

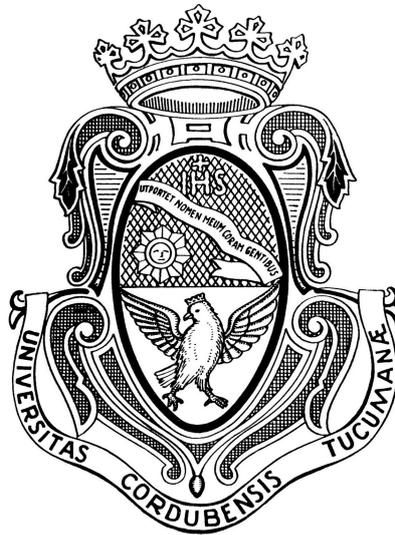
TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

---

**PROBLEMAS DE RIEMANN-HILBERT PARA  
POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES Y  
FUNCIONES DE SZEGÖ**

---

*Camila Aagaard*



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

*Director: Pablo Manuel Román*

CÓRDOBA - ARGENTINA  
MARZO 2024



Esta obra se distribuye bajo una licencia Creative Commons  
Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

## RESUMEN

La caracterización de toda familia de polinomios ortogonales matriciales en un intervalo de la recta real en términos de un problema de Riemann-Hilbert es una herramienta poderosa para el análisis asintótico de estas familias. Una pieza fundamental en este análisis es la llamada función de Szegő matricial que está caracterizada como la solución de un problema de frontera en el plano complejo. Esta función de Szegő matricial está íntimamente relacionada con la factorización de Wiener-Hopf de la medida de ortogonalidad de los polinomios ortogonales. En este trabajo estudiamos esta factorización de Wiener-Hopf y construcciones explícitas de ella para familias específicas y relevantes de polinomios ortogonales matriciales.

## ABSTRACT

The characterization of any family of matrix valued orthogonal polynomials on an interval of the real line in terms of a Riemann-Hilbert problem is a powerful tool for the asymptotic analysis of these families. A fundamental piece in this analysis is the so-called matrix Szegő function, which is characterized as the solution of a boundary problem in the complex plane. This matrix Szegő function is closely related to the Wiener-Hopf factorization of the orthogonality measure of the orthogonal polynomials. In this work, we study this Wiener-Hopf factorization and explicit constructions of it for specific and relevant families of matrix orthogonal polynomials.

**PALABRAS CLAVE:** Polinomios ortogonales matriciales - Problemas de Riemann-Hilbert - Función de Szegő matricial - Factorización de Wiener-Hopf.

**KEYWORDS:** Matrix valued orthogonal polynomials - Riemann-Hilbert problems - Matrix Szegő function - Wiener-Hopf factorization.

### CLASIFICACIÓN/CLASSIFICATION (MSC2020):

- 33D45: Basic orthogonal polynomials and functions.
- 30E25: Boundary value problems in the complex plane.
- 47A68: Factorization theory (including Wiener-Hopf and spectral factorizations) of linear operators.

## AGRADECIMIENTOS

*Primero, agradecer y destacar a las personas más importantes de mi vida: mi familia. Estoy donde estoy hoy por el amor y apoyo incondicional brindado por ustedes en cada momento de mi vida. Gracias por todos los abrazos, palabras de aliento y comidas que me sostuvieron durante toda la carrera. Me ayudaron y confiaron en mí cuando más lo necesitaba, podemos compartir mi título entre los cuatro.*

*A mis amigas de la vida, Martina y Sofia. Por sobrevivir el secundario juntas y todas nuestras charlas, abrazos y paseos en auto a las tres de la mañana que tanto me ayudaron a despejarme de la facultad. En particular, gracias por la paciencia que me tuvieron cada vez que no podíamos juntarnos porque tenía que estudiar para un final (perdón).*

*A todos los amigos nuevos que encontré en la facultad a lo largo de los años. No podría haber elegido mejores personas con las cuales sufrir (incluso hasta disfrutar a veces) el día a día en la facultad. En particular, agradecer a Maria y Agustina; no hubiese podido terminar la carrera sin su ayuda y motivación eterna.*

*A todos los profesores que tuve en FaMAF por inspirar el amor por la matemática que tengo hoy. Su calidad como docentes y también humana es incalculable. Además, agradecer a Alfredo Deaño por sus aportes a este trabajo y predisposición durante su visita a nuestra facultad en el año 2023, y con quien espero poder continuar trabajando en un futuro.*

*A mi director, Pablo Román, por su entusiasmo, consejos y tantísima paciencia desde mi primer día de clases en la facultad. Gracias por tu incesante optimismo y positividad en todo momento y por supuesto también por todas las charlas que terminaron de convencerme de cambiarme a Matemática cuando estaba en primer año!*

*Por último, agradecer a la Universidad Nacional de Córdoba por la gran oportunidad que me ha dado para desarrollarme no solo académicamente, sino también en lo personal.*



---

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Polinomios ortogonales</b>	<b>3</b>
1.1 Polinomios ortogonales con respecto a una medida . . . . .	4
1.2 Propiedad fundamental de los polinomios ortogonales . . . . .	6
1.3 Polinomios ortogonales clásicos . . . . .	9
<b>2 Polinomios ortogonales matriciales</b>	<b>11</b>
2.1 Productos internos matriciales . . . . .	11
2.2 Polinomios ortogonales matriciales . . . . .	13
2.3 Medidas matriciales y ortogonalidad . . . . .	17
2.3.1 Medidas matriciales . . . . .	17
2.3.2 Productos internos asociados a medidas matriciales . . . . .	19
2.3.3 El teorema de Favard . . . . .	20
2.4 Álgebras de Fourier . . . . .	23
2.4.1 Operadores diferenciales y en diferencias . . . . .	23
2.4.2 Álgebras de Fourier . . . . .	25
2.4.3 El espacio $\mathcal{F}_R^{(m;k,\ell)}(P)$ . . . . .	28
<b>3 Problemas de Riemann-Hilbert</b>	<b>36</b>
3.1 Problemas aditivos . . . . .	37
3.1.1 Fórmulas de Sokhotski–Plemelj y solución del problema aditivo . . . . .	37
3.1.2 Relación con el problema multiplicativo . . . . .	39
3.2 Problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales . . . . .	40
3.2.1 Solución y unicidad . . . . .	41
3.2.2 Aplicaciones del problema de Riemann-Hilbert . . . . .	44
<b>4 La factorización de Wiener-Hopf</b>	<b>49</b>
4.1 La función de Szegő matricial . . . . .	49
4.2 Una factorización escalar . . . . .	53
4.3 La factorización de Wiener-Hopf matricial . . . . .	60
4.4 Una construcción explícita para polinomios matriciales . . . . .	70
<b>5 Otra factorización para funciones matriciales</b>	<b>80</b>
5.1 Las factorizaciones a izquierda y a derecha . . . . .	80
5.1.1 Unicidad de la factorización . . . . .	82
5.2 Una construcción explícita para funciones racionales . . . . .	83
5.3 Relación con la factorización de Wiener-Hopf . . . . .	90

---

# INTRODUCCIÓN

---

Existe relación estrecha entre el análisis armónico, la teoría de funciones especiales y su aplicación en diversos campos de la física, la física matemática, los sistemas integrables y los procesos estocásticos. Un ejemplo bien conocido son las series y transformadas de Fourier en donde las funciones se descomponen en funciones elementales como las funciones trigonométricas y las funciones exponenciales. Muchas generalizaciones importantes de estos conceptos involucran funciones especiales como polinomios ortogonales o funciones hipergeométricas.

Una herramienta que ha atraído mucha atención en los últimos años para tratar problemas relacionados con funciones especiales es la caracterización de algunas de estas en términos de un problema de Riemann-Hilbert. En este contexto, dada una curva orientada  $\Gamma$ , un problema de Riemann-Hilbert consiste en encontrar una función matricial  $F$  analítica en  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  tal que sus valores frontera  $F_+$  y  $F_-$  sobre  $\Gamma$  están relacionados por una función conocida que llamamos función de salto. Para tener una solución única a este problema, es necesario imponer una normalización para  $F$  en algún punto, que usualmente se toma como el punto en infinito de la esfera de Riemann.

Si consideramos el problema escalar, la función  $F$  toma valores en el plano complejo y el problema de Riemann-Hilbert se puede resolver en términos de una integral de contorno que involucra la función de salto. Su solución se reduce, esencialmente, a la fórmula de Sokhotski–Plemelj.

El problema de existencia y unicidad de soluciones del problema de Riemann-Hilbert para dimensiones arbitrarias es mucho más complejo y, en general, no es posible encontrar una solución explícita en términos de integrales de contorno. Sin embargo, en varios casos, es posible realizar una serie de transformaciones que deforman el problema original en un problema que puede resolverse explícitamente. Al revertir estas transformaciones se puede obtener información del problema original a partir de la solución del problema deformado. Este método fue introducido por Deift y Zhou [10], [11] y se conoce como el método de steepest descent para problemas de Riemann-Hilbert.

Muchos problemas en la matemática y física matemática se pueden escribir en términos de un problema de Riemann-Hilbert. Una de estas reformulaciones, de enorme importancia, fue introducida por Fokas, Its y Kitaev [16] y consiste en la caracterización de toda familia de polinomios ortogonales sobre la recta real como la única solución de un problema de Riemann-Hilbert matricial de dimensión  $2 \times 2$ . Esta caracterización, en combinación con el método de steepest descent, ha permitido el estudio analítico de numerosos problemas, ver por ejemplo [9], [25].

Un caso paradigmático es el desarrollo asintótico de polinomios ortogonales con respecto a una medida con soporte en el intervalo  $[-1, 1]$  a través de la técnica de Riemann-Hilbert, el cual se realiza en detalle en [26]. En tal trabajo, el comportamiento global de los polinomios ortogonales está regido por la llamada función de Szegő, que puede describirse explícitamente mediante una expresión que involucra una integral sobre el intervalo  $[-1, 1]$  y la medida de ortogonalidad. Esta función, a su vez, está caracterizada por un problema de Riemann-Hilbert escalar particular.

En los últimos años, han surgido distintas extensiones del problema de Riemann-Hilbert para los polinomios ortogonales, como por ejemplo las formulaciones para polinomios ortogonales múltiples y polinomios ortogonales matriciales. En [8] se desarrolló el análisis de steepest descent para familias de polinomios ortogonales matriciales de dimensión arbitraria con respecto a un peso  $W$  definido positivo sobre el intervalo  $[-1, 1]$ . Como en el caso escalar, el comportamiento global de los polinomios ortogonales está gobernado por la llamada función de Szegő matricial. Para un peso arbitrario, a diferencia del caso escalar, esta función no tiene una expresión simple en términos de integrales de contorno. En cambio, está caracterizada por un problema de Riemann-Hilbert matricial. La solución de este problema está íntimamente relacionada con la llamada factorización de Wiener-Hopf del peso  $W$ .

La función de Szegő matricial y la factorización de Wiener-Hopf son los principales objetos de estudio de este trabajo que se encuentra organizado de la siguiente manera:

- En el Capítulo 1 se introduce la teoría básica de sucesiones de polinomios ortogonales: su definición, condiciones de existencia y una propiedad fundamental de las mismas (la relación de recurrencia de tres términos). También detallaremos algunas propiedades de los llamados polinomios ortogonales clásicos.
- En el Capítulo 2 extenderemos la teoría desarrollada para polinomios ortogonales escalares al caso matricial. También estudiaremos las llamadas álgebras de Fourier que surgieron en [4] para estudiar problema matricial de Bochner que busca caracterizar todas las medidas matriciales cuyas sucesiones de polinomios ortogonales matriciales asociadas son autofunciones de un operador diferencial simétrico de segundo orden.
- En el Capítulo 3 se presentarán los problemas de Riemann-Hilbert. Se describirán los problemas escalares (aditivos) y también la caracterización de los polinomios ortogonales sobre la recta real dada por Fokas, Its y Kitaev [16]. Además, se verán algunas aplicaciones de esta caracterización.
- En el Capítulo 4 nos enfocaremos en la factorización Wiener-Hopf de una función matricial que fue introducida por Wiener y Masani [29]. Demostraremos la existencia de esta factorización y, por otro lado, una forma constructiva de obtenerla en el caso de tener un polinomio de Laurent matricial que fue presentada por Ephremidze [14]. También veremos la relación estrecha de la factorización Wiener-Hopf con la función de Szegő matricial.
- En el Capítulo 5 daremos otra posible factorización de funciones matriciales definidas sobre curvas en el plano complejo y una construcción explícita de la misma en el caso de tener funciones matriciales con entradas racionales que fue presentada por Gohberg, Kaashoek y Spitkovsky [17]. También veremos cómo esta factorización se relaciona con la factorización de Wiener-Hopf.

# CAPÍTULO 1

---

## POLINOMIOS ORTOGONALES

---

En este capítulo vamos a desarrollar la teoría básica de los polinomios ortogonales y algunas de sus propiedades. También se presentan los llamados *polinomios ortogonales clásicos* y algunas caracterizaciones de las mismas.

Consideremos  $\mathbb{C}[x]$  el espacio de polinomios con coeficientes complejos junto con un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . A partir de esto, podemos comenzar definiendo una sucesión de polinomios ortogonales:

**Definición 1.0.1.** Una *sucesión de polinomios ortogonales* con respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una sucesión  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  en  $\mathbb{C}[x]$  tal que:

1.  $\deg(p_n) = n$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ .
2.  $\langle p_n, p_m \rangle = \delta_{n,m} h_n$  donde  $h_n > 0$ .

Si  $h_n = 1$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  se dice que es una *sucesión de polinomios ortonormales* y en el caso en que el coeficiente director de cada  $p_n$  es igual a 1, la sucesión será llamada *mónica*.

Notemos que, tomando un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $\mathbb{C}[x]$  y aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base de monomios  $\{1, x, x^2, \dots\}$  siempre es posible obtener una sucesión de polinomios ortogonales  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

**Observación 1.0.2.** Dada una sucesión  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  en  $\mathbb{C}[x]$  arbitraria tal que  $\deg(q_n) = n$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , es trivial verificar que todo polinomio  $q \in \mathbb{C}[x]$  de grado  $m$  se escribe de forma única como

$$q(x) = \sum_{k=0}^m a_k q_k(x),$$

para ciertos  $a_k \in \mathbb{C}$ . Por lo tanto, tenemos que la sucesión  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es base de  $\mathbb{C}[x]$ .

## 1.1. Polinomios ortogonales con respecto a una medida

En esta sección vamos a construir un producto interno asociado a una medida  $\mu$  y a partir de este producto interno obtener una sucesión de polinomios ortogonales que resulta única. También se presenta una construcción explícita de las mismas.

Para esto, tomamos  $\mu$  una medida de Borel positiva sobre  $\mathbb{R}$  tal que:

- $\mu$  tiene momentos finitos de todo orden, es decir:

$$\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

donde  $\mu_n$  es llamado el  $n$ -ésimo momento de  $\mu$ .

- $\mu$  es de soporte infinito, es decir:

$$\mu(x_0 - \delta, x_0 + \delta) > 0,$$

para infinitos  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Ahora, dados  $p, q \in \mathbb{C}[x]$ , definamos:

$$\langle p, q \rangle := \int_{\mathbb{R}} p(x) \overline{q(x)} d\mu(x). \quad (1.1)$$

Esto efectivamente define un producto interno en  $\mathbb{C}[x]$  pues la linealidad y simetría conjugada son triviales y el hecho de que  $\mu$  tiene infinitos puntos en su soporte implica que

$$\langle p, p \rangle = \int_{\mathbb{R}} |p(x)|^2 d\mu(x) > 0,$$

para cada  $p \in \mathbb{C}[x]$  no nulo.

Ahora, considerando los momentos  $\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$  de  $\mu$ , podemos definir

$$D_n := \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Luego,  $D_n$  es simétrica e induce una forma cuadrática definida sobre  $\mathbb{R}^n$ :

$$q(x_1, \dots, x_n) = q(x) = x D_n x^T = \sum_{i,j=0}^n \mu_{i+j} x_i x_j.$$

Más aún,  $q$  es definida positiva pues dado  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \neq 0$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , tenemos que

$$0 < \langle p, p \rangle = \int_{\mathbb{R}} p(x)^2 d\mu(x) = \sum_{i,j=0}^n \int_{\mathbb{R}} a_i a_j x^{i+j} d\mu(x) = q(a_1, \dots, a_n).$$

Es decir,  $q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ .

Luego, por el Criterio de Sylvester [22, Capítulo 9 - Teorema 6], tendremos que los menores principales de  $D_n$  son positivos. En particular,  $\det(D_n) > 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Teorema 1.1.1.** *Sea  $\mu$  una medida de Borel positiva sobre  $\mathbb{R}$  con momentos finitos de todo orden y soporte infinito, entonces existe una única sucesión de polinomios ortogonales mónicos  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  con respecto al producto interno dado en (1.1).*

*Demostración:*

Los polinomios  $p_n$  se construyen de manera recursiva: sea  $p_0(x) = 1$  y supongamos que tenemos polinomios mónicos  $p_0, p_1, \dots, p_N$  con  $\deg(p_k) = k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , tales que

$$\langle p_n, p_m \rangle = \int_{\mathbb{R}} p_n(x) \overline{p_m(x)} d\mu(x) = \delta_{n,m} h_n, \quad n, m \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Luego, definimos  $p_{N+1}(x) = x^{N+1} + \sum_{k=0}^N c_k x^k$  que es polinomio mónico de grado  $N + 1$  donde los coeficientes  $c_0, c_1, \dots, c_N$  son a determinar. Notemos que

$$\langle p_{N+1}, x^m \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left( x^{N+1} + \sum_{k=0}^N c_k x^k \right) x^m d\mu(x) = \mu_{m+N+1} + \sum_{k=0}^N c_k \mu_{k+m}.$$

Queremos que  $\langle p_{N+1}, p_m \rangle = 0$  para  $m \leq N$  y esto es equivalente a que  $\langle p_{N+1}, x^m \rangle = 0$  para  $m \leq N$ . Es decir, los coeficientes  $c_0, c_1, \dots, c_N$  pueden ser determinados por el sistema de ecuaciones:

$$\sum_{k=0}^N c_k \mu_{k+m} = -\mu_{m+N+1} \quad \text{para } m = 0, 1, \dots, N.$$

En otras palabras

$$D_N \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mu_{N+1} \\ \mu_{N+2} \\ \vdots \\ \mu_{2N} \end{pmatrix}.$$

Por lo visto anteriormente,  $\det(D_N) > 0$  con lo cual el sistema tiene solución única. Así, obtuvimos un único polinomio  $p_{N+1}$  mónico, de grado  $N + 1$ , con  $\langle p_{N+1}, p_m \rangle = 0$ ,  $m \leq N$ .

Con esto, recursivamente obtenemos la sucesión  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  buscada. ■

**Observación 1.1.2.** Notemos que por la demostración del teorema anterior cada  $p_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , tiene coeficientes reales ya que depende completamente de  $\mu_n \in \mathbb{R}$ . Es decir, tenemos que la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a  $\mu$  resulta estar en  $\mathbb{R}[x]$ .

Se puede dar una representación explícita de la sucesión  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  asociada a  $\mu$ :

**Teorema 1.1.3.** *Los polinomios  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  de la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a  $\mu$  están dados explícitamente por:*

$$p_n(x) = \frac{1}{\det(D_{n-1})} \det \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

*Demostración:*

Denotando por  $\tilde{p}_n(x)$  el lado derecho de (1.2) (para cada  $n \in \mathbb{N}$ ), está claro que  $\tilde{p}_n(x)$  es un polinomio mónico de grado  $n$ . Luego, basta ver que  $\langle \tilde{p}_n, x^m \rangle = 0$  para  $m \leq n-1$  (por la unicidad de la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a  $\mu$ ). Veamos:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}_n, x^m \rangle &= \frac{1}{\det(D_{n-1})} \int_{\mathbb{R}} \det \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{pmatrix} x^m d\mu(x) \\ &= \frac{1}{\det(D_{n-1})} \int_{\mathbb{R}} \det \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ x^m & x^{m+1} & \dots & x^{m+n} \end{pmatrix} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{\det(D_{n-1})} \det \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ \mu_m & \mu_{m+1} & \dots & \mu_{m+n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y este último determinante se anula para  $m \leq n-1$  (pues habrá 2 filas iguales en la matriz a la que tomamos determinante). Por lo tanto,  $p_n(x) = \tilde{p}_n(x)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Observación 1.1.4.** De la demostración del teorema anterior vemos que la norma cuadrada de cada  $p_n$  está dada por:

$$h_n = \langle p_n, p_n \rangle = \frac{\det(D_n)}{\det(D_{n-1})}.$$

## 1.2. Propiedad fundamental de los polinomios ortogonales

En esta sección daremos una propiedad muy importante de los polinomios ortogonales que nos permitirá expresarlos a través de una relación de recurrencia.

A partir de la definición del producto interno asociado a  $\mu$  dado en (1.1), para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{C}[x]$ , es directo que

$$\langle xp, q \rangle = \int_{\mathbb{R}} xp(x)\overline{q(x)}d\mu(x) = \langle p, xq \rangle.$$

Es decir, se tiene que el operador “multiplicación por  $x$ ” es simétrico con respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Resulta que los polinomios ortogonales asociados a cualquier producto interno con esta propiedad de simetría satisfacen una relación de recurrencia:

**Teorema 1.2.1** (Relación de recurrencia de tres términos). *Sea  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tal que el operador “multiplicación por  $x$ ” es simétrico con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Entonces los polinomios satisfacen la siguiente relación de recurrencia:*

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

con

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - b_0,$$

en donde  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , y  $c_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Más aún,  $c_n = \frac{h_n}{h_{n-1}}$ .

*Demostración:*

Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $xp_n(x)$  es un polinomio mónico de grado  $n + 1$ , con lo cual

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + \sum_{i=0}^n \alpha_i p_i(x), \quad (1.3)$$

para ciertos  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Así, vemos que

$$\langle xp_n, p_k \rangle = \sum_{i=0}^n \alpha_i \langle p_i, p_k \rangle = \alpha_k h_k \quad \forall k \leq n,$$

y, por otro lado,

$$\langle xp_n, p_k \rangle = \langle p_n, xp_k \rangle = 0 \quad \forall k \leq n - 2,$$

pues  $xp_k(x)$  resulta ser polinomio de grado  $k + 1 < n$ . Es decir, tenemos que  $\alpha_k h_k = 0$  para  $k \leq n - 2$  y entonces, como  $h_k > 0$ ,  $\alpha_k = 0$  para  $k \leq n - 2$ .

Por lo tanto, tenemos que

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + \alpha_n p_n(x) + \alpha_{n-1} p_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Denotando por  $b_n = \alpha_n$  y  $c_n = \alpha_{n-1}$  se obtiene la relación de recurrencia buscada:

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Además, tenemos que

$$c_n h_{n-1} = \alpha_{n-1} h_{n-1} = \langle xp_n, p_{n-1} \rangle = \langle p_n, xp_{n-1} \rangle = \langle p_n, p_n \rangle = h_n,$$

donde en la penúltima igualdad utilizamos una relación análoga a la dada en (1.3). Luego, obtenemos que  $c_n = \frac{h_n}{h_{n-1}} > 0$ . ■

Notemos que el teorema anterior nos dice que el operador “multiplicación por  $x$ ” en la base  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  se puede representar matricialmente por una matriz tridiagonal semi-infinita:

$$[x]_{(p_n)} = \begin{pmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ c_1 & b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c_2 & b_2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c_3 & b_3 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

**Observación 1.2.2.** En el teorema anterior se toma una sucesión  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  de polinomios ortogonales *mónicos*, pero esta última hipótesis no es necesaria y dada una sucesión de polinomios ortogonales  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  (no necesariamente mónicos) se puede obtener una relación de recurrencia análoga dada por:

$$xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Una consecuencia de la relación de recurrencia son las siguientes identidades:

**Teorema 1.2.3** (Identidades de Christoffel-Darboux). *Dados  $x \neq y$  se cumple que*

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{p_k(x)p_k(y)}{h_k} = \frac{p_N(x)p_{N-1}(y) - p_N(y)p_{N-1}(x)}{h_{N-1}(x-y)}.$$

Más aún, si  $x = y$  se tiene que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{p_k(x)^2}{h_k} = \frac{p'_N(x)p_{N-1}(x) - p_N(x)p'_{N-1}(x)}{h_{N-1}}.$$

*Demostración:*

Aplicando la relación de recurrencia de tres términos a  $p_k(x)$  y  $p_k(y)$  y multiplicando por  $p_k(y)$  y  $p_k(x)$  respectivamente obtenemos que:

$$\begin{aligned} xp_k(x)p_k(y) &= p_{k+1}(x)p_k(y) + b_k p_k(x)p_k(y) + c_k p_{k-1}(x)p_k(y), \\ yp_k(y)p_k(x) &= p_{k+1}(y)p_k(x) + b_k p_k(y)p_k(x) + c_k p_{k-1}(y)p_k(x). \end{aligned}$$

Restando estas ecuaciones tenemos que

$$(x-y)p_k(x)p_k(y) = p_{k+1}(x)p_k(y) + c_k p_{k-1}(x)p_k(y) - p_{k+1}(y)p_k(x) - c_k p_{k-1}(y)p_k(x).$$

Por lo tanto, utilizando que  $c_k = \frac{h_k}{h_{k-1}}$  y al tener una suma telescópica, está claro que

$$(x-y) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{p_k(x)p_k(y)}{h_k} = \frac{p_N(x)p_{N-1}(y) - p_N(y)p_{N-1}(x)}{h_{N-1}},$$

con lo cual obtuvimos la primera identidad para  $x \neq y$ .

