Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Trabajo Especial de Licenciatura en Matemática

Álgebras de Hopf en la categoría de Verlinde

María Agustina Cagliero

Dirección de Iván Ezequiel Angiono

Resumen

En este trabajo se presenta la categoría de Verlinde Ver_p. Se comienza con los conceptos de categoría tensorial simétrica, morfismos negligibles y semisimplificación de una categoría, para luego llegar a las siguientes preguntas: ¿cuáles son todas las categorías tensoriales simétricas?, ¿la característica del cuerpo cumple un papel importante? y ¿hay objetos distinguidos dentro de estas categorías como por ejemplo álgebras de Hopf? En búsqueda de respuestas a estos interrogantes aparece la categoría Ver_p que se obtiene como la semisimplificacion de la categoría de representaciones del grupo cíclico de p elementos. A lo largo de todo el desarrollo habrá muchos ejemplos que explican los conceptos mencionados y se presentarán teoremas actuales que muestran la importancia de la categoría de Verlinde. Por último se verá la construcción de álgebras de Hopf tanto en la categoría de representaciones como en la categoría de Verlinde.

Abstract

In this monograph the Verlinde category Ver_p will be presented. We will begin with the concepts of symmetric tensor categories, negligible morphisms and the semisimplification of a category, to then arrive to the following questions: which are all the symmetric tensor categories?, does the characteristic of the field play an important role? and are there any distinguished objects like Hopf algebras in these categories? In search of answers to these questions we build Ver_p as the semisimplification of the category of representations of the cyclic group of p elements. Throughout this monograph there will be many examples explaining all the mentioned concepts and we will present theorems that reflect the importance of the Verlinde category. Lastly we will see how to construct Hopf algebras in both the category of representations and the Verlinde category.

Palabras Clave: Categoría monoidal - Categoría tensorial simétrica - Morfismos negligibles - Semisimplificación - Categoría de Verlinde - Álgebras de Hopf.

Key Words: Monoidal category - Symmetric tensor category - Negligible morphisms - Semisimplification - Verlinde category - Hopf algebras.

Agradecimientos

Hay cuatro personas en mi vida a las que les quiero agradecer mucho: Ma, Pa, Nico y Flor. Agradecerles por la compañía y el apoyo en cada uno de mis momentos, y por el cariño y la alegría de cada día. También agradezco a toda mi familia: mis abuelos, tíos y primos que siempre deseaban éxitos antes de cualquier final y me hicieron reir los domingos.

Quiero agradecer a mis amigos del secundario: La Ranchi. ¡Qué grupo tan lindo! Una vez más comparto con ellos un "¿qué hay para mañana?", "ser felices". Gracias por tantas sonrisas y momentos compartidos. Como dice mi tío: "La Ranchi siempre está".

A mis amigos de la facu, que estuvieron en cada día de los cinco años. No solo son grandes amigos, sino que con ellos somos equipo de ping pong, campeones en juegos de mesa, esposas, record en wordle, cool, cantantes profesionales y por sobretodo: somos para matarse de la risa. Gracias por tantos abrazos y por compartir conmigo la pasión por aprender. Ellos son siempre los del mensaje "¿cómo te fue?".

A mis amigas del barrio y de la primaria que nos conocemos desde chiquitas y estarán siempre presentes. Gracias por tantas juntadas después de finales, caminatas y pijamadas.

Gracias a mis amigos del running, con quienes comparto un deporte que te hace olvidar de todo, la actividad que me mostró montañas muy lindas y por la cual a las siete se cortaba el estudio.

Durante mis cinco años tuve profesores excelentes a quienes me gustaría agradecer, tanto por la matemática que me enseñaron como por la dedicación con lo que lo hicieron. Especialmente agradezco a mi director Iván con quién aprendí a investigar y me brindó muchas oportunidades para aprender aún más.

Me gustaría agradecer a la Universidad Nacional de Córdoba por brindarme la educación y las herramientas que ahora me acompañarán en el futuro.

Por último quiero agradecer nuevamente a mi mamá y a mi papá. Mi mamá aquella voz de aliento constante, que se sabía mis horarios, mis ayudantías y escuchaba cada anécdota que traía a casa. Mi papá que siempre será mi científico favorito, que fue profesor mío en las veintiséis materias, enseñándome a cuestionarme todo y a disfrutar y dar lo mejor de mí en cada paso de mi vida. ¡Qué feliz me han hecho! ¡Gracias!

Índice general

Capítulo 1

Categorías Monoidales

El objetivo de este capítulo es definir la estructura fundamental que tienen de base las categorías tensoriales que serán el foco de estudio en los capítulos siguientes. Se comienza con la definición, ejemplos y propiedades. Luego se introduce el concepto de objetos duales en una categoría. La teoría es tomada de [EGNO15] pero se agregan los detalles que allí se omiten.

1.1. Definición

Definición 1.1.1. Una *categoría monoidal* es una 5-upla $(\mathcal{C}, \otimes, a, 1, i)$, donde

- $\mathcal{C}$ es una categoría,
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un bifuntor que llamaremos **producto tensorial**,
- $1 \in \mathcal{C}$ es un objeto de la categoría,
- $i : 1 \otimes 1 \to 1$ es un isomorfismo,
- $a : (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}) \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C})$ es un isomorfismo natural entre los funtores

  $$F : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad F(X, Y, Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$$

  y

  $$G : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \quad G(X, Y, Z) = X \otimes (Y \otimes Z)$$

  con $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z),\ X, Y, Z \in \mathcal{C}$, llamado **asociador**;

y la upla está sujeta a los siguientes dos axiomas:

1. *Axioma del pentágono:* el siguiente diagrama debe ser conmutativo

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "a_{W,X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z"'] \arrow[dr, "a_{W \otimes X, Y, Z}"] & \\
(W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{W, X \otimes Y, Z}"] & & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "a_{W,X,Y \otimes Z}"] \\
W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "\mathrm{id}_W \otimes a_{X,Y,Z}"] & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

para todo $W, X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

2. *Axioma de la unidad:* los funtores

$$\begin{aligned}
L_1 : \mathcal{C} &\to \mathcal{C} \\
X &\mapsto 1 \otimes X \\
f &\mapsto \mathrm{id}_1 \otimes f \\
R_1 : \mathcal{C} &\to \mathcal{C} \\
X &\mapsto X \otimes 1 \\
f &\mapsto f \otimes \mathrm{id}_1
\end{aligned}$$

de multiplicación a izquierda y a derecha por 1, son autoequivalencias de $\mathcal{C}$.

Al par $(1, i)$ se lo llama **objeto unidad** de $\mathcal{C}$.

Observación 1.1.2. Notar que esta noción de categoría monoidal resulta de abstraer la definición de *monoide.*

1.2. Ejemplos

A continuación veremos varios ejemplos de categorías monoidales. Muchos de estos ejemplos serán utilizados a lo largo de lo que sigue de este trabajo. Para algunas de las categorías enunciadas a continuación haremos toda la prueba en detalle para ver que son categorías monoidales, y para las demás solo mencionaremos los detalles cruciales que se utilizan en la demostración.

Ejemplo 1.2.1. La categoría **Sets** de conjuntos es una categoría monoidal, donde el producto tensorial es el producto cartesiano, el asociador a es la identidad, el objeto unidad 1 es un conjunto $\{*\}$ de un elemento e i es la única función que existe de $\{*\} \times \{*\}$ a $\{*\}$.

Ejemplo 1.2.2. A la categoría $\mathbb{K}$–**Vec** de todos los $\mathbb{K}$- espacios vectoriales se le puede dar estructura de categoría monoidal con: $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$, $1 = \mathbb{K}$, i el ismorfismo canónico entre $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}$ y $\mathbb{K}$, y $a_{U,V,W}$ como el isomorfismo canónico entre $(U \otimes V) \otimes W$ y $U \otimes (V \otimes W)$ para todo $U, V, W \in \mathbb{K}$– **Vec**.

Más aún, si A es un anillo conmutativo con unidad, entonces reemplazando $\mathbb{K}$ por A, podemos definir la categoría monoidal A–mod.

Ejemplo 1.2.3. Sea G un grupo. La categoría $\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ de todas las representaciones de G sobre $\mathbb{K}$ resulta una categoría monoidal con $\otimes$ como el producto tensorial de representaciones, a el mismo que el ejemplo anterior (que sabemos que es morfismo de representaciones), 1 la representación trivial ϵ de G ($1 = \mathbb{K}$) e i el mismo que el ejemplo anterior.

Observación 1.2.4. A lo largo de este trabajo usaremos la notación $\mathbb{K}$–**Vec** para referirnos a la categoría de espacios vectoriales de dimensión arbitraria y $\mathbb{K}$–Vec para referirnos a la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita. Lo mismo valdrá para $\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ y $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$.

Ejemplo 1.2.5. Sean G un monoide y A un grupo abeliano (con su operación escrita multiplicativamente). Sea $\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_G(A)$ la categoría cuyos elementos son δ_g con $g \in G$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G}(\delta_{g_1}, \delta_{g_2}) = \varnothing$ si $g_1 \neq g_2$, y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G}(\delta_{g_1}, \delta_{g_2}) = A$ si $g_1 = g_2$ (la composición de morfismos es la suma del grupo A y el morfismo identidad para δ_g es el elemento $0 \in A$). Busquemos una estructura monoidal para esta categoría. Aclaramos que en este ejemplo denotaremos al asociador con la letra α para no prestar confusión con los elementos del grupo A.

Definimos $\otimes$ como el siguiente bifuntor: $\delta_{g_1} \otimes \delta_{g_2} = \delta_{g_1 g_2}$ para objetos $\delta_{g_1}, \delta_{g_2}$ y $a \otimes b = ab$ para morfismos a, b. Luego definimos al asociador α como el morfismo identidad (es decir $\alpha = 0 \in A$); al objeto unidad como $1 = \delta_e$ donde e es el elemento identidad de G; y por último definimos $i : \delta_e \otimes \delta_e = \delta_e \to \delta_e$ como el elemento $0 \in A$. Así $\mathcal{C}_G(A)$ resulta categoría monoidal.

Si pensamos $G = \mathbb{S}_3$, notar que $\delta_{(123)} \otimes \delta_{(12)} = \delta_{(13)}$ mientras que $\delta_{(12)} \otimes \delta_{(123)} = \delta_{(23)}$, es decir que no necesariamente $X \otimes Y = Y \otimes X$ en una categoría monoidal.

Ejemplo 1.2.6. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, G un monoide y sea $\mathbb{K}$–$\mathbf{Vec}_G$ la categoría de espacios vectoriales G-graduados, es decir los objetos son espacios vectoriales V con una descomposición $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$, y los morfismos son transformaciones lineales que preservan la graduación. Definimos $\otimes$ como lo hicimos para espacios vectoriales y le damos la siguiente graduación:

$$(V \otimes W)_g = \bigoplus_{x, y \in G : xy = g} V_x \otimes W_y.$$

Establecemos el objeto unidad 1 como $1_e = \mathbb{K}$ y $1_g = 0$ para todo $g \neq e$, y notar que entonces $(1 \otimes 1)_g = 0$ para todo $g \neq e$ y $(1 \otimes 1)_e = \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$, por lo tanto definimos ι como el isomorfismo obvio entre $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$ y $\mathbb{K}$. Al asociador a lo definimos igual que lo hicimos para espacios vectoriales ya que es un morfismo que preserva la graduación pues:

$$\begin{aligned}((V \otimes W) \otimes U)_g &= \bigoplus_{xy=g} ((V \otimes W)_x \otimes U_y) \\ &= \bigoplus_{xy=g} ((\bigoplus_{uv=x} (V_u \otimes W_v)) \otimes U_y) \\ &\cong \bigoplus_{xy=g} (\bigoplus_{uv=x} (V_u \otimes W_v \otimes U_y)) \\ &= \bigoplus_{u,v,y:uvy=g} (V_u \otimes W_v \otimes U_y) \\ &= \bigoplus_{xy=g} (\bigoplus_{uv=y} (V_x \otimes W_u \otimes U_v) \\ &\cong \bigoplus_{xy=g} (V_x \otimes (\bigoplus_{uv=y} (W_u \otimes U_v))) \\ &= \bigoplus_{xy=g} (V_x \otimes (W \otimes U)_y) \\ &= (V \otimes (W \otimes U))_g.\end{aligned}$$

Similarmente se puede definir $\mathbb{K}$–Vec_G como la categoría de los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados.

Ejemplo 1.2.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Entonces la categoría $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ (los objetos son endofuntores y los morfismos son transformaciones naturales) es una categoría monoidal donde $F \otimes G = F \circ G$ con F, G endofuntores y $\epsilon \otimes \eta$ es la composición horizontal de las tranformaciones naturales ϵ y η, a es la identidad, 1 es el funtor identidad e i es la transformación natural identidad.

Ejemplo 1.2.8. Sea A un anillo asociativo con unidad. Entonces A–**bimod** la categoría de bimódulos sobre A (los objetos son los A-bimódulos y los morfismos son los morfismos de bimódulos) es una categoría monoidal definiendo $\otimes$ como el producto tensorial sobre A, 1 como A visto como A-bimódulo, el asociador a como el isomorfismo canónico entre $U \otimes_A (V \otimes_A W)$ y $(U \otimes_A V) \otimes_A W$ para todo $U, V, W \in A$–**bimod**, e i como el isomorfismo canónico entre $A \otimes_A A$ y A.

Ejemplo 1.2.9. Miremos ahora la siguiente subcategoría de la categoría del ejemplo anterior para $A = \mathbb{C}$: nos quedamos únicamente con los $\mathbb{C}$-bimódulos de dimensión finita donde la acción a derecha y a izquierda de $\mathbb{R}$ coinciden. Resulta que con el producto tensorial, asociador a, 1 e i como en el ejemplo anterior, esta subcategoría tiene estructura de una categoría monoidal. Por ejemplo un objeto de esta categoría es $1 = \mathbb{C}$ con la acción usual, y otro objeto distinto es $\mathbb{C}$ pero con la acción a derecha definida por $x \lhd z = x\overline{z}$ y la acción a izquierda es la usual es decir $z \rhd x = zx$, a este objeto lo denotamos $\mathbb{C}_-$.

Ejemplo 1.2.10. Definimos $\overline{Sets}$ la categoría cuyos elementos son los enteros no negativos y $Hom_{\overline{Sets}}(m, n)$ es el conjunto de funciones de $\{0, ..., m-1\}$ a $\{0, ..., n-1\}$. Definimos el producto tensorial como $m \otimes n = mn$ y $f_1 \otimes f_2 : m_1 m_2 \to n_1 n_2$ por

$(f_1 \otimes f_2)(m_2 x + y) = n_2 f_1(x) + f_2(y)$, $0 \leqslant x \leqslant m_1 - 1, 0 \leqslant y \leqslant m_2 - 1$ para $f_1 : m_1 \to n_1$ y $f_2 : m_2 \to n_2$. Tomamos 1 como el entero 1, y para el isomorfismo entre $1 \otimes 1$ y 1 tomamos $i \equiv 0$. Para el asociador a tomamos el isomorfismo natural identidad ya que $F(f_1, f_2, f_3) = G(f_1, f_2, f_3)$ pues: si

$$z = m_3 x + y \text{ con } 0 \leqslant x \leqslant m_1 m_2 - 1,\ 0 \leqslant y \leqslant m_3 - 1,$$

y

$$x = m_2 u + v \text{ con } 0 \leqslant u \leqslant m_1 - 1,\ 0 \leqslant v \leqslant m_2 - 1,$$

o sea que

$$z = m_3 m_2 u + (m_3 v + y) \text{ con } 0 \leqslant u \leqslant m_1 - 1\ ,\ 0 \leqslant m_3 v + y \leqslant m_2 m_3 - 1$$

entonces

$$\begin{aligned}((f_1 \otimes f_2) \otimes f_3)(z) &= ((f_1 \otimes f_2) \otimes f_3)(m_3 x + y) \\ &= n_3 (f_1 \otimes f_2)(x) + f_3(y) \\ &= n_3 (f_1 \otimes f_2)(m_2 u + v) + f_3(y) \\ &= n_3 (n_2 f_1(u) + f_2(v)) + f_3(y) \\ &= n_3 n_2 f_1(u) + n_3 f_2(v) + f_3(y)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3))(z) &= (f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3))(m_3 m_2 u + (m_3 v + y)) \\ &= n_2 n_3 f_1(u) + (f_2 \otimes f_3)(m_3 v + y) \\ &= n_2 n_3 f_1(u) + n_3 f_2(v) + f_3(y),\end{aligned}$$

dándonos la igualdad deseada.

Ejemplo 1.2.11. Sean G un grupo, A un grupo abeliano y ω un 3-cociclo de G con valores en A, es decir que $\omega : G \times G \times G \to A$ cumple que:

$$\omega(g_1 g_2, g_3, g_4)\omega(g_1, g_2, g_3 g_4) = \omega(g_1, g_2, g_3)\omega(g_1, g_2 g_3, g_4)\omega(g_2, g_3, g_4),$$

para todo $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$.

Definimos la categoría monoidal $\mathcal{C}_G^\omega = \mathcal{C}_G^\omega(A)$ así (nuevamente en este ejemplo denotaremos al asociador con la letra α para no prestar confusión con los elementos del grupo A.): como categoría es la misma que $\mathcal{C}_G$ del Ejemplo 1.2.5; el bifuntor $\otimes$, 1 e i también son iguales que en $\mathcal{C}_G$; pero al asociador α lo definimos así:

$$\alpha^\omega_{\delta_g, \delta_h, \delta_m} = \omega(g, h, m) id_{\delta_{ghm}} : (\delta_g \otimes \delta_h) \otimes \delta_m \to \delta_g \otimes (\delta_h \otimes \delta_m),$$

donde $g, h, m \in G$.

Veamos que efectivamente este es un ejemplo de categoría monoidal:

- $\otimes$ es bifuntor: dado $(a,b) \in (\mathrm{Hom}(\delta_g,\delta_g), \mathrm{Hom}(\delta_h,\delta_h))$, $a \otimes b = ab \in \mathrm{Hom}(\delta_{gh},\delta_{gh})$; $(0,0) = \mathrm{id}_{(\delta_g,\delta_h)}$ y $0 \otimes 0 = 0 = \mathrm{id}_{gh}$.

