}{\sqrt{(N-1)!}}, \quad \xi_{1,1,n}^{(\lambda)} = (-a)^n \frac{(\lambda+1)_{N-1}}{(\lambda+n)_{N-1}}.$$

Demostración. Podemos escribir

$$(I+A)^{x+\lambda} = \exp((x+\lambda)B), \quad B := \log(I+A) = \sum_{s=1}^{N-1} \frac{(-1)^{s+1}}{s} A^s.$$

Entonces como $A^N = 0$, tenemos que $B^{N-1} = A^{N-1}$. Esto implica que ambos son polinomios en x y en particular tenemos un coeficiente director simple

$$(I+A)^{x+\lambda} = x^{N-1} \frac{A^{N-1}}{(N-1)!} + \mathcal{O}(x^{N-2}).$$

Aplicando que $P_n^{(\lambda)}$ es un polinomio mónico y (2.7.122) obtenemos

$$R_n^{(\lambda)}(x) = x^{n+N-1} L_0(I+A)^{-n-\lambda} \frac{A^{N-1}}{(N-1)!} + \mathcal{O}(x^{n+N-2}).$$

El coeficiente director tiene una única entrada no nula dado que $L_0(I+A)^{-n-\lambda}$ es triangular inferior y $(A^{N-1})_{jk} \neq 0$ solo para $(j,k) = (N,1)$. Entonces mirando entrada a entrada tenemos

$$(R_n^{(\lambda)}(x))_{N,1} = \xi_{N,1,n}^{(\lambda)} c_{n+N-1}^{(a)}(x) = x^{n+N-1} \frac{(A^{N-1})_{N,1}}{(N-1)!} + \mathcal{O}(x^{n+N-2}),$$

lo que, comparando coeficientes directores, nos da el primer resultado

$$\xi_{N,1,n}^{(\lambda)} = (-a)^{n+N-1} \frac{(A^{N-1})_{N,1}}{(N-1)!} = (-1)^{n+N-1} \frac{a^{n+(N-1)/2}}{\sqrt{(N-1)!}}.$$

Podemos obtener directamente $\xi_{1,1,n}^{(\lambda)}$ de la Proposición 2.7.6 con $j = N$. \square

Finalmente, resumimos el contenido de las Proposiciones 2.7.5, 2.7.6 y el Lema 2.7.7 en el Teorema principal de la sección.

Teorema 2.7.8. *Los coeficientes $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ en (2.7.123) están dados en términos de polinomios dual Hahn por*

$$\begin{aligned} \xi_{j,k,n}^{(\lambda)} &= \mathfrak{X}(j,k,n,\lambda) \times \begin{cases} (1-N)_{k-1} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1-k, j-N, n+\lambda+1 \\ \lambda+1, 1-N \end{matrix}; 1 \right) & n+j \geq N, \\ (1-n-j)_{k-1} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1-k, -n, N-j+\lambda+1 \\ \lambda+1, 1-n-j \end{matrix}; 1 \right) & n+j < N, \end{cases} \\ &= \mathfrak{X}(j,k,n,\lambda) \times \begin{cases} (1-N)_{k-1} \mathcal{R}_{k-1}(\ell(N-j); \lambda, n+j-N, N-1) & n+j \geq N, \\ (1-n-j)_{k-1} \mathcal{R}_{k-1}(\ell(n); \lambda, N-(n+j), n+j-1) & n+j < N, \end{cases} \end{aligned}$$

con

$$\mathfrak{X}(j,k,n,\lambda) = \sqrt{\frac{(N-k)!}{(N-j)!} \frac{(-1)^{n+j-1} a^{n+(j-k)/2} (\lambda+n)! (N+\lambda-j)!}{(j-1)! \lambda! (N+\lambda+n-j)!}}.$$

2.8. Polinomios de Charlier duales

En esta sección construimos tres familias no equivalentes de polinomios matriciales en el sentido de (2.3.37) que son duales a los polinomios matriciales de tipo Charlier $P_n^{(\lambda)}$. Sabemos por el Teorema 2.3.5 que cada familia dual está relacionada a un operador adecuado del conjunto $\mathcal{B}_R^2(P)$.

2.8.1. Expresión explícita de $P_n(0)$

El objetivo de esta subsección es dar una expresión explícita de $P_n(0)$ el cual es un ingrediente clave para familias duales, ver Teorema 2.3.5. Primero, recordemos la sucesión de matrices \mathcal{A}_λ introducida en (2.6.118). En la siguiente observación veremos unas propiedades básicas de \mathcal{A}_λ .

Observación 55. Tal como hemos visto en el Lema 2.5.4, el conmutador de las matrices J y A es simple. Podemos derivar resultados similares para \mathcal{A}_λ :

1. $[J, \mathcal{A}_\lambda] = -\mathcal{A}_\lambda$,
2. $[J, (I + \mathcal{A}_\lambda)^k] = -k\mathcal{A}_\lambda(I + \mathcal{A}_\lambda)^{k-1}$,
3. $(I + \mathcal{A}_\lambda)^{-k}J(I + \mathcal{A}_\lambda)^k = J - k\mathcal{A}_\lambda(I + \mathcal{A}_\lambda)^{k-1}$.

Proposición 2.8.1. *Sea $R_n^{(\lambda)}$ la función definida en (2.7.122). Entonces las siguientes relaciones se satisfacen:*

1. $R_n^{(\lambda)}(0) = -a(I + \mathcal{A}_{n+\lambda})R_{n-1}^{(\lambda+1)}(0)$.
2. $R_n^{(\lambda)}(0) = (-a)^n(I + \mathcal{A}_{n+\lambda})^n L_0$.

Demostración. La prueba de (1) puede ser encontrada en el Apéndice A.2. La parte (2) sigue iterando parte (1) y aplicando que $R_0^{(\lambda+n)}(0) = L_0$. \square

Corolario 2.8.2. *Para los polinomios de Charlier mónicos tenemos que*

$$P_n^{(\lambda)}(0) = (-a)^n L_0^{-1} (I + A)^{n+\lambda} (I + \mathcal{A}_{n+\lambda})^n (I + A)^{-\lambda} L_0.$$

Demostración. El corolario sigue directamente de la proposición anterior y la ecuación (2.7.122) que define $R_n^{(\lambda)}(x) = L_0(I + A)^{-n-\lambda} P_n^{(\lambda)}(x)(I + A)^{\lambda+x}$. \square

Observación 56. Notemos que como A^* es *estrictamente triangular superior*, también lo es $\mathcal{A}_{n+\lambda}$. A partir de las expresiones explícitas de $\mathcal{A}_{n+\lambda}$ en (2.6.118), verificamos que tiene entradas racionales en n . Entonces $(I + \mathcal{A}_{n+\lambda})$ es una matriz triangular superior con entradas diagonales iguales a 1. Esto nos permite concluir que $(I + \mathcal{A}_{n+\lambda})^n$ es una función racional de n . En particular, esto implica que cada entrada de $(-a)^{-n} P_n^{(\lambda)}(0)$ es una función racional de n .

2.8.2. Tres familias de polinomios duales

En el Teorema 2.3.5 hemos establecido una correspondencia uno a uno entre las clases de equivalencia de familias duales y el conjunto de operadores en diferencias $\mathcal{B}_R^2(P)$, ver Definición 2.3.4. En esta sección daremos tres familias de polinomios duales, cada una de las cuales se corresponde con un operador específico de $\mathcal{B}_R^2(P)$.

Recordemos de (2.5.92) y (2.6.120) que

$$\mathfrak{D}^{(\lambda)} = \eta a(I + A) - J - (x + \lambda)(I + A)^{-1} + \eta^{-1}x(I + A)^{-1}, \quad (2.8.126)$$

$$\Delta S^{(\lambda)} = -\eta\Phi^{(\lambda)}(x)^* + 2\Phi^{(\lambda)}(x)^* - \Psi^{(\lambda)}(x)^* + \eta^{-1}\left(\Psi^{(\lambda)}(x)^* - \Phi^{(\lambda)}(x)^*\right), \quad (2.8.127)$$

$$S^{(\lambda-1)}\Delta = -\eta\Phi^{(\lambda-1)}(x+1)^* + \Phi^{(\lambda-1)}(x+1)^* + \Phi^{(\lambda-1)}(x)^* - \Psi^{(\lambda-1)}(x+1)^* \\ + \eta^{-1}\left(\Psi^{(\lambda-1)}(x)^* - \Phi^{(\lambda-1)}(x)^*\right), \quad (2.8.128)$$

donde $\Phi^{(\lambda)*}$ es el polinomio matricial de grado dos dado explícitamente en el Teorema 2.6.1. En esta sección usaremos la descomposición dada en (2.6.121),

$$\Phi^{(\lambda)}(x)^* = \frac{a}{2}(I + A)^{x+\lambda+1}(J(I + A^*) + \lambda I)(I + A)^{-x-\lambda}.$$

Denotaremos $D_1 = \mathfrak{D}^{(\lambda)}$, $D_2 = \Delta S^{(\lambda)}$ y $D_3 = S^{(\lambda-1)}\Delta$, para simplificar la notación y ser capaces de dar resultados generales para las tres familias al mismo tiempo.

Lema 2.8.3. *Los operadores en diferencias $D_1 = \mathfrak{D}^{(\lambda)}$, $D_2 = \Delta S^{(\lambda)}$ y $D_3 = S^{(\lambda-1)}\Delta$ son elementos de $\mathcal{B}_R^2(P)$. Para D_1 y D_2 esto vale si $\lambda \in \mathbb{N}_0$ y para D_3 si $\lambda \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Notemos que el coeficiente *raising* $a(I+A)$ de (2.8.126) es invertible. Lo mismo vale para los coeficientes *raising* de (2.8.127) y (2.8.128) considerando (2.6.121), pese a que debemos tomar $\lambda \geq 1$ para D_3 . Entonces la condición de invertibilidad se cumple en los tres casos. Es fácil verificar en los tres casos que el coeficiente *lowering* evaluado en $x = 0$ es igual a cero, por lo que la condición sobre $P_n(0)^{-1}P_n(-1)F_{-1}(0)$ se satisface automáticamente. Debemos verificar que $\rho_i^{(\lambda)}(n) = P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}\psi^{-1}(D_i)P_n^{(\lambda)}(0)$ satisface la Condición 1 para $i = 1, 2, 3$. Recordemos de (2.2.26) que

$$(P_n^{(\lambda)} \cdot S^{(\lambda-1)}\Delta)(x) = (n+1)G_{n+1}^{(\lambda-1)}P_n(x), \quad (P_n^{(\lambda)} \cdot \Delta S^{(\lambda)})(x) = nG_n^{(\lambda)}P_n(x),$$

donde por el Lema 2.6.2 y la ecuación (2.6.116) resulta

$$G_n^{(\lambda)} = \frac{1}{2}L_0^{-1}(I + A)^{n+\lambda}((N + \lambda + 1)I - J)(I + A)^{-n-\lambda}L_0.$$

Sumado a esto, por el Teorema 2.5.8 tenemos que

$$P_n^{(\lambda)} \cdot \mathfrak{D}^{(\lambda)} = \Gamma_n^{(\lambda)}P_n^{(\lambda)}, \quad \Gamma_n^{(\lambda)} = a(I + A) - J - (n + \lambda)(I + A)^{-1}.$$

Aplicando el Corolario 2.8.2 y la Observación 55 obtenemos

$$\rho_1^{(\lambda)}(n) = L_0^{-1}(I + A)^\lambda \left((a - n - \lambda)I - J + n\mathcal{A}_{n+\lambda}(I + \mathcal{A}_{n+\lambda})^{n-1} \right) (I + A)^{-\lambda}L_0, \quad (2.8.129)$$

$$\rho_2^{(\lambda)}(n) = \frac{n}{2}L_0^{-1}(I + A)^\lambda \left((N + \lambda + 1)I - J + n\mathcal{A}_{n+\lambda}(I + \mathcal{A}_{n+\lambda})^{n-1} \right) (I + A)^{-\lambda}L_0, \quad (2.8.130)$$

$$\rho_3^{(\lambda)}(n) = \frac{n+1}{2}L_0^{-1}(I + A)^\lambda \left((N + \lambda)I - J + n\mathcal{A}_{n+\lambda}(I + \mathcal{A}_{n+\lambda})^{n-1} \right) (I + A)^{-\lambda}L_0. \quad (2.8.131)$$

A partir de estas expresiones podemos ver que cada $\rho_i^{(\lambda)}$ es una matriz dependiente de n de la forma

$$\rho_i^{(\lambda)}(n) = L_0^{-1}(I + A)^\lambda(n\mathcal{T} + \mathcal{T}_0 + \text{s.t.s.})(I + A)^{-\lambda}L_0,$$

donde \mathcal{T} y \mathcal{T}_0 son matrices diagonales independientes de n , y s.t.s. significa *estríctamente triangular superior*. Sumado a esto, la Observación 56 asegura que la parte s.t.s. es racional en n .

Esto significa que cada $\rho_i^{(\lambda)}$ es de la forma descrita en el Corolario A.1.2 en el Apéndice A.1. Esto nos permite ver que el determinante de las matrices de Vandermonde a bloques de las Condiciones 1 y 2 son no nulos. \square

En consecuencia, por el Teorema 2.3.5, podemos encontrar familias duales de polinomios para cada operador $S^{(\lambda-1)}\Delta$, $\Delta S^{(\lambda)}$, y $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$.

Observación 57. Sean $D_1, D_2, D_3 \in \mathcal{B}_R^2(P)$, tales que

$$P_n \cdot D_i = \Lambda_n^{(i)} P_n, \quad \text{para } i = 1, 2, 3,$$

para ciertas matrices $\Lambda_n^{(i)}$. Supongamos que existen números complejos no nulos α, β, γ tales que

$$D_3 = \alpha D_1 + \beta D_2 + \gamma I, \quad \Lambda_n^{(3)} = \alpha \Lambda_n^{(1)} + \beta \Lambda_n^{(2)} + \gamma I.$$

El correspondiente $\rho_3(n)$ está dado por

$$\rho_3(n) = P_n(0)^{-1} \Lambda_n^{(3)} P_n(0) = \alpha \rho_1(n) + \beta \rho_2(n) + \gamma I.$$

En el Teorema 2.6.6 hemos visto que este es nuestro caso para $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ y $\gamma = -\frac{1}{2}(a - N - 2\lambda)$. Esto es consistente con (2.8.131).

Daremos explícitamente tres familias de polinomios duales asociados a los operadores en diferencias (2.8.126), (2.8.127) y (2.8.128).

Familia dual asociada al operador $D_1 = \mathfrak{D}^{(\lambda)}$

Comenzamos describiendo la familia dual que se corresponde con el operador $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$. Aplicando el Teorema 2.3.5 obtenemos que los polinomios duales son

$$Q_{x,1}^{(\lambda)}(\rho_1^{(\lambda)}(n)) = P_n^{(\lambda)}(0)^{-1} P_n^{(\lambda)}(x) \Upsilon_1^{(\lambda)}(x)^{-1}, \quad (2.8.132)$$

donde $P_n^{(\lambda)}(0)$ está dado en el Corolario 2.8.2, $\rho_1^{(\lambda)}$ está dada en (2.8.129) y

$$\Upsilon_1^{(\lambda)}(x) = a^{-x}(I + A)^{-x},$$

que en este caso no depende de λ .

Familia dual asociada al operador $D_2 = \Delta S^{(\lambda)}$

Similarmente, aplicando el Teorema 2.3.5 obtenemos

$$Q_{x,2}^{(\lambda)}(\rho_2^{(\lambda)}(n)) = P_n^{(\lambda)}(0)^{-1} P_n^{(\lambda)}(x) \Upsilon_2^{(\lambda)}(x)^{-1},$$

$$\Upsilon_2^{(\lambda)}(x) = \frac{(-2)^x}{a^x} (I + A)^\lambda (J(I + A^*) + \lambda I)^{-x} (I + A)^{-x-\lambda},$$

donde $\rho_2^{(\lambda)}$ está dada en (2.8.130).

Familia dual asociada al operador $D_3 = S^{(\lambda-1)}\Delta$

Tal como para las dos familias previas aplicamos el Teorema 2.3.5 para obtener los polinomios duales y relacionar estas cantidades, pero en este caso solo para $\lambda > 0$,

$$Q_{x,3}^{(\lambda)}(\rho_3^{(\lambda)}(n)) = P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}P_n^{(\lambda)}(x)\Upsilon_3^{(\lambda)}(x)^{-1},$$

$$\Upsilon_3^{(\lambda)}(x) = \frac{(-2)^x}{a^x}(I+A)^\lambda(J(I+A^*) + (\lambda-1)I)^{-x}(I+A)^{-x-\lambda},$$

donde $\rho_3^{(\lambda)}$ está dada en (2.8.131).

2.8.3. Relaciones ortogonales duales

Estamos listos para identificar las relaciones de ortogonalidad para los polinomios duales $(Q_{x,i}^{(\lambda)})_x$.

Teorema 2.8.4. *El peso matricial dual para los polinomios de Charlier es*

$$U^{(\lambda)}(n) = a^{2n}L_0^*(I+A^*)^{-\lambda}(I+(\mathcal{A}_{n+\lambda})^*)^n(\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1}(I+\mathcal{A}_{n+\lambda})^n(I+A)^{-\lambda}L_0, \quad (2.8.133)$$

y (para cada ρ_i) satisface las hipótesis del Teorema 2.3.7.

Observación 58. A partir de la Observación 56 y de las expresiones explícitas de $\mathcal{D}_n^{(\lambda)}$ (ver Teorema 2.6.3), existe una función $F^{(\lambda)}$ tal que $F^{(\lambda)}(n)_{i,j}$ es racional en n para todo i, j y

$$U^{(\lambda)}(n) = \frac{a^n}{n!}F^{(\lambda)}(n),$$

y aplicando la Observación 56 y la expresión explícitas de las funciones de autovalores, obtenemos que $\rho_i^{(\lambda)}(n)^k$ es racional en n para todo $k \in \mathbb{N}_0$ fijo.

Demostración. La ecuación (2.8.133) es consecuencia del Teorema 2.3.7, Corolario 2.8.2 y de la descomposición LDU de $\mathcal{H}_n^{(\lambda)}$ dada en el Corolario 2.5.6. Por el Teorema 2.3.7 debemos verificar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_i^{(\lambda)}(n)^k U^{(\lambda)}(n) < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_1(\rho_i^{(\lambda)}(n))P_n(0)\mathcal{H}_n^{-1}P_{n+1}(0)^*F_2(\rho_i^{(\lambda)}(n)) = 0, \quad \text{para todas } F_1, F_2 \in M_N(\mathbb{C})[n]. \quad (2.8.134)$$

Para $k \in \mathbb{N}_0$ y $s, t \in \{1, \dots, N\}$ fijos, aplicando la Observación 56 tenemos que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho_i^{(\lambda)}(n)^k U^{(\lambda)}(n) \right)_{s,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \left(\rho_i^{(\lambda)}(n)^k F^{(\lambda)}(n) \right)_{s,t} < \infty,$$

dado que cada entrada de $\rho_i^{(\lambda)}(n)^k F^{(\lambda)}(n)$ es racional en n . Por otro lado, para $F_1, F_2 \in M_N(\mathbb{C})[n]$, tenemos que $F_1(\rho_i^{(\lambda)}(n))$ y $F_2(\rho_i^{(\lambda)}(n))$ son funciones racionales en n , y por lo tanto aplicando las expresiones explícitas de $P_n(0)$ y \mathcal{H}_n tenemos que

$$F_1(\rho_i^{(\lambda)}(n))P_n(0)\mathcal{H}_n^{-1}P_{n+1}(0)^*F_2(\rho_i^{(\lambda)}(n)) = \frac{a^n}{n!}R(n), \quad \text{para todos } F_1, F_2 \in M_N(\mathbb{C})[n],$$

donde $R(n)$ es una función racional de n . Concluimos que la ecuación (2.8.134) se cumple. \square

Entonces cada familia dual es ortogonal con respecto a su propio (y distinto) producto interno dual. Dados \mathcal{P}, \mathcal{Q} polinomios matriciales, tenemos que

$$\langle \mathcal{P}, \mathcal{Q} \rangle_{i,d}^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P} \left(\rho_i^{(\lambda)}(n) \right)^* U^{(\lambda)}(n) \mathcal{Q} \left(\rho_i^{(\lambda)}(n) \right).$$

Notemos que el peso $U^{(\lambda)}$ es el mismo para todas las familias, pero el producto interno requiere componer con $\rho_i^{(\lambda)}$, que es diferente para cada i .

2.8.4. *Shift operators* duales

En esta subsección mostraremos que las *ladder relations* para los polinomios $P_n^{(\lambda)}$ asociados al peso de Charlier inducen *shift operators* para los polinomios duales $Q_x^{(\lambda)}$. Recordemos las siguientes relaciones de la Proposición 2.4.1:

$$P_n^{(\lambda)} \cdot D = M \cdot P_n^{(\lambda)}, \quad M = (I + A) + \frac{1}{a} \mathcal{H}_n^{(\lambda)} (I + A^*)^{-1} (\mathcal{H}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1} \delta^{-1}, \quad (2.8.135)$$

$$P_n^{(\lambda)} \cdot D^\dagger = M^\dagger \cdot P_n^{(\lambda)}, \quad M^\dagger = \frac{1}{a} (I + A)^{-1} \delta + \mathcal{H}_n^{(\lambda)} (I + A^*) (\mathcal{H}_n^{(\lambda)})^{-1}, \quad (2.8.136)$$

donde D y D^\dagger son

$$D = \eta (I + A), \quad D^\dagger = \eta^{-1} \frac{x}{a} (I + A)^{-1}.$$

Como los operadores D y D^\dagger están asociados a la ecuación de Pearson débil 2.4.62, sigue de la Observación 39 que $D, D^\dagger \in \hat{\mathcal{F}}_R(P^{(\lambda)})$. Cada familia dual tiene dos isomorfismos relevantes

$$\begin{aligned} \tau: \hat{\mathcal{F}}_L(P^{(\lambda)}) &\rightarrow \hat{\mathcal{F}}_L(Q^{(\lambda)}), & \sigma_i: \hat{\mathcal{F}}_R(P^{(\lambda)}) &\rightarrow \hat{\mathcal{F}}_R^d(Q^{(\lambda)}), \\ M &\mapsto P_n^{(\lambda)}(0)^{-1} M P_n^{(\lambda)}(0), & D &\mapsto \Upsilon_i^{(\lambda)}(x) D \Upsilon_i^{(\lambda)}(x)^{-1}, \end{aligned}$$

ver (2.3.56) y (2.3.60). Notemos que por definición, τ es conjugar por $P_n^{(\lambda)}(0)$ y por lo tanto es independiente de la familia de polinomios duales. En ese caso omitiremos el subíndice i . Por otro lado, para cada $i = 1, 2, 3$ tenemos el isomorfismo σ_i que involucra una conjugación por $\Upsilon_i^{(\lambda)}$ y es diferente para cada familia de polinomios duales.

Teorema 2.8.5. Sean $P_n^{(\lambda)}$ los polinomios matriciales mónicos de Charlier y sean $D, D^\dagger, M, M^\dagger$ dados en (2.8.135) y (2.8.136). Fijamos una familia de polinomios duales $Q_x^{(\lambda)} = Q_{x,i}^{(\lambda)}$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces las siguientes relaciones se satisfacen:

$$\begin{aligned} \tau(M) \cdot Q_x^{(\lambda)}(\rho_i^{(\lambda)}(n)) &= Q_{x+1}^{(\lambda)}(\rho_i^{(\lambda)}(n)) \Upsilon_i^{(\lambda)}(1)(I + A), \\ \tau(M^\dagger) \cdot Q_x^{(\lambda)}(\rho_i^{(\lambda)}(n)) &= Q_{x-1}^{(\lambda)}(\rho_i^{(\lambda)}(n)) \frac{x}{a} (I + A)^{-1} \Upsilon_i^{(\lambda)}(1)^{-1}. \end{aligned}$$

Demostración. Aplicando el Teorema 2.3.12 obtenemos

$$\begin{aligned} \tau(M) \cdot Q_x^{(\lambda)}(\rho_i^{(\lambda)}(n)) &= Q_x^{(\lambda)}(\rho_i^{(\lambda)}(n)) \cdot \sigma_i(D), \\ \tau(M^\dagger) \cdot Q_x^{(\lambda)}(\rho_i^{(\lambda)}(n)) &= Q_x^{(\lambda)}(\rho_i^{(\lambda)}(n)) \cdot \sigma_i(D^\dagger). \end{aligned}$$

Fijando $i \in \{1, 2, 3\}$ y suponiendo que $D_i = \eta F_1(x) + F_0(x) + \eta^{-1} F_{-1}(x)$, por el Teorema 2.3.5 tenemos que $\Upsilon_i(x) = F_1(0)^{-1} \cdots F_1(x-1)^{-1}$. Entonces tenemos que

$$\sigma_i(D) = \eta \Upsilon_i(x+1)(I + A) \Upsilon_i(x)^{-1}, \quad \sigma_i(D^\dagger) = \eta^{-1} \frac{x}{a} \Upsilon_i(x-1)(I + A)^{-1} \Upsilon_i(x)^{-1}.$$

Usando que $F_1(x) = a(I + A)$ para $i = 1$, $F_1(x) = -\Phi^{(\lambda)*}(x)$ para $i = 2$ y $F_1(x) = -\Phi^{(\lambda-1)*}(x+1)$ para $i = 3$, y las expresiones explícitas en (2.6.121) obtenemos

$$\Upsilon_i(x+1)(I+A)\Upsilon_i(x)^{-1} = \Upsilon_i(1)(I+A), \quad \Upsilon_i(x-1)(I+A)^{-1}\Upsilon_i(x)^{-1} = (I+A)^{-1}\Upsilon_i(1)^{-1}.$$

Esto completa la prueba del teorema. \square

Observación 59. Aplicando el isomorfismo τ , la descomposición LDU de la norma (ver Corolario 2.5.6), y propiedades de la matriz J (ver Lema 2.5.4), obtenemos

$$\begin{aligned} \tau(M) &= \Theta_n^{(\lambda)} \left((I+A) - \frac{1}{a^2} \mathcal{D}_n^{(\lambda)} (\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1} \delta^{-1} \right) \Theta_n^{(\lambda)-1}, \\ \tau(M^\dagger) &= \Theta_n^{(\lambda)} \left(\mathcal{D}_n^{(\lambda)} (I+A^*) (\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1} - \delta \right) \Theta_n^{(\lambda)-1}, \end{aligned}$$

donde $\Theta_n^{(\lambda)} = L_0^{-1}(I+A)^\lambda(I+\mathcal{A}_{n+\lambda})^{-n}$. Estas expresiones son independientes de la elección de la familia dual.

Observación 60. Para la familia dual correspondiente a D_1 tenemos las expresiones simples:

$$\sigma_1(D) = \eta \frac{1}{a}, \quad \sigma_1(D^\dagger) = \eta^{-1}x, \quad \sigma_1(\mathfrak{J}^{(\lambda)}) = J + xI + \lambda(I+A)^{-1}.$$

Para la familia dual correspondiente a D_2 tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_2(D) &= -\eta 2a^{-1}(I+A)^\lambda(J(I+A^*) + \lambda I)^{-1}(I+A)^{-\lambda}, \\ \sigma_2(D^\dagger) &= -\eta^{-1} \frac{x}{2}(I+A)^\lambda(J(I+A^*) + \lambda I)(I+A)^{-\lambda}, \\ \sigma_2(\mathfrak{J}^{(\lambda)}) &= (I+A)^\lambda(J(I+A^*) + \lambda I)^{-x}(J + (x+\lambda)I)(J(I+A^*) + \lambda I)^x(I+A)^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Para la familia dual correspondiente a D_3 tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_3(D) &= -\eta 2a^{-1}(I+A)^\lambda(J(I+A^*) + (\lambda-1)I)^{-1}(I+A)^{-\lambda}, \\ \sigma_3(D^\dagger) &= -\eta^{-1} \frac{x}{2}(I+A)^\lambda(J(I+A^*) + (\lambda-1)I)(I+A)^{-\lambda}, \\ \sigma_3(\mathfrak{J}^{(\lambda)}) &= (I+A)^\lambda(J(I+A^*) + (\lambda-1)I)^{-x}(J + (x+\lambda)I)(J(I+A^*) + (\lambda-1)I)^x(I+A)^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Notemos que las expresiones de $\sigma_i(D)$, $\sigma_i(D^\dagger)$, $\sigma_i(\mathfrak{J}^{(\lambda)})$ para $i = 1, 2$ son muy similares. Esto se debe al hecho que los coeficientes de los operadores $\Delta S^{(\lambda)}$ y $S^{(\lambda-1)}\Delta$ se relacionan mediante shifts simples en λ y x , ver (2.8.127) y (2.8.128).

Observación 61. Finalmente incluimos las expresiones para los duales de los operadores relevantes en (2.2.13) y Observación 48:

$$\tau(\mathcal{L}) = P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}P_{n+1}^{(\lambda)}(0)\delta + P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}B_n^{(\lambda)}P_n^{(\lambda)}(0) + P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}C_n^{(\lambda)}P_{n-1}^{(\lambda)}(0)\delta^{-1},$$

$$\tau(\psi^{-1}(\mathfrak{J}^{(\lambda)})) = a\tau(M) + a\tau(M^\dagger) - \rho_1^{(\lambda)}(n).$$

En la última expresión hemos usado que $\mathfrak{J}^{(\lambda)} = aD + aD^\dagger - \mathfrak{D}^{(\lambda)}$, hecho que sigue de la definición de $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$ en (2.5.92).

2.8.5. Normas cuadradas duales

En el Teorema 2.3.8 probamos una expresión para las normas cuadradas de los polinomios ortogonales matriciales duales *asumiendo* que ciertas funciones pertenecen a la clausura del subespacio generado por los polinomios ortogonales matriciales $(P_n)_n$. Como no hemos probado esto para el caso de los polinomios matriciales de tipo Charlier, derivaremos la expresión de las normas cuadradas de otra forma, la cual coincidirá con el resultado previo. Es más eficiente escribir las demostraciones siguientes en términos de

$$R_n^{(\lambda)}(x) = L_0(I + A)^{-n-\lambda} P_n^{(\lambda)}(x)(I + A)^{x+\lambda},$$

en lugar de $Q_x^{(\lambda)}$. Aplicando (2.7.122) y el hecho de que para $i \in \{1, 2, 3\}$ tenemos

$$Q_{x,i}^{(\lambda)}(\rho_i^{(\lambda)}(n)) = P_n^{(\lambda)}(0)^{-1} P_n^{(\lambda)}(x) \Upsilon_i^{(\lambda)}(x)^{-1},$$

obtenemos que las normas cuadradas de $Q_{x,i}^{(\lambda)}$ están dadas por

$$\mathscr{W}_{x,i}^{(\lambda)} = \left((I + A^*)^{x+\lambda} \Upsilon_i^{(\lambda)*}(x) \right)^{-1} \mathscr{W}_R^{(\lambda)}(x) \left(\Upsilon_i^{(\lambda)}(x)(I + A)^{x+\lambda} \right)^{-1}, \quad (2.8.137)$$

donde

$$\mathscr{W}_R^{(\lambda)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n^{(\lambda)}(x)^* (\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1} R_n^{(\lambda)}(x).$$

Lema 2.8.6. *El momento 0 del peso dual $U^{(\lambda)}$ está dado por*

$$\mathscr{W}_0^{(\lambda)} = W^{(\lambda)}(0)^{-1}.$$

Demostración. La prueba está dada en el Apéndice A.3. □

Proposición 2.8.7. *La norma de los polinomios ortogonales matriciales duales $Q_{x,i}^{(\lambda)}$ está dada por*

$$\mathscr{W}_{x,i}^{(\lambda)} = (\Upsilon_i^{(\lambda)}(x) W^{(\lambda)}(x) \Upsilon_i^{(\lambda)}(x)^*)^{-1}.$$

Demostración. Podemos derivar una recurrencia para $\mathscr{W}_R^{(\lambda)}$ reescribiendo las ecuaciones (2.6.107) en términos de $R_n^{(\lambda)}$. Primero $P_n^{(\lambda)} \cdot \Delta = n P_{n-1}^{(\lambda+1)}$ se reescribe rápidamente como

$$R_n^{(\lambda)}(x+1) - R_n^{(\lambda)}(x)(I + A) = n R_{n-1}^{(\lambda+1)}(x),$$

y para $P_{n-1}^{(\lambda+1)} \cdot S^{(\lambda)} = G_n^{(\lambda)} P_n^{(\lambda)}$ necesitamos

$$L_0(I + A)^{-n-\lambda} G_n^{(\lambda)}(I + A)^{n+\lambda} L_0^{-1} = n \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda+1)} (\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1},$$

y

$$\begin{aligned} (I + A)^{-x-\lambda-1} \Phi^{(\lambda)*}(x)(I + A)^{x+\lambda} &= T^{(\lambda+1)}(I + A^*)(T^{(\lambda)})^{-1}, \\ (I + A)^{-x-\lambda} (\Phi^{(\lambda)*}(x) - \Psi^{(\lambda)*}(x))(I + A)^{x+\lambda} &= \frac{x}{a} T^{(\lambda+1)}(T^{(\lambda)})^{-1}, \end{aligned}$$

para llegar a

$$-R_{n-1}^{(\lambda+1)}(x) T^{(\lambda+1)}(I + A^*)(T^{(\lambda)})^{-1} + R_{n-1}^{(\lambda+1)}(x-1) \frac{x}{a} T^{(\lambda+1)}(T^{(\lambda)})^{-1} = n \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda+1)} (\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1} R_n^{(\lambda)}(x).$$

Ahora tomamos $x \geq 1$, ya que $x = 0$ fue contemplado en el resultado anterior. Podemos utilizar el primer shift para obtener

$$\mathscr{W}_R^{(\lambda)}(x) = (I + A^*) \sum_{n=0}^{\infty} R_n^{(\lambda)}(x-1)^* (\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1} R_n^{(\lambda)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} n R_{n-1}^{(\lambda+1)}(x-1)^* (\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1} R_n^{(\lambda)}(x).$$

La primer suma es equivalente a $\langle Q_{x-1}^{(\lambda)}, Q_x^{(\lambda)} \rangle_d^{(\lambda)}$ la cual es cero debido a la ortogonalidad *dual*. Insertando $(\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda+1)})^{-1} \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda+1)}$ obtenemos

$$\mathscr{W}_R^{(\lambda)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} R_{n-1}^{(\lambda+1)}(x-1)^* (\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda+1)})^{-1} n \mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda+1)} (\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1} R_n^{(\lambda)}(x),$$

que nos permite aplicar el segundo shift

$$\begin{aligned} \mathscr{W}_R^{(\lambda)}(x) &= - \sum_{n=1}^{\infty} R_{n-1}^{(\lambda+1)}(x-1)^* (\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda+1)})^{-1} R_{n-1}^{(\lambda+1)}(x) T^{(\lambda+1)} (I + A^*) (T^{(\lambda)})^{-1} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} R_{n-1}^{(\lambda+1)}(x-1)^* (\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda+1)})^{-1} R_{n-1}^{(\lambda+1)}(x-1) \frac{x}{a} T^{(\lambda+1)} (T^{(\lambda)})^{-1}. \end{aligned}$$

Aquí la primera suma se anula debido a la ortogonalidad dual, dado que es equivalente a $\langle Q_{x-1}^{(\lambda+1)}, Q_x^{(\lambda+1)} \rangle_d^{(\lambda+1)}$. Entonces llegamos a

$$\mathscr{W}_R^{(\lambda)}(x) = \mathscr{W}_R^{(\lambda+1)}(x-1) \frac{x}{a} T^{(\lambda+1)} (T^{(\lambda)})^{-1},$$

lo cual iterando nos da $\mathscr{W}_R^{(\lambda)}(x) = \mathscr{W}_R^{(\lambda+x)}(0) \frac{x!}{a^x} T^{(\lambda+x)} (T^{(\lambda)})^{-1} = \frac{x!}{a^x} (T^{(\lambda)})^{-1}$. Colocando este resultado en (2.8.137), junto con Lema 2.8.6, obtenemos el resultado deseado. \square

2.8.6. Álgebras de Lie de operadores en diferencias asociadas al peso de Charlier

En esta sección, describimos las álgebras de Lie generadas por los operadores de interés del capítulo. Denotamos por \mathfrak{g} el espacio vectorial generado por $\{D, D^\dagger, \mathfrak{J}^{(\lambda)}, x, I\}$, donde I es la matriz identidad.