Ahora, la segunda identidad para  $x = y$  se obtiene tomando el límite  $x \rightarrow y$  en la primera identidad y aplicando L'Hôpital. ■

Es también posible probar la recíproca del Teorema 1.2.1 en donde, a partir de la relación de recurrencia de tres términos, se encuentra una medida con respecto a la cual resultan ortogonales los polinomios (ver [23, Teorema 2.5.2]):

**Teorema 1.2.4** (Teorema de Favard). *Sea  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  una sucesión de polinomios generada por la relación de recurrencia:*

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

con

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - b_0,$$

en donde  $b_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , y  $c_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces existe una medida de Borel positiva  $\mu$  en  $\mathbb{R}$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)d\mu(x) = \delta_{n,m}h_n,$$

donde  $h_n = c_1 \dots c_n$ .

También se tiene el siguiente resultado de unicidad (ver [23, Teorema 2.5.5]):

**Teorema 1.2.5.** *Si las sucesiones  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  y  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son acotadas entonces la medida de ortogonalidad  $\mu$  es única.*

### 1.3. Polinomios ortogonales clásicos

Los polinomios ortogonales más utilizados y estudiados son los llamados *polinomios ortogonales clásicos* que están conformadas por las familias de Jacobi, Laguerre y Hermite. Estas familias son ortogonales con respecto a una medida de la forma  $d\mu(x) = w(x)dx$  donde  $w(x)$  es una función peso y  $dx$  es la medida de Lebesgue. Más precisamente, están dados por:

- **Polinomios de Jacobi:** Una familia  $(p_n^{(\alpha,\beta)})_{n \in \mathbb{N}_0}$  con dos parámetros  $\alpha, \beta > -1$  donde la función peso es  $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  para  $x \in [-1, 1]$ , es decir:

$$\int_{-1}^1 p_n(x)p_m(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = \delta_{n,m}d_n, \quad n, m \in \mathbb{N}_0, d_n > 0.$$

- **Polinomios de Laguerre:** Una familia  $(\ell_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}_0}$  con un parámetro  $\alpha > -1$  donde la función peso está dada por  $w(x) = x^\alpha e^{-x}$  para  $x \in [0, \infty)$ , es decir:

$$\int_0^\infty \ell_n^{(\alpha)}(x)\ell_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x} dx = \delta_{n,m}d_n, \quad n, m \in \mathbb{N}_0, d_n > 0.$$

- **Polinomios de Hermite:** La familia  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  donde la función peso está dada por  $w(x) = e^{-x^2}$  para  $x \in \mathbb{R}$ , es decir:

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(x)h_m(x)e^{-x^2} dx = \delta_{n,m}d_n, \quad n, m \in \mathbb{N}_0, d_n > 0.$$

Los polinomios ortogonales clásicos tienen varias caracterizaciones. A continuación detallamos algunas de ellas:

#### Autofunciones de operadores diferenciales de segundo orden

En 1929, Bochner demostró que las únicas familias de polinomios ortogonales  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  que satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$f_2(x)p_n''(x) + f_1(x)p_n'(x) = \lambda_n p_n(x), \quad \lambda_n \in \mathbb{C},$$

son las familias clásicas de Jacobi, Laguerre y Hermite. En particular, se tiene que:

- Para los polinomios de Jacobi:

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}p_n^{(\alpha,\beta)}(x) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)\frac{d}{dx}p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \lambda_n p_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

donde  $\lambda_n = -n(n + \alpha + \beta + 1)$ .

- Para los polinomios de Laguerre:

$$x\frac{d^2}{dx^2}\ell_n^{(\alpha)}(x) + (\alpha + 1 - x)\frac{d}{dx}\ell_n^{(\alpha)}(x) = -n\ell_n^{(\alpha)}(x).$$

- Para los polinomios de Hermite:

$$\frac{d^2}{dx^2}h_n(x) - 2x\frac{d}{dx}h_n(x) = -2nh_n.$$

En la subsección 3.2.2 del capítulo “Problemas de Riemann-Hilbert” se demostrará la ecuación diferencial de segundo orden para los polinomios de Hermite.

### Ecuación de Pearson

Las funciones peso  $w(x)$  satisfacen lo que es llamado una *ecuación de Pearson*, es decir, una ecuación de la forma:

$$(\sigma(x)w(x))' = \rho(x)w(x),$$

donde  $\sigma$  y  $\rho$  son polinomios con  $\deg(\sigma) \leq 2$  y  $\deg(\rho) \leq 1$ .

### Ortogonalidad de derivadas

Hahn [21] demostró que si, dada una sucesión  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  de polinomios ortogonales con respecto a un peso positivo, la sucesión de sus derivadas  $(p'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es también sucesión de polinomios ortogonales con respecto a un peso positivo, entonces  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  resulta ser una familia clásica.

Es fácil verificar utilizando la ecuación de Pearson que, para las familias clásicas, la sucesión de derivadas  $(p'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es ortogonal con respecto a la función peso  $\sigma(x)w(x)$ . Más aún, se tiene que  $(p'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  resulta ser una familia clásica nuevamente pero con otros parámetros. Más precisamente:

- Para los polinomios de Jacobi:  $\frac{d}{dx}p_n^{(\alpha, \beta)}(x) = np_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)$ .
- Para los polinomios de Laguerre:  $\frac{d}{dx}\ell_n^{(\alpha)}(x) = n\ell_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$ .
- Para los polinomios de Hermite:  $\frac{d}{dx}h_n = nh_{n-1}$ .

### Fórmula de Rodrigues

Las familias clásicas  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  satisfacen una *fórmula de Rodrigues*:

$$p_n(x) = \frac{1}{k_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} (w(x)\phi(x)^n),$$

donde  $k_n > 0$  es constante y  $\phi$  es un polinomio (independiente de  $n$ ) con  $\deg(\phi) \leq 2$ .

### Fórmula de estructura

Las familias clásicas  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  satisfacen una *fórmula de estructura* de la forma:

$$\varphi(x)p'_n(x) = (\alpha_n x + \beta_n)p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x), \quad (1.4)$$

donde  $\alpha_n, \beta_n$  y  $\gamma_n$  son constantes y  $\varphi$  es un polinomio (independiente de  $n$ ) con  $\deg(\varphi) \leq 2$ .

Al-Salam y Chihara [2] demostraron que las familias clásicas están caracterizados por ser los únicos polinomios ortogonales que satisfacen una fórmula de estructura de la forma (1.4).

### Shift operators

Para las familias clásicas  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , el operador derivación  $\frac{d}{dx}$  actúa como un *lowering operator* que baja el grado de los polinomios y sube por uno el parámetro. Además, este operador tiene una adjunta que es un *raising operator* que sube el grado y baja el parámetro.

## CAPÍTULO 2

---

# POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

---

Los polinomios ortogonales se han extendido de varias formas. Una de las generalizaciones que ha atraído mucha atención recientemente son los polinomios ortogonales matriciales.

En este capítulo extenderemos parte de la teoría desarrollada para polinomios ortogonales escalares al caso matricial. Dado  $N \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $M_N(\mathbb{C})$  al espacio de matrices  $N \times N$  con coeficientes en  $\mathbb{C}$ . En lo que sigue, dado  $A \in M_N(\mathbb{C})$ ,  $A^*$  denotará la *adjunta* de  $A$  (es decir, su transpuesta conjugada).

**Definición 2.0.1.** Un *polinomio matricial*  $P$  es un polinomio en una variable  $x$  cuyos coeficientes son matrices en  $M_N(\mathbb{C})$ . Es decir,  $P$  es de la forma  $P(x) = \sum_{i=0}^n A_i x^i$  para  $A_i \in M_N(\mathbb{C})$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Denotaremos por  $M_N(\mathbb{C})[x]$  a la familia de polinomios matriciales. Con esto, todas las nociones comunes de los polinomios escalares se extienden de forma natural al caso matricial (grado, coeficiente director, polinomio mónico, etc.).

### 2.1. Productos internos matriciales

En esta sección definiremos productos internos matriciales y algunas de sus propiedades.

**Definición 2.1.1.** Un *producto interno matricial* en el espacio  $M_N(\mathbb{C})[x]$  es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : M_N(\mathbb{C})[x] \times M_N(\mathbb{C})[x] \rightarrow M_N(\mathbb{C}),$$

que cumple las siguientes propiedades para todo  $P, Q, R \in M_N(\mathbb{C})[x]$  y  $A \in M_N(\mathbb{C})$ :

1.  $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle^*$ .
2.  $\langle AP + Q, R \rangle = A\langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$ .
3.  $\langle P, P \rangle$  es una matriz definida no negativa.

Además, decimos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es **no degenerado** si siempre que  $\langle P, P \rangle = 0$ , esto implica  $P = 0$ .

**Observación 2.1.2.** El punto (3) de la definición anterior no necesariamente implica que  $\langle P, P \rangle$  sea una matriz invertible.

Notemos que dado un producto interno matricial  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y  $P(x) = \sum_{i=0}^n A_i x^i$  polinomio matricial se tiene que:

$$\langle P, P \rangle = \sum_{i,j=0}^n A_i S_{i,j} A_j^* \quad \text{para} \quad S_{i,j} = \langle x^i, x^j \rangle.$$

**Lema 2.1.3.** Dado  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto interno matricial,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es no degenerado si y solo si dados  $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{C}^N$ , con  $n \in \mathbb{N}_0$ , se tiene que

$$\sum_{i,j=0}^n v_i^* S_{i,j} v_j = 0 \quad \text{implica que} \quad v_0 = v_1 = \dots = v_n = 0.$$

*Demostración:*

$\Rightarrow$ ) Supongamos que para  $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{C}^N$  se tiene que

$$\sum_{i,j=0}^n v_i^* S_{i,j} v_j = 0.$$

Sea  $\{e_i\}$  la base canónica de  $\mathbb{C}^N$ , entonces  $e_1 v_i^*$  es una matriz cuya primera fila es igual a  $\overline{v_i}$  y con todas las demás filas igual a 0. Luego, tomando  $P(x) = \sum_{i=0}^n e_1 v_i^* x^i$ , se cumple que

$$\langle P, P \rangle = \sum_{i,j=0}^n e_1 v_i^* \delta_{i,j} (e_1 v_j^*)^* = \sum_{i,j=0}^n e_1 v_i^* \delta_{i,j} v_j e_1^* = e_1 \left( \sum_{i,j=0}^n v_i^* \delta_{i,j} v_j \right) e_1^* = 0,$$

y así, al tener  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  no degenerado,  $P = 0$ . Esto implica que  $e_1 v_i^* = 0$  para  $i = 0, 1, \dots, n$  y por lo tanto,  $v_0 = v_1 = \dots = v_n = 0$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $P(x) = \sum_{i=0}^n A_i x^i$  polinomio matricial con  $\langle P, P \rangle = 0$ , es decir  $\sum_{i,j=0}^n A_i S_{i,j} A_j^* = 0$ .

Luego, dado  $v \in \mathbb{C}^N$  tenemos que

$$0 = \sum_{i,j=0}^n v^* A_i S_{i,j} A_j^* v = \sum_{i,j=0}^n w_i^* S_{i,j} w_j \quad \text{para} \quad w_i = A_i^* v.$$

Entonces, por hipótesis,  $w_i = A_i^* v = 0$  para cada  $i = 0, 1, \dots, n$ . Como  $v$  era arbitrario,  $A_i = 0$  para cada  $i = 0, 1, \dots, n$  y así  $P = 0$ . Por lo tanto,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es no degenerado. ■

**Observación 2.1.4.** Para un producto interno matricial  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  no degenerado tenemos que  $\langle P, P \rangle \neq 0$  para cada polinomio matricial no nulo  $P(x) = \sum_{i=0}^n A_i x^i$  pero, como ya fue dicho,  $\langle P, P \rangle$  podría no ser invertible. Aun así, el lema anterior nos permite dar una caracterización del núcleo de  $\langle P, P \rangle$ : como  $\langle P, P \rangle$  es definido no negativo, tenemos que

$$v \in \ker(\langle P, P \rangle) \quad \text{si y solo si} \quad v^* \langle P, P \rangle v = 0.$$

Luego, recordando que  $\langle P, P \rangle = \sum_{i,j=0}^n A_i S_{i,j} A_j^*$  y por el lema anterior,  $v^* \langle P, P \rangle v = 0$

implica que  $v^* A_i = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , es decir  $v \in \bigcap_{i=0}^n \ker(A_i^*)$  (y la reciproca de esto claramente vale también). Por lo tanto, se tiene que

$$\ker(\langle P, P \rangle) = \bigcap_{i=0}^n \ker(A_i^*).$$

En particular, si  $A_i^*$  es invertible para algún  $i = 0, 1, \dots, n$ , tendremos que

$$\ker(\langle P, P \rangle) = \bigcap_{i=0}^n \ker(A_i^*) = 0,$$

y así,  $\langle P, P \rangle$  es invertible. Luego, si  $P$  es mónico,  $\langle P, P \rangle$  es invertible.

## 2.2. Polinomios ortogonales matriciales

En esta sección introducimos los polinomios ortogonales matriciales.

**Definición 2.2.1.** Una sucesión de polinomios matriciales  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  se dice **simple** si para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\deg(P_n) = n$ .
2. El coeficiente director de  $P_n$  es invertible.

**Observación 2.2.2.** Sea  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  sucesión simple de polinomios matriciales, entonces es trivial verificar que todo polinomio matricial  $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$  de grado  $m$  se escribe de forma única como

$$P(x) = \sum_{k=0}^m A_k P_k(x),$$

para ciertos  $A_k \in M_N(\mathbb{C})$ .

La definición general de una sucesión ortogonal es la siguiente:

**Definición 2.2.3.** Una sucesión de polinomios ortogonales matriciales con respecto al producto interno matricial  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una sucesión  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  en  $M_N(\mathbb{C})[x]$  tal que:

1.  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es sucesión simple.
2.  $\langle P_n, P_m \rangle = 0$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}_0$ ,  $n \neq m$ .

Ahora, vamos a asociar a cada producto interno matricial no degenerado una única sucesión de polinomios ortogonales matriciales *mónicos* de manera análoga a como fue hecho en el caso escalar.

**Teorema 2.2.4.** Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto interno matricial no degenerado. Entonces existe una única sucesión  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  de polinomios matriciales mónicos tales que

$$\deg(P_n) = n \quad \text{y} \quad \langle P_n, P_m \rangle = \delta_{n,m} \mathcal{H}_n \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0,$$

donde  $\mathcal{H}_n$  es definida positiva. Es decir,  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

*Demostración:*

Construyamos los  $P_n$  de manera recursiva: sea  $P_0(x) = Id$ . Entonces, por lo visto en la Observación 2.1.4,  $\langle P_0, P_0 \rangle$  es invertible. Ahora, supongamos que tenemos  $P_0, P_1, \dots, P_N$  polinomios matriciales mónicos con  $\deg(P_k) = k, k = 0, 1, \dots, N$ , tales que

$$\langle P_n, P_m \rangle = \delta_{n,m} \mathcal{H}_n, \quad n, m \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Luego, definamos  $P_{N+1}(x) = x^{N+1} - \sum_{k=0}^N \langle x^{N+1}, P_k \rangle \langle P_k, P_k \rangle^{-1} P_k(x)$  polinomio matricial mónico de grado  $N + 1$ . Nuevamente por la Observación 2.1.4,  $\mathcal{H}_{N+1} = \langle P_{N+1}, P_{N+1} \rangle$  es invertible, y al ser también definida no negativa (pues  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es producto interno),  $\mathcal{H}_{N+1}$  resulta definida positiva.

Por otro lado, para  $m = 0, 1, \dots, N$  vemos que

$$\begin{aligned} \langle P_{N+1}, P_m \rangle &= \langle x^{N+1}, P_m \rangle - \sum_{k=0}^N \langle x^{N+1}, P_k \rangle \langle P_k, P_k \rangle^{-1} \langle P_k, P_m \rangle \\ &= \langle x^{N+1}, P_m \rangle - \langle x^{N+1}, P_m \rangle \langle P_m, P_m \rangle^{-1} \langle P_m, P_m \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, obtuvimos  $P_{N+1}$  mónico, de grado  $N + 1$  y con  $\langle P_{N+1}, P_m \rangle = \delta_{N+1,m} \mathcal{H}_{N+1}$  para  $m \leq N$ , donde  $\mathcal{H}_{N+1}$  es definida positiva.

Con esto, recursivamente obtenemos la sucesión  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  buscada. Ahora, veamos que es única: supongamos que  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es otra sucesión de polinomios matriciales mónicos que cumplen lo buscado. Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  tenemos que  $Q_n - P_n$  es un polinomio matricial con  $\deg(Q_n - P_n) \leq n - 1$ . Así, como  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es sucesión simple, existen matrices  $A_k \in M_N(\mathbb{C})$  tales que

$$Q_n(x) - P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k P_k(x).$$

Luego, vemos que

$$\langle Q_n - P_n, Q_n - P_n \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \langle P_k, Q_n - P_n \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \langle P_k, Q_n \rangle - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \langle P_k, P_n \rangle = 0,$$

y como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es no degenerado,  $Q_n = P_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ . Así,  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es única. ■

**Corolario 2.2.5.** Si  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es la sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , entonces para cada  $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$  con  $\deg(P) = n$ , se tiene que

$$P(x) = \sum_{k=0}^n A_k P_k(x) \quad \text{donde} \quad A_k = \langle P, P_k \rangle \mathcal{H}_k^{-1}.$$

## 2.2. POLINOMIOS ORTOGONALES MATRICIALES

---

*Demostración:*

Como  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es sucesión simple, existen matrices  $A_k \in M_N(\mathbb{C})$  tales que

$$P(x) = \sum_{k=0}^n A_k P_k(x).$$

Además, para cada  $k = 0, 1, \dots, n$  vemos que

$$\langle P, P_k \rangle = \sum_{i=0}^n A_i \langle P_i, P_k \rangle = A_k \mathcal{H}_k,$$

con lo cual  $A_k = \langle P, P_k \rangle \mathcal{H}_k^{-1}$ . ■

**Proposición 2.2.6.** *Toda sucesión  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  de polinomios ortogonales con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (no degenerado) es de la forma*

$$Q_n = A_n P_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

para ciertas matrices  $A_n \in M_N(\mathbb{C})$ , donde  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  son los polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

*Demostración:*

La demostración es directa del hecho de que  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es sucesión simple pues, fijando  $n \in \mathbb{N}_0$ , tenemos que existen matrices  $B_k \in M_N(\mathbb{C})$  con

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n B_k P_k(x).$$

Así, vemos que  $\langle Q_n, P_k \rangle = B_k \mathcal{H}_k \delta_{n,k}$  y luego, tomando  $A_n = \langle Q_n, P_n \rangle \mathcal{H}_n^{-1}$ , tenemos que  $Q_n = A_n P_n$ . ■

**Observación 2.2.7.** Como los polinomios ortogonales matriciales mónicos  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  cumplen que  $\mathcal{H}_n = \langle P_n, P_n \rangle$  es definida positiva, hermitiana e invertible para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , existe una única raíz definida positiva  $\mathcal{H}_n^{1/2}$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ . Luego, si definimos

$$R_n(x) = \mathcal{H}_n^{-1/2} P_n(x),$$

tenemos que la sucesión  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  satisface:

1.  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es sucesión simple.
2.  $\langle R_n, R_m \rangle = \delta_{n,m}$  para cada  $n, m \in \mathbb{N}_0$  pues

$$\langle R_n, R_m \rangle = \mathcal{H}_n^{-1/2} \langle P_n, P_m \rangle \left( \mathcal{H}_m^{-1/2} \right)^* = \mathcal{H}_n^{-1/2} (\delta_{n,m} \mathcal{H}_n) \mathcal{H}_m^{-1/2} = \delta_{n,m}.$$

Esto es lo que se llama una sucesión de polinomios *ortonormales* matriciales. Notemos que la sucesión  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  no es única pues tomando cualquier sucesión  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  de matrices unitarias en  $M_N(\mathbb{C})$  (es decir tal que  $U_n U_n^* = I$ ) y definiendo  $\tilde{R}_n(x) = U_n R_n(x)$ , entonces  $(\tilde{R}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  también es sucesión de polinomios ortonormales trivialmente.

Ahora, vamos a demostrar que la relación de recurrencia de tres términos se cumple también en el caso matricial:

**Teorema 2.2.8** (Relación de recurrencia de tres términos). *Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto interno matricial no degenerado y  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  una sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Si se cumple la condición de simetría*

$$\langle xP, Q \rangle = \langle P, xQ \rangle \quad \forall P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x],$$

entonces existen sucesiones de matrices  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  y  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $M_N(\mathbb{C})$  tales que:

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde

$$P_0(x) = I, \quad P_1(x) = x - B_0.$$

Más aún, si

$$P_n(x) = x^n + \mathcal{P}_n x^{n-1} + \text{lower order terms} \quad \text{con} \quad \langle P_n, P_n \rangle = \mathcal{H}_n,$$

entonces se tiene

$$B_n = \mathcal{P}_n - \mathcal{P}_{n+1} \quad \text{y} \quad C_n = \mathcal{H}_n \mathcal{H}_{n-1}^{-1}.$$

*Demostración:*

Como  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es sucesión simple y  $xP_n(x)$  es un polinomio mónico de grado  $n + 1$ , tenemos que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^n E_k P_k(x), \quad E_k \in M_N(\mathbb{C}).$$

Luego, vemos que

$$\langle xP_n, P_k \rangle = \langle P_{n+1}, P_k \rangle + \sum_{i=0}^n E_i \langle P_i, P_k \rangle = E_k \langle P_k, P_k \rangle = E_k \mathcal{H}_k \quad \forall k \leq n,$$

y, por otro lado,

$$\langle xP_n, P_k \rangle = \langle P_n, xP_k \rangle = 0 \quad \forall k \leq n - 2,$$

pues  $xP_k(x)$  resulta ser polinomio de grado  $k + 1 < n$ . Es decir, tenemos que  $E_k \mathcal{H}_k = 0$  para  $k \leq n - 2$  y entonces, como  $\mathcal{H}_k$  es definida positiva,  $E_k = 0$  para  $k \leq n - 2$ .

Por lo tanto, tenemos que

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + E_n P_n(x) + E_{n-1} P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Denotando  $B_n = E_n$  y  $C_n = E_{n-1}$  se obtiene la relación de recurrencia buscada:

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, veamos las expresiones para  $B_n$  y  $C_n$ :

- Tenemos que  $xP_n(x) = x^{n+1} + \mathcal{P}_n x^n + \ell.o.t.$  y  $x^{n+1} = P_{n+1}(x) - \mathcal{P}_{n+1} x^n + \ell.o.t.$  con lo cual

$$B_n \mathcal{H}_n = \langle xP_n, P_n \rangle = \langle x^{n+1}, P_n \rangle + \langle \mathcal{P}_n x^n, P_n \rangle = -\mathcal{P}_{n+1} \langle x^n, P_n \rangle + \mathcal{P}_n \langle x^n, P_n \rangle.$$

Así, como trivialmente vale que  $\langle x^n, P_n \rangle = \mathcal{H}_n$ , obtenemos que  $B_n = \mathcal{P}_n - \mathcal{P}_{n+1}$ .

- Tenemos que

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = C_n \mathcal{H}_{n-1}$$

y además

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle = \langle P_n, P_n + (xP_{n-1} - P_n) \rangle = \langle P_n, P_n \rangle = \mathcal{H}_n,$$

pues  $\deg(xP_{n-1} - P_n) \leq n - 1$ . Así,  $C_n = \mathcal{H}_n \mathcal{H}_{n-1}^{-1}$ .

Por lo tanto, obtuvimos las expresiones buscadas. ■

## 2.3. Medidas matriciales y ortogonalidad

En esta sección vamos a definir medidas matriciales y obtener un producto interno asociado. A partir de esto, tendremos una sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos.

### 2.3.1. Medidas matriciales

Denotamos por  $\mathcal{B}$  a la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}$ , es decir, la menor  $\sigma$ -álgebra sobre  $\mathbb{R}$  que contiene a todos los abiertos. Comencemos recordando las definiciones de medidas positivas y medidas complejas:

**Definición 2.3.1.** Una *medida positiva de Borel* es una función  $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  tal que

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2.  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n)$  para toda sucesión  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $X_n \in \mathcal{B}$  disjuntos.

Más aún,  $\mu$  se dice *finita* si  $\mu(\mathbb{R}) < \infty$  y se llama  *$\sigma$ -finita* si  $\mathbb{R}$  es unión numerable de conjuntos de medida finita.

Recordemos que una medida  $\nu$  es *absolutamente continua* con respecto a  $\mu$  si

$$\nu(E) = 0 \quad \text{para cada } E \in \mathcal{B} \quad \text{con } \mu(E) = 0.$$

**Definición 2.3.2.** Una *medida compleja*  $\nu$  es una función  $\nu: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

1.  $\nu(\emptyset) = 0$ .
2.  $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(X_n)$  para toda sucesión  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $X_n \in \mathcal{B}$  disjuntos, con convergencia absoluta en la serie.

A cada medida compleja  $\nu$  se le asocia la función  $|\nu|: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$|\nu|(X) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(X_n)| : \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es partición de } X \right\}, \quad X \in \mathcal{B}.$$

Se tiene que  $|\nu|$  es medida positiva de Borel finita llamada la *variación total* de  $\nu$ .