- α es un isomorfismo natural: sea $(a,b,c) \in (\mathrm{Hom}(\delta_g,\delta_g), \mathrm{Hom}(\delta_h,\delta_h), \mathrm{Hom}(\delta_m,\delta_m))$ entonces

$$\alpha_{\delta_g,\delta_h,\delta_m} \circ F(a,b,c) = \omega(g,h,m) id_{\delta_{ghm}} \circ abc = \omega(g,h,m)abc$$

  y

$$G(a,b,c) \circ \alpha_{\delta_g,\delta_h,\delta_m} = abc \circ \omega(g,h,m) id_{\delta_{ghm}} = abc\omega(g,h,m),$$

  (donde F, G son los funtores de la definición 1.1), las cuales son iguales dado que A es un grupo abeliano. Es decir hemos probado que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F(\delta_g,\delta_h,\delta_m) \arrow[r, "\alpha_{\delta_g,\delta_h,\delta_m}"] \arrow[d, "F(a,b,c)"] & G(\delta_g,\delta_h,\delta_m) \arrow[d, "G(a,b,c)"] \\
F(\delta_g,\delta_h,\delta_m) \arrow[r, "\alpha_{\delta_g,\delta_h,\delta_m}"] & G(\delta_g,\delta_h,\delta_m)
\end{tikzcd}$$

- el axioma del pentágono:

$$\begin{tikzcd}
& ((gh)l)m \arrow[dl, "\omega(g,h,l)\otimes \mathrm{id}_m"'] \arrow[dr, "\omega(gh,l,m)"] & \\
(g(hl))m \arrow[d, "\omega(g,hl,m)"] & & (gh)(lm) \arrow[d, "\omega(g,h,lm)"] \\
g((hl)m) \arrow[rr, "\mathrm{id}_g \otimes \omega(h,l,m)"] & & g(h(lm))
\end{tikzcd}$$

  el diagrama resulta conmutativo justamente por la definición de 3-cociclo.

- i es un isomorfismo: como en esta categoría, 0 es el morfismo identidad de δ_g para cualquier $g \in G$, y $0 = i$, tenemos que i es un isomorfismo.

- el axioma de la unidad: los funtores $L_{\delta_g} : \delta_g \to 1 \otimes \delta_g$ y $R_{\delta_g} : \delta_g \to \delta_g \otimes 1$ son autoequivalencias de C_G^ω pues son los funtores identidad de C_G^ω en C_G^ω.

Ejemplo 1.2.12. Sean G un grupo y A un grupo abeliano. Supongamos que tenemos $\rho : G \to Aut(A)$. Definimos la categoría monoidal $\mathcal{C}_G(A,\rho)$ al igual que la categoría monoidal $\mathcal{C}_G(A)$ del Ejemplo 1.2.5, salvo por el producto tensorial en morfismos que lo definimos así: si $a : \delta_g \to \delta_g$ y $b : \delta_h \to \delta_h$ entonces $a \otimes b = a + \rho(g)(b)$ (en este ejemplo sí usaremos la escritura aditiva para el grupo A). Veamos que efectivamente es una categoría monoidal:

- $\otimes$ es un bifuntor: dado $(a,b) \in (\mathrm{Hom}(\delta_g,\delta_g), \mathrm{Hom}(\delta_h,\delta_h))$, $a \otimes b = a + \rho(g)(b) \in \mathrm{Hom}(\delta_{gh},\delta_{gh})$; $(0,0) = \mathrm{id}_{(\delta_g,\delta_h)}$ y $0 \otimes 0 = 0 + \rho(g)(0) = 0 + 0 = 0 = \mathrm{id}_{gh}$.

- $\alpha = \text{id}$ es un isomorfismo natural: para obtener esto, debemos ver que $F(a,b,c) = G(a,b,c)$ para todo $(a,b,c) \in (\text{Hom}(\delta_g,\delta_g), \text{Hom}(\delta_h,\delta_h), \text{Hom}(\delta_m,\delta_m))$. Notar que:

$$\begin{aligned} F(a,b,c) &= (a \otimes b) \otimes c \\ &= a + \rho(g)(b) \otimes c \\ &= a + \rho(g)(b) + \rho(gh)(c) \\ &= a + \rho(g)(b) + \rho(g)(\rho(h)(c)) \\ &= a + p(g)(b + \rho(h)(c)) \\ &= a \otimes b + \rho(h)(c) \\ &= a \otimes (b \otimes c) \\ &= G(a,b,c). \end{aligned}$$

- el axioma del pentágono se cumple trivialmente pues $\alpha = \text{id}$.

- i es un isomorfismo: como en esta categoría, 0 es el morfismo identidad de δ_g para cualquier $g \in G$, y $0 = i$, tenemos que i es un isomorfismo.

- el axioma de la unidad: $L_{\delta_g} : \delta_g \to 1 \otimes \delta_g$ es el funtor identidad (esto es obvio para objetos y para morfismos vale porque $L_{\delta_g}(a) = i \otimes a = 0 \otimes a = 0 + \rho(e)(a) = 0 + a = a$). También $R_{\delta_g} : \delta_g \to \delta_g \otimes 1$ es el funtor identidad (en objetos es obvio y para morfismos tenemos que $R_{\delta_g}(a) = a \otimes i = a \otimes 0 = a + \rho(g)(0) = a + 0 = a$). Así, ambos funtores son autoequivalencias de $\mathcal{C}_G(A,\rho)$ a $\mathcal{C}_G(A,\rho)$.

1.3. Propiedades de las categorías monoidales

Definición 1.3.1. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, a, 1, \iota)$ una categoría monoidal. Dado que L_1 y R_1 son autoequivalencias de $\mathcal{C}$, para cada objeto X existen únicos isomorfismos

$$l_X : 1 \otimes X \to X \text{ y } r_X : X \otimes 1 \to X$$

de forma tal que $L_1(l_X)$ es igual a la composición

$$1 \otimes (1 \otimes X) \xrightarrow{a^{-1}_{1,1,X}} (1 \otimes 1) \otimes X \xrightarrow{\iota \otimes \text{id}_X} 1 \otimes X$$

y $R_1(r_X)$ es igual a la composición

$$(X \otimes 1) \otimes 1 \xrightarrow{a_{X,1,1}} X \otimes (1 \otimes 1) \xrightarrow{\text{id}_X \otimes \iota} X \otimes 1.$$

Los isomorfismos l_X y r_X son llamados **restricción unidad** a izquierda y a derecha respectivamente. También son llamados **isomorfismos unidad**. Notar que l es un isomorfismo natural entre el funtor $1 \otimes (-)$ y el funtor identidad y r es un isomorfismo natural entre $(-) \otimes 1$ y el funtor identidad.

Proposición 1.3.2. *Para todo X en $\mathcal{C}$ valen las siguientes igualdades:*

$$l_{1\otimes X} = id_1 \otimes l_X \ \text{ y } r_{X\otimes 1} = r_X \otimes id_1.$$

Demostración. Al ser l un isomorfismo natural, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
1\otimes(1\otimes X) \arrow[r, "1\otimes l_X"] \arrow[d, "l_{1\otimes X}"] & \mathrm{id}_1\otimes X \arrow[d, "l_X"] \\
1\otimes X \arrow[r, "l_X"] & X
\end{tikzcd}$$

Componiendo con la inversa de l_X, tenemos que $l_{1\otimes X} = \mathrm{id}_1 \otimes l_X$. De la misma forma se prueba la otra igualdad. □

Proposición 1.3.3 (*Axioma del triángulo*)**.** *El siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes 1)\otimes Y \arrow[rr, "a_{X,1,Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes id_Y"'] & & X\otimes(1\otimes Y) \arrow[dl, "id_X\otimes l_Y"] \\
& X\otimes Y &
\end{tikzcd}$$

para todo par de objetos X, Y en $\mathcal{C}$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
((X\otimes 1)\otimes 1)\otimes Y \arrow[rrrr, "a_{X,1,1}\otimes\mathrm{id}_Y"] \arrow[drr, "r_x\otimes\mathrm{id}_1\otimes\mathrm{id}_Y"] \arrow[ddd, "a_{X\otimes 1,1,Y}"] & & & & (X\otimes(1\otimes 1))\otimes Y \arrow[dll, "(\mathrm{id}_X\otimes\iota)\otimes\mathrm{id}_Y"'] \arrow[ddd, "a_{X,1\otimes 1,Y}"] \\
& & (X\otimes 1)\otimes Y \arrow[d, "a_{X,1,Y}"] & & \\
& & X\otimes(1\otimes Y) & & \\
(X\otimes 1)\otimes(1\otimes Y) \arrow[urr, "r_X\otimes\mathrm{id}_{1\otimes Y}"] \arrow[drr, "a_{X,1,1\otimes Y}"] & & & & X\otimes((1\otimes 1)\otimes Y) \arrow[ull, "\mathrm{id}_X\otimes(\iota\otimes\mathrm{id}_Y)"'] \arrow[dll, "\mathrm{id}_X\otimes a_{1,1,Y}"] \\
& & X\otimes(1\otimes(1\otimes Y)) \arrow[uu, "\mathrm{id}_X\otimes l_{1\otimes Y}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Notar que si probamos que el triángulo inferior izquierdo es conmutativo, tendríamos que para X y $1\otimes Y$ el axioma está demostrado. Como L_1 es una autoequivalencia de $\mathcal{C}$, tenemos que todo objeto de $\mathcal{C}$ es isomorfo a uno de la forma $1\otimes Y$ y por lo tanto probando que el triángulo inferior izquierdo es conmutativo tendríamos demostrada la proposición.

Veamos entonces que el triángulo inferior izquierdo es conmutativo.

El diagrama externo es conmutativo por el axioma del pentágono. Los dos cuadriláteros son conmutativos dado que a es un isomorfismo natural. El triángulo superior es conmutativo por la definición de r (y tensorizar con id_Y). El triángulo inferior derecho es conmutativo pues tenemos la siguiente igualdad

$$l_{1\otimes Y} = \mathrm{id}_1 \otimes l_Y = L_1(l_Y) = (\iota \otimes \mathrm{id}_Y) \circ a_{1,1,Y}^{-1}$$

y luego tensorizamos con id_X (la primera igualdad se debe a la Proposición 1.3.2).

Como todos los morfismos del diagrama son invertibles, el triángulo inferior izquierdo es conmutativo. $\square$

Proposición 1.3.4. *Para todo par de objetos Y, Z en $\mathcal{C}$, los siguientes diagramas son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd}
(1\otimes X)\otimes Y \arrow[rr, "a_{1,X,Y}"] \arrow[dr, "l_X\otimes id_Y"'] & & 1\otimes(X\otimes Y) \arrow[dl, "l_{X\otimes Y}"] \\
& X\otimes Y &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes Y)\otimes 1 \arrow[rr, "a_{X,Y,1}"] \arrow[dr, "r_{X\otimes Y}"'] & & X\otimes(Y\otimes 1) \arrow[dl, "id_X\otimes r_Y"] \\
& X\otimes Y &
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Demostración. Sean X, Y, Z en $\mathcal{C}$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
((X\otimes 1)\otimes Y)\otimes Z \arrow[rr, "a_{X,1,Y}\otimes\mathrm{id}_Z"] \arrow[dr, "(r_X\otimes\mathrm{id}_Y)\otimes\mathrm{id}_Z"] \arrow[ddd, "a_{X\otimes 1,Y,Z}"] & & (X\otimes(1\otimes Y))\otimes Z \arrow[dl, "(\mathrm{id}_X\otimes l_Y)\otimes\mathrm{id}_Z"'] \arrow[ddd, "a_{X,1\otimes Y,Z}"] \\
& (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[d, "a_{X,Y,Z}"] & \\
& X\otimes(Y\otimes Z) & \\
(X\otimes 1)\otimes(Y\otimes Z) \arrow[ur, "r_X\otimes\mathrm{id}_{Y\otimes Z}"] \arrow[dr, "a_{X,1,Y\otimes Z}"] & & X\otimes((1\otimes Y)\otimes Z) \arrow[ul, "\mathrm{id}_X\otimes(l_Y\otimes\mathrm{id}_Z)"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_X\otimes a_{1,Y,Z}"] \\
& X\otimes(1\otimes(Y\otimes Z)) \arrow[uu, "r_X\otimes l_{Y\otimes Z}"] &
\end{tikzcd}$$

El diagrama externo es conmutativo por el axioma del pentágono. Los cuadriláteros son conmutativos por ser a un isomorfismo natural. Los triángulos superior e inferior izquierdo son conmutativos por la Proposición 1.3.3. Con esto tenemos que el triángulo inferior derecho es conmutativo.

Ahora la conmutatividad del primer diagrama de (1.1) sale de tomar $X = 1$ y aplicar L_1^{-1} al triángulo inferior derecho.

La conmutatividad del segundo diagrama de (1.1) se prueba de forma similar. $\square$

Corolario 1.3.5. *Se verifica que* $l_1 = r_1 = \iota$.

Demostración. Notar que si tomamos $Y = Z = 1$ en (1.1) y usamos la Proposición 1.3.2), entonces tenemos que:

$$l_1 \otimes \mathrm{id}_1 = l_{1\otimes 1} \circ a_{1,1,1} = (\mathrm{id}_1 \otimes l_1) \circ a_{1,1,1}.$$

Tomando $X = Y = 1$ en el axioma del triángulo 1.3.3) tenemos que:

$$r_1 \otimes \mathrm{id}_1 = (\mathrm{id}_1 \otimes l_1) \circ a_{1,1,1}.$$

Por último usando la definición de l_1 tenemos que:

$$(\mathrm{id}_1 \otimes l_1) \circ a_{1,1,1} = \iota \otimes \mathrm{id}_1.$$

Juntando estas tres igualdades se llega a:

$$l_1 \otimes \mathrm{id}_1 = r_1 \otimes \mathrm{id}_1 = \iota \otimes \mathrm{id}_1$$

y como R_1 es una autoequivalencia de $\mathcal{C}$, concluimos que $l_1 = r_1 = \iota$. □

Proposición 1.3.6. *El objeto unidad es único salvo único isomorfismo.*

Demostración. Sean $(1, \iota), (1', \iota')$ dos objetos unidad. Sean $(r, l), (r', l')$ los isomorfismos unidad correspondientes. Primero veremos que 1 y $1'$ son isomorfos a través de un isomorfismo $\eta : 1 \to 1'$ que se comporta bien con ι y ι', es decir que el siguiente diagrama sea conmutativo,

$$\begin{tikzcd} 1 \otimes 1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\eta\otimes\eta"] & 1 \arrow[d, "\eta"] \\ 1' \otimes 1' \arrow[r, "\iota'"] & 1' \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

y luego veremos que este isomorfismo η es único.

Propongamos el isomorfismo $\eta := l_1 \circ (r'_1)^{-1} : 1 \to 1'$. Veamos que hace conmutar (1.2). Miremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 1 \otimes 1 \arrow[rr, "\iota = l_1"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_1\otimes\eta"] \arrow[dd, "\eta\otimes\eta"] & & 1 \arrow[dd, "\eta"] \\ & 1 \otimes 1' \arrow[ur, "r'_1"] \arrow[dr, "l_{1'}"] \arrow[dl, "\eta\otimes\mathrm{id}_1"] & \\ 1' \otimes 1' \arrow[rr, "\iota' = l'_{1'}"] & & 1' \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Notemos que el cuadrado exterior es el que buscamos probar que es conmutativo. Es claro que los triángulos izquierdo y derecho son conmutativos. Basta con ver la conmutatividad de los triángulos superior e inferior. Veamos que el triángulo superior es conmutativo y para ello miremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes 1 \otimes 1' \arrow[rr, "\mathrm{id}_1 \otimes l_{1'} = l_{1 \otimes 1'}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_1 \otimes r'_1"'] & & 1 \otimes 1' \arrow[d, "r'_1"] \\
1 \otimes 1 \arrow[urr, "\mathrm{id}_1 \otimes \eta"] \arrow[rr, "l_1"] & & 1
\end{tikzcd}$$

Notar que nosotros queremos probar que el triángulo inferior es conmutativo. Para ello notar que el cuadrado exterior conmuta por naturalidad de l y que el triángulo superior conmuta por definición de η.

De manera similar se prueba que el triánngulo inferior del diagrama (1.3) es conmutativo.

Así tenemos que (1.2) es conmutativo.

Solo resta probar que η sea el único con esta propiedad. Supongamos que no, es decir existe $\gamma : 1 \to 1'$ que hace conmutativo el diagrama (1.2). De esta forma tenemos que $b := \gamma^{-1} \circ \eta$ hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes 1 \arrow[r, "(\gamma^{-1} \otimes \gamma^{-1}) \circ (\eta \otimes \eta) = b \otimes b"] \arrow[d, "\iota"] & 1 \otimes 1 \arrow[d, "\iota"] \\
1 \arrow[r, "\gamma^{-1} \circ \eta"] & 1
\end{tikzcd}$$

Además notar que para cualquier morfismo $c : 1 \to 1$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes 1 \arrow[r, "c \otimes \mathrm{id}_1"] \arrow[d, "\iota"] & 1 \otimes 1 \arrow[d, "\iota"] \\
1 \arrow[r, "c"] & 1
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Así que si tomamos $c = b$, tenemos que $b \otimes \mathrm{id}_1 = \iota^{-1} \circ b \circ \iota = b \otimes b$, por lo tanto $\gamma^{-1} \circ \eta = b = \mathrm{id}_1$ es decir $\eta = \gamma$. $\square$

Con las propiedades vistas hasta aquí podemos decir que una definición alternativa de categoría monoidal es la que enunciamos a continuación.

Definición 1.3.7. Una *categoría monoidal* es una lista $(\mathcal{C}, \otimes, a, 1, l, r)$ que satisface el axioma del pentágono y el axioma del triángulo.

A continuación probaremos una propiedad más que tiene el objeto unidad.

Proposición 1.3.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal. Entonces $End_{\mathcal{C}}(1)$ es un monoide conmutativo bajo la composición. Más aún, $f \otimes g = \iota^{-1} \circ (f \circ g) \otimes \iota$ para todo $f, g \in End_{\mathcal{C}}(1)$.*

Demostración. Por la naturalidad de los isomorfismos unidad tenemos que:

$$f \otimes \mathrm{id}_1 = r_1^{-1} \circ f \otimes r_1$$

y

$$\mathrm{id}_1 \otimes g = l_1^{-1} \circ g \otimes l_1.$$

Pero ya hemos probado que $r_1 = l_1 = \iota$ así que nos queda lo siguiente:

$$f \otimes g = (f \otimes \mathrm{id}_1) \circ (\mathrm{id}_1 \otimes g) = \iota \circ (f \circ g) \circ \iota^{-1}$$

(que es una de las cosas que debíamos probar) y

$$f \otimes g = (\mathrm{id}_1 \otimes g) \circ (f \otimes \mathrm{id}_1) = \iota \circ (g \circ f) \circ \iota^{-1}.$$

Entonces $\iota \circ (f \circ g) \circ \iota^{-1} = \iota \circ (g \circ f) \circ \iota^{-1}$. Pero como ι es un isomorfismo tenemos que $f \circ g = g \circ f$, que es lo otro que debíamos probar. □

1.4. Funtores monoidales

Definición 1.4.1. Sean $(\mathcal{C}, \otimes, 1, a, \iota)$ y $(\mathcal{C}', \otimes', 1', a', \iota')$ dos categorías monoidales. Un funtor monoidal de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ es un par (F, J), donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es un funtor y

$$J_{X,Y} : F(X) \otimes' F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$$

es un isomorfismo natural tal que $F(1)$ es isomorfo a $1'$ y el siguiente diagrama es conmutativo para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) \arrow[rr, "a'_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "J_{X,Y} \otimes' \mathrm{id}_{F(Z)}"] & & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(X)} \otimes' J_{Y,Z}"] \\
F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) \arrow[d, "J_{X \otimes Y, Z}"] & & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \arrow[d, "J_{X, Y \otimes Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "F(a_{X,Y,Z})"] & & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

Un funtor monoidal (F, J) se dice una *equivalencia de categorías monoidales* si F es una equivalencia de categorías.