Proposición 2.8.8. *El espacio vectorial \mathfrak{g} es un álgebra de Lie y contiene al operador $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$. Precisamente, las siguientes relaciones se verifican:*

$$[\mathfrak{J}^{(\lambda)}, D] = D, \quad [\mathfrak{J}^{(\lambda)}, D^\dagger] = -D^\dagger, \quad [D, x] = -D, \quad [D^\dagger, x] = D^\dagger, \quad [D, D^\dagger] = -\frac{1}{a}I,$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el corchete estándar $[E_1, E_2] = E_1 E_2 - E_2 E_1$.

Demostración. Los corchetes dados en el enunciado del lema siguen directamente de las definiciones de $\mathfrak{J}^{(\lambda)}$ en (2.5.91) y D, D^\dagger en (2.5.90). Esto muestra que \mathfrak{g} es cerrada bajo la operación corchete. Finalmente sigue directamente de (2.5.92) que $\mathfrak{D}^{(\lambda)} \in \mathfrak{g}$. \square

Observamos que como cada uno de los generadores de \mathfrak{g} se relaciona a una ecuación de Pearson débil, tenemos que $\mathfrak{g} \subset \hat{\mathcal{F}}_R(P)$, ver Proposición 2.2.4. Por lo tanto, podemos transportar esta álgebra de Lie a $\hat{\mathcal{F}}_L(P)$, $\hat{\mathcal{F}}_R^d(Q)$, $\hat{\mathcal{F}}_L^d(Q)$ vía el isomorfismo ψ, σ, τ y obtenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{g} \\ \downarrow \tau & & \downarrow \sigma \\ \psi^d(\sigma(\mathfrak{g})) & \xleftarrow{\psi^d} & \sigma(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Sea \mathfrak{g}_1 la subálgebra de dimensión cuatro de \mathfrak{g} generada por $\{D, D^\dagger, \mathfrak{J}^{(\lambda)}, I\}$. Aplicando la Proposición (2.8.8), \mathfrak{g}_1 es un ideal isomorfo al álgebra de Lie $\mathcal{G}(0, 1)$ introducida por W. Miller en [101, Chapter 2-5] via las identificaciones:

$$J^+ \rightarrow D, \quad J^- \rightarrow D^\dagger, \quad J^3 \rightarrow \mathfrak{J}^{(\lambda)}, \quad \mathcal{E} \rightarrow \frac{1}{a}I.$$

El operador de Casimir correspondiente está dado por

$$aC_{0,1} = a(J^+J^- - \mathcal{E}J^3) \rightarrow aDD^\dagger - \mathfrak{J}^{(\lambda)},$$

y conmuta con todos los elementos de \mathfrak{g}_1 . A partir de las expresiones explícitas de D, D^\dagger y $\mathfrak{J}^{(\lambda)}$, obtenemos que la acción del operador de Casimir en un polinomio matricial P está dada por

$$(P \cdot C_{0,1})(x) = P(x)(x - \mathfrak{J}^{(\lambda)}).$$

Identificamos $C_{0,1}$ con el operador $x - \mathfrak{J}^{(\lambda)}$. Observamos que el operador de Casimir es de hecho un elemento del centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} , el cual es la subálgebra abeliana de dimensión dos generada por $\{C_{0,1}, I\}$.

Observamos que $C_{0,1} \in \hat{\mathcal{F}}_R(P)$ y por lo tanto $\psi^{-1}(C_{0,1})$ es un operador no trivial de segundo orden en el álgebra biespectral $\mathcal{B}_L(P)$ el cual conmuta con los *ladder operators* M, M^\dagger y el autovalor $\Gamma_n^{(\lambda)}$ de $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$.

Proposición 2.8.9. *Sea \mathfrak{k} el álgebra de Lie de dimensión cuatro generada por $\{D, D^\dagger, x, I\}$. Entonces \mathfrak{k} es isomorfa a $\mathcal{G}(0, 1)$ vía las identificaciones*

$$J^+ \rightarrow D, \quad J^- \rightarrow D^\dagger, \quad J^3 \rightarrow x, \quad \mathcal{E} \rightarrow \frac{1}{a}I.$$

Más aún, bajo estas identificaciones tenemos

$$\mathfrak{g} = \mathcal{G}(0, 1) \oplus \mathbb{C}C_{0,1}.$$

Demostración. El isomorfismo entre \mathfrak{k} y $\mathcal{G}(0, 1)$ sigue directamente de las relaciones de la Proposición 2.8.8. Como $C_{0,1} \notin \mathfrak{k}$, tenemos inmediatamente que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{C}C_{0,1}$ como espacios vectoriales. Ahora solo resta mostrar que ambos sumandos son ideales de \mathfrak{g} . La Proposición 2.8.8 nos da $[\mathfrak{k}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{k}$ y $\mathbb{C}C_{0,1}$ es un ideal dado que $C_{0,1} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Esto completa la prueba de la proposición. \square

Observación 62. Sea \mathfrak{h} el subespacio de dimensión tres generado por $\{D, D^\dagger, I\}$, entonces \mathfrak{h} es isomorfa al álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3, ver por ejemplo [56, pp. 57].

Observación 63. El álgebra de lie cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ está generada por los elementos:

$$e_1 = D^\dagger + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \quad e_2 = D + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \quad e_3 = x + \mathfrak{z}(\mathfrak{g}),$$

con las relaciones

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2.$$

Por lo tanto $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Lie de dimensión tres que es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{p}(1, 1)$ del grupo de Poincaré $P(1, 1)$. Este es el grupo de transformaciones a fin de \mathbb{R}^2 que preserva la métrica de Lorentz, ver [78, §2.5.9].

2.9. Polinomios Dual–Dual

En la sección final de este capítulo, buscaremos 4–uplas $(\tilde{P}_n^{(\lambda)}, \tilde{M}_1, \tilde{M}_2, \tilde{\nu}^{(\lambda)})$ que sean duales a la 4–upla dual $(Q_{x,1}^{(\lambda)}, P_n^{(\lambda)}(0), \Upsilon_1^{(\lambda)}(x), \rho_1^{(\lambda)})$ descrita en la Sección 2.8.2. Estas familias serán llamadas *polinomios dual–dual*. El objetivo de esta sección es indicar los pasos en la construcción de familias dual–dual, pero no describiremos en detalle algunos conjuntos análogos a los discutidos en la Sección 2.3 (como por ejemplo $\mathcal{B}_L^{d,2}(Q)$). Precisamente, daremos dos familias dual–dual distintas $\tilde{P}_n^{(\lambda)}$: una de ellas será trivial, devolviéndonos $P_n^{(\lambda)}$, y la segunda de ellas no será trivial.

Los polinomios dual–dual serán una sucesión de polinomios matriciales $(\tilde{P}_n^{(\lambda)})_n$ con argumento matricial \mathcal{X} pero del lado contrario al de $Q_x^{(\lambda)}$

$$\tilde{P}_n^{(\lambda)}(\mathcal{X}) = A_{n,n}\mathcal{X}^n + A_{n,n-1}\mathcal{X}^{n-1} + \dots + A_{n,0},$$

ver (2.3.33) para el caso correspondiente a $Q_x^{(\lambda)}$. Para encontrar tal familia dual–dual debemos encontrar una sucesión de polinomios $(\tilde{P}_n^{(\lambda)})_n$ junto con funciones matriciales $\tilde{\nu}^{(\lambda)}(x)$, $\tilde{M}_1^{(\lambda)}(n)$, $\tilde{M}_2^{(\lambda)}(x)$ tales que

$$Q_x^{(\lambda)}(\rho^{(\lambda)}(n)) = \tilde{M}_1^{(\lambda)}(n)\tilde{P}_n^{(\lambda)}(\tilde{\nu}^{(\lambda)}(x))\tilde{M}_2^{(\lambda)}(x), \quad \forall x, n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.9.138)$$

y tales que los polinomios $\tilde{P}_n^{(\lambda)}$ satisfacen la relación de recurrencia para polinomios mónicos

$$\tilde{P}_n^{(\lambda)}(\tilde{\nu}^{(\lambda)}(x))\tilde{\nu}^{(\lambda)}(x) = \tilde{P}_{n+1}^{(\lambda)}(\tilde{\nu}^{(\lambda)}(x)) + \tilde{B}_n^{(\lambda)}\tilde{P}_n^{(\lambda)}(\tilde{\nu}^{(\lambda)}(x)) + \tilde{C}_n^{(\lambda)}\tilde{P}_{n-1}^{(\lambda)}(\tilde{\nu}^{(\lambda)}(x)). \quad (2.9.139)$$

Tal como en la Sección 2.3, una familia dual–dual está completamente descrita por una 4–upla $(\tilde{P}_n^{(\lambda)}, \tilde{M}_1^{(\lambda)}, \tilde{M}_2^{(\lambda)}, \tilde{\nu}^{(\lambda)})$. Aquí también restringimos los grados de libertad superfluos de manera similar tomando $\tilde{M}_1(0) = \tilde{M}_2(0) = I$. Esto lleva inmediatamente a $\tilde{M}_2(x) = Q_x^{(\lambda)}(\rho^{(\lambda)}(0)) = \Upsilon^{(\lambda)}(x)^{-1}$ y $\tilde{M}_1(n) = (\tilde{P}_n^{(\lambda)}(\tilde{\nu}^{(\lambda)}(0)))^{-1}$.

2.9.1. Primer familia dual–dual: $P_n^{(\lambda)}$ como su propio dual–dual

La condición dual (2.9.138) implica trivialmente que

$$(\tilde{P}_n^{(\lambda)}, \tilde{M}_1^{(\lambda)}, \tilde{M}_2^{(\lambda)}, \tilde{\nu}^{(\lambda)}) = (P_n^{(\lambda)}, P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}, (I + A)^x a^x, x)$$

es una familia dual para $(Q_x^{(\lambda)}, P_n^{(\lambda)}(0), (I + A)^{-x} a^{-x}, \rho_1^{(\lambda)}(n))$, i.e.

$$Q_x^{(\lambda)}(\rho_1^{(\lambda)}(n)) = P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}P_n^{(\lambda)}(x)(I + A)^x a^x, \quad \forall x, n \in \mathbb{N}_0.$$

Observamos que como $\tilde{\nu}^{(\lambda)} = x$, la relación en recurrencia para $P_n^{(\lambda)}$ en (2.9.139) es precisamente la relación de recurrencia (1.5.23).

Como en el Lema 2.3.3, esta familia dual-dual se relaciona a un operador en diferencias, digamos $\tau(\mathcal{L}) \in \hat{\mathcal{F}}_L^d(Q)$, donde $\mathcal{L} = \psi^{-1}(x)$ está definida en (2.2.13). Explícitamente tenemos

$$\tau(\mathcal{L}) = P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}P_{n+1}^{(\lambda)}(0)\delta + P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}B_n^{(\lambda)}P_n^{(\lambda)}(0) + P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}C_n^{(\lambda)}P_{n-1}^{(\lambda)}(0)\delta^{-1}.$$

Notemos que el Corolario 2.8.2 implica que el coeficiente $P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}P_{n+1}^{(\lambda)}(0)$ de δ en $\tau(\mathcal{L})$ es una función racional de n que es invertible para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por otro lado, las expresiones explícitas en el Teorema 2.6.4 implican que C_n es una función racional de n que se anula en $n = 0$. Por lo tanto, el coeficiente de δ^{-1} en $\tau(\mathcal{L})$ es una función racional de n y se anula en $n = 0$. Estas condiciones son análogas a las de la Definición 2.3.4. Para esta familia dual-dual, el diagrama conmutativo del Teorema 2.3.12 se extiende trivialmente a:

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\mathcal{F}}_L(P_n^{(\lambda)}) & \xrightarrow{\tau} & \hat{\mathcal{F}}_L^d(Q_n^{(\lambda)}) & \xrightarrow{\tau^{-1}} & \hat{\mathcal{F}}_L(P_n^{(\lambda)}) \\ \downarrow \psi & & \uparrow \psi^d & & \downarrow \psi \\ \hat{\mathcal{F}}_R(P_n^{(\lambda)}) & \xrightarrow{\sigma_1} & \hat{\mathcal{F}}_R^d(Q_n^{(\lambda)}) & \xrightarrow{\sigma_1^{-1}} & \hat{\mathcal{F}}_R(P_n^{(\lambda)}) \end{array}$$

En conclusión, $P_n^{(\lambda)}$ es su propio dual-dual.

2.9.2. Segunda familia dual-dual

Para construir una familia no trivial de polinomios dual-dual, buscamos operadores en diferencias de segundo orden en $\mathcal{B}_L^d(Q)$. Tenemos dos candidatos naturales para estos operadores, digamos $\tau(\psi^{-1}(\mathfrak{J}^{(\lambda)}))$ y el operador de Casimir $\tau(\psi^{-1}(C_{0,1}))$. Daremos la construcción para el primer operador. Hemos visto en la Observación 48 que

$$\psi^{-1}(\mathfrak{J}^{(\lambda)}) \cdot P_n^{(\lambda)} = P_n^{(\lambda)} \cdot \mathfrak{J}^{(\lambda)},$$

de modo que $\mathfrak{J}^{(\lambda)} \in \hat{\mathcal{F}}_R(P)$ y $\psi^{-1}(\mathfrak{J}^{(\lambda)}) \in \hat{\mathcal{F}}_L(P)$. Escribimos

$$\psi^{-1}(\mathfrak{J}^{(\lambda)}) = G_1(n)\delta + G_0(n) + G_{-1}(n)\delta^{-1},$$

donde las expresiones explícitas de los coeficientes G_1, G_0, G_{-1} fueron dadas en la Observación 48. Por otro lado, $\sigma(\mathfrak{J}^{(\lambda)}) = \Upsilon^{(\lambda)}(x)\mathfrak{J}^{(\lambda)}\Upsilon^{(\lambda)}(x)^{-1}$ y

$$\begin{aligned} \tau(\psi^{-1}(\mathfrak{J}^{(\lambda)})) &= P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}G_1(n)P_{n+1}^{(\lambda)}(0)\delta + P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}G_0(n)P_n^{(\lambda)}(0) \\ &\quad + P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}G_{-1}(n)P_{n-1}^{(\lambda)}(0)\delta^{-1}. \end{aligned}$$

Sigue directamente de la Observación 48 que el coeficiente $P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}G_1(n)P_{n+1}^{(\lambda)}(0)$ es una función racional invertible para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Más aún, por el Corolario 2.5.6 tenemos que

$$G_{-1}(n) = L_0^{-1}(I + A)^{n+\lambda}\mathcal{D}_n^{(\lambda)}(\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1}(I + A)^{-n-\lambda+1}L_0.$$

Por lo tanto (2.6.113) implica que $G_{-1}(n)$ es una función racional de n que se anula en $n = 0$.

Teorema 2.9.1. Sea $\tilde{P}_n^{(\lambda)}$ la sucesión de polinomios mónicos definidos por la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} x\tilde{P}_n^{(\lambda)}(x) &= \tilde{P}_{n+1}^{(\lambda)}(x) \\ &+ (J + n + a + \lambda(I + A)^{-1} + aL_0^{-1}(I + A)^\lambda \mathcal{D}_n^{(\lambda)} A^* (\mathcal{D}_n^{(\lambda)})^{-1} (I + A)^{-\lambda} L_0) \tilde{P}_n^{(\lambda)}(x) \\ &+ L_0^{-1}(I + A)^\lambda \mathcal{D}_n^{(\lambda)} (\mathcal{D}_{n-1}^{(\lambda)})^{-1} (I + A)^{-\lambda} L_0 \tilde{P}_{n-1}^{(\lambda)}(x). \end{aligned}$$

Entonces $(\tilde{P}_n^{(\lambda)}, P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}(I + A)^n, \Upsilon^{(\lambda)}(x)^{-1}, \mathfrak{J}^{(\lambda)}(x))$ es dual a $Q_x^{(\lambda)}$ y la siguiente relación de dualidad se cumple:

$$Q_x^{(\lambda)}(\rho(n)) = P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}(I + A)^n \tilde{P}_n^{(\lambda)}(\mathfrak{J}^{(\lambda)}(x)) \Upsilon^{(\lambda)}(x)^{-1}, \quad n, x \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. Si reemplazamos la condición de dualidad en la relación $\tau(\psi^{-1}(\mathfrak{J}^{(\lambda)})) \cdot Q_x^{(\lambda)} = Q_x^{(\lambda)} \cdot \sigma(\mathfrak{J}^{(\lambda)})$, obtenemos la relación de recurrencia del teorema con x reemplazado por $\mathfrak{J}^{(\lambda)}(x)$. Como $\mathfrak{J}^{(\lambda)}$ satisface la condición de Vandermonde en bloques con n reemplazado por x , un argumento similar al dado en (2.3.5) completa la prueba del teorema. \square

Corolario 2.9.2. La familia dual-dual $(\tilde{P}_n^{(\lambda)}, P_n^{(\lambda)}(0)^{-1}(I + A)^n, \Upsilon^{(\lambda)}(x)^{-1}, \mathfrak{J}^{(\lambda)}(x))$ se relaciona a los polinomios originales mónicos $P_n^{(\lambda)}$ de la siguiente forma

$$P_n^{(\lambda)}(x) = (I + A)^n \tilde{P}_n^{(\lambda)}(\mathfrak{J}^{(\lambda)}(x)).$$

Demostración. Usando la relación dual para $Q_x^{(\lambda)}$ y $\tilde{P}_n^{(\lambda)}$ del Teorema 2.9.1 y las relaciones duales para $P_n^{(\lambda)}$ y $Q_x^{(\lambda)}$ en (2.8.132) obtenemos el resultado. \square

CAPÍTULO 3

Polinomios matriciales excepcionales tipo Laguerre

Los resultados de este capítulo aparecen en “Matrix exceptional Laguerre polynomials.” *Studies in Applied Mathematics* [88]. Coautores: Erik Koelink y Pablo Román. Parte de este trabajo fue realizada durante una visita a la Radboud University, Nijmegen, Holanda.

3.1. Introducción

Las familias de polinomios ortogonales clásicas, es decir las familias de Hermite, Laguerre, y Jacobi, han sido muy estudiadas y se han encontrado aplicaciones tanto en matemática como en física debido a la propiedad de ser autofunciones de un operador diferencial de segundo orden. Estas tres familias son de hecho las únicas sucesiones $(p_n)_n$ de polinomios tales que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $\deg p_n = n$, p_n es ortogonal con respecto a una medida positiva y p_n es autofunción de un operador diferencial de orden dos.

En los últimos años, las familias clásicas han sido extendidas en diferentes direcciones. Por un lado, una extensión importante son los polinomios ortogonales matriciales, ver Sección 1.5. Por otro lado, una extensión reciente son los llamados polinomios ortogonales excepcionales, ver Sección 1.4. Tal como ha sido mencionado anteriormente, en analogía con el contexto clásico, estos polinomios son ortogonales, son autofunciones de un operador diferencial de segundo orden con coeficientes racionales, pero perdemos algunos grados, i.e., hay un número finito de grados para los cuales no existe tal autofunción polinomial.

El objetivo de este capítulo es vincular estas dos extensiones de los polinomios ortogonales clásicos. Dicho de otra forma, daremos un análogo matricial de polinomios excepcionales considerando factorizaciones adecuadas de operadores diferenciales de orden dos y realizando transformaciones de Darboux. En este capítulo solo consideramos transformaciones de Darboux de un paso, pero la mayoría de los resultados podrían extenderse a un número arbitrario de pasos. El capítulo está organizado en dos partes. La primer parte consta de las Secciones 3.2– 3.6 en las que discutimos una construcción general de polinomios excepcionales matriciales. Esta construcción está inspirada en trabajos del caso escalar, ver por ejemplo [60, 66, 67]. La segunda parte consta de las Secciones 3.7,– 3.10, en las que aplicamos la teoría general

desarrollada en las secciones previas a un caso especial, los polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre. Estos polinomios se construyen a partir de los polinomios matriciales de tipo Laguerre introducidos en [90].

En la Sección 3.2 consideramos un operador diferencial de orden dos T_0 con coeficientes matriciales actuando por la derecha y una autofunción ϕ de T_0 , llamada *seed function*. Siguiendo a [55] y [71] obtenemos un operador diferencial de orden dos T_1 y un operador A de orden uno con la propiedad de entrelazamiento $T_0A = AT_1$. Más aún, el operador de entrelazamiento A es construido de forma tal que preserva polinomios y la regularidad de los coeficientes directores de los polinomios. Mostramos que si la *seed function* tiene autovalor escalar λ , entonces el operador T_1 puede obtenerse directamente de T_0 realizando una transformación de Darboux, i.e, los operadores se descomponen como $T_0 = AB + \lambda$ y $T_1 = BA + \lambda$ para un operador de primer orden B .

En la Sección 3.3 consideramos el caso en el que T_0 es simétrico con respecto al producto interno matricial inducido por un peso matricial W . Introducimos el peso excepcional \widehat{W} y mostramos que el operador T_1 es simétrico con respecto al producto interno inducido por \widehat{W} . También discutimos extensiones autoadjuntas de operadores diferenciales.

En la Sección 3.4 probamos el teorema principal del capítulo. Asumimos que existe una sucesión de polinomios ortogonales matriciales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ en $L^2(W)$ autofunciones de T_0 para cada $n \in \mathbb{N}_0$ i.e. $P_n \cdot T_0 = \Gamma_n \cdot P_n$, introducimos la sucesión de polinomios matriciales excepcionales $(\widehat{P}_n)_n$, y probamos que son autofunciones de T_1 . Más aún mostramos que los polinomios $(\widehat{P}_n)_n$ son ortogonales con respecto a \widehat{W} y que, si el autovalor $\lambda \notin \sigma(\Gamma_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces la norma cuadrada de \widehat{P}_n es una matriz definida positiva invertible. A diferencia del caso escalar, los polinomios ortogonales matriciales pueden ser autofunciones de diferentes operadores diferenciales de segundo orden. Por lo tanto los polinomios excepcionales \widehat{P}_n dependen de la elección del operador T_0 así como también de la *seed function* ϕ . Bajo ciertas hipótesis, damos una condición para la densidad de polinomios excepcionales.

En la Sección 3.5 estudiamos familias de polinomios excepcionales matriciales obtenidas a partir de un operador diferencial que es diagonalizable vía una matriz no constante. Mostramos que estos polinomios pueden ser descritos en términos de los polinomios excepcionales escalares. Finalmente, en la Sección 3.6 extenderemos algunas de las propiedades de las álgebras de Fourier dadas en [24] para el peso excepcional \widehat{W} .

Finalmente consideramos un ejemplo explícito de polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre de tamaño arbitrario. En la Sección 3.7 introducimos el peso matricial de tipo Laguerre y el operador diferencial al cual le aplicamos la teoría general de las secciones anteriores. En la Sección 3.8, motivados por la teoría de singularidades regulares en este contexto, ver Apéndice E, damos una *seed function* adecuada para el operador diferencial de Laguerre. En las Secciones 3.9 y 3.10 introducimos un operador de entrelazamiento A para el ejemplo de Laguerre, el cual preserva los polinomios y la regularidad de los coeficientes directores de los polinomios, el peso con respecto al cual los polinomios excepcionales de tipo Laguerre son ortogonales y la sucesión de polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre. Finalmente, en la Sección 3.11 presentamos información numérica sobre los ceros de los polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre.

3.2. Operadores de orden dos, factorizaciones y transformaciones de Darboux

En esta sección discutiremos una factorización de un operador diferencial de orden dos T_0 como composición de dos operadores diferenciales de orden uno. Daremos la correspondiente factorización de Darboux. En esta sección trabajaremos con operadores diferenciales algebraicamente, y asumiremos que las funciones son suficientemente diferenciables. Recomendamos la lectura de [38], [105], [106] donde se pone de manifiesto el rol de las transformaciones de Darboux en la búsqueda de soluciones a un problema biespectral, como puede ser el caso de familias de polinomios ortogonales clásicos, polinomios ortogonales matriciales y familias de polinomios ortogonales que puedan ser clasificadas como excepcionales. Para el caso no conmutativo en [25] se introduce un tipo general de transformaciones matriciales de Darboux haciendo uso de las álgebras de Fourier, que permiten obtener familias de soluciones a un problema biespectral matricial.

3.2.1. *Seed function* y relaciones de entrelazamiento

Consideremos un operador diferencial de orden dos

$$T_0 = \frac{d^2}{dx^2}F_2 + \frac{d}{dx}F_1 + F_0, \quad (3.2.1)$$

donde F_0 , F_1 , y F_2 son funciones matriciales $N \times N$. Asumimos que F_0 , F_1 , y F_2 son funciones racionales, i.e. cada entrada es una función racional, es decir $T_0 \in \mathcal{M}_N$. Observemos que T_0 actúa por la derecha tanto en funciones vectoriales fila, como en funciones matriciales, lo cual puede ser visto como la acción en N funciones vectoriales fila. Sea ϕ una autofunción matricial de T_0 de autovalor matricial Λ , i.e.

$$\phi \cdot T_0 = \Lambda \cdot \phi. \quad (3.2.2)$$

Observación 64. Dada una autofunción ϕ del operador T_0 y una matriz constante M que conmuta con Λ , la función $M\phi$ es también una autofunción de T_0 , dado que

$$\phi \cdot T_0 = \Lambda \cdot \phi \quad \Rightarrow \quad M\phi \cdot T_0 = (M\Lambda \cdot \phi) = \Lambda \cdot (M\phi).$$

Asumimos que ϕ es una solución clásica en un intervalo (a, b) (posiblemente infinito). Este intervalo está relacionado al espacio L^2 en la Sección 3.3. Observemos que si Λ es una matriz diagonal, cada fila de ϕ es un autovector. Asumimos que $\phi(x)$ es invertible como función matricial $N \times N$, excepto quizá en un conjunto finito de puntos $x \in \mathbb{C}$. La función matricial ϕ es la *seed function*. Aplicando [55, Theorem 1.1] y [71, Theorem 1], existen operadores diferenciales \widehat{A} , \widehat{T}_1 tales que la relación de entrelazamiento

$$\widehat{A}\widehat{T}_1 = T_0\widehat{A} \quad (3.2.3)$$

se satisface como operadores diferenciales actuando por la derecha. Más aún, los operadores \widehat{A} , \widehat{T}_1 están dados por

$$\widehat{A} = \frac{d}{dx} - \phi^{-1}\phi', \quad \widehat{T}_1 = \frac{d^2}{dx^2}G_2 + \frac{d}{dx}G_1 + G_0, \quad (3.2.4)$$

donde los coeficientes G_2 , G_1 y G_0 en \widehat{T}_1 están definidos por

$$\begin{aligned} G_2(x) &= F_2(x), & G_1(x) &= F_2'(x) + F_1(x) + [\phi(x)^{-1}\phi'(x), F_2(x)], \\ G_0(x) &= F_1'(x) - F_1(x)\phi(x)^{-1}\phi'(x) + 2(\phi(x)^{-1}\phi'(x))'F_2(x) + \phi(x)^{-1}\phi'(x)G_1(x) + F_0(x), \end{aligned}$$

y el conmutador es el conmutador estándar $[\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)] = \mathcal{A}(x)\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(x)\mathcal{A}(x)$. Asumimos que $\phi^{-1}\phi'$ es una función racional matricial, de forma tal que \widehat{T}_1 pertenece a la misma clase de operadores.

Observación 65. En [55, Theorem 1.1] el operador de entrelazamiento \widehat{A} está dado como un quasideterminante de un Wronskiano, ver Apéndice B. En nuestro contexto, como \widehat{A} actúa por la derecha, la expresión del Wronskiano es la transpuesta de la dada en [55, Theorem 1.1]. Obtenemos la siguiente expresión:

$$\widehat{A} = \begin{vmatrix} \phi & \phi' \\ 1 & \frac{d}{dx} \end{vmatrix}_{2,2}. \quad (3.2.5)$$

Observación 66. A partir de la relación de entrelazamiento (3.2.3), obtenemos que si P es una autofunción matricial de T_0 con autovalor matricial Γ , entonces $P\widehat{A} = P \cdot \widehat{A}$ es autofunción matricial de \widehat{T}_1 con el mismo autovalor:

$$P\widehat{A} \cdot \widehat{T}_1 = P \cdot T_0\widehat{A} = \Gamma \cdot P\widehat{A}.$$

Similarmente, autofunciones fila de T_0 son llevadas a autofunciones fila de \widehat{T}_1 por \widehat{A} con el mismo autovalor.

3.2.2. Seed function con autovalor escalar

Agregamos la condición extra de que el autovalor matricial Λ de la *seed function* en (3.2.2) es un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por la matriz identidad. Imponemos esta restricción, dado que los operadores actúan por la derecha y los autovalores por la izquierda, mientras que en la factorización de Darboux incorporamos el autovalor al operador diferencial. Así el rol del autovalor cambia y necesitamos por lo tanto tener un autovalor que conmute con el operador. Consideremos el siguiente operador diferencial de orden uno

$$\widehat{B} = \frac{d}{dx}B_1 + B_0, \quad (3.2.6)$$

donde $B_1(x) = F_2(x)$, $B_0(x) = F_1(x) + \phi(x)^{-1}\phi'(x)F_2(x)$ son funciones racionales matriciales.

Lema 3.2.1. *Sea \widehat{A} como en (3.2.4), y \widehat{B} como en (3.2.6). Entonces como operadores diferenciales actuando por la derecha tenemos que $T_0 = \widehat{A}\widehat{B} + \lambda$ y $\widehat{T}_1 = \widehat{B}\widehat{A} + \lambda$.*

Demostración. La demostración sigue aplicando la definición de \widehat{A} y \widehat{B} en (3.2.4), (3.2.6). Realizando un cálculo directo obtenemos

$$\widehat{A}\widehat{B} + \lambda = \frac{d^2}{dx^2}F_2(x) + \frac{d}{dx}F_1(x) - \phi(x)^{-1}\phi''(x)F_2(x) - \phi(x)^{-1}\phi'(x)F_1(x) + \lambda = T_0,$$

donde en la primer igualdad usamos que $(\phi(x)^{-1})' = -\phi(x)^{-1}\phi'(x)\phi(x)^{-1}$, y en la segunda igualdad usamos que ϕ es autofunción de T_0 de autovalor λ . De forma similar obtenemos que

$$\widehat{B}\widehat{A} + \lambda = \frac{d^2}{dx^2}G_2(x) + \frac{d}{dx}G_1(x) + B_0'(x) - B_0(x)\phi(x)^{-1}\phi'(x) + \lambda,$$

usando (3.2.4), (3.2.6). Aplicando nuevamente $\phi \cdot T_0 = \lambda \cdot \phi$ vemos mediante un cálculo sencillo que $B_0'(x) - B_0(x)\phi(x)^{-1}\phi'(x) + \lambda = G_0(x)$. Esto muestra que $\widehat{B}\widehat{A} + \lambda = \widehat{T}_1$. \square

Sea Pol el espacio de polinomios fila. Asumimos que existe un polinomio matricial $\Upsilon(x)$ tal que el operador

$$A = \widehat{A}\Upsilon = \frac{d}{dx}\Upsilon - \phi^{-1}\phi'\Upsilon \quad (3.2.7)$$

preserva Pol y la regularidad de coeficientes directores. En particular, asumimos que $\phi^{-1}\phi'\Upsilon$ es un polinomio. Tomando cualquier matriz invertible M en la Observación 64, obtenemos una nueva *seed function* $M\phi$ con autovalor λ . Sin embargo, sigue directamente de la Definición (3.2.7) que los operadores asociados a $M\phi$ y ϕ son iguales. El polinomio Υ es visto como el operador multiplicación actuando a derecha. Asumimos que el polinomio matricial Υ es invertible excepto en un conjunto finito. En la Sección 3.9, Υ será un polinomio escalar por la matriz identidad, y Υ^{-1} será una función racional por la matriz identidad. Podemos reescribir la relación de entrelazamiento (3.2.3) en términos de A como

$$AT_1 = T_0A, \quad T_1 = \Upsilon^{-1}\widehat{T}_1\Upsilon, \quad (3.2.8)$$

y en consecuencia $T_1 = \Upsilon^{-1}\widehat{B}\widehat{A}\Upsilon + \lambda$. Denotamos

$$B = \Upsilon^{-1}\widehat{B} = \frac{d}{dx}\Upsilon^{-1}F_2 - \Upsilon^{-1}\Upsilon'\Upsilon^{-1}F_2 + \Upsilon^{-1}F_1 + \Upsilon^{-1}\phi^{-1}\phi'F_2, \quad (3.2.9)$$

utilizando las expresiones explícitas de B_0 y B_1 como en (3.2.6). Por el Lema 3.2.1 tenemos que $T_0 = AB + \lambda$ y $T_1 = BA + \lambda$ como operadores diferenciales actuando por la derecha.

3.3. Operadores diferenciales simétricos y pesos excepcionales

Recordemos que una medida matricial μ tomando valores en las matrices definidas positivas $N \times N$ puede ser escrita como una función matricial V , tomando valores en las matrices definidas positivas τ_μ -p.p. por la medida traza τ_μ , la cual es una medida de Borel en \mathbb{R} , ver [12, 29] para más información. Entonces, las funciones vectoriales fila cuadrado integrables son funciones medibles $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$ que satisfacen $\int_{\mathbb{R}} f(x)V(x)(f(x))^* d\tau_\mu(x) < \infty$. Luego de identificar las funciones τ_μ -p.p. obtenemos el espacio de Hilbert $L^2(\mu)$ de funciones vectoriales fila cuadrado integrables. En particular, asumimos que $\int_{\mathbb{R}} f(x)V(x)(f(x))^* d\tau_\mu(x) = 0$ implica $f = 0$ τ_μ -p.p. lo cual significa que el núcleo de V es trivial τ_μ -p.p. Asumimos que τ_μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue dx en algún intervalo (a, b) , posiblemente infinito. Entonces ponemos $W = V \frac{d\tau_\mu}{dx}$, y ésta es una función matricial definida positiva con soporte en el intervalo (a, b) . Asumimos que W tiene momentos finitos de todos los órdenes, de modo que $\text{Pol} \subset L^2(W)$, en donde usamos $L^2(W) = L^2(\mu)$ para poner énfasis en la función peso W . De ahora en adelante, asumiremos que las entradas del peso matricial W son funciones C^2 en (a, b) . Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ el correspondiente producto interno. Asumimos que $T_0 = \frac{d^2}{dx^2}F_2 + \frac{d}{dx}F_1 + F_0$ es un operador diferencial de segundo orden que actúa a derecha, simétrico con respecto a W en los polinomios. Esto significa que asumimos que T_0 está bien definido en Pol , $p \cdot T_0 \in L^2(W)$ para todo $p \in \text{Pol}$ y

$$\langle p \cdot T_0, q \rangle_W = \langle p, q \cdot T_0 \rangle_W, \quad \forall p, q \in \text{Pol}. \quad (3.3.10)$$

Asumimos que Pol es denso en $L^2(W)$, lo cual en el caso clásico $N = 1$ se cumple si trabajamos con un problema de momentos determinado [2]. El problema de momentos matricial es discutido por Berg, ver [12].