También se tiene el siguiente teorema clásico:

**Teorema 2.3.3** (Teorema de Radon-Nikodym). *Sea  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finito y  $\nu$  una medida compleja sobre  $(X, \mathcal{M})$  que es absolutamente continua con respecto a una medida positiva  $\mu$ . Entonces existe una única (p.p.) función medible no negativa  $f \in L^1(\mu)$  sobre  $X$  tal que*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{M}.$$

Ahora, podemos definir medidas matriciales:

**Definición 2.3.4.** Una *medida matricial*  $\Theta$  es una función  $\Theta: \mathcal{B} \rightarrow M_N(\mathbb{C})$  tal que

1.  $\Theta(\emptyset) = 0$ .
2.  $\Theta(X)$  es definida no negativa para cada  $X \in \mathcal{B}$ .
3.  $\Theta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(X_n)$  para toda sucesión  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $X_n \in \mathcal{B}$  disjuntos, donde se entiende la convergencia entrada a entrada.

Notemos que las entradas de una medida matricial  $\Theta$  que están dadas por

$$\Theta_{i,j}(X) = [\Theta(X)]_{i,j}, \quad X \in \mathcal{B}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

resultan ser medidas complejas. Es decir,  $\Theta$  es una matriz de medidas complejas.

**Observación 2.3.5.** Dada una medida positiva de Borel  $\mu$  sobre  $\mathbb{R}$  y una familia de funciones medibles acotadas  $W_{i,j}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ , tales que la matriz  $W(x) = [W_{i,j}(x)]$  es definida no negativa p.p.  $x \in \mathbb{R}$ , definimos:

$$\Theta(E) = \int_E W(x) d\mu(x), \quad E \in \mathcal{B},$$

donde la integral se toma coordenada a coordenada. Es decir,  $d\Theta_{i,j}(x) = W_{i,j}(x) d\mu(x)$ . Entonces para cada  $E \in \mathcal{B}$  se cumple

$$v^* \Theta(E) v = \int_E v^* W(x) v d\mu(x) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{C}^N.$$

Luego,  $\Theta(E)$  es definida no negativa para cada  $E \in \mathcal{B}$  y por lo tanto,  $\Theta$  resulta ser medida matricial.

**Definición 2.3.6.** Una *matriz peso* es una función  $W: [a, b] \rightarrow M_N(\mathbb{C})$  tal que  $W(x)$  es definida positiva para cada  $x \in [a, b]$  (donde  $a$  y  $b$  pueden ser valores infinitos).

**Observación 2.3.7.** Se puede ver que cada medida matricial  $\Theta$  es efectivamente de la forma dada en la observación anterior. Veamos esto: dado  $X \in \mathcal{B}$ , tenemos que  $\Theta(X)$  es definida no negativa y entonces  $\Theta(X) = \Theta(X)^*$ . En particular,  $\Theta_{i,i}(X) = \overline{\Theta_{i,i}(X)}$  para cada  $i = 1, \dots, N$  y luego,  $\Theta_{i,i}(X) \in [0, \infty]$  para cada  $i = 1, \dots, N$ . Por lo tanto,  $\Theta_{i,i}$  son medidas positivas de Borel y podemos asociarle a  $\Theta$  la *medida traza*:

$$\Theta_{tr}(X) = \text{tr}(\Theta(X)) = \sum_{i=1}^N \Theta_{i,i}(X).$$

Ahora, tenemos que las medidas  $\Theta_{i,j}$  para  $i, j = 1, \dots, N$  son absolutamente continuas con respecto a  $\Theta_{tr}$  pues  $\Theta_{tr}(X) = \sum_{i=1}^N \lambda_i$  con  $\lambda_i \geq 0$  los autovalores de  $\Theta(X)$  que son no negativos pues  $\Theta(X)$  es definida no negativa. Por lo tanto, si  $\Theta_{tr}(X) = 0$ , también tendremos  $\Theta(X) = 0$  (todo autovalor será nulo) y luego,  $\Theta_{i,j}(X) = 0$  para cada  $i, j = 1, \dots, N$ .

Así, por el teorema de Radon–Nikodym, para cada  $i, j = 1, \dots, N$  existe una función  $W_{i,j}$  tal que

$$\Theta_{i,j}(E) = \int_E W_{i,j}(x) d\Theta_{tr}(x) \quad \forall E \in \mathcal{B}.$$

Es decir, definiendo  $W(x) = [W_{i,j}(x)]$  y tomando la integral coordenada a coordenada tenemos que

$$\Theta(E) = \int_E W(x) d\Theta_{tr}(x) \quad \forall E \in \mathcal{B}.$$

Además, se puede probar que  $W(x)$  es definida no negativa p.p.  $x \in \mathcal{B}$  [3, Teorema 1.12].

### 2.3.2. Productos internos asociados a medidas matriciales

Vamos a definir un producto interno asociado a una medida matricial. Para esto, se consideran medidas matriciales de la forma

$$\Theta(E) = \int_E W(x) d\nu(x), \quad E \in \mathcal{B},$$

para  $\nu$  medida positiva de Borel con soporte infinito y  $W(x)$  definida no negativa p.p.  $x \in \mathbb{R}$ . Vamos a asumir que el  $n$ -ésimo momento de  $\nu$  dado por

$$S_n = \int_{\mathbb{R}} x^n W(x) d\nu(x),$$

es finito para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  (es decir, cada entrada de la matriz  $S_n$  es finita).

Ahora, dados  $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$ , definimos

$$\langle P, Q \rangle_W := \int_{\mathbb{R}} P(x)W(x)Q(x)^* d\nu(x),$$

es decir

$$[\langle P, Q \rangle_W]_{i,j} = \sum_{n,m=1}^N \int_{\mathbb{R}} P_{i,n}(x)W(x)_{n,m} \overline{Q_{j,m}(x)} d\nu(x).$$

Es trivial verificar que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  es producto interno matricial (usando fuertemente que  $W(x)$  es definida no negativa p.p.).

Más aún, si  $\mu$  es la medida de Lebesgue, se puede ver que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  es no degenerado:

**Proposición 2.3.8.** *Si  $\mu = dx$  es la medida de Lebesgue y  $W(x)$  es definida positiva p.p. sobre el intervalo  $(a, b)$ , entonces  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  es no degenerado.*

*Demostración:*

Como  $W(x)$  es definida positiva p.p.  $x \in (a, b)$ , existe una matriz unitaria  $E(x)$  y funciones positivas  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  tales que

$$W(x) = E(x) \operatorname{diag}(\alpha_1(x), \dots, \alpha_N(x)) E(x)^*,$$

Más aún, se puede suponer que  $E(x)$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  son medibles (ver [20, Proposición 2.1]).

Ahora, sea  $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$  tal que  $\langle P, P \rangle_W = 0$  y veamos que  $P = 0$ . Denotando  $A(x) = P(x)E(x)^*$ , tenemos que

$$0 = \langle P, P \rangle_W = \int_a^b P(x)W(x)P(x)^* dx = \int_a^b A(x) \operatorname{diag}(\alpha_1(x), \dots, \alpha_N(x)) A(x)^* dx.$$

Viendo la  $(i, i)$ -ésima entrada de la igualdad anterior obtenemos

$$0 = \int_a^b \sum_{k=1}^N A_{i,k}(x) \alpha_k(x) \overline{A_{i,k}(x)} dx = \int_a^b \sum_{k=1}^N |A_{i,k}(x)|^2 \alpha_k(x) dx,$$

y como  $|A_{i,k}(x)|^2 \alpha_k(x) \geq 0$  en  $(a, b)$ ,  $\sum_{k=1}^N |A_{i,k}(x)|^2 \alpha_k(x) = 0$  p.p.  $x \in (a, b)$ . Luego, como  $\alpha_k(x) > 0$ , tenemos que  $|A_{i,k}(x)| = 0$  p.p.  $x \in (a, b)$ , para cada  $i, k = 1, \dots, N$ . Así,  $A(x) = 0$  p.p.  $x \in (a, b)$  y  $P(x) = A(x)E(x)^* = 0$  p.p.  $x \in (a, b)$ . Al ser  $P$  continuo por ser polinomio,  $P = 0$ . Por lo tanto  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  es no degenerado. ■

### 2.3.3. El teorema de Favard

En esta sección demostraremos el llamado *teorema de Favard* que es la recíproca del Teorema 2.2.8 que nos daba la relación de recurrencia de tres términos.

Es necesario considerar la *sucesión de momentos*  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  de una medida matricial  $\mu$ , donde  $S_n$  es el  $n$ -ésimo momento de  $\mu$  dado por:

$$S_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x),$$

y que suponemos finito para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  (es decir, cada entrada de la matriz  $S_n$  es finita).

Decimos que una sucesión de matrices  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  es *no negativa* si

$$\sum_{i,j=1}^n c_i^* S_{i+j} c_j \geq 0 \quad \forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}^N, n \in \mathbb{N}_0.$$

Utilizaremos el siguiente teorema [3, Teorema 3.2] que nos da una correspondencia entre medidas matriciales y sucesiones de momentos no negativas. Omitimos la demostración.

**Teorema 2.3.9** (Teorema de Krein). *Existe una correspondencia entre medidas matriciales y sucesiones de momentos no negativas.*

Por último, será útil la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.10.** *Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto interno matricial y  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tal que las normas  $\langle P_n, P_n \rangle = \mathcal{H}_n$  son definidas positivas, entonces  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es no degenerado. En particular, si  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es sucesión ortonormal, entonces  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es no degenerado.*

*Demostración:*

Sea  $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$  tal que  $\langle P, P \rangle = 0$  y veamos que  $P = 0$ . Como  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es sucesión simple, si  $\deg(P) = m$ , existen matrices  $A_k \in M_N(\mathbb{C})$  tales que

$$P(x) = \sum_{k=0}^m A_k P_k(x).$$

Luego

$$0 = \langle P, P \rangle = \sum_{i,j=0}^m A_i \langle P_i, P_j \rangle A_j^* = \sum_{i=0}^m A_i \mathcal{H}_i A_i^*.$$

Ahora, como  $\mathcal{H}_i$  es definida positiva,  $A_i \mathcal{H}_i A_i^*$  también lo será trivialmente y luego, dado  $\xi \in \mathbb{C}^N$ , tenemos que

$$\sum_{i=0}^m \xi^* A_i \mathcal{H}_i A_i^* \xi = 0 \quad \text{con} \quad \xi^* A_i \mathcal{H}_i A_i^* \xi \geq 0.$$

Así,  $\xi^* A_i \mathcal{H}_i A_i^* \xi = 0$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Como  $\xi$  fue arbitrario,  $A_i \mathcal{H}_i A_i^* = 0$  para cada  $i = 1, \dots, m$ .

Supongamos por el absurdo que  $A_k \neq 0$  para algún  $k = 1, \dots, m$ , con lo cual existe  $\xi \in \mathbb{C}^N$  con  $\xi^* A_k \neq 0$ . Entonces  $\xi^* A_k \mathcal{H}_k A_k^* \xi > 0$  y llegamos a una contradicción. Así,  $A_k = 0$  para cada  $k = 1, \dots, m$  y  $P = 0$ . Por lo tanto,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es no degenerado. ■

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema de Favard:

**Teorema 2.3.11** (Teorema de Favard). *Sea  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  una sucesión de polinomios matriciales que satisfacen una relación de recurrencia de la forma*

$$xP_n(x) = A_{n+1}P_{n+1}(x) + B_nP_n(x) + A_n^*P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

donde  $P_0 = I$  y  $P_{-1} = 0$ , los  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  son invertibles y los  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  son hermitianas. Entonces existe una medida matricial positiva  $\mu$  tal que los  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  son ortonormales con respecto a  $\mu$ .

*Demostración:*

La relación de recurrencia dada define una sucesión  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  simple pues:

- $\deg(P_n) = n$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- El coeficiente director de  $P_n$  está dado por  $A_n^{-1} \dots A_1^{-1}$  invertible para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Definamos un producto interno matricial a partir de  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ : dados  $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$ , escribiendo  $P = \sum_{k=0}^n C_k P_k$  y  $Q = \sum_{k=0}^m D_k P_k$ , se define

$$\langle P, Q \rangle := \sum_k C_k D_k^*,$$

que es trivialmente producto interno matricial. Además, como  $P_n = IP_n$ , tendremos que

$$\langle P_n, P_m \rangle = \delta_{n,m},$$

es decir,  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es sucesión ortonormal con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Luego, por la proposición anterior,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es no degenerado.

Notemos que, por la relación de recurrencia, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle xP_n, P_m \rangle &= \langle A_{n+1}P_{n+1} + B_nP_n + A_n^*P_{n-1}, P_m \rangle \\ &= \begin{cases} A_{n+1} & \text{si } m = n + 1 \\ B_n & \text{si } m = n \\ A_n^* & \text{si } m = n - 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ &= \begin{cases} A_m & \text{si } n = m - 1 \\ B_m^* & \text{si } n = m \\ A_{m+1}^* & \text{si } n = m + 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ &= \langle P_n, A_{m+1}P_{m+1} + B_mP_m + A_m^*P_{m-1} \rangle \\ &= \langle P_n, xP_m \rangle, \end{aligned}$$

es decir,  $\langle xP_n, P_m \rangle = \langle P_n, xP_m \rangle$  para cada  $n, m \in \mathbb{N}_0$ . Por lo tanto, tenemos que  $\langle xP, Q \rangle = \langle P, xQ \rangle$  para cada  $P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x]$ .

En particular, considerando  $S_n = \langle x^n, I \rangle$  para  $n \in \mathbb{N}_0$ , tenemos que  $S_n = S_n^*$ . Ahora, veamos que  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  es sucesión no negativa: dado  $P = \sum_{k=0}^n E_k x^k \in M_N(\mathbb{C})[x]$ , tenemos que  $\langle P, P \rangle$  es definida no negativa. Además, como

$$\langle P, P \rangle = \sum_{i,j=0}^n E_i \langle x^i, x^j \rangle E_j^* = \sum_{i,j=0}^n E_i \langle x^{i+j}, I \rangle E_j^* = \sum_{i,j=0}^n E_i S_{i+j} E_j^*,$$

esto implica que

$$\sum_{i,j=0}^n c_i^* S_{i+j} c_j \geq 0 \quad \text{para todo } c_i \in \mathbb{C}^N, n \in \mathbb{N}_0,$$

y  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  resulta ser sucesión no negativa. Luego, por el teorema de Krein existe una medida matricial  $\mu$  tal que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interno asociado. ■

## 2.4. Álgebras de Fourier

En este capítulo comenzaremos estudiando operadores diferenciales y en diferencias actuando sobre polinomios matriciales. A partir de esto introduciremos las álgebras de Fourier a izquierda y a derecha que surgieron en [4] para estudiar el llamado *problema matricial de Bochner* que busca caracterizar todas las medidas matriciales cuyas sucesiones de polinomios ortogonales matriciales asociadas son autofunciones de un operador diferencial simétrico de segundo orden.

### 2.4.1. Operadores diferenciales y en diferencias

Vamos a estudiar la acción de operadores diferenciales y en diferencias sobre polinomios matriciales. En particular, al no tener conmutatividad, consideramos operadores diferenciales actuando *a derecha* sobre la variable  $x$  y operadores en diferencias actuando *a izquierda* sobre el grado. Esta elección se justifica más adelante en la Observación 2.4.2.

Consideremos operadores diferenciales de la forma

$$\mathcal{D} = \sum_{i=0}^m \partial_x^i A_i(x) \quad \text{con} \quad \partial_x^i = \frac{d^i}{dx^i}, \quad A_i \in M_N(\mathbb{C})[x],$$

y denotamos por  $\mathcal{M}_N$  al conjunto de todos estos operadores diferenciales que resulta ser un álgebra sobre  $\mathbb{C}$  con la composición. Estos operadores actúan a derecha en un polinomio  $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$  de la siguiente manera:

$$P(x) \cdot \mathcal{D} = \sum_{i=0}^m (\partial_x^i P)(x) A_i(x).$$

De ahora en más,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota un producto interno matricial arbitrario.

**Definición 2.4.1.** Se dice que  $\mathcal{D}^\dagger \in \mathcal{M}_N$  es la *adjunta* de  $\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N$  si

$$\langle P \cdot \mathcal{D}, Q \rangle = \langle P, Q \cdot \mathcal{D}^\dagger \rangle \quad \forall P, Q \in M_N(\mathbb{C})[x].$$

Además  $\mathcal{D}$  se dice *simétrico* si  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\dagger$ .

**Observación 2.4.2.** El motivo por el cual se consideran operadores diferenciales actuando a derecha es que los operadores diferenciales simétricos actuando a izquierda resultan ser triviales. Veamos esto: sea  $\mathcal{D} = \sum_{i=0}^m A_i(x) \partial_x^i$  un operador diferencial simétrico actuando a izquierda, es decir, dado  $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$  tenemos

$$\mathcal{D} \cdot P(x) = \sum_{i=0}^m A_i(x) (\partial_x^i P)(x).$$

Ahora, sea  $U$  una matriz unitaria, entonces

$$\langle U^* \mathcal{D} U \cdot P, Q \rangle = U^* \langle \mathcal{D} U \cdot P, Q \rangle = U^* \langle U \cdot P, \mathcal{D} \cdot Q \rangle = \langle U^* U \cdot P, \mathcal{D} \cdot Q \rangle = \langle P, \mathcal{D} \cdot Q \rangle.$$

Por otro lado,

$$\langle U^* \mathcal{D} U \cdot P, Q \rangle = U^* \langle \mathcal{D} U \cdot P, U Q \rangle = U^* \langle U \cdot P, \mathcal{D} \cdot U Q \rangle = \langle P, U^* \mathcal{D} U \cdot Q \rangle.$$



**Definición 2.4.3.** Se dice que  $M^\dagger \in \mathcal{N}_N$  es la **adjunta** de  $M \in \mathcal{N}_N$  si

$$\langle M \cdot Q_n, Q_m \rangle = \langle Q_n, M^\dagger \cdot Q_m \rangle \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0.$$

**Observación 2.4.4.** Notemos que los operadores  $\delta$  y  $\partial_x$  cumplen

$$(\delta^j \cdot Q_n(x)) \cdot \partial_x^i = Q_{n+j}(x) \cdot \partial_x^i = Q_{n+j}^{(i)}(x) = \delta^j \cdot (Q_n(x) \cdot \partial_x^i).$$

Luego, para  $M \in \mathcal{N}_N$  y  $\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N$  tenemos que

$$(M \cdot Q_n(x)) \cdot \mathcal{D} = M \cdot (Q_n(x) \cdot \mathcal{D}). \quad (2.1)$$

## 2.4.2. Álgebras de Fourier

**Definición 2.4.5.** Dada una sucesión de polinomios ortogonales  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  con respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definimos las **álgebras de Fourier a izquierda** y **a derecha** respectivamente por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_L(P) &= \{M \in \mathcal{N}_N : \exists \mathcal{D} \in \mathcal{M}_N, M \cdot P = P \cdot \mathcal{D}\} \subseteq \mathcal{N}_N, \\ \mathcal{F}_R(P) &= \{\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N : \exists M \in \mathcal{N}_N, M \cdot P = P \cdot \mathcal{D}\} \subseteq \mathcal{M}_N, \end{aligned}$$

donde estamos pensando  $P: \mathbb{C} \times \mathbb{N}_0 \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ ,  $P: (x, n) \mapsto P_n(x)$ .

Se cumple que  $\mathcal{F}_L(P)$  y  $\mathcal{F}_R(P)$  son álgebras pues dados  $M_1, M_2 \in \mathcal{N}_N$  y  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathcal{M}_N$  con  $M_i \cdot P = P \cdot \mathcal{D}_i$  para  $i = 1, 2$ , tenemos que

$$(M_1 M_2) \cdot P = P \cdot (\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2)$$

debido a (2.1).

**Ejemplo 2.4.6.** Dada  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  sucesión de polinomios ortogonales mónicos, la relación de recurrencia de tres términos

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x),$$

se puede ver de la forma

$$\mathcal{L} \cdot P_n(x) = P_n(x) \cdot x \quad \text{para} \quad \mathcal{L} = \delta + B_n + C_n \delta^{-1}.$$

Por lo tanto, tenemos que  $\mathcal{L} \in \mathcal{F}_L(P)$  (y  $x \in \mathcal{F}_R(P)$ ).

**Ejemplo 2.4.7.** Hemos dicho que los polinomios mónicos de Hermite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  escalares cumplen la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$-2nh_n(x) = h_n''(x) - 2xh_n'(x).$$

Esto se puede interpretar como

$$(-2n) \cdot h_n(x) = h_n(x) \cdot \mathcal{D} \quad \text{para} \quad \mathcal{D} = \partial_x^1(-2x) + \partial_x^2.$$

Por lo tanto, tenemos que  $\mathcal{D} \in \mathcal{F}_R(h)$  (y  $-2n \in \mathcal{F}_L(h)$ ).

Se puede razonar de manera análoga para las demás familias clásicas de polinomios ortogonales y sus respectivas ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Veamos ahora una unicidad asociada a las álgebras de Fourier:

**Lema 2.4.8.** *Dado  $\mathcal{D} \in \mathcal{F}_R(P)$ , existe un único  $M \in \mathcal{F}_L(P)$  tal que  $M \cdot P = P \cdot \mathcal{D}$ . Recíprocamente, dado  $M \in \mathcal{F}_L(P)$ , existe un único  $\mathcal{D} \in \mathcal{F}_R(P)$  tal que  $M \cdot P = P \cdot \mathcal{D}$ .*

*Demostración:*

Supongamos que existen  $M_1, M_2 \in \mathcal{F}_L(P)$  tales que

$$(M_1 \cdot P)(x, n) = (P \cdot \mathcal{D})(x, n) \quad \text{y} \quad (M_2 \cdot P)(x, n) = (P \cdot \mathcal{D})(x, n).$$

Entonces  $((M_1 - M_2) \cdot P)(x, n) = 0$ . Ahora, supongamos que

$$((M_1 - M_2) \cdot P)(x, n) = \sum_{i=-\ell}^k G_i(n)P(x, n+i),$$

con lo cual, viendo el coeficiente director, obtenemos que  $G_k(n) = 0$ . Continuando así recursivamente, tendremos que  $G_i(n) = 0$  para  $i = -\ell, \dots, k$ . Luego,  $M_1 = M_2$ .

La recíproca se demuestra de forma completamente análoga. ■

**Definición 2.4.9.** *El mapa  $\Phi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}_L(P) \rightarrow \mathcal{F}_R(P)$  definido por*

$$M \cdot P = P \cdot \Phi_{\mathcal{F}}(M),$$

*es llamado el **mapa de Fourier generalizado**.*

**Observación 2.4.10.** Por el lema anterior tenemos que  $\Phi_{\mathcal{F}}$  es biyección. Más aún, se puede verificar que  $\Phi_{\mathcal{F}}$  es un isomorfismo de álgebras.

**Lema 2.4.11.** *El operador en diferencias  $M = G(n)\delta^i \in \mathcal{N}_N$  tiene adjunta*

$$M^\dagger = \mathcal{H}_n G(n-i)^* \mathcal{H}_{n-i}^{-1} \delta^{-i},$$

donde  $\langle P_n, P_n \rangle = \mathcal{H}_n$ .

*Demostración:*

Para cada  $n, m \in \mathbb{N}_0$  vemos que

$$\begin{aligned} \langle P_n, \mathcal{H}_m G(m-i)^* \mathcal{H}_{m-i}^{-1} \delta^{-i} \cdot P_m \rangle &= \langle P_n, P_{m-i} \rangle \mathcal{H}_{m-i}^{-1} G(m-i) \mathcal{H}_m \\ &= G(m-i) \mathcal{H}_m \delta_{n, m-i} \\ &= G(n) \mathcal{H}_{n+i} \delta_{n, m-i} \\ &= \langle G(n) P_{n+i}, P_m \rangle \\ &= \langle M \cdot P_n, P_m \rangle, \end{aligned}$$

con lo cual la adjunta de  $M$  está dada por  $M^\dagger = \mathcal{H}_n G(n-i)^* \mathcal{H}_{n-i}^{-1} \delta^{-i}$  trivialmente. ■

Como consecuencia directa del lema anterior tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.4.12.** *El operador en diferencias  $M = \sum_{i=-\ell}^k G_i(n)\delta^i \in \mathcal{N}_N$  tiene adjunta*

$$M^\dagger = \sum_{i=-\ell}^k \mathcal{H}_n G_i(n-i)^* \mathcal{H}_{n-i}^{-1} \delta^{-i},$$

donde  $\langle P_n, P_n \rangle = \mathcal{H}_n$ . En particular, esto implica que hay una operación  $\dagger$  bien definida en  $\mathcal{N}_N$  y, por lo tanto, en el álgebra de Fourier a izquierda  $\mathcal{F}_L(P)$  también.

Ahora, buscamos caracterizar las álgebras de Fourier a izquierda y a derecha y, a partir de esto, deducir que son cerradas bajo la adjunta  $\dagger$ .

Vamos a necesitar el lema siguiente, donde se utiliza la notación:

$$\text{Ad}_S(T) := ST - TS, \quad \text{Ad}_S^{k+1}(T) := \text{Ad}_S(\text{Ad}_S^k(T)).$$

Omitimos la demostración (ver [4, Lema 3.6]).

**Lema 2.4.13.** *Sea  $\eta: M_N(\mathbb{C})[x] \rightarrow M_N(\mathbb{C})[x]$  un endomorfismo de  $M_N(\mathbb{C})$ -módulos a izquierda. Si se tiene*

$$\text{Ad}_x^{k+1}(\eta) = 0 \quad \text{para algún } k \in \mathbb{N}_0,$$

entonces existe  $\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N$  operador diferencial de orden a lo sumo  $k$  tal que  $\eta(P) = P \cdot \mathcal{D}$  para cada  $P \in M_N(\mathbb{C})[x]$ .