1.4.1. Ejemplos

Ejemplo 1.4.2. Un ejemplo importante de funtor monoidal es el funtor olvido. En particular, el funtor olvido $\mathbf{Rep}(G) \to \mathbf{Vec}$ es un funtor monoidal entre las categorías de los Ejemplos 1.2.2 y 1.2.3.

Ejemplo 1.4.3. Sea $f : H \to G$ un morfismo de grupos. Entonces tenemos el funtor "pushforward de la graduación" $f_* : \mathbf{Vec}_H \to \mathbf{Vec}_G$ que resulta ser un funtor monoidal (el J en este caso es la identidad).

Ejemplo 1.4.4. Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y A una $\mathbb{K}$-álgebra con unidad. Sea $\mathcal{C}$ la categoría de A–mod a izquierda. El funtor $F : A$–bimod $\to \mathrm{End}(\mathcal{C})$ tal que $F(M)$ es igual al endomorfismo $M \otimes_A -$, es un funtor monoidal entre las categorías de los Ejemplos 1.2.7 y 1.2.8.

Ejemplo 1.4.5. Sean G_1, G_2 grupos, sea A un grupo abeliano y sean ω_1, ω_2 dos 3-cociclos. Sean $\mathcal{C}_\iota = \mathcal{C}_{G_\iota}^{\omega_\iota}(A), \iota = 1, 2$ las categorías monoidales definidas en el Ejemplo 1.2.11. Veamos cómo podemos construir un funtor monoidal de $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$.

Sea $f : G_1 \to G_2$ un morfismo de grupos. Defino $F : C_1 \to C_2$ así:

$$F(\delta_g) = \delta_{f(g)} \text{ y dado } a \in \mathrm{Hom}(\delta_g, \delta_g), F(a) = a \in \mathrm{Hom}(\delta_{f(g)}, \delta_{f(g)}).$$

Sea $\mu : G_1 \times G_1 \to A$ un función que satisface:

$$\omega_1(g,h,l)\mu(gh,l)\mu(g,h) = \mu(g,hl)\mu(h,l)\omega_2(f(g),f(h),f(l)), \text{ para todo } g,h,l \in G_1.$$

Sea $J_{\delta_g,\delta_h} = \mu(g,h)\mathrm{id}_{\delta_{f(gh)}} : F(\delta_g) \otimes F(\delta_h) \xrightarrow{\sim} F(\delta_{gh})$ para $g, h \in G_1$.

Entonces el par (F, J) resulta ser un funtor monodial de $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$.

1.5. Categorías Monoidales Rígidas

Sea $(C, \otimes, 1, a, \iota)$ una categoría monoidal. A lo largo de esta sección omitiremos los isomorfismos naturales l, r.

Definición 1.5.1. Sea $X \in \mathcal{C}$. Un objeto $X^* \in \mathcal{C}$ se dice **dual a izquierda** de X si existen morfismos $\mathrm{ev}_X : X^* \otimes X \to 1$ y $\mathrm{coev}_X : 1 \to X \otimes X^*$, llamados **evaluación** y **coevaluación**, tales que las composiciones

$$X \xrightarrow{\mathrm{coev}_X \otimes \mathrm{id}_X} (X \otimes X^*) \otimes X \xrightarrow{a_{X,X^*,X}} X \otimes (X^* \otimes X) \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{ev}_X} X,$$

$$X^* \xrightarrow{\mathrm{id}_{X^*} \otimes \mathrm{coev}_X} X^* \otimes (X \otimes X^*) \xrightarrow{a^{-1}_{X^*,X,X^*}} (X^* \otimes X) \otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}} X^*$$

son cada una el morfismo identidad.

Definición 1.5.2. Sea $X \in \mathcal{C}$. Un objeto ${}^*X \in \mathcal{C}$ se dice **dual a derecha** de X si existen morfismos $\mathrm{ev}'_X : X \otimes {}^*X \to 1$ y $\mathrm{coev}'_X : 1 \to {}^*X \otimes X$, tales que las composiciones

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{coev}'_X} X \otimes ({}^*X \otimes X) \xrightarrow{a^{-1}_{X,{}^*X,X}} (X \otimes {}^*X) \otimes X \xrightarrow{\mathrm{ev}'_X \otimes \mathrm{id}_X} X,$$

$${}^*X \xrightarrow{\mathrm{coev}'_X \otimes \mathrm{id}_{{}^*X}} ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \xrightarrow{a_{{}^*X,X,{}^*X}} {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \xrightarrow{\mathrm{id}_{{}^*X} \otimes \mathrm{ev}'_X} {}^*X$$

son cada una el morfismo identidad.

Observación 1.5.3. Notar que si X tiene dual a izquierda X^* entonces X es un dual a derecha de X^* con $\mathrm{ev}'_{X^*} = \mathrm{ev}_X$ y $\mathrm{coev}'_{X^*} = \mathrm{coev}_X$. También, si X tiene dual a derecha ${}^*X$ entonces X es un dual a izquierda de ${}^*X$ con $\mathrm{ev}_{{}^*X} = \mathrm{ev}'_X$ y $\mathrm{coev}_{{}^*X} = \mathrm{coev}'_X$. Con lo cual ${}^*(X^*) \cong X \cong ({}^*X)^*$ para todo X que tenga dual a izquierda y a derecha.

Lógicamente ahora surgen las siguientes preguntas: ¿todos los objetos tienen dual a derecha y a izquierda?, ¿todas las categorías monoidales tienen al menos un objeto que tenga dual a izquierda o a derecha?, ¿hay categorías monoidales donde todos sus objetos tengan duales a ambos lados?, ¿conocemos los duales de los objetos de las categorías monoidales mencionadas anteriormente? Veamos los siguientes ejemplos para obtener estas respuestas.

1.5.1. Ejemplos

Ejemplo 1.5.4. Se afirma que el 1 tiene dual a derecha y a izquierda, más aún $1^* = 1 = {}^*1$, $\mathrm{ev}_1 = \iota$ y $\mathrm{coev}_1 = \iota^{-1}$. Para mayor rigurosidad, en este ejemplo no omitiremos los isomorfismos unidad. Veamos que el 1 es el dual a izquierda (luego dual a derecha sale con la observación de arriba). Lo que queremos probar es que:

$$1 \xrightarrow{l_1^{-1}} 1 \otimes 1 \xrightarrow{\iota^{-1} \otimes \mathrm{id}_1} (1 \otimes 1) \otimes 1 \xrightarrow{a_{1,1,1}} 1 \otimes (1 \otimes 1) \xrightarrow{\mathrm{id}_1 \otimes \iota} 1 \otimes 1 \xrightarrow{r_1} 1, \tag{1.4}$$

$$1 \xrightarrow{r_1^{-1}} 1 \otimes 1 \xrightarrow{\mathrm{id}_1 \otimes \iota^{-1}} 1 \otimes (1 \otimes 1) \xrightarrow{a^{-1}_{1,1,1}} (1 \otimes 1) \otimes 1 \xrightarrow{\iota \otimes \mathrm{id}_1} 1 \otimes 1 \xrightarrow{l_1} 1 \tag{1.5}$$

son cada una el morfismo identidad.

Por definición de los isomorfismos unidad, tenemos que $(\mathrm{id}_1 \otimes \iota) \circ a_{1,1,1} = R_1(r_1) = r_1 \otimes \mathrm{id}_1 = \iota \otimes \mathrm{id}_1$ (aquí usamos que $r_1 = \iota = l_1$ por el Corolario 1.3.5). Así, la composición (1.4) nos quedó (usando nuevamente que $r_1 = \iota = l_1$):

$$\iota \circ (\iota \otimes \mathrm{id}_1) \circ (\iota^{-1} \otimes \mathrm{id}_1) \circ \iota^{-1} = \iota \circ (\mathrm{id}_1 \otimes \mathrm{id}_1) \circ \iota^{-1} = \mathrm{id}_1.$$

De la misma forma usando que $(\iota \otimes \mathrm{id}_1) \circ a^{-1}_{1,1,1} = L_1(l_1) = \mathrm{id}_1 \otimes l_1 = \mathrm{id}_1 \otimes \iota$, la composición (1.5) nos quedó:

$$\iota \circ (\mathrm{id}_1 \otimes \iota) \circ (\mathrm{id}_1 \otimes \iota^{-1}) \circ \iota^{-1} = \iota \circ (\mathrm{id}_1 \otimes \mathrm{id}_1) \circ \iota^{-1} = \mathrm{id}_1.$$

Ejemplo 1.5.5. Miremos la categoría de los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita Vec. Sea V un objeto de esta categoría, y sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una $\mathbb{K}$-base de V. Entonces su dual a izquierda y a derecha son el esapcio dual V^*, su evaluación es

$$\mathrm{ev}_V : V^* \otimes V \to \mathbb{K}$$

$$\mathrm{ev}_V(f, v) = f(v)$$

y su coevaluación es

$$\mathrm{coev}_V : \mathbb{K} \to V \otimes V^*$$

$$\mathrm{coev}_V(k) = \sum_{\iota=1}^{n} k(v_\iota \otimes v_\iota^*).$$

Así que aquí tenemos una categoría en la cual todos sus objetos tienen dual a derecha y a izquierda.

Ejemplo 1.5.6. Por el contrario miremos la categoría de todos los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales **Vec**. Veamos que no todos los objetos de esta categoría tienen dual a izquierda. Sea V un espacio vectorial de dimensión infinita y supongamos que Y es su dual a izquierda, ev_V su evaluación y coev_V su coevaluación. Entonces

$$V \xrightarrow{\mathrm{coev}_V \otimes \mathrm{id}_V} (V \otimes Y) \otimes V \xrightarrow{a_{V,Y,V}} V \otimes (Y \otimes V) \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{ev}_V} V$$

es el morfismo identidad. Es decir para algún $y \in Y$ y $k \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} v &\to \mathrm{coev}_V(1) \otimes v = (\pi_1(\mathrm{coev}_V(1)) \otimes y) \otimes v \\ &\to \pi_1(\mathrm{coev}_V(1)) \otimes (y \otimes v) \\ &\to \pi_1(\mathrm{coev}_V(1)) \otimes k = k\pi_1(\mathrm{coev}_V(1)) \\ &\subseteq \langle \pi_1(\mathrm{coev}_V(1)) \rangle \end{aligned}$$

debería ser la identidad. Pero esto es absurdo ya que la imagen de la composición quedó contenida en un subespacio de V de dimensión finita.

Ejemplo 1.5.7. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, y sea $\mathrm{Rep}(G)$ la categoría de representaciones de dimensión finita de G sobre $\mathbb{K}$. Sea (ρ, V) un objeto de esta categoría, entonces su dual (a izquierda y a derecha) es la representación dual usual (ρ^*, V^*) definida por $(\rho^*(g)(f))(v) = f((\rho(g^{-1}))(v))$, su evaluación y coevaluación son las mismas que para Vec ya que estas resultan ser morfismos de representaciones.

Ejemplo 1.5.8. Sea $\mathcal{C}_G(A)$ la categoría del Ejemplo 1.2.5. Veamos que todos sus objetos tienen dual a izquierda y a derecha sí y solo sí G es un grupo.

($\Rightarrow$) Sea δ_h el dual a izquierda de δ_g, entonces sabemos que existe el morfismo evaluación $\mathrm{ev}_{\delta_g} : \delta_h \otimes \delta_g \to \delta_e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G}(\delta_{hg}, \delta_e)$, por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G}(\delta_{hg}, \delta_e) \neq \varnothing$, con lo cual necesariamente $hg = e$, es decir h es un inverso a izquierda de g y esto vale para todo $g \in G$. De la misma forma pero con el dual a derecha, se prueba que g tiene inverso a derecha y por las propiedades de monoide sabemos que ambos inversos deben ser iguales. Como todo elemento de G tiene inverso, G resulta grupo.

($\Leftarrow$) Sea G un grupo y $\delta_g \in \mathcal{C}_G(A)$, entonces defino $\delta_g^* = \delta_{g^{-1}} = {}^*\delta_g$ y $\mathrm{ev}_{\delta_g} = a$ y $\mathrm{coev}_{\delta_g} = -a$ con $a \in A$ y $-a$ su opuesto (recordar que A era un grupo abeliano). Verifiquemos que esto funciona: las composiciones de la definición de dual a izquierda nos quedan:

$$\delta_g \xrightarrow{-a\otimes 0=-a} (\delta_g \otimes \delta_{g^{-1}}) \otimes \delta_g \xrightarrow{0} \delta_g \otimes (\delta_{g^{-1}} \otimes \delta_g) \xrightarrow{0\otimes a=a} \delta g,$$

$$\delta_{g^{-1}} \xrightarrow{0\otimes -a=-a} \delta_{g^{-1}} \otimes (\delta_g \otimes \delta_{g^{-1}}) \xrightarrow{0} (\delta_{g^{-1}} \otimes \delta_g) \otimes \delta_{g^{-1}} \xrightarrow{a\otimes 0=a} \delta_{g^{-1}}$$

que claramente son el morfismo $\mathrm{id} = 0$. Notar que reemplazamos al asociador y a las identidades por 0 y al producto tensorial por la operación del grupo A.

Las composiciones para el dual a derecha son iguales.

Ejemplo 1.5.9. Sea $\mathbb{K}$–Vec_G la categoría del Ejemplo 1.2.6. Veamos que todos sus objetos tienen dual a izquierda y a derecha sí y solo sí G es un grupo.

($\Rightarrow$) Sea $\delta_g, g \in G$ definido por la fórmula $(\delta_g)_x = \mathbb{K}$ si $x = g$ y $(\delta_g)_x = 0$ si $x \neq g$. Sea $V' = \bigoplus_{h\in G} V'_h$ el dual a izquierda de δ_g y $\mathrm{ev}_{\delta_g} : V' \otimes \delta_g \to 1 = \delta_e$ el morfismo evaluación. Como los morfismos preservan graduación, necesariamente

$$(V' \otimes \delta_g)_e = \bigoplus_{h\in G/hg=e} V'_h \otimes \mathbb{K} \neq 0,$$

con lo cual existe $h \in G$ tal que $hg = e$, es decir h es un inverso a izquierda de g. Usando la existencia de dual a derecha se consigue un inverso a derecha de g y luego se concluye que ambos inversos deben ser iguales y por lo tanto todo elemento de G tiene inverso.

($\Leftarrow$) Sea $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ un objeto arbitrario. Defino:

$$V^* = \bigoplus_{g\in G} W_g \text{ con } W_g = (V_{g^{-1}})^*.$$

Notar que entonces $(V^* \otimes V)_e = \bigoplus_{g\in G}(V_g^* \otimes Vg)$. Definiré ev_V como la suma de las evaluaciones de espacios vectoriales en grado e y como 0 en los demás grados. Es decir:

$$\mathrm{ev}_V := (\sum_{g\in G} \mathrm{ev}_g) + 0 + ... + 0 : V^* \otimes V \to \mathbb{K} \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \cong \mathbb{K}$$

donde $\mathrm{ev}_g : V_g^* \otimes V_g \to \mathbb{K}$ es la evaluación de espacios vectoriales.

Definición 1.5.10. Un objeto en una categoría monoidal se dice **rígido** si tiene dual a izquierda y a derecha.

Definición 1.5.11. Una categoría monoidal se dice **rígida** si todos sus objetos son rígidos.

Observación 1.5.12. Para un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ se conoce que existe la siguiente propiedad para su espacio dual V^*: dados U, W espacios vectoriales, existe una adjunción $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U \otimes V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V^* \otimes W)$. Veamos ahora la misma propiedad en categorías monoidales.

Proposición 1.5.13. *Sea C una categoría monoidal y sean V, U y W objetos en C.*

(a) Si V tiene dual a izquierda V^* entonces existe una adjunción isomorfismo natural

$$Hom_C(U \otimes V, W) \xrightarrow{\sim} Hom_C(U, W \otimes V^*), \tag{1.6}$$

$$Hom_C(V^* \otimes U, W) \xrightarrow{\sim} Hom_C(U, V \otimes W). \tag{1.7}$$

(b) Si V tiene dual a derecha ${}^*V$ entonces existe una adjunción isomorfismo natural

$$Hom_C(U \otimes {}^*V, W) \xrightarrow{\sim} Hom_C(U, W \otimes V), \tag{1.8}$$

$$Hom_C(V \otimes U, W) \xrightarrow{\sim} Hom_C(U, {}^*V \otimes W). \tag{1.9}$$

Es decir que cuando existe dual a izquierda (respectivamente, derecha) de V, el funtor $V^* \otimes -$ es el adjunto a izquierda de $V \otimes -$ (respectivamente, $- \otimes {}^*V$ es el adjunto a derecha de $- \otimes V$).

Demostración. El isomorfismo que nos da (1.6) es $f \mapsto (f \otimes \mathrm{id}_{V^*}) \circ (\mathrm{id}_U \otimes \mathrm{coev}_V)$, (donde estoy suprimiendo el ismorfismo asociador y r_U^{-1}) para $f \in \mathrm{Hom}_C(U \otimes V, W)$. Los demás isomorfismos son similares. $\square$

Capítulo 2

Categorías tensoriales simétricas

En este capítulo veremos las definiciones y propiedades básicas de categorías simétricas, tensoriales y tensoriales simétricas. El contenido es extraido de [EGNO15, EK21].