Observación 67. Asumimos no solo que las entradas de W son funciones C^2 en (a, b) , si no que también las entradas de F_2 y las de F_1 son C^2 en (a, b) . Más aún, asumimos que todos los términos en (3.3.11), (3.3.12), y (3.3.13) son integrables en (a, b) . Entonces, realizando integración por partes, ver Teorema 1.5.12, el operador T_0 es simétrico con respecto a W si y sólo si $F_2(x)W(x)$ y $(F_2(x)W(x))' - F_1(x)W(x)$ se anulan en los extremos a y b y las ecuaciones de simetría

$$F_2W = WF_2^*, \quad (3.3.11)$$

$$(F_2W)' = \frac{1}{2}WF_1^* + \frac{1}{2}F_1W, \quad (3.3.12)$$

$$(F_2W)'' = (F_1W)' - F_0W + WF_0^*, \quad (3.3.13)$$

se satisfacen. Si tomamos la derivada de (3.3.12) y restamos (3.3.13) multiplicada por dos, podemos eliminar el coeficiente F_2 . Obtenemos $(WF_1^* - F_1W)' = 2(WF_0^* - F_0W)$.

Definición 3.3.1. El peso matricial excepcional está definido por

$$\widehat{W}(x) = \Upsilon(x)^{-1}W(x)F_2(x)^*(\Upsilon(x)^{-1})^*, \quad x \in (a, b).$$

Notemos que la Definición 3.3.1 afirma que \widehat{W} es un peso. Sin embargo, pese a que (3.3.11) implica que \widehat{W} es autoadjunto, no es en general definido positivo y no es claro que tenga momentos finitos de todos los órdenes. Sin embargo, si WF_2^* es un peso, también lo es \widehat{W} . Esto ocurre, por ejemplo, en el caso en que F_2 sea una función no negativa por la matriz identidad en (a, b) como en la Sección 3.7. Asumiremos que \widehat{W} es definido positivo en el intervalo (a, b) y que tiene momentos finitos de todos los órdenes. Esta última condición involucra al polinomio matricial Υ .

Asumiendo que \widehat{W} es un peso con momentos finitos de todos los órdenes, queremos considerar a A como un operador de $L^2(W)$ en $L^2(\widehat{W})$ y a B como un operador de $L^2(\widehat{W})$ en $L^2(W)$, y queremos relacionar estos operadores con los adjuntos, ver Proposición 3.3.3. Para esto necesitamos un análogo de integración por partes para estos operadores, comparar con Observación 67, que probaremos ahora.

Lema 3.3.2. Sea T_0 el operador (3.2.1), asumimos que T_0 es simétrico con respecto a W en (a, b) . Asumimos que ϕ es una seed function de T_0 con autovalor escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Más aún, asumimos que

$$x \mapsto \phi(x)'F_2(x)W(x)\phi(x)^*, \quad x \mapsto \phi(x)F_1(x)W(x)\phi(x)^*,$$

se anulan en el mismo extremo a o b para el peso W . Entonces

$$(WF_2^*)' = WF_1^* + WF_2^*(\phi^{-1}\phi')^* - (\phi^{-1}\phi')WF_2^*, \quad (3.3.14)$$

$$\phi W(\phi'F_2 + \frac{1}{2}\phi F_1)^* = (\phi'F_2 + \frac{1}{2}\phi F_1)W\phi^*, \quad (3.3.15)$$

para todo $x \in (a, b)$.

Demostración. Notemos que (3.3.14) y (3.3.15) son equivalentes usando (3.3.11) y (3.3.12). Entonces es suficiente probar (3.3.15), la cual puede ser reescrita

$$\phi WF_2^*(\phi')^* + \frac{1}{2}\phi WF_1^*\phi^* = \phi'F_2W\phi^* + \frac{1}{2}\phi F_1W\phi^*, \quad (3.3.16)$$

y por hipótesis ambos miembros se anulan en alguno de los extremos a o b . Todos los términos en (3.3.16) son C^1 en (a, b) , ya que hemos asumido que ϕ es una solución clásica en (a, b) . Entonces es suficiente mostrar que las derivadas de ambos miembros son iguales. Tomando derivada con respecto a x en ambos miembros de (3.3.16), vemos que debemos mostrar que

$$\begin{aligned} & \phi'WF_2^*(\phi')^* + \phi(WF_2^*)'(\phi')^* + \phi WF_2^*(\phi'')^* + \frac{1}{2}\phi'WF_1^*\phi^* + \frac{1}{2}\phi(WF_1^*)'\phi^* + \frac{1}{2}\phi WF_1^*(\phi')^* \\ &= \phi''F_2W\phi^* + \phi'(F_2W)'\phi^* + \phi'F_2W(\phi')^* + \frac{1}{2}\phi'F_1W\phi^* + \frac{1}{2}\phi(F_1W)'\phi^* + \frac{1}{2}\phi F_1W(\phi')^*. \end{aligned}$$

Observemos que el término $\phi'WF_2^*(\phi')^*$ del lado izquierdo es igual a $\phi'F_2W(\phi')^*$ en el lado derecho por (3.3.11). Ahora utilizamos (3.3.12) en los términos $\phi(WF_2^*)'(\phi')^*$ y $\phi'(F_2W)'\phi^*$ y (3.3.13) en los términos $\frac{1}{2}\phi(WF_1^*)'\phi^*$ y $\frac{1}{2}\phi(F_1W)'\phi^*$, para ver que debemos probar que

$$\begin{aligned} & \phi W(\phi''F_2 + \phi'F_1 + \phi F_0)^* + \frac{1}{2}\phi F_1W(\phi')^* + \frac{1}{2}\phi'WF_1^*\phi^* + \frac{1}{2}\phi(WF_2^*)''\phi^* \\ &= (\phi''F_2 + \phi'F_1 + \phi F_0)W\phi^* + \frac{1}{2}\phi'WF_1^*\phi^* + \frac{1}{2}\phi(F_2W)''\phi^* + \frac{1}{2}\phi F_1W(\phi')^*. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Aplicando (3.3.11) y el hecho de que ϕ es una *seed function* de T_0 con autovalor escalar λ , sigue que (3.3.17) es válida. \square

Ahora podemos relacionar A y B . Recordemos que A ha sido tomado de forma tal que preserva polinomios. Como hemos asumido que los pesos matriciales tienen momentos finitos de todos los órdenes, vemos que A lleva Pol en $L^2(\widehat{W})$, donde como antes asumimos que \widehat{W} es una función peso en (a, b) . De ahora en adelante, asumiremos que Pol es denso en $L^2(\widehat{W})$.

Proposición 3.3.3. *Asumiendo que B lleva Pol en $L^2(W)$ y que la condición de borde*

$$(pWF_2^*(\Upsilon^{-1})^*q^*) \Big|_a^b = 0, \quad \forall p, q \in \text{Pol},$$

se satisface, entonces $\langle p \cdot A, q \rangle_{\widehat{W}} = -\langle p, q \cdot B \rangle_W$ para todos $p, q \in \text{Pol}$.

Demostración. Utilizando la definición de A y realizando integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \langle p \cdot A, q \rangle_{\widehat{W}} &= \int_a^b p' \Upsilon \widehat{W} q^* - \int_a^b p \phi^{-1} \phi' \Upsilon \widehat{W} q^* \\ &= (p \Upsilon \widehat{W} q^*) \Big|_a^b - \int_a^b p (\Upsilon \widehat{W} q^*)' - \int_a^b p \phi^{-1} \phi' \Upsilon \widehat{W} q^*, \end{aligned}$$

donde omitimos los argumentos para facilitar la notación. Aplicando la Definición 3.3.1 y la condición de borde obtenemos

$$-\langle p \cdot A, q \rangle_{\widehat{W}} = \int_a^b p W \left(W^{-1} (\Upsilon \widehat{W} q^*)' + W^{-1} \phi^{-1} \phi' \Upsilon \widehat{W} q^* \right).$$

Queda por demostrar que el término entre paréntesis es igual a $(qB)^*$. Aplicando la Definición 3.3.1 vemos que el adjunto del término entre paréntesis es igual a

$$q' \Upsilon^{-1} F_2 + q \left((\Upsilon^{-1} F_2 W)' W^{-1} + \Upsilon^{-1} F_2 W (\phi^{-1} \phi')^* W^{-1} \right).$$

Comparando con (3.2.9) vemos que el término que acompaña a la derivada es correcto, y para reconocerlo con qB debemos mostrar que

$$(\Upsilon^{-1}F_2W)'W^{-1} + \Upsilon^{-1}F_2W(\phi^{-1}\phi')^*W^{-1} = -\Upsilon^{-1}\Upsilon'\Upsilon^{-1}F_2 + \Upsilon^{-1}F_1 + \Upsilon^{-1}\phi^{-1}\phi'F_2.$$

Escribiendo $(\Upsilon^{-1}F_2W)'W^{-1} = -\Upsilon^{-1}\Upsilon'\Upsilon^{-1}F_2 + \Upsilon^{-1}(F_2W)'W^{-1}$, vemos que $-\Upsilon^{-1}\Upsilon'\Upsilon^{-1}F_2$ se cancela en ambos miembros. Multiplicando la igualdad restante a izquierda por Υ y a derecha por W , vemos que debemos mostrar que

$$F_2'W + F_2W' + F_2W(\phi^{-1}\phi')^* = F_1W + \phi^{-1}\phi'F_2W.$$

A su vez, esto es equivalente al adjunto de (3.3.14). \square

Ejemplo. Mostraremos que el Lema 3.3.2 es una generalización de las ecuaciones de Pearson. Lo haremos para el caso de [90], pero esto puede ser realizado para otros ejemplos de esta naturaleza tanto para operadores diferenciales como para operadores en diferencias [53, 82, 86]. Sea T_0 el operador diferencial de orden dos definido en [90, Corollary 6.3], $T_0 = \frac{d^2}{dx^2}\Phi(x)^* + \frac{d}{dx}\Psi(x)^*$, donde Φ , respectivamente Ψ , es un polinomio matricial explícito de grado ≤ 2 , respectivamente ≤ 1 , ver [90, Proposition 5.1, Proposition 5.2]. Consideremos la *seed function* $\phi = P_0^{(\alpha, \nu)} = I$ con $\lambda = 0$. Ahora tomamos $\Upsilon = I$ y tenemos $A = \frac{d}{dx}$ y $B = \frac{d}{dx}\Phi^* + \Psi^*$, el cual es denotado por $S^{(\alpha, \nu)}$ en [90, Proposition 6.1]. En este caso, W está definido como en [90], el cual recordamos en (3.7.29), y \widehat{W} es el mismo peso pero con ν reemplazado por $\nu + 1$. Entonces el resultado de la Proposición 3.3.3 es [90, Proposition 6.1], y (3.3.14) es la *ecuación de Pearson débil* $(W\Phi)' = W\Psi$. Observemos que, los polinomios matriciales $P_n^{(\alpha, \nu)}$ con $n \geq 1$ no satisfacen los requisitos de *seed function*, dado que el autovalor matricial no es un múltiplo de la identidad. En [90, Corollary 6.3] se da la expresión del autovalor.

Observación 68. En el caso escalar $N = 1$, (3.3.14) se reduce a $(WF_2)' = WF_1$, la cual es una *ecuación de Pearson débil* como en el Ejemplo 3.3. Esta ecuación puede resolverse haciendo $W = \frac{1}{F_2} \exp\left(\int \frac{F_1}{F_2}\right)$.

Asumiendo que Pol es denso en $L^2(W)$ y $L^2(\widehat{W})$, que A preserva Pol y B lleva Pol en $L^2(W)$, podemos ver a A y B como operadores densamente definidos

$$\begin{aligned} A: D(A) = \text{Pol} \subset L^2(W) &\rightarrow L^2(\widehat{W}), \\ B: D(B) = \text{Pol} \subset L^2(\widehat{W}) &\rightarrow L^2(W), \end{aligned}$$

ver Apéndice D para un repaso sobre operadores no acotados. Entonces la Proposición 3.3.3 muestra que el adjunto de A es un operador densamente definido, y que A admite una extensión cerrada. Similarmente, B es un operador densamente definido. Denotamos las clausuras por \overline{A} y \overline{B} con dominios $D(\overline{A})$ y $D(\overline{B})$. Más aún, la Proposición 3.3.3 muestra que $\overline{A} \subset -\overline{B}^*$ y $\overline{B} \subset -\overline{A}^*$. En lo que sigue asumimos que T_0 está definido en $\text{Pol} \subset L^2(W)$ y que el operador $T_0: \text{Pol} \subset L^2(W) \rightarrow L^2(W)$ es esencialmente autoadjunto. Entonces tenemos las siguientes inclusiones para operadores no acotados en $L^2(W)$:

$$T_0 = AB + \lambda \subset \overline{A}\overline{B} + \lambda \subset -\overline{A}\overline{A}^* + \lambda \subset \overline{B}^*\overline{A}^* + \lambda \subset (\overline{A}\overline{B})^* + \lambda \subset T_0^* = \overline{T_0}.$$

Como $\overline{T_0}$ y $-\overline{A}\overline{A}^* + \lambda$ son autoadjuntos para $\lambda \in \mathbb{R}$, ver por ejemplo [108, Chapter 13], obtenemos

$$-\overline{A}\overline{A}^* + \lambda = \overline{B}^*\overline{A}^* + \lambda = (\overline{A}\overline{B})^* + \lambda = T_0^* = \overline{T_0}, \quad (3.3.18)$$

como operadores actuando por la derecha en $L^2(W)$. Similarmente, como operadores actuando por la derecha en $L^2(\widehat{W})$,

$$T_1 = BA + \lambda \subset \overline{B} \overline{A} + \lambda \subset -\overline{A}^* \overline{A} + \lambda \subset \overline{A}^* \overline{B}^* + \lambda \subset (\overline{B} \overline{A})^* + \lambda,$$

definimos

$$S_1 = -\overline{A}^* \overline{A} + \lambda \quad (3.3.19)$$

como la extensión autoadjunta apropiada de T_1 actuando por la derecha. De acuerdo a [32, Theorem 2], tenemos que $\sigma(\overline{T_0}) \setminus \{\lambda\} = \sigma(S_1) \setminus \{\lambda\}$. Entonces el espectro de los operadores autoadjuntos $\overline{T_0}$ y S_1 es el mismo salvo quizá en un punto. Más aún, $\sigma(\overline{T_0})$ y $\sigma(S_1)$ están contenidos en $(-\infty, \lambda]$.

3.4. Polinomios matriciales excepcionales

Asumimos que se satisfacen todas las condiciones de las Secciones 3.2 y 3.3, es decir:

1. **En la *seed function*:** Existe una *seed function* ϕ con autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ para el operador T_0 . La función $\phi(x)$ es invertible como matriz $N \times N$, excepto en un conjunto finito de puntos $x \in \mathbb{C}$. Además asumimos que $\phi^{-1}\phi'$ es una función matricial con entradas racionales.
2. **En el operador de entrelazamiento A :** Existe un polinomio matricial Υ tal que el operador de entrelazamiento $A = \frac{d}{dx}\Upsilon - \phi^{-1}\phi\Upsilon$ preserva Pol y la regularidad de los coeficientes directores. El polinomio matricial Υ es invertible excepto en un conjunto finito.
3. **En las funciones peso:** Las funciones matriciales peso W y \widehat{W} son definidas positivas y tienen momentos finitos de todos los órdenes. Pol es denso en $L^2(W)$ y $L^2(\widehat{W})$.
4. **En el operador T_0 :** El operador T_0 está definido en $\text{Pol} \subset L^2(W)$ y $T_0: \text{Pol} \subset L^2(W) \rightarrow L^2(W)$ es esencialmente autoadjunto.
5. **En el operador B :** El operador B en (3.2.9) lleva Pol en $L^2(W)$.
6. **Condiciones de borde:** $x \mapsto \phi(x)'F_2(x)W(x)\phi(x)^*$ y $x \mapsto \phi(x)F_1(x)W(x)\phi(x)^*$, se anulan en el mismo extremo a o b del peso W . La condición $(pWF_2^*(\Upsilon^{-1})^*q^*)|_a^b = 0$, $\forall p, q \in \text{Pol}$ se satisface.

Además asumimos que existe una sucesión de polinomios ortogonales matriciales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ en $L^2(W)$, i.e. cada fila de P_n es un polinomio de grado n en $L^2(W)$, tal que $P_n(x) = x^n + \dots$ es un polinomio mónico y las relaciones de ortogonalidad

$$\int_a^b P_n(x)W(x)(P_m(x))^* dx = \delta_{m,n}H_n \quad (3.4.20)$$

se satisfacen. Aquí la integración se realiza entrada a entrada, de modo que el producto interno de la i -ésima fila de P_n y la j -ésima fila de P_m corresponde a la entrada (i, j) del lado derecho, es decir, $\delta_{m,n}(H_n)_{i,j}$. Nótese, en particular, que H_n es una matriz definida positiva. Así que también podemos definir un producto interno matricial en funciones matriciales para el cual cada fila está contenida en $L^2(W)$. El correspondiente producto interno matricial también se

denota por $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$. Más aún, asumimos que P_n es una autofunción de T_0 para cada $n \in \mathbb{N}_0$, i.e.

$$P_n \cdot T_0 = \Gamma_n \cdot P_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.4.21)$$

Notemos que esto implica que los coeficientes F_i de T_0 son polinomios matriciales de grado a lo sumo i para $i \in \{0, 1, 2\}$, ver Proposición 1.5.11 y entonces T_0 preserva Pol.

Teorema 3.4.1. *Consideramos los polinomios ortogonales mónicos $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, donde la ortogonalidad es con respecto a W tal como en (3.4.20). Más aún asumimos que cada P_n es una autofunción matricial de T_0 como en (3.4.21). Entonces la sucesión de polinomios matriciales $(\widehat{P}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, donde $\widehat{P}_n = P_n \cdot A$, es un conjunto de autofunciones matriciales de S_1 . Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, el polinomio \widehat{P}_n satisface*

$$\widehat{P}_n \cdot T_1 = \Gamma_n \cdot \widehat{P}_n,$$

donde T_1 fue dado en (3.2.8) y S_1 es la extensión autoadjunta de T_1 dada en (3.3.19). Más aún, sea \widehat{W} tal como en la Definición 3.3.1:

$$\int_a^b \widehat{P}_n(x) \widehat{W}(x) (\widehat{P}_m(x))^* dx = \delta_{m,n} \widehat{H}_n, \quad \widehat{H}_n = H_n(\lambda - \Gamma_n)^*,$$

donde \widehat{H}_n es una matriz definida positiva. Si asumimos $\lambda \notin \sigma(\Gamma_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $\det \widehat{H}_n \neq 0$.

Demostración. Como S_1 extiende a $BA + \lambda$ y $\widehat{P}_n \cdot B = P_n \cdot AB = (\Gamma_n - \lambda) \cdot P_n$ es un polinomio, vemos que

$$\widehat{P}_n \cdot S_1 = (\Gamma_n - \lambda) \cdot P_n \cdot A + \lambda \widehat{P}_n = \Gamma_n \cdot \widehat{P}_n,$$

ver Observación 66. Aplicando la Proposición 3.3.3 para vectores fila polinomiales, podemos extenderla a $\langle P \cdot A, Q \rangle_{\widehat{W}} = -\langle P, Q \cdot B \rangle_W$ para todo P, Q polinomios matriciales. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \widehat{P}_n, \widehat{P}_m \rangle_{\widehat{W}} &= \langle P_n \cdot A, P_m \cdot A \rangle_{\widehat{W}} = -\langle P_n, P_m \cdot AB \rangle_W \\ &= \langle P_n, P_m \cdot (\lambda - T_0) \rangle_W = \delta_{n,m} \mathcal{H}_n(\lambda - \Gamma_n)^*. \end{aligned}$$

Notemos que $H_n(\lambda - \Gamma_n)^* = (\lambda - \Gamma_n)H_n$, dado que podemos también tomar AB en la primer entrada del producto interno. Por positividad del producto interno vemos que $H_n(\lambda - \Gamma_n)^*$ es una matriz definida positiva. Más aún, si $\lambda \notin \sigma(\Gamma_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $\det \widehat{H}_n \neq 0$. \square

Usualmente el grado de \widehat{P}_n no es n , es mayor, dado que en general A no preserva el grado de los polinomios. Más aún, el Teorema 3.4.1 no afirma que las filas de $(\widehat{P}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ forman una base de $L^2(\widehat{W})$.

Observación 69. Observemos que los polinomios \widehat{P}_n dependen del operador T_0 , de la *seed function* ϕ y del polinomio Υ . Los llamamos polinomios matriciales excepcionales asociados a (T_0, ϕ, Υ) .

Proposición 3.4.2. *Las filas de \widehat{P}_n , $n \in \mathbb{N}_0$, son densas en $L^2(\widehat{W})$ si y sólo si $\lambda \notin \sigma_p(S_1)$.*

Demostración. Consideramos $A: \text{Pol} \subset L^2(W) \rightarrow L^2(\widehat{W})$ y asumimos que $f \in L^2(\widehat{W})$ es ortogonal a $v\widehat{P}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y todo vector fila v . Entonces $0 = \langle v\widehat{P}_n, f \rangle_{\widehat{W}} = \langle vP_n \cdot A, f \rangle_{\widehat{W}}$, luego este es un funcional lineal continuo en $D(A) = \text{Pol}$. En particular, $f \in D(A^*) = D(\overline{A}^*)$ y $fA^* = 0$. Entonces $f \in D(S_1)$ y $f \cdot S_1 = \lambda \cdot f$. Luego si las filas de \widehat{P}_n , $n \in \mathbb{N}_0$, no son densas, existe una f no nula y $\lambda \in \sigma_p(S_1)$.

Recíprocamente, si $\lambda \in \sigma_p(S_1)$ tenemos $0 \neq f \in D(S_1) \subset D(\overline{A}^*)$ con $f \cdot S_1 = \lambda \cdot f$ en $L^2(\widehat{W})$, de modo que en particular $f\overline{A}^*A = 0$. Tomando producto interno con $f \in D(\overline{A}^*)$ obtenemos $\langle f \cdot \overline{A}^*, f \cdot \overline{A}^* \rangle_W = 0$ y $f \in \text{Ker}(\overline{A}^*)$. Entonces f es ortogonal a todo $v\widehat{P}_n$ tal como en el párrafo anterior. \square

3.5. Construcción de polinomios excepcionales vía un operador diagonalizable T_0

En esta sección estudiamos familias de polinomios excepcionales obtenidos a partir de un operador diferencial de segundo orden que es diagonalizable vía una matriz no constante.

Sean $w_1(x), \dots, w_N(x)$ un conjunto de pesos escalares clásicos tales que los w_i 's pertenecen a una de las familias de pesos clásicos de Jacobi, Laguerre o Hermite. Para cada $i = 1, \dots, N$, tomamos un operador diferencial simétrico de segundo orden \mathcal{L}_i con respecto a w_i .

Consideramos un peso matricial W con una descomposición LDU

$$W(x) = L(x)D(x)L(x)^*, \quad (3.5.22)$$

donde L es un polinomio matricial triangular inferior $N \times N$ con $L_{i,i} = 1$ para todo $i = 1, \dots, N$, y $D = \text{diag}(w_1, \dots, w_N)$. Observamos que la estructura de W coincide con las familias tipo Gegenbauer, Laguerre y Hermite estudiadas en [44, 82, 86, 90]. El operador diagonal $T_0^d = \text{diag}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_N)$ es simétrico con respecto al peso diagonal D . Escribimos

$$T_0^d = \frac{d^2}{dx^2}F_2^d + \frac{d}{dx}F_1^d + F_0^d.$$

Sea $T_0 = \frac{d^2}{dx^2}F_2(x) + \frac{d}{dx}F_1(x) + F_0(x)$ el operador diferencial de segundo orden obtenido conjugando T_0^d con L . Entonces los coeficientes F_i y F_i^d están relacionados por:

$$F_2L = LF_2^d, \quad F_1L = 2\frac{dL}{dx}F_2^d + LF_1^d, \quad F_0L = \frac{d^2L}{dx^2}F_2^d + \frac{dL}{dx}F_1^d + LF_0^d.$$

Observación 70. Sigue de [86, Proposition 4.2] que T_0 es simétrico con respecto a W si y sólo si T_0^d es simétrico con respecto a D . Observamos que dada ϕ autofunción de T_0 de autovalor Λ , ϕL es una autofunción de T_0^d con el mismo autovalor. Similarmente, dada ϕ^d autofunción de T_0^d , $\phi^d L^{-1}$ es una autofunción de T_0 .

Asumimos que todas las condiciones enumeradas al principio de la Sección 3.4 se satisfacen para el operador T_0^d . En particular asumimos que existe ϕ^d una *seed function* diagonal de T_0^d de autovalor escalar λ , y un polinomio matricial diagonal Υ , invertible salvo quizá en un conjunto finito, tales que el operador de entrelazamiento $A^d = \frac{d}{dx}\Upsilon - (\phi^d)^{-1}(\phi^d)'\Upsilon$ preserva Pol y preserva la regularidad de los coeficientes directores. El operador T_0^d se factoriza como $T_0^d = A^dB^d + \lambda$, donde B^d está dado en (3.2.9). El peso excepcional diagonal está dado por

$$\widehat{D}(x) = \Upsilon(x)^{-1}D(x)F_2^d(x)^*(\Upsilon(x)^{-1})^*.$$

Dado que $T_0 = LT_0^d L^{-1}$, podemos transferir esto al contexto no diagonal. Tomamos

$$T_0 = (LA^d L^{-1})(LB^d L^{-1}) + \lambda.$$

Asumimos que Υ es tomada de forma tal que $A = LA^d L^{-1}$ también preserva Pol. En el caso en que Υ conmuta con L^{-1} , el peso excepcional no diagonal está dado por

$$\widehat{W}(x) = \Upsilon(x)^{-1} W(x) F_2(x)^* (\Upsilon(x)^{-1})^* = L(x) \widehat{D}(x) L(x)^*.$$

Observación 71. Como $\phi^d L^{-1}$ es una autofunción de T_0 de autovalor escalar λ , puede ser usada para construir el operador de primer orden dado en (3.2.7). Explícitamente obtenemos

$$\frac{d}{dx} \Upsilon - (L(\phi^d)^{-1} (\phi^d)' L^{-1} - L' L^{-1}) \Upsilon. \quad (3.5.23)$$

Por otra parte,

$$LA^d L^{-1} = \frac{d}{dx} L \Upsilon L^{-1} - L(\phi^d)^{-1} (\phi^d)' \Upsilon L^{-1} + L' \Upsilon L^{-1}. \quad (3.5.24)$$

Si Υ conmuta con L^{-1} , entonces (3.5.23) y (3.5.24) coinciden.

La sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos para el peso diagonal D está dada por $P_n^d(x) = \text{diag}(p_n^1(x), \dots, p_n^N(x))$ donde $(p_n^i)_n$ son los polinomios ortogonales mónicos con respecto a w_i . Por otro lado, la sucesión de polinomios matriciales $Q_n(x) = P_n^d(x) L(x)^{-1}$ es ortogonal con respecto a W y cada $Q_n(x)$ es una autofunción de T_0 . Sin embargo, el coeficiente principal de Q_n es, en general, no invertible.

Aplicando el operador A a la sucesión Q_n obtenemos

$$\widehat{Q}_n(x) = Q_n(x) \cdot A = (P_n^d(x) L(x)^{-1}) \cdot (L(x) A^d L(x)^{-1}) = (P_n^d(x) \cdot A^d) L(x)^{-1}.$$

Por construcción, la sucesión $\widehat{Q}_n(x)$ satisface las siguientes propiedades:

1. \widehat{Q}_n es una autofunción de la transformada de Darboux de T_0 , ver (3.2.8),
2. $(\widehat{Q}_n)_n$ forma una sucesión ortogonal con respecto al peso \widehat{W} .

Observamos que no podemos garantizar la regularidad del coeficiente director de \widehat{Q}_n . Los polinomios $\widehat{P}_n(x) = P_n(x) \cdot A$, donde $(P_n)_n$ son los polinomios ortogonales mónicos con respecto a W , también satisfacen las propiedades (1) y (2). La regularidad de los coeficientes directores tampoco puede ser garantizada en este caso.

3.6. Álgebras de Fourier excepcionales

Recientemente, Casper y Yakimov [24] presentaron un par de álgebras isomorfas, conocidas como las álgebras de Fourier, las cuales están relacionadas a una sucesión de polinomios ortogonales matriciales para un peso W , ver 1.5.4. El objetivo de esta sección es extender algunas de las propiedades de las álgebras de Fourier dadas en [24] para el peso excepcional \widehat{W} . En lo que sigue, adaptamos la construcción de las álgebras de Fourier dadas en (1.5.32) a nuestro contexto:

Definición 3.6.1. Dada una sucesión de polinomios matriciales $(Q_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$, definimos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_L(Q) &= \{M \in \mathcal{N}_N : \exists \mathcal{D} \in \mathcal{M}_N, M \cdot Q = Q \cdot \mathcal{D}\} \subset \mathcal{N}_N, \\ \mathcal{F}_R(Q) &= \{\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N : \exists M \in \mathcal{N}_N, M \cdot Q = Q \cdot \mathcal{D}\} \subset \mathcal{M}_N.\end{aligned}\tag{3.6.25}$$

En esta definición, es importante notar que las álgebras de Fourier están vinculadas a una sucesión de polinomios matriciales $(Q_n)_n$, la cual no necesariamente es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un peso matricial W . En particular, si $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ es la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un peso matricial, fue probado en [24] que las álgebras de Fourier a izquierda y derecha $\mathcal{F}_L(P)$ y $\mathcal{F}_R(P)$ son isomorfas, ver Sección 1.5.4. Mostraremos que esto mismo ocurre para las álgebras de Fourier excepcionales $\mathcal{F}_L(\hat{P})$ y $\mathcal{F}_R(\hat{P})$. En la siguiente proposición, denotamos por Γ_n al autovalor tal como en (3.4.21).

Proposición 3.6.2. *Para cada $\widehat{M} \in \mathcal{F}_L(\hat{P})$, existe un único $\widehat{D} \in \mathcal{F}_R(\hat{P})$ tal que $\widehat{M} \cdot \hat{P}_n(x) = \hat{P}_n(x) \cdot \widehat{D}$. Recíprocamente, si asumimos que $(\Gamma_n - \lambda)$ es invertible para todo $n \in \mathbb{N}_0$ entonces para cada $\widehat{D} \in \mathcal{F}_R(\hat{P})$ existe un único $\widehat{M} \in \mathcal{F}_L(\hat{P})$ tal que $\widehat{M} \cdot \hat{P}_n(x) = \hat{P}_n(x) \cdot \widehat{D}$.*

Demostración. Para probar la primera afirmación es suficiente mostrar que si $\widehat{D} \in \mathcal{F}_R(\hat{P})$ es tal que $\hat{P}_n(x) \cdot \widehat{D} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $\widehat{D} = 0$. Asumimos que \widehat{D} es un operador de orden s dado por

$$\widehat{D} = \sum_{k=0}^s \partial_x^k F_k(x).$$

Observamos que si $\hat{P}_n(x) \cdot \widehat{D} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $P_n(x) \cdot A\widehat{D} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. En conclusión, por [24, 30], en particular por el Lema 1.5.14, $A\widehat{D} = 0$. Utilizando la expresión explícita (3.2.7) obtenemos que el coeficiente de ∂_x^{s+1} en $A\widehat{D}$ es igual a $\Upsilon(x)F_s(x)$ y como $\Upsilon(x)$ es invertible excepto en un conjunto finito, obtenemos que $F_s(x) = 0$. Procediendo recursivamente obtenemos que $F_k(x) = 0$ para todo $k = 0, \dots, s$.

Para la segunda afirmación es suficiente mostrar que si $\widehat{M} \in \mathcal{F}_L(\hat{P})$ y $\widehat{M} \cdot \hat{P}_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $\widehat{M} = 0$. Asumimos que $\widehat{M} \cdot \hat{P}_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces tenemos

$$0 = \widehat{M} \cdot \hat{P}_n(x) \quad \Rightarrow \quad 0 = \widehat{M} \cdot \hat{P}_n(x) \cdot B = \widehat{M} \cdot P_n(x) \cdot AB = \widehat{M}(\Gamma_n - \lambda) \cdot P_n(x),$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Aplicando [24, 30], en particular el Lema 1.5.14 obtenemos $\widehat{M}(\Gamma_n - \lambda) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, y como $(\Gamma_n - \lambda)$ es invertible para todo $n \in \mathbb{N}_0$ obtenemos $\widehat{M} = 0$. \square

En lo que resta de esta sección, tal como en el Teorema 3.4.1, asumimos que $\Gamma_n - \lambda$ es una matriz invertible para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por la Proposición 3.6.2 existe un isomorfismo bien definido de espacios vectoriales $\hat{\psi}$ de $\mathcal{F}_L(\hat{P})$ a $\mathcal{F}_R(\hat{P})$, dado por

$$\hat{\psi}(\widehat{M}) = \widehat{D},$$

donde \widehat{D} es el único operador diferencial en $\mathcal{F}_R(\hat{P})$ tal que $\widehat{M} \cdot \hat{P}_n(x) = \hat{P}_n(x) \cdot \widehat{D}$. Más aún para todo $M_1, M_2 \in \mathcal{F}_L(P)$ tenemos que

$$\hat{P}_n \cdot \psi(M_1 M_2) = M_1 M_2 \cdot \hat{P}_n = \hat{P}_n \cdot \psi(M_2) \psi(M_1).$$

Como los operadores diferenciales actúan a derecha, obtenemos que ψ es un isomorfismo de álgebras.

3.6.1. Relación entre las álgebras de Fourier estándares y las de polinomios excepcionales

En esta subsección introducimos mapas lineales que relacionan las álgebras de Fourier de polinomios ortogonales mónicos y polinomios excepcionales.

Proposición 3.6.3. *Las siguientes relaciones se satisfacen:*

1. Si $\widehat{D} \in \mathcal{F}_R(\widehat{P})$, entonces $A\widehat{D}B \in \mathcal{F}_R(P)$.
2. Si $D \in \mathcal{F}_R(P)$, entonces $BDA \in \mathcal{F}_R(\widehat{P})$.
3. Si $\widehat{M} \in \mathcal{F}_L(\widehat{P})$, entonces $\widehat{M}(\Gamma_n - \lambda) \in \mathcal{F}_L(P)$.
4. Si $M \in \mathcal{F}_L(P)$, entonces $(\Gamma_n - \lambda)M \in \mathcal{F}_L(\widehat{P})$.