**Teorema 2.4.14.** *El álgebra de Fourier a izquierda está dado por*

$$\mathcal{F}_L(P) = \left\{ M \in \mathcal{N}_N : \text{Ad}_{\mathcal{L}}^{k+1}(M) = 0 \text{ para algún } k \geq 0 \right\},$$

donde  $\mathcal{L} = \delta + B_n + C_n \delta^{-1}$  viene dado por la relación de recurrencia de tres términos como en el Ejemplo 2.4.6.

*Demostración:*

⊆) Si  $M \in \mathcal{F}_L(P)$ , entonces existe  $\mathcal{D} \in \mathcal{F}_R(P)$  tal que  $M \cdot P_n(x) = P_n(x) \cdot \mathcal{D}$ . Luego  $\text{Ad}_x^{k+1}(\mathcal{D}) = 0$  donde  $k$  es el orden de  $\mathcal{D}$ . Por lo tanto  $\text{Ad}_{\mathcal{L}}^{k+1}(M) = 0$  aplicando el mapa de Fourier generalizado.

⊇) Sea  $M \in \mathcal{N}_N$  con  $\text{Ad}_{\mathcal{L}}^{k+1}(M) = 0$  para algún  $k \in \mathbb{N}_0$ . Consideremos el endomorfismo  $\eta$  de  $M_N(\mathbb{C})$ -módulos a izquierda inducido por el mapa

$$\eta : P_n(x) \mapsto M \cdot P_n(x).$$

Podemos ver a  $\eta$  actuando a derecha sobre los polinomios de la siguiente manera:

$$Q(x) \cdot \eta = \eta(Q(x)), \quad Q \in M_N(\mathbb{C})[x].$$

Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , tenemos que

$$P_n(x) \cdot \text{Ad}_x^{k+1}(\eta) = \text{Ad}_{\mathcal{L}}^{k+1}(M) \cdot P_n(x) = 0.$$

Luego,  $\text{Ad}_x^{k+1}(\eta) = 0$  y por el lema anterior existe un operador diferencial  $\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N$  tal que

$$M \cdot P_n(x) = \eta(P_n(x)) = P_n(x) \cdot \mathcal{D}.$$

Por lo tanto,  $M \in \mathcal{F}_L(P)$ . ■

**Teorema 2.4.15.** *El álgebra de Fourier a derecha está dado por*

$$\mathcal{F}_R(P) = \left\{ \mathcal{D} \in \mathcal{M}_N : \mathcal{D} \text{ tiene una adjunta } \mathcal{D}^\dagger \in \mathcal{M}_N \right\}.$$

*Demostración:*

⊆) Si  $\mathcal{D} \in \mathcal{F}_R(P)$ , entonces existe  $M \in \mathcal{F}_L(P)$  tal que  $M \cdot P_n(x) = P_n(x) \cdot \mathcal{D}$ . Como  $M \in \mathcal{F}_L(P)$ , tenemos que  $\text{Ad}_{\mathcal{L}}^{k+1}(M) = 0$  para algún  $k \geq 0$  por el teorema anterior. Ahora, como  $\mathcal{L}$  es simétrico, entonces  $\text{Ad}_{\mathcal{L}}^{k+1}(M^\dagger) = 0$ . Nuevamente por el teorema anterior,  $M^\dagger \in \mathcal{N}_N$  y luego existe  $\tilde{\mathcal{D}} \in \mathcal{F}_R(P)$  tal que  $M^\dagger \cdot P_n(x) = P_n(x) \cdot \tilde{\mathcal{D}}$ . Ahora, como

$$\langle P_n \cdot \mathcal{D}, P_m \rangle = \langle M \cdot P_n, P_m \rangle = \langle P_n, M^\dagger \cdot P_m \rangle = \langle P_n, P_m \cdot \tilde{\mathcal{D}} \rangle,$$

tenemos que  $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^\dagger$ . Así,  $\mathcal{D}$  tiene una adjunta  $\mathcal{D}^\dagger \in \mathcal{M}_N$ .

⊇) Sea  $\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N$  con adjunta  $\mathcal{D}^\dagger \in \mathcal{M}_N$ . Tomando  $m$  el máximo grado de los coeficientes de  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}^\dagger$ , por el Corolario 2.2.5, tenemos que

$$P_n(x) \cdot \mathcal{D} = \sum_{i=0}^{n+m} A_i^n P_i(x),$$

donde

$$A_i^n = \langle P_n \cdot \mathcal{D}, P_i \rangle \mathcal{H}_i^{-1} = \langle P_n, P_i \cdot \mathcal{D}^\dagger \rangle \mathcal{H}_i^{-1}.$$

Luego,  $A_i^n = 0$  para cada  $n - i > m$  y así

$$P_n(x) \cdot \mathcal{D} = M \cdot P_n(x) \quad \text{para} \quad M = \sum_{i=-m}^m A_{n+i}^n \delta^i.$$

Por lo tanto,  $\mathcal{D} \in \mathcal{F}_R(P)$ . ■

**Corolario 2.4.16.** *Las álgebras de Fourier  $\mathcal{F}_L(P)$  y  $\mathcal{F}_R(P)$  son cerradas bajo la adjunta  $\dagger$ . Más aún, el mapa de Fourier generalizado  $\Phi_{\mathcal{F}}$  satisface  $\Phi_{\mathcal{F}}(M^\dagger) = \Phi_{\mathcal{F}}(M)^\dagger$ .*

*Demostración:*

Por el Teorema 2.4.15, está claro que el álgebra de Fourier a derecha  $\mathcal{F}_R(P)$  es cerrado bajo  $\dagger$ . Por otro lado, viendo la demostración de este teorema tenemos que si  $\Phi_{\mathcal{F}}(M) = \mathcal{D}$ , entonces  $\Phi_{\mathcal{F}}(M^\dagger) = \mathcal{D}^\dagger$ . Luego, como  $\Phi_{\mathcal{F}}$  es isomorfismo de álgebras, obtenemos que el álgebra de Fourier a izquierda  $\mathcal{F}_L(P)$  también es cerrado bajo  $\dagger$ . ■

### 2.4.3. El espacio $\mathcal{F}_R^{(m;k,\ell)}(P)$

A partir de las definiciones de las álgebras de Fourier, podemos considerar los siguientes subespacios de  $\mathcal{F}_R(P)$ :

**Definición 2.4.17.** *Dada una sucesión de polinomios ortogonales  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  y los números  $m, k, \ell \in \mathbb{N}_0$ , se define el siguiente subespacio de  $\mathcal{F}_R(P)$ :*

$$\mathcal{F}_R^{(m;k,\ell)}(P) = \{ \mathcal{D} \in \mathcal{F}_R(P) : \text{ord}(\mathcal{D}) \leq m, \text{ord}_+(\Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{D})) \leq k, \text{ord}_-(\Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{D})) \leq \ell \}.$$

En lo anterior,  $\text{ord}(\mathcal{D})$  denota el orden estándar de un operador diferencial  $\mathcal{D} \in \mathcal{M}_N$  y para un operador en diferencias  $M = \sum_{i=-\ell}^k G_i(n)\delta^i \in \mathcal{N}_N$  denotamos por

$$\begin{aligned}\text{ord}_+(M) &= \text{máx}\{i \in \mathbb{N}_0 : G_i(n) \neq 0\}, \\ \text{ord}_-(M) &= \text{máx}\{j \in \mathbb{N}_0 : G_{-j}(n) \neq 0\},\end{aligned}$$

a los índices asociados al mayor y menor coeficiente no nulo de  $M$  (donde tomaremos  $\text{máx}\{\emptyset\} = 0$  para simplificar notación). Es decir, si  $G_k(n) \neq 0$  y  $G_{-\ell}(n) \neq 0$  para  $M = \sum_{i=-\ell}^k G_i(n)\delta^i \in \mathcal{N}_N$ , tendremos  $\text{ord}_+(M) = k$  y  $\text{ord}_-(M) = \ell$ .

Por lo tanto, tenemos que describir el espacio  $\mathcal{F}_R^{(m;k,\ell)}(P)$  consiste en encontrar todos los operadores diferenciales  $\mathcal{D} = \sum_{i=0}^m \partial_x^i A_i(x) \in \mathcal{F}_R(P)$  (con los  $A_i$  no necesariamente no nulos) tales que  $\Phi_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{D}) = \sum_{i=-\ell}^k G_i(n)\delta^i$  (con los  $G_i(n)$  no necesariamente no nulos).

Para encontrar estos espacios será útil la siguiente proposición:

**Proposición 2.4.18.** *Sea  $\mathcal{D} = \sum_{i=0}^m \partial_x^i A_i(x) \in \mathcal{F}_R(P)$  donde  $M = \sum_{i=-\ell}^k G_i(n)\delta^i \in \mathcal{F}_L(P)$  es tal que  $M \cdot P = P \cdot \mathcal{D}$  y  $\text{ord}_+(M) = k$ . Entonces  $\deg(A_i) \leq k + i$  para  $i = 0, 1, \dots, m$ .*

*Demostración:*

Tenemos que  $M \cdot P_n(x) = P_n(x) \cdot \mathcal{D}$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , es decir

$$\sum_{i=-\ell}^k G_i(n)P_{n+i}(x) = \sum_{i=0}^m P_n^{(i)}(x)A_i(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.2)$$

y además,  $\deg(P_n) = n$ . En particular, viendo (2.2) para  $n = 0$ , obtenemos que

$$\sum_{i=0}^k G_i(0)P_i(x) = P_0(x)A_0(x) = A_0(x),$$

con lo cual  $\deg(A_0) \leq k$  ya que  $\sum_{i=0}^k G_i(0)P_i(x)$  es de grado  $\leq k$ .

De manera similar, la ecuación (2.2) para  $n = 1$  nos dice que

$$\sum_{i=-1}^k G_i(1)P_{i+1}(x) = P_1(x)A_0(x) + P_1'(x)A_1(x),$$

con lo cual  $\deg(A_1) \leq k + 1$  pues  $\sum_{i=-1}^k G_i(1)P_{i+1}(x)$  y  $P_1(x)A_0(x)$  son de grado  $\leq k + 1$  y  $\deg(P_1') = 0$ .

Así sucesivamente, obtenemos que  $\deg(A_i) \leq k + i$  para  $i = 0, 1, \dots, m$ . ■

### Un ejemplo para polinomios ortogonales asociados a un peso de tipo Jacobi

Calculemos algunos de estos subespacios en un ejemplo concreto: consideremos el peso matricial de tipo Jacobi dado por:

$$W(x) = (1-x)^\alpha(1-x)^\beta H(x) \quad \text{con} \quad H(x) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 + 2p + 2px & 2(1-x) \\ 2(1-x) & (1-x)^2 \end{pmatrix},$$

para  $x \in [-1, 1]$ , donde  $\alpha, \beta > -1$  y  $p = \frac{k}{\alpha + 1 - k}$  con  $0 < k < \alpha + 1$ .

Los polinomios ortogonales mónicos  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  asociados al peso  $W$  se pueden calcular computacionalmente (utilizando Maple) por medio de una fórmula de Rodrigues que no es necesario detallar aquí.

A continuación daremos bases explícitas para algunos  $\mathcal{F}_R^{(m;k,\ell)}(P)$ . El objetivo final será dar una base de  $\mathcal{F}_R^{(2;0,1)}(P)$  de manera constructiva.

**El espacio  $\mathcal{F}_R^{(0;0,0)}(P)$ :** Consideremos  $\mathcal{D} = A_0(x)$  y  $M = G_0(n)\delta^0$ . Entonces tenemos  $M \cdot P_n(x) = P_n(x) \cdot \mathcal{D}$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  si y solo si

$$G_0(n)P_n(x) = P_n(x)A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

donde  $\deg(A_0) = 0$  por la Proposición 2.4.18 (es decir,  $A_0$  es constante).

Viendo el coeficiente director de esta última igualdad, obtenemos que

$$G_0(n) = A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Es decir,

$$A_0P_n(x) = P_n(x)A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

y como  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  es base de  $M_2(\mathbb{R})[x]$ ,  $A_0$  es necesariamente escalar. Luego

$$\mathcal{B}(0; 0, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

será base de  $\mathcal{F}_R^{(0;0,0)}(P)$ .

**El espacio  $\mathcal{F}_R^{(1;0,0)}(P)$ :** Consideremos  $\mathcal{D} = \partial_x^1 A_1(x) + A_0(x)$  y  $M = G_0(n)\delta^0$ . Luego,  $M \cdot P_n(x) = P_n(x) \cdot \mathcal{D}$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  si y solo si

$$G_0(n)P_n(x) = P_n'(x)A_1(x) + P_n(x)A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.3)$$

con  $\deg(A_1) \leq 1$  y  $\deg(A_0) = 0$  por la Proposición 2.4.18. Entonces, denotando por  $A_1(x) = A_1^1 x + A_1^0$  y viendo el coeficiente director de (2.3), tenemos que

$$G_0(n) = nA_1^1 + A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Aplicando esto a (2.3), obtenemos que

$$(nA_1^1 + A_0)P_n(x) = P_n'(x)(A_1^1 x + A_1^0) + P_n(x)A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.4)$$

Ahora, notemos que basta encontrar tres ecuaciones matriciales para determinar los posibles valores de  $A_1(x) = A_1^1 x + A_1^0$  y  $A_0$  (tenemos 3 matrices como incógnitas). Para

esto denotemos  $P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} P_n^k x^k$  y analicemos (2.4) para diferentes valores de  $n$ :

- $n = 0$ : tenemos que

$$A_0 I = I A_0$$

y esto no aporta información.

- $n = 1$ : tenemos que

$$(A_1^1 + A_0)(x + P_1^0) = I(A_1^1 x + A_1^0) + (x + P_1^0)A_0.$$

Está claro que comparando coeficientes asociados a  $x^1$  de esta igualdad no nos aporta información pero si vemos los coeficientes asociados a  $x^0$  tenemos que

$$(A_1^1 + A_0)P_1^0 = A_1^0 + P_1^0 A_0 \quad (2.5)$$

y esta es una de las ecuaciones buscadas.

- $n = 2$ : tenemos que

$$(2A_1^1 + A_0)(x^2 + P_2^1 x + P_2^0) = (2x + P_2^1)(A_1^1 x + A_1^0) + (x^2 + P_2^1 x + P_2^0)A_0.$$

Comparando los coeficientes asociados a  $x^1$  y  $x^0$  obtenemos las dos ecuaciones restantes:

$$\begin{aligned} (2A_1^1 + A_0)P_2^1 &= 2A_1^0 + P_2^1 A_1^1 + P_2^1 A_0 \\ (2A_1^1 + A_0)P_2^0 &= P_2^1 A_1^0 + P_2^0 A_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Luego de (2.5) y (2.6) tenemos 3 ecuaciones para determinar los valores de  $A_1^1$ ,  $A_1^0$  y  $A_0$ . Con la ayuda de Maple determinamos que  $A_1(x) = 0$  y  $A_0$  es escalar. Por lo tanto

$$\mathcal{B}(1; 0, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es base de  $\mathcal{F}_R^{(1;0,0)}(P)$ .

**El espacio  $\mathcal{F}_R^{(1;0,1)}(P)$ :** Sean  $\mathcal{D} = \partial_x^1 A_1(x) + A_0(x)$  y  $M = G_0(n)\delta^0 + G_{-1}(n)\delta^{-1}$ . Luego,  $M \cdot P_n(x) = P_n(x) \cdot \mathcal{D}$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  si y solo si

$$G_0(n)P_n(x) + G_{-1}(n)P_{n-1}(x) = P_n'(x)A_1(x) + P_n(x)A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.7)$$

con  $\deg(A_1) \leq 1$  y  $\deg(A_0) = 0$  por la Proposición 2.4.18. Denotando  $A_1(x) = A_1^1 x + A_1^0$ ,  $P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} P_n^k x^k$  y viendo los coeficientes director y asociado a  $x^{n-1}$  en (2.7), obtenemos

$$\begin{aligned} G_0(n) &= nA_1^1 + A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ G_0(n)P_n^{n-1} + G_{-1}(n) &= nA_1^0 + (n-1)P_n^{n-1}A_1^1 + P_n^{n-1}A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Aplicando esto a (2.7), obtenemos que

$$\begin{aligned} (nA_1^1 + A_0)P_n(x) + (nA_1^0 + (n-1)P_n^{n-1}A_1^1 + P_n^{n-1}A_0 - (nA_1^1 + A_0)P_n^{n-1})P_{n-1}(x) \\ = P_n'(x)(A_1^1 x + A_1^0) + P_n(x)A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nuevamente basta encontrar tres ecuaciones matriciales para determinar los posibles valores de  $A_1(x) = A_1^1 x + A_1^0$  y  $A_0$ . Luego, veamos (2.8) para diferentes valores de  $n$ :

- $n = 0$ : tenemos que

$$A_0 I = I A_0$$

y esto no aporta información.

- $n = 1$ : tenemos que

$$(A_1^1 + A_0)(x + P_1^0) + (A_1^0 + P_1^0 A_0 - (A_1^1 + A_0)P_1^0) I = I(A_1^1 x + A_1^0) + (x + P_1^0)A_0.$$

Comparando los coeficientes asociados a  $x^1$  y  $x^0$  no nos aporta información en este caso tampoco.

- $n = 2$ : tenemos que

$$\begin{aligned} (2A_1^1 + A_0)(x^2 + P_2^1 x + P_2^0) + (2A_1^0 + P_2^1 A_1^1 + P_2^1 A_0 - (2A_1^1 + A_0)P_2^1) (x + P_1^0) \\ = (2x + P_2^1)(A_1^1 x + A_1^0) + (x^2 + P_2^1 x + P_2^0)A_0. \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes asociados a  $x^2$ ,  $x^1$  y  $x^0$  se puede ver que solo los asociados a  $x^0$  nos da una de las ecuaciones buscadas:

$$\begin{aligned} (2A_1^1 + A_0)P_2^0 + (2A_1^0 + P_2^1 A_1^1 + P_2^1 A_0 - (2A_1^1 + A_0)P_2^1) P_1^0 \\ = P_2^1 A_1^0 + P_2^0 A_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

- $n = 3$ : tenemos que

$$\begin{aligned} (3A_1^1 + A_0)P_3(x) + (3A_1^0 + 2P_3^2 A_1^1 + P_3^2 A_0 - (3A_1^1 + A_0)P_3^2) P_2(x) \\ = (3x^2 + 2P_3^2 x + P_3^1)(A_1^1 x + A_1^0) + P_3(x)A_0. \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes asociados a  $x^3$  y  $x^2$  no obtenemos información pero con los coeficientes  $x^1$  y  $x^0$  obtenemos las dos ecuaciones restantes:

$$\begin{aligned} (3A_1^1 + A_0)P_3^1 + (3A_1^0 + 2P_3^2 A_1^1 + P_3^2 A_0 - (3A_1^1 + A_0)P_3^2) P_2^1 \\ = 2P_3^2 A_1^0 + P_3^1 A_1^1 + P_3^1 A_0, \\ (3A_1^1 + A_0)P_3^0 + (3A_1^0 + 2P_3^2 A_1^1 + P_3^2 A_0 - (3A_1^1 + A_0)P_3^2) P_2^0 \\ = P_3^1 A_1^0 + P_3^0 A_0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Luego, de (2.9) y (2.10) tenemos las tres ecuaciones para determinar los valores de  $A_1^1$ ,  $A_1^0$  y  $A_0$ . Utilizando Maple se puede ver que:

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ \alpha + \beta + 2 - k & 0 \end{pmatrix} (x + 1) \quad y \quad A_0 = \begin{pmatrix} b - a \frac{\alpha + 1 - k}{\alpha + \beta + 2 - k} & a \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

con  $a$  y  $b$  variables libres. Por lo tanto

$$\mathcal{B}(1; 0, 1) = \left\{ \partial_x^1 \begin{pmatrix} 0 & x + 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\alpha + 1 - k) & \alpha + \beta + 2 - k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es base de  $\mathcal{F}_R^{(1;0,1)}(P)$ .

## 2.4. ÁLGEBRAS DE FOURIER

**El espacio  $\mathcal{F}_R^{(2;0,0)}(P)$ :** Sean  $\mathcal{D} = \partial_x^2 A_2(x) + \partial_x A_1(x) + A_0(x)$  y  $M = G_0(n)\delta^0$ . Luego,  $M \cdot P_n(x) = P_n(x) \cdot \mathcal{D}$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  si y solo si

$$G_0(n)P_n(x) = P_n''(x)A_2(x) + P_n'(x)A_1(x) + P_n(x)A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.11)$$

con  $\deg(A_2) \leq 2$ ,  $\deg(A_1) \leq 1$  y  $\deg(A_0) = 0$  por la Proposición 2.4.18. Denotando  $A_2(x) = A_2^2 x^2 + A_2^1 x + A_2^0$  y  $A_1(x) = A_1^1 x + A_1^0$  y viendo el coeficiente director de (2.11), tenemos que

$$G_0(n) = n(n-1)A_2^2 + nA_1^1 + A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Aplicando esto a (2.11), obtenemos que

$$(n(n-1)A_2^2 + nA_1^1 + A_0)P_n(x) = P_n''(x)A_2(x) + P_n'(x)A_1(x) + P_n(x)A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.12)$$

Ahora, basta encontrar seis ecuaciones matriciales para determinar los posibles valores de  $A_2(x) = A_2^2 x^2 + A_2^1 x + A_2^0$ ,  $A_1(x) = A_1^1 x + A_1^0$  y  $A_0$ . Denotando  $P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} P_n^k x^k$

y utilizando Maple es posible ver que estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} (A_1^1 + A_0)P_1^0 &= A_1^0 + P_1^0 A_0, \\ (2A_2^2 + 2A_1^1 + A_0)P_2^1 &= 2A_2^1 + 2A_1^0 + P_2^1 A_1^1 + P_2^1 A_0, \\ (2A_2^2 + 2A_1^1 + A_0)P_2^0 &= 2A_2^0 + P_2^1 A_1^0 + P_2^0 A_0, \\ (6A_2^2 + 3A_1^1 + A_0)P_3^2 &= 6A_2^1 + 2P_3^2 A_2^2 + 3A_1^0 + 2P_3^2 A_1^1 + P_3^2 A_0, \\ (6A_2^2 + 3A_1^1 + A_0)P_3^1 &= 6A_2^0 + 2P_3^2 A_2^1 + 2P_3^2 A_1^0 + P_3^1 A_1^1 + P_3^1 A_0, \\ (6A_2^2 + 3A_1^1 + A_0)P_3^0 &= 2P_3^2 A_2^0 + P_3^1 A_1^0 + P_3^0 A_0, \end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned} A_2(x) &= \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 & 2(b-a) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a & 2(b-a) \\ 0 & b \end{pmatrix}, \\ A_1(x) &= \begin{pmatrix} -a(\alpha + \beta + 3) & 0 \\ (b-a)(\alpha + 1 - k) & -b(\alpha + \beta + 4) \end{pmatrix} (x-1) \\ &\quad + \begin{pmatrix} -2ak - 2b(\alpha + 1 - k) & 2b(\alpha + \beta + 2 - k) - 2a(\alpha + \beta + 3 - k) \\ 0 & -2b(2+k) - 2a(\alpha + 1 - k) \end{pmatrix}, \\ A_0 &= \begin{pmatrix} (a-b)k^2 + bk(\alpha + \beta + 1) + (b-ak)(\alpha + \beta + 2) + c & 0 \\ (b + (b-a)k)(\alpha + 1 - k) & c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con  $a, b$  y  $c$  variables libres. Luego, tomando

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \partial_x^2 \begin{pmatrix} x^2 - 1 & 2(x+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial_x^1 \begin{pmatrix} (\alpha + \beta + 3)(x-1) + 2k & 2(\alpha + \beta + 3 - k) \\ (\alpha + 1 - k)(x-1) & 2(\alpha + 1 - k) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} k(\alpha + \beta + 2 - k) & 0 \\ k(\alpha + 1 - k) & 0 \end{pmatrix}, \\ \widetilde{\mathcal{B}}_2 &= \partial_x^2 \begin{pmatrix} 0 & 2(x+1) \\ 0 & -x^2 + 1 \end{pmatrix} + \partial_x^1 \begin{pmatrix} -2(\alpha + 1 - k) & 2(\alpha + \beta + 2 - k) \\ (\alpha + 1 - k)(x-1) & -x(\alpha + \beta + 4) + \alpha + \beta - 2k \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} (k+1)(\alpha + \beta + 2 - k) & 0 \\ (k+1)(\alpha + 1 - k) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

tenemos que

$$\widetilde{\mathcal{B}}(2; 0, 0) = \left\{ \widetilde{\mathcal{B}}_1, \widetilde{\mathcal{B}}_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es base de  $\mathcal{F}_R^{(2;0,0)}(P)$ . Vamos a tomar la base alternativa

$$\mathcal{B}(2; 0, 0) = \left\{ \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

donde  $\mathcal{B}_2 = \widetilde{\mathcal{B}}_2 - \mathcal{B}_1$ , es decir:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 = & -\partial_x^2 \begin{pmatrix} x^2 - 1 & 0 \\ 0 & x^2 - 1 \end{pmatrix} \\ & + \partial_x^1 \begin{pmatrix} -(\alpha + \beta + 3)x - \alpha + \beta + 1 & -2 \\ 0 & -(\alpha + \beta + 4)x - \alpha + \beta - 2 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \alpha + \beta + 2 - k & 0 \\ \alpha + 1 - k & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**El espacio  $\mathcal{F}_R^{(2;0,1)}(P)$ :** Consideremos  $\mathcal{D} = \partial_x^2 A_2(x) + \partial_x^1 A_1(x) + A_0(x)$  y además  $M = G_0(n)\delta^0 + G_{-1}(n)\delta^{-1}$ . Así,  $M \cdot P_n(x) = P_n(x) \cdot \mathcal{D}$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  si y solo si  $G_0(n)P_n(x) + G_{-1}(n)P_{n-1}(x) = P_n''(x)A_2(x) + P_n'(x)A_1(x) + P_n(x)A_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ , con  $\deg(A_2) \leq 2$ ,  $\deg(A_1) \leq 1$  y  $\deg(A_0) = 0$  por la Proposición 2.4.18. Aplicando un procedimiento análogo a los demás casos y utilizando Maple se puede ver que

$$\widetilde{\mathcal{B}}(2; 0, 1) = \left\{ \widetilde{\mathcal{B}}_1, \widetilde{\mathcal{B}}_2, \widetilde{\mathcal{B}}_3, \widetilde{\mathcal{B}}_4, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de  $\mathcal{F}_R^{(2;0,1)}(P)$  donde