2.1. Categorías monoidales simétricas

Definición 2.1.1. Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es **trenzada** si existe un isomorfismo natural $c : (- \otimes -) \to (- \otimes^{\mathrm{op}} -)$ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ llamado **trenza** (donde $X \otimes^{\mathrm{op}} Y = Y \otimes X$) tal que los siguientes diagramas conmuten para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
& X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "c_{X,Y\otimes Z}"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[dr, "a_{Y,Z,X}"] & \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[ur, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "c_{X,Y}\otimes 1_Z"'] & & & Y \otimes (Z \otimes X) \\
& (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "a_{Y,X,Z}"] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[ur, "1_Y \otimes c_{X,Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "c_{X\otimes Y,Z}"] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[dr, "a^{-1}_{Z,X,Y}"] & \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ur, "a^{-1}_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "1_X\otimes c_{Y,Z}"'] & & & (Z \otimes X) \otimes Y \\
& X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Z,Y}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[ur, "c_{X,Z} \otimes 1_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Definición 2.1.2. Una categoría monoidal trenzada $\mathcal{C}$ se dice **categoría monoidal simétrica** si para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ se cumple

$$c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = 1_{X\otimes Y}$$

donde c es la trenza.

En este caso se dice que la trenza es **simétrica**.

Ejemplo 2.1.3. $\mathbf{Vec}_{\mathbb{K}}$ es una categoría monoidal simétrica con su trenza dada por $c_{U,V}(u \otimes v) = v \otimes u$.

Ejemplo 2.1.4. $\mathbf{Rep}(G)$ es una categoría monoidal simétrica con la misma trenza que la de espacios vectoriales ya que la c definida en el ejemplo de arriba es también un morfismo de representaciones.

Ejemplo 2.1.5. Vale que si $\mathbf{Vec}_G$ (del Ejemplo 1.2.6) admite trenza, entonces G debe ser un monoide conmutativo. Probemos esto: sea

$$\delta_g := 0 \oplus ...0 \oplus (\mathbb{K})_g \oplus 0... \oplus 0$$

con $g \in G$, como estamos suponiendo que la categoría admite una trenza c, tendríamos que $c : \delta_g \otimes \delta_h \to \delta_h \otimes \delta_g$ es un isomorfismo no nulo entre

$$0 \oplus ...0 \oplus (\mathbb{K})_{gh} \oplus 0... \oplus 0 = \delta_{gh}$$

y

$$0 \oplus ...0 \oplus (\mathbb{K})_{hg} \oplus 0... \oplus 0 = \delta_{hg},$$

(con $g, h \in G$) lo cual sería absurdo si $gh \neq hg$.

Así que basta con tomar G un grupo no abeliano, para tener un ejemplo de categoría monoidal que no admite trenza.

Definición 2.1.6. Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ son trenzadas entonces un funtor monoidal $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se dice **trenzado** si preserva las trenzas es decir: para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ se cumple

$$F(c_{X,Y}) \circ J_{X,Y} = J_{Y,X} \circ c'_{F(X),F(Y)}.$$

Además, si c, c' son simétricas, entonces a un **funtor monoidal trenzado** le decimos **simétrico**.

2.2. Categorías tensoriales

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado.

Definición 2.2.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría $\mathbb{K}$-lineal, abeliana, localmente finita, monoidal y rígida, con $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1) \cong \mathbb{K}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una **categoría tensorial** sobre $\mathbb{K}$ si el bifuntor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es bilineal en morfismos.

Definición 2.2.2. A una categoría tensorial finita y semisimple la llamaremos **categoría de fusión**.

Ejemplo 2.2.3.

- Vec_G, con G un grupo, es una categoría tensorial semisimple. Si G es finito, entonces Vec_G es de fusión;
- Vec_G^ω, con G un grupo y ω un 3-cociclo, es una categoría tensorial semisimple (que es de fusión si G es finito);
- Vec es una categoría de fusión;
- $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ es una categoría tensorial. Si $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 0$ o $\mathrm{char}(\mathbb{K})$ no divide a $|G|$ entonces $\mathrm{Rep}(G)$ es una categoría de fusión;

Ejemplo 2.2.4. Veamos un ejemplo de una categoría que no es tensorial por culpa del bifuntor $\otimes$ que no es bilineal. Sea $\mathcal{C}$ la categoría del Ejemplo 1.2.9. Miremos el morfismo de bimódulos $\phi : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}_-, \phi(z) = iz$. Veamos que $\mathrm{id} \otimes i\phi \neq i(\mathrm{id} \otimes \phi)$:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \otimes i\phi)(i \otimes i) &= (i \otimes (i\phi)(i)) = i \otimes i\phi(i) = i \otimes -i \\
&= i \otimes (-i) \rhd 1 = i \lhd (-i) \otimes 1 = -1 \otimes 1, \\
i(\mathrm{id} \otimes \phi)(i \otimes i) &= i(i \otimes \phi(i)) = i(i \otimes -1) = i \rhd i \otimes -1 = -1 \otimes -1 = 1 \otimes 1.
\end{aligned}$$

Definición 2.2.5. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías tensoriales sobre $\mathbb{K}$, sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor monoidal $\mathbb{K}$-lineal, exacto y fiel. Decimos que F es un funtor **tensorial**.

Ejemplo 2.2.6. Los funtores monoidales de los Ejemplos (1.4.2) y (1.4.3) son funtores tensoriales. El funtor monoidal construido en el Ejemplo (1.4.5) es un funtor tensorial para las categorías $C_G^\omega(\mathbb{K})$.

Proposición 2.2.7. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Entonces el bifuntor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es biexacto.*

Demostración. Por la Proposición 1.5.13 sabemos que los funtores $V \otimes -$ y $- \otimes V$ tienen funtor adjunto a izquierda y a derecha. No ha sido probado aquí, pero vale que cualquier funtor entre categorías abelianas que tenga funtor adjunto a izquierda y a derecha es exacto. Por lo tanto tenemos la exactitud de $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ en ambos factores. $\square$

Proposición 2.2.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Entonces el funtor dualización a izquierda y el funtor dualización a derecha son exactos.*

Demostración. Lo probaremos para el funtor dualización a izquierda pero la misma idea sirve para el funtor dualización a derecha.

Sea

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

una sucesión exacta. Queremos probar que

$$0 \to Z^* \to Y^* \to X^* \to 0$$

es exacta.

Primero veamos que $0 \to Z^* \to Y^* \to X^*$ es exacta.

Notar que basta con probar que:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Z^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X^*)$$

sea exacta para T un objeto de $\mathcal{C}$, que obviamente es lo mismo que ver que:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, 1 \otimes Z^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, 1 \otimes Y^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, 1 \otimes X^*)$$

sea exacta.

Por la Proposición 1.5.13, basta con ver que:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T \otimes Z, 1) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T \otimes Y, 1) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T \otimes X, 1) \tag{2.1}$$

sea exacta.

Como en la proposición de arriba vimos que tensorizar es un funtor exacto, tenemos que:

$$0 \to T \otimes X \to T \otimes Y \to T \otimes Z \to 0 \tag{2.2}$$

es exacta y como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ es un funtor contravariante exacto a izquierda ($A \in \mathcal{C}$), al aplicarlo a (2.2) tenemos que vale (2.1).

Ahora veamos que $Z^* \to Y^* \to X^* \to 0$ es exacta.

Notar que basta con probar que:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^*, T) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^*, T) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z^*, T)$$

sea exacta para T un objeto de $\mathcal{C}$, que obviamente es lo mismo que ver que:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^* \otimes 1, T) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^* \otimes 1, T) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z^* \otimes 1, T)$$

sea exacta.

Por la Proposición 1.5.13, basta con ver que

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, X \otimes T) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, Y \otimes T) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(1, Z \otimes T) \tag{2.3}$$

sea exacta.

De nuevo tensorizando tenemos que

$$0 \to X \otimes T \to Y \otimes T \to Z \otimes T \to 0 \tag{2.4}$$

es exacta y como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ es un funtor covariante exacto a izquierda ($A \in \mathcal{C}$), al aplicarlo a (2.4) tenemos que vale (2.3). $\square$

Teorema 2.2.9. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial, entonces el objeto 1 es simple.*

Demostración. Sean X un subobjeto simple de 1 (que existe porque nuestra categoría es localmente finita).

$$0 \to X \xrightarrow{\iota} 1 \to Y \to 0 \tag{2.5}$$

la correspondiente sucesión exacta, donde $Y = 1/X$.

Por la proposición anterior el funtor dualización a izquierda es exacto entonces

$$0 \to Y^* \to 1 \to X^* \to 0$$

es una sucesión exacta.

Como tensorizar es exacto por Proposición 2.2.7, obtenemos que

$$0 \to X \otimes Y^* \to X \to X \otimes X^* \to 0$$

es exacta. Como X es simple y $X \otimes X^* \neq 0$ (pues el morfismo coev es no nulo), tenemos que $X \otimes X^* \cong X$. De esta forma tenemos el siguiente morfismo no nulo $1 \to X \otimes X^* \to X$ que lo llamo f.

Así que nos quedó el siguiente morfismo no nulo:

$$1 \xrightarrow{f} X \xhookrightarrow{\iota} 1$$

Como $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(1) \cong \mathbb{K}$, el morfismo anterior debe ser un escalar no nulo, es decir $\iota \circ f = a\mathrm{id}_1$, con $a \in \mathbb{K}$ y por lo tanto ι debe ser suryectivo y como ya sabíamos que era inyectivo nos quedó que X es isomorfo a 1. $\square$

Corolario 2.2.10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial, entonces el morfismo evaluación es un epimorfismo y el morfismo coevaluación es un monomorfismo.*

2.3. Categorías tensoriales simétricas

Definición 2.3.1. Una categoría tensorial $\mathcal{C}$ que además tenga estructura de categoría monoidal simétrica se le dice **categoría tensorial simétrica**.

Ejemplo 2.3.2. $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ es una categoría tensorial simétrica. Obviamente si G es el grupo trivial, nos queda la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita.

Definición 2.3.3. Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ son categorías tensoriales simétricas entonces un **funtor tensorial simétrico** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es un funtor que es tensorial simétrico.

Naturalmente uno puede preguntarse cuáles son todas las categorías tensoriales simétricas (es decir buscar una clasificación). Ya mencionamos que $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ es un ejemplo pero ¿hay otros?

La respuesta es sí y ahora pasaremos a describir una nueva categoría y luego a explicar por qué $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ y esta nueva categoría son efectivamente distintas.

2.3.1. La categoría de super espacios vectoriales

Definición 2.3.4. A un espacio vectorial $\mathbb{Z}_2$-graduado $V = V_0 \oplus V_1$ lo llamaremos **super espacio vectorial**. A los elementos de V_0 se los llama **pares** y a los de V_1 **impares**.

Definimos $\mathrm{sVec}_{\mathbb{K}}$ la **categoría de super espacios vectoriales de dimensión finita** sobre $\mathbb{K}$ como la categoría tensorial $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_2)$ con la siguiente trenza:

$$c_{X,Y}(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|}(y \otimes x), \tag{2.6}$$

donde x e y son homogéneos (i.e. puramente pares o puramente impares) y $|.|$ denota la paridad de elementos homogéneos.

Observación 2.3.5. Si $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$ entonces $\mathrm{sVec}_{\mathbb{K}} = \mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_2)$. Así que el caso interesante es al suponer que $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.

Teorema 2.3.6. *$sVec_{\mathbb{K}}$ es una categoría tensorial simétrica.*

Demostración. Que sea una categoría tensorial ya lo sabemos por la definición de $\mathrm{sVec}_{\mathbb{K}}$. Solo queda verificar que c sea una trenza simétrica.

Primero veamos que c es una trenza viendo que satisface los hexágonos de la Definición 2.1.1 para $X = X_0 \oplus X_1,\quad Y = Y_0 \oplus Y_1,\quad Z = Z_0 \oplus Z_1$.

La parte superior del hexágono nos queda:

$$\begin{aligned}
&(a_{Y,Z,X} \circ c_{X,Y\otimes Z} \circ a_{X,Y,Z})(((x_0 \oplus x_1) \otimes (y_0 \oplus y_1)) \otimes (z_0 \oplus z_1)) = \\
&(a_{Y,Z,X} \circ c_{X,Y\otimes Z})(x_0 \otimes (y_0 \otimes z_0) \,\oplus\, x_1 \otimes (y_1 \otimes z_0) \,\oplus\, x_0 \otimes (y_1 \otimes z_1) \,\oplus\, x_1 \otimes (y_0 \otimes z_1) \\
&\oplus x_0 \otimes (y_0 \otimes z_1) \,\oplus\, x_1 \otimes (y_1 \otimes z_1) \,\oplus\, x_0 \otimes (y_1 \otimes z_0) \,\oplus\, x_1 \otimes (y_0 \otimes z_0)) = \\
&y_0 \otimes (z_0 \otimes x_0) \,\oplus\, (-1) y_1 \otimes (z_0 \otimes x_1) \,\oplus\, y_1 \otimes (z_1 \otimes x_0) \,\oplus\, (-1) y_0 \otimes (z_1 \otimes x_1) \\
&y_0 \otimes (z_1 \otimes x_0) \,\oplus\, y_1 \otimes (z_1 \otimes x_1) \,\oplus\, y_1 \otimes (z_0 \otimes x_0) \,\oplus\, y_0 \otimes (z_0 \otimes x_1).
\end{aligned}$$

La parte inferior del hexágono nos queda:

$$\begin{aligned}
&(1_Y \otimes c_{X,Z} \circ a_{Y,X,Z} \circ c_{X,Y} \otimes 1_Z)(((x_0 \oplus x_1) \otimes (y_0 \oplus y_1)) \otimes (z_0 \oplus z_1)) = \\
&(1_Y \otimes c_{X,Z})(y_0 \otimes (x_0 \otimes z_0) \,\oplus\, (-1) y_1 \otimes (x_1 \otimes z_0) \,\oplus\, y_1 \otimes (x_0 \otimes z_1) \,\oplus\, y_0 \otimes (x_1 \otimes z_1) \\
&\oplus y_0 \otimes (x_0 \otimes z_1) \,\oplus\, (-1) y_1 \otimes (x_1 \otimes z_1) \,\oplus\, y_1 \otimes (x_0 \otimes z_0) \,\oplus\, y_0 \otimes (x_1 \otimes z_0)) = \\
&y_0 \otimes (z_0 \otimes x_0) \,\oplus\, (-1) y_1 \otimes (z_0 \otimes x_1) \,\oplus\, y_1 \otimes (z_1 \otimes x_0) \,\oplus\, (-1) y_0 \otimes (z_1 \otimes x_1) \\
&\oplus y_0 \otimes (z_1 \otimes x_0) \,\oplus\, y_1 \otimes (z_1 \otimes x_1) \,\oplus\, y_1 \otimes (z_0 \otimes x_0) \,\oplus\, y_0 \otimes (z_0 \otimes x_1).
\end{aligned}$$

Como obtuvimos lo mismo, el diagrama resulta conmutativo.

Una cuenta similar sirve para ver que el segundo hexágono también es conmutativo.

Solo resta ver que c es simétrica lo cual es obvio. $\square$

Ahora el objetivo es verificar que $\mathrm{sVec}_{\mathbb{K}}$ es realmente una nueva categoría y para esto usaremos la noción de dimensión de un objeto rígido X.

Definición 2.3.7. Sea X un objeto rígido en una categoría monoidal simétrica $\mathcal{C}$. Dado un morfismo $b : X \to X$, definimos la **traza** de b, y la denotamos $\mathrm{Tr}(b)$, como la siguiente composición:

$$1 \xrightarrow{coev_X} X \otimes X^* \xrightarrow{b \otimes 1_{X^*}} X \otimes X^* \xrightarrow{c_{X,X^*}} X^* \otimes X \xrightarrow{ev_X} 1.$$

Además definimos la **dimensión** de X como $\dim(X) = \mathrm{Tr}(1_X)$.

Observación 2.3.8. En el caso que $\mathcal{C} = \mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}$, la definición de traza dada recién es la usual definición de traza que conocemos para transformaciones lineales pues: fijemos $\{v_i\}$ base de V, $\{v_i^*\}$ su base dual y al componer,

$$1 \mapsto \sum_{i=1}^{\dim_{\mathbb{K}}(X)} v_i \otimes v_i^* \mapsto \sum_{i=1}^{\dim_{\mathbb{K}}(X)} b(v_i) \otimes v_i^* \mapsto \sum_{i=1}^{\dim_{\mathbb{K}}(X)} v_i^* \otimes b(v_i) \mapsto \sum_{i=1}^{\dim_{\mathbb{K}}(X)} v_i^*(b(v_i)) = \mathrm{tr}(b)$$

obtenemos la traza usual de b.

Veamos lo que sucede si $V = V_0 \oplus V_1$ es un super espacio vectorial en $\mathrm{sVec}_{\mathbb{K}}$. Sean $\{v_{0,i}\}, \{v_{1,i}\}$ bases de V_0 y V_1 respectivamente.

Sea ahora $\{(v_{0,1} \oplus 0), ..., (v_{0,n_0} \oplus 0), ..., (0 \oplus v_{1,1}), ..., (0 \oplus v_{1,n_1})\}$ base de $V_0 \oplus V_1$ (donde $n_0 = \dim(V_0)$ y $n_1 = \dim(V_1)$).

Tomamos $\{(v_{0,1}^* \oplus 0), ..., (v_{0,n_0}^* \oplus 0), ..., (0 \oplus v_{1,1}^*), ..., (0 \oplus v_{1,n_1}^*)\}$ base de $V^* = V_0^* \oplus V_1^*$.

Al componer nos queda:

$$\begin{aligned}
1 &\mapsto \sum_{i=1}^{n_0} (v_{0,i} \oplus 0) \otimes (v_{0,i}^* \oplus 0) + \sum_{i=1}^{n_1} (0 \oplus v_{1,i}) \otimes (0 \oplus v_{1,i}^*) \\
&\mapsto \sum_{i=1}^{n_0} (b|_{V_0}(v_{0,i}) \oplus 0) \otimes (v_{0,i}^* \oplus 0) + \sum_{i=1}^{n_1} (0 \oplus b|_{V_1}(v_{1,i})) \otimes (0 \oplus v_{1,i}^*) \\
&\mapsto \sum_{i=1}^{n_0} (v_{0,i}^* \oplus 0) \otimes (b|_{V_0}(v_{0,i}) \oplus 0) - \sum_{i=1}^{n_1} (0 \oplus v_{1,i}^*) \otimes (0 \oplus b|_{V_1}(v_{1,i})) \\
&\mapsto \sum_{i=1}^{n_0} v_{0,i}^*(b|_{V_0}(v_{0,i})) - \sum_{i=1}^{n_1} v_{1,i}^*(b|_{V_1}(v_{1,i})) \\
&= \mathrm{tr}(b|_{V_0}) - \mathrm{tr}(b|_{V_1}).
\end{aligned}$$

Conclusión: $\mathrm{Tr}(b) = \mathrm{tr}(b|_{V_0}) - \mathrm{tr}(b|_{V_1})$. En particular $\dim(V) = \dim_{\mathbb{K}}(V_0) - \dim_{\mathbb{K}}(V_1)$, es decir la dimensión de V en $\mathrm{sVec}_{\mathbb{K}}$ es distinta a la dimensión de V en $\mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}$.