Demostración. Probaremos (1) y (2). Los otros incisos pueden ser demostrados de forma similar. Si $\widehat{D} \in \mathcal{F}_R(\widehat{P})$, entonces existe \widehat{M} tal que $\widehat{M} \cdot \widehat{P}_n(x) = \widehat{P}_n(x) \cdot \widehat{D}$. En conclusión

$$\begin{aligned} P_n(x) \cdot A\widehat{D}B &= \widehat{P}_n(x) \cdot \widehat{D}B = \widehat{M} \cdot \widehat{P}_n(x) \cdot B = \widehat{M} \cdot P_n(x) \cdot AB \\ &= \widehat{M} \cdot P_n(x) \cdot (T_0 - \lambda) = \widehat{M}(\Gamma_n - \lambda) \cdot P_n(x), \end{aligned}$$

y $A\widehat{D}B \in \mathcal{F}_R(P)$. La prueba de la segunda afirmación es similar:

$$\begin{aligned} \widehat{P}_n(x) \cdot BDA &= P_n(x) \cdot ABDA = P_n(x) \cdot (T_0 - \lambda)DA = (\Gamma_n - \lambda) \cdot P_n(x) \cdot DA \\ &= (\Gamma_n - \lambda)M \cdot P_n(x)A = (\Gamma_n - \lambda)M \cdot \widehat{P}_n(x), \end{aligned}$$

y $BDA \in \mathcal{F}_R(\widehat{P})$. Esto completa la prueba de (2). \square

Aplicando la Proposición 3.6.3, tenemos mapas $\xi : \mathcal{F}_R(P) \rightarrow \mathcal{F}_R(\widehat{P})$ y $\widehat{\xi} : \mathcal{F}_R(\widehat{P}) \rightarrow \mathcal{F}_R(P)$ dados por

$$\xi(D) = BDA, \quad \widehat{\xi}(\widehat{D}) = A\widehat{D}B. \quad (3.6.26)$$

Similarmente, tenemos mapas $\chi : \mathcal{F}_L(P) \rightarrow \mathcal{F}_L(\widehat{P})$ y $\widehat{\chi} : \mathcal{F}_L(\widehat{P}) \rightarrow \mathcal{F}_L(P)$ dados por

$$\chi(M) = (\Gamma_n - \lambda)M, \quad \widehat{\chi}(\widehat{M}) = \widehat{M}(\Gamma_n - \lambda). \quad (3.6.27)$$

Observamos que en general $\xi, \widehat{\xi}, \chi, \widehat{\chi}$ son transformaciones lineales pero no homomorfismos de álgebras.

Observación 72. Observamos que para todo $D \in \mathcal{F}_R(P)$ y $\widehat{D} \in \mathcal{F}_R(\widehat{P})$ tenemos

$$(\widehat{\xi} \circ \xi)(D) = (T_0 - \lambda)D(T_0 - \lambda), \quad (\xi \circ \widehat{\xi})(\widehat{D}) = (T_1 - \lambda)\widehat{D}(T_1 - \lambda).$$

Similarmente, para todo $M \in \mathcal{F}_L(P)$ y $\widehat{M} \in \mathcal{F}_L(\widehat{P})$ tenemos

$$(\widehat{\chi} \circ \chi)(M) = (\Gamma_n - \lambda)M(\Gamma_n - \lambda), \quad (\chi \circ \widehat{\chi})(\widehat{M}) = (\Gamma_n - \lambda)\widehat{M}(\Gamma_n - \lambda).$$

Teorema 3.6.4. *Sea $(P_n)_n$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a W , $(\widehat{P}_n)_n$ una sucesión de polinomios excepcionales asociada a (T_0, ϕ, Υ) y sean $\xi, \widehat{\xi}, \chi, \widehat{\chi}$ los mapas dados en (3.6.26), (3.6.27). Los siguientes diagramas son conmutativos:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_L(P) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{F}_R(P) \\ \downarrow \chi & & \downarrow \xi \\ \mathcal{F}_L(\widehat{P}) & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & \mathcal{F}_R(\widehat{P}) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_L(P) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{F}_R(P) \\ \widehat{\chi} \uparrow & & \widehat{\xi} \uparrow \\ \mathcal{F}_L(\widehat{P}) & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & \mathcal{F}_R(\widehat{P}) \end{array}$$

Demostración. Sean $M \in \mathcal{F}_L(P)$ y $D \in \mathcal{F}_R(P)$ el operador diferencial correspondiente. Observemos que

$$\begin{aligned}\chi(M) \cdot \widehat{P}_n &= (\Gamma_n - \lambda)M \cdot \widehat{P}_n = (\Gamma_n - \lambda)M \cdot P_n \cdot A = (\Gamma_n - \lambda) \cdot P_n \cdot DA \\ &= P_n \cdot (T_0 - \lambda)DA = P_n \cdot ABDA = \widehat{P}_n \cdot BDA = \widehat{P}_n \cdot \xi(\psi(M)).\end{aligned}$$

Concluimos que $\widehat{\psi}(\chi(M)) = \xi(\psi(M))$, y el primer diagrama es conmutativo.

Similarmente, sea $\widehat{M} \in \mathcal{F}_L(\widehat{P})$ y $\widehat{D} \in \mathcal{F}_R(\widehat{P})$ el operador diferencial correspondiente. Luego,

$$\begin{aligned}\widehat{\chi}(\widehat{M}) \cdot P_n &= \widehat{M}(\Gamma_n - \lambda) \cdot P_n = \widehat{M} \cdot P_n \cdot (T_0 - \lambda) = \widehat{M} \cdot P_n \cdot AB = \widehat{M} \cdot \widehat{P}_n \cdot B \\ &= \widehat{P}_n \cdot \widehat{D}B = P_n \cdot A\widehat{D}B = P_n \cdot \widehat{\xi}(\widehat{\psi}(\widehat{M})).\end{aligned}$$

Concluimos que $\psi(\widehat{\chi}(\widehat{M})) = \widehat{\xi}(\widehat{\psi}(\widehat{M}))$, y así el segundo diagrama es conmutativo. Esto completa la prueba del teorema. \square

Ejemplo. Las *seed functions* con una parte polinomial del operador de Laguerre clásico (1.4.12) son conocidas, ver por ejemplo [54, §6.1]

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= L_m^{(\alpha)}(x), & \lambda_1 &= -m, \\ \phi_2(x) &= x^{-\alpha} L_m^{(-\alpha)}(x), & \lambda_2 &= \alpha - m, \\ \phi_3(x) &= e^x L_m^{(\alpha)}(-x), & \lambda_3 &= \alpha + 1 + m, \\ \phi_4(x) &= x^{-\alpha} e^x L_m^{(-\alpha)}(-x), & \lambda_4 &= m + 1,\end{aligned}$$

donde $L_m^{(\alpha)}$ denota el polinomio escalar de Laguerre de grado m y parámetro α . Fijamos $m \in \mathbb{N}_0$ y tomamos $\phi_1(x)$ como *seed function*. El Teorema 3.4.1 nos da una sucesión de polinomios excepcionales de Laguerre $(\widehat{p}_n^{(\alpha)})_n$. Aplicando el Teorema 3.6.4 al operador $x \in \mathcal{F}_R(P)$ y $\mathcal{L} = \psi^{-1}(x)$ obtenemos

$$\widehat{P}_n \cdot BxA = (\Gamma_n - \lambda)\mathcal{L} \cdot \widehat{P}_n. \quad (3.6.28)$$

El operador $(-n - \alpha + m)\mathcal{L}$ es una relación de recurrencia de tres términos:

$$\begin{aligned}(-n - \nu - 1 + m)\mathcal{L} &= (-n - \alpha - 1 + m)\delta + (-n - \alpha + m)(2n + \alpha + 1) \\ &\quad + (-n - \alpha + 1 + m)n(n + \alpha)\delta^{-1}.\end{aligned}$$

Sea $(q_n)_n$ una sucesión de polinomios definida por esta relación de recurrencia de tres términos. Luego de reescalar y normalizar, estos polinomios pueden ser escritos de la siguiente forma:

$$q_n(x^2) = \frac{(-1)^n}{(\alpha + 1 - m)_n} S_n(x^2 + a^2; a, b, c),$$

donde S_n denota al polinomio continuo dual Hahn y $c = \frac{\alpha}{2} + 1$, $a = \frac{\alpha}{2}$, $b = \frac{\alpha}{2} - m$. Para $\alpha > m$, la sucesión $(q_n)_n$ forma una familia de polinomios ortogonales, ver [94, 95]. Si cambiamos la autofunción, podemos proceder similarmente y también obtener polinomios dual Hahn continuos, pero con un cambio en los parámetros.

En [96, Ecuaciones (5-14)] se prueba que la transformada de Whittaker lleva polinomios de Laguerre en polinomios continuos dual Hahn. De acuerdo a la notación de este capítulo,

esto está relacionado con el hecho de que el operador diferencial ABx (actuando a derecha) es un operador diferencial de Whittaker actuando en el espacio con peso L^2 de los polinomios de Laguerre. Entonces las funciones de Whittaker W_λ apropiadas, son autofunciones y en la correspondiente descomposición espectral -una transformación integral con las funciones de Whittaker como núcleo- la base ortogonal de polinomios de Laguerre es llevada a una base ortogonal que involucra polinomios dual Hahn continuos, ver [81, §3.3]. Entonces, el operador BxA (actuando a derecha) en el espacio con peso L^2 de los polinomios excepcionales de Laguerre satisface $A(BxA) = (ABx)A$. Luego el operador BxA tiene a $W_\lambda \cdot A$ como autofunciones y la transformación integral con estas funciones como núcleo lleva los polinomios excepcionales de Laguerre a polinomios continuos dual Hahn. Esta observación muestra que existe una transformación que lleva polinomios excepcionales de Laguerre a polinomios continuos dual Hahn, y puede ser derivada directamente de [96, (5-14)].

3.7. Peso matricial de tipo Laguerre y operadores diferenciales

En esta sección introducimos los polinomios matriciales de tipo Laguerre, ver [90]. Sea $N \geq 1$ un entero fijo, (μ_1, \dots, μ_N) una sucesión de coeficientes no nulos, $\alpha, \nu > 0$ y $(\delta_1^{(\nu)}, \dots, \delta_N^{(\nu)})$ una sucesión de números positivos. La construcción de familias de polinomios excepcionales es válida para parámetros arbitrarios $\delta_i^{(\nu)}$ y μ_i , $i = 1, \dots, N$. Sin embargo si estos parámetros satisfacen ciertas relaciones no lineales, entonces el peso satisface una ecuación de Pearson matricial, ver [90, Propositions 5.1 y 5.2]. En ese caso, los polinomios ortogonales matriciales y por lo tanto los polinomios matriciales excepcionales, pueden ser calculados explícitamente, al menos para dimensiones pequeñas, utilizando una fórmula de Rodrigues. Consideramos el siguiente peso matricial $N \times N$ de tipo Laguerre en el intervalo $(a, b) = (0, \infty)$ estudiado en [90]:

$$W_\mu^{(\alpha, \nu)}(x) = L_\mu^{(\alpha)}(x)T^{(\nu)}(x)L_\mu^{(\alpha)}(x)^*,$$

$$T^{(\nu)}(x)_{i,j} = \delta_{i,j}e^{-x}x^{\nu+i}\delta_i^{(\nu)}, \quad L_\mu^{(\alpha)}(x)_{i,j} = \begin{cases} \frac{\mu_i}{\mu_j}L_{i-j}^{(\alpha+j)}(x), & i \geq j \\ 0 & i < j, \end{cases} \quad (3.7.29)$$

donde $L_n^{(\alpha)}$ denota el polinomio escalar de Laguerre de grado n y parámetro α , ver (1.4.11). Consideramos el siguiente operador diferencial simétrico de orden dos:

$$T_0 = \frac{d^2}{dx^2}x + \frac{d}{dx}(M_1^{(\alpha, \nu)}x + M_2^{(\alpha, \nu)}) + C^{(\alpha, \nu)}, \quad (3.7.30)$$

con

$$M_1^{(\alpha, \nu)} = -(A_\mu + 1)^{-1}, \quad M_2^{(\alpha, \nu)} = \nu + J + 1 + (\alpha + J)A_\mu,$$

$$C^{(\alpha, \nu)} = (\alpha - \nu)(A_\mu + 1)^{-1} - J,$$

donde $J_{i,j} = \delta_{i,j}i$ es una matriz diagonal y $(A_\mu)_{i,j} = -\delta_{j,i-1}\frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}$ es una matriz triangular inferior. Recordemos que T_0 como operador diferencial actúa a derecha y notemos que los coeficientes de T_0 son polinomios en x . Observamos que T_0 es simétrico con respecto al peso matricial $W_\mu^{(\alpha, \nu)}$, ver [90, Proposition 4.3], cuando es considerado en el espacio de polinomios. En la Proposición 3.10.2 mostramos que T_0 es esencialmente autoadjunto, y recordamos

los correspondientes polinomios ortogonales matriciales mónicos de [90, Proposition 4.3] en (3.10.43) y (3.10.44). Para aplicar los resultados del Apéndice E, necesitamos tomar adjunto a la acción de T_0 en funciones vectoriales fila u . Entonces para resolver la ecuación de autovalores $u(x) \cdot T_0 = \lambda \cdot u(x)$, podemos aplicar los resultados del Apéndice E con $B_1(x) = x(M_1^{(\alpha, \nu)})^* + (M_2^{(\alpha, \nu)})^*$ y $B_2(x) = x((C^{(\alpha, \nu)})^* - \bar{\lambda})$, los cuales son polinomios de grado 1 en x . En particular, $B_1(0) = (M_2^{(\alpha, \nu)})^*$ es triangular superior y $B_2(0) = 0$. Entonces la ecuación inicial (E.0.3) es

$$\mu \mapsto \mu^N \det(\mu - 1 + (M_2^{(\alpha, \nu)})^*) = \mu^N \prod_{j=1}^N (\mu + \nu + j) \quad (3.7.31)$$

y los exponentes son $\mu = 0$ con multiplicidad N y $\mu = -\nu - j$, $j \in \{1, \dots, N\}$. El exponente $\mu = 0$ con multiplicidad N corresponde a los polinomios ortogonales matriciales como autofunciones de T_0 , y los exponentes no nulos reaparecerán en la Proposición 3.8.1.

Observación 73. La estructura (3.7.29) de $W^{(\nu)}$ coincide con la condición (3.5.22) de la Sección 3.5. Por otro lado, el operador diferencial T_0 puede ser conjugado y así obtener un operador diagonal, ver [90, Proposition 4.3]. Ahora, la construcción de la Sección 3.5 nos da una familia de polinomios excepcionales de tipo Laguerre con coeficiente director singular. En lo que resta del capítulo, siguiendo las Secciones 3.2, 3.3 y 3.4, obtenemos familias de polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre con coeficiente director invertible, para una *seed function* particular.

3.8. Seed functions de T_0

De acuerdo a la Sección 3.2.2, una *seed function* ϕ adecuada es una autofunción matricial del operador T_0 con autovalor escalar λ , ver (3.2.2). En analogía con el caso escalar, el operador diferencial T_0 tiene cuatro tipos de autofunciones con autovalor escalar y una parte polinomial:

1. $G_1(x) = F(x)$,
2. $G_2(x) = x^{-\nu-J} F(x)$,
3. $G_3(x) = e^x F(x)$,
4. $G_4(x) = e^x x^{-\nu-J} F(x)$,

donde, en cada uno de los casos, las funciones $F(x)$ son polinomios matriciales triangulares inferiores. La forma particular de las *seed functions* es indicada por las soluciones de la ecuación inicial (3.7.31). En este capítulo solo nos ocuparemos de polinomios excepcionales relacionados al caso (2). El caso (3) puede ser tratado de forma similar y los casos (1) y (4) no llevan a pesos matriciales con momentos finitos.

Para dar el resultado, introducimos una sucesión de polinomios matriciales triangulares inferiores $(F_m(x))_{m \in \mathbb{N}_0}$ definidos explícitamente en términos de funciones hipergeométricas por

$$(F_m(x))_{i,j} = \frac{(-1)^{i-j-1} (-i)_j (-\alpha - i)_{i-j} \mu_1}{i(\alpha + 2)_{i-1} \mu_j} {}_2F_2 \left(\begin{matrix} -m, -\alpha - j \\ 1 - \nu - i, -\alpha - i \end{matrix}; x \right), \quad (3.8.32)$$

y asumimos que la serie ${}_2F_2$ está bien definida. Como asumimos que $\alpha, \nu > 0$ es suficiente asumir que ni α ni ν son enteros menores que m , y lo supondremos por el resto del capítulo.

Observación 74. (i) Como $(-i)_j = 0$ para $j > i$, vemos que F_m es un polinomio matricial triangular inferior de grado m . De hecho, cada una de sus entradas no nulas es un polinomio de grado m . Por lo tanto, el coeficiente director de $F_m(x)$ es una matriz triangular inferior llena.

(ii) Las entradas diagonales de F_m son múltiplos de polinomios escalares de Laguerre y más generalmente tenemos que para $i \geq j$

$$(F_m(x))_{i,j} = \frac{(-1)^{i-j-1}(-i)_j(-\alpha-i)_{i-j}\mu_1}{i(\alpha+2)_{i-1}\mu_j} \frac{m!}{(1-\nu-i)_m} \sum_{p=0}^{m \wedge i-j} \frac{(j-i)_p x^p}{p!(-\alpha-i)_p} L_{m-p}^{(p-\nu-i)}(x).$$

Aquí hemos usado la expansión general [104, Ecuación (15), pp. 439], excepto que z^k falta en el sumando del lado derecho de [104, Ecuación (15), pp. 439]. Una prueba de la identidad [104, Ecuación (15), pp. 439] sigue usando la suma Chu-Vandermonde $\frac{(-\alpha-j)_k}{(-\alpha-i)_k} = {}_2F_1(-k, j-i; -\alpha-i; 1)$ en la expansión (3.8.32), intercambiando los sumandos y escribiendo el término ${}_1F_1$ en el sumando como un polinomio de Laguerre.

Proposición 3.8.1. *Las funciones $\phi_m(x) = x^{-\nu-J}F_m(x)$ son seed functions de T_0 con autovvalor escalar $(\alpha - m)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.*

Las filas de ϕ_m se corresponden con las soluciones de exponente no nulo para la ecuación inicial (3.7.31). Notemos que podemos multiplicar por una matriz diagonal constante por la izquierda. Notemos que ninguna fila de ϕ está contenida en $L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)})$.

Demostración. Dado que las potencias en $x^{-\nu-J}$ se corresponden con las soluciones de la ecuación inicial (3.7.31), sabemos que $x^{-\nu-J}F(x)$ con F analítica en un entorno del origen es solución de $\phi T_0 = \lambda \phi$. Conjugando T_0 con $x^{-\nu-J}$ por la izquierda, vemos que F debe satisfacer la relación mixta

$$\begin{aligned} F''(x)x + F'(x)(xM_1^{(\alpha,\nu)} + M_2^{(\alpha,\nu)}) - 2(\nu+J)F'(x) + (\nu+J)(\nu+J+1)\frac{1}{x}F(x) \\ - (\nu+J)\frac{1}{x}F(x)(xM_1^{(\alpha,\nu)} + M_2^{(\alpha,\nu)}) + F(x)(C^{(\alpha,\nu)} - \lambda) = 0. \end{aligned} \quad (3.8.33)$$

Como F tiene que ser analítica, la singularidad relacionada a $\frac{1}{x}$ en (3.8.33) es aparente. Entonces tenemos $(\nu+J+1)F(0) = F(0)M_2^{(\alpha,\nu)}$. Más aún, como todas las matrices actuando a derecha en F en (3.8.33) son triangulares inferiores, tenemos una solución triangular inferior F . Entonces para $g = F_{i,i}$ obtenemos la ecuación diferencial

$$xg''(x) + (-x + 1 - \nu - i)g'(x) + (\alpha - \lambda)g(x) = 0,$$

la cual es la ecuación diferencial de Laguerre. Como queremos una solución polinomial, elegimos $\lambda = \alpha - m$, y luego $F_{i,i}$ es una constante por el polinomio de Laguerre $L_m^{(-\nu-i)}$ y elegimos la constante como en la Observación 74. Ahora, para las autofunciones analíticas $F_{i,j}(x)$, $i > j$, obtenemos una ecuación diferencial inhomogénea que involucra a $F_{i,k}(x)$, $j < k \leq i$. La solución analítica está completamente determinada por $F_{i,j}(0)$, que a su vez se deriva de $F_{i,j+1}(0)$ dado que $(\nu+J+1)F(0) = F(0)M_2^{(\alpha,\nu)}$. Tomamos $F_{i,j}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{i,j,k}x^k$. Entonces para $i > j$ tenemos

$$(\nu+i+1)c_{i,j,0} = (\nu+j+1)c_{i,j,0} - (\alpha+j+1)\frac{\mu_{j+1}}{\mu_j}c_{i,j+1,0},$$

y $c_{i,j,0} = -\frac{\alpha+j+1}{i-j} \frac{\mu_{j+1}}{\mu_j} c_{i,j+1,0}$ se satisface de hecho por (3.8.32).

Queda mostrar que con $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$,

$$F_k = (c_{i,j,k})_{i,j=1}^N, \quad c_{i,j,k} = \frac{(-1)^{i-j-1} (-i)_j (-\alpha-i)_{i-j} \mu_1}{i(\alpha+2)_{i-1} \mu_j} \frac{(-m)_k (-\alpha-j)_k}{(1-\nu-i)_k (-\alpha-i)_k k!}, \quad (3.8.34)$$

podemos obtener una solución de (3.8.33) para $\lambda = \alpha - m$. Para obtener recursiones más simples, multiplicamos (3.8.33) a derecha por $(1+A_\mu)$ para cancelar las inversas de $(1+A_\mu)^{-1}$ en $M_1^{(\alpha,\nu)}$ y $C^{(\alpha,\nu)}$. Reemplazando la expresión en serie de F en la ecuación matricial resultante obtenemos una identidad de series de potencias. Hemos verificado que el coeficiente de x^{-1} es igual a 0. El coeficiente de x^k , $k \in \mathbb{N}_0$, es

$$\begin{aligned} & k(k+1)F_{k+1}(1+A) + (k+1)F_{k+1}M_3 - (k+1)(\nu+J)F_{k+1}(1+A) \\ & + (\nu+J)(\nu+J+1)F_{k+1}(1+A) - (\nu+J)F_{k+1}M_3 - kF_k + (\nu+J)F_k + F_kM_4, \end{aligned} \quad (3.8.35)$$

donde $A = A_\mu$, $M_3 = (\nu+J+1)(1+A) + (\alpha+J)A(1+A)$, y $M_4 = (m-\nu) + (m-\alpha)A - J(1+A)$. Notemos que las matrices actuando a derecha en (3.8.35) son matrices triangulares inferiores, y las que actúan a izquierda son diagonales. Calculando la entrada (i, j) de (3.8.35) obtenemos términos de la forma $c_{i,j+r,k+s}$ para $r \in \{0, 1, 2\}$, $s \in \{0, 1\}$. Luego de algunas manipulaciones, la entrada (i, j) de (3.8.35) es igual a

$$\begin{aligned} & c_{i,j,k+1}((k+1)(k-\nu+1+j-2i) + (\nu+i)(i-j)) \\ & + c_{i,j+1,k+1} \frac{-\mu_{j+1}}{\mu_j} ((k+1)(k-\nu+1+2(j-i)+\alpha) + (\nu+i)(i-2j-\alpha)) \\ & + c_{i,j+1,k+1} \frac{\mu_{j+2}}{\mu_j} (\alpha+j)(k+1-\nu-i) + c_{i,j,k}(m-k+i-j) + c_{i,j+1,k} \frac{-\mu_{j+1}}{\mu_j} (m-\alpha-j). \end{aligned}$$

Realizando un cálculo sencillo con $c_{i,j,k}$ como en (3.8.34) obtenemos que esto último es igual a cero. \square

Notemos que la ecuación inicial (3.7.31) predice la forma de la solución, pero no explica el hecho de que el autovalor es escalar y que la parte analítica en F es de hecho un polinomio.

Observación 75. Tal como ha sido señalado en 73, el operador diferencial T_0 puede ser conjugado en un operador diagonal T_0^d , ver [90, Proposition 4.3]. La *seed function* ϕ_m de la Proposición 3.8.1 puede descomponerse como:

$$\phi_m(x) = M \phi_m^d(x) L_\mu^{(\alpha)}(x)^{-1},$$

donde $\phi_m^d(x) = \text{diag}(x^{-\nu-i} L_m^{(-\nu-i)}(x))$ es una autofunción del operador diagonal T_0^d y M es una matriz constante triangular inferior.

3.9. Relaciones de entrelazamiento para el operador de Laguerre matricial

En esta sección, para cada autofunción ϕ_m introduciremos un operador de entrelazamiento A_m . Probaremos que A_m preserva polinomios y regularidad de coeficientes directores.

Como consecuencia de la Proposición 3.8.1, las funciones matriciales $\phi_m(x) = x^{-\nu-J}F_m(x)$ son *seed functions* del operador diferencial de orden dos T_0 de autovalor escalar $(\alpha - m)$. Recordemos que F_m es un polinomio triangular inferior de grado m , y entonces

$$\begin{aligned} \det(F_m(x)) &= \prod_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!m!\mu_1}{(\alpha+2)_{k-1}(1-\nu-k)_{m\mu_k}} L_m^{(-\nu-k)}(x) \\ &= \prod_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!\mu_1}{(\alpha+2)_{k-1}\mu_k} {}_1F_1\left(\begin{matrix} -m \\ 1-\nu-k \end{matrix}; x\right), \end{aligned} \quad (3.9.36)$$

por lo que $\det(F_m)$ es un polinomio de grado mN . Para $\nu > \max(0, m-1)$ vemos que cada serie ${}_1F_1$ en (3.9.36) tiene coeficientes positivos para cada potencia de x , y sigue que los ceros de $\det(F_m)$ no están contenidos en $[0, \infty)$.

La *seed function* ϕ_m tiene una singularidad en $x = 0$, y está bien definida en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Notemos que ϕ_m es invertible en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ excepto en el conjunto finito de ceros del $\det(F_m)$. Entonces tenemos

$$\phi_m(x)^{-1}\phi'_m(x) = -\frac{\nu}{x} - \frac{1}{x}F_m(x)^{-1}JF_m(x) + F_m(x)^{-1}F'_m(x). \quad (3.9.37)$$

Notemos que ésta es una función racional matricial y que sus polos no están contenidos en $(0, \infty)$ para $\nu > \max(0, m-1)$. Usamos el polinomio matricial $\Upsilon_m(x) = x\det(F_m(x))I$ para cancelar las singularidades en (3.9.37).

Lema 3.9.1. $x \mapsto \phi_m(x)^{-1}\phi'_m(x)\Upsilon_m(x)$ es un polinomio matricial de grado mN con coeficiente director invertible.

Demostración. Recordemos que cada entrada de F_m es un polinomio de grado m . Luego las entradas de la matriz adjunta $\text{adj}(F_m)$ son polinomios de grado $(N-1)m$, dado que ésta es el determinante de F_m con una fila y una columna removidas. Por la regla de Cramer $\det(F_m)F_m^{-1} = \text{adj}(F_m)$. Entonces (3.9.37) nos da

$$\phi_m(x)^{-1}\phi'_m(x)\Upsilon_m(x) = -\nu\det(F_m(x)) - \text{adj}(F_m(x))JF_m(x) + x\text{adj}(F_m(x))F'_m(x),$$

y cada término en el lado derecho es un polinomio matricial de grado mN . Más aún, es un polinomio matricial triangular inferior. Entonces podemos calcular las entradas diagonales de $\phi_m(x)^{-1}\phi'_m(x)\Upsilon_m(x)$, y para $1 \leq i \leq N$ tenemos

$$(\phi_m(x)^{-1}\phi'_m(x)\Upsilon_m(x))_{i,i} = ((-\nu-i)F_m(x)_{i,i} - xF'_m(x)_{i,i}) \prod_{p \neq i} F_m(x)_{p,p},$$

el cual es un polinomio no nulo de grado mN . Concluimos que el coeficiente director de $\phi_m(x)^{-1}\phi'_m(x)\Upsilon_m(x)$ es una matriz triangular inferior invertible. \square

Ahora podemos aplicar los resultados de la primera parte del capítulo, y definir el operador diferencial matricial de orden uno A_m actuando por la derecha por

$$A_m = \frac{d}{dx}\Upsilon_m - \phi_m^{-1}\phi'_m\Upsilon_m. \quad (3.9.38)$$

Entonces A_m lleva polinomios fila o matriciales en polinomios fila o matriciales respectivamente, incrementando el grado por mN . Esto es consecuencia del Lema 3.9.1 y del hecho de que Υ_m es un polinomio de grado $mN + 1$.

Lema 3.9.2. *El operador A_m preserva la regularidad de los coeficientes directores de los polinomios.*

Demostración. Es suficiente mostrar que $x^n \cdot A_m$ tiene coeficiente director invertible para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por definición de A_m , $x^n \cdot A_m = x^{n-1}n\Upsilon_m(x) - x^n\phi_m(x)^{-1}\phi'_m(x)\Upsilon_m(x)$ el cual es un polinomio triangular inferior de grado menor o igual a $mN + n$. Podemos calcular sus entradas diagonales y para $1 \leq i \leq N$ obtenemos

$$\begin{aligned} (x^n \cdot A_m)_{i,i} &= x^{n-1}n\Upsilon_m(x) - x^n((-\nu - i)F_m(x)_{i,i} - xF'_m(x)_{i,i}) \prod_{p \neq i} F_m(x)_{p,p} \\ &= (nF_m(x)_{i,i} + (\nu + i)F_m(x)_{i,i} + xF'_m(x)_{i,i})x^n \prod_{p \neq i} F_m(x)_{p,p}. \end{aligned}$$

Mirando los coeficientes directores, verificamos que $nF_m(x)_{i,i} + (\nu + i)F_m(x)_{i,i} + xF'_m(x)_{i,i}$ es un polinomio de grado m . Sigue que $x^n \cdot A_m$ tiene exactamente grado $mN + n$ y su coeficiente director es una matriz triangular inferior invertible. \square

Seguendo (3.2.9) definimos el operador diferencial de primer orden B_m actuando a derecha por

$$\begin{aligned} B_m &= \Upsilon_m(x)^{-1} \left(\frac{d}{dx}x + M_1^{(\alpha,\nu)}x + M_2^{(\alpha,\nu)} + \phi_m(x)^{-1}\phi'_m(x)x \right) \\ &= \frac{d}{dx}\Upsilon_m^{-1}(x)x + (\Upsilon_m^{-1}(x))'x + \Upsilon_m^{-1}(x)(M_1^{(\alpha,\nu)}x + M_2^{(\alpha,\nu)}) + \Upsilon_m^{-1}(x)\phi_m^{-1}(x)\phi'_m(x)x, \end{aligned} \tag{3.9.39}$$

y el Lema 3.2.1 vale.

3.10. Polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre

En esta sección introducimos el peso excepcional y la sucesión de polinomios excepcionales de tipo Laguerre. Asumimos $\nu > \max(0, m - 1)$, y por lo tanto los ceros de $\det(F_m)$ no están contenidos en $[0, \infty)$. Como hay una cantidad finita de ceros, tenemos

$$\delta = \min\{d(z) \mid z \in \mathbb{C}, \det(F_m(z)) = 0\} > 0, \tag{3.10.40}$$

donde $d(z) = \inf\{|x - z| \mid x \in [0, \infty)\}$ es la distancia de $z \in \mathbb{C}$ a $[0, \infty)$. Seguendo la Definición 3.3.1 definimos el peso matricial en $(0, \infty)$ por

$$\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)}(x) = \frac{W_\mu^{(\alpha,\nu)}(x)}{x(\det(F_m(x)))^2}. \tag{3.10.41}$$

Dado que podemos absorber el factor x en el numerador utilizando la parte diagonal de $T^{(\nu)}$ en (3.7.29) vemos que $\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)}$ es una matriz definida positiva en $[0, \infty)$ y $\det(\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)}(x)) > 0$ para $x > 0$. Más aún, esta observación junto con (3.10.40) implica que todos los momentos del peso matricial $\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)}$ en $(0, \infty)$ existen.

Notemos que el peso excepcional $\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)}$ es reducible a pesos de tamaño menor si y sólo si el peso de Laguerre $W_\mu^{(\alpha,\nu)}(x)$ es reducible, dado que estos solo difieren por un factor escalar. Cálculos extensos indican que el peso de Laguerre es irreducible pero no tenemos una prueba, véase la discusión en [90, §1].

Proposición 3.10.1. *El espacio Pol de polinomios vectoriales fila es denso en $L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)})$ y también es denso en $L^2(\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)})$.*

Demostración. Notemos primero que Pol está contenido en los espacios L^2 , dado que ambos pesos tienen momentos finitos. Para la medida $\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)}$ vemos que la medida traza τ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue dx en $(0, \infty)$ y su derivada de Radon-Nikodym es

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{(\det(F_m(x)))^2} e^{-x} \sum_{i=1}^N \delta_i^{(\nu)} x^{\nu+i-1}, \quad (3.10.42)$$

por (3.7.29). Aplicando (3.10.40) vemos que la función $\exp(\beta|x|)$ es integrable con respecto a la medida traza para $\beta > 0$, por ejemplo $\beta = \frac{1}{2}$. Por [58, Theorem. 5.2, p. 80] la medida traza τ es determinada, y por lo tanto los polinomios son densos en el espacio de Hilbert $L^2(\tau)$, el espacio L^2 con respecto a la medida traza como medida de Borel en $(0, \infty)$, ver [2].

Escribimos la medida matricial como $V\tau = (V_{i,j})_{i,j=1}^N \tau$. Asumimos que $\xi \in L^2(\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)})$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, es ortogonal al espacio Pol. Tomando un polinomio vectorial fila nulo excepto en el coeficiente j , $(0, \dots, 0, p, 0, \dots, 0)$, vemos que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^N \xi_i(x) V_{i,j}(x) \right) \overline{p(x)} d\tau(x) = 0$$

para todos los polinomios escalares p . Como τ corresponde a un problema de momentos (escalar) determinado, sigue que $\sum_{i=1}^N \xi_i V_{i,j} = 0$ en $L^2(\tau)$. Como j es arbitrario, tenemos $\xi V = (0, \dots, 0)$ como funciones vectoriales fila τ -p.p. Como $\det(V(x)) \left(\frac{dx}{dx}\right)^N = \det(\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)}(x)) \neq 0$ para $x \neq 0$, con la notación como en (3.10.42), tenemos que $\xi = 0$ en $L^2(\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)})$. Entonces Pol es denso en $L^2(\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)})$. La prueba para $L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)})$ es análoga. \square

Recordemos que tenemos la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $(P_n^{(\alpha,\nu)})_n$ con respecto a $W_\mu^{(\alpha,\nu)}$, i.e. $P_n^{(\alpha,\nu)}$ es un polinomio matricial cuyo coeficiente director es la matriz identidad y satisface

$$\int_0^\infty P_n^{(\alpha,\nu)}(x) W_\mu^{(\alpha,\nu)}(x) (P_m^{(\alpha,\nu)}(x))^* dx = \delta_{m,n} H_n^{(\alpha,\nu)}, \quad (3.10.43)$$

donde la integración se realiza entrada a entrada. Aquí $H_n^{(\alpha,\nu)}$ es una matriz constante definida positiva, la cual es llamada norma cuadrada de $P_n^{(\alpha,\nu)}$. Entonces [90, Proposition 4.3] establece que como operador diferencial matricial actuando a derecha en funciones matriciales tenemos

$$P_n^{(\alpha,\nu)} \cdot T_0 = \Gamma_n^{(\alpha,\nu)} \cdot P_n^{(\alpha,\nu)}, \quad \Gamma_n^{(\alpha,\nu)} = (-n + \alpha - \nu)(A_\mu + 1)^{-1} - J. \quad (3.10.44)$$

Notemos que $\sigma(\Gamma_n^{(\alpha,\nu)}) = \{-n + \alpha - \nu - j \mid j \in \{1, \dots, N\}\}$, y diagonalizando obtenemos $R_n \Gamma_n^{(\alpha,\nu)} = D_n^{(\alpha,\nu)} R_n$, con $D_n^{(\alpha,\nu)}$ la matriz diagonal con $-n + \alpha - \nu - j$ en su entrada (j, j) . Notemos que R_n es triangular inferior e invertible. Entonces la fila j de $R_n P_n^{(\alpha,\nu)}$ es un polinomio de grado n en x , y por lo tanto un elemento de Pol, y una autofunción de T_0 de autovalor $-n + \alpha - \nu - j$. Denotamos este elemento $p_n^j \in \text{Pol}$. Entonces el conjunto de autovalores de T_0 es $\alpha - \nu - 1 - \mathbb{N}_0$, la multiplicidad del autovalor $\alpha - \nu - 1 - p$, $p \in \mathbb{N}_0$,

es $\min(N, p + 1)$ y una base ortogonal del autoespacio de autovalor $\alpha - \nu - 1 - p$ está dada por $\{p_n^j \mid n + j = p + 1\}$. De hecho como todos los grados son diferentes, la ortogonalidad sigue de (3.10.43) luego de multiplicar a izquierda por R_n y a derecha por R_n^* . Como los autoespacios en Pol de T_0 son ortogonales para autovalores distintos, vemos que $(p_n^j)_{n,j}$ da una base ortogonal de autovectores.