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{B}}_1 = & \partial_x^2 \begin{pmatrix} -x^2 + 1 & 2(x^2 + x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + \partial_x^1 \begin{pmatrix} -(3\alpha + \beta + 5 - 2k)x - \alpha + \beta + 1 & 2x(\alpha + \beta + 3 - k) \\ (\alpha + 1 - k)(x - 1) & 2x(\alpha + 1 - k) \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} (2\alpha + 2 - k)(\alpha + \beta + 2 - k) & 0 \\ (2\alpha + 2 - k)(\alpha + 1 - k) & 0 \end{pmatrix}, \\ \widetilde{\mathcal{B}}_2 = & \partial_x^2 \begin{pmatrix} 0 & (x + 1)^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial_x^1 \begin{pmatrix} -(\alpha + 1 - k)(x + 1) & 0 \\ 0 & (\alpha + 1 - k)(x + 1) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \alpha + 1 - k & -(\alpha + \beta + 3 - k)(\alpha + \beta + 2 - k) \\ -(\alpha + 1 - k)^2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \widetilde{\mathcal{B}}_3 = & -\partial_x^2 \begin{pmatrix} 0 & 2(x^2 + x) \\ 0 & x^2 - 1 \end{pmatrix} \\ & + \partial_x^1 \begin{pmatrix} 2x(\alpha + 1 - k) & -2x(\alpha + \beta + 2 - k) \\ (\alpha + 1 - k)(x - 1) & -(3\alpha + \beta + 6 - 2k)x - \alpha + \beta - 2 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 2\alpha^2 + (-3k + 2\beta + 5)\alpha + k^2 + -(\beta + 3)k + 3\beta + 4 & 2(\alpha + \beta + 2 - k) \\ (2\alpha + 3 - k)(\alpha + 1 - k) & 0 \end{pmatrix}, \\ \widetilde{\mathcal{B}}_4 = & \partial_x^1 \begin{pmatrix} 0 & x + 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\alpha + 1 - k) & \alpha + \beta + 2 - k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 2.4. ÁLGEBRAS DE FOURIER

---

Ahora, buscamos tener una base que sea una extensión de las bases anteriores usando que  $\mathcal{F}_R^{(1;0,0)}(P) \subseteq \mathcal{F}_R^{(2;0,0)}(P) \subseteq \mathcal{F}_R^{(2;0,1)}(P)$  y  $\mathcal{F}_R^{(1;0,1)}(P) \subseteq \mathcal{F}_R^{(2;0,1)}(P)$ . Por lo tanto, tomamos

$$\mathcal{B}(2; 0, 1) = \left\{ \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

donde  $\mathcal{B}_4$  proviene de la base de  $\mathcal{F}_R^{(1;0,1)}(P)$ :

$$\mathcal{B}_4 = \widetilde{\mathcal{B}}_4 = \partial_x^1 \begin{pmatrix} 0 & x+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\alpha+1-k) & \alpha+\beta+2-k \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathcal{B}_3$  y  $\mathcal{B}_2$  provienen de la base de  $\mathcal{F}_R^{(2;0,0)}(P)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_3 &= \partial_x^2 \begin{pmatrix} x^2-1 & 2(x+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial_x^1 \begin{pmatrix} (\alpha+\beta+3)(x-1)+2k & 2(\alpha+\beta+3-k) \\ (\alpha+1-k)(x-1) & 2(\alpha+1-k) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} k(\alpha+\beta+2-k) & 0 \\ k(\alpha+1-k) & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B}_2 &= -\partial_x^2 \begin{pmatrix} x^2-1 & 0 \\ 0 & x^2-1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \partial_x^1 \begin{pmatrix} -(\alpha+\beta+3)x - \alpha + \beta + 1 & -2 \\ 0 & -(\alpha+\beta+4)x - \alpha + \beta - 2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \alpha+\beta+2-k & 0 \\ \alpha+1-k & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y finalmente  $\mathcal{B}_1 = \widetilde{\mathcal{B}}_2$  que es el elemento faltante para la base.

## CAPÍTULO 3

---

# PROBLEMAS DE RIEMANN-HILBERT

---

En este capítulo estudiaremos los *problemas de Riemann-Hilbert* que son problemas de valores frontera sobre el plano complejo. Veremos una caracterización de los polinomios ortogonales sobre la recta real dada por Fokas, Its y Kitaev [16] que consiste en describir los polinomios ortogonales como la solución única de un problema de Riemann-Hilbert matricial de dimensión  $2 \times 2$ . La principal ventaja de esta caracterización es que permite estudiar el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales (aunque esto será explicado en más detalle en el próximo capítulo).

Introduzcamos un problema de Riemann-Hilbert general: dada  $\Gamma$  curva suave orientada en el plano complejo  $\mathbb{C}$ , la orientación induce un lado positivo  $+$  y un lado negativo  $-$  sobre  $\Gamma$ . Más precisamente, al recorrer  $\Gamma$  según la orientación, por definición el lado positivo está “a la izquierda” de  $\Gamma$ , mientras que el lado negativo está “a la derecha”.

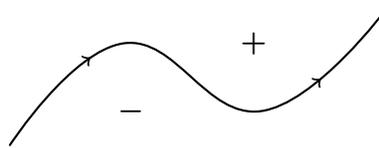


Figura 3.1: Curva orientada.

Ahora, un problema de Riemann-Hilbert genérico consiste en encontrar una función  $f$  definida en  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$  tal que:

1.  $f$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ .
2.  $f$  satisface alguna “condición de salto” sobre  $\Gamma$  (considerando los lados positivo y negativo de  $\Gamma$ ).
3.  $f$  tiene algún comportamiento en  $\infty$ .
4.  $f$  cumple ciertas condiciones sobre los extremos de  $\Gamma$  (en caso de tener extremos).

Se puede también considerar una colección de curvas orientadas en un caso más generalizado.

En lo que sigue, vamos a concentrarnos en el caso en que la curva  $\Gamma$  es  $\mathbb{R}$  (orientada de la forma usual). Por esto, la condición (4) no es considerada.

### 3.1. Problemas aditivos

Vamos a comenzar con problemas escalares. Dada una función  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  real (escalar), un problema de Riemann-Hilbert aditivo consiste en encontrar una función  $f$  definida en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  tal que:

1.  $f$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .
2.  $f_+(x) = f_-(x) + w(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ , donde  $f_{\pm}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x \pm i\epsilon)$ .
3.  $f(z) = \mathcal{O}(1/z)$  cuando  $z \rightarrow \infty$ , donde estamos utilizando la “notación O-grande”.

Veremos que existe solución única a este problema bajo ciertas condiciones sobre  $w$ .

#### 3.1.1. Fórmulas de Sokhotski–Plemelj y solución del problema aditivo

Para resolver el problema de Riemann-Hilbert escalar y aditivo es necesario el uso de las llamadas *fórmulas de Sokhotski–Plemelj* que consisten en estudiar los valores frontera  $\Phi_{\pm}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi(x \pm i\epsilon)$  sobre  $\mathbb{R}$  de la función

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{t - z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

en donde estamos considerando el valor principal de Cauchy de la integral.

En lo que sigue, denotamos

$$L_1(\mathbb{R}) = \left\{ w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible: } \int_{\mathbb{R}} |w(t)| dt < \infty \right\}.$$

**Definición 3.1.1.** Una función  $w \in L_1(\mathbb{R})$  se dice una función **Hölder continua** en  $\mathbb{R}$  si cumple que

$$|w(x) - w(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

para algún  $C > 0$  constante y  $0 < \alpha \leq 1$ .

**Teorema 3.1.2.** Sea  $w \in L_1(\mathbb{R})$  Hölder continua en  $\mathbb{R}$  y  $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{t - z} dt$ , entonces dado  $x \in \mathbb{R}$ , se cumple que:

$$\Phi_+(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi(x + i\epsilon) = \frac{1}{2}w(x) + \Phi(x) \quad \text{y} \quad \Phi_-(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi(x - i\epsilon) = -\frac{1}{2}w(x) + \Phi(x).$$

Estas ecuaciones se denominan las **fórmulas de Sokhotski–Plemelj**.

*Demostración:*

Veamos que

$$\Phi_+(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi(x + i\epsilon) = \frac{1}{2}w(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{x - t} dt,$$

donde la integral se entiende como el valor principal de Cauchy dado por:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{x - t} dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|t-x|>\delta} \frac{w(t)}{x - t} dt.$$

Notemos que

$$\Phi(x + i\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{t - (x + i\epsilon)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} w(t) \frac{(t - x) + i\epsilon}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt,$$

con lo cual debemos analizar los límites

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt \quad \text{y} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} w(t) \frac{(t - x)}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt. \quad (3.1)$$

El primer límite en (3.1) lo podemos resolver con el cambio de variables  $t = x + s\epsilon$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(x + s\epsilon)}{s^2 + 1} ds = \frac{w(x)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s^2 + 1} ds = \frac{w(x)}{2}, \quad (3.2)$$

donde el intercambio del límite con la integral en la penúltima igualdad se justifica utilizando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Por otro lado, para ver el segundo límite en (3.1), tomando  $\epsilon \leq \delta$ , vemos que

$$\int_{\mathbb{R}} w(t) \frac{(t - x)}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt = \int_{|t-x|>\delta} w(t) \frac{(t - x)}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt + \int_{|t-x|\leq\delta} w(t) \frac{(t - x)}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt.$$

Claramente

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|t-x|>\delta} w(t) \frac{(t - x)}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt = - \int_{|t-x|>\delta} \frac{w(t)}{x - t} dt,$$

lo cual tiende al valor principal de Cauchy de  $-\int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{x - t} dt$  para  $\delta \rightarrow 0$ . Además, como

$$\int_{|t-x|\leq\delta} \frac{(t - x)}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt = 0,$$

tendremos que

$$\int_{|t-x|\leq\delta} w(t) \frac{(t - x)}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt = \int_{|t-x|\leq\delta} (w(t) - w(x)) \frac{(t - x)}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt.$$

Ahora, por la continuidad de Hölder de  $w$ , para cada  $\epsilon > 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{|t-x|\leq\delta} (w(t) - w(x)) \frac{(t - x)}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt \right| &\leq C \int_{|t-x|\leq\delta} \frac{|t - x|^{\alpha+1}}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt \\ &\leq C \int_{|t-x|\leq\delta} |t - x|^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{2C}{\alpha} \delta^{\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} w(t) \frac{(t - x)}{(t - x)^2 + \epsilon^2} dt = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{x - t} dt. \quad (3.3)$$

Finalmente, utilizando los límites encontrados en (3.2) y (3.3) tenemos que

$$\Phi_+(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi(x + i\epsilon) = \frac{1}{2} w(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{x - t} dt = \frac{1}{2} w(x) + \Phi(x).$$

De forma completamente análoga, se puede ver que

$$\Phi_-(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi(x - i\epsilon) = -\frac{1}{2}w(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{x-t} dt = -\frac{1}{2}w(x) + \Phi(x).$$

Por lo tanto, obtuvimos las fórmulas buscadas. ■

Ahora estamos en condiciones de resolver el problema de Riemann-Hilbert aditivo:

**Teorema 3.1.3.** *Dada  $w \in L_1(\mathbb{R})$  función Hölder continua en  $\mathbb{R}$ , la única solución al problema de Riemann-Hilbert escalar y aditivo está dada por  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{t-z} dt$ .*

*Demostración:*

Veamos que  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{t-z} dt$  cumple lo buscado:

1.  $f$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  trivialmente.
2. Dado  $x \in \mathbb{R}$ , por las fórmulas de Sokhotski–Plemelj, se cumple que

$$f_+(x) - f_-(x) = f(x) + \frac{1}{2}w(x) - \left( f(x) - \frac{1}{2}w(x) \right) = w(x),$$

es decir,  $f_+(x) = f_-(x) + w(x)$ .

3. Cuando  $z \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} w(t) dt,$$

y esto es falso pues  $w \in L_1(\mathbb{R})$ . Luego,  $f(z) = \mathcal{O}(1/z)$  cuando  $z \rightarrow \infty$ .

Por lo tanto,  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{t-z} dt$  es una solución al problema de Riemann-Hilbert.

Veamos que esta solución es única: si  $g$  es otra solución, tendremos que  $f - g$  es una función analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Además,  $f - g$  es continua en  $\mathbb{R}$  pues, dado  $x \in \mathbb{R}$ , vemos que

$$(f - g)_+(x) = f_+(x) - g_+(x) = f_-(x) + w(x) - (g_-(x) + w(x)) = (f - g)_-(x).$$

Por lo tanto,  $f - g$  resulta ser función entera y además,  $(f - g)(z) = \mathcal{O}(1/z)$  cuando  $z \rightarrow \infty$ , con lo cual  $f - g$  es acotada. Así, por el teorema de Liouville,  $f - g$  es constante y al tender a 0 cuando  $z \rightarrow \infty$ ,  $f - g \equiv 0$ . Por lo tanto,  $f = g$  y  $f$  es única. ■

### 3.1.2. Relación con el problema multiplicativo

Supongamos que se tiene un problema de Riemann-Hilbert escalar *multiplicativo*, es decir, dada  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , buscamos encontrar una función  $f$  definida en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  tal que:

1.  $f$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .
2.  $f_+(x) = f_-(x)w(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ , donde  $f_{\pm}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x \pm i\epsilon)$ .
3.  $f(z) \rightarrow 1$  cuando  $z \rightarrow \infty$ .

Realizando modificaciones, es posible utilizar el caso aditivo para resolver este problema. Más precisamente, considerando  $\text{Ln}(f(z))$ , donde  $\text{Ln}$  es la rama principal del logaritmo, el problema de Riemann-Hilbert anterior se convierte en encontrar  $\text{Ln}(f)$  tal que:

1.  $\text{Ln}(f)$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .
2.  $\text{Ln}(f(x))_+ = \text{Ln}(f(x))_- + \text{Ln}(w(x))$  para  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $\text{Ln}(f(z)) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ .

Notemos que es necesario tomar  $w > 0$  para tener  $\text{Ln}(w(x))$  bien definida en el punto (2).

Ahora, con la modificación realizada, obtuvimos un problema de Riemann-Hilbert aditivo cuya única solución vimos que está dada por:

$$\text{Ln}(f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{Ln}(w(t))}{t-z} dt,$$

siempre que  $\text{Ln}(w) \in L_1(\mathbb{R})$  es Hölder continua en  $\mathbb{R}$ .

Por lo tanto, dada  $w > 0$  tal que  $\text{Ln}(w) \in L_1(\mathbb{R})$  es Hölder continua en  $\mathbb{R}$ , la solución al problema de Riemann-Hilbert multiplicativo está dada por:

$$f(z) = \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{Ln}(w(t))}{t-z} dt \right).$$

**Observación 3.1.4.** Por lo general, la condición  $\text{Log}(f(z)) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$  genera problemas para un  $w$  arbitrario pues se podría obtener  $\text{Log}(f(z)) \rightarrow 2\pi k$  cuando  $z \rightarrow \infty$  para  $k \in \mathbb{Z}$  dependiendo de la rama del logaritmo tomada. Por esto, se suele tomar una formulación aditiva del problema de Riemann-Hilbert directamente (como fue hecho al comienzo de la sección).

## 3.2. Problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales

En esta sección daremos la caracterización de los polinomios ortogonales asociados a una función peso  $w$  sobre la recta real a través de un problema de Riemann-Hilbert matricial.

Explícitamente, dada  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función peso, el problema de Riemann-Hilbert para caracterizar los polinomios ortogonales consiste en encontrar, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , una función matricial  $Y = Y^{(n)}: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$  tal que:

1.  $Y^{(n)}$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .
2.  $Y_+^{(n)}(x) = Y_-^{(n)}(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  para  $x \in \mathbb{R}$ , donde  $Y_{\pm}^{(n)}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Y^{(n)}(x \pm i\epsilon)$ .
3.  $Y^{(n)}(z) = (I + \mathcal{O}(1/z)) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}$  cuando  $z \rightarrow \infty$ .

Vamos a ver que la solución de este problema depende completamente de los polinomios ortogonales asociados a la función peso  $w$ .

**Observación 3.2.1.** Notemos que la condición (3) nos dice que:

$$\begin{aligned} Y_{1,1}(z) &= z^n + \mathcal{O}(z^{n-1}), & Y_{1,2}(z) &= \mathcal{O}(z^{-n-1}), \\ Y_{2,1}(z) &= \mathcal{O}(z^{n-1}), & Y_{2,2}(z) &= z^{-n} + \mathcal{O}(z^{-n-1}), \end{aligned}$$

cuando  $z \rightarrow \infty$ .

### 3.2.1. Solución y unicidad

Antes de encontrar la solución explícita al problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales, verifiquemos la unicidad:

**Proposición 3.2.2.** *Si el problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales tiene solución, entonces esta solución es única.*

*Demostración:*

Sea  $Y$  una solución al problema, entonces

$$\det(Y_+(x)) = \det(Y_-(x)) \det \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(Y_-(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Luego,  $\det(Y(z))$  es función analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  y continua en  $\mathbb{R}$ , con lo cual es función entera. Además, por la Observación 3.2.1, tenemos que

$$\det(Y(z)) = Y_{1,1}(z)Y_{2,2}(z) - Y_{1,2}(z)Y_{2,1}(z) = 1 + \mathcal{O}(1/z) \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty.$$

Por el teorema de Liouville,  $\det(Y(z)) = 1$  sobre  $\mathbb{C}$  y así,  $Y(z)$  es invertible en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  con  $Y^{-1}$  analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Ahora, sea  $X$  otra solución al problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales y consideremos la función  $Z = XY^{-1}$ . Entonces  $Z$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  y es además continua en  $\mathbb{R}$  pues, dado  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} Z_+(x) &= X_+(x)Y_+^{-1}(x) = X_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (Y_+(x))^{-1} \\ &= X_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} Y_-^{-1}(x) \\ &= X_-(x)Y_-^{-1}(x) \\ &= Z_-(x). \end{aligned}$$

Luego,  $Z$  es función entera y vemos que

$$\begin{aligned} Z(z) &= X(z)Y^{-1}(z) \\ &= \begin{pmatrix} X_{11}(z) & X_{12}(z) \\ X_{21}(z) & X_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11}(z) & Y_{12}(z) \\ Y_{21}(z) & Y_{22}(z) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} X_{11}(z) & X_{12}(z) \\ X_{21}(z) & X_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{22}(z) & -Y_{12}(z) \\ -Y_{21}(z) & Y_{11}(z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_{11}(z)Y_{22}(z) - X_{12}(z)Y_{21}(z) & -X_{11}(z)Y_{12}(z) + X_{12}(z)Y_{11}(z) \\ X_{21}(z)Y_{22}(z) - X_{22}(z)Y_{21}(z) & -X_{21}(z)Y_{12}(z) + X_{22}(z)Y_{11}(z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \mathcal{O}(1/z) & \mathcal{O}(1/z) \\ \mathcal{O}(1/z) & 1 + \mathcal{O}(1/z) \end{pmatrix} \\ &= I + \mathcal{O}(1/z) \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Nuevamente, por el teorema de Liouville,  $Z \equiv I$  sobre  $\mathbb{C}$ , es decir, se tiene que  $X(z) = Y(z)$  para cada  $z \in \mathbb{C}$ . Por lo tanto,  $Y$  es la única solución. ■

**Observación 3.2.3.** De la demostración del teorema anterior tenemos que si  $Y$  es solución al problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales entonces

$$\det(Y(z)) = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

En particular,  $Y(z)$  es invertible sobre  $\mathbb{C}$ .

Ahora, daremos la solución explícita  $Y$  al problema de Riemann-Hilbert dado y la relación de esta con los polinomios ortogonales. Para generar intuición de cómo se obtiene esta solución, analicemos lo que deberá ocurrir entrada a entrada en  $Y$  a partir de la condición (2), es decir la condición de que:

$$Y_+(x) = Y_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

y también a partir de lo visto en la Observación 3.2.1 (debido a la condición (3)). Veamos:

- *Entrada (1, 1):* tenemos que  $(Y_{1,1})_+(x) = (Y_{1,1})_-(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ , es decir  $Y_{1,1}$  es continua en  $\mathbb{R}$  y analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $Y_{1,1}$  es entera y como se tiene  $Y_{1,1}(z) = z^n + \mathcal{O}(z^{n-1})$  cuando  $z \rightarrow \infty$ ,  $Y_{1,1}(z)$  es necesariamente un polinomio mónico de grado  $n$ .
- *Entrada (2, 1):* tenemos que  $(Y_{2,1})_+(x) = (Y_{2,1})_-(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ , es decir  $Y_{2,1}$  es continua en  $\mathbb{R}$  y analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Así,  $Y_{2,1}$  es entera y además, tenemos que  $Y_{2,1}(z) = \mathcal{O}(z^{n-1})$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,  $Y_{2,1}(z)$  deberá ser un polinomio de grado  $n - 1$ .
- *Entrada (1, 2):* tenemos que  $(Y_{1,2})_+(x) = (Y_{1,1})_-(x)w(x) + (Y_{1,2})_-(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$  y luego, suponiendo que  $w$  cumple lo necesario, por las fórmulas de Sokhotski–Plemelj podemos considerar que

$$Y_{1,2}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{Y_{1,1}(x)w(x)}{x - z} dx.$$

- *Entrada (2, 2):* tenemos que  $(Y_{2,2})_+(x) = (Y_{2,1})_-(x)w(x) + (Y_{2,2})_-(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$  y nuevamente, suponiendo lo necesario, por las fórmulas de Sokhotski–Plemelj se tiene que

$$Y_{2,2}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{Y_{2,1}(x)w(x)}{x - z} dx.$$

A partir de esto, tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 3.2.4.** *Supongamos que  $x^k w \in L_1(\mathbb{R})$  para cada  $k \in \mathbb{N}_0$  y que  $w$  es Hölder continua en  $\mathbb{R}$ . Entonces, para  $n \in \mathbb{N}_0$ , la única solución  $Y^{(n)}$  al problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales está dada por:*

$$Y^{(n)}(z) = \begin{pmatrix} p_n(z) & \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{p_n(t)w(t)}{t - z} dt \\ \gamma_{n-1} p_{n-1}(z) & \frac{\gamma_{n-1}}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{p_{n-1}(t)w(t)}{t - z} dt \end{pmatrix},$$

donde  $p_n(z)$  y  $p_{n-1}(z)$  son el polinomio ortogonal mónico con respecto al peso  $w$  de grado  $n$  y grado  $n - 1$  respectivamente y  $\gamma_{n-1} = -\frac{2\pi i}{h_{n-1}}$  para la norma  $h_{n-1} = \int_{\mathbb{R}} p_{n-1}^2(t)w(t)dt$ .

*Demostración:*

Claramente  $Y^{(n)}(z)$  está bien definida en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Ahora, veamos que  $Y^{(n)}$  cumple las condiciones necesarias para ser solución:

1.  $Y^{(n)}$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  trivialmente.
2.  $Y_+^{(n)}(x) = Y_-^{(n)}(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  para  $x \in \mathbb{R}$  por el análisis de las entradas hecho anteriormente.
3.  $Y^{(n)}(z) = (I + \mathcal{O}(1/z)) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}$  cuando  $z \rightarrow \infty$  pues viendo entrada a entrada:
  - Entradas (1, 1) y (2, 1): está claro.
  - Entrada (1, 2): notemos que, suponiendo que  $|t/z| < 1$ , podemos expandir a  $\frac{1}{t-z}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-z} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-t/z} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{z}\right)^k \\ &= -\frac{1}{z} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{t}{z}\right)^k + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{t}{z}\right)^k \right) \\ &= -\frac{1}{z} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{t}{z}\right)^k + \left(\frac{t}{z}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{z}\right)^k \right) \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{t}{z}\right)^k + \frac{t^n}{z^{n+1}} \frac{1}{1-t/z} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{t}{z}\right)^k - \left(\frac{t}{z}\right)^n \frac{1}{t-z}. \end{aligned}$$

Así, como  $\frac{1}{t-z}$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \{t\}$  y además,  $-\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{t}{z}\right)^k$  y  $\left(\frac{t}{z}\right)^n \frac{1}{t-z}$  lo son en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $\mathbb{C} \setminus \{0, t\}$  respectivamente, tendremos que

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{t}{z}\right)^k - \left(\frac{t}{z}\right)^n \frac{1}{t-z}$$

en  $\mathbb{C} \setminus \{0, t\}$ . Luego, se cumple que

$$\begin{aligned} Y_{1,2}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{p_n(t)w(t)}{t-z} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z^{k+1}} \int_{\mathbb{R}} t^k p_n(t)w(t) dt - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z^n} \int_{\mathbb{R}} t^n \frac{p_n(t)w(t)}{t-z} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z^n} \int_{\mathbb{R}} t^n \frac{p_n(t)w(t)}{t-z} dt \\ &= \mathcal{O}(z^{-n-1}) \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

y obtuvimos lo buscado.