Las propiedades de la traza que conocemos para espacios vectoriales también se cumplen para esta nueva definición de traza. No daremos la prueba ya que involucra diagramas engorrosos, pero enunciamos a continuación las propiedades que valen y que luego utilizaremos. Una demostración de esto puede encontrarse en [AKauadPO02].

Proposición 2.3.9. *Se cumple que:*

$$\begin{aligned} Tr(f+g) &= Tr(f) + Tr(g), \qquad f : X \to X,\ \ g : X \to X. \\ Tr(f \circ g) &= Tr(g \circ f), \qquad f : Y \to X,\ \ g : X \to Y. \\ Tr(f \otimes g) &= Tr(f)\, Tr(g), \qquad f : X \to X,\ \ g : Y \to Y. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Clasificación de las categorías tensoriales simétricas

El objetivo de este capítulo es explicar por qué surge la idea de crear la categoría de Verlinde (la cual denotamos Ver_p). Presentaremos teoremas (los cuáles no demostraremos) actuales y de gran relevancia que ayudan a responder las siguientes preguntas: ¿cuáles son todas las categorías tensoriales simétricas?, ¿qué propiedades son las que distinguen a cada una de ellas?, y ¿cuán importante es la característica del cuerpo sobre el que trabajemos? Este capítulo no es necesario para entender los capítulos que le siguen, sino para entender las aplicaciones que tiene la teoría que se expondrá después.

Definición 3.0.1. A un funtor tensorial simétrico $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}$ lo llamamos **funtor de fibra**.

A un funtor tensorial simétrico $F : \mathcal{C} \to \mathrm{sVec}_{\mathbb{K}}$ lo llamamos **super funtor de fibra**.

En lo que sigue de la sección usaremos el término **funtor de fibra** indistintamente para referirnos al super funtor de fibra y también a un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ver}_p$.

Definición 3.0.2. Una categoría tensorial simétrica $\mathcal{C}$ se dice **Tannakiana** si existe un funtor de fibra (tensorial, exacto y simétrico) $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}$. Se puede probar que esta definición es equivalente a pedir que $\mathcal{C}$ sea una categoría tensorial simétrica equivalente a $\mathrm{Rep}(G)$, donde G es un *esquema de grupos afín.*

Definición 3.0.3. Una categoría tensorial simétrica $\mathcal{C}$ se dice **super-Tannakiana** si existe un funtor de fibra $F : \mathcal{C} \to \mathrm{sVec}_{\mathbb{K}}$. Se puede probar que esta definición es equivalente a pedir que $\mathcal{C}$ sea una categoría tensorial simétrica equivalente a $\mathrm{Rep}(G, z)$, donde G es un *esquema de súper grupos afín.*

Definición 3.0.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente finita, definimos **longitud** de X como el largo de su serie de Jordan-Hölder.

Resulta que el estudio de la pregunta ¿cuán rápido crece la función **longitud**(X)? ayudó a clasificar y diferenciar las categorías tensoriales simétricas y a encontrar nuevos ejemplos.

Definición 3.0.5. Decimos que una categoría tensorial simétrica $\mathcal{C}$ tiene **crecimiento moderado** si para todo $X \in \mathcal{C}$ existe $r_X \in \mathbb{R}$ tal que $\text{longitud}(X^{\otimes n}) \leqslant (r_X)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.0.6. Si $X \in \text{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$, podemos tomar $r_X = \dim_{\mathbb{K}}(X)$ y así tenemos que $\text{Rep}_{\mathbb{K}}(G)$ es de crecimiento moderado.

Ejemplo 3.0.7. No fueron objeto de estudio en esta tesis, pero un ejemplo de categoría tensorial simétrica de crecimiento no moderado son las **categorías de Deligne** $\text{Rep}(\mathbb{S}_t)$, $t \notin \mathbb{N}$, que pueden encontrarse en [Del07].

3.1. Cuerpo de característica cero

Teorema 3.1.1 ([Del02]). *Una categoría tensorial simétrica sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de característica 0 es super-Tannakiana si y sólo si es de crecimiento moderado.*

Observación 3.1.2. Por el Teorema 3.1.1, tenemos que la categoría del Ejemplo 3.0.7 no es super-Tannakiana.

Automáticamente surge la pregunta ¿vale el teorema de Deligne para $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica prima? La respuesta es **no**. Más aún, no vale para ningún p primo. Los contraejemplos para $p = 2, 3$ no los veremos en este trabajo pero pueden encontrarse en [BEO23]. El contraejemplo para $p \geqslant 5$ será la categoría de Verlinde Ver_p que construiremos en la próxima sección. Es decir que Ver_p será una categoría de crecimiento moderado que no admitirá un funtor de fibra $F : \text{Ver}_p \to \text{sVec}$.

3.2. Cuerpo de característica positiva

Hasta ahora entonces tenemos por Deligne que dada una categoría tensorial simétrica de crecimiento moderado sobre un cuerpo de característica 0, siempre existe un funtor de fibra a $\text{sVec}_{\mathbb{K}}$, pero que esto no vale para característica prima y Ver_p será un contraejemplo. ¿Será que la generalización del teorema de Deligne para característica positiva es mirando funtores de fibra a Ver_p?, es decir, ¿dada una categoría tensorial simétrica $\mathcal{C}$ de crecimiento moderado sobre $\mathbb{K}$ de característica positiva, existirá un funtor de fibra $\mathcal{C} \to \text{Ver}_p$?

Sorprendentemente si agregamos la hipótesis de semisimplicidad a $\mathcal{C}$, la respuesta a la pregunta es **sí**. Enunciamos a continuación el teorema que lo afirma.

Teorema 3.2.1. [CEO23, Theorem 8.11] *Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial simétrica semisimple de crecimiento moderado sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de característica $p > 0$, entonces admite un funtor de fibra a Ver_p.*

Nota: Este teorema fue primero probado en [Ost20] con la hipótesis adicional de pedirle a $\mathcal{C}$ que tuviera una cantidad finita de objetos simples, es decir pedirle a $\mathcal{C}$ que sea una categoría de fusión.

Observación 3.2.2. Han habido avances que permiten decir aún más que el Teorema 3.2.1. No se abordará en la tesis pero se puede definir la noción de un **funtor de Frobenius** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \boxtimes \mathrm{Ver}_p$, el cual no necesariamente es exacto (y en caso de serlo decimos que $\mathcal{C}$ es Frobenius exacta); la definición puede encontrarse en [Ost20, Definition 3.5]. Haciendo uso de este funtor enunciamos a continuación el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3. [CEO23, Theorem 1.1] *Sea $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial simétrica. $\mathcal{C}$ es de crecimiento moderado y Frobenius exacta sobre $\mathbb{K}$ de característica $p > 0$ si y sólo si admite un funtor de fibra a Ver_p.*

Capítulo 4

La semisimplificación de una categoría

Hasta aquí hemos ido armando el concepto de categoría tensorial simétrica y hemos dado dos ejemplos diferentes para este concepto. En la sección de ahora presentaremos otro ejemplo de categoría tensorial simétrica (que abarca a $\mathrm{sVec}_{\mathbb{K}}$) y además estudiaremos la construcción de la categoría en cuestión y analizaremos en detalle por qué esta resulta semisimple. También daremos varias definiciones nuevas y algunas proposiciones. Este capítulo es de crucial importancia para abordar el capítulo que le sigue.

La teoría aquí planteada se extrae principalmente de [EK21], [EO22], [Del07] y [Mar14].

Definición 4.0.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial simétrica. Un **ideal tensorial** $I \in \mathcal{C}$ es una colección de subespacios

$$I = \{I(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\}_{X,Y\in\mathcal{C}}$$

tal que para cualquier $X, Y, Z, T \in \mathcal{C}$,

1) $\forall \alpha \in I(X,Y), \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z), \gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)$, tenemos que $\beta \circ \alpha \in I(X,Z)$ y $\alpha \circ \gamma \in I(Z,Y)$.

2) $\forall \alpha \in I(X,Y), \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,T)$, tenemos que $\alpha \otimes \beta \in I(X \otimes Z, Y \otimes T)$ y $\beta \otimes \alpha \in I(Z \otimes X, T \otimes Y)$.

Definición 4.0.2. Si $I \subset \mathcal{C}$ es un ideal tensorial entonces podemos definir una categoría tensorial simétrica $\mathcal{C}/I$ que tiene los mismos objetos que $\mathcal{C}$ pero $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/I}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/I(X,Y)$. Esta categoría recibe el nombre de **categoría cociente de $\mathcal{C}$ por I**.

Observación 4.0.3. ¿Por qué decimos que la categoría cociente es tensorial simétrica?

- Notar que $\mathrm{End}_{\mathcal{C}/I}(1) \cong \mathbb{K}$ pues el único morfismo negligible de 1 en 1 es el nulo.

- Todas las estructuras que debe tener $\mathrm{Hom}(X,Y)$ (grupo abeliano, espacio vectorial de dim. finita, linealidad de la composición) se preservan de la categoría original que ya las satisfacía.
- Los objetos siguen manteniendo la longitud finita.
- La clase de la trenza $[c]$ sigue cumpliendo que $[c_{Y,X}] \circ [c_{X,Y}] = [1_{X\otimes Y}]$, o sea que es simétrica.

4.1. Morfismos negligibles

Definición 4.1.1. Un morfismo $f : X \to Y$ en una categoría tensorial simétrica $\mathcal{C}$ se dice **negligible** si para todo $g : Y \to X, \mathrm{Tr}(f \circ g) = 0$.

4.1.1. Ejemplos

Ejemplo 4.1.2. Si $\mathcal{C} = \mathrm{Vec}$ entonces el único morfismo negligible es el nulo.

Ejemplo 4.1.3. Para $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_5)$ con $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 5$ tenemos morfismos negligibles no nulos. Veamos un ejemplo. Tomo $X = (\rho, \mathbb{K}^2)$ la siguiente representación:

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y $Y = (\sigma, \mathbb{K}^3)$ la siguiente representación:

$$\sigma(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ es un morfismo de representación sí y solo sí

$$[f] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbb{K}$.

Se afirma que

$$[f] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es un morfismo negligible.

Demostración. Sea $g : Y \to X$, un morfismo de representación cualquiera. Entonces

$$[g] = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

con $x, y \in \mathbb{K}$. Entonces

$$[f \circ g] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x+y & x & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto $\mathrm{Tr}(f \circ g) = 0$. $\square$

Ejemplo 4.1.4. Veamos otro ejemplo de morfismo negligible no nulo en $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_5)$ con $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 5$. Tomo $X = (\rho, \mathbb{K}^5)$ la siguiente representación:

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$f : \mathbb{K}^5 \to \mathbb{K}^5$ es un morfismo de representación sí y solo sí

$$[f] = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d, e \in \mathbb{K}$.

Se afirma que

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es un morfismo negligible.

Demostración. Sea $g : X \to X$,

$$[g] = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{pmatrix}$$

un morfismo de representación cualquiera. Entonces $\mathrm{Tr}(f \circ g) = a + a + a + a + a = 0$. $\square$

4.2. Propiedades

Proposición 4.2.1. *La colección $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ de morfismos negligibles en $\mathcal{C}$ forma un ideal tensorial.*

Demostración.

- Sean $\alpha \in \mathcal{N}(X,Y)$ y $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)$ entonces para toda $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, $\mathrm{Tr}((\alpha \circ \gamma) \circ g) = \mathrm{Tr}(\alpha \circ (\gamma \circ g)) = 0$, donde la última igualdad se debe a que α es negligible.
- Sean $\alpha \in \mathcal{N}(X,Y)$ y $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ entonces para toda $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)$, tenemos que $\mathrm{Tr}((\beta \circ \alpha) \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ (\beta \circ \alpha)) = \mathrm{Tr}(\alpha \circ (g \circ \beta)) = 0$, donde la última igualdad se debe a que α es negligible, y las otras igualdades se deben a las propiedades de la traza en 2.3.9.
- Para probar que dados $\alpha \in \mathcal{N}(X,Y)$ y $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,T)$ se cumple que para toda

$$g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \otimes T, X \otimes Z) \text{ y } h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T \otimes Y, Z \otimes X),$$

$$\mathrm{Tr}((\alpha \otimes \beta) \circ g) = 0 \text{ y } \mathrm{Tr}((\beta \otimes \alpha) \circ h) = 0$$

se requiere analizar unos diagramas extensos, por lo tanto omitimos la prueba pero detalles de la misma pueden encontrarse en [EO22, Lemma 2.3].

□

Proposición 4.2.2. *Si $f : X \to X$ es un morfismo nilpotente, es decir existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n = 0$, entonces $Tr(f) = 0$.*

Demostración. Antes de iniciar la demostración de la proposición, hacemos la siguiente afirmación:

Dada una categoría tensorial, si f es un endomorfismo de una sucesión exacta corta

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$$

entonces $\mathrm{Tr}(f|_X) = \mathrm{Tr}(f|_{X'}) + \mathrm{Tr}(f|_{X''})$.

Ahora sí probamos la proposición. Sea f nilpotente y miremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to X \to \mathrm{Im}(f) \to 0.$$

Notar que f es un endomorfismo de esta sucesión, entonces por la afirmación tenemos

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(f|_{\mathrm{Ker}(f)}) + \mathrm{Tr}(f|_{\mathrm{Im}(f)}) = 0 + \mathrm{Tr}(f|_{\mathrm{Im}(f)}).$$

Ahora repetimos el argumento con la siguiente sucesión para la cual $f|_{\mathrm{Im}(f)}$ es un endomorfismo:

$$0 \to \mathrm{Ker}(f|_{\mathrm{Im}(f)}) \to \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(f^2) \to 0,$$

entonces

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(f|_{\mathrm{Im}(f)}) = \mathrm{Tr}(f|_{\mathrm{Ker}(f|_{\mathrm{Im}(f)})}) + \mathrm{Tr}(f|_{\mathrm{Im}(f^2)}) = 0 + \mathrm{Tr}(f|_{\mathrm{Im}(f^2)}).$$

Continuamos así hasta tener que:

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(f|_{\mathrm{Im}(f^{n-1})}) = 0,$$

que era lo deseado. □

Para demostrar los resultados que siguen nos será útil recordar que para la categoría de R-módulos teníamos el siguiente lema de Fitting: sea V un R-módulo a izquierda de longitud finita n y sea $f \in \mathrm{End}_R(V)$. Entonces $V = \mathrm{Im}(f^n) + \mathrm{Ker}(f^n)$. Enunciemos ahora la versión categórica del lema de Fitting.

Lema 4.2.3. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $X \in \mathcal{C}$ un objeto de longitud finita n y $f : X \to X$ un endomorfismo. Entonces $X \cong Im(f^n) \oplus Ker(f^n)$.*

Corolario 4.2.4. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, $X \in \mathcal{C}$ un objeto indescomponible de longitud finita n y $f : X \to X$ un endomorfismo. Entonces son equivalentes:*

(I) *f es inyectiva;*

(II) *f es suryectiva;*

(III) *f es un isomorfismo;*

(IV) *f no es nilpotente.*

Demostración. (I)⇒ (II) Sale directo del lema de Fitting (sin usar la hipótesis de indescomponible) ya que al ser f inyectiva tenemos que $\mathrm{Ker}(f^n) = 0$, entonces $X = \mathrm{Im}(f^n)$, entonces f es suryectiva.

(II)⇒ (III) Es obvia.

(III)⇒ (IV) Si f es un isomorfismo entonces f^k también es un isomorfismo para todo k, con lo cual f no puede ser nilpotente.

(IV)⇒ (I) Asumimos que f no es nilpotente, entonces $\mathrm{Im}(f^n)$ es un subobjeto distinto de 0. Por el lema de Fitting tengo que $X \cong \mathrm{Im}(f^n) \oplus \mathrm{Ker}(f^n)$, pero como X es indescomponible tengo que $\mathrm{Ker}(f^n) = 0$, entonces f es inyectiva.

□

Proposición 4.2.5. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. Sean $\mathcal{C}$ una categoría abeliana, localmente finita, $\mathbb{K}-$ lineal, $X \in \mathcal{C}$ un objeto indescomponible y $f : X \to X$ un endomorfismo. Entonces $f = \lambda id_X + \eta$, con $\lambda \in \mathbb{K}$ y η nilpotente. Si f es un isomorfismo entonces $\lambda \neq 0$.*

Demostración. Primero lo demostramos en el caso de $\mathcal{C} = R$-módulos a izquierda. Sean M un R-módulo a izquierda indescomponible y $f : M \to M$. Al ser $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado, existe λ un autovalor. Entonces $f - \lambda \mathrm{id}_X$ no es un isomorfismo y usando el Corolario 4.2.4 tenemos que $f - \lambda \mathrm{id}_X$ es nilpotente. Así concluimos que $f = \lambda \mathrm{id}_X + \eta$ con η nilpotente.

Para el caso de $\mathcal{C}$ una categoría cualquiera dentro de las hipótesis, usamos que vale la siguiente afirmación (ver [EGNO15, Theorem 1.3.8]): toda categoría abeliana es equivalente, como categoría aditiva, a una subcategoría plena de la categoría de módulos a izquierda sobre un anillo asociativo con unidad A. Una vez establecida esta equivalencia, usamos lo recién probado para la categoría $\mathcal{C} = A-$módulos a izquierda. □

Lema 4.2.6 ([EO22]). *i) Sean X, Y indescomponibles. Entonces $f : X \to Y$ es negligible sí y solo sí $dim(Y) = 0$ o f no es un isomorfismo.*

ii) Sean $X = \bigoplus_{i=1}^m X_i, Y = \bigoplus_{j=1}^n Y_j$, donde X_i, Y_j son indescomponibles. Sea $f : X \to Y$ y sea $f = \bigoplus_{i,j} f_{i,j}$ con $f_{i,j} : X_i \to Y_j$. Entonces f es negligible sí y solo sí $f_{i,j}$ es negligible para todo i, j.

Observación 4.2.7. Corroboremos que i) es cierto según los ejemplos que planteamos arriba. En el Ejemplo 4.1.3 f claramente no era un isomorfismo. En el Ejemplo 4.1.4 X era un objeto de dimensión 0.