Proposición 3.10.2. *El operador T_0 con $D(T_0) = \text{Pol}$ es esencialmente autoadjunto en $L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)})$. Su clausura $\overline{T_0}$ tiene resolvente compacta y $\sigma(\overline{T_0}) = \alpha - \nu - 1 - \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Sigue de [90, §4] que T_0 con $D(T_0) = \text{Pol} \subset L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)})$ es simétrico. Más aún, de (3.7.30) vemos que T_0 preserva el espacio de polinomios vectoriales fila y el grado de polinomios. Aplicando la Proposición 3.10.1, T_0 está densamente definido y verificamos que $D(T_0^*)$ es su dominio máximo, es decir

$$D(T_0^*) = \left\{ v = \sum_{n,j} c_n^j p_n^j \in L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)}) \mid \sum_{n,j} c_n^j (\alpha - \nu - n - j) p_n^j \in L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)}) \right\},$$

con $T_0^* \sum_{n,j} c_n^j p_n^j = \sum_{n,j} c_n^j (\alpha - \nu - n - j) p_n^j$. Como cualquier elemento del gráfico de T_0^* está también en la clausura del gráfico de T_0 aproximando por sumas finitas, vemos que $T_0^* = \overline{T_0}$ y T_0 es esencialmente autoadjunto. La afirmación sobre la resolvente compacta sigue, dado que los autoespacios son de dimensión finita y los autovalores divergen a $-\infty$. \square

Observación 76. La condición $\nu > \max(0, m - 1)$ implica que $\sigma(\overline{T_0}) < \alpha - m$.

Lema 3.10.3. *Los operadores diferenciales matriciales de primer orden A_m y B_m están densamente definidos con*

$$\begin{aligned} A_m &: D(A_m) = \text{Pol} \subset L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)}) \rightarrow L^2(\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)}), \\ B_m &: D(B_m) = \text{Pol} \subset L^2(\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)}) \rightarrow L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)}). \end{aligned}$$

Demostración. Como Pol es denso en $L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)})$ y $L^2(\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)})$ por la Proposición 3.10.1 vemos que ambos operadores tienen dominio denso. Como A_m preserva el espacio Pol , ver (3.2.7), vemos que A_m lleva Pol en $L^2(\widehat{W}_\mu^{(\alpha,\nu,m)})$. En conclusión A_m está bien definido.

Resta probar que B_m lleva Pol en $L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)})$, observemos que el operador B_m no preserva polinomios en general, ver (3.9.39). Hemos definido $\Upsilon_m(x) = x \det(F_m(x))$, $\nu > \max(0, m - 1)$ de forma tal que los ceros de $\det(F_m(x))$ están fuera de $[0, \infty)$, ver (3.10.40). Luego tenemos que $0 < |\det(F_m(x))|^{-1} < M$ en $[0, \infty)$. Considerando (3.9.39) y aplicando (3.9.37) vemos que B_m lleva Pol en $L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)})$ si $\frac{1}{x} \in L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)})$. Aplicando (3.7.29) vemos que los elementos diagonales en la matriz diagonal $x^{-2}T^{(\nu)}$ son $\delta^{(\nu)}x^{\nu+i-2}e^{-x}$ para $i \in \{1, \dots, N\}$, entonces todos los términos son integrables dado que $\nu > \max(0, m - 1)$. Por lo tanto, B_m lleva Pol en $L^2(W_\mu^{(\alpha,\nu)})$. \square

Para obtener los resultados de las Secciones 3.3 y 3.4 tenemos que verificar las condiciones del Lema 3.3.2 y de la Proposición 3.3.3. Recordemos que F_m no tiene ceros en $[0, \infty)$ y que $|\det(F_m)|$ está acotado por cero y también por arriba. Verificamos las hipótesis del Lema 3.3.2 observando que ambos términos se anulan en el límite en ∞ dado que el factor e^{-x} del peso anula todas las potencias de x . Para la Proposición 3.3.3 vemos de la misma forma que la condición de borde se anula en ∞ para cualquier par de polinomios $p, q \in \text{Pol}$. Más aún, en 0 el término también se anula dado que las potencias de x son estrictamente positivas.

Notemos que $\alpha - m$ no está en el espectro de T_0^* , por lo que el espectro de los operadores autoadjuntos $\overline{T_0}$ y S_1 es el mismo salvo quizá por un punto. Como el operador autoadjunto $\overline{T_0}$ tiene resolvente compacta y una base de autofunciones en Pol por la Proposición 3.10.2, y como A preserva Pol, vemos que $p_n^j \cdot A_m$ son autofunciones ortogonales de S_1 con el mismo autovalor $-\alpha - \nu - n - j$.

Proposición 3.10.4. *Sea $f = (f_1, \dots, f_N) \in \text{Ker}(B_m)$, entonces $f_i(x) = e^x r_i(x)$, donde r_i es una función racional de x . En particular, en $L^2(\widehat{W}_\mu^{(\alpha, \nu, m)})$ el núcleo de B_m es trivial.*

Demostración. Sea $f \in \text{Ker}(B_m)$, entonces $g(x) = f(x)\Upsilon(x)^{-1}e^{-x}$ satisface

$$g \cdot \left(\frac{d}{dx}x + (M_1^{(\alpha, \beta)} + 1)x + M_2^{(\alpha, \beta)} + \phi_m(x)^{-1}\phi'_m(x)x \right) = 0. \quad (3.10.45)$$

La prueba sigue probando que g_i es una función racional para todo i . La entrada $(1, N)$ de (3.10.45) es

$$(g_N(x)x F_m(x)_{N,N})' = 0 \quad \text{entonces} \quad g_N(x) = \frac{1}{x F_m(x)_{N,N}} + c.$$

Más generalmente y procediendo recursivamente, la entrada $(1, j)$ de (3.10.45) es

$$(g_j(x)x F_m(x)_{j,j})' = R_j(x),$$

donde R_j es una función racional que involucra a g_N, \dots, g_{j+1} , y a $F_m(x)_{N,N}, \dots, F_m(x)_{j+1, j+1}$ por lo que g_j es una función racional de x . \square

3.10.1. Polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre

En esta subsección introducimos una sucesión de polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre. Recordemos que tenemos la sucesión de polinomios matriciales ortogonales mónicos $(P_n^{(\alpha, \nu)})_n$ con respecto a $W_\mu^{(\alpha, \nu)}$, ver (3.10.43). Fijamos $m \in \mathbb{N}_0$ y siguiendo el Teorema 3.4.1 denotamos

$$\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)} = P_n^{(\alpha, \nu)} \cdot A_m. \quad (3.10.46)$$

Estos son los polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre asociados a $(T_0, \phi_m, \Upsilon_m)$.

Teorema 3.10.5. *Asumimos $\nu > \max(0, m - 1)$, entonces $\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)}$ es un polinomio matricial de grado $mN + n$ con coeficiente director invertible cuyas filas forman una base ortogonal de $L^2(\widehat{W}_\mu^{(\alpha, \nu, m)})$. Más aún, $\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)}$ es una autofunción de T_1 de autovalor $\Gamma_n^{(\alpha, \nu)}$.*

Demostración. El polinomio $\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)}$ es un polinomio matricial de grado $mN + n$. Más aún, su coeficiente director es triangular inferior e invertible, ver Lema 3.9.2 y su demostración. Por el Teorema 3.4.1, tenemos que $\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)}$ es una autofunción de T_1 de autovalor $\Gamma_n^{(\alpha, \nu)}$ y los polinomios excepcionales son ortogonales con respecto a $\widehat{W}_\mu^{(\alpha, \nu, m)}$. Finalmente, la Proposición 3.10.4 implica $\alpha - m \notin \sigma_p(S_1)$ y por la Proposición 3.4.2 las filas de $\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)}$ son densas en $L^2(\widehat{W}_\mu^{(\alpha, \nu, m)})$. \square

Observación 77. En el caso escalar, i.e. $N = 1$, los polinomios excepcionales de Laguerre han sido estudiados por diversos autores, ver por ejemplo [18, 42, 64, 66, 68, 98, 109, 110, 112, 113].

Finalizamos esta sección haciendo un link entre nuestra notación de polinomios excepcionales de tipo Laguerre $\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)}$ y algunas de las notaciones en la literatura.

En [66, 68, 98], los polinomios excepcionales de Laguerre están clasificados como de tipo I, tipo II, y tipo III X_m -Laguerre. Los polinomios excepcionales de Laguerre $\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)}$ se corresponden con los de tipo II, ver [66, Sección 4.2]:

$$\widehat{P}_{n-m}^{(\alpha, \nu+1, m)} = -L_{n,m}^{II, \nu} = A_m^{(\nu+1)} \cdot L_{n-m}^{(\nu+1)},$$

donde $L_{n-m}^{(\nu+1)}$ denota el polinomio de Laguerre escalar de grado $n-m$ y parámetro $\nu+1$. Notemos que la acción del operador de entrelazamiento $A_m^{(\nu+1)}$ es por la izquierda tal como en la notación estándar del caso escalar [66, Ecuación (88)]. Más aún, en [66] los autores evalúan el operador de entrelazamiento $A_m^{(\nu+1)}$ en $L_{n-m}^{\nu+1}$ de tal forma que $L_{n,m}^{II, \nu}$ sea un polinomio de grado n .

En términos de particiones, en [18, Proposition 4, Ecuación (69)], los autores muestran que los polinomios excepcionales de Laguerre de tipo II se corresponden con

$$L_{n,m}^{II, \nu} = c_{n,m} L_{\emptyset, (1, \dots, 1), n}^{(\nu-m)},$$

donde $L_{\emptyset, (1, \dots, 1), n}^{(\nu-m)}$ denota el polinomio excepcional asociado a las particiones $\emptyset, (1, \dots, 1)$, ver [18, Definition 4], y $c_{n,m}$ es una constante dependiente de n, m, ν .

3.11. Ceros de polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre

En esta sección presentamos información numérica sobre los ceros de los polinomios matriciales excepcionales de tipo Laguerre discutidos previamente. Los ceros son los ceros del determinante de los polinomios matriciales excepcionales, tal como para los polinomios ortogonales matriciales [39, 48].

Nuestros experimentos numéricos conducen a las siguientes conjeturas para los ceros de $\det(\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)})$ bajo la condición $\nu > \max(0, m-1)$:

1. $\det(\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)})$ tiene nN ceros reales simples;
2. $\det(\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)})$ tiene m grupos de N^2 ceros complejos fuera de $[0, \infty)$, y la multiplicidad puede ser mayor a uno;
3. Los ceros complejos de multiplicidad mayor a uno de $\det(\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)})$ coinciden con los ceros de Υ_m y hay mN ceros complejos múltiples de multiplicidad $N-1$.

Respaldamos las conjeturas con los gráficos de la Figura 3.1. Observamos que, para $N=1$, la primera conjetura fue discutida en [18, §6.1] y también en [68, §4.3]. Los ceros de $\det(\widehat{P}_n^{(\alpha, \nu, m)})$ también pueden ser generados para varios grados relajando la condición $\nu > \max(0, m-1)$. En este caso, el comportamiento de los ceros se vuelve más caótico y las conjeturas no parecen válidas.

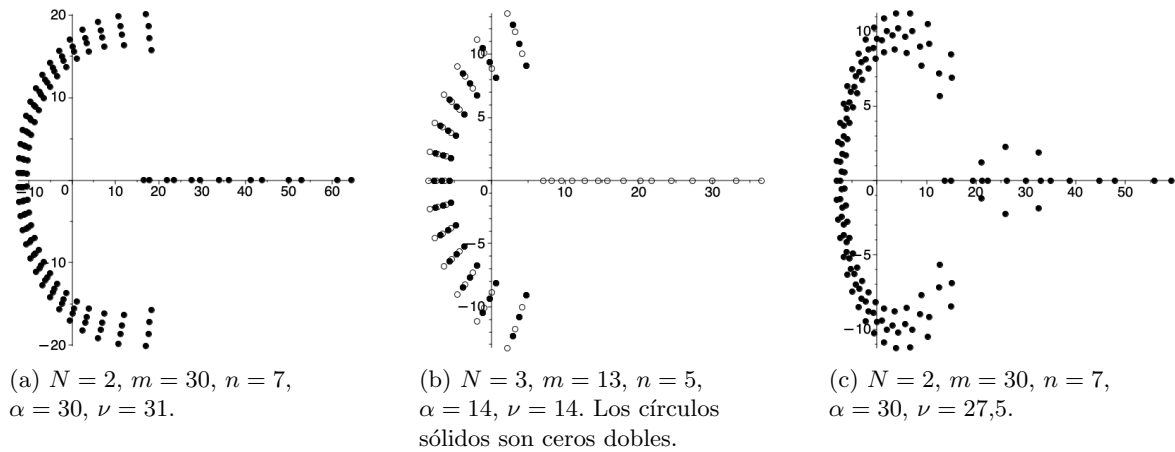


Figura 3.1: Soporte numérico para las conjeturas de la Sección 3.11.

CAPÍTULO 4

Ecuaciones no abelianas de tipo Toda y polinomios ortogonales matriciales

Los resultados de este capítulo aparecen en “Non-Abelian Toda-type equations and matrix valued orthogonal polynomials” *Proceedings of the American Mathematical Society* [31]. Coautores: Alfredo Deaño y Pablo Román.

4.1. Introducción

El Lattice de Toda es un sistema de ecuaciones diferenciales introducido por Morikazu Toda [121, 122] para describir la evolución temporal de un sistema de partículas en la recta real con interacción exponencial. Las ecuaciones son:

$$\ddot{q}_n = e^{q_{n-1}-q_n} - e^{q_n-q_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.1.1)$$

donde $q_n = q_n(t)$ es el desplazamiento de la partícula n , y hemos usado la notación estándar $\dot{f} = \frac{df}{dt}$. Para establecer una conexión con polinomios ortogonales en \mathbb{R} , consideramos el sistema semi-infinito (con condición de borde $q_{-1} = -\infty$) o el sistema finito (con condición de borde $q_{-1} = -\infty$, $q_{n+1} = \infty$). Una formulación alternativa, la cual muestra la integrabilidad del sistema, fue dada por Flaschka [57] y Manakov [99]: definiendo las nuevas variables

$$a_n^2 = e^{q_{n-1}-q_n}, \quad b_n = -p_{n-1}, \quad (4.1.2)$$

donde $p_n = \dot{q}_n$. Las ecuaciones de Toda pueden ser escritas como

$$\frac{d}{dt} a_n^2 = a_n^2 (b_{n-1} - b_n), \quad \frac{d}{dt} b_n = a_n^2 - a_{n+1}^2. \quad (4.1.3)$$

Tomamos el caso semi-infinito, con condición de borde $q_{-1} = -\infty$, entonces $a_0^2 = 0$ y el sistema puede ser escrito como un par de Lax $\dot{J} = [J, B]$, donde J es un operador simétrico, tridiagonal y B es un operador bidiagonal antisimétrico:

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & & \\ a_1 & b_1 & a_2 & \ddots & \\ 0 & a_2 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & & \\ -a_1 & 0 & a_2 & \ddots & \\ 0 & -a_2 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}. \quad (4.1.4)$$

Debido a esta estructura, las ecuaciones de Toda aparecen de forma natural en la teoría de polinomios ortogonales: dada una medida positiva μ con momentos finitos de todos los órdenes en \mathbb{R} , podemos construir una familia de polinomios ortonormales $p_n(x)$ que satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)d\mu(x) = \delta_{n,m},$$

para $n, m = 0, 1, \dots$, y una relación de recurrencia

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_np_{n-1}(x), \quad (4.1.5)$$

con condiciones iniciales $p_{-1}(x) = 0$ y $p_0(x) = \mu_0^{-1/2}$, donde $\mu_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(x)$. Recíprocamente, dada una relación de recurrencia como en (4.1.5) con $a_n > 0$, el Teorema de Favard (ver por ejemplo [27, Theorem 4.4] o [80, Theorem 2.5.2]) garantiza la existencia de una medida $d\mu(x)$ con respecto a la cual existe una familia de polinomios ortonormales que satisfacen dicha relación de recurrencia. Un resultado similar se satisface introduciendo una deformación de los coeficientes a_n, b_n (y por lo tanto de la medida de ortogonalidad, los polinomios ortonormales y todas las cantidades relacionadas) con respecto a un parámetro temporal t . Más precisamente, consideramos una modificación de la medida μ con un factor exponencial e^{-xt} :

$$\int_R p_n(x;t)p_m(x;t)e^{-xt}d\mu(x) = \delta_{n,m}$$

siempre que los momentos de $e^{-xt}d\mu(x)$ existan y sean finitos. Las ecuaciones de Toda se obtienen por compatibilidad entre la relación de recurrencia (4.1.5) y el comportamiento dinámico de los polinomios en función de t .

Es común en lugar de polinomios ortonormales $p_n(x;t)$ utilizar los polinomios mónicos $P_n(x;t)$. Podemos escribir $p_n(x;t) = \gamma_n(t)P_n(x;t)$. En tal caso, la relación de recurrencia es

$$xP_n(x;t) = P_{n+1}(x;t) + b_n(t)P_n(x;t) + a_n^2(t)P_{n-1}(x;t). \quad (4.1.6)$$

Utilizando la ortogonalidad de los polinomios $P_n(x;t)$ se verifica

$$\frac{d}{dt}P_n(x;t) = a_n^2(t)P_{n-1}(x;t). \quad (4.1.7)$$

Derivando (4.1.6) con respecto a t , aplicando (4.1.7) y utilizando (4.1.6) obtenemos

$$\begin{aligned} a_n^2(t)(P_n(x;t) + b_{n-1}P_{n-1}(x;t) + a_{n-1}^2P_{n-2}(x;t)) \\ = a_{n+1}^2P_n(x;t) + \dot{b}(t)P_n(x;t) + b_n(t)a_n^2(t)P_{n-1}(x;t) \\ + \dot{a}_n^2(t)P_{n-1}(x;t) + a_n^2(t)a_{n-1}^2(t)P_{n-2}(x;t). \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Comparando los coeficientes de $P_n(x;t)$ en (4.1.8) obtenemos

$$\frac{d}{dt}b_n(t) = a_n^2(t) - a_{n+1}^2(t).$$

Los coeficientes de $P_{n-1}(x;t)$ dan

$$\frac{d}{dt}a_n^2(t) = a_n^2(t)(b_{n-1}(t) - b_n(t)).$$

Estas son las ecuaciones de Toda para $n \geq 0$ y $a_0^2 = 0$. Las condiciones iniciales $a_n^2(0)$ y $b_n(0)$ son los coeficientes de la relación de recurrencia de los polinomios ortogonales mónicos asociados a la medida μ .

En este caso, la correspondiente matriz de Jacobi no es simétrica, pero podemos realizar la transformación

$$\tilde{J}(t) = \Gamma^{-1}(t) J(t) \Gamma(t), \quad \Gamma(t) = \text{diag}(\gamma_0(t), \gamma_1(t), \dots).$$

El par de Lax es de la forma $\tilde{J} = [\tilde{J}, \tilde{B}]$, con

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} b_0 & 1 & 0 & & \\ a_1^2 & b_1 & 1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} b_0 & 1 & 0 & & \\ 0 & b_1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}. \quad (4.1.9)$$

Hemos incluido esta formulación con los polinomios mónicos, dado que presentaremos un resultado análogo para polinomios ortogonales matriciales en la Sección 4.2.3.

Otras deformaciones similares, tales como $e^{-tx^k} d\mu(x)$, con $k \geq 1$, conducen a la jerarquía de Toda, ver [125]. El lattice de Toda se corresponde con $k = 1$. Deformaciones de la medida con respecto a varios parámetros temporales, tales como $e^{\sum_{i=1}^{\infty} t_i x^i} d\mu(x)$, son también importantes, y conducen a la jerarquía de ecuaciones discretas KP [1].

Observación 78. Hemos considerado a los polinomios ortogonales $P_n(x; t)$ como funciones de dos variables x y t . Sin embargo, el grado n de los polinomios es un parámetro importante y la relación de recurrencia de tres términos (4.1.6) nos da la dinámica en esta variable discreta. Por lo tanto, es recomendable considerar $P_n(x; t)$ como una función de tres variables n, x, t , con $n \in \mathbb{N}_0$. En cada una de estas variables estos polinomios satisfacen ecuaciones diferenciales o en diferencias. La compatibilidad entre las ecuaciones en la variable n y t nos da las ecuaciones de Toda. La compatibilidad entre las ecuaciones en las variables n y x da ecuaciones discretas de Painlevé, ver [124, 125]. Una combinación de las ecuaciones de Toda y las ecuaciones discretas de Painlevé, da la compatibilidad entre las tres variables n, x, t . De este modo, en muchos casos, obtenemos una ecuación diferencial que puede ser identificada con alguna de las ecuaciones diferenciales de Painlevé, ver [124, 125].

La conexión entre sistemas integrables y polinomios ortogonales matriciales ha sido explorada en la literatura, mayormente para obtener versiones no abelianas de objetos clásicos como las ecuaciones de Painlevé, ver por ejemplo [15, 20, 21, 26]. Mencionamos los trabajos recientes [10, 14] sobre ecuaciones matriciales de Toda y Volterra, así como también el análisis general sobre *ladder operators* para polinomios ortogonales matriciales dado en [30], basado en las ideas de Casper y Yakimov en [24]. El lattice de Toda no abeliano es una versión no conmutativa del lattice de Toda clásico estudiado por Bruschi et al. [16] y Gekhtman [61]. Se pueden obtener soluciones del lattice de Toda no abeliano considerando los coeficientes de la relación de recurrencia de tres términos para polinomios ortogonales matriciales donde el peso matricial se deforma por un factor exponencial.

Consideramos una función peso matricial $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ hermitiana definida positiva sobre la recta real con núcleo trivial (p.p) y una medida positiva μ en el intervalo $[a, b]$, donde a y b pueden ser $\pm\infty$. Suponemos que W tiene momentos finitos, ver (1.5.19), y por lo tanto

W define un producto interno matricial en el espacio de polinomios matriciales $M_N(\mathbb{C})[x]$ mediante

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(x)W(x)Q(x)^* d\mu(x), \quad (4.1.10)$$

donde $*$ denota la transpuesta conjugada. Para tal peso matricial, sabemos que existe una única sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos $(P_n)_{n \geq 0}$ tales que

$$\langle P_n(x), P_m(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} P_n(x)W(x)P_m(x)^* d\mu(x) = \mathcal{H}_n \delta_{n,m}, \quad (4.1.11)$$

donde \mathcal{H}_n es una matriz definida positiva y $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker, ver Sección 1.5.1. La sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos $(P_n)_{n \geq 0}$ satisface una relación de recurrencia de tres términos

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B(n)P_n(x) + C(n)P_{n-1}(x), \quad (4.1.12)$$

donde los coeficientes $B(n)$ y $C(n)$ son matrices $N \times N$. Observemos que la notación en (4.1.12) difiere levemente de la dada en (1.5.23). Optamos por utilizar esta notación ya que en este caso, nos permite dar los resultados con mayor claridad. Esperamos que esto no conduzca a ninguna confusión.

La deformación de Toda clásica para W es análoga a la del caso escalar, y está dada por

$$W(x; t) = e^{-tx}W(x), \quad t \in \mathbb{R},$$

ver por ejemplo [82, 103]. El objetivo principal de este capítulo es estudiar una nueva clase de deformaciones de un peso matricial $W(x)$ reemplazando el rol de x en el término e^{-tx} por un polinomio matricial $\Lambda(x)$ que satisfaga una propiedad de simetría con respecto al peso. Esta construcción incluye deformaciones con respecto a cualquier polinomio escalar con coeficientes reales, la cual lleva a la jerarquía de Toda.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 4.2 presentamos los principales resultados del capítulo: la Sección 4.2.1 introduce deformaciones del peso de la forma $e^{-t\Lambda(x)}W(x)$, donde $t \in \mathbb{R}$ y $\Lambda(x)$ satisface una condición de simetría adecuada con respecto a $W(x)$. Dado este operador diferencial $\Lambda(x)$, existe un correspondiente operador diferencial $M(t)$, con coeficientes $G_j(n; t)$, cuyas ecuaciones de evolución temporal estudiamos en la Sección 4.2.2. Estas ecuaciones pueden escribirse en forma de par de Lax, involucrando operadores en bloque tridiagonales y bidiagonales, como se muestra en la Sección 4.2.3. En la Sección 4.3, para un $\Lambda(x)$ dado, estudiamos deformaciones de la forma $e^{-v(\Lambda(x); t)}W(x)$, donde $v(x; t)$ es un polinomio de grado k con coeficiente director positivo dado. Concluimos el capítulo con un ejemplo detallado de polinomios deformados tipo Hermite en la Sección 4.4.

En este capítulo, recordando lo explicado en la Sección 1.5.4, trabajaremos con operadores $\Lambda \in \mathcal{M}_N$ de orden cero simétricos con respecto al producto interno matricial (4.1.10), esto es

$$\langle P \cdot \Lambda(x), Q \rangle = \langle P, Q \cdot \Lambda(x) \rangle,$$

para todos $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$. Los operadores simétricos de orden cero están caracterizados por:

Definición 4.1.1. Denotamos por $\mathcal{S}(W)$ al conjunto de todos los operadores simétricos de orden cero:

$$\mathcal{S}(W) := \{\Lambda(x) \in \mathcal{M}_N : \Lambda(x)W(x) = W(x)\Lambda(x)^*, \quad \forall x \in [a, b]\}. \quad (4.1.13)$$

De acuerdo a [24, Theorem 3.7] la condición de simetría implica que $\Lambda \in \mathcal{F}_R(P)$, y por lo tanto, existe un correspondiente operador en diferencias $\varphi^{-1}(\Lambda) \in \mathcal{F}_L(P)$. Más aún, si tomamos $n = 0$ en la relación

$$P_n(x) \cdot \Lambda(x) = \varphi^{-1}(\Lambda) \cdot P_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

obtenemos que Λ es un polinomio matricial. Sigue que $\mathcal{S}(W) \subseteq \mathcal{F}_R(P)$.

Operadores simétricos de orden cero constantes conducen a pesos matriciales reducibles, véase por ejemplo [89, 119], y por esta razón es de gran interés determinar si existen tales operadores para un peso matricial dado. En general, esto no es una tarea fácil, véase por ejemplo [82, 86, 89, 90].

En este capítulo trabajaremos con operadores simétricos de orden cero y grado superior (es decir, no constantes), cuya existencia no dice nada sobre la reducibilidad del peso, véase por ejemplo el Capítulo 2 y [30] para ejemplos no triviales.

4.2. Deformaciones matriciales de pesos

4.2.1. Condiciones de simetría

El objetivo de esta sección es introducir una clase de deformaciones de un peso matricial $W(x)$ reemplazando el rol de x por un operador simétrico de orden cero $\Lambda(x) \in \mathcal{S}(W)$. Consideramos deformaciones de la forma

$$W(x; t) = e^{-t\Lambda(x)}W(x), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.2.14)$$

Podemos verificar que el peso deformado es hermitiano:

$$W(x; t)^* = W(x)^*e^{-t\Lambda(x)^*} = W(x)e^{-t\Lambda(x)^*} = e^{-t\Lambda(x)}W(x) = W(x; t).$$

Esta propiedad sigue también de la Definición 4.1.1, dado que el peso matricial $W(x; t)$ puede ser escrito en forma simétrica como

$$W(x; t) = e^{-\frac{t}{2}\Lambda(x)}W(x)e^{-\frac{t}{2}\Lambda(x)^*}.$$

Tal como para la deformación clásica de Toda, el principal objetivo es obtener ecuaciones de evolución temporal para cantidades relevantes asociadas a los polinomios ortogonales matriciales con respecto a t . La condición de simetría en la Definición 4.1.1 es una propiedad clave que nos permitirá mover el factor $\Lambda(x)$ cuando diferenciamos con respecto a t y realicemos integración por partes.

Asumiendo que el peso deformado tiene momentos finitos de todos los órdenes, construimos la sucesión de polinomios ortogonales mónicos $(P_n(x; t))_{n \geq 0}$ que satisface

$$\langle P_n(x; t), P_m(x; t) \rangle_t := \int_{\mathbb{R}} P_n(x; t)W(x; t)P_m(x; t)^*d\mu(x) = \mathcal{H}_n(t)\delta_{n,m}, \quad (4.2.15)$$

donde $\mathcal{H}_n(t)$ es una matriz invertible, definida positiva. Asociado al peso matricial $W(x; t)$, tenemos las álgebras de Fourier deformadas a derecha e izquierda $\mathcal{F}_L(P; t)$ y $\mathcal{F}_R(P; t)$. Observemos que

$$\Lambda(x)W(x; t) = \Lambda(x)e^{-t\Lambda(x)}W(x) = e^{-t\Lambda(x)}\Lambda(x)W(x) = e^{-t\Lambda(x)}W(x)\Lambda(x)^* = W(x; t)\Lambda(x)^*. \quad (4.2.16)$$

Esto implica que el operador $\Lambda(x)$ está en la intersección de todas las $\mathcal{F}_R(P; t)$, para $t \geq 0$. Más aún, observemos que para cualquier polinomio v con coeficientes reales, $v(\Lambda(x)) \in S(W(x; t))$ y por lo tanto $v(\Lambda(x)) \in \mathcal{F}_R(P; t)$.

En consecuencia, para todo $t > 0$ existe $M(t) = \varphi_t^{-1}(\Lambda(x)) \in \mathcal{F}_L(P; t)$, tal que

$$P_n(x; t) \cdot \Lambda(x) = M(t) \cdot P_n(x; t), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.2.17)$$

Observación 79. Tal como en la sección anterior, (4.2.17) implica que $\Lambda(x)$ es un polinomio matricial. Si

$$\Lambda(x) = \Lambda_k x^k + \Lambda_{k-1} x^{k-1} + \cdots + \Lambda_0, \quad (4.2.18)$$

entonces por (1.5.35) y el hecho de que $\Lambda(x) = \Lambda(x)^\dagger$ y $M(t) = M(t)^\dagger$, el operador en diferencias $M(t)$ tiene $2k + 1$ términos:

$$M(t) = \sum_{j=-k}^k G_j(n; t) \delta^j. \quad (4.2.19)$$

En lo que resta de este capítulo, nos ocuparemos de la evolución temporal de los coeficientes $G_j(n; t)$ del operador (4.2.19).

Lema 4.2.1. *El coeficiente G_k de $M(t)$ es independiente de t y n .*

Demostración. La demostración sigue comparando los coeficientes directores de $P_n(x; t) \cdot \Lambda(x)$ y $M(t) \cdot P_n(x; t)$. Como $P_n(x; t) \cdot \Lambda(x) = M(t) \cdot P_n(x; t)$ para todo $t \geq 0$, y

$$P_n(x; t) \cdot \Lambda(x) = x^{n+k} \Lambda_k + \text{términos de grado menor},$$

$$M(t) \cdot P_n(x; t) = G_k(n; t) x^{n+k} + \text{términos de grado menor},$$

comparando el coeficiente de x^{n+k} obtenemos $G_k(n; t) = \Lambda_k$, y en conclusión $G_k(n; t)$ es independiente de t y n . \square

Proposición 4.2.2. *La siguiente relación se satisface:*

$$G_\ell(n; t) \mathcal{H}_{n+\ell}(t) = \mathcal{H}_n(t) G_{-\ell}(n + \ell; t)^*, \quad \ell = -k, \dots, k. \quad (4.2.20)$$

Demostración. Para $\ell \in \{-k, \dots, k\}$, tenemos que

$$G_\ell(n; t) P_{n+\ell}(x; t) = M(t) \cdot P_n(x; t) - \sum_{j=-k, j \neq \ell}^k G_j(n; t) P_{n+j}(x; t),$$

luego por ortogonalidad y por el hecho de que $M^\dagger(t) = M(t)$,

$$\begin{aligned} G_\ell(n; t) \mathcal{H}_{n+\ell}(t) &= \langle G_\ell(n; t) P_{n+\ell}(x; t), P_{n+\ell}(x; t) \rangle_t = \langle M(t) \cdot P_n(x; t), P_{n+\ell}(x; t) \rangle_t \\ &= \langle P_n(x; t), M(t) \cdot P_{n+\ell}(x; t) \rangle_t \\ &= \mathcal{H}_n(t) G_{-\ell}(n + \ell; t)^*. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba de la proposición. \square

Observación 80. Observamos que (4.2.20) puede ser vista como un sistema de ecuaciones de Pearson débiles, ver Sección 2.2.3.

4.2.2. Ecuaciones de tipo Toda

En esta sección, obtendremos ecuaciones para la evolución temporal en la variable t de los coeficientes $G_j(n; t)$. En analogía con el caso escalar, las llamamos ecuaciones de tipo Toda.

Recordemos la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ para el producto interno matricial introducido en (4.2.15). Comenzaremos con dos identidades auxiliares, que serán necesarias para la demostración del teorema principal.