- *Entrada (2, 2)*: se procede de forma análoga al caso anterior y obtenemos que

$$\begin{aligned} Y_{2,2}(z) &= \frac{\gamma_{n-1}}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{p_{n-1}(t)w(t)}{t-z} dt \\ &= -\frac{\gamma_{n-1}}{2\pi i} \frac{1}{z^n} h_{n-1} - \frac{\gamma_{n-1}}{2\pi i} \frac{1}{z^n} \int_{\mathbb{R}} t^n \frac{p_n(t)w(t)}{t-z} dt \\ &= \frac{1}{z^n} + \mathcal{O}(z^{-n-1}) \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

que fue lo buscado.

Por lo tanto,  $Y^{(n)}$  cumple las condiciones necesarias y será una solución al problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales. Además, es única por la Proposición 3.2.2. ■

### 3.2.2. Aplicaciones del problema de Riemann-Hilbert

Veremos dos posibles aplicaciones del problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales presentado.

#### Coeficientes de la relación de recurrencia

El problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales nos permite encontrar la relación de recurrencia de tres términos para los polinomios ortogonales que fue detallada en el Teorema 1.2.1 del capítulo “Polinomios ortogonales”. Para esto, dada  $Y^{(n)}$  la solución al problema de Riemann-Hilbert (para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ ), consideremos la función matricial

$$R(z) = Y^{(n)}(z)Y^{(n-1)}(z)^{-1}.$$

Veamos qué tipo de problema de Riemann-Hilbert satisface  $R$ :

1.  $R$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  trivialmente.
2. Para  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} R_+(x) &= Y_+^{(n)}(x)Y_+^{(n-1)}(x)^{-1} \\ &= Y_-^{(n)}(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} Y_-^{(n-1)}(x)^{-1} \\ &= Y_-^{(n)}(x)Y_-^{(n-1)}(x)^{-1} \\ &= R_-(x), \end{aligned}$$

con lo cual  $R$  es continua en  $\mathbb{R}$ . Así,  $R$  es entera por (1).

3. Tenemos que

$$\begin{aligned} R(z) &= Y^{(n)}(z)Y^{(n-1)}(z)^{-1} \\ &= (I + \mathcal{O}_n(1/z)) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{n-1} & 0 \\ 0 & z^{-(n-1)} \end{pmatrix}^{-1} (I + \mathcal{O}_{n-1}(1/z))^{-1} \\ &= (I + \mathcal{O}_n(1/z)) \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} (I + \mathcal{O}_{n-1}(1/z))^{-1} \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ahora, denotemos

$$\mathcal{O}_k(1/z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} + \mathcal{O}_k(1/z^2), \quad k = n, n+1.$$

Luego, tenemos que

$$I + \mathcal{O}_{n-1}(1/z) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \mathcal{O}_{n-1}(1/z^2) & \frac{b_{n-1}}{z} + \mathcal{O}_{n-1}(1/z^2) \\ \frac{c_{n-1}}{z} + \mathcal{O}_{n-1}(1/z^2) & 1 + \frac{d_{n-1}}{z} + \mathcal{O}_{n-1}(1/z^2) \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\det(I + \mathcal{O}_{n-1}(1/z)) = 1 + \frac{a_{n-1} + d_{n-1}}{z} + \mathcal{O}_{n-1}(1/z^2).$$

Pero también se cumple que

$$\det(I + \mathcal{O}_{n-1}(1/z)) = \det \left( Y^{(n-1)}(z) \begin{pmatrix} z^{n-1} & 0 \\ 0 & z^{-(n-1)} \end{pmatrix} \right) = 1.$$

Entonces  $1 + \frac{a_{n-1} + d_{n-1}}{z} + \mathcal{O}_{n-1}(1/z^2) = 1$  y así,  $a_{n-1} = -d_{n-1}$ . Es decir,

$$(I + \mathcal{O}_{n-1}(1/z))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a_{n-1}}{z} + \mathcal{O}_{n-1}(1/z^2) & -\frac{b_{n-1}}{z} + \mathcal{O}_{n-1}(1/z^2) \\ -\frac{c_{n-1}}{z} + \mathcal{O}_{n-1}(1/z^2) & 1 - \frac{d_{n-1}}{z} + \mathcal{O}_{n-1}(1/z^2) \end{pmatrix}.$$

Así, vemos que

$$\begin{aligned} R(z) &= (I + \mathcal{O}_n(1/z)) \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} (I + \mathcal{O}_{n-1}(1/z))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} z + a_n + \mathcal{O}_n(1/z^2) & \frac{b_n}{z^2} + \mathcal{O}_n(1/z^3) \\ c_n + \mathcal{O}_n(1/z^2) & \frac{1}{z} + \frac{d_n}{z^2} + \mathcal{O}_n(1/z^3) \end{pmatrix} (I + \mathcal{O}_{n-1}(1/z))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} z + a_n - a_{n-1} + \mathcal{O}_n(1/z) & -b_{n-1} + \mathcal{O}_n(1/z) \\ c_n + \mathcal{O}_n(1/z) & \mathcal{O}_n(1/z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z + a_n - a_{n-1} & -b_{n-1} \\ c_n & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}_n(1/z) \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, como  $R$  es entera, por la condición (3) y el teorema de Liouville obtenemos

$$R(z) = \begin{pmatrix} z + a_n - a_{n-1} & -b_{n-1} \\ c_n & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, tenemos que

$$Y^{(n)}(z) = R(z)Y^{(n-1)}(z) = \begin{pmatrix} z + a_n - a_{n-1} & -b_{n-1} \\ c_n & 0 \end{pmatrix} Y^{(n-1)}(z).$$

La entrada (1,1) de la igualdad anterior nos dice que

$$Y_{1,1}^{(n)}(z) = (z + a_n - a_{n-1})Y_{1,1}^{(n-1)}(z) - b_{n-1}Y_{2,1}^{(n-1)}(z),$$

es decir,

$$p_n(z) = (z + a_n - a_{n-1})p_{n-1}(z) - b_{n-1}\gamma_{n-2}p_{n-2}(z).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} zp_{n-1}(z) &= p_n(z) + (a_{n-1} - a_n)p_{n-1}(z) + b_{n-1}\gamma_{n-2}p_{n-2}(z) \\ &= p_n(z) + \alpha_n p_{n-1}(z) + \beta_n p_{n-2}(z), \end{aligned}$$

donde  $\alpha_n = a_{n-1} - a_n$  y  $\beta_n = b_{n-1}\gamma_{n-2}$ . Esto nos da una relación de recurrencia de tres términos para la sucesión de polinomios ortogonales  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

### La ecuación diferencial para los polinomios de Hermite

Recordemos que en la sección “Polinomios ortogonales clásicos” del capítulo “Polinomios ortogonales” vimos que las familias clásicas de polinomios ortogonales satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden.

Veamos de obtener esta ecuación para los polinomios de Hermite a partir del problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales. Recordemos que los polinomios de Hermite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  son aquellos asociados a la función de peso dado por  $w(x) = e^{-x^2}$  para  $x \in \mathbb{R}$ . La idea será ir modificando el problema de Riemann-Hilbert original hasta tener un nuevo problema sin saltos sobre  $\mathbb{R}$  y luego, con este problema modificado, obtendremos la ecuación diferencial buscada.

Comencemos: consideremos el problema de Riemann-Hilbert asociado a los polinomios (mónicos) de Hermite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Luego, tenemos que la solución está dada por:

$$Y(z) = \begin{pmatrix} h_n(z) & \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h_n(t)e^{-t^2}}{t-z} dt \\ \gamma_{n-1}h_{n-1}(z) & \frac{\gamma_{n-1}}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h_{n-1}(t)e^{-t^2}}{t-z} dt \end{pmatrix}.$$

Sea  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  una de las matrices de Pauli. Entonces se cumple que

$$e^{t\sigma_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\sigma_3)^n}{n!} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ahora, consideremos la función

$$Z(z) = \begin{pmatrix} e^{z^2/2} & 0 \\ 0 & e^{-z^2/2} \end{pmatrix} Y(z) \begin{pmatrix} e^{-z^2/2} & 0 \\ 0 & e^{z^2/2} \end{pmatrix} = e^{\sigma_3 z^2/2} Y(z) e^{-\sigma_3 z^2/2},$$

que está definida en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Luego, vemos que  $Z$  satisface:

1.  $Z$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  trivialmente.
2. Para  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 Z_+(x) &= e^{\sigma_3 x^2/2} Y_+(x) e^{-\sigma_3 x^2/2} \\
 &= e^{\sigma_3 x^2/2} Y_-(x) \begin{pmatrix} 1 & e^{-x^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\sigma_3 x^2/2} \\
 &= e^{\sigma_3 x^2/2} Y_-(x) e^{-\sigma_3 x^2/2} e^{\sigma_3 x^2/2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-x^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\sigma_3 x^2/2} \\
 &= e^{\sigma_3 x^2/2} Y_-(x) e^{-\sigma_3 x^2/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= Z_-(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

es decir, hemos pasado a un salto *constante* sobre  $\mathbb{R}$ .

3. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 Z(z) &= e^{\sigma_3 z^2/2} Y(z) e^{-\sigma_3 z^2/2} \\
 &= e^{\sigma_3 z^2/2} (I + \mathcal{O}_n(1/z)) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} e^{-\sigma_3 z^2/2} \\
 &= e^{\sigma_3 z^2/2} (I + \mathcal{O}_n(1/z)) e^{-\sigma_3 z^2/2} \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

cuando  $z \rightarrow \infty$ .

Ahora, pasamos a considerar la función

$$\hat{Z}(z) = \begin{cases} Z(z) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{Im}(z) < 0 \\ Z(z), & \text{Im}(z) > 0 \end{cases}$$

que es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  trivialmente. Luego, vemos que los valores frontera en  $\mathbb{R}$  están dados por

$$\hat{Z}_+(x) = Z_+(x) \quad \text{y} \quad \hat{Z}_-(x) = Z_-(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Z_+(x) = \hat{Z}_+(x).$$

Así,  $\hat{Z}$  es continua en  $\mathbb{R}$  con lo cual resulta entera. En particular, su derivada  $\hat{Z}'$  también será entera y tendremos  $\hat{Z}'_+(x) = \hat{Z}'_-(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ . Esto implica que

$$Z'_+(x) = Z'_-(x) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, construyamos la función  $Z'(z)Z^{-1}(z)$ , que está bien definida sobre  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  pues  $\det(Y(z)) = 1$ . Así,  $Z'(z)Z^{-1}(z)$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  y es además continua en  $\mathbb{R}$  pues  $Y$  e  $Y'$  tienen la misma condición de salto sobre  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $Z'(z)Z^{-1}(z)$  es entera.

Ahora, si escribimos

$$\mathcal{O}(1/z) = \frac{A_n}{z} + \mathcal{O}(1/z^2), \quad z \rightarrow \infty,$$

obtenemos que

$$Z'(z)Z^{-1}(z) = e^{\sigma_3 z^2/2} (\sigma_3 A_n - A_n \sigma_3 + \mathcal{O}(1/z)) e^{-\sigma_3 z^2/2} \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty.$$

Así, por el teorema de Liouville, tenemos que

$$e^{-\sigma_3 z^2/2} Z'(z)Z^{-1}(z)e^{\sigma_3 z^2/2} = \sigma_3 A_n - A_n \sigma_3 = 2 \begin{pmatrix} 0 & b_n \\ -c_n & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ . Por lo tanto, se tiene que

$$Z'(z) = \begin{pmatrix} 0 & 2b_n e^{z^2} \\ -2c_n e^{-z^2} & 0 \end{pmatrix} Z(z).$$

Analicemos las entradas (1, 1) y (2, 1) de esta última igualdad:

- *Entrada (1, 1)*: Tenemos  $Z'_{11}(z) = 2b_n e^{z^2} Z_{21}(z)$ , es decir

$$h'_n(z) = 2b_n \gamma_{n-1} h_{n-1}(z),$$

y comparando coeficientes directores tendremos que  $n = 2b_n \gamma_{n-1}$ . Por lo tanto

$$\frac{d}{dz} \cdot h_n(z) = n h_{n-1}(z),$$

y esto nos da un *lowering operator* para los polinomios de Hermite.

- *Entrada (2, 1)*: Tenemos  $Z'_{21}(z) = -2c_n e^{-z^2} Z_{11}(z)$ , es decir

$$(\gamma_{n-1} e^{-z^2} h_{n-1}(z))' = -2c_n e^{-z^2} h_n(z),$$

y comparando coeficientes directores tendremos que  $-2\gamma_{n-1} = -2c_n$ . Por lo tanto

$$\left( \frac{d}{dz} - 2z \right) \cdot h_{n-1}(z) = -2h_n(z),$$

y esto nos da un *raising operator* para los polinomios de Hermite.

Combinando lo obtenido en ambas entradas tenemos que

$$\left( \left( \frac{d}{dz} - 2z \right) \circ \frac{d}{dz} \right) \cdot h_n(z) = \left( \frac{d}{dz} - 2z \right) (n h_{n-1}(z)) = -2n h_n(z),$$

es decir, obtuvimos que

$$h''_n(z) - 2z h'_n(z) = -2n h_n(z).$$

Esta es la ecuación diferencial de segundo orden para los polinomios mónicos de Hermite.

**Observación 3.2.5.** Cabe destacar que con un procedimiento análogo es posible obtener la ecuación diferencial de segundo orden para las familias clásicas de Laguerre y Jacobi (ver [23, Capítulo 22 - Secciones 4 y 5]).

# CAPÍTULO 4

---

## LA FACTORIZACIÓN DE WIENER-HOPF

---

En este capítulo estudiaremos la *factorización Wiener-Hopf* de una función matricial  $F$  definida sobre el círculo unidad  $|z| = 1$  que fue presentada por Wiener y Masani [29]. Esta factorización, bajo ciertas hipótesis, nos permite descomponer a  $F$  como el producto de los valores frontera de dos funciones: una analítica en  $|z| < 1$  y la otra analítica en  $|z| > 1$ .

Comenzaremos viendo la utilidad de la factorización Wiener-Hopf definiendo la muy relacionada *función de Szegő* que surge en el análisis asintótico de los polinomios ortogonales con respecto a un peso matricial definido en el intervalo  $[-1, 1]$ , hermitiana y definida positiva. En lo que sigue,  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  denotará al círculo unidad en  $\mathbb{C}$ .

### 4.1. La función de Szegő matricial

Sea  $W(x)dx$  medida matricial definida en el intervalo  $[-1, 1]$  donde  $W(x) \in M_N(\mathbb{C})$  es hermitiana, definida positiva salvo posiblemente en  $\pm 1$  y  $dx$  es la medida de Lebesgue. De forma similar al caso escalar, los polinomios ortogonales matriciales  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  asociados a esta medida están caracterizados por un problema de Riemann-Hilbert de tamaño  $2N \times 2N$  (ver [5], [19]). Explícitamente, el problema consiste en encontrar, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , una función matricial  $Y = Y^{(n)} : \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \rightarrow M_{2N}(\mathbb{C})$  tal que:

1.  $Y^{(n)}$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .
2.  $Y_+^{(n)}(x) = Y_-^{(n)}(x) \begin{pmatrix} I_N & W(x) \\ 0_N & I_N \end{pmatrix}$  para  $x \in (-1, 1)$ .
3.  $Y^{(n)}(z) = (I_{2N} + \mathcal{O}(1/z)) \begin{pmatrix} z^n I_N & 0_N \\ 0_N & z^{-n} I_N \end{pmatrix}$  cuando  $z \rightarrow \infty$ .
4. Una condición en los extremos  $z = \pm 1$  que asegura unicidad (que no será necesario detallar aquí).

El análisis asintótico de los polinomios  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  cuando  $n \rightarrow \infty$  se obtiene a través del problema anterior donde, en general, no es posible encontrar una solución explícita. Realizando una serie de transformaciones que deforman el problema en un problema que puede resolverse explícitamente y revirtiendo estas transformaciones, es posible obtener información del problema original a partir de la solución del problema deformado. De esto proviene el comportamiento global de los polinomios ortogonales.

Este proceso fue introducido por Deift y Zhou [10], [11] y se conoce como el *método de steepest descent*. Es aquí donde surge la *función de Szegö* que resulta ser una pieza clave para este análisis asintótico. Aunque el método de steepest descent no será detallado en este trabajo, en esta sección vamos a definir la función de Szegö matricial y la relación de esta con una factorización sobre el círculo unidad (que será la factorización de Wiener-Hopf).

En lo que sigue, como ya fue dicho,  $W(x)dx$  será una medida matricial definida en  $[-1, 1]$  donde  $W(x) \in M_N(\mathbb{C})$  es hermitiana, definida positiva salvo posiblemente en  $\pm 1$  y  $dx$  es la medida de Lebesgue.

**Definición 4.1.1.** Se denomina una **función de Szegö matricial** para  $W$  a una función analítica  $D: \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \rightarrow M_N(\mathbb{C})$  con valores frontera  $D_{\pm}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D(x \pm i\epsilon)$  definidos sobre  $(-1, 1)$  tal que  $W$  se factoriza de la siguiente forma:

$$W(x) = D_-(x)D_-^*(x) = D_+(x)D_+^*(x) \quad \text{para } x \in (-1, 1), \quad (4.1)$$

donde  $D(z)$  es invertible para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  y

$$D(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} D(z)$$

existe y es invertible también.

**Observación 4.1.2.** La función de Szegö matricial, si existe, no es única ya que si  $U$  es matriz unitaria (constante),  $D(z)U$  también cumple las propiedades buscadas.

Para encontrar la función de Szegö matricial  $D$  será necesario llevar el problema desde  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  al exterior del círculo unidad  $|z| > 1$  a través de la aplicación conforme:

$$\varphi(z) = z + (z^2 - 1)^{1/2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1],$$

donde estamos considerando la rama principal del logaritmo que hace a  $(z^2 - 1)^{1/2}$  analítica en  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .

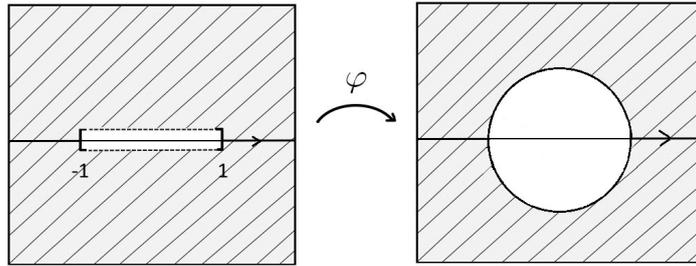


Figura 4.1: Acción de  $\varphi$ .

Se puede verificar que  $\varphi^{-1}(z) = \frac{z + z^{-1}}{2}$ . Por esto, notemos que  $\varphi^{-1}$  lleva al círculo unidad  $S^1$  al intervalo  $[-1, 1]$  (utilizando que la inversa de  $z$  sobre el círculo unidad está dada por  $z^{-1} = \bar{z}$ ).

Utilizando a  $\varphi$ , veremos que  $D$  se obtiene a través de cierta factorización sobre el círculo unidad (que resultará ser la factorización de Wiener-Hopf). Se procede como sigue:

#### 4.1. LA FUNCIÓN DE SZEGÖ MATRICIAL

---

1. Llevamos a  $W: [-1, 1] \rightarrow M_N(\mathbb{C})$  definida sobre el intervalo  $[-1, 1]$  a una función definida sobre  $S^1$  a través de  $\varphi^{-1}$ :

$$F(z) = W(\varphi^{-1}(z)) = W\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right), \quad z \in S^1.$$

2. Consideramos una factorización de  $F$  de la siguiente forma:

$$F(z) = \Phi(z)\Phi(z)^*, \quad z \in S^1, \quad (4.2)$$

donde  $\Phi$  es función matricial analítica en  $|z| < 1$ .

3. Tenemos que  $\Phi(1/z)$  está bien definida para  $|z| > 1$ , con lo cual se puede considerar a la función

$$D(z) = \Phi\left(\frac{1}{\varphi(z)}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]. \quad (4.3)$$

Resulta que la función  $D$  dada en (4.3) es la función de Szegö matricial para  $W$  buscada:

**Teorema 4.1.3.** *La función de Szegö matricial  $D$  para  $W$  existe y está dada por*

$$D(z) = \Phi\left(\frac{1}{\varphi(z)}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1],$$

donde  $\Phi$  proviene de la factorización dada en (4.2) de la función matricial

$$F(z) = W(\varphi^{-1}(z)) = W\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right), \quad z \in S^1.$$

*Demostración:*

Al tener la factorización de  $F$  como fue dada en (4.2), tomando la función matricial dada por:

$$D(z) = \Phi\left(\frac{1}{\varphi(z)}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad (4.4)$$

entonces  $D(z)$  está bien definida y es analítica para  $|z| < 1$  pues dado  $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ , tenemos que  $|\varphi(z)| > 1$ . Además, tenemos que  $D(z)$  es invertible para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  y  $D(\infty) = \Phi(0)$  es invertible también, debido a la correspondiente propiedad de  $\Phi$ .

Ahora, solo falta ver que  $W$  se factoriza de la forma dada en (4.1). Para esto, notemos que, dado  $x \in (-1, 1)$ , se cumple que:

$$\begin{aligned} \varphi_+(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi(x + i\epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( (x + i\epsilon) + ((x + i\epsilon)^2 - 1)^{1/2} \right) \\ &= x + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{2} \log((x + i\epsilon)^2 - 1)\right) \\ &= x + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{2} (\log |(x + i\epsilon)^2 - 1| + i \arg((x + i\epsilon)^2 - 1))\right) \\ &= x + \exp\left(\frac{1}{2} (\log |x^2 - 1| + i\pi)\right) \\ &= x + (1 - x^2)^{1/2} e^{i\pi/2} \\ &= x + i(1 - x^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

De manera análoga, se puede ver que  $\varphi_-(x) = x - i(1 - x^2)^{1/2}$ .

Por lo tanto, denotando  $z = \varphi_+(x)$ , se tiene que

$$|z|^2 = z\bar{z} = 1, \quad \bar{z} = 1/z = \varphi_-(x) \quad \text{y} \quad x = \frac{z + z^{-1}}{2}.$$

Luego, por la definición de  $D$  dada en (4.4), se cumple que

$$D_-(x) = \Phi\left(\frac{1}{\varphi_-(x)}\right) = \Phi(z),$$

y por la factorización de  $F$  dada en (4.2), se tiene que

$$D_-(x)D_-(x)^* = W\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = W(x).$$

Análogamente, se cumple que

$$D_+(x) = \Phi\left(\frac{1}{\varphi_+(x)}\right) = \Phi(\bar{z}),$$

y nuevamente por (4.2), se obtiene que

$$D_+(x)D_+(x)^* = W\left(\frac{\bar{z} + \bar{z}^{-1}}{2}\right) = W\left(\frac{z^{-1} + z}{2}\right) = W(x).$$

Por lo tanto, obtuvimos que

$$W(x) = D_-(x)D_-(x)^* = D_+(x)D_+(x)^* \quad \text{para} \quad x \in (-1, 1).$$

Así,  $D(z) = \Phi\left(\frac{1}{\varphi(z)}\right)$  es la función de Szegő matricial para  $W$  buscada. ■

Por lo tanto, hemos visto que encontrar la función de Szegő matricial para  $W$  se reduce a encontrar una factorización de la siguiente forma:

$$W\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = \Phi(z)\Phi(z)^*, \quad z \in S^1,$$

donde  $\Phi$  es función matricial analítica en  $|z| < 1$ .

A partir de esto, tomamos la siguiente definición:

**Definición 4.1.4.** Dada  $F$  función matricial definida en el círculo unidad  $S^1$  se denomina una **factorización de Wiener-Hopf matricial** de  $F$  a una descomposición de la forma:

$$F(z) = \Phi(z)\Phi^*(z) \quad \text{p.p.} \quad |z| = 1,$$

donde  $\Phi$  es función matricial analítica en  $|z| < 1$ .

**Observación 4.1.5.** Si existe, la factorización de Wiener-Hopf no es única: tomando  $U$  matriz unitaria constante, entonces  $\Phi(z)U$  también nos dará una factorización de Wiener-Hopf pues

$$F(z) = \Phi(z)\Phi^*(z) = \Phi(z)UU^*\Phi^*(z) = (\Phi(z)U)(\Phi(z)U)^* \quad \text{p.p.} \quad |z| = 1.$$

Con lo dicho, el objetivo para las siguientes secciones será verificar que efectivamente existe la factorización de Wiener-Hopf (bajo ciertas hipótesis) y encontrar formas explícitas de obtenerla.

## 4.2. Una factorización escalar

Vamos a comenzar detallando una factorización escalar para funciones definidas sobre el círculo unidad  $S^1$  que nos dará la pauta de cómo proceder para obtener la factorización de Wiener-Hopf matricial buscada.