Demostración. i) ($\Leftarrow$) Asumimos que f no es un isomorfismo. En primer lugar notar que si $X = 0$ entonces el resultado es obvio. Supongamos entonces que $X \neq 0$. Sea $g : Y \to X$, quiero ver que $\mathrm{Tr}(f \circ g) = 0$. Como sabemos que valen las propiedades de la Proposición 2.3.9, basta con ver que $\mathrm{Tr}(g \circ f) = 0$. Primero notemos que $g \circ f$ no es un isomorfismo porque si lo fuera implicaría que g es suryectiva (y por lo tanto no inyectiva para no tener que f era un isomorfismo), y entonces tendría que

$$0 \to \mathrm{Ker}(g) \to Y \xrightarrow{g} X \to 0$$

es exacta con ambos extremos distintos de cero. Pero notar que $\iota := f \circ \tau$, donde τ es la inversa de $g \circ f$, es una sección de g. Esto hace que la sucesión se parta y tengamos que $Y \cong X \oplus \mathrm{Ker}(g)$ lo cual es absurdo por la hipótesis de indescomponible. Como entonces $g \circ f$ no es un isomorfismo y estoy bajo las hipótesis del Corolario 4.2.4, podemos garantizar que $g \circ f$ es nilpotente. Ahora usando la Proposición 4.2.2 tenemos que $\mathrm{Tr}(g \circ f) = 0$, por lo tanto f es negligible.

Supongamos ahora que $\dim(Y) = 0$. Sea $g : Y \to X$, quiero ver que $\mathrm{Tr}(f \circ g) = 0$. Por la proposición anterior podemos escribir $f \circ g = \lambda \mathrm{id}_Y + \eta$, donde $\lambda \in \mathbb{K}$ y η es nilpotente. De esta forma $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \lambda \dim(Y) + \mathrm{Tr}(\eta) = 0 + 0 = 0$. Así, f es negligible.

($\Rightarrow$) Asumimos que f es negligible. Si f no es un iso entonces listo. En caso contrario tomo $g = f^{-1}$. Por ser f negligible sé que $0 = \mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(\mathrm{id}_Y) = \dim(Y)$, que es lo que queríamos probar.

ii) Ahora veamos el caso general:
($\Leftarrow$) Sea $g : Y \to X$, $g = \bigoplus_{j,i} g_{j,i}$ con $g_{j,i} : Y_j \to X_i$. Entonces $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \sum_{i,j} \mathrm{Tr}(f_{i,j} \circ g_{j,i}) = \sum_{i,j} 0 = 0$ ya que $f_{i,j}$ es negligible para todo i, j.

($\Rightarrow$) Supongamos que para algún $n, m, f_{n,m}$ no es negligible, es decir que existe $t_{m,n} : Y_m \to X_n$ tal que $\mathrm{Tr}(f_{n,m} \circ t_{m,n}) \neq 0$. Tomo $g : Y \to X, g = \oplus g_{j,i}$ con

$g_{m,n} = t_{m,n}, g_{j,i} = 0 \forall (j,i) \neq (m,n)$. Entonces $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \sum_{i,j} \mathrm{Tr}(f_{i,j} \circ g_{j,i}) = \mathrm{Tr}(f_{n,m} \circ g_{m,n}) \neq 0$. Lo cual es absurdo pues f era negligible.

□

Definición 4.2.8. Dada $\mathcal{C}$ una categoría tensorial simétrica, definimos $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/\mathcal{N}(\mathcal{C})$ la **semisimplificación de** $\mathcal{C}$ como la categoría cociente de $\mathcal{C}$ por $\mathcal{N}(\mathcal{C})$, es decir la categoría cuyos objetos son los mismos que $\mathcal{C}$ y los morfismos están dados por $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/\mathcal{N}(X,Y)$, donde $\mathcal{N}(X,Y)$ es el espacio de morfismos negligibles de X a Y.

Observación 4.2.9.

- Como ya probamos que $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ es un ideal tensorial, la categoría $\overline{\mathcal{C}}$ es una categoría tensorial simétrica, a los objetos de $\overline{\mathcal{C}}$ los llamaremos $\overline{X}$.
- Si Y es indescomponible y $\dim(Y) = 0$, el morfismo id_Y es negligible (por el Lema 4.2.6), con lo cual todo morfismo $Y \to Y$ es negligible (pues recordar que $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ es un ideal tensorial), entonces $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(Y,Y) = 0$ haciendo que $\overline{Y} = 0$ por definición.

Corolario 4.2.10. *Sean X, Y indescomponibles,*

i) Si $dim(Y) = 0$ entonces $Hom_{\overline{\mathcal{C}}}(X,Y) = 0$;

ii) Si $X \ncong Y$ entonces $Hom(X,Y) = 0$,

iii) Si $dim(X) \neq 0$ y $X \cong Y$ entonces $dim_{\mathbb{K}}(Hom_{\overline{\mathcal{C}}}(X,Y)) = 1$.

Demostración. i) y ii) salen directos del Lema 4.2.6.

Veamos iii) Sea f la que da el isomorfismo entre X e Y. Probaremos que toda $\overline{h} \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(X,Y)$ se escribe como $k\overline{f}$, o sea que $h = kf + \eta$ con η negligible. Como $h \circ f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Y)$, por la Proposición 4.2.5, podemos escribir $h \circ f^{-1} = \lambda \mathrm{id}_Y + \eta'$ con $\lambda \in \mathbb{K}$ y η' nilpotente. Así nos queda que $h = \lambda f + \eta$ con $\eta = \eta' \circ f$ (recordar que como $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ es un ideal tensorial, η es negligible). □

Teorema 4.2.11. *La semisimplificación $\overline{\mathcal{C}}$ es una categoría tensorial simétrica semisimple. Más aún, los objetos simples de $\overline{\mathcal{C}}$ son los indescomponibles de $\mathcal{C}$ de dimensión no nula.*

Demostración. Sea X indescomponible en $\mathcal{C}$ de dimensión no nula y veamos que $\overline{X}$ es simple en $\overline{\mathcal{C}}$. Supongamos que no es simple, entonces tenemos

$$\overline{f} : \overline{Y} \hookrightarrow \overline{X}$$

con $\overline{Y} \neq 0$ y $\overline{f}$ no nula. Particionamos $\overline{Y} = \oplus \overline{Y_i}, \overline{f} = \oplus \overline{f_i}$, con Y_i indescomponibles. Entonces $\overline{f_i}$ es no nula para algún i, es decir tenemos $f_i : Y_i \to X$ no negligible. Por Lema 4.2.6 concluimos que f_i es un isomorfismo o sea que $\overline{X} \cong \overline{Y_i}$. Así que tenemos

$$\overline{Y_i} \hookrightarrow \overline{Y} \hookrightarrow \overline{X}$$

con los dos extremos isomorfos y podemos concluir que $\overline{X} \cong \overline{Y}$, o sea $\overline{X}$ es simple.

Ahora veamos que la categoría es semisimple. Sea $\overline{X}$ un objeto, a X puedo escribirlo como suma de indescomponibles $\bigoplus_{i=1}^{n} X_i$. Ahora al mirar a X en $\overline{\mathcal{C}}$ tengo que $\overline{X} = \bigoplus_{i=1}^{n} \overline{X_i}$. Como ya mencionamos que si $\dim(Y) = 0$ entonces $\overline{Y} = 0$, a esta suma la reordenamos sacando aquellos sumandos de dimensión 0. Nos queda $\overline{X} = \bigoplus_{i=1}^{k} \overline{X_i}$, y como recién vimos que un indescomponible de dim no nula en $\mathcal{C}$ es simple en $\overline{\mathcal{C}}$, hemos escrito a $\overline{X}$ como suma de simples. □

Observación 4.2.12. Tenemos el **funtor semisimplificación** $S : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ que asigna a cada objeto $X \mapsto \overline{X}$. Este funtor no necesariamente es exacto por ejemplo: miremos la siguiente sucesión exacta de representaciones de $\mathbb{Z}_3$ sobre $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica 3

$$0 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{f}{\hookrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \twoheadrightarrow \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \to 0$$

con

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si aplicamos S a esta sucesión nos queda:

$$0 \to \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \overset{\overline{f}}{\hookrightarrow} 0 \twoheadrightarrow \overline{\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}} \to 0$$

que no es una sucesión exacta.

Capítulo 5

La Categoría de Verlinde

Este capítulo es el más importante del trabajo ya que se presenta la categoría por la cual hemos estado enunciando todos los conceptos previos. La teoría que viene a continuación es sacada de [GK92, GM92]. Se agregan algunas cuentas y demostraciones, en especial para $p = 3, 5, 7$.

Definición 5.0.1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p. Sea $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_p)$. Definimos la **categoría de Verlinde** Ver_p como la semisimplificación de $\mathcal{C}$, es decir $\mathrm{Ver}_p = \overline{\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_p)}$.

Observación 5.0.2.

- Ver_p es una categoría tensorial simétrica semisimple por el Teorema 4.2.11.
- ¿Cuáles son los objetos simples de Ver_p? que es equivalente a preguntarnos ¿cuáles son los objetos indescomponibles de dimensión no nula de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_p)$?

  Sabemos que los objetos indescomponibles de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_p)$ son $J_i, i = 1, 2, ..., p$ donde J_i es mandar a 1 al bloque de Jordan $i \times i$ de autovalor 1.

  De esos p objetos, J_p es el único de dimensión nula.

  Por lo tanto los objetos simples de Ver_p son $L_i := \overline{J_i}, i = 1, 2, ..., p - 1$.
- para $p = 2$ hay un solo objeto simple y resulta que $\mathrm{Ver}_2 = \mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}$.

Veamos haciendo las cuentas, cuánto dan algunos productos tensoriales en Ver_p.

Sea $p = 3$, es decir que hay dos objetos simples: L_1 (que es la unidad) y L_2. ¿Cuánto da $L_2 \otimes L_2$? Para hacer esta cuenta, primero veremos cuánto da $J_2 \otimes J_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz de la derecha es semejante a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = J_1 \oplus J_3,$$

podemos decir que

$$L_2 \otimes L_2 = \overline{J_1 \oplus J_3} = L_1 \tag{5.1}$$

Veamos ahora $p = 5$. Hay 4 objetos simples L_1, L_2, L_3, L_4. Veamos cuánto dan algunos productos tensoriales:

$$L_2 \otimes L_2 = \overline{J_2 \otimes J_2} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \overline{J_1 \oplus J_3} = L_1 \oplus L_3.$$

$$L_2 \otimes L_3 = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$
$$= \overline{J_2 \oplus J_4} = L_2 \oplus L_4$$

Para facilitar algunas cuentas introducimos la **regla de Verlinde** o **regla truncada de Clebsch-Gordan**, la cual sirve para cualquier p y no probaremos:

$$L_m \otimes L_n = \bigoplus_{i=1}^{\min(m,n,p-m,p-n)} L_{|m-n|+2i-1}.$$

Con esta regla calculo los siguientes productos tensoriales para $p = 5$:

$$L_3 \otimes L_3 = L_1 \oplus L_3 = 1 + L_3, \tag{5.2}$$

$$L_3 \otimes L_4 = L_2,$$

$$L_4 \otimes L_4 = L_1 = 1.$$

5.1. La categoría de Verlinde para $p = 3$

Teorema 5.1.1. *La categoría Ver_3 es equivalente a la categoría sVec.*

Demostración. Lo esencial de esta prueba es ver que en Ver_3 haya dos objetos simples y que la trenza en ellos actúe como lo hace la trenza de sVec que mencionamos en (2.6).

Que solo hay dos objetos simples está claro y esos objetos son L_1 y L_2. Notar que en (5.1) ya vimos que $J_2 \otimes J_2 = J_1 + J_3$. Buscamos entender qué morfismo es $\overline{c} : L_2 \otimes L_2 \to L_2 \otimes L_2$, donde $\overline{c}$ es la semisimplificación de la trenza usual c de espacios vectoriales.

Fijemos $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$ base de $\mathbb{K}^2$ correspondiente a la primera copia de J_2, $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2\}$ base de $\mathbb{K}^2$ correspondiente a la segunda copia de J_2, y

$$\mathcal{B} = \{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2\}$$

y

$$\mathcal{B}' = \{f_1 \otimes e_1, f_1 \otimes e_2, f_2 \otimes e_1, f_2 \otimes e_2\}$$

las bases de $\mathbb{K}^4$ correspondientes a cada uno de los productos tensoriales.

Notar que $\mathcal{C}_1 = \{e_1 \otimes f_2 - e_2 \otimes f_1\}$ es base del subespacio que nos da la copia de J_1 en $J_2 \otimes J_2$, y que $\mathcal{C}_3 = \{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2 + e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2\}$ es base del subespacio que nos da la copia de J_3 en $J_2 \otimes J_2$.

Notar también que

$$[c]_{\{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_1' \cup \mathcal{C}_3'\}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{C}_1' = \{f_1 \otimes e_2 - f_2 \otimes e_1\}$ y $\mathcal{C}_3' = \{f_1 \otimes e_1, f_1 \otimes e_2 + f_2 \otimes e_1, f_2 \otimes e_2\}$.

Así $c = c_1 + c_3$ con $c_1 = -\mathrm{id}$ y $c_3 = \mathrm{id}$. Pero observar que cuando hacemos la semisimplificación, c_3 pasa a ser el morfismo nulo. Por lo tanto $\overline{c} = \overline{c_1} + 0 = -\mathrm{id}$, que es exactamente lo que necesitábamos probar. □

5.1.1. Un ejemplo en Ver_3

Estudiaremos un objeto de Ver_3 con el objetivo de hallar su descomposición en simples.

Miro a $\mathbb{K}\mathbb{S}_5$ como $\mathbb{Z}_3$-módulo con la siguiente acción:

$$g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$$

donde $\langle g = (123) \rangle = \mathbb{Z}_3$ y $\sigma \in \mathbb{S}_5$.

Escribamos a esta representación como suma de L_1 y L_2's. ¿Cómo es la matriz de esta representación en la base canónica de $\mathbb{K}\mathbb{S}_5$? (donde a los elementos los ordeno por tipo de ciclo). Como la conjugación mantiene el mismo tipo de ciclo, la matriz estará en forma de bloques. Como la cantidad de elementos en una órbita debe dividir al orden del grupo, en este caso nuestra matriz solo puede tener los bloques:

$$(1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que el segundo bloque corresponde al bloque de Jordan J_3 que va a desaparecer en la semisimplificación.

Notar que la cantidad de bloques (1) corresponde al orden del centralizador de (123) en $\mathbb{S}_5$ que es 6.

Por lo tanto nuestro objeto inicial es suma de 6 copias de L_1.

Este ejemplo que hemos desarrollado recién, se puede generalizar a Ver_p y $n \geqslant p$. Miro a $\mathbb{K}\mathbb{S}_n$ como $\mathbb{Z}_p$-módulo con acción:

$$g \cdot \sigma = g\sigma g^{-1}$$

donde $\langle g = (12...p)\rangle = \mathbb{Z}_p$ y $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Esta representación resulta ser suma de $(n-p)!p$ copias de L_1 por los mismos argumentos que ya mencionamos.

5.2. sVec como subcategoría de Ver_p

Ya vimos que Ver_3 es sVec. Ahora veremos lo que pasa para $p \geqslant 5$. Otra prueba de este resultado puede encontrarse en [Kan22].

Proposición 5.2.1. *L_1 y L_{p-1} generan una copia de sVec en Ver_p.*

Demostración. Proponemos que L_1 sea el simple par y que L_{p-1} sea el simple impar. Usando la regla de Verlinde se ve que $L_{p-1} \otimes L_{p-1} = L_1$. Ahora debemos ver cómo actúa la trenza en $L_{p-1} \otimes L_{p-1}$. Seguiremos un esquema de demostración muy similar al usado en el Teorema 5.1.1.

En [Kor19] se puede ver que:

$$J_{p-1} \otimes J_{p-1} = (p-2)J_p \oplus J_1.$$

Es muy importante notar que esta fórmula solo vale sobre un cuerpo de característica p que es justamente nuestro caso.

Así que nuevamente solo nos interesa saber qué hace la trenza c sobre la copia de J_1 ya que su complemento $(p-2)J_p$ será el objeto cero cuando hagamos la semisimplificación.

Notar que si $\mathcal{B}_1 = \{e_1, ..., e_{p-1}\}$ es la base de $\mathbb{K}^{p-1}$ correspondiente a la primera copia de J_{p-1}, $\mathcal{B}_2 = \{f_1, ..., f_{p-1}\}$ es la base de $\mathbb{K}^{p-1}$ correspondiente a la segunda copia de J_{p-1}, y

$$\mathcal{B} = \{e_1 \otimes f_1, ..., e_{p-1} \otimes f_{p-1}\}$$

y

$$\mathcal{B}' = \{f_1 \otimes e_1, ..., f_{p-1} \otimes e_{p-1}\}$$

las bases de $\mathbb{K}^{(p-1)^2}$ correspondientes a cada uno de los productos tensoriales, entonces

$$\mathcal{C} = \{\sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i-1} e_i \otimes f_{p-i}\}$$

es base del subespacio que genera la copia de J_1 en $J_{p-1} \otimes J_{p-1}$. Notar que c restringida a este subespacio es $-\mathrm{id}$. De esta forma tenemos que la trenza $\bar{c}$ es la de sVec. $\square$

5.3. Ver_p como contraejemplo al teorema de Deligne

Recordemos que el Teorema 3.1.1 pedía por hipótesis que el cuerpo fuera de característica cero. Mencionamos que para $p = 2, 3$ existen contraejemplos que no mencionaremos aquí y que para $p \geqslant 5, \mathrm{Ver}_p$ sirve de contraejemplo. A continuación vemos por qué para el caso $p = 5$ y $p = 7$. Para $p \geqslant 11$ se procede de forma similar.

Es claro que Ver_5 es de crecimiento moderado al ser la semisimplificación de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_5)$ con $\mathbb{K}$ un cuerpo de característica 5 (esto vale para p en general). Supongamos por el absurdo que existe

$$F : \mathrm{Ver}_5 \to \mathrm{sVec}_{\mathbb{K}}.$$

Recordar que en el Capítulo 5 presentamos la regla de Verlinde y calculamos en (5.2) que

$$L_3 \otimes L_3 = 1 + L_3$$

en Ver_5. Entonces

$$\dim(F(L_3 \otimes L_3)) = \dim(F(1 + L_3))$$

que es lo mismo que decir que

$$d^2 = 1 + d$$

(donde d es la dimensión como espacio vectorial de $F(L_3)$). Notar que d al ser la dimensión de un objeto en $\mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}$, debe ser un entero. Pero como la ecuación $x^2 = 1 + x$ no tiene solución sobre los enteros, hemos llegado a un absurdo y concluimos que Ver_5 no es super-Tannakiana.