Lema 4.2.3. *La siguiente relación se satisface:*

$$\dot{\mathcal{H}}_n(t) = -G_0(n; t)\mathcal{H}_n(t) = -\mathcal{H}_n(t)G_0(n; t)^*. \quad (4.2.21)$$

Demostración. Si derivamos $\mathcal{H}_n(t)$ con respecto a t , usamos (4.2.15) y ortogonalidad obtenemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}_n(t) = -\langle P_n(x; t) \cdot \Lambda(x), P_n(x; t) \rangle_t = -\langle M(t) \cdot P_n(x; t), P_n(x; t) \rangle_t.$$

Por ortogonalidad tenemos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}_n(t) = -G_0(n; t)\mathcal{H}_n(t).$$

La segunda igualdad en (4.2.21) sigue de la Proposición 4.2.2 para $\ell = 0$. \square

Lema 4.2.4. *Para $m = -k, \dots, k$, tenemos la identidad*

$$G_m(n; t)\mathcal{H}_{n+m}(t) = \langle M(t) \cdot P_n(x; t), P_{n+m}(x; t) \rangle_t = \langle P_n(x; t), P_{n+m}(x; t) \cdot \Lambda(x) \rangle_t. \quad (4.2.22)$$

Demostración. Observemos que, para $m = -k, \dots, k$, usando ortogonalidad,

$$\begin{aligned} \langle M(t) \cdot P_n(x; t), P_{n+m}(x; t) \rangle_t &= \sum_{j=-k}^k \langle G_j(t)P_{n+j}(x; t), P_{n+m}(x; t) \rangle_t \\ &= \langle G_m(n; t)P_{n+m}(x; t), P_{n+m}(x; t) \rangle_t = G_m(n; t)\mathcal{H}_{n+m}(t). \end{aligned}$$

La segunda igualdad sigue de la construcción de los operadores $\Lambda(x)$ y $M(t)$ y del hecho que $\Lambda(x) = \Lambda(x)^\dagger$. \square

En el siguiente teorema presentamos el resultado principal del capítulo, que nos da ecuaciones para la evolución temporal de los coeficientes $G_m(n; t)$ del operador en diferencias $M(t)$ en términos de t . Notemos que podemos tener valores de m positivos y negativos, y que estos dos casos deben ser separados al desarrollar las ecuaciones de evolución temporal.

Teorema 4.2.5. *Los coeficientes $G_m(n; t)$ satisfacen las siguientes ecuaciones de evolución temporal en t :*

$$\begin{aligned} \dot{G}_m(n; t) &= \sum_{j=-k}^m G_j(n; t)G_{m-j}(n+j; t) - \sum_{j=0}^{k+m} G_j(n; t)G_{m-j}(n+j; t), \quad m = -k, \dots, -1, \\ \dot{G}_m(n; t) &= \sum_{j=-k+m}^{-1} G_j(n; t)G_{m-j}(n+j; t) - \sum_{j=m+1}^k G_j(n; t)G_{m-j}(n+j; t), \quad m = 0, \dots, k. \end{aligned}$$

Demostración. Para derivar las ecuaciones de evolución temporal de $G_m(n; t)$, notemos que para $m = -k, \dots, k$, tenemos que

$$\frac{d}{dt}(G_m(n; t)\mathcal{H}_{n+m}(t)) = \frac{d}{dt}\langle P_n(x; t), P_{n+m}(x; t) \cdot \Lambda(x) \rangle_t = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t), \quad (4.2.23)$$

donde

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \langle \dot{P}_n(x; t), P_{n+m}(x; t) \cdot \Lambda(x) \rangle_t, \\ I_2(t) &= -\langle P_n(x; t) \cdot \Lambda(x), P_{n+m}(x; t) \cdot \Lambda(x) \rangle_t, \\ I_3(t) &= \langle P_n(x; t), \dot{P}_{n+m}(x; t) \cdot \Lambda(x) \rangle_t. \end{aligned}$$

El término $I_2(t)$ esta dado por

$$\begin{aligned} I_2(t) &= -\langle P_n(x; t) \cdot \Lambda(x), P_{n+m}(x; t) \cdot \Lambda(x) \rangle_t \\ &= -\sum_{j, \ell=-k}^k \langle G_j(n; t)P_{n+j}(x; t), G_\ell(n+m; t)P_{n+m+\ell}(x; t) \rangle_t \\ &= -\sum_{j=-k}^k G_j(n; t)\mathcal{H}_{n+j}(t)G_{j-m}(n+m; t)^* \\ &= -\sum_{j=\max\{-k+m, -k\}}^{\min\{k+m, k\}} G_j(n; t)\mathcal{H}_{n+j}(t)G_{j-m}(n+m; t)^*. \end{aligned}$$

Tal como en (1.5.31) asumimos que $\mathcal{H}_n = 0$ para todo $n < 0$. Más aún, observamos que hemos restringido el índice en la suma anterior dado que de lo contrario los coeficientes G_j son cero.

Ahora calculamos $I_1(t)$. Para $n+m+j \leq n-1$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\langle P_n(x; t), P_{n+m+j}(x; t) \rangle_t \\ &= \langle \dot{P}_n(x; t), P_{n+m+j}(x; t) \rangle_t - \langle P_n(x; t) \cdot \Lambda(x), P_{n+m+j}(x; t) \rangle_t + \langle P_n(x; t), \dot{P}_{n+m+j}(x; t) \rangle_t. \end{aligned}$$

Observemos que el último término es igual a cero, entonces

$$\begin{aligned} \langle \dot{P}_n(x; t), P_{n+m+j}(x; t) \rangle_t &= \langle P_n(x; t) \cdot \Lambda(x), P_{n+m+j}(x; t) \rangle_t \\ &= \langle P_n(x; t), M(t) \cdot P_{n+m+j}(x; t) \rangle_t = \mathcal{H}_n(t)G_{-m-j}(n+m+j; t)^*. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \langle \dot{P}_n(x; t), P_{n+m}(x; t) \cdot \Lambda(x) \rangle_t = \sum_{j=-k}^{-m-1} \langle \dot{P}_n(x; t), P_{n+m+j}(x; t) \rangle_t G_j(n+m; t)^* \\ &= \sum_{j=-k}^{-m-1} \mathcal{H}_n(t)G_{-m-j}(n+m+j; t)^* G_j(n+m; t)^*. \end{aligned}$$

Aplicando (4.2.20), haciendo un shift en el índice de la suma y restringiendo el índice nuevamente, obtenemos

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \sum_{j=-k}^{-m-1} G_{m+j}(n;t) \mathcal{H}_{n+m+j}(t) G_j(n+m;t)^* = \sum_{j=m-k}^{-1} G_j(n;t) \mathcal{H}_{n+j} G_{j-m}(n+m;t)^* \\ &= \sum_{j=\max\{-k+m, -k\}}^{-1} G_j(n;t) \mathcal{H}_{n+j} G_{j-m}(n+m;t)^*. \end{aligned}$$

Haciendo un cálculo similar obtenemos que

$$I_3(t) = \sum_{j=-k+m}^{m-1} G_j(n;t) \mathcal{H}_{n+j}(t) G_{j-m}(n+m;t)^* = \sum_{j=\max\{-k+m, -k\}}^{m-1} G_j(n;t) \mathcal{H}_{n+j}(t) G_{j-m}(n+m;t)^*.$$

Luego de algunas cancelaciones en los términos de la suma $I_1(t) + I_2(t) + I_3(t)$, el lado derecho de (4.2.23) es igual a

$$\sum_{j=\max\{-k+m, -k\}}^{\min\{-1, m-1\}} G_j(n;t) \mathcal{H}_{n+j}(t) G_{j-m}(n+m;t)^* - \sum_{j=\max\{0, m\}}^{\min\{k+m, k\}} G_j(n;t) \mathcal{H}_{n+j}(t) G_{j-m}(n+m;t)^*.$$

Aplicando (4.2.20) de nuevo, la ecuación anterior es igual a

$$\sum_{j=\max\{-k+m, -k\}}^{\min\{-1, m-1\}} G_j(n;t) G_{m-j}(n+j;t) \mathcal{H}_{n+m}(t) - \sum_{j=\max\{0, m\}}^{\min\{k+m, k\}} G_j(n;t) G_{m-j}(n+j;t) \mathcal{H}_{n+m}(t).$$

Por otro lado, para (4.2.23) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(G_m(n;t) \mathcal{H}_{n+m}(t)) &= \dot{G}_m(n;t) \mathcal{H}_{n+m}(t) + G_m(n;t) \dot{\mathcal{H}}_{n+m}(t) \\ &= \dot{G}_m(n;t) \mathcal{H}_{n+m}(t) - G_m(n;t) G_0(n+m;t) \mathcal{H}_{n+m}(t), \end{aligned}$$

aplicando (4.2.21). Finalmente, multiplicando por $\mathcal{H}_{n+m}(t)^{-1}$ a la derecha y reorganizando los términos, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{G}_m(n;t) &= \sum_{j=\max\{-k+m, -k\}}^{\min\{-1, m-1\}} G_j(n;t) G_{m-j}(n+j;t) - \sum_{j=\max\{0, m\}}^{\min\{k+m, k\}} G_j(n;t) G_{m-j}(n+j;t)(t) \\ &\quad + G_m(n;t) G_0(n+m;t). \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del teorema. \square

Presentamos los casos $k = 1$ y $k = 2$ explícitamente.

Corolario 4.2.6 (Ecuaciones no-Abelianas de tipo Toda). *El caso $k = 1$, i.e., M de orden 3 da las ecuaciones de tipo Toda:*

$$\begin{aligned} \dot{G}_0(n;t) &= G_{-1}(n;t) G_1(n-1;t) - G_1(n;t) G_{-1}(n+1;t), \\ \dot{G}_{-1}(n;t) &= G_{-1}(n;t) G_0(n-1;t) - G_0(n;t) G_{-1}(n;t), \\ \dot{G}_1(n;t) &= 0. \end{aligned}$$

Como ejemplo, consideramos $\Lambda(x) = x$, en tal caso el operador en diferencias es el correspondiente a la relación de recurrencia de tres términos:

$$\mathcal{L}(t) = \delta + B(n; t) + C(n; t)\delta^{-1},$$

i.e., $G_1(n; t) = 1$, $G_0(n; t) = B(n; t)$, $G_{-1}(n; t) = C(n; t)$, y obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{B}(n; t) &= C(n; t) - C(n+1; t), \\ \dot{C}(n; t) &= C(n; t)B(n-1; t) - B(n; t)C(n; t).\end{aligned}$$

Hemos recuperado las ecuaciones de Toda (no-Abelianas) estándares para los coeficientes de la relación de recurrencia. Para un $\Lambda(x)$ más general, obtenemos coeficientes $G_0(n; t)$ y $G_{\pm 1}(n; t)$ que pueden ser escritos en términos de $B(n; t)$ y $C(n; t)$.

Corolario 4.2.7. *El caso $k = 2$, i.e., M de orden 5 da las ecuaciones*

$$\begin{aligned}\dot{G}_0(n; t) &= G_{-2}(n; t)G_2(n-2; t) + G_{-1}(n; t)G_1(n-1; t) - G_1(n; t)G_{-1}(n+1; t) \\ &\quad - G_2(n; t)G_{-2}(n+2; t), \\ \dot{G}_{-1}(n; t) &= G_{-2}(n; t)G_1(n-2; t) - G_0(n; t)G_{-1}(n; t) - G_1(n; t)G_{-2}(n+1; t) \\ &\quad + G_{-1}(n; t)G_0(n-1; t), \\ \dot{G}_1(n; t) &= G_{-1}(n; t)G_2(n-1; t) - G_2(n; t)G_{-1}(n+2; t), \\ \dot{G}_{-2}(n; t) &= G_{-2}(n; t)G_0(n-2; t) - G_0(n; t)G_{-2}(n; t), \\ \dot{G}_2(n; t) &= 0.\end{aligned}$$

Como antes, en este caso los términos $G_m(n; t)$ pueden ser escritos en término de $B(n; t)$ y $C(n; t)$ de la relación de recurrencia de tres términos (4.1.12), pero no incluimos el detalle de esta cuenta.

4.2.3. Par de Lax

Las ecuaciones de evolución temporal para los coeficientes $G_m(n; t)$ que hemos obtenido, ver Teorema 4.2.5, pueden ser escritas en forma de par de Lax. Consideremos las matrices semi-infinitas a bloques L, L^+ , donde $i, j \in \mathbb{N}_0$,

$$L_{i,j} = \begin{cases} 0 & |i-j| > k, \\ G_{j-i}(i; t) & |i-j| \leq k, \end{cases} \quad L^+_{i,j} = \begin{cases} L_{i,j} & i \leq j, \\ 0 & i > j. \end{cases}$$

Teorema 4.2.8 (Par de Lax). *La siguiente relación se satisface:*

$$\dot{L} = [L, L^+],$$

donde $[L, L^+] = LL^+ - L^+L$.

Demostración. Calculamos

$$\begin{aligned}(LL^+)_{n,n+m} &= \sum_{s=0}^{\infty} L_{n,s}L^+_{s,n+m} = \sum_{r=-n}^{\infty} L_{n,r+n}L^+_{r+n,n+m} = \sum_{r=\max\{-n,-k\}}^{\min\{k,m\}} L_{n,r+n}L^+_{r+n,n+m} \\ &= \sum_{r=\max\{-n,-k\}}^{\min\{k,m\}} G_r(n; t)G_{m-r}(r+n; t) = \sum_{r=\max\{-n,-k,m-k\}}^{\min\{k,k+m,m\}} G_r(n; t)G_{m-r}(r+n; t).\end{aligned}$$

Similarmente obtenemos

$$(L^+L)_{n,n+m} = \sum_{r=0}^{\min\{k,k+m\}} G_r(n;t)G_{m-r}(r+n;t).$$

Calculando el corchete obtenemos el resultado deseado:

$$\begin{aligned} [L, L^+]_{n,n+m} &= (LL^+)_{n,n+m} - (L^+L)_{n,n+m} \\ &= \sum_{r=\max\{-n,-k,m-k\}}^{\min\{k,k+m,m\}} G_r(n;t)G_{m-r}(r+n;t) - \sum_{r=0}^{\min\{k,k+m\}} G_r(n;t)G_{m-r}(r+n;t). \end{aligned}$$

En conclusión tenemos

$$\begin{aligned} [L, L^+]_{n,n+m} &= \sum_{r=-k}^m G_r(n;t)G_{m-r}(r+n;t) - \sum_{r=0}^{k+m} G_r(n;t)G_{m-r}(r+n;t), \quad m = -k, \dots, -1, \\ [L, L^+]_{n,n+m} &= \sum_{r=m-k}^m G_r(n;t)G_{m-r}(r+n;t) - \sum_{r=0}^k G_r(n;t)G_{m-r}(r+n;t), \quad m = 0, \dots, k. \end{aligned}$$

Aquí asumimos que la sucesión $G_j(n;t) = 0$ para valores negativos de n . Concluimos que $[L, L^+]_{n,n+m}$ coincide con el lado derecho de las ecuaciones de evolución temporal dadas en el Teorema 4.2.5. Esto concluye la demostración del teorema. \square

Observamos que este resultado es una versión en bloques del caso escalar dado en (4.1.9) y generaliza otros casos conocidos en la literatura: podemos considerar deformaciones con respecto a un monomio escalar $\Lambda(x) = x^k$, para $k \geq 1$, lo que conduce a la jerarquía de Toda como se explica en [125, Section 2.3], y también para $\Lambda(x) \in \mathbb{R}[x]$. Más aún, el resultado de esta sección incluye el caso matricial $\Lambda(x) \in \mathcal{S}(W)$, ver (4.1.13).

4.3. Ecuaciones de Toda polinomiales

En las secciones anteriores, consideramos el caso general de un operador en diferencias $M(t)$ con $2k+1$ términos, ver (4.2.19), que viene de un polinomio $\Lambda(x)$ de grado k y forma dada en (4.2.18). Observamos que tal forma puede ser también obtenida como una composición de $v(\Lambda(x);t)$, con $\Lambda(x)$ de grado uno y $v(x;t)$ un polinomio de grado k en x . En este caso, además de $M(t)$, existe otro operador en diferencias $M_\Lambda(t)$ asociado a $\Lambda(x)$, el cual tiene tres términos. En esta sección estudiamos ecuaciones de evolución temporal para este operador en diferencias, con respecto a un parámetro real extra t .

Sea $\Lambda(x) \in \mathcal{S}(W)$ un polinomio de grado uno y v un polinomio de grado k en x que depende suavemente de un parámetro temporal t tal que

$$H(x;t) = e^{-v(\Lambda(x);t)}W(x),$$

tiene momentos finitos de todos los órdenes. Sea $(P_n^H(x;t))_n$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a H . Observemos que $\Lambda(x), v(\Lambda(x);t) \in \mathcal{S}(H(x;t))$, y entonces

$$P_n^H \cdot \Lambda(x) = M_\Lambda(t) \cdot P_n^H \quad \implies \quad P_n^H \cdot v(\Lambda(x);t) = v(M_\Lambda; t) \cdot P_n^H,$$

donde

$$M_\Lambda(t) = K_1(n; t)\delta + K_0(n; t) + K_{-1}(n; t)\delta^{-1}, \quad (4.3.24)$$

y $v(M_\Lambda; t)$ tiene $2k+1$ términos, los cuales pueden escribirse como combinaciones de $K_{\pm 1}(n; t)$ y $K_0(n; t)$. Observemos que el coeficiente $K_1(n; t)$ es de hecho independiente de t y n comparando coeficientes directores como en la demostración del Lema 4.2.1, pero conservamos la notación para ser consistentes.

Siguiendo a [30, Remark 3], dado el operador en diferencias M_Λ correspondiente al polinomio de grado uno Λ , y cualquier polinomio q , denotamos por $q(M_\Lambda; t)_\ell(n; t)$ al coeficiente de $q(M_\Lambda; t)$ de orden ℓ en δ :

$$q(M_\Lambda; t) = \sum_{j=-\deg q}^{\deg q} q(M_\Lambda; t)_j(n; t) \delta^j. \quad (4.3.25)$$

Tal como se muestra en [30] el coeficiente $q(M_\Lambda; t)_\ell(n; t)$ puede ser obtenido siguiendo el esquema de la Figura 4.1: $q(M_\Lambda; t)_\ell(n; t)$ es igual a la suma sobre todos los caminos posibles desde $P_n^H(x; t)$ a $P_{n+\ell}^H(x; t)$ en $\deg q$ pasos, donde en cada camino multiplicamos los coeficientes correspondientes a cada flecha.

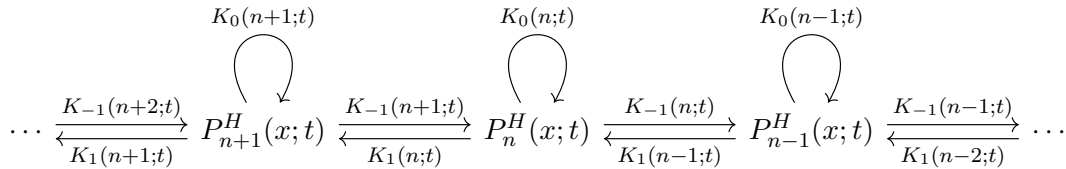


Figura 4.1: Esquema para calcular $q(M_\Lambda; t)_\ell(n; t)$.

Por ejemplo, si $q(x) = x^3$, $\Lambda(x) = x$, y $M_\Lambda = \mathcal{L}$ el operador correspondiente a la relación de recurrencia de tres términos en (4.1.12), tenemos $q(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^3$, y para calcular $(\mathcal{L}^3)_{-1}(n)$ tenemos un total de seis caminos de $P_n(x)$ a $P_{n-1}(x)$ en tres pasos:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^3)_{-1}(n) &= C(n)B(n-1)^2 + B(n)C(n)B(n-1) + B(n)^2C(n) + C(n+1)C(n) \\ &\quad + C(n)C(n-1) + C(n)^2. \end{aligned}$$

Antes de presentar los resultados sobre la deformación de los coeficientes $K_0(n; t)$, $K_{\pm 1}(n; t)$, damos el siguiente lema sobre la deformación de los polinomios.

Lema 4.3.1. *Los polinomios ortogonales satisfacen la siguiente evolución con respecto a t :*

$$\dot{P}_n^H(x; t) = \sum_{m=0}^{n-1} \dot{v}(M_\Lambda; t)_{m-n}(n; t) P_m^H(x; t).$$

Demostración. Observemos que si $n > m$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle P_n^H(x; t), P_m^H(x; t) \rangle_t = \langle \dot{P}_n^H(x; t), P_m^H(x; t) \rangle_t - \langle P_n^H(x; t) \cdot \dot{v}(\Lambda(x); t), P_m^H(x; t) \rangle_t \\ &\quad + \langle P_n^H(x; t), \dot{P}_m^H(x; t) \rangle_t. \end{aligned}$$

Como $n > m$, el último término de la ecuación anterior es cero y

$$\langle \dot{P}_n^H(x; t), P_m^H(x; t) \rangle_t = \langle P_n^H(x; t) \cdot \dot{v}(\Lambda(x); t), P_m^H(x; t) \rangle_t.$$

Dado que $\dot{P}_n^H(x; t)$ es un polinomio de grado $n - 1$, por ortogonalidad tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{P}_n^H(x; t) &= \sum_{m=0}^{n-1} \langle \dot{P}_n^H(x; t), P_m^H(x; t) \rangle_t \mathcal{H}_m(t)^{-1} P_m^H(x; t) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \langle P_n^H(x; t) \cdot \dot{v}(\Lambda(x); t), P_m^H(x; t) \rangle_t \mathcal{H}_m(t)^{-1} P_m^H(x; t) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \langle \dot{v}(M_\Lambda; t) \cdot P_n^H(x; t), P_m^H(x; t) \rangle_t \mathcal{H}_m(t)^{-1} P_m^H(x; t) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \dot{v}(M_\Lambda; t)_{m-n}(n; t) P_m^H(x; t). \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del lema. \square

Observación 81. Para las ecuaciones de Toda dadas en el Corolario 4.2.6, tenemos que $v(x; t) = tx$. Luego $v(\Lambda(x); t) = t\Lambda(x)$, y $\dot{v} = \Lambda(x)$, entonces $k = 1$, y el único término no nulo se corresponde con $m = n - 1$, y por lo tanto

$$\dot{P}_n^H(x; t) = \sum_{m=0}^{n-1} K_{m-n}(n; t) P_m^H(x; t) = K_{-1}(n; t) P_{n-1}^H(x; t).$$

Además si $\Lambda(x) = x$, M_Λ es el operador de la relación de recurrencia de tres términos y

$$\dot{P}_n^H(x; t) = C(n; t) P_{n-1}^H(x; t).$$

Esto es compatible con el resultado de la deformación de Toda para el caso escalar, ver por ejemplo [125, Lemma 2.1].

Tal como en las secciones anteriores, presentamos las ecuaciones de evolución temporal para los coeficientes $K_0(n; t)$ y $K_{\pm 1}(n; t)$ del operador en diferencias.

Teorema 4.3.2. *Las siguientes ecuaciones de evolución temporal se satisfacen:*

$$\begin{aligned} \dot{K}_0(n; t) &= \dot{v}(M_\Lambda; t)_{-1}(n; t) K_1(n-1; t) - K_1(n; t) \dot{v}(M_\Lambda; t)_{-1}(n+1; t), \\ \dot{K}_{-1}(n; t) &= \dot{v}(M_\Lambda; t)_{-2}(n; t) K_1(n-2; t) + \dot{v}(M_\Lambda; t)_{-1}(n; t) K_0(n-1; t) \\ &\quad - K_1(n; t) \dot{v}(M_\Lambda; t)_{-2}(n+1; t) - K_0(n; t) \dot{v}(M_\Lambda; t)_{-1}(n; t). \end{aligned}$$

Demostración. Tomamos $\frac{d}{dt}$ en ambos miembros de $M_\Lambda(t) \cdot P_n^H(x; t) = P_n^H(x; t) \cdot \Lambda(x)$, y luego el lado derecho es igual a

$$\begin{aligned} \dot{P}_n^H(x; t) \cdot \Lambda(x) &= \sum_{m=0}^{n-1} \dot{v}(M_\Lambda; t)_{m-n}(n; t) P_m^H(x; t) \cdot \Lambda(x) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \dot{v}(M_\Lambda; t)_{m-n}(n; t) (K_1(m; t) P_{m+1}^H(x; t) + K_0(m; t) P_m^H(x; t) \\ &\quad + K_{-1}(m; t) P_{m-1}^H(x; t)). \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 4.3.1, el lado izquierdo es igual a

$$K_1(n;t)\dot{P}_{n+1}^H(x;t) + \dot{K}_0(n;t)P_n^H(x;t) + K_0(n;t)\dot{P}_n^H(x;t) + \dot{K}_{-1}(n;t)P_{n-1}^H(x;t) \\ + K_{-1}(n;t)\dot{P}_{n-1}^H(x;t),$$

lo que puede reescribirse como

$$\dot{K}_0(n;t)P_n^H(x;t) + \dot{K}_{-1}(n;t)P_{n-1}^H(x;t) + K_1(n;t) \sum_{m=0}^n \dot{v}(M_\Lambda;t)_{m-n-1}(n+1;t)P_m^H(x;t) \\ + K_0(n;t) \sum_{m=0}^{n-1} \dot{v}(M_\Lambda;t)_{m-n}(n;t)P_m^H(x;t) + K_{-1}(n;t) \sum_{m=0}^{n-2} \dot{v}(M_\Lambda;t)_{m-n+1}(n-1;t)P_m^H(x;t).$$

Comparando los coeficientes de P_n^H en ambos miembros, obtenemos

$$\dot{K}_0(n;t) = \dot{v}(M_\Lambda;t)_{-1}(n;t)K_1(n-1;t) - K_1(n;t)\dot{v}(M_\Lambda;t)_{-1}(n+1;t).$$

Comparando coeficientes nuevamente, obtenemos

$$\dot{K}_{-1}(n;t) = \dot{v}(M_\Lambda;t)_{-2}(n;t)K_1(n-2;t) + \dot{v}(M_\Lambda;t)_{-1}(n;t)K_0(n-1;t) \\ - K_1(n;t)\dot{v}(M_\Lambda;t)_{-2}(n+1;t) - K_0(n;t)\dot{v}(M_\Lambda;t)_{-1}(n;t).$$

Esto concluye la prueba del teorema □

Corolario 4.3.3 (Ecuaciones de tipo Langmuir). *Para $v(x;t) = tx^2$ obtenemos*

$$\dot{K}_0(n;t) = (K_0(n;t)K_{-1}(n;t) + K_{-1}(n;t)K_0(n-1;t))K_1(n-1;t) \\ - K_1(n;t)(K_0(n+1;t)K_{-1}(n+1;t) + K_{-1}(n+1;t)K_0(n;t)),$$

$$\dot{K}_{-1}(n;t) = K_{-1}(n;t)K_{-1}(n-1;t)K_1(n-2;t) - K_1(n;t)K_{-1}(n+1;t)K_{-1}(n;t) \\ + K_{-1}(n;t)K_0(n-1;t)^2 - K_0(n;t)^2K_{-1}(n;t).$$

Demostración. La demostración es consecuencia directa del Teorema 4.3.2. Notemos que $v(\Lambda(x);t) = t\Lambda(x)^2$ y luego $\dot{v}(\Lambda(x);t) = \Lambda(x)^2$. A partir de la expresión del correspondiente M_Λ en (4.3.24), obtenemos

$$\dot{v}(M_\Lambda;t) = \dot{v}(M_\Lambda;t)_2(n)\delta^2 + \dot{v}(M_\Lambda;t)_1(n)\delta + \dot{v}(M_\Lambda;t)_0(n) + \dot{v}(M_\Lambda;t)_{-1}(n)\delta^{-1} \\ + \dot{v}(M_\Lambda;t)_{-2}(n)\delta^{-2},$$

donde los coeficientes en $\dot{v}(M_\Lambda;t)$ pueden ser escritos en términos de K_1 , K_0 , K_{-1} :

$$\dot{v}(M_\Lambda;t)_2(n) = K_1(n;t)K_1(n+1;t), \\ \dot{v}(M_\Lambda;t)_1(n) = K_1(n;t)K_0(n+1;t) + K_0(n;t)K_1(n;t), \\ \dot{v}(M_\Lambda;t)_0(n) = K_1(n-1;t)K_{-1}(n+1;t) + K_0(n)^2 + K_{-1}(n;t)K_1(n-1;t), \\ \dot{v}(M_\Lambda;t)_{-1}(n) = K_0(n;t)K_{-1}(n;t) + K_{-1}(n;t)K_0(n-1;t), \\ \dot{v}(M_\Lambda;t)_{-2}(n) = K_{-1}(n;t)K_{-1}(n-1;t).$$

El corolario sigue aplicando el Teorema 4.3.2. □

4.4. Polinomios matriciales deformados de tipo Hermite

En esta sección, consideramos el peso matricial $N \times N$ tipo Hermite W con soporte \mathbb{R} estudiado en [82]:

$$W^{(a)}(x) = e^{-x^2} e^{xA} e^{xA^*}, \quad A_{j,k} = \begin{cases} a_k & k = j - 1, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (4.4.26)$$

donde a es un vector de parámetros $a = (a_j)_{j=1}^{N-1}$. En este ejemplo los índices de las matrices $j, k \in \{1, \dots, N\}$. Denotamos por $(P_n^{(a)})_n$ a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $W^{(a)}$. El álgebra de Fourier a derecha $\mathcal{F}_R(P^{(a)})$ contiene cuatro operadores diferenciales relevantes: el operador de orden cero dado por multiplicación por x , y

$$D^{(a)} = \frac{d}{dx} + A, \quad (D^{(a)})^\dagger = -D^{(a)} + 2x, \quad \mathcal{D}^{(a)} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}(2A - 2x) + A^2 - 2J,$$

ver [30]. Notemos que las expresiones dadas en esta sección difieren de las dadas en [30] en una conjugación con una matriz constante $L(0)$. Los operadores $D^{(a)}$ y $(D^{(a)})^\dagger$ son mutuamente adjuntos y $\mathcal{D}^{(a)}$ es simétrico. El álgebra de Lie \mathfrak{g} generada por $D^{(a)}$, $(D^{(a)})^\dagger$, $\mathcal{D}^{(a)}$, x y la matriz identidad es un álgebra de Lie de dimensión cuatro que puede ser identificada con el álgebra de Lie del oscilador armónico [30, Proposition 4]. El operador de Casimir de esta álgebra de Lie es el polinomio de grado uno

$$\mathcal{C}^{(a)}(x) = \mathcal{D}^{(a)} - \frac{1}{2}(D^{(a)})^\dagger D^{(a)} = J - xA, \quad J_{ii} = i, \quad J_{ij} = 0, \quad i \neq j. \quad (4.4.27)$$

La propiedad fundamental del operador de Casimir \mathcal{C} es que conmuta con $D^{(a)}$, $(D^{(a)})^\dagger$, $\mathcal{D}^{(a)}$ y x . La relación de recurrencia para los polinomios ortogonales mónicos está dada por

$$xP_n^{(a)}(x) = P_{n+1}^{(a)}(x) + B^{(a)}(n)P_n^{(a)}(x) + C^{(a)}(n)P_{n-1}^{(a)}(x).$$

Si los parámetros a_k satisfacen ciertas relaciones, los coeficientes $B^{(a)}(n)$ y $C^{(a)}(n)$ tienen expresiones simples, ver [82, Proposition 3.16].

4.4.1. El peso deformado

A partir de (4.4.27) obtenemos que $\mathcal{C}^{(a)}(x)$ es un operador simétrico de orden cero, luego $\mathcal{C}^{(a)}(x) \in \mathcal{S}(W)$. Por lo tanto podemos considerar una deformación del peso con W con respecto al operador de Casimir

$$W(x; t) = e^{-t\mathcal{C}^{(a)}(x)} W^{(a)}(x). \quad (4.4.28)$$

Aplicando [82, Ecuación (3.6)], obtenemos que $e^{xA} J e^{-xA} = \mathcal{C}^{(a)}(x)$ y luego $e^{xA} e^{-tJ} e^{-xA} = e^{-t\mathcal{C}^{(a)}(x)}$. De esto obtenemos la siguiente expresión para el peso deformado:

$$W(x; t) = e^{-x^2} e^{xA} e^{-tJ} e^{xA^*}. \quad (4.4.29)$$

En (4.4.29), la dependencia de t está solo en el factor diagonal e^{-tJ} . Por otro lado, la siguiente factorización es también válida:

$$W(x; t) = e^{-\frac{t}{2}J} W^{(e^{\frac{t}{2}}a)}(x) e^{-\frac{t}{2}J}. \quad (4.4.30)$$

Utilizando la expresión (4.4.30), obtenemos los polinomios ortogonales mónicos con respecto a $W(x; t)$ en términos de los polinomios ortogonales mónicos con respecto al peso $W^{(e^{\frac{t}{2}}a)}(x)$:

$$P_n(x; t) = e^{-\frac{t}{2}J} P_n^{(e^{\frac{t}{2}}a)}(x) e^{\frac{t}{2}J}. \quad (4.4.31)$$

4.4.2. Álgebras de Fourier deformadas

Como consecuencia de los resultados de las secciones anteriores, describimos las álgebras de Fourier deformadas $\mathcal{F}_L(P; t)$ y $\mathcal{F}_R(P; t)$.

Teorema 4.4.1. *El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_L(P(e^{\frac{t}{2}a})) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}_R(P(e^{\frac{t}{2}a})) \\ \downarrow \tau & & \downarrow \sigma \\ \mathcal{F}_L(P; t) & \xrightarrow{\varphi_t} & \mathcal{F}_R(P; t) \end{array}$$

donde los mapas σ y τ están definidos por

$$\sigma(E) = e^{-\frac{t}{2}J} E e^{\frac{t}{2}J}, \quad \tau(M) = e^{-\frac{t}{2}J} M e^{\frac{t}{2}J},$$

y son isomorfismos de álgebras.

Demostración. Dado $M \in \mathcal{F}_L(P(e^{\frac{t}{2}a}))$ y $E = \varphi(M)$ i.e., $P_n^{(e^{\frac{t}{2}a})}(x) \cdot E = M \cdot P_n^{(e^{\frac{t}{2}a})}(x)$. Aplicando (4.4.31) obtenemos

$$P_n(x; t) \cdot e^{-\frac{t}{2}J} E e^{\frac{t}{2}J} = e^{-\frac{t}{2}J} M e^{\frac{t}{2}J} \cdot P_n(x; t),$$

entonces $\varphi_t(\tau(M)) = \sigma(\varphi(M))$, y el diagrama es conmutativo. Los mapas σ y τ son homomorfismos de álgebras, y sus inversas son $\sigma^{-1}(D) = e^{\frac{t}{2}J} D e^{-\frac{t}{2}J}$ y $\tau^{-1}(M) = e^{\frac{t}{2}J} M e^{-\frac{t}{2}J}$. Esto concluye la prueba del teorema. \square

Corolario 4.4.2. *Los coeficientes deformados de la relación de recurrencia están dados por*

$$B(n; t) = e^{-\frac{t}{2}J} B^{(e^{\frac{t}{2}a})}(n) e^{\frac{t}{2}J}, \quad C(n; t) = e^{-\frac{t}{2}J} C^{(e^{\frac{t}{2}a})}(n) e^{\frac{t}{2}J},$$

donde $B^{(e^{\frac{t}{2}a})}(n)$ y $C^{(e^{\frac{t}{2}a})}(n)$ son los coeficientes de la relación de recurrencia correspondiente a $W^{(e^{\frac{t}{2}a})}(x)$.

La siguiente proposición muestra que los mapas τ y σ preservan las operaciones \dagger .