**Definición 4.2.1.** Dado  $p > 0$ , denotamos

$$L_p(S^1) = \left\{ f: S^1 \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible: } \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta < \infty \right\},$$

$$L_\infty(S^1) = \{ f: S^1 \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible: } f \text{ es acotada p.p.} \}.$$

Ahora, sea  $f \in L_p(S^1)$  con  $p > 1$  y consideremos sus coeficientes de Fourier dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(e^{i\theta}) d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Por el lema de Riemann–Lebesgue [13, Lema 1.4], tenemos que  $a_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , con lo cual  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  es acotado. Es decir,  $|a_n| \leq M$  para algún  $M > 0$ . Luego, aplicando el Test M de Weierstrass a  $f_n(z) = a_n z^n$  definida sobre  $|z| < 1$ , se cumple que

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converge (uniforme y absolutamente) para  $|z| < 1$ . Esto nos lleva a definir las funciones:

$$f_M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1 \quad \text{y} \quad f_m(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n, \quad 1 < |z| \leq \infty. \quad (4.6)$$

Ahora, consideremos la función:

$$u_f(z) = f_M(z) + f_m(1/\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \bar{z}^{-n}, \quad |z| < 1.$$

Luego, por la fórmula integral de Poisson, tenemos que

$$u_f(z) = u_f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) P_r(t - \theta) d\theta, \quad |z| < 1, \quad (4.7)$$

donde  $P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}$  es el llamado *núcleo de Poisson*.

Con esto, se tiene el siguiente teorema clásico [13, Teorema 1.12]. Para este trabajo, omitimos la demostración.

**Teorema 4.2.2.** Dado  $f \in L_1(S^1)$ , se cumple que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} u_f(re^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \left( f_M(re^{i\theta}) + f_m\left(\frac{e^{i\theta}}{r}\right) \right) = f(e^{i\theta}) \quad \text{p.p. } \theta \in [0, 2\pi].$$

Esta es una factorización (aditiva) que nos permite ver a  $f$  como la suma de los valores frontera de una función analítica en  $|z| < 1$  y otra función analítica en  $|z| > 1$ .

**Observación 4.2.3.** Cabe destacar la analogía de la factorización anterior con los problemas de Riemann-Hilbert aditivos (ver sección “Problemas aditivos” del capítulo “Problemas de Riemann-Hilbert”). Más precisamente, podemos ver a la factorización del teorema anterior como un problema de Riemann-Hilbert aditivo (donde la curva involucrada en el problema es  $S^1$  en vez de  $\mathbb{R}$ ). Esta idea se ampliará más adelante en la Observación 4.2.12.

**Ejemplo 4.2.4.** Tomemos  $f(z) = \text{Log}(z)$  la rama del logaritmo definida en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ :  $f(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta$  para  $\theta \in (0, 2\pi]$ . Claramente  $f \in L_1(S^1)$  pues

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} |i\theta| d\theta = \int_0^{2\pi} \theta d\theta = 2\pi^2 < \infty.$$

Calculemos los coeficientes de Fourier  $a_n$  de  $f$ . Primero, tenemos que

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} i2\pi^2 = i\pi.$$

Por otro lado, para  $n \neq 0$ , vemos que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} i\theta d\theta \\ &= \frac{i}{2\pi} \left( \frac{ie^{-ni\theta}\theta}{n} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{ie^{-ni\theta}}{n} d\theta \right) \\ &= \frac{i}{2\pi} \left( \frac{2\pi i}{n} + \frac{e^{-ni\theta}}{n^2} \Big|_0^{2\pi} \right) \\ &= -\frac{1}{n}, \end{aligned}$$

donde hemos usado integración por partes. Por lo tanto, tendremos que

$$\begin{aligned} u_f(re^{i\theta}) &= f_M(re^{i\theta}) + f_m\left(\frac{e^{i\theta}}{r}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \frac{e^{in\theta}}{r^n} \\ &= i\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^n e^{in\theta} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n} r^{-n} e^{in\theta} \\ &= i\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^n e^{in\theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-n} r^n e^{-in\theta} \\ &= i\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) \\ &= i\pi - 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \sin(n\theta) \\ &= i\pi - 2i \Im \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(re^{i\theta})^n}{n} \right), \end{aligned}$$

donde  $\Im$  denota la parte imaginaria. Más aún, se puede probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\text{Ln}(1-z),$$

donde  $\text{Ln}(z)$  es la rama principal del logaritmo (definida sobre  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ). En particular,  $\text{Ln}(1-z)$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 1}$  y  $\Im(\text{Ln}(1-z))$  es continua en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 1}$ .

Por lo tanto, vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1^-} u_f(re^{i\theta}) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \left( i\pi - 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \sin(n\theta) \right) \\ &= i\pi - 2i \lim_{r \rightarrow 1^-} \Im \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(re^{i\theta})^n}{n} \right) \\ &= i\pi - 2i \lim_{r \rightarrow 1^-} \Im \left( -\text{Ln}(1 - re^{i\theta}) \right) \\ &= i\pi + 2i \Im \left( \text{Ln}(1 - e^{i\theta}) \right). \end{aligned}$$

Además, tenemos que

$$1 - e^{i\theta} = -(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})e^{i\theta/2} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2} = e^{-i\pi/2} 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2},$$

con lo cual

$$\Im \left( \text{Ln}(1 - e^{i\theta}) \right) = \arg(1 - e^{i\theta}) = \frac{\theta - \pi}{2} \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} u_f(re^{i\theta}) = i\pi + 2i \frac{\theta - \pi}{2} = i\theta = \text{Log}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \quad \text{p.p. } \theta \in [0, 2\pi],$$

con lo cual verificamos el teorema.

**Observación 4.2.5.** Sea  $\text{ann}(0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$  un anillo en el plano complejo que contiene a  $S^1$ . Por definición, la serie de Laurent de una función  $f$  analítica en  $\text{ann}(0, R_1, R_2)$  está dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{donde} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Ahora, notemos que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i(n+1)\theta}} i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} f(e^{i\theta}) d\theta,$$

y estos son justamente los coeficientes de Fourier de  $f$  definidos en (4.5). Es decir, la serie de Laurent de  $f$  es la serie de Fourier de  $f$  restringido a  $S^1$ .

Además, notemos que  $f \in L_1(S^1)$  pues como  $f$  es analítica sobre  $S^1 \subseteq \text{ann}(0, R_1, R_2)$  y  $S^1$  es compacto,  $f(S^1)$  también será compacto. Luego,  $f(S^1)$  es acotado (y cerrado) y está claro que

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

Por lo tanto, si tenemos la serie de Laurent de  $f$ , podemos tomar  $f_M$  y  $f_m$  como en (4.6) y la factorización aditiva dada en el teorema anterior se obtiene de manera trivial.

**Ejemplo 4.2.6.** Consideremos la función  $f(z) = e^{1/z}$  que es analítica para  $z \neq 0$ , es decir,  $f$  es analítica en  $\text{ann}(0, 0, R)$  para cualquier  $R > 0$ . Podemos fijar  $R > 1$  con lo cual  $S^1 \subseteq \text{ann}(0, 0, R)$ . Verifiquemos que  $f \in L_1(S^1)$ :

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} |e^{e^{-i\theta}}| d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} d\theta \approx 7,95493 < \infty,$$

utilizando aproximaciones numéricas.

Ahora, usando que la serie de Taylor de  $e^z$  está dada por  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  y la unicidad de la serie de Laurent, obtenemos que la serie de Laurent de  $f$  está dada por:

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{(-n)!}, \quad |z| > 0.$$

Luego,  $f_M(z) = 1$  y  $f_m(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{(-n)!}$  y vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1^-} \left( f_M(re^{i\theta}) + f_m\left(\frac{e^{i\theta}}{r}\right) \right) &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \left( 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e^{in\theta}}{r^n (-n)!} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n e^{-in\theta}}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-in\theta}}{n!} \\ &= f(e^{i\theta}) \quad \text{p.p. } \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Notemos que el intercambio del límite y la serie en las cuentas anteriores se puede realizar ya que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n e^{-in\theta}}{n!}$  es la serie de  $e^{re^{-i\theta}}$  sobre  $|z| < 1$ , con lo cual es continua como función

de  $r$  al tener convergencia uniforme para  $0 < r < 1$  de las sumas parciales  $\sum_{n=0}^N \frac{r^n e^{-in\theta}}{n!}$  (que son continuas).

Ahora consideremos la siguiente definición que extiende a la del  $L_p(S^1)$ . En lo que sigue, se denota  $\mathfrak{D}^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

**Definición 4.2.7.** Dado  $\delta > 0$ , la *clase de Hardy*  $H_\delta(\mathfrak{D}^+)$  denota al conjunto

$$H_\delta(\mathfrak{D}^+) = \left\{ f : \mathfrak{D}^+ \rightarrow \mathbb{C} \text{ analítica} : \exists M \text{ tal que } \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta d\theta \leq M, 0 < r < 1 \right\}.$$

Con esto, se tiene el siguiente corolario del Teorema 4.2.2:

**Corolario 4.2.8.** Dado  $\delta \geq 1$ , sea  $f \in L_\delta(S^1)$  tal que sus coeficientes de Fourier  $a_n$  cumplen  $a_n = 0$  para  $n < 0$ . Entonces  $f_M \in H_\delta(\mathfrak{D}^+)$ .

*Demostración:*

Como  $a_n = 0$  para  $n < 0$ , tenemos que  $f_m(1/\bar{z}) = 0$ . Así, por (4.7), tendremos que

$$f_M(z) = f_M(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t) dt, \quad |z| < 1.$$

Además, notemos que  $\int_0^{2\pi} |P_r(\theta - t)|^\delta d\theta = N < \infty$  pues  $\|P_r\|_\infty = \frac{1-r^2}{1-2r+r^2} < \infty$ .

Luego,  $P_r \in L_\delta(S^1)$  para cada  $\delta \geq 1$ .

Ahora, como  $\delta \geq 1$ , la función  $x^\delta$  es convexa en  $[0, \infty]$  con lo cual, usando la desigualdad de Jensen para integrales [30, Capítulo 1 - (10.8)] y el teorema de Fubini, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f_M(re^{i\theta})|^\delta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t) dt \right|^\delta d\theta \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it}) P_r(\theta - t)|^\delta dt d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^\delta \left( \int_0^{2\pi} |P_r(\theta - t)|^\delta d\theta \right) dt \\ &= \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^\delta dt < \infty. \end{aligned}$$

Así, tomando  $M = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^\delta dt < \infty$ , se cumple que  $\int_0^{2\pi} |f_M(re^{i\theta})|^\delta d\theta \leq M$ .

Por lo tanto,  $f_M \in H_\delta(\mathfrak{D}^+)$ . ■

A continuación veremos la noción de un *límite radial* para una función en la clase de Hardy  $H_\delta(\mathfrak{D}^+)$ . Esto nos permitirá ver a ciertas funciones en  $L_\delta(S^1)$  como límites radiales de funciones en  $H_\delta(\mathfrak{D}^+)$ .

A través del siguiente teorema se puede probar que efectivamente existe este límite radial y algunas de sus propiedades (ver [29, Teorema 2.6]):

**Teorema 4.2.9.** *Dado  $\delta > 0$ , sea  $f_M \in H_\delta(\mathfrak{D}^+)$  no idénticamente cero. Entonces:*

1.  $f(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f_M(re^{i\theta})$  existe p.p. sobre  $S^1$  y, más aún,  $f \in L_1(S^1)$ . A tal  $f$  se la llama el **límite radial** de  $f_M$ .

2. Se tiene que  $f_M \rightarrow f$  en la topología de  $L_\delta(S^1)$ , es decir:

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_0^{2\pi} |f_M(re^{it}) - f(e^{it})|^\delta d\theta = 0.$$

3. Se cumple que  $\log |f| \in L_1(S^1)$  y

$$\log |f_M(z)| = \log |f_M(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| P_r(t - \theta) d\theta, \quad |z| < 1.$$

$$\text{En particular } \log |f_M(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

4. Si  $\log |f_M(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta$ , entonces  $f_M$  no tiene ceros en  $\mathfrak{D}^+$ .

**Observación 4.2.10.** En general, la inversa del punto (4) no vale. Basta considerar la función

$$f_M(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Entonces claramente  $f_M$  no tiene ceros en  $\mathfrak{D}^+$  pero vemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \exp\left(\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}\right) \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1) d\theta = 0,$$

mientras que  $\log |f_M(0)| = \log(1/e)$ .

Ahora, presentamos el teorema que luego será extendido al caso matricial para obtener la factorización de Wiener-Hopf:

**Teorema 4.2.11.** Dado  $\delta > 0$ , sea  $\varphi \in L_\delta(S^1)$  tal que  $\varphi \geq 0$  y  $\log(\varphi) \in L_1(S^1)$ . Entonces existe  $f_M \in H_\delta(\mathfrak{D}^+)$  sin ceros tal que si  $f(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f_M(re^{i\theta})$  es su límite radial, se cumple que  $|f(z)| = \varphi(z)$  p.p.  $z \in S^1$  y

$$f_M(0) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\varphi(e^{i\theta})) d\theta\right).$$

*Demostración:*

Tenemos que  $\phi(z) := \log(\varphi(z)^2) = 2 \log(\varphi(z)) \in L_1(S^1)$  es una función con valores reales y luego, sus coeficientes de Fourier cumplen que  $a_{-n} = \overline{a_n}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $a_0 \in \mathbb{R}$ . Consideremos las funciones

$$\phi_M(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1 \quad \text{y} \quad \phi_m(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n, \quad 1 < |z| \leq \infty,$$

es decir, una versión simétrica de las funciones dadas en (4.6). Luego,  $\phi_m(z) = \overline{\phi_M(1/\bar{z})}$  y así, por el Teorema 4.2.2, tendremos que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \left( \phi_M(re^{i\theta}) + \overline{\phi_M(re^{i\theta})} \right) = \phi(e^{i\theta}) = 2 \log(\varphi(e^{i\theta})) \quad \text{p.p. } \theta \in [0, 2\pi]. \quad (4.8)$$

Ahora, tomando  $f_M(z) = \exp(\phi_M(z))$ , vemos que

$$f_M(0) = e^{\frac{a_0}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\varphi(e^{i\theta})) d\theta\right).$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(e^{i\theta}) &= \exp\left(\frac{1}{2} 2 \log(\varphi(e^{i\theta}))\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 1^-} \left( \phi_M(re^{i\theta}) + \overline{\phi_M(re^{i\theta})} \right)\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \exp\left(\frac{1}{2} \left( \phi_M(re^{i\theta}) + \overline{\phi_M(re^{i\theta})} \right)\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \left( \exp(\phi_M(re^{i\theta})) \exp(\overline{\phi_M(re^{i\theta})}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} \left( f_M(re^{i\theta}) \overline{f_M(re^{i\theta})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1^-} |f_M(re^{i\theta})| \quad \text{p.p. } \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ahora, dado  $0 < r < 1$ , notemos que

$$\begin{aligned}\Re(\phi_M(re^{i\theta})) &= \frac{1}{2} \left( \phi_M(re^{i\theta}) + \overline{\phi_M(re^{i\theta})} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \phi_M(re^{i\theta}) + \phi_m(1/\overline{re^{i\theta}}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{it}) P_r(\theta - t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\varphi(e^{it})) P_r(\theta - t) dt.\end{aligned}$$

Luego, como la función  $e^x$  es convexa y  $\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) dt = \int_0^{2\pi} P_r(t) dt = 2\pi$ , por la desigualdad de Jensen para integrales [30, Capítulo 1 - (10.8)], tenemos que

$$\begin{aligned}|f_M(re^{i\theta})|^\delta &= \left| \exp(\phi_M(re^{i\theta})) \right|^\delta \\ &= \exp \left( \delta \Re(\phi_M(re^{i\theta})) \right) \\ &= \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta \log(\varphi(e^{it})) P_r(\theta - t) dt \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\delta \log(\varphi(e^{it}))) P_r(\theta - t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})^\delta P_r(\theta - t) dt.\end{aligned}$$

Usando el teorema de Fubini, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f_M(re^{i\theta})|^\delta d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})^\delta P_r(\theta - t) dt \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})^\delta \left( \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\theta \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})^\delta dt = \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})|^\delta dt = M < \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f_M \in H_\delta(\mathfrak{D}^+)$  y así, por el punto (1) del Teorema 4.2.9,  $f_M$  tendrá un límite radial  $f(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f_M(re^{i\theta})$ . Además,  $|f(z)| = \varphi(z)$  p.p.  $z \in S^1$  por (4.9) y claramente  $f_M(z) = \exp(\phi_M(z))$  no tiene ceros en  $\mathfrak{D}^+$ . ■

**Observación 4.2.12.** Notemos que la construcción del  $f_M$  en el teorema anterior es análoga a la forma en la que fue encontrada una solución al problema de Riemann-Hilbert multiplicativo. Recordemos que al tener un problema multiplicativo se encontraba su solución a partir de un problema aditivo (tomando logaritmo al problema original).

Así, el teorema anterior se puede entender como la búsqueda de una posible factorización multiplicativa de  $\varphi$  sobre  $S^1$  (a pesar de la presentación dada en el enunciado con un solo factor) y, donde tomando el logaritmo, lo llevamos al problema de encontrar una factorización aditiva cuya solución está asegurada por el Teorema 4.2.2.

Esto comienza a darnos una idea de cómo sería una factorización matricial multiplicativa análoga, que resultará ser la factorización de Wiener-Hopf buscada.

Veamos ahora la unicidad del  $f_M$  construido en el teorema anterior:

**Teorema 4.2.13.** *Dado  $\varphi$  como en el Teorema 4.2.11 existe una única función  $f_M \in H_\delta(\mathfrak{D}^+)$  tal que  $\lim_{r \rightarrow 1^-} f_M(re^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$  p.p. y*

$$f_M(0) = \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\varphi(e^{i\theta})) d\theta \right).$$

*Demostración:*

Tenemos que el  $f_M$  construido en el teorema anterior cumple las propiedades buscadas. Además, notemos que como  $f_M$  no tiene ceros en  $\mathfrak{D}^+$ ,  $\log(f_M) = u_1 + iv_1$  es analítica sobre  $\mathfrak{D}^+$  y así,  $u_1(z) = \Re(\log(f_M(z))) = \log |f_M(z)|$  es armónica sobre  $\mathfrak{D}^+$ . Además, por (4.7) y (4.8), tendremos que

$$u_1(z) = u_1(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\varphi(e^{i\theta})) P_r(t - \theta) d\theta, \quad |z| < 1. \quad (4.10)$$

Ahora, sea  $g_M \in H_\delta(\mathfrak{D}^+)$  otra función que cumple las propiedades del enunciado. Entonces, por el punto (4) del Teorema 4.2.9,  $g_M$  no tiene ceros sobre  $\mathfrak{D}^+$  con lo cual  $\log(g_M) = u_2 + iv_2$  es analítica sobre  $\mathfrak{D}^+$  con  $u_2(z) = \log |g_M(z)|$  armónica sobre  $\mathfrak{D}^+$ . Por otro lado, por el punto (3) del Teorema 4.2.9, tenemos que

$$u_2(z) = u_2(re^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\varphi(e^{i\theta})) P_r(t - \theta) d\theta, \quad |z| < 1. \quad (4.11)$$

Así, de (4.10) y (4.11), tenemos una función  $u(z) = u_1(z) - u_2(z) \geq 0$  armónica sobre  $\mathfrak{D}^+$ . Más aún,  $u(0) = 0$  pues, por hipótesis,  $f_M(0) = \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\varphi(e^{i\theta})) d\theta \right) = g_M(0)$ . Entonces, por el principio del mínimo para funciones armónicas,  $u \equiv 0$  sobre  $\mathfrak{D}^+$ . Es decir,  $u_1 \equiv u_2$  y  $\log(g_M(z)) = u_1(z) + iv_2(z)$ . Luego tanto  $v_1$  como  $v_2$  son conjugados armónicos de  $u_1$ , y como el conjugado armónico es único salvo una constante aditiva,  $v_2(z) = v_1(z) + c$ . Por lo tanto, tenemos que

$$\log(g_M(z)) = u_1(z) + iv_2(z) = \log(f_M(z)) + ic,$$

y así,  $g_M(z) = f_M(z)e^{ic}$ . Más aún, como  $f_M(0) = g_M(0)$ , tendremos que  $e^{ic} = 1$ . Luego, tenemos que  $g_M = f_M$  y  $f_M$  es única. ■

### 4.3. La factorización de Wiener-Hopf matricial

El objetivo de esta sección será establecer la existencia de la factorización de Wiener-Hopf para funciones matriciales definidas sobre  $S^1$  que, en cierto sentido, será una extensión del Teorema 4.2.11.

Primero, extendamos la definición del espacio  $L_p(S^1)$  dada en la sección anterior para funciones matriciales.

**Definición 4.3.1.** *Dado  $p > 0$ , denotamos*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p(S^1) &= \{F: S^1 \rightarrow M_n(\mathbb{C}), F = [f_{i,j}]: f_{i,j} \in L_p(S^1)\}, \\ \mathcal{L}_\infty(S^1) &= \{F: S^1 \rightarrow M_n(\mathbb{C}), F = [f_{i,j}]: f_{i,j} \in L_\infty(S^1)\}. \end{aligned}$$

**Definición 4.3.2.** Dada  $F \in \mathcal{L}_p(S^1)$ , para  $p \geq 1$ , con  $F = [f_{i,j}]$ , se define

$$\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) d\theta = \left[ \int_0^{2\pi} f_{i,j}(e^{i\theta}) d\theta \right].$$

**Observación 4.3.3.** Si  $F \in \mathcal{L}_p(S^1)$  y  $G \in \mathcal{L}_\infty(S^1)$ , entonces  $FG \in \mathcal{L}_p(S^1)$ . Esto se puede ver viendo  $FG$  entrada a entrada.

Dada  $F \in \mathcal{L}_p(S^1)$ , con  $p \geq 1$ , utilizando la observación anterior con  $G(e^{i\theta}) = e^{-ni\theta} I$ , tenemos que están bien definidos los coeficientes de Fourier de  $F$  dados por:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} F(e^{i\theta}) d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Más aún, si  $A_n = [a_{i,j}^n]$  y  $F = [f_{i,j}]$ , entonces  $a_{i,j}^n$  será el  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier de la función escalar  $f_{i,j}$ . Luego, si  $F \in \mathcal{L}_1(S^1)$ , se puede extender el lema de Riemann–Lebesgue [13, Lema 1.4], y tendremos que  $A_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Así, al igual que en el caso escalar, esto nos lleva a definir:

$$F_M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad |z| < 1 \quad \text{y} \quad F_m(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} A_n z^n, \quad 1 < |z| \leq \infty.$$

A continuación, presentamos el teorema que nos da la factorización de Wiener-Hopf.

**Teorema 4.3.4.** Sea  $F$  función matricial definida en  $S^1$ , no negativa, hermitiana tal que  $F \in \mathcal{L}_1(S^1)$  y  $\log(\det(F)) \in L_1(S^1)$ . Entonces existe una función  $\Phi \in \mathcal{L}_2(S^1)$ , cuyos coeficientes de Fourier para  $n < 0$  son todos cero, tal que

$$F(e^{i\theta}) = \Phi(e^{i\theta}) \Phi^*(e^{i\theta}) \quad \text{p.p.} \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

es decir, tenemos una factorización de Wiener-Hopf matricial para  $F$ :

$$F(z) = \Phi(z) \Phi^*(z) \quad \text{p.p.} \quad |z| = 1.$$

Más aún,  $\Phi_M(0)$  es definida no negativa, hermitiana y

$$\det(\Phi_M(0)^2) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\det(F(e^{i\theta}))) d\theta\right).$$

Para probar el teorema es necesario estudiar los llamados *procesos estocásticos múltiples* que son, esencialmente, familias de funciones vectoriales aleatorias  $\{f_\lambda(\omega)\}_{\lambda \in \Lambda}$  definidas sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , parametrizadas por algún conjunto  $\Lambda$ .

Luego, debemos comenzar estudiando algunas propiedades de estas funciones vectoriales.

### Funciones vectoriales aleatorias

Comencemos tomando un análogo del espacio  $\mathcal{L}_2(S^1)$  para funciones definidas sobre un espacio de probabilidad:

**Definición 4.3.5.** Dado  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  espacio de probabilidad, se define

$$\mathcal{L}_2(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ medible: } \int_{\Omega} |f(\omega)|^2 dP(\omega) < \infty \right\}.$$

Resulta que  $\mathcal{L}_2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con las operaciones usuales y el producto interno dado por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\omega) \overline{g(\omega)} dP(\omega).$$

Ahora, podemos extender esta definición para funciones  $k$ -vectoriales:

**Definición 4.3.6.** Dado  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  espacio de probabilidad, se define

$$\mathfrak{L}_2^k(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^k, f = (f^{(1)}, \dots, f^{(k)}): f^{(i)} \in \mathfrak{L}_2(\Omega), i = 1, \dots, k \right\}.$$

Notemos que  $f \in \mathfrak{L}_2^k(\Omega)$  si y solo si sus componentes  $f^{(i)}$  son medibles y

$$\int_{\Omega} |f(\omega)|^2 dP(\omega) < \infty,$$

donde  $|f(\omega)|^2 = \sum_{i=1}^k |f^{(i)}(\omega)|^2$  es la norma euclídea. Más aún,  $\mathfrak{L}_2^k(\Omega)$  también es un espacio de Hilbert con las operaciones usuales y el producto interno dado por:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} f^{(i)}(\omega) \overline{g^{(i)}(\omega)} dP(\omega).$$

Además, este producto interno define la norma:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{\Omega} |f(\omega)|^2 dP(\omega)}, \quad (4.12)$$

y esta norma induce una topología sobre  $\mathfrak{L}_2^k(\Omega)$ . Con esto, si  $f_n, f \in \mathfrak{L}_2^k(\Omega)$ , se entiende que  $f_n \rightarrow f$  cuando  $n \rightarrow \infty$  si  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Esto es equivalente a decir que, para cada  $i = 1, \dots, k$ , se cumple que

$$\int_{\Omega} |f_n^{(i)}(\omega) - f^{(i)}(\omega)|^2 dP(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

En particular, por  $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$  se entiende que  $\left\| f - \sum_{n=-N}^N f_n \right\| \rightarrow 0$  cuando  $N \rightarrow \infty$ .