Para Ver_7 nuevamente podemos decir que es de crecimiento moderado. Supongamos por el absurdo que existe

$$F : \mathrm{Ver}_7 \to \mathrm{sVec}_{\mathbb{K}}.$$

Por la regla de Verlinde tenemos que

$$L_5 \otimes L_5 = 1 + L_3$$

y

$$L_3 \otimes L_5 = L_3 + L_5$$

en Ver_7. Entonces

$$\dim(F(L_5 \otimes L_5)) = \dim(F(1 + L_3))$$

y

$$\dim(F(L_3 \otimes L_5)) = \dim(F(L_3 + L_5))$$

que es lo mismo que decir que

$$c^2 = 1 + d \tag{5.3}$$

$$dc = d + c \tag{5.4}$$

(donde d es la dimensión como espacio vectorial de $F(L_3)$ y c es la dimensión como espacio vectorial de $F(L_5)$). Notar que d y c al ser dimensiones de objetos en $\mathrm{Vec}_{\mathbb{K}}$, deben ser enteros no negativos. La ecuación (5.3) nos dice que $c \neq d$ y que $c \neq 0$, pues sino la ecuación no tendría solución. Por la ecuación (5.4) sabemos que $d = kc$ con $k \in \mathbb{N}$. Así que la ecuación (5.4) quedó

$$kc^2 = (k + 1)c,$$

entonces

$$c = \frac{k + 1}{k},$$

pero c es un natural lo cual implica que $k = 1$ es la única solución, lo cual era absurdo pues dijimos que $c \neq d$. Concluimos así que Ver_7 no es super-Tannakiana.

Se puede decir aún más sobre la categoría de Verlinde. No solo sucede que no admite funtor de fibra $F : \mathrm{Ver}_p \to \mathrm{sVec}_{\mathbb{K}}$, sino que Ver_p es una categoría incompresible. Esto significa que no admite un funtor de fibra a una categoría más pequeña, es decir que cualquier funtor tensorial $F : \mathrm{Ver}_p \to \mathcal{C}$ hacia otra categoría tensorial simétrica, debe ser pleno, fiel y una incrustación.

Capítulo 6

Álgebras de Hopf en la categoría de Verlinde

En este capítulo se expone el objetivo final de este trabajo: entender objetos distinguidos en la categoría de Verlinde. Lo plasmado a continuación usa de guía [Rad11], agregando cuentas y demostraciones para aplicar la teoría al contexto de categorías tensoriales.

6.1. Definiciones y ejemplos

Definición 6.1.1. Un **álgebra de Hopf** es una biálgebra $(H, \nabla, \eta, \Delta, \epsilon)$ sobre $\mathbb{K}$, que admite un mapa $\mathbb{K}$-lineal $S : H \to H$, al cual llamamos *antípoda*, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes\mathrm{id}"] & & H \otimes H \arrow[dr, "\nabla"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbb{K} \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes S"] & & H \otimes H \arrow[ur, "\nabla"'] &
\end{tikzcd}$$

Damos también una definición equivalente que es la que usa [Rad11]. Probar la equivalencia es sencillo, solo requiere usar la definición del producto de convolución.

Definición 6.1.2. Un **álgebra de Hopf** sobre $\mathbb{K}$ es una biálgebra H sobre $\mathbb{K}$, tal que el mapa identidad id_H tiene un inverso $S : H \to H$ en el álgebra de convolución $\mathrm{End}(H)$. En este caso a S se le dice una *antípoda* de H.

Ejemplo 6.1.3. Sean $H = \mathbb{K}[G], \nabla(g \otimes h) = gh, \eta(1) = 1e, \Delta(g) = g \otimes g, \epsilon(g) = 1$ y $S(g) = g^{-1}$ (donde $g \in G$ y e es la identidad del grupo), entonces $(H, \nabla, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ es un álgebra de Hopf.

Ejemplo 6.1.4. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Sea $H = T(V)$ el álgebra tensorial. Sean:

$$\begin{aligned}
\nabla \text{ la extensión del mapa } T^k(V) \otimes T^l(V) &\to T^{k+l}(V) \text{ a todo } T(V),\\
\eta(1) &= 1 \in T^0(V) = \mathbb{K},\\
\Delta(x) &= x \otimes 1 + 1 \otimes x \text{ para } x \in V \text{ y } \Delta(1) = 1 \otimes 1,\\
\epsilon(x) &= 0,\\
\text{y } S(x) &= -x, x \in V.
\end{aligned}$$

Entonces $(H, \nabla, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ es un álgebra de Hopf.

Definición 6.1.5. Sean H, H' álgebras de Hopf sobre $\mathbb{K}$ con antípodas S, S' respectivamente. Un **morfismo de álgebras de Hopf** $f : H \to H'$ es un morfismo de biálgebras f tal que $f \circ S = S' \circ f$.

Se puede probar que en realidad todo morfismo de biálgebras entre álgebras de Hopf es un morfismo de álgebras de Hopf.

6.2. Álgebras de Hopf en categorías trenzadas

Esta sección está motivada por el interés de saber si para una categoría trenzada $\mathcal{C}$ existe un objeto que tenga estructura de álgebra de Hopf. Nuestro enfoque estará en el caso $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_p)$ y $\mathcal{C} = \mathrm{Ver}_p$.

Definición 6.2.1. Sean $\mathcal{C}$ una categoría monoidal, $A \in \mathcal{C}$ un objeto y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Sean $m \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes A, A)$ y $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{K}, A)$. Decimos que (A, m, η) es un **álgebra en $\mathcal{C}$** si se satisface que

$$m \circ (m \otimes \mathrm{id}_A) = m \circ (\mathrm{id}_A \otimes m)$$

y

$$m \circ (\eta \otimes \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A = m \circ (\mathrm{id}_A \otimes \eta).$$

Definición 6.2.2. Sean $\mathcal{C}$ una categoría monoidal, $C \in \mathcal{C}$ un objeto y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Sean $\Delta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C \otimes C)$ y $\epsilon \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathbb{K})$. Decimos que (C, Δ, ϵ) es una **coálgebra en $\mathcal{C}$** si se satisface que

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta = (\mathrm{id}_C \otimes \Delta) \circ \Delta$$

y

$$(\epsilon \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta = \mathrm{id}_C = (\mathrm{id}_C \otimes \epsilon) \circ \Delta.$$

Definición 6.2.3. Sean $(A, m_A, \eta_A), (B, m_B, \eta_B)$ dos álgebras en $\mathcal{C}$. Decimos que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un morfismo de álgebras si

$$f \circ m_A = m_B \circ (f \otimes f)$$

y

$$f \circ \eta_A = \eta_B.$$

Definición 6.2.4. Sean $(C, \Delta_C, \epsilon_C), (D, \Delta_D, \epsilon_D)$ coálgebras en $\mathcal{C}$. Decimos que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ es un morfismo de coálgebras si

$$\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C$$

y

$$\epsilon_D \circ f = \epsilon_C.$$

Las definiciones que vienen a continuación son las de biálgebra y álgebra de Hopf. Para estos conceptos hará falta que la categoría sea monoidal trenzada, así que a partir de ahora $\mathcal{C}$ tendrá una trenza c.

Proposición 6.2.5. *Sean A y B dos álgebras en una categoría trenzada $\mathcal{C}$. Entonces*

$$(A \otimes B, (m_A \otimes m_B) \circ (id_A \otimes c_{B,A} \otimes id_B), \eta_A \otimes \eta_B)$$

es un álgebra en $\mathcal{C}$.

Proposición 6.2.6. *Sean C y D dos coálgebras en una categoría trenzada $\mathcal{C}$. Entonces*

$$(C \otimes D, (id_C \otimes c_{C,D} \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D), \epsilon_C \otimes \epsilon_D)$$

es una coálgebra en $\mathcal{C}$.

Definición 6.2.7. Sea H un objeto en una categoría trenzada $\mathcal{C}$ tal que (H, m, η) es un álgebra en $\mathcal{C}$ y (H, Δ, ϵ) es una coálgebra en $\mathcal{C}$. Decimos que $(H, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ es una biálgebra en $\mathcal{C}$ si Δ y ϵ son morfismos de álgebras.

En la definición que sigue cambiaremos la notación para coincidir con la usual notación de los libros: usaremos ∇ para referirnos a m.

Definición 6.2.8. Sea $(H, \nabla, \eta, \Delta, \epsilon)$ una biálgebra en una categoría trenzada $\mathcal{C}$. Si además existe $S \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H, H)$, llamado *antípoda*, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes \mathrm{id}"] & & H \otimes H \arrow[dr, "\nabla"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbb{K} \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes S"] & & H \otimes H \arrow[ur, "\nabla"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces diremos que $(H, \nabla, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ es un **álgebra de Hopf en $\mathcal{C}$**.

6.2.1. Ejemplos en $\mathbf{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_p)$

Ejemplo 1

Lema 6.2.9. *Sea $(H, \nabla, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ un álgebra de Hopf sobre $\mathbb{K}$. Sea $T : H \to H$ un morfismo de álgebras de Hopf tal que $T^p = id$. Entonces $(H, \nabla, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ es un álgebra de Hopf en $Rep_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_p)$ con la acción dada por $g^s \cdot x = T^s(x)$, donde $\mathbb{Z}_p = \langle g \rangle$.*

Demostración. Es claro que la acción está bien definida. Restaría ver que $\nabla, \eta, \Delta, \epsilon$ y S sean morfismos de representación. Sea $\rho : \mathbb{Z}_p \to \mathrm{Gl}(H), \rho(g^s)(x) = T^s(x)$.

* $\nabla : H \otimes H \to H$ cumple que si $x, y \in H$:

  $$(\nabla \circ (\rho \otimes \rho)(g^s))(x \otimes y) = \nabla \circ (T^s(x) \otimes T^s(y)) = T^s(\nabla(x \otimes y)) = (\rho(g^s) \circ \nabla)(x \otimes y),$$

  (donde la segunda igualdad se debe a que T es morfismo de álgebras), por lo tanto ∇ es morfismo de representación.

* $\eta : \mathbb{K} \to H$ cumple que:

  $$(\eta \circ \mathcal{E}(g^s))(1) = \eta(1) = T^s(\eta(1)) = (\rho(g^s) \circ \eta)(1),$$

  (donde $\mathcal{E}$ es la representación trivial y la segunda igualdad es porque T es morfismo de álgebras), por lo tanto η es un morfismo de representación.

* $\Delta : H \to H \otimes H$ cumple que si $x \in H$:

  $$(\Delta \circ \rho(g^s))(x) = \Delta(T^s(x)) = (T^s \otimes T^s)(\Delta(x)) = ((\rho \otimes \rho)(g^s) \circ \Delta)(x),$$

  (donde la segunda igualdad se debe a que T es morfismo de coálgebras), por lo tanto Δ es morfismo de representación.

* $\epsilon : H \to \mathbb{K}$ cumple que si $x \in H$:

  $$(\epsilon \circ \rho(g^s))(x) = \epsilon(T^s(x)) = \epsilon(x) = (\mathcal{E}(g^s) \circ \epsilon)(x),$$

  (donde $\mathcal{E}$ es la representación trivial y la segunda igualdad es porque T es morfismo de coálgebras), por lo tanto ϵ es un morfismo de representación.

* $S : H \to H$ cumple que si $x \in H$:

  $$(S \circ \rho(g^s))(x) = S(T^s(x)) = T^s(S(x)) = (\rho(g^s) \circ S)(x),$$

  (donde la segunda igualdad es porque T es morfismo de álgebras de Hopf), por lo tanto S es un morfismo de representación.

Así hemos obtenido lo deseado. □

Ahora volvamos al ejemplo de $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ como $\mathbb{Z}_p$-módulo de la sección anterior (visto luego de dar el caso particular de $n = 5, p = 3$) y apliquemos el lema de recién. Tomo $H = \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ (que ya sabemos que es álgebra de Hopf), y $T(x) = (12...p)x(12...p)^{-1}$. Si probamos que T es un morfismo de álgebras de Hopf concluiremos que H es un álgebra de Hopf en $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_p)$.

Proposición 6.2.10. *Sean $H = \mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ como $\mathbb{Z}_p$-módulo ($n \geqslant p$) y $T(x) = \sigma x \sigma^{-1}$ con $\sigma = (12...p)$. Entonces $T : H \to H$ es un morfismo de álgebras de Hopf.*

Demostración. * T es morfismo de álgebras pues si $g, h \in \mathbb{S}_n$:

$$T(gh) = \sigma gh\sigma^{-1} = \sigma g\sigma^{-1}\sigma h\sigma^{-1} = T(g)T(h),$$

$$T(\eta(k)) = \sigma\eta(k)\sigma^{-1} = \sigma(ke)\sigma^{-1} = ke = \eta(k)$$

(donde e es la identidad de $\mathbb{S}_n$ y $k \in \mathbb{K}$).

* T es morfismo de coálgebras pues si $g \in \mathbb{S}_n$:

$$\Delta(T(g)) = \Delta(\sigma g\sigma^{-1}) = \sigma g\sigma^{-1} \otimes \sigma g\sigma^{-1} = (T \otimes T)(\Delta(g)),$$

$$\epsilon(T(g)) = \epsilon(\sigma g\sigma^{-1}) = 1 = \epsilon(g).$$

Usando que basta con ver que T sea morfismo de biálgebras para que sea morfismo de álgebras de Hopf, tenemos probado lo que deseábamos. □

Por lo tanto hemos obtenido un primer ejemplo de álgebra de Hopf en $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_p)$.

Ejemplo 2

Ahora veamos un ejemplo más en el cual podemos aplicar el Lema 6.2.9. Sea H el álgebra libre generada por $\{x_1, x_2, g, g^{-1}\}$. Definimos los siguientes morfismos de álgebras:

$$\begin{aligned} \Delta : H &\to H \otimes H \\ x_1 &\mapsto x_1 \otimes 1 + g \otimes x_1 \\ x_2 &\mapsto x_2 \otimes 1 + g \otimes x_2 \\ g &\mapsto g \otimes g \\ g^{-1} &\mapsto g^{-1} \otimes g^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon : H &\to \mathbb{K} \\ x_1 &\mapsto 0 \\ x_2 &\mapsto 0 \\ g &\mapsto 1 \\ g^{-1} &\mapsto 1. \end{aligned}$$

Notar que se cumple que:

$$
\begin{aligned}
(\Delta \circ \mathrm{id}) \circ \Delta(x_i) &= (\Delta \circ \mathrm{id})(x_1 \otimes 1 + g \otimes x_1) \\
&= (x_1 \otimes 1 + g \otimes x_1) \otimes 1 + (g \otimes g) \otimes x_i \\
&= (x_1 \otimes 1) \otimes 1 + (g \otimes x_1) \otimes 1 + (g \otimes g) \otimes x_i \\
&= x_1 \otimes (1 \otimes 1) + g \otimes (x_1 \otimes 1) + g \otimes (g \otimes x_i) \\
&= x_1 \otimes (1 \otimes 1) + g \otimes (x_1 \otimes 1 + g \otimes x_i) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(x_1 \otimes 1 + g \otimes x_1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(x_i),
\end{aligned}
$$

$$
(\Delta \circ \mathrm{id}) \circ \Delta(g) = (\Delta \circ \mathrm{id})(g \otimes g) = (g \otimes g) \otimes g = g \otimes (g \otimes g) = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(g),
$$

$$
\begin{aligned}
(\epsilon \circ \mathrm{id}) \circ \Delta(x_i) &= (\epsilon \circ \mathrm{id})(x_1 \otimes 1 + g \otimes x_1) = (0 \otimes 1) + (1 \otimes x_i) \\
&= 1 \otimes x_i = (x_i \otimes 1) + (g \otimes 0) = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)(x_1 \otimes 1 + g \otimes x_1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta(x_i),
\end{aligned}
$$

$$
(\epsilon \circ \mathrm{id}) \circ \Delta(g) = (\epsilon \circ \mathrm{id})(g \otimes g) = 1 \otimes g = g \otimes 1 = (\mathrm{id} \circ \epsilon) \circ \Delta(g).
$$

Por lo tanto H tiene estructura de biálgebra.

Ahora cocientamos por el ideal

$$
\begin{aligned}
I = \langle g^p - 1, (g^{-1})^p - 1, gg^{-1} - 1, gx_1 - x_1 g, \\
gx_2 - (x_2 + x_1)g, x_2 x_1 - x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_1^2, x_i^p \rangle.
\end{aligned}
$$

Veamos que I es también un coideal (es decir que ϵ, Δ están bien definidos en el cociente H/I), para así tener que H/I es una biálgebra, analizando las siguientes cuentas.

Para ϵ las cuentas son triviales así que haremos solo las cuentas para Δ.

$$
\begin{aligned}
\Delta(g^p - 1) &= (g \otimes g)^p - (1 \otimes 1) = (g^p \otimes g^p) - (1 \otimes 1) - (1 \otimes g^p) + (1 \otimes g^p) \\
&= ((g^p - 1) \otimes g^p) + (1 \otimes (g^p - 1)) \in (I \otimes H) + (H \otimes I).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(gg^{-1} - 1) &= (gg^{-1} \otimes gg^{-1}) - (1 \otimes 1) - (gg^{-1} \otimes 1) + (gg^{-1} \otimes 1) \\
&= (gg^{-1} \otimes (gg^{-1} - 1)) + ((gg^{-1} - 1) \otimes 1) \in (H \otimes I) + (I \otimes H).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(gx_1 - x_1g) &= (gx_1 \otimes g) + (g^2 \otimes gx_1) - (x_1g \otimes g + g^2 \otimes x_1g)\\
&= ((gx_1 - x_1g) \otimes g) + (g^2 \otimes (gx_1 - x_1g))\\
&\in (I \otimes H) + (H \otimes I).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(gx_2 - (x_2 + x_1)g) &= (gx_2 \otimes g) + (g^2 \otimes gx_2) - (x_2g \otimes g + g^2 \otimes x_2g)\\
&\quad - (x_1g \otimes g + g^2 \otimes x_1g)\\
&= ((gx_2 - (x_2 + x_1)g) \otimes g) + (g^2 \otimes (gx_2 - (x_2 + x_1)g))\\
&\in (I \otimes H) + (H \otimes I).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(x_2x_1 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1^2) &= (x_2x_1 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1^2) \otimes 1 + g^2 \otimes (x_2x_1 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1^2)\\
&\quad + (gx_1 - x_1g) \otimes x_2 + x_2g \otimes x_1 - gx_2 \otimes x_1\\
&\quad + \frac{1}{2}(gx_1 \otimes x_1 + x_1g \otimes x_1)\\
&= i_1 \otimes 1 + g^2 \otimes i_2 + i_3 \otimes x_2 + \frac{1}{2}(gx_1 - x_1g) \otimes x_1\\
&\quad - (gx_2 - (x_2 + x_1)g) \otimes x_1\\
&\in (I \otimes H) + (H \otimes I)
\end{aligned}
$$

(donde $i_1, i_2, i_3 \in I$).

$$
\begin{aligned}
\Delta(x_1^p) &= (x_1 \otimes 1 + g \otimes x_1)^p\\
&= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (x_1 \otimes 1)^{p-i} (g \otimes x_1)^i\\
&= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (x_1^{p-i} \otimes 1)(g^i \otimes x_1^i)\\
&= (x_1^p \otimes 1) + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} (x_1^{p-i} g^i \otimes x_1^i) + (g^p \otimes x_1^p)\\
&= (x_1^p \otimes 1) + (g^p \otimes x_1^p)\\
&\in (I \otimes H) + (H \otimes I),
\end{aligned}
$$

donde la segunda igualdad se debe a que $x_1 \otimes 1$ y $g \otimes x_1$ conmutan.