Proposición 4.4.3. *Sea $E \in \mathcal{F}_R(P(e^{\frac{t}{2}a}))$ y sea E^\dagger su adjunto. Sea $M = \varphi^{-1}(E)$. Entonces*

$$\sigma(E^\dagger) = (\sigma(E))^\dagger, \quad \tau(M^\dagger) = (\tau(M))^\dagger.$$

Demostración. La demostración es consecuencia de la factorización del peso (4.4.30) y de la expresión de los polinomios ortogonales mónicos (4.4.31):

$$\begin{aligned} \langle P_n(x; t) \cdot \sigma(E), P_m(x; t) \rangle_t &= e^{-\frac{t}{2}J} \langle P_n^{(e^{\frac{t}{2}a})} \cdot E, P_m^{(e^{\frac{t}{2}a})} \rangle e^{-\frac{t}{2}J} = e^{-\frac{t}{2}J} \langle P_n^{(e^{\frac{t}{2}a})}, P_m^{(e^{\frac{t}{2}a})} \cdot E^\dagger \rangle e^{-\frac{t}{2}J} \\ &= \langle P_n(x; t), P_m(x; t) \cdot \sigma(E^\dagger) \rangle_t. \end{aligned}$$

Similarmente obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \tau(M) \cdot P_n(x; t), P_m(x; t) \rangle_t &= e^{-\frac{t}{2}J} \langle M \cdot P_n^{(e^{\frac{t}{2}a})}, P_m^{(e^{\frac{t}{2}a})} \rangle e^{-\frac{t}{2}J} = e^{-\frac{t}{2}J} \langle P_n^{(e^{\frac{t}{2}a})}, M^\dagger \cdot P_m^{(e^{\frac{t}{2}a})} \rangle e^{-\frac{t}{2}J} \\ &= \langle P_n(x; t), \tau(M^\dagger) \cdot P_m(x; t) \rangle_t. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de la proposición. \square

Corolario 4.4.4. *Se verifican las siguientes relaciones:*

$$\sigma(D^{(e^{\frac{t}{2}}a)}) = D^{(a)}, \quad \sigma((D^{(e^{\frac{t}{2}}a)})^\dagger) = (D^{(a)})^\dagger, \quad \sigma(\mathcal{D}^{(e^{\frac{t}{2}}a)}) = \mathcal{D}^{(a)}, \quad \sigma(\mathcal{C}^{(e^{\frac{t}{2}}a)}) = \mathcal{C}^{(a)}.$$

Los operadores $D^{(a)}$, $(D^{(a)})^\dagger$, $\mathcal{D}^{(a)}$ y $\mathcal{C}^{(a)}$ pertenecen a $\mathcal{F}_R(P; t)$ para todo $t \geq 0$. Más aún, $\mathcal{D}^{(a)}$ tiene a los polinomios mónicos $P_n(x; t)$ como autofunciones.

Demostración. La demostración es consecuencia de la proposición anterior. \square

Una de las consecuencias del Teorema 4.4.1 y de la Proposición 4.4.3 es que, pese a la evolución temporal, $D^{(a)}$ y $(D^{(a)})^\dagger$ son mutuamente adjuntos y $\mathcal{D}^{(a)}$ es un operador simétrico. Más aún, el álgebra de Lie del oscilador armónico \mathfrak{g} está contenida en $\mathcal{F}_R(P; t)$ para todo $t \geq 0$.

Finalmente, observamos que el operador de Casimir, $\mathcal{C}^{(a)}$ actúa en los polinomios deformados $P_n(x; t)$ como una relación de recurrencia de tres términos dada por

$$G_1(n; t)P_{n+1}(x; t) + G_0(n; t)P_n(x; t) + G_{-1}(n; t)P_{n-1}(x; t) = P_n(x; t) \cdot \mathcal{C}^{(a)}(x). \quad (4.4.32)$$

Aplicando [30, Lemma 4] obtenemos las siguientes expresiones para los coeficientes G_1 , G_0 , G_{-1} :

$$\begin{aligned} G_1(n; t) &= -A, & G_0(n; t) &= n + J - 2C(n; t) - AB(n; t), \\ G_{-1}(n; t) &= C(n; t)A - 2C(n; t)B(n-1; t). \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 4.2.5, los coeficientes G_0 y G_{-1} satisfacen las ecuaciones de tipo Toda no abelianas. Observar que el coeficiente G_1 es independiente de n y t , lo cual es consistente con el Lema 4.2.1.

4.4.3. Ejemplo: el peso deformado 2×2

Tomamos $N = 2$ en (4.4.29), con A dada por (4.4.26) y $a_1 = a$, entonces el peso deformado W es la matriz 2×2

$$W(x; t) = e^{-x^2-t} \begin{pmatrix} 1 & xa \\ xa & x^2a^2 + e^{-t} \end{pmatrix},$$

Los polinomios ortogonales mónicos $P_n(x; t)$ pueden ser escritos como una combinación lineal matricial de polinomios escalares de Hermite:

$$2^n P_n(x; t) = H_n(x) - na \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{a^2+2e^t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} H_{n-1}(x) + n(n-1) \begin{pmatrix} \frac{2a^2}{a^2+2e^t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H_{n-2}(x).$$

El caso $t = 0$ fue dado en [45, Theorem 5.1], salvo por una conjugación de la matriz A .

En el caso 2×2 , los coeficientes G_1 , G_0 y G_{-1} asociados al operador de Casimir en (4.4.32) tienen expresiones simples

$$G_1(n; t) = -A, \quad G_0(n; t) = \begin{pmatrix} 2 \frac{na^2+e^t}{na^2+2e^t} & 0 \\ 0 & \frac{(n+1)a^2+4e^t}{(n+1)a^2+2e^t} \end{pmatrix}, \quad G_{-1}(n; t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2nae^t}{(na^2+2e^t)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones no abelianas de tipo Toda del Teorema 4.2.5 pueden verificarse directamente a partir de estas expresiones.

APÉNDICE A

Algunas demostraciones

A.1. Determinante Block Vandermonde

En esta subsección trabajaremos principalmente en matrices triangulares superiores y nos enfocaremos en sus partes diagonales. Entonces, cuando dos matrices triangulares superiores $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ tengan la misma diagonal, escribiremos

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 + \text{s.t.s.}$$

donde s.t.s. significa *estrictamente triangular superior*. Todas las matrices $\rho_i^{(\lambda)}(n)$ de la Sección 2.8 satisfacen las condiciones del Corolario A.1.2, pero primero daremos un resultado preliminar para un caso un poco más simple.

Lema A.1.1. *Consideremos la matriz triangular superior que depende de n de la forma*

$$\mathcal{M}(n) = n\mathcal{T} + \mathcal{T}_0 + \text{s.t.s.}, \quad (\text{A.1.1})$$

donde \mathcal{T} y \mathcal{T}_0 son matrices diagonales constantes y la parte s.t.s. puede depender de n . El determinante de la matriz de Vandermonde en bloques no depende de la parte s.t.s. ni de \mathcal{T}_0 , y está dado por

$$\det \begin{pmatrix} I & \mathcal{M}(n_0) & \dots & \mathcal{M}(n_0)^x \\ I & \mathcal{M}(n_1) & \dots & \mathcal{M}(n_1)^x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & \mathcal{M}(n_x) & \dots & \mathcal{M}(n_x)^x \end{pmatrix} = \det(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}x(x+1)} \left(\prod_{0 \leq s < t \leq x} (n_t - n_s) \right)^N, \quad x \in \mathbb{N}_{>0},$$

donde $(n_j)_{j=0}^x$ es una lista de números complejos para los cuales $\mathcal{M}(n_j)$ está definida.

Demostración. La prueba será por inducción en x . Ocasionalmente denotaremos la matriz de Vandermonde en bloques por $\det(\mathcal{M}(n_j)^k)_{j,k=0}^x$ pese a que esto sea un pequeño abuso de notación en el caso que $\mathcal{M}(n_j)$ sea singular. Aplicamos un análogo en bloques de operaciones

elementales por fila y obtenemos

$$\begin{aligned}
& \det \begin{pmatrix} I & \mathcal{M}(n_0) & \dots & \mathcal{M}(n_0)^x \\ I & \mathcal{M}(n_1) & \dots & \mathcal{M}(n_1)^x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & \mathcal{M}(n_x) & \dots & \mathcal{M}(n_x)^x \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} I & \mathcal{M}(n_0) & \dots & \mathcal{M}(n_0)^x \\ I & \mathcal{M}(n_1) & \dots & \mathcal{M}(n_1)^x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & \mathcal{M}(n_x) & \dots & \mathcal{M}(n_x)^x \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I - \mathcal{M}(n_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & -\mathcal{M}(n_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I & -\mathcal{M}(n_0) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ I & (n_1 - n_0)\mathcal{T} + \text{s.t.s.} & \dots & \mathcal{M}(n_1)^{x-1}(n_1 - n_0)\mathcal{T} + \text{s.t.s.} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & (n_x - n_0)\mathcal{T} + \text{s.t.s.} & \dots & \mathcal{M}(n_x)^{x-1}(n_x - n_0)\mathcal{T} + \text{s.t.s.} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En el último paso hemos usado que $\mathcal{M}(n_j) - \mathcal{M}(n_0) = (n_j - n_0)\mathcal{T} + \text{s.t.s.}$. Observemos que $\mathcal{M}(n_j)^k - \mathcal{M}(n_j)^{k-1}\mathcal{M}(n_0) = (n_j - n_0)\mathcal{T}(n_j\mathcal{T} + \mathcal{T}_0)^{k-1} + \text{s.t.s.}$ y achicando el tamaño del determinante usando el complemento de Schur obtenemos

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} (n_1 - n_0)\mathcal{T} + \text{s.t.s.} & \dots & (n_1 - n_0)\mathcal{T}(n_1\mathcal{T} + \mathcal{T}_0)^{x-1} + \text{s.t.s.} \\ \vdots & & \vdots \\ (n_x - n_0)\mathcal{T} + \text{s.t.s.} & \dots & (n_x - n_0)\mathcal{T}(n_x\mathcal{T} + \mathcal{T}_0)^{x-1} + \text{s.t.s.} \end{pmatrix} \\
&= \det \left(\text{diag}((n_j - n_0)\mathcal{T} + \text{s.t.s.})_{j=1}^x \right) \det \begin{pmatrix} I & n_1\mathcal{T} + \text{s.t.s.} & \dots & (n_1\mathcal{T} + \mathcal{T}_0)^{x-1} + \text{s.t.s.} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & n_x\mathcal{T} + \text{s.t.s.} & \dots & (n_x\mathcal{T} + \mathcal{T}_0)^{x-1} + \text{s.t.s.} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matriz diagonal en bloque en la segunda línea tiene *exactamente* las entradas de la primera columna de la matriz en la línea anterior; en particular tiene la misma parte s.t.s.. Hacemos esto para que en la primera columna del segundo determinante haya simplemente matrices identidad sin parte s.t.s.. Entonces tenemos una reducción de las matrices de Vandermonde en bloques a unas de tamaño menor

$$\det \left(\mathcal{M}(n_j)^k \right)_{j,k=0}^x = \det(\mathcal{T})^x \left(\prod_{j=1}^x (n_j - n_0) \right)^N \det \left(\mathcal{N}(n_{j+1})^k \right)_{j,k=0}^{x-1}, \quad (\text{A.1.2})$$

donde $\mathcal{N}(n) = n\mathcal{T} + \mathcal{T}_0 + \text{s.t.s.}$. Entonces $\mathcal{N}(n)$ tiene las mismas entradas diagonales que $\mathcal{M}(n)$. Entonces como el factor que acompaña al determinante Vandermonde en bloques con $\mathcal{N}(n)$ en (A.1.2) no depende de s.t.s., podemos continuar reduciendo el tamaño de la matriz Vandermonde en bloques hasta obtener el resultado deseado. \square

Corolario A.1.2. *El determinante dado en el Lema A.1.1 sigue valiendo si conjugamos $\mathcal{M}(n)$ en (A.1.1) por una matriz invertible \mathcal{Q} que no depende de n .*

Demostración. Sea $\mathcal{R}(n) = \mathcal{Q}\mathcal{M}(n)\mathcal{Q}^{-1}$. Es fácil ver que

$$\det \begin{pmatrix} I & \mathcal{R}(n_0) & \dots & \mathcal{R}(n_0)^x \\ I & \mathcal{R}(n_1) & \dots & \mathcal{R}(n_1)^x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & \mathcal{R}(n_x) & \dots & \mathcal{R}(n_x)^x \end{pmatrix} = \frac{\det \left(\text{diag}(\mathcal{Q})_{j=0}^x \right)}{\det \left(\text{diag}(\mathcal{Q})_{j=0}^x \right)} \det \begin{pmatrix} I & \mathcal{M}(n_0) & \dots & \mathcal{M}(n_0)^x \\ I & \mathcal{M}(n_1) & \dots & \mathcal{M}(n_1)^x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & \mathcal{M}(n_x) & \dots & \mathcal{M}(n_x)^x \end{pmatrix}.$$

□

A.2. Demostración de la Proposición 2.8.1

En esta sección probaremos la primer parte de la Proposición 2.8.1, la cual establece que

$$R_n^{(\lambda)}(0) = -a(I + \mathcal{A}_{n+\lambda})R_{n-1}^{(\lambda+1)}(0), \quad (\text{A.2.3})$$

en donde la matriz $\mathcal{A}_{n+\lambda}$ fue introducida en (2.6.118), $\mathcal{A}_{n+\lambda} = (N + \lambda + n - J)^{-1}JA^*$.

Demostración. Recordemos que las entradas $R_n^{(\lambda)}(0)_{jk} = \xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ fueron dadas explícitamente en el Teorema 2.7.8 y que $A_{j+1,j} = \frac{\sqrt{N-j}}{\sqrt{a}}$. Comenzamos escribiendo (A.2.3) en términos de sus entradas

$$\xi_{j,k,n}^{(\lambda)} = -a\xi_{j,k,n-1}^{(\lambda+1)} - \frac{j\sqrt{a}\sqrt{N-j}}{(N + \lambda + n - j)}\xi_{j+1,k,n-1}^{(\lambda+1)}.$$

Notemos que como las entradas $\xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$ tienen dos expresiones distintas (una para $n + j \geq N$ y otra para $n + j < N$), debemos probar el resultado deseado entrada a entrada para cada caso. No es necesario demostrar un caso mixto dado que ambos casos coinciden para $n + j = N$, entonces para cualquier valor de los parámetros, los tres términos pueden ser siempre considerados dentro del mismo caso.

Antes de comenzar a trabajar con cada uno de los casos, damos las siguientes expresiones que serán útiles en la prueba:

$$\frac{\mathfrak{X}(j, k, n-1, \lambda+1)}{\mathfrak{X}(j, k, n, \lambda)} = -\frac{N + \lambda + 1 - j}{a(\lambda+1)},$$

$$\frac{\mathfrak{X}(j+1, k, n-1, \lambda+1)}{\mathfrak{X}(j, k, n, \lambda)} = \frac{\sqrt{N-j}}{\sqrt{a}} \frac{N + \lambda + n - j}{j(\lambda+1)}.$$

Para obtener el caso $n + j > N$ necesitaremos una identidad hipergeométrica bastante estándar que es fácil de comprobar en general (considerando parámetros para los cuales las series convergen o se truncan)

$$\mathfrak{d} \left({}_3F_2 \left(\begin{matrix} \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \\ \mathfrak{d}, \mathfrak{e} \end{matrix}; 1 \right) - {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \\ \mathfrak{d} + 1, \mathfrak{e} \end{matrix}; 1 \right) \right) = \mathfrak{b} \left({}_3F_2 \left(\begin{matrix} \mathfrak{a}, \mathfrak{b} + 1, \mathfrak{c} \\ \mathfrak{d} + 1, \mathfrak{e} \end{matrix}; 1 \right) - {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \\ \mathfrak{d} + 1, \mathfrak{e} \end{matrix}; 1 \right) \right).$$

Se deduce que ambos lados son iguales a

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(\mathfrak{a})_s (\mathfrak{b})_s (\mathfrak{c})_s s}{s! (\mathfrak{d} + 1)_s (\mathfrak{e})_s}.$$

Considerando $\mathbf{a} = 1 - k$, $\mathbf{b} = j - N$, $\mathbf{c} = n + \lambda + 1$, $\mathbf{d} = \lambda + 1$ y $\mathbf{e} = 1 - N$ y juntando algunos términos similares obtenemos

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1 - k, j - N, n + \lambda + 1 \\ \lambda + 1, 1 - N \end{matrix}; 1 \right) = \frac{N + \lambda + 1 - j}{\lambda + 1} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1 - k, j - N, n + \lambda + 1 \\ \lambda + 2, 1 - N \end{matrix}; 1 \right) - \frac{N - j}{\lambda + 1} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1 - k, j - N + 1, n + \lambda + 1 \\ \lambda + 2, 1 - N \end{matrix}; 1 \right).$$

Multiplicando esta ecuación por $\mathfrak{X}(j, k, n, \lambda)(1 - N)_{k-1}$ y utilizando las relaciones de diferentes \mathfrak{X} expresadas anteriormente en esta prueba, obtenemos el resultado deseado para $n + j > N$.

El caso $n + j \leq N$ es ligeramente diferente. Nótese que ahora en lugar del factor $(1 - N)_{k-1}$ tenemos $(1 - n - j)_{k-1}$, por lo que ya no es un factor común en los tres términos de nuestro resultado deseado. La identidad hipergeométrica necesaria es algo menos estándar,

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \\ \mathbf{d}, \mathbf{e} \end{matrix}; 1 \right) = \frac{\mathbf{c} \mathbf{e} - \mathbf{a}}{\mathbf{d} \mathbf{e}} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \mathbf{a}, \mathbf{b} + 1, \mathbf{c} + 1 \\ \mathbf{d} + 1, \mathbf{e} + 1 \end{matrix}; 1 \right) - \frac{\mathbf{c} - \mathbf{d}}{\mathbf{d}} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \mathbf{a}, \mathbf{b} + 1, \mathbf{c} \\ \mathbf{d} + 1, \mathbf{e} \end{matrix}; 1 \right),$$

y puede ser demostrada utilizando los métodos descritos en [51, Recipe 5.4] para los casos en que las series convergen o se truncan. A continuación, tomamos $\mathbf{a} = 1 - k$, $\mathbf{b} = -n$, $\mathbf{c} = N - j + \lambda + 1$, $\mathbf{d} = \lambda + 1$ y $\mathbf{e} = 1 - n - j$, y obtenemos

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1 - k, -n, N - j + \lambda + 1 \\ \lambda + 1, 1 - n - j \end{matrix}; 1 \right) = \frac{N + \lambda + 1 - j}{\lambda + 1} \frac{n + j - k}{n + j - 1} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1 - k, -n + 1, N - j + \lambda + 2 \\ \lambda + 2, 2 - n - j \end{matrix}; 1 \right) - \frac{N - j}{\lambda + 1} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1 - k, -n + 1, N - j + \lambda + 1 \\ \lambda + 2, 1 - n - j \end{matrix}; 1 \right).$$

Multiplicando esta ecuación por $\mathfrak{X}(j, k, n, \lambda)(1 - n - j)_{k-1}$ y utilizando las relaciones de diferentes \mathfrak{X} expresadas anteriormente en esta prueba, obtenemos el resultado deseado para $n + j \leq N$. \square

A.3. Demostración del Lema 2.8.6

Queremos calcular $\mathscr{W}_R^{(\lambda)}(0)$. Utilizaremos la expresión dada en (2.8.137). Necesitamos $(\mathcal{D}_n^{(\lambda)})_{jj}$ y $R_n^{(\lambda)}(0)_{j,k} = \xi_{j,k,n}^{(\lambda)}$. La expresión entrada a entrada es

$$\left(\mathscr{W}_R^{(\lambda)}(0) \right)_{j,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^N \frac{\xi_{r,j,n}^{(\lambda)} \xi_{r,k,n}^{(\lambda)}}{\left(\mathcal{D}_n^{(\lambda)} \right)_{rr}}.$$

Como esta expresión es claramente simétrica, tomaremos $j \geq k$ a partir de ahora. Será útil disponer del peso estándar de los polinomios escalares duales de Hahn ver [95],

$$w_{dH}(x; \gamma, \delta, \mathcal{N}) = \frac{(2x + \gamma + \delta + 1)(\gamma + x)(x + \gamma + \delta)! \delta! (\mathcal{N}!)^2}{x! \gamma! (\delta + x)! (\mathcal{N} - x)! (x + \gamma + \delta + \mathcal{N} + 1)!}.$$

Introducimos la siguiente abreviatura para distinguir entre las dos expresiones distintas de ξ dependiendo de los diferentes valores de los parámetros,

$$\xi_{r,k,n}^{(\lambda)} = \mathfrak{X}(r, k, n, \lambda) \times \begin{cases} \alpha_{r,k,n}^{(\lambda)} & n+r \geq N, \\ \beta_{r,k,n}^{(\lambda)} & k \leq n+r < N, \\ 0 & n+r < k. \end{cases}$$

Las expresiones explícitas de α y β pueden encontrarse en el Teorema 2.7.8. A continuación, escribimos la suma doble, que observamos que no tendrá términos cruzados,

$$\begin{aligned} \left(\mathscr{W}_R^{(\lambda)}(0)\right)_{j,k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=r_0}^N \frac{\mathfrak{X}(r, j, n, \lambda)\mathfrak{X}(r, k, n, \lambda)}{\left(\mathcal{D}_n^{(\lambda)}\right)_{rr}} \alpha_{r,j,n}^{(\lambda)} \alpha_{r,k,n}^{(\lambda)} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=r_1}^{N-n-1} \frac{\mathfrak{X}(r, j, n, \lambda)\mathfrak{X}(r, k, n, \lambda)}{\left(\mathcal{D}_n^{(\lambda)}\right)_{rr}} \beta_{r,j,n}^{(\lambda)} \beta_{r,k,n}^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

Denotamos $r_0 = \max(1, N-n)$ y $r_1 = \max(1, j-n)$ y siempre que una suma sea sobre el conjunto vacío, la tomamos como cero. Será útil introducir otra variable de suma $s = n+r$ y reordenar los sumandos

$$\begin{aligned} \left(\mathscr{W}_R^{(\lambda)}(0)\right)_{j,k} &= \sum_{s=N}^{\infty} \sum_{r=1}^N \frac{\mathfrak{X}(r, j, s-r, \lambda)\mathfrak{X}(r, k, s-r, \lambda)}{\left(\mathcal{D}_{s-r}^{(\lambda)}\right)_{rr}} \alpha_{r,j,s-r}^{(\lambda)} \alpha_{r,k,s-r}^{(\lambda)} \\ &\quad + \sum_{s=j}^{N-1} \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\mathfrak{X}(s-n, j, n, \lambda)\mathfrak{X}(s-n, k, n, \lambda)}{\left(\mathcal{D}_n^{(\lambda)}\right)_{s-n,s-n}} \beta_{s-n,j,n}^{(\lambda)} \beta_{s-n,k,n}^{(\lambda)}. \end{aligned} \tag{A.3.4}$$

La parte común de los sumandos es (nótese que el factor de la derecha es un factorial)

$$\frac{\mathfrak{X}(r, j, n, \lambda)\mathfrak{X}(r, k, n, \lambda)}{\left(\mathcal{D}_n^{(\lambda)}\right)_{rr}} = \frac{2^\lambda \sqrt{(N-j)!(N-k)!} (\lambda+n)! a^{r+n} (N+\lambda-r)! (N+1-r+n+\lambda)!}{e^a a^{\lambda+\frac{1}{2}(j+k)} n! (\lambda!)^2 (r-1)!(N-r)!(N+n+\lambda)!},$$

donde hemos utilizado la expresión de la inversa de la parte diagonal de la norma al cuadrado en términos de factoriales:

$$\left(\mathcal{D}_n^{(\lambda)}\right)_{rr}^{-1} = e^{-a} \left(\frac{2}{a}\right)^\lambda \frac{(r-1)! (N-r+n+\lambda)! (N+1-r+n+\lambda)!}{n! a^n (\lambda+n)! (N-r+\lambda)! (N+n+\lambda)!}.$$

Las partes distintas de los sumandos son

$$\begin{aligned} \alpha_{r,j,s-r}^{(\lambda)} \alpha_{r,k,s-r}^{(\lambda)} &= (-1)^{j+k} \frac{(N-1)!^2}{(N-k)!(N-j)!} \\ &\quad \times \mathcal{R}_{j-1}(\ell(N-r); \lambda, s-N, N-1) \mathcal{R}_{k-1}(\ell(N-r); \lambda, s-N, N-1) \\ \beta_{s-n,j,n}^{(\lambda)} \beta_{s-n,k,n}^{(\lambda)} &= (-1)^{j+k} \frac{(s-1)!^2}{(s-k)!(s-j)!}, \\ &\quad \times \mathcal{R}_{j-1}(\ell(n); \lambda, N-s, s-1) \mathcal{R}_{k-1}(\ell(n); \lambda, N-s, s-1). \end{aligned}$$

Podemos encontrar un peso dual Hahn correspondiente en las partes comunes del siguiente modo:

$$\frac{\mathfrak{X}(r, j, s-r, \lambda)\mathfrak{X}(r, k, s-r, \lambda)}{\left(\mathcal{D}_{s-r}^{(\lambda)}\right)_{rr}} = \frac{2^\lambda \sqrt{(N-j)!(N-k)!} w_{dH}(N-r; \lambda, s-N, N-1)}{e^a a^{\lambda-s+\frac{1}{2}(j+k)} \lambda!(s-N)!((N-1)!)^2},$$

y similarmente

$$\frac{\mathfrak{X}(s-n, j, n, \lambda)\mathfrak{X}(s-n, k, n, \lambda)}{\left(\mathcal{D}_n^{(\lambda)}\right)_{s-n, s-n}} = \frac{2^\lambda \sqrt{(N-j)!(N-k)!} w_{dH}(n; \lambda, N-s, s-1)}{e^a a^{\lambda-s+\frac{1}{2}(j+k)} \lambda!(N-s)!((s-1)!)^2}.$$

La primer suma en (A.3.4) es

$$\begin{aligned} & \sum_{s=N}^{\infty} \sum_{r=1}^N \frac{\mathfrak{X}(r, j, s-r, \lambda)\mathfrak{X}(r, k, s-r, \lambda)}{\left(\mathcal{D}_{s-r}^{(\lambda)}\right)_{rr}} \alpha_{r, j, s-r}^{(\lambda)} \alpha_{r, k, s-r}^{(\lambda)} \\ &= \frac{e^{-a} 2^\lambda (-1)^{j+k} a^{-\lambda-\frac{1}{2}(j+k)}}{\lambda! \sqrt{(N-j)!(N-k)!}} \sum_{s=N}^{\infty} \frac{a^s}{(s-N)!} \sum_{r=1}^N w_{dH}(N-r; \lambda, s-N, N-1) \\ & \quad \times \mathcal{R}_{j-1}(\ell(N-r); \lambda, s-N, N-1) \mathcal{R}_{k-1}(\ell(N-r); \lambda, s-N, N-1), \end{aligned}$$

que se anula cuando $j \neq k$ por ortogonalidad de los polinomios dual Hahn. En el caso $j = k$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-a} 2^\lambda a^{-\lambda-j}}{\lambda!(N-j)!} \sum_{s=N}^{\infty} \frac{a^s}{(s-N)!} \sum_{r=1}^N w_{dH}(N-r; \lambda, s-N, N-1) \mathcal{R}_{j-1}(\ell(N-r); \lambda, s-N, N-1)^2 \\ &= e^{-a} \left(\frac{2}{a}\right)^\lambda \frac{(j-1)!}{(\lambda+j-1)!} \sum_{s=N}^{\infty} \frac{a^{s-j}}{(s-j)!}. \end{aligned}$$

La segunda suma en (A.3.4) es igual a

$$\begin{aligned} & \sum_{s=j}^N \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\mathfrak{X}(s-n, j, n, \lambda)\mathfrak{X}(s-n, k, n, \lambda)}{\left(\mathcal{D}_n^{(\lambda)}\right)_{s-n, s-n}} \beta_{s-n, j, n}^{(\lambda)} \beta_{s-n, k, n}^{(\lambda)} \\ &= (-1)^{j+k} \sum_{s=j}^N \frac{e^{-a} a^{s-\frac{1}{2}(j+k)}}{(s-k)!(s-j)!} \left(\frac{2}{a}\right)^\lambda \frac{\sqrt{(N-j)!(N-k)!}}{(N-s)! \lambda!} \sum_{n=0}^{s-1} w_{dH}(n; \lambda, N-s, s-1) \\ & \quad \times \mathcal{R}_{j-1}(\ell(n); \lambda, N-s, s-1) \mathcal{R}_{k-1}(\ell(n); \lambda, N-s, s-1), \end{aligned}$$

que se anula para $j \neq k$. Para $j = k$ tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{s=j}^{N-1} \frac{e^{-a} a^{s-j}}{(s-j)!^2} \left(\frac{2}{a}\right)^\lambda \frac{(N-j)!}{(N-s)! \lambda!} \sum_{n=0}^{s-1} w_{dH}(n; \lambda, N-s, s-1) \mathcal{R}_{j-1}(\ell(n); \lambda, N-s, s-1)^2 \\ &= e^{-a} \left(\frac{2}{a}\right)^\lambda \frac{(j-1)!}{(\lambda+j-1)!} \sum_{s=j}^{N-1} \frac{a^{s-j}}{(s-j)!}. \end{aligned}$$

Lo único que queda por hacer es combinar las sumas y realizar la suma sobre s

$$\left(\mathscr{W}_R^{(\lambda)}(0)\right)_{jj} = \frac{e^{-a}(j-1)!}{(\lambda+j-1)!} \left(\frac{2}{a}\right)^\lambda \sum_{s=j}^{\infty} \frac{a^{s-j}}{(s-j)!} = \frac{(j-1)!}{(\lambda+j-1)!} \left(\frac{2}{a}\right)^\lambda = \left(T^{(\lambda)}\right)_{jj}^{-1}.$$

Las entradas de $T^{(\lambda)}$ fueron dadas en (2.6.111). Resta usar (2.8.137) para llegar al momento cero

$$\mathscr{W}_0^{(\lambda)} = (I + A^*)^{-\lambda} (T^{(\lambda)})^{-1} (I + A)^{-\lambda} = \left(W^{(\lambda)}(0)\right)^{-1}.$$

APÉNDICE B

Quasideterminantes

Los quasideterminantes reemplazan al determinante para matrices con entradas no conmutativas. En esta sección solo daremos su definición, recomendamos, por ejemplo [55, 69, 70], para una lectura detallada de sus propiedades y aplicaciones. Fijamos $N \in \mathbb{N}$ y consideramos matrices $M_{ij} \in M_N(\mathbb{C})$. Consideramos la matriz $nN \times nN$ a bloques

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}.$$

Denotamos por:

- $M^{(i,j)}$ la matriz que se obtiene de M eliminando la fila i y la columna j en bloques.
- r_i^j la i -ésima fila de M sin el bloque j .
- c_j^i la j -ésima columna de M sin el bloque i .

Definición B.0.1. Dado $i, j \in \{1, \dots, N\}$, definimos el quasideterminante i, j de M como

$$|M|_{ij} = M_{ij} - r_i^j (M^{(i,j)})^{-1} c_j^i,$$

si la matriz $M^{(i,j)}$ es invertible.

Observación 82. Observemos que los quasideterminantes no siempre están definidos, e incluso cuando lo están, no se reducen a determinantes cuando las entradas conmutan. Más bien, para $N = 1$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$|M|_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det M}{\det M^{(i,j)}},$$

si $\det M^{(i,j)} \neq 0$.

APÉNDICE C

Problema de momentos y densidad de los polinomios ortogonales

Este apéndice está basado en [2, 13, 58].

C.1. Problema de momentos

El *problema de momentos* consiste de las siguientes dos preguntas:

- Dada una sucesión de números reales $(\nu_n)_n \subset \mathbb{R}$, existe una medida de Borel positiva μ sobre \mathbb{R} tal que $\nu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$?
- Si tal medida existe, es única?

En este apéndice asumiremos que μ tiene infinitos puntos en su soporte. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir siempre que $\nu_0 = 1$.

Si μ es una medida de Borel positiva en \mathbb{R} tal que $\nu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, decimos que μ es *solución* al problema de momentos de $(\nu_n)_n$. Si μ es única, decimos que el problema de momentos es *determinado* (o bien que μ es *determinada*), caso contrario decimos que el problema de momentos es *indeterminado* (o bien que μ es *indeterminada*). En el caso indeterminado, existe un conjunto convexo de medidas de probabilidad en \mathbb{R} que son soluciones al problema de momentos, ver [2].

Para dar respuesta a la primera pregunta, dado un polinomio arbitrario $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, definimos

$$\mathcal{L}(p) = a_n \nu_n + a_{n-1} \nu_{n-1} + \dots + a_0 \nu_0.$$

Se puede verificar que \mathcal{L} es un funcional lineal, definido para todo polinomio, es decir

$$\mathcal{L}(\alpha p + \beta q) = \alpha \mathcal{L}(p) + \beta \mathcal{L}(q),$$

para todos p, q polinomios y constantes α, β . Decimos que un polinomio $p(x)$ es positivo si no es idénticamente cero y $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Observemos que si el problema de momentos tiene una solución μ entonces

$$\mathcal{L}(p) = a_n \nu_n + a_{n-1} \nu_{n-1} + \dots + a_0 \nu_0 = \int_{\mathbb{R}} p(x) d\mu(x) > 0,$$

para todo polinomio p positivo. Inspirados en este hecho definimos

Definición C.1.1. Decimos que una sucesión de números reales $(\nu_n)_n$ es definida positiva si $\mathcal{L}(p) > 0$ para todo polinomio p positivo.

Por lo tanto, la positividad es una condición necesaria para la existencia de una solución al problema de momentos.

Teorema C.1.2. [58, Ch II, §1, Theorem 1.3] *La sucesión $(\nu_n)_n$ es definida positiva si y sólo si $\det H_r > 0$ para todo $r \in \mathbb{N}_0$, donde*

$$H_r = \begin{pmatrix} \nu_0 & \dots & \nu_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_r & \dots & \nu_{2r} \end{pmatrix},$$

son las llamadas matrices de Hankel.

Es posible mostrar que la positividad de la sucesión $(\nu_n)_n$, es condición suficiente para que el problema de momentos tenga solución.

Teorema C.1.3. [58, Ch II, §1, Theorem 1.4] *Para que una sucesión $(\nu_n)_n$ de números reales sea la sucesión de momentos de una medida de Borel positiva con infinitos puntos en su soporte es condición necesaria y suficiente que todos los determinantes de las matrices de Hankel H_r sean positivos.*

No incluimos la demostración del Teorema C.1.3, pero mencionamos que se utilizan dos teoremas conocidos de E. Helly:

Teorema C.1.4 (Principio de selección de Helly). *Toda sucesión $(\phi_n)_n$ uniformemente acotada de funciones reales no decrecientes en $(-\infty, \infty)$, tiene una subsucesión que converge para todo x .*

Teorema C.1.5 (Teorema de convergencia de Helly). *Sea $(\phi_n)_n$ una sucesión uniformemente acotada de funciones no decrecientes, definidas en un intervalo finito $[a, b]$, que converge para todo $x \in [a, b]$ a una función ϕ . Entonces, para toda función f continua sobre $[a, b]$ se cumple que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) d\phi_n(x) = \int_a^b f(x) d\phi(x).$$

Observación 83. Dada $(\nu_n)_n$ una sucesión positiva de números reales, por el Teorema C.1.3 existe una medida de Borel positiva μ tal que

$$\nu_i = \int_{\mathbb{R}} x^i d\mu(x).$$

Se puede probar que los polinomios

$$p_n(x) = \frac{1}{\det H_{n-1}} \det \begin{pmatrix} \nu_0 & \dots & \nu_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{n-1} & \dots & \nu_{2n-1} \\ 1 & \dots & x^n \end{pmatrix}$$

son los polinomios ortogonales mónicos con respecto a μ .

Para dar respuesta a la segunda pregunta formulada al comienzo de esta sección, consideramos los autovalores de las matrices de Hankel. Dada μ una medida positiva, solución al problema de momentos de $(\nu_n)_n$, es decir

$$\nu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Las matrices de Hankel asociadas H_r son matrices hermitianas definidas positivas. Por tanto, todos los autovalores de H_r son positivos. Denotamos al autovalor más pequeño de H_r por λ_r .

Teorema C.1.6. [13, Theorem 1.1] *El problema de momentos asociado a la sucesión $(\nu_n)_n \subset \mathbb{R}$ es determinado si y sólo si $\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_r = 0$.*

Denotamos por \mathcal{C} al conjunto de todas las medidas de Borel positivas sobre \mathbb{R} con momentos finitos de todos los órdenes *determinadas*.

C.2. Densidad de polinomios ortogonales en $L^2(\mu)$

Dada una medida de Borel positiva μ sobre \mathbb{R} con momentos finitos de todos los órdenes, denotamos por $L^2(\mu)$ a las funciones medibles con respecto a $d\mu$ cuadrado integrables.

Definición C.2.1. Dada una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset L^2(\mu)$ con $\int f_n f_m d\mu = 0$ si $n \neq m$, decimos que la sucesión ortogonal $(f_n)_n$ es densa en $L^2(\mu)$ si dada $g \in L^2(\mu)$ con $\int f_n g d\mu = 0$ para $n \in \mathbb{N}_0$, entonces g es constantemente cero.

Lema C.2.2. *La sucesión $(f_n)_n$ es densa en $L^2(\mu)$ si y sólo si para toda $h \in L^2(\mu)$ y todo $\epsilon > 0$ existe un f_n -polinomio $F(x) = \sum_{n=0}^N c_n f_n$ para el cual $\int (h - F)^2 d\mu < \epsilon$.*

Observación 84. Si $f_n = p_n$ una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a μ entonces los f_n -polinomios son simplemente los polinomios y por lo tanto, la sucesión $(p_n)_n$ es densa si para toda $f \in L^2(\mu)$ y $\epsilon > 0$ existe un polinomio q para el cual $\int (f - q)^2 d\mu < \epsilon$.

En su trabajo, M. Riesz [107] caracterizó todas las distribuciones $d\mu$ para las cuales los polinomios ortogonales $(p_n)_n$ asociados a μ son densos. Por esta razón las distribuciones con esta propiedad son llamadas distribuciones de Riesz.

Teorema C.2.3. [2, Theorem 2.3.3] *El conjunto de polinomios es denso en $L^2(\mu)$ si y sólo si μ es una solución N -extremal del problema de momentos.*

En esta sección enunciamos los resultados que utilizamos en esta tesis omitiendo sus correspondientes demostraciones.

Teorema C.2.4. [58, Ch II, §4, Theorem 4.2] *Dada $f \in L^2(\mu)$, y supongamos que $\frac{d\mu(x)}{1+x^2} \in \mathcal{C}$ y sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Existe un polinomio q tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - q(x)|^2 d\mu(x) < \epsilon.$$

Observación 85. Se puede probar que si $d\mu \in \mathcal{C}$ entonces $\frac{d\mu(x)}{1+x^2} \in \mathcal{C}$, utilizando el Teorema [58, Ch II, §2, Theorem 2.6].

Teorema C.2.5. [58, Ch II, §5, Theorem 5.2] *Si para un $\beta > 0$ se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\beta|x|} d\mu(x) = M < \infty,$$

entonces $d\mu \in \mathcal{C}$.

Corolario C.2.6. [2, Corollary 2.3.3] *Si $\mu \in \mathcal{C}$ entonces los polinomios son densos en $L^2(\mu)$.*

Las hipótesis del Teorema C.2.5 se satisfacen por ejemplo para las funciones peso

$$\begin{aligned} w(x) &= e^{-x^2}, & x &\in (-\infty, \infty). \\ w(x) &= x^\alpha e^{-x}, & x &\in (0, \infty), \quad \alpha > -1. \end{aligned}$$

Como consecuencia del Teorema C.2.4 los correspondientes polinomios ortogonales (Hermite o Laguerre respectivamente) son densos en los correspondientes espacios $L^2(\mu)$.

APÉNDICE D

Operadores no acotados

Este apéndice está basado en [85, 108].

Consideremos \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Por *operador* nos referimos a un mapa lineal $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ cuyo dominio $D(T)$ es un subespacio de \mathcal{H} . Lo denotamos $(T, D(T))$ y no asumimos T acotado. El gráfico de T es el subespacio de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ definido por

$$\mathcal{G}(T) = \{(u, Tu) : u \in D(T)\}.$$

Definición D.0.1. Dados S y T operadores en \mathcal{H} , decimos que T es una *extensión* de S si $D(S) \subset D(T)$ y $Sv = Tv$ para todo $v \in D(S)$, y lo denotamos por $S \subset T$. Si $S \subset T$ y $T \subset S$, decimos que S y T son *iguales*, y escribimos $S = T$.

Observación 86. En términos del gráfico vemos que $S \subset T$ si y sólo si $\mathcal{G}(S) \subset \mathcal{G}(T)$.

Definición D.0.2. Un operador T es *cerrado* si su gráfico es cerrado respecto a la topología producto de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Observación 87. $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si y sólo si $D(T) = \mathcal{H}$ y T cerrado, como consecuencia del Teorema del gráfico cerrado.

Definición D.0.3. Decimos que un operador lineal T es *densamente definido* si $\overline{D(T)} = \mathcal{H}$.

Dado $(T, D(T))$ un operador no acotado densamente definido en \mathcal{H} , podemos definir el *operador adjunto* $(T^*, D(T^*))$. Primero definimos

$$D(T^*) = \{v \in \mathcal{H} : u \rightarrow \langle Tu, v \rangle \text{ es continuo en } D(T)\}.$$

Como T está densamente definido, podemos extender el mapa $u \rightarrow \langle Tu, v \rangle$, para $v \in D(T^*)$, a un funcional lineal $\omega : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$. Por el Teorema de representación de Riezs existe un único $w \in \mathcal{H}$ tal que $\omega(u) = \langle u, w \rangle$ para todo $u \in \mathcal{H}$.

Observación 88. La unicidad es consecuencia del hecho de que hemos asumido que T es densamente definido. Por lo tanto los únicos operadores T que tendrán adjunta T^* serán los densamente definidos.

Definición D.0.4. La adjunta T^* se define como $T^*v = w$, de forma tal que

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle,$$

para todo $u \in D(T)$ y $v \in D(T^*)$.

Observación 89. Si S, T y ST son densamente definidos entonces $T^*S^* \subset (ST)^*$.

Definición D.0.5. Decimos que un operador $(T, D(T))$ es *simétrico* si

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle, \quad \text{para todo } u, v \in D(T).$$

Los operadores simétricos densamente definidos son exactamente los que satisfacen $T \subset T^*$. Si $T = T^*$, decimos que T es *autoadjunto*.

Observación 90. Si $T \in \mathcal{B}(H)$ estas propiedades coinciden.

Observación 91. Si $D(T)$ es denso y $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Sv \rangle$ para todo $u \in D(T)$, y $v \in D(S)$, entonces $S \subset T^*$.

Teorema D.0.6. La adjunta de un operador densamente definido es cerrada. En particular, los operadores autoadjuntos son cerrados.

Demostración. Probaremos el lema mostrando que

$$\mathcal{G}(T^*) = \{(-Tu, u) : u \in D(T)\}^\perp,$$

para el producto interno $\langle (u, v), (x, y) \rangle = \langle u, x \rangle + \langle v, y \rangle$ en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} (v, w) \in \mathcal{G}(T^*) &\iff T^*v = w, \\ &\iff \langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle = \langle u, w \rangle \text{ para todo } u \in D(T), \\ &\iff \langle (-Tu, u), (v, w) \rangle = -\langle Tu, v \rangle + \langle u, w \rangle = 0 \text{ para todo } u \in D(T), \\ &\iff (v, w) \in \{(-Tu, u) : u \in D(T)\}^\perp. \end{aligned}$$

□

Observación 92. Sea T un operador densamente definido en \mathcal{H} . Entonces T tiene una extensión cerrada si y sólo si $D(T^*)$ es denso en \mathcal{H} . Más aún T^{**} es una extensión de T .

Teorema D.0.7. Si T es un operador densamente definido y cerrado entonces $D(T^*)$ es denso y $T^{**} = T$.

Observación 93. Notemos que dado un operador simétrico T , vale que $D(T) \subset D(T^*)$, y por lo tanto $D(T^*)$ es un subespacio denso. Tomando adjunta nuevamente obtenemos $(T^{**}, D(T^{**}))$ como la menor extensión cerrada de $(T, D(T))$, i.e., cualquier operador densamente definido simétrico tiene una extensión cerrada. Por lo tanto $T \subset T^* \subset T^{**}$.

Definición D.0.8. Un operador simétrico densamente definido T es esencialmente autoadjunto si su clausura es autoadjunta, i.e. $T \subset T^{**} = T^*$.

En lo que resta del capítulo, asumiremos que T es densamente definido. Si el operador $(T - z\mathbf{1}_{\mathcal{H}})$, $z \in \mathbb{C}$, tiene inversa $G(z) := (T - z\mathbf{1}_{\mathcal{H}})^{-1}$ (llamada operador resolvente) densamente definida y acotada, entonces podemos extender $G(z)$ a un operador lineal acotado en \mathcal{H} y llamamos a z valor regular.

Definición D.0.9. La *resolvente* de un operador no acotado T , denotada $\rho(T)$, es el conjunto

$$\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ es un valor regular de } T\}.$$

El *espectro* de T es $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Definición D.0.10. Definimos el *espectro puntual* de T como

$$\sigma_p(T) = \{z \in \sigma(T) : T - z\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \text{ no es uno a uno}\} \subset \sigma(T).$$

Observación 94. Dado $z \in \sigma_p(T)$, existe $v \in \mathcal{H}$ tal que $(T - z\mathbf{1}_{\mathcal{H}})v = 0$, es decir z es un autovalor de T .

Observación 95. El espectro de un operador autoadjunto está contenido en \mathbb{R} .

APÉNDICE E

Ecuaciones diferenciales matriciales con singularidades

Discutiremos algunos resultados sobre la noción de singularidades y singularidades regulares de ecuaciones diferenciales matriciales siguiendo a Coddington y Levinson [28], especialmente el Capítulo 4 y los Ejercicios 2 y 13. El enfoque de Coddington y Levinson [28] es muy general. Para el método de Frobenius para ecuaciones diferenciales de segundo orden y la ecuación inicial, ver Coddington y Levinson [28, Capítulo 4, §7-8] y por ejemplo Temme [117, §4.2]. Para el caso especial de operadores diferenciales hipergeométricos, ver [118]. En este apéndice seguimos la convención de operadores actuando a izquierda tal como en [28]. Consideremos para $n = 2$, (ver [28, Capítulo. 4, Ejercicio 2])

$$z^2 w''(z) + zB_1(z) w'(z) + B_2(z) w(z) = 0, \quad (\text{E.0.1})$$

donde B_1 y B_2 son funciones matriciales $N \times N$ analíticas en un disco abierto de radio $r > 0$, lo cual significa que cada entrada es analítica. Buscamos soluciones vectoriales $w \in \mathbb{C}^N$ de (E.0.1). Siguiendo a [28, Chapter 4, § 5] tomamos $\varphi_1(z) = w(z)$, $\varphi_2(z) = zw'(z)$, luego la función $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2N}$ satisface

$$\varphi'(z) = A(z)\varphi(z), \quad A(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B_2(z) & I - B_1(z) \end{pmatrix}, \quad (\text{E.0.2})$$

aquí A es una matriz $2N \times 2N$, la cual es una matriz en bloques 2×2 de matrices $N \times N$, donde 0 , respectivamente I , denota la matriz cero $N \times N$, y la matriz identidad respectivamente. En particular, $z = 0$ es una singularidad de primer tipo y una singularidad regular, ver [28, Capítulo 4, § 2], y esto está en concordancia con [118] para el caso del operador diferencial matricial hipergeométrico. Tomando $R = zA(z)|_{z=0} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -B_2(0) & I - B_1(0) \end{pmatrix}$ la ecuación inicial correspondiente es $\det(\mu - R) = 0$, ver [28, p. 127], y aplicando [114, Theorem 3, Ecuación (14)] la ecuación inicial para (E.0.2) es

$$\det(\mu(\mu - 1) + \mu B_1(0) + B_2(0)) = 0. \quad (\text{E.0.3})$$

Las soluciones de la ecuación inicial son los exponentes de (E.0.2) y (E.0.1). Dado que B_1 y B_2 son analíticas, la matriz $A(z) = \sum_{m=-1}^{\infty} z^m A_m$ es una serie de Laurent convergente cerca

de $z = 0$, y por lo tanto [28, Theorem 3.1] muestra que cualquier solución formal de (E.0.2) es convergente en una región $0 < |z| < a$ para algún $a > 0$. Más aún, (E.0.2) tiene una matriz fundamental Φ de soluciones de la forma $\Phi(z) = z^{\hat{R}}P(z)$ para alguna región $0 < |z| < a$ para algún $a > 0$. Aquí $P(z)$ es una serie de potencias convergente y \hat{R} está relacionada a R , ver [28, Chapter 4, Theorem 4.2]. En el caso de que R sea semisimple, existe una base de soluciones $\varphi_\lambda(z) = z^\lambda f(z)$, λ autovalor de R , y f una función vectorial analítica en un disco $|z| < r$ para algún $r > 0$, ver Ejercicio 13 de [28, Chapter 4] donde también se considera el caso de R general. En particular, tenemos $2N$ soluciones de (E.0.1) de la forma $z^\mu f(z)$ para μ solución de (E.0.3), asumiendo que R es semisimple. Más aún, si asumimos que $B_2(0) = 0$ como matrices, (E.0.3) se reduce a $\mu^N \det(\mu - 1 + B_1(0)) = 0$ y $B_1(0)$ semisimple. En este caso tenemos N soluciones linealmente independientes analíticas en un disco centrado en 0, y tenemos N soluciones de la forma $z^{1-\mu_i} f(z)$, con f analítica en un disco centrado en 0, y $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ autovalores de $B_1(0)$.

Notemos que el mismo análisis puede realizarse para cualquier otro punto $z_0 \in \mathbb{C}$ realizando el cambio de variables $z - z_0$ tal como para $z_0 = \infty$ reemplazando $z = 1/\zeta$, ver [28].

- [1] M. Adler and P. van Moerbeke. Generalized orthogonal polynomials, discrete KP and Riemann-Hilbert problems. *Comm. Math. Phys.*, 207(3):589–620, 1999.
- [2] NI. Akhiezer. The classical moment problem and some related questions in analysis. *Hafner Publishing*, 1965.
- [3] TS. Chihara. An introduction to orthogonal polynomials. Mathematics and its Applications, Vol. 13, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1978.
- [4] WA. Al-Salam and TS. Chihara. Another characterization of the classical orthogonal polynomials. *SIAM J. Math. Anal.*, 3:65–70, 1972.
- [5] N. Aldenhoven, E. Koelink, and AM. de los Ríos. Matrix-valued little q -Jacobi polynomials. *J. Approx. Theory*, 193:164–183, 2015.
- [6] N. Aldenhoven, E. Koelink, and P. Román. Matrix-valued orthogonal polynomials related to the quantum analogue of $(\text{SU}(2) \times \text{SU}(2), \text{diag})$. *Ramanujan J.*, 43(2):243–311, 2017.
- [7] C. Álvarez-Fernández, G. Ariznabarreta, JC. García-Ardila, M. Mañas, and F. Marcellán. Christoffel transformations for matrix orthogonal polynomials in the real line and the non-Abelian 2D Toda lattice hierarchy. *Int Math Res Not IMRN*. 2017; 2017(5):1285–1341.
- [8] R. Álvarez-Nodarse, A. J. Durán, and A. M. de los Ríos. Orthogonal matrix polynomials satisfying second order difference equations. *J. Approx. Theory*, 169:40–55, 2013.
- [9] GE. Andrews, RA. Askey, and R. Roy. Special Functions. In *Encycl Mathematics Appl*. Vol 71. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 1999.
- [10] G. Ariznabarreta and M. Mañas. Matrix orthogonal Laurent polynomials on the unit circle and Toda type integrable systems. *Adv. Math.*, 264:396–463, 2014.
- [11] G. Ariznabarreta, J.C. García-Ardila, M. Mañas, and F. Marcellán. Non-Abelian integrable hierarchies: matrix biorthogonal polynomials and perturbations. *Journal of Physics A: Mathematical & Theoretical*, 51.20, 2018.
- [12] C. Berg. The matrix moment problem. *Coimbra Lecture Notes on Orthogonal Polynomials*. Nova Publishers, New York, 2008.
- [13] C. Berg, Y. Chen, M.E.H. Ismail, Small eigenvalues of large Hankel matrices: the indeterminate case. *Math. Scand.* 91, 67–81, 2002.
- [14] A. Branquinho, A. Foulquié-Moreno, and J. C. García-Ardila. Matrix Toda and Volterra lattices. *Applied Mathematics and Computation*, 365:124722, 2020.
- [15] A. Branquinho, A. Foulquié Moreno, and M. Mañas. Matrix biorthogonal polynomials: eigenvalue problems and non-Abelian discrete Painlevé equations: a Riemann-Hilbert problem perspective. *J. Math. Anal. Appl.*, 494(2):Paper No. 124605, 36, 2021.
- [16] M. Bruschi, S. V. Manakov, O. Ragnisco, and D. Levi. The nonabelian Toda lattice - Discrete analogue of the matrix Schrödinger spectral problem. *J. Math. Phys.*, 21:2749–2753, 1980.

- [17] S. Bochner. Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme, *Math. Z.*, 29(1): 730–736, 1929.
- [18] N. Bonneux, and ABJ. Kuijlaars. Exceptional Laguerre polynomials. *Stud Appl Math.* 2018; 141, No. 4, 547–595.
- [19] L. Cagliero and TH. Koornwinder. Explicit matrix inverses for lower triangular matrices with entries involving Jacobi polynomials. *J. Approx. Theory*, 193:20–38, 2015.
- [20] M. Cafasso and M. D. de la Iglesia. Non-commutative Painlevé equations and Hermite-type matrix orthogonal polynomials. *Comm. Math. Phys.*, 326(2):559–583, 2014.
- [21] M. Cafasso and M. D. de la Iglesia. The Toda and Painlevé systems associated with semiclassical matrix-valued orthogonal polynomials of Laguerre type. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 14(076):17 pages, 2018.
- [22] MJ. Cantero, L. Moral, L. and Velázquez. Differential properties of matrix orthogonal polynomials. *J Coner Appl Math.* 2005; 3(3):313–334.
- [23] MJ. Cantero, L. Moral, and L. Velázquez. Matrix orthogonal polynomials whose derivatives are also orthogonal. *J Approx Theory.* 2007; 146(2):174–211.
- [24] WR. Casper and M. Yakimov. The matrix Bochner problem. *American Journal of Mathematics*, 144(4):1009–1065, 2022.
- [25] W. Casper, FA. Grünbaum, M. Yakimov, I. Zurrian, Matrix valued discrete-continuous functions with the prolate spheroidal property and bispectrality to appear in *Comm. Math. Phys.*, 2023 arXiv:2302.05750,
- [26] GA. Cassatella-Contra and M. Mañas. Riemann-Hilbert problem and matrix discrete Painlevé II systems. *Stud. Appl. Math.*, 143(3):272–314, 2019.
- [27] TS. Chihara. *An introduction to orthogonal polynomials*. Mathematics and its Applications, Vol. 13. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1978.
- [28] EA. Coddington and N. Levinson. Theory of ordinary differential equations. *McGraw-Hill*, 1955.
- [29] D. Damanik, A. Pushnitski, and B. Simon. The analytic theory of matrix orthogonal polynomials. *Surveys in Approximation Theory (SAT)* 4, 1–85, 2008.
- [30] A. Deaño, B. Eijsvoogel, and P. Román. Ladder relations for a class of matrix valued orthogonal polynomials. *Stud. Appl. Math.*, 146(2):463–497, 2021.
- [31] A. Deaño, L. Morey, and P. Román. Non Abelian Toda-type equations and matrix valued orthogonal polynomials. *Proc. of AMS*, 152(04), 1613–1632.
- [32] PA. Deift, Applications of a commutation formula, *Duke Math J.* 1978; 45, 267–310.
- [33] MD. de la Iglesia. Spectral methods for bivariate Markov processes with diffusion and discrete components and a variant of the Wright-Fisher model. *J. Math. Anal. Appl.*, 393(1):239–255, 2012.
- [34] MD. de la Iglesia and P. Román. Some bivariate stochastic models arising from group representation theory. *Stochastic Process. Appl.*, 128(10):3300–3326, 2018.
- [35] *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.1.0 of 2020-12-15. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds.
- [36] AL. Douglas. Orthogonal polynomials, duality and association schemes. *SIAM J. Math. Anal.*, 13:656–663, 1982.
- [37] M. Duits and ABJ. Kuijlaars. The two periodic aztec diamond and matrix valued orthogonal polynomials. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 23(4), 1075–1131, 2021.
- [38] JJ. Duistermaat and FA. Grünbaum, F. A., Differential equations in the spectral parameter. *Comm. Math. Phys.* 103 (1986), 177–240.
- [39] AJ. Durán. Markov’s theorem for orthogonal matrix polynomials. *Canad J Math.* 1996; 48, No. 6, 1180–1195.
- [40] AJ. Durán. Matrix inner product having a matrix symmetric second order differential operator. *Rocky Mountain J Math.* 1997; 27(2):585–600.
- [41] AJ. Durán. A generalization of Favard’s theorem for polynomials satisfying a recurrence relation. *J. Approx. Theory.* 1993; 74(1):83–109.

- [42] A.J. Durán. Exceptional Meixner and Laguerre orthogonal polynomials, *J Approx Theory*. 2004; 184, 176–208.
- [43] A.J. Durán. The algebra of difference operators associated to a family of orthogonal polynomials. *J. Approx. Theory*, 164(5):586–610, 2012.
- [44] A.J. Durán and M. de la Iglesia. Some examples of orthogonal matrix polynomials satisfying odd order differential equations. *J Approx Theory*. 2008; 150(2), 153–174.
- [45] A.J. Durán and FA. Grünbaum. Structural formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying second-order differential equations. I. *Constr. Approx.*, 22(2):255–271, 2005.
- [46] A.J. Durán and FA. Grünbaum. Orthogonal matrix polynomials satisfying second-order differential equations. *Int Math Res Not IMRN*. 2004; 461–484.
- [47] A.J. Durán and MEH. Ismail. Differential coefficients of orthogonal matrix polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, 190(1-2):424–436, 2006.
- [48] A.J. Durán and P. Lopez-Rodriguez. Orthogonal matrix polynomials: zeros and Blumenthal’s theorem. *J Approx Theory*. 1996; 84, No. 1, 96–118.
- [49] A.J. Durán and M. Pérez. Admissibility condition for exceptional Laguerre polynomials. *J Math Anal Appl*. 2015; 424, 1042–1053.
- [50] A.J. Durán and V. Sánchez-Canales. Rodrigues’ formulas for orthogonal matrix polynomials satisfying second-order difference equations. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 25(11):849–863, 2014.
- [51] A. Ebisu and K. Iwasaki. Three-term relations for ${}_3F_2(1)$. *J. Math. Anal. Appl.*, 463(2):593–610, 2018.
- [52] B. Eijsvoogel. $N \times N$ Matrix Time–Band–Limiting examples. Preprint, arXiv:2201.10855.
- [53] B. Eijsvoogel, L. Morey, and P. Román. Duality and difference operators for matrix valued discrete polynomials on the nonnegative integers. *Constr. Approx.*, 59, 143–227 (2024).
- [54] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and FG. Tricomi. Higher Transcendental Functions vol I. *Bateman Mnauscript Project*. New York: McGraw-Hill Book Co. XXVI, 302 S., 1953.
- [55] P. Etingof, I. Gelfand, and V. Retakh. Factorization of differential operators, quasideterminants, and nonabelian Toda field equations. *Math Res Lett.*, 1997.
- [56] J. Faraut. *Analysis on Lie groups. An introduction. Transl. from the French*, volume 110. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [57] H. Flaschka. The Toda lattice. II. Existence of integrals. *Phys. Rev. B*, 9:1924–1925, Feb 1974.
- [58] G. Freud. Orthogonal polynomials. *Pergamon Press*, 1971.
- [59] AG. García, F. Marcellán, and L. Salto. A distributional study of discrete classical orthogonal polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* 57:147–162,1995.
- [60] MA. García-Ferrero, D. Gómez-Ullate, and R. Milson. A Bochner type characterization theorem for exceptional orthogonal polynomials. *J Math Anal Appl*. 2019; 472, No. 1, 584–626.
- [61] M. Gekhtman. Hamiltonian structure of non-Abelian Toda lattice. *Lett. Math. Phys.*, 46(3):189–205, 1998.
- [62] JS. Geronimo. Scattering theory and matrix orthogonal polynomials on the real line. *Circuits Systems Signal Process.*, 1(3-4):471–495, 1982.
- [63] D. Gómez-Ullate, Y. Grandati and R. Milson. Rational extensions of the quantum harmonic oscillator and exceptional Hermite polynomials. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2014: 47,015203
- [64] D. Gómez-Ullate, N. Kamran, and R. Milson. An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm–Liouville problem. *J Math Anal Appl*. 2009; 359 no. 1, 352–367.
- [65] D. Gómez-Ullate, N. Kamran, and R. Milson. An extension of Bochner’s problem: exceptional invariant subspaces. *J Approx Theory*. 2010; 162 , no. 5, 987–1006.
- [66] D. Gómez-Ullate, N. Kamran, and R. Milson. Exceptional orthogonal polynomials and the Darboux transformation. *J Phys A, Math Theor.* 2010; 43, No. 43, Article ID 434016, 16 p.
- [67] D. Gómez-Ullate, N. Kamran, and R. Milson. Two-step Darboux transformations and exceptional Laguerre polynomials. *J Math Anal Appl*. 2012; 387, No. 1, 410–418.
- [68] D. Gómez-Ullate, F. Marcellan, and R. Milson. Asymptotic and interlacing properties of zeros of exceptional Jacobi and Laguerre polynomials. *J Math Anal Appl*. 2013; 399, 480–495.

- [69] I. Gelfand and V. Retakh. Determinants of matrices over noncommutative rings. *Functional Analysis and its Applications*. 1991; 25: 91–102.
- [70] I. Gelfand and V. Retakh. A theory of noncommutative determinants, and characteristic functions of graphs. *Functional Analysis and its Applications*. 1992; 26: 231–246.
- [71] VM. Goncharenko, and AP. Veselov. Monodromy of the matrix Schrödinger equations and Darboux transformations. *J Phys A, Math Gen* 1998; 31, 5315–5326.
- [72] Y. Grandati, and C. Quesne. Disconjugacy, regularity of multi-indexed rationally extended potentials, and Laguerre exceptional polynomials. *J Math Phys*. 2013; 54, 073512.
- [73] W. Groenevelt, MEH. Ismail, and E. Koelink. Spectral decomposition and matrix-valued orthogonal polynomials. *Adv. Math.*, 244:91–105, 2013.
- [74] FA. Grünbaum and MD. de la Iglesia. Matrix valued orthogonal polynomials arising from group representation theory and a family of quasi-birth-and-death processes. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 30(2):741–761, 2008.
- [75] FA. Grünbaum, I. Pacharoni, and J. Tirao. Matrix valued spherical functions associated to the complex projective plane. *J Funct Anal*. 2002; 188(2):350–441.
- [76] FA. Alberto Grünbaum, and J. Tirao. The algebra of differential operators associated to a weight matrix. *Integral Equations Operator Theory*. 2007; 58(4):449–475.
- [77] W. Hahn. Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen *Math. Z.*, 39(1):, 634–638, 1935.
- [78] BC. Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations. An elementary introduction*, volume 222. New York, NY: Springer, 2003.
- [79] G. Heckman and M. van Pruijssen. Matrix valued orthogonal polynomials for Gelfand pairs of rank one. *Tohoku Math J*. 2016; (2), 68(3):407–437.
- [80] MEH. Ismail. *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, volume 98 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005. With two chapters by Walter Van Assche, With a foreword by Richard A. Askey.
- [81] MEH. Ismail and E. Koelink. The J-matrix method. *Adv. in Appl. Math.* 46, No.1–4, 379–395, 2011.
- [82] MEH. Ismail, E. Koelink, and P. Román. Matrix valued Hermite polynomials, Burchnell formulas and non-Abelian Toda lattice. *Adv. Appl. Math.*, 110:235–269, 2019.
- [83] MEH. Ismail, E. Koelink, and P. Román. Generalized Burchnell-type identities for orthogonal polynomials and expansions. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 14(072):24 pages, 2018.
- [84] AW. Knapp Anthony. *Basic Real Analysis*, *Birkhäuser Basel*, 2005.
- [85] E. Koelink. Applications of spectral theory to special functions. *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* 464, 131–212 (2021)
- [86] E. Koelink, A. M. de los Ríos, and P. Román. Matrix-valued Gegenbauer-type polynomials. *Constr. Approx.*, 46(3):459–487, 2017.
- [87] E. Koelink and J. Liu. BC_2 type multivariable matrix functions and matrix spherical functions. *arXiv: 2110.02287*, 2021.
- [88] E. Koelink, L. Morey and P. Román. Matrix exceptional Laguerre polynomials. *Stud Appl Math*. 2024; 152: 778–809.
- [89] E. Koelink and P. Román. Orthogonal vs. non-orthogonal reducibility of matrix-valued measures. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 12(008):9 pages, 2016.
- [90] E. Koelink and P. Román. Matrix valued Laguerre polynomials. In *Positivity and noncommutative analysis. Festschrift in honour of Ben de Pagter on the occasion of his 65th birthday. Based on the workshop “Positivity and Noncommutative Analysis”, Delft, The Netherlands, September 26–28, 2018*, pages 295–320. Cham: Birkhäuser, 2019.
- [91] E. Koelink, M. van Pruijssen, and P. Román. Matrix-valued orthogonal polynomials related to $(SU(2) \times SU(2), \text{diag})$. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2012(24):5673–5730, 2012.
- [92] E. Koelink, M. van Pruijssen, and P. Román. Matrix-valued orthogonal polynomials related to $(SU(2) \times SU(2), \text{diag})$, II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 49(2):271–312, 2013.

- [93] E. Koelink, M. van Pruijssen, and P. Román. Matrix elements of irreducible representations of $SU(n+1) \times SU(n+1)$ and multivariable matrix-valued orthogonal polynomials. *J. Funct. Anal.*, 278(7):48, 2020. Id/No 108411.
- [94] R. Koekoek, P.A. Lesky, and R.F. Swarttouw. Hypergeometric orthogonal polynomials and their q -analogues. *Springer*, 2010.
- [95] R. Koekoek and R.F. Swarttouw. The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue. Online at <http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/askey.html>, Report 98-17, Technical University Delft, 1998.
- [96] T.H. Koornwinder. Special orthogonal polynomial systems mapped onto each other by the Fourier-Jacobi transform. Polynômes orthogonaux et applications, Proc. Laguerre Symp., Bar-le-Duc/France 1984, Lect. Notes Math. 1171, 174-183, 1985.
- [97] M.G. Kreĭn. Hermitian positive kernels on homogeneous spaces. I. *Ukrain. Mat. Zhurnal, Akademiya Nauk Ukrainsoĭ SSR. Institut Matematiki. Ukraĭnskiĭ Matematicheskii Zhurnal.*; 1949.
- [98] C. Liaw, L. Littlejohn, R. Milson, and J. Stewart. The spectral analysis of three families of exceptional Laguerre polynomials. *J Approx Theory*. 2016; 202, 5-41.
- [99] S.V. Manakov. Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 67:543-555, Aug 1974.
- [100] I. Marquette and C. Quesne, Two-step rational extensions of the harmonic oscillator: exceptional orthogonal polynomials and ladder operators, *J. Phys. A: Math. Theor.* 2013; 46, 155201.
- [101] W. Miller. *Lie theory and special functions*. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 43. Academic Press, New York-London, 1968.
- [102] H. Miki and S. Tsujimoto. A new recurrence formula for generic exceptional orthogonal polynomials. *J. Math. Phys.* 2015; 56, 033502.
- [103] L. Miranian. Matrix-valued orthogonal polynomials on the real line: some extensions of the classical theory. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38, 5731-5749, 2005.
- [104] A.P. Prudnikov, Yu A. Brychkov, OI. Marichev. Integrals and series. Vol. 3. More special functions. *Gordon and Breach Science Publ.* 1990.
- [105] C. Quesne. Solvable rational potentials and exceptional orthogonal polynomials in supersymmetric quantum mechanics. *SIGMA* 5 (2009), 24 pp.
- [106] M. Reach, Generating difference equations with the Darboux transformation. *Comm. Math. Physics*, 119 (1988), 385-402.
- [107] M. Riesz. Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondent. *Acta Lit.ac Sci.* (Szeged) 1 (1922-23) 209-226
- [108] W. Rudin. Functional analysis. *McGraw-Hill*, 1973.
- [109] C.L. Ho, R. Sasaki. Zeros of the exceptional Laguerre and Jacobi polynomials. *ISRN Math Phys.* 2012; 2012:27.
- [110] C.L. Ho, S. Odake, and R. Sasaki. Properties of the exceptional (XI) Laguerre and Jacobi polynomials. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* 2011; 7, 107.
- [111] S. Odake and R. Sasaki. Infinitely many shape invariant potentials and new orthogonal polynomials. *Physics Letters B* 2009; 679, 414-417.
- [112] S. Odake, and R. Sasaki. Another set of infinitely many exceptional (XI) Laguerre polynomials. *Physics Letters B* 2010; 684, 173-176.
- [113] R. Sasaki, A. Tsujimoto, and A. Zhedanov. Exceptional Laguerre and Jacobi polynomials and the corresponding potentials through Darboux-Crum transformations. *J Phys A, Math Theor.* 2010; 43, 315204.
- [114] J.R. Silvester. Determinants of block matrices. *Math Gaz.* 2000; 84 460-467.
- [115] L.J. Slater. Generalized hypergeometric functions, *Cambridge University Press, Cambridge*, 1966.
- [116] G. Szegő. Orthogonal polynomials, *American Mathematical Society, Providence*, 1975.
- [117] N.M. Temme. Special functions. An introduction to the classical functions of mathematical physics. *Wiley*, 1996.
- [118] J.A. Tirao. The matrix-valued hypergeometric equation. *Proc Natl Acad Sci USA.* 2003; 100, 8138-8141.

-
- [119] JA. Tirao and IN. Zurrián. Spherical functions of fundamental K -types associated with the n -dimensional sphere. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 10(071):41 pages, 2014.
- [120] JA. Tirao, IN. Zurrián, Reducibility of matrix weights, *Ramanujan J.* 45, no. 2, 349–374, 2018.
- [121] M. Toda. Vibration of a chain with nonlinear interaction. *Journal of the Physical Society of Japan*, 22(2):431–436, 1967.
- [122] M. Toda. Wave propagation in anharmonic lattices. *Journal of the Physical Society of Japan*, 23(3):501–506, 1967.
- [123] M. van Puijssen and P. Román. Matrix valued classical pairs related to compact Gelfand pairs of rank one. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 10(113):28 pages, 2014.
- [124] W. Van Assche. *Orthogonal polynomials and Painlevé equations*, volume 27 of *Australian Mathematical Society Lecture Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2018.
- [125] W. Van Assche. Orthogonal polynomials, Toda lattices and Painlevé equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 434:133214, 2022.