La única cuenta que nos falta por ver es cuánto da $\Delta(x_2^p)$. Para esta cuenta no podemos usar el cálculo de arriba porque $x_2 \otimes 1$ y $g \otimes x_2$ no conmutan. Definiendo

$$
\begin{aligned}
q &= x_1 \otimes 1,\\
a &= x_2 \otimes 1,\\
b &= g \otimes x_2,
\end{aligned}
$$

se puede probar que la fórmula que vale es la siquiente:

$$\begin{aligned}\Delta(x_2^n) &= (x_2 \otimes 1 + g \otimes x_2)^n \\ &= (a+b)^n \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\sum_{j=0}^{n-2k} (-1)^k c_k^n \binom{n-2k}{j} b^{k+j} a^{n-2k-j} q^k,\end{aligned}$$

donde

$$c_k^n := \frac{n!}{k!(n-2k)!2^k}.$$

Poniendo $n = p$ nos quedará que $c_k^p\binom{p-k}{j}$ es un múltiplo de p para todo $(k,j) \neq (0,0),(0,p)$ por lo tanto $c_k^p\binom{p-k}{j} = 0$ (ya que el cuerpo es de característica p) para todo $(k,j) \neq (0,0),(0,p)$. Como el término $(k,j) = (0,0)$ de la sumatoria es a^p y el término $(k,j) = (0,p)$ de la sumatoria es b^p y

$$a^p + b^p \in (I \otimes H) + (H \otimes I)$$

podemos garantizar que

$$\Delta(x_2^p) \in (I \otimes H) + (H \otimes I).$$

Ahora que tenemos la biálgebra bien costruida, si seguimos la Definición 6.1.2 solo nos resta ver que $\mathrm{id}_{H/I}$ tenga inversa en el álgebra de convolución para definir la S como esa inversa y haber construido un álgebra de Hopf.

Para hacer esto enunciaremos una proposición que se puede encontrar en [Rad11] ligeramente diferente a como la escribiremos aquí.

Proposición 6.2.11. *Sean A una biálgebra sobre $\mathbb{K}$ y $f \in End(A)$. f tiene inversa en el álgebra de convolución $End(A)$ sí y solo sí la restricción $f|_{A_0}$ tiene inversa en el álgebra de convolución $End(A)$. Donde A_0 es el coradical de A (es decir A_0 es la suma de las subcoálgebras simples de A).*

Por como hemos ido construyendo H y H/I, y haciendo uso de [Rad11, Proposition 4.1.2], tenemos que $(H/I)_0$, el coradical de H/I, es la coálgebra de elementos de tipo grupo. Es decir que

$$H/I_0 = \mathbb{K}[G(H/I)] = \mathbb{K}[[g]].$$

Así que basta con hallar inversa en el álgebra de convolución para $\mathrm{id}|_{\mathbb{K}[[g]]}$. Lo cual es trabajo sencillo dado que

$$S([g]) = [g^{-1}]$$

funciona como tal inversa ya que:

$$(S * \mathrm{id})(g) = \nabla(S \otimes \mathrm{id})\Delta(g) = 1 = \eta \circ \epsilon(g),$$

(es necesario aquí recordar que $\eta \circ \epsilon$ es la unidad en el álgebra de convolución).

Entonces ahora sí H/I es un álgebra de Hopf.

Definimos $\psi : H/I \to H/I, \psi([x]) = [gxg^{-1}]$. Notar que $\psi^p = \mathrm{id}$ y ahora probaremos que ψ es un morfismo de biálgebras para así aplicar el Lema 6.2.9.

* ψ es un morfismo de álgebras pues:

$$\psi([ab]) = [gabg^{-1}] = [gag^{-1}][gbg^{-1}] = \psi([a])\psi([b])$$

* ψ es un morfismo de coálgebras pues:

$$\begin{aligned}\Delta \circ \psi([a]) &= \Delta([gabg^{-1}]) = \Delta[g]\Delta[a]\Delta[g^{-1}] = (g \otimes g)(a_{(1)} \otimes a_{(2)})(g^{-1} \otimes g^{-1}) \\ &= ga_{(1)}g^{-1} \otimes ga_{(2)}g^{-1} = (\psi \otimes \psi)(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) = (\psi \otimes \psi) \circ \Delta(a),\end{aligned}$$

(donde hemos usado la notación de Sweedler) y

$$\epsilon \circ \psi([a]) = \epsilon([gag^{-1}]) = \epsilon(a).$$

Así que hemos obtenido otro objeto de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_p)$ que es álgebra de Hopf.

6.2.2. Ejemplos en $\mathbf{Ver}_p$

Lema 6.2.12. *Sea H un álgebra de Hopf en $Rep_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_p)$, entonces $\overline{H}$ es un álgebra de Hopf en Ver_p.*

Usando este lema podemos decir que los dos ejemplos de álgebras de Hopf que vimos para $\mathrm{Rep}_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z}_p)$, son ejemplos de álgebras de Hopf en Ver_p. Al ejemplo de $\mathbb{K}[\mathbb{S}_n]$ como $\mathbb{Z}_p$-módulo ya lo estudiamos en detalle en la sección anterior. Ahora pasaremos a estudiar en detalle el otro ejemplo pero visto como objeto de Ver_3.

Observación 6.2.13. Los subespacios

$$H_0 = \{1, g, ..., g^{p-1}\},$$

$$H_n = \langle x_1^i x_2^j, x_1^i x_2^j g, x_1^i x_2^j g^2, ..., x_1^i x_2^j g^{p-1} / i + j = n, \quad i, j \leqslant p-1 \rangle, \quad n = 1, 2, ..., 2(p-1)$$

son $\mathbb{Z}_p$-invariantes pues: si $x_1^i x_2^j g^c$ con $i + j = n$ y $c = 0, 1, ..., p-1$ entonces

$$gx_1^i x_2^j g^c g^{-1} = \psi(x_1^i x_2^j g^c) = \psi(x_1^i)\psi(x_2^j)\psi(g^c) = x_1^i \psi(x_2)^j g^c = x_1^i (x_2 + x_1)^j g^c.$$

Usando las relaciones por las que estamos cocientando tenemos que $(x_2 + x_1)^j$ será suma términos de la forma $x_1^j, x_2^j, x_1^{k_1} x_2^{k_2}$, con $k_1 + k_2 = j$. Así $x_1^i (x_2 + x_1)^j g^c \in H_n$.

¿Cómo será la descomposición en simples de H/I vista como objeto de $\mathbf{Ver}_p$? Lo veamos para $p = 3$. A partir de ahora no pondremos [.] aunque haremos cuentas en la biálgebra cociente. Escribamos la matriz de esta representación en la base

$$\mathcal{B} = \{1, g, g^2, x_1, x_1g, x_1g^2, x_2, x_2g, x_2g^2, x_1^2, x_1^2g, x_1^2g^2, x_2^2, x_2^2g, x_2^2g^2, x_1x_2, x_1x_2g, \\ x_1x_2g^2, x_1^2x_2, x_1^2x_2g, x_1^2x_2g^2, x_1x_2^2, x_1x_2^2g, x_1x_2^2g^2, x_1^2x_2^2, x_1^2x_2^2g, x_1^2x_2^2g^2\}$$

de H/I.

Observación 6.2.14. Algunas de las cuentas auxiliares que usaremos para el cálculo de la matriz son:

$$\begin{aligned}
gx_1g^{-1} &= x_1,\\
gx_2g^{-1} &= x_1 + x_2,\\
gx_2^2g^{-1} &= x_2^2 + (1/2)x_1^2 + 2x_1x_2,\\
gx_1x_2g^{-1} &= x_1^2 + x_1x_2,\\
gx_1^2x_2g^{-1} &= x_1^2x_2,\\
gx_1x_2^2g^{-1} &= x_1x_2^2 + 2x_1^2x_2,\\
gx_1^2x_2^2g^{-1} &= x_1^2x_2^2.
\end{aligned}$$

Por la Observación 6.2.13 para el caso $p = 3$ sabemos que la matriz será en bloques. El bloque correspondiente a H_0 es la identidad así que son 3 copias de L_1. El bloque correspondiente a H_1 es

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

que son 3 copias de L_2. El bloque correspondiente a H_2 es

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

que son 3 copias de L_3. El bloque correspondiente a H_3 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que son 3 copias de L_2. Por último el bloque correspondiente a H_4 es la identidad que son 3 copias de L_1. Así nos quedó que $\overline{H/I} = 6L_1 \oplus 6L_2$ en Ver_3.

Planteada esta álgebra de Hopf en Ver_3, nos suurge una última pregunta ¿será esta una álgebra conmutativa? Con esta pregunta nos referimos a saber si $\overline{m} \circ \overline{c} = \overline{m}$, donde m es la múltiplicación del álgebra. La respuesta es **sí** y lo veremos en la siguiente proposición.

Proposición 6.2.15. *Sea $\overline{H/I} \in \mathit{Ver}_3$ el álgebra de Hopf definida arriba. Entonces $\overline{m} \circ \overline{c} = \overline{m}$, es decir $m \circ c - m$ es un morfismo negligible.*

Demostración. Veamos que $m \circ c - m \in \mathcal{N}(H/I \otimes H/I, H/I)$.

Teníamos que $H/I = 6L_1 \oplus 6L_2 \oplus 3L_3$. Entonces

$$\begin{aligned} H/I \otimes H/I = &(6L_1 \otimes 6L_1) \oplus (6L_1 \otimes 6L_2) \oplus (6L_1 \otimes 3L_3) \oplus \\ &(6L_2 \otimes 6L_1) \oplus (6L_2 \otimes 6L_2) \oplus (6L_2 \otimes 3L_3) \oplus \\ &(3L_3 \otimes 6L_1) \oplus (3L_3 \otimes 6L_2) \oplus (3L_3 \otimes 3L_3). \end{aligned}$$

Lo que haremos será estudiar $m \circ c - m$ restringida a cada uno de estos sumandos, ver que esa función sea negligible y aplicar el Lema 4.2.6.

Arrancamos notando que $m \circ c - m$ restringida a los sumandos

$$6L_1 \otimes 3L_3 \text{ y } 3L_3 \otimes 6L_1,$$

tiene su imágen en una copia de L_3 que es un objeto de dimensión nula, entonces por el Lema 4.2.6 estos dos morfismos serán negligibles.

Ahora veamos $m \circ c - m$ restringida a los sumandos

$$6L_2 \otimes 3L_3 = 36L_3 \text{ y } 3L_3 \otimes 3L_3 = 27L_3,$$

y notemos que estos serían morfismos que salen de L_3 y tienen su imagen en L_2 y L_1 respectivamente, así que no pueden ser isomorfismos porque la salida es de dimensión 9 y la llegada tiene dimensión 12 y 6 respectivamente. Aplicando Lema 4.2.6, tenemos que son morfismos negligibles.

Analicemos ahora $m \circ c - m$ restringida al sumando

$$6L_1 \otimes 6L_1,$$

veamos que es el morfismo nulo y por lo tanto negligible. Los elementos de $L_1 \otimes L_1$ son de la forma

$$x_1^a x_2^b g^c \otimes x_1^u x_2^v g^w$$

con $(a,b),(u,v) = (0,0)$ o $(2,2)$ y $c,w = 0,1,2$. Tenemos que

$$(m \circ c - m)(x_1^a x_2^b g^c \otimes x_1^u x_2^v g^w) = x_1^u x_2^v g^w x_1^a x_2^b g^c - x_1^a x_2^b g^c x_1^u x_2^v g^w. \tag{6.1}$$

Si $a+b+u+v=0$ entonces 6.1 es claramente cero. Si $a+b+u+v=8$, entonces al reordenar usando las relaciones por las que cocientamos, necesariamente tendremos algún x_i^3 lo cual hace que 6.1 sea cero. Si $a+b+u+v=4$ (vamos a suponer sin pérdida de generalidad que $(a,b)=(0,0)$ y $(u,v)=(2,2)$) entonces

- Si $c=0$ entonces la cuenta es directa y da cero.
- Si $c=1$ entonces

$$\begin{aligned}(6.1) &= x_1^2 x_2^2 g^{w+1} - g x_1^2 x_2^2 g^w \\ &= x_1^2 x_2^2 g^{w+1} - x_1^2 (x_2 + x_1)^2 g^{w+1} \\ &= x_1^2 x_2^2 g^{w+1} - x_1^2 x_2^2 g^{w+1} - x_1^2 (x_1 x_2 + x_2 x_1 + x_1^2) g^{w+1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

- Si $c=2$ la cuenta es similar a la del caso $c=1$ y también nos da cero.

Ahora analicemos $m \circ c - m$ restringida al sumando $6L_1 \otimes 6L_2$. Como bases de las 6 copias L_1 tomo

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{1,1} &= \{1\}, \\ \mathcal{B}_{1,2} &= \{g\}, \\ \mathcal{B}_{1,3} &= \{g^2\}, \\ \mathcal{B}_{1,4} &= \{x_1^2 x_2^2\}, \\ \mathcal{B}_{1,5} &= \{x_1^2 x_2^2 g\}, \\ \mathcal{B}_{1,6} &= \{x_1^2 x_2^2 g^2\}.\end{aligned}$$

Como bases de las 6 copias de L_2 tomo

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{2,1} &= \{x_2, x_1\}, \\ \mathcal{B}_{2,2} &= \{x_2 g, x_1 g\}, \\ \mathcal{B}_{2,3} &= \{x_2 g^2, x_1 g^2\}, \\ \mathcal{B}_{2,4} &= \{x_1 x_2^2, 2x_1^2 x_2\}, \\ \mathcal{B}_{2,5} &= \{x_1 x_2^2 g, 2x_1^2 x_2 g\}, \\ \mathcal{B}_{2,6} &= \{x_1 x_2^2 g^2, 2x_1^2 x_2 g^2\}.\end{aligned}$$

Notar que

$$[m \circ c - m]_{\mathcal{B}_{1,k} \otimes \mathcal{B}_{2,j}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para $k = 4, 5, 6$ y $j = 1, ..., 6$ (se debe a que $x_i^3 = 0$ para $i = 1, 2$).

También haciendo las cuentas se ve que

$$[m \circ c - m]_{\mathcal{B}_{1,k} \otimes \mathcal{B}_{2,j}} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

para $k = 1, 2, 3$ y $j = 1, ..., 6$. Por lo tanto no son isomorfismos y aplicando Lema 4.2.6, tenemos que son morfismos negligibles.

Por último veamos $m \circ c - m$ restringida al sumando $6L_2 \otimes 6L_2$. Haremos una sola de las cuentas y las demás salen de forma similar. Calculemos $L_2 \otimes L_2$ donde estos L_2 son los de las bases $\mathcal{B}_{2,1}$ y $\mathcal{B}_{2,4}$. Sabemos que $L_2 \otimes L_2 = L_1 \oplus L_3$. Como L_3 será cero en la semisimplificación, solo nos interesa saber qué pasa con la copia del L_1. Notar que como base de esta copia de L_1 se puede tomar

$$\mathcal{B} = \{(x_2 \otimes 2x_1^2 x_2) - (x_1 \otimes x_1 x_2^2)\},$$

y sucede que

$$\begin{aligned} (m - m \circ c)((x_2 \otimes 2x_1^2 x_2) - (x_1 \otimes x_1 x_2^2)) = \\ 2x_2 x_1^2 x_2 - 2x_1^2 x_2^2 - x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^2 x_2 = \\ 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $[m \circ c - m]_{\mathcal{B}} = (0)$, que es negligible. $\square$

Bibliografía

[AKauadPO02] Y. André, B. Kahn, and avec un appendice de Peter O'Sullivan, *Nilpotence, radicaux et structures monoïdales*, 2002.

[BEO23] D. Benson, P. Etingof, and V. Ostrik, *New incompressible symmetric tensor categories in positive characteristic*, Duke Mathematical Journal **172** (2023), no. 1, 105 –200.

[CEO23] K. Coulembier, P. Etingof, and V. Ostrik, *On Frobenius exact symmetric tensor categories*, Ann. of Math. (2) **197** (2023), no. 3, 1235–1279. With Appendix A by Alexander Kleshchev. MR4564264

[Del02] P. Deligne, *Catégories tensorielles*, Mosc. Math. J. **2** (2002), no. 2, 227–248. MR1944506

[Del07] ———, *The category of representations of the symmetric group S_t when t is not a natural number.*, Algebraic groups and homogeneous spaces. proceedings of the international colloquium, mumbai, india, january 6–14, 2004, 2007, pp. 209–273 (French).

[EGNO15] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik, *Tensor categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 205, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. MR3242743

[EK21] P. Etingof and A. Kannan, *Lectures on symmetric tensor categories*, arXiv preprint arXiv:2103.04878 [math.GT] (2021).

[EO22] P. Etingof and V. Ostrik, *On semisimplification of tensor categories*, Representation theory and algebraic geometry—a conference celebrating the birthdays of Sasha Beilinson and Victor Ginzburg, 2022, pp. 3–35. MR4486913

[GK92] S. Gelfand and D. Kazhdan, *Examples of tensor categories*, Invent. Math. **109** (1992), no. 3, 595–617. MR1176207

[GM92] G. Georgiev and O. Mathieu, *Catégorie de fusion pour les groupes de Chevalley*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **315** (1992), no. 6, 659–662. MR1183798

[Kan22] A. Kannan, *New constructions of exceptional simple Lie superalgebras in low characteristic via tensor categories*, Transform. Groups (2022).

[Kor19] M. Korhonen, *Jordan blocks of unipotent elements in some irreducible representations of classical groups in good characteristic*, Proceedings of the American Mathematical Society **147** (June 2019), no. 10, 4205–4219.

[Mar14] A. Martsinkovsky, *On direct summands of homological functors on length categories*, 2014.

[Ost20] V. Ostrik, *On symmetric fusion categories in positive characteristic*, Selecta Math. (N.S.) **26** (2020), no. 3, Paper No. 36, 19. MR4110722

[Rad11] D. E. Radford, *Hopf algebras*, K & E series on knots and everything, World Scientific, 2011.