Resulta que el producto interno dado para  $\mathfrak{L}_2^k(\Omega)$  no sirve para obtener la factorización buscada pero la norma definida en (4.12) y la topología inducida sí. El producto interno deberá ser reemplazado considerando *matrices gramianas*:

**Definición 4.3.7.** Dados  $f, g \in \mathfrak{L}_2^k(\Omega)$ , la **matriz gramiana**  $\langle f, g \rangle_G$  del par  $(f, g)$  está dada por la siguiente matriz:

$$\langle f, g \rangle_G = \left[ \int_{\Omega} f^{(i)}(\omega) \overline{g^{(j)}(\omega)} dP(\omega) \right] = [\langle f^{(i)}, g^{(j)} \rangle]$$

**Observación 4.3.8.** Notemos que  $(f, g) = \text{tr}(\langle f, g \rangle_G)$  y  $\|f\| = \sqrt{\text{tr}(\langle f, f \rangle_G)}$ .

Comenzamos a pensar a la matriz gramiana como nuestro nuevo producto interno. A partir de esto, consideramos:

**Definición 4.3.9.** Dados  $f, g \in \mathfrak{L}_2^k(\Omega)$ :

1. Se denota que  $f \perp g$  si  $\langle f, g \rangle_G = 0$ .
2.  $f$  se dice un vector **normal** si  $\langle f, f \rangle_G = I$ .
3. Una sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathfrak{L}_2^k(\Omega)$  se dice **ortonormal** si  $\langle f_n, f_m \rangle_G = \delta_{n,m} I$ .

**Observación 4.3.10.** Si  $\langle f_n, f_m \rangle_G = \delta_{n,m} A$  con  $A$  invertible y definimos  $g_n = \sqrt{A^{-1}} f_n$ , entonces  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal.

**Definición 4.3.11.** Se definen los siguientes subconjuntos de  $\mathfrak{L}_2^k(\Omega)$ :

1. Una **variedad lineal** en  $\mathfrak{L}_2^k(\Omega)$  es un subconjunto no nulo  $\mathfrak{M}$  tal que si  $f, g \in \mathfrak{M}$ , entonces  $Af + Bg \in \mathfrak{M}$  para todo  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ .
2. Un **subespacio** de  $\mathfrak{L}_2^k(\Omega)$  es una variedad lineal que es cerrada con la topología inducida por la norma  $\|\cdot\|$  de  $\mathfrak{L}_2^k(\Omega)$  definida en (4.12).
3. El **subespacio generado** por el subconjunto  $\mathfrak{M}$  de  $\mathfrak{L}_2^k(\Omega)$  está dado por la intersección de todos los subespacios que contienen a  $\mathfrak{M}$  (se puede verificar que esto efectivamente es un subespacio). En particular, al subespacio generado por un conjunto indexado  $\{f_i\}_{i \in I}$  se lo denotará  $\mathfrak{G}(f_i)_{i \in I}$ .

Con las definiciones anteriores, se puede probar el siguiente lema que nos será útil. Omitimos la demostración (ver [29, Lema 5.8]):

**Lema 4.3.12.** Se tiene que:

1.  $\mathfrak{M}$  es subespacio de  $\mathfrak{L}_2^k(\Omega)$  si y solo si existe un subespacio  $M$  de  $\mathfrak{L}_2(\Omega)$  tal que  $\mathfrak{M} = M^k$ , donde  $M^k$  denota el producto cartesiano  $M^k = M \times \cdots \times M$ .
2. Si  $\mathfrak{M}$  es subespacio de  $\mathfrak{L}_2^k(\Omega)$  y  $f \in \mathfrak{L}_2^k(\Omega)$ , entonces existe una única  $g \in \mathfrak{M}$  tal que

$$\|f - g\| \leq \|f - h\| \quad \text{para cada } h \in \mathfrak{M}. \quad (4.13)$$

Además, si  $M$  es el subespacio de  $\mathfrak{L}_2(\Omega)$  que proviene del punto (1) con  $\mathfrak{M} = M^k$ , se tiene que  $g^{(i)} = (f^{(i)}|M)$  donde  $(f^{(i)}|M)$  denota la proyección ortogonal de  $f^{(i)}$  sobre  $M$  (en el sentido común).

Más aún,  $g \in \mathfrak{M}$  cumple (4.13) si y solo si  $(f - g) \perp \mathfrak{M}$ . Con esto,  $g$  es llamada la **proyección ortogonal** de  $f$  sobre  $\mathfrak{M}$  y se denota  $g = (f|\mathfrak{M})$ .

### Procesos estocásticos estacionarios

Ahora, podemos introducir a los proceso estocásticos. En particular, nos enfocaremos en estudiar los procesos estocásticos estacionarios:

**Definición 4.3.13.** Un **proceso estocástico estacionario** de  $k$ -tuplas denotará una sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathfrak{L}_2^k(\Omega)$  tal que las matrices gramianas

$$\Gamma_{n-m} = \langle f_n, f_m \rangle_G = \left[ \int_{\Omega} f_n^{(i)}(\omega) \overline{f_m^{(j)}(\omega)} dP(\omega) \right]$$

dependen solo de la diferencia  $n - m$  (y no de  $n$  y  $m$  independientemente).

A partir de las matrices gramianas anteriores, surge la siguiente definición:

**Definición 4.3.14.**  $\Gamma_n$  es llamada la **matriz de covarianza** de índice  $n$  y la sucesión  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  se denota la **sucesión de covarianza** para el proceso estocástico estacionario  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Notemos que si  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es un proceso estocástico estacionario de  $k$ -tuplas en donde  $f_n = (f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(k)})$ , entonces  $f_n^{(i)} \in \mathfrak{L}_2(\Omega)$  para  $i = 1, \dots, k$ . Además, por definición,

$$\langle f_n^{(i)}, f_m^{(j)} \rangle = \int_{\Omega} f_n^{(i)}(\omega) \overline{f_m^{(j)}(\omega)} dP(\omega)$$

depende solo de la diferencia  $n - m$ . Luego, el proceso estocástico  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tiene asociado  $k$  procesos simples  $\{f_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , para  $i = 1, \dots, k$ , que son *estacionarios en el sentido amplio* (ver [12, Capítulo 2 - Sección 8(b)]).

Por lo tanto, de la teoría de procesos estacionarios [12, Capítulo 10 - Sección 1(b)], podemos asociarle a cada  $\{f_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  una isometría unitaria (no necesariamente única)  $U_i: \mathfrak{L}_2(\Omega) \rightarrow \mathfrak{L}_2(\Omega)$  tal que

$$U_i^n(f_0^{(i)}) = f_n^{(i)}.$$

Más aún, como los procesos simples  $\{f_n^{(i)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , son las componentes de un proceso estacionario de  $k$ -tuplas  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , se puede tomar  $U_i = U_j$  (ver [24, Teorema 1]). Así, existe un único operador  $U$  sobre  $\mathfrak{L}_2(\Omega)$  tal que

$$U^n(f_0^{(i)}) = f_n^{(i)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4.14)$$

Consideramos a  $U$  como única en el sentido de que todos los operadores que cumplen (4.14) deberán coincidir en el subespacio de  $\mathfrak{L}_2(\Omega)$  generado por las componentes  $f_n^{(i)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , y esto basta para la utilidad que le daremos a  $U$ .

Llamaremos a  $U$  el *shift operator* del proceso estocástico estacionario de  $k$ -tuplas  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  y utilizaremos la notación:

$$U^n(f_0) = f_n,$$

es decir, estamos considerando que  $U$  actúa sobre  $\mathfrak{L}_2^k(\Omega)$ .

Ahora, tomemos la siguiente definición:

**Definición 4.3.15.** Considerando la sucesión  $\{f_k\}_{k=-\infty}^n$ , el subespacio generado  $\mathfrak{G}(f_k)_{k=-\infty}^n$  se llamará el **pasado y presente de  $f_n$**  y se denotará  $\mathfrak{M}_n$ .

**Observación 4.3.16.** 1. Claramente se tiene que  $\mathfrak{M}_n \subseteq \mathfrak{M}_{n+1}$  y esto nos lleva a definir

$$\mathfrak{M}_{-\infty} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}_n \text{ que es llamado el } \textit{pasado remoto} \text{ del proceso.}$$

2. Si  $U$  es el shift operator del proceso  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  entonces

$$U^n(f_i | \mathfrak{M}_j) = (f_{i+n} | \mathfrak{M}_{j+n}) \quad \text{y} \quad U^n(\mathfrak{M}_j) = \mathfrak{M}_{j+n}.$$

**Definición 4.3.17.** Decimos que un proceso estocástico  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es **no determinista** si  $f_n \notin \mathfrak{M}_{n-1}$  para algún  $n$ .

Notemos que como estamos considerando procesos estocásticos estacionarios, vale que  $f_n \notin \mathfrak{M}_{n-1}$  para algún  $n$  solo si vale esta propiedad para cada  $n$ . Luego, para cualquier proceso  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  no determinista, se tiene que

$$g_n := f_n - (f_n | \mathfrak{M}_{n-1}) \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Podemos ver a estos  $g_n$  como las “innovaciones” por las cuales se va creando el proceso  $f_n$  considerando  $f_n = g_n + (f_n | \mathfrak{M}_{n-1})$ . Por esto, se llama a  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  el *proceso de innovación* asociado a  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Ahora, se puede verificar el siguiente lema trivial:

**Lema 4.3.18.** Sea  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  el proceso de innovación de un proceso no determinista  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  con shift operator  $U$ . Entonces se tiene que:

1.  $g_n = U^n g_0$ .
2.  $\langle g_n, g_m \rangle_G = \delta_{n,m} \mathcal{G}$  donde  $\mathcal{G} = \langle g_0, g_0 \rangle_G = \langle f_n, g_n \rangle_G$ .

A partir de la matriz gramiana  $\mathcal{G} = \langle g_0, g_0 \rangle_G$  del lema anterior definimos:

**Definición 4.3.19.** El rango  $\rho$  de la matriz  $\mathcal{G} = \langle g_0, g_0 \rangle_G$  es denominado el **rango del proceso estocástico**  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Además, se dice que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es de **rango completo** si  $\rho = k$ .

**Observación 4.3.20.** Por el punto (2) del lema anterior, el proceso de innovación  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  será ortogonal pero al menos que  $\mathcal{G}$  sea invertible (es decir,  $\rho = k$  y  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es de rango completo), no podremos tener  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ortonormal.

El siguiente teorema [29, Teorema 6.11] y su corolario [29, Corolario 6.12] serán útiles para la descomposición matricial buscada aunque no presentaremos sus demostraciones.

En lo que sigue,  $|A|_E^2 = \text{tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k |a_{i,j}|^2$  denota la norma euclídea.

**Teorema 4.3.21** (Descomposición de Wold). Sea  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  el proceso de innovación de un proceso estocástico no determinista  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Si  $\mathfrak{M}_n$  y  $\mathfrak{N}_n$  son el pasado y presente de  $f_n$  y de  $g_n$  respectivamente, entonces:

1.  $f_n = u_n + v_n$  donde  $u_n = (f_n | \mathfrak{N}_n)$ ,  $v_n = (f_n | \mathfrak{M}_{-\infty})$  con  $u_n \perp v_n$ .
2. El proceso estocástico  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una media móvil unilateral, es decir:

$$u_n = \sum_{i=0}^{\infty} A_i g_{n-i} \quad \text{con} \quad \|u_n\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |A_i \mathcal{G}^{1/2}|_E^2 < \infty,$$

donde  $\mathcal{G} = \langle g_0, g_0 \rangle_G$  y las  $A_i$  son matrices cualesquiera tales que

$$A_i \mathcal{G} = \langle u_0, g_{-i} \rangle_G = \langle f_0, g_{-i} \rangle_G \quad \text{y} \quad A_0 \mathcal{G} = \mathcal{G} = \mathcal{G} A_0^*.$$

3. El proceso estocástico  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es determinista y el pasado y presente de  $v_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , está dado por

$$\mathfrak{G}(v_k)_{-\infty}^n = \mathfrak{M}_{-\infty}.$$

**Corolario 4.3.22.** Sea  $g_0$  la función de innovación de un proceso  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de rango completo. Entonces, utilizando la notación del teorema anterior, se tiene que

$$u_n = \sum_{i=0}^{\infty} B_i h_{n-i} \quad \text{con} \quad \|u_n\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |B_i|_E^2 < \infty,$$

donde  $\mathcal{G} = \langle g_0, g_0 \rangle_G$ , las matrices  $B_i$  están dados por:

$$B_0 = \sqrt{\mathcal{G}} \quad \text{y} \quad B_i = \langle u_0, h_{-i} \rangle_G = \langle f_0, h_{-i} \rangle_G,$$

y  $\{h_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  es el proceso de innovación normalizado de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , es decir:

$$h_0 = \sqrt{\mathcal{G}^{-1}} g_0 \quad \text{y} \quad h_i = U^i h_0.$$

**Definición 4.3.23.** Se dice que un proceso estocástico  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es **regular** si

$$(f_0 | \mathfrak{M}_{-n}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

**Observación 4.3.24.** Dado  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  proceso estocástico regular, entonces  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  será no determinista, con lo cual se le puede aplicar el teorema de la descomposición de Wold.

En el siguiente teorema se presentarán equivalencias relacionadas con la regularidad. También omitimos la demostración (ver [29, Teorema 6.13]).

**Teorema 4.3.25.** Las siguientes condiciones son equivalentes a la regularidad de un proceso estocástico estacionario  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ :

1.  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una media móvil unilateral, es decir:

$$f_n = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \varphi_{n-i} \quad \text{con} \quad \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_G = \delta_{n,m} K,$$

para alguna matriz  $K$ .

2. El pasado remoto de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  cumple  $\mathfrak{M}_{-\infty} = \{0\}$ .

### Una representación espectral relacionada a procesos estocásticos

Con la teoría de los procesos estocásticos ya desarrollada, dado un proceso estocástico estacionario de  $k$ -tuplas  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , a continuación daremos una *representación espectral* de su shift operator  $U$  [12, Apéndice: Capítulo 10 - Secciones 3, 4]. Esto nos permitirá utilizar herramientas del análisis armónico para encontrar la factorización buscada.

Ahora, dado el shift operator  $U$  de  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , la representación espectral de  $U$  resulta ser de la forma:

$$U = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} dE_\theta,$$

donde  $\{E_\theta\}_{0 \leq \theta \leq 2\pi}$  es *resolución espectral de la identidad*, es decir, los  $E_\theta$  son operadores de proyección que cumplen:

- $E_\theta - E_\lambda$  es no negativa, hermitiana para  $\theta > \lambda$ .
- $E_{\theta+\epsilon} \rightarrow E_\theta$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0^+$  para todo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .
- $E_0 = 0$  es el operador nulo.
- $E_{2\pi} = I$  es el operador identidad.

Así, por (4.14) y propiedades de la representación espectral se tiene que:

$$\langle f_n^{(i)}, f_0^{(j)} \rangle = \langle U^n f_0^{(i)}, f_0^{(j)} \rangle = \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} d\langle E_\theta f_0^{(i)}, f_0^{(j)} \rangle.$$

Ahora, consideremos a la función matricial dada por:

$$\hat{F}(\theta) = \left[ 2\pi \langle E_\theta f_0^{(i)}, f_0^{(j)} \rangle \right], \quad (4.15)$$

donde por  $\hat{F}(\theta)$  entendemos  $\hat{F}(e^{i\theta})$  (es decir, vemos a  $\hat{F}$  sobre  $[0, 2\pi]$  en vez de sobre  $S^1$ ). Luego, la matriz de covarianza  $\Gamma_n$  de índice  $n$  asociada a  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  está dada por:

$$\Gamma_n = \langle f_n, f_0 \rangle_G = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\theta} d\hat{F}(\theta). \quad (4.16)$$

Denotando  $E_\theta f_0 = (E_\theta f_0^{(1)}, \dots, E_\theta f_0^{(k)})$  entonces, por el punto (2) del Lema 4.3.12, tenemos que  $E_\theta f_0 = (f|\mathfrak{M}_\theta)$  donde  $\mathfrak{M}_\theta$  es el subespacio de  $\mathfrak{L}_2^k(\Omega)$  que consiste de las funciones vectoriales cuyas componentes están en el rango del operador de proyección  $E_\theta$ . Por lo tanto,

$$\hat{F}(\theta) = 2\pi \langle E_\theta f_0, f_0 \rangle_G = 2\pi \langle E_\theta f_0, E_\theta f_0 \rangle_G.$$

Ahora, como los operadores de proyección  $E_\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , son resolución espectral de la identidad, se puede ver que  $\hat{F}$  es acotada, no decreciente y continua a derecha sobre  $[0, 2\pi]$  con  $\hat{F}(0) = 0$  [24, Teorema 4].

**Definición 4.3.26.** Una función  $\hat{F}$  acotada, no decreciente y continua a derecha sobre  $[0, 2\pi]$  con  $\hat{F}(0) = 0$  cuya matriz de covarianza  $\Gamma_n$  de índice  $n$  satisface (4.16) es llamada la **función de distribución espectral del proceso estocástico**  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Por lo tanto, hemos visto que cada proceso estocástico estacionario  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  posee una función de distribución espectral  $\hat{F}$  como fue dada en (4.15). Además, resulta que  $\hat{F}$  es única al estar unívocamente determinada por la sucesión de covarianza  $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  (ver [29, (7.4)]).

Más aún, se puede ver que cualquier función  $\hat{F}$  que es acotada, no decreciente y continua a derecha sobre  $[0, 2\pi]$  con  $\hat{F}(0) = 0$  es la distribución espectral de algún proceso estocástico estacionario  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  [7, Teorema 5(b)].

Los siguientes teoremas [29, Teorema 7.7 y Teorema 7.10] nos dan condiciones suficientes para la continuidad absoluta de la función de distribución espectral  $\hat{F}$ :

**Teorema 4.3.27.** 1. El proceso de media móvil  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  dado por:

$$f_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i g_{n-i} \quad \text{con} \quad \langle g_i, g_j \rangle_G = \delta_{i,j} \mathcal{G}, \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} |A_i \mathcal{G}^{1/2}|_E^2 < \infty,$$

tiene una distribución espectral  $\hat{F}$  absolutamente continua tal que

$$\hat{F}'(e^{i\theta}) = \Phi(e^{i\theta}) \Phi^*(e^{i\theta}) \quad \text{p.p. } \theta \in [0, 2\pi],$$

donde  $\Phi(e^{i\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \mathcal{G}^{1/2} e^{mi\theta}$  (y cuyos coeficientes de Fourier son  $A_m \mathcal{G}^{1/2}$ ).

2. Si  $A_m = 0$  cuando  $m < 0$  para el proceso dado en el punto (1), entonces

$$\Phi(e^{i\theta}) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \mathcal{G}^{1/2} e^{mi\theta},$$

y, o bien  $\det(\Phi_M) \equiv 0$ , o bien  $\log(\det(\hat{F}')) \in \mathcal{L}_1(S^1)$  con

$$\log(\det(A_0 \mathcal{G} A_0^*)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(\det(\hat{F}'(e^{i\theta}))) d\theta.$$

**Teorema 4.3.28.** *Un proceso estocástico  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es regular y de rango completo si y solo si tiene una distribución espectral  $\hat{F}$  absolutamente continua tal que  $\log(\det(\hat{F}')) \in \mathcal{L}_1(S^1)$ . En este caso, si  $\mathcal{G} = \langle g_0, g_0 \rangle_G$ , se tiene que*

$$\det(\mathcal{G}) = \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left( \det(\hat{F}'(e^{i\theta})) \right) d\theta \right).$$

### La factorización de Wiener-Hopf

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema buscado:

**Teorema 4.3.29.** *Sea  $F$  función matricial definida en  $S^1$ , no negativa, hermitiana tal que  $F \in \mathcal{L}_1(S^1)$  y  $\log(\det(F)) \in L_1(S^1)$ . Entonces existe una función  $\Phi \in \mathcal{L}_2(S^1)$ , cuyos coeficientes de Fourier para  $n < 0$  son todos cero, tal que*

$$F(e^{i\theta}) = \Phi(e^{i\theta})\Phi^*(e^{i\theta}) \quad \text{p.p. } \theta \in [0, 2\pi],$$

es decir, tenemos una factorización de Wiener-Hopf matricial para  $F$ :

$$F(z) = \Phi(z)\Phi^*(z) \quad \text{p.p. } |z| = 1.$$

Más aún,  $\Phi_M(0)$  es definida no negativa, hermitiana y

$$\det(\Phi_M(0)^2) = \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left( \det(F(e^{i\theta})) \right) d\theta \right).$$

*Demostración:*

Consideremos a la función dada por:

$$\hat{F}(\theta) = \int_0^\theta F(e^{it}) dt, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Tenemos que  $\hat{F}$  es acotada, no decreciente y continua a derecha sobre  $[0, 2\pi]$  con  $\hat{F}(0) = 0$ . Así, por lo discutido anteriormente, existe un proceso estocástico estacionario de  $k$ -tuplas  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  con distribución espectral  $\hat{F}$ .

Luego, como  $\hat{F}$  es absolutamente continua y  $\log(\det(\hat{F}')) \in \mathcal{L}_1(S^1)$  por hipótesis, tenemos que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es regular y de rango completo por el Teorema 4.3.28. Además, por el Teorema 4.3.25, esto es equivalente a que su pasado remoto cumple  $\mathfrak{M}_{-\infty} = \{0\}$ .

Ahora, por la descomposición de Wold y su corolario, resulta que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es proceso de media móvil unilateral, es decir:

$$f_n = \sum_{i=0}^{\infty} A_i h_{n-i} \quad \text{con} \quad \langle h_i, h_j \rangle_G = \delta_{i,j} I, \quad \sum_{i=0}^{\infty} |A_i|_E^2 < \infty,$$

en donde  $A_0 = \sqrt{\mathcal{G}}$  para  $\mathcal{G} = \langle g_0, g_0 \rangle_G$ . Luego, por el Teorema 4.3.27, tenemos que

$$F(e^{i\theta}) = \hat{F}'(e^{i\theta}) = \Phi(e^{i\theta})\Phi^*(e^{i\theta}) \quad \text{p.p. } \theta \in [0, 2\pi],$$

para  $\Phi(e^{i\theta}) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m e^{im\theta}$ . Así,  $\Phi_M(0) = A_0 = \sqrt{\mathcal{G}}$  es definida no negativa, hermitiana y, por el Teorema 4.3.28, tenemos que

$$\det(\Phi_M(0)^2) = \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left( \det(F(e^{i\theta})) \right) d\theta \right).$$

Esto concluye la demostración. ■

**Observación 4.3.30.** Si  $\Phi$  es una función matricial con coeficientes reales se tiene que

$$\Phi(z)\Phi^*(z) = \Phi(z)\Phi(\bar{z})^T = \Phi(z)\Phi(z^{-1})^T \quad \text{p.p. } |z| = 1, \quad (4.17)$$

pues  $\bar{z} = z^{-1}$  sobre  $S^1$ . Ahora, notemos que  $\Phi(z) = \Phi_M(z)$  pues, por el teorema anterior, los coeficientes de Fourier de  $\Phi$  son todos cero para  $n < 0$ . Por lo tanto, en (4.17) se factoriza a  $F$  como el producto de un factor analítico en  $|z| < 1$  y otro analítico en  $|z| > 1$ : los factores  $\Phi(z)$  y  $\Phi(z^{-1})^T$  respectivamente.

A continuación, presentamos dos ejemplos triviales de la factorización de Wiener-Hopf en el caso de tener polinomios escalares.

**Ejemplo 4.3.31.** Sea  $w(x) = x + 1$  para  $x \in [-1, 1]$ . Luego, vemos que

$$w(\varphi^{-1}(z)) = w\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = \frac{z + z^{-1}}{2} + 1, \quad |z| = 1,$$

y por la definición estamos buscando descomponer a  $w\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)$  de la forma:

$$w\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = (a_0 + a_1z)(a_0 + a_1z^{-1}), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{C}.$$

Es decir, queremos:

$$\frac{z + z^{-1}}{2} + 1 = a_0^2 + a_0a_1(z + z^{-1}) + a_1^2.$$

Comparando coeficientes esto nos da un sistema no lineal de ecuaciones que podemos resolver con Maple. Resulta que las posibles soluciones serán  $a_0 = a_1 = \pm\sqrt{2}/2$ .

Por lo tanto, tenemos que una posible factorización de Wiener-Hopf de  $w$  está dada por:

$$w\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + z\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + z^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad |z| = 1.$$

**Ejemplo 4.3.32.** Sea  $w(x) = x^2 + 1$  para  $x \in [-1, 1]$ . Luego, vemos que

$$w(\varphi^{-1}(z)) = w\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{z^2 + 2 + z^{-2}}{4} + 1, \quad |z| = 1,$$

y queremos descomponer a  $w\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)$  de la siguiente manera:

$$w\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = (a_0 + a_1z + a_2z^2)(a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}), \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}.$$

Nuevamente comparando coeficientes y resolviendo el sistema no lineal de ecuaciones con Maple obtenemos que una posible solución está dada por  $a_0 = i/2$ ,  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_2 = -i/2$ .

Por lo tanto, tenemos que una posible factorización de Wiener-Hopf de  $w$  está dada por:

$$w\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = \left(\frac{i}{2} + \sqrt{2}z - \frac{i}{2}z^2\right)\left(\frac{i}{2} + \sqrt{2}z^{-1} - \frac{i}{2}z^{-2}\right), \quad |z| = 1.$$

**Observación 4.3.33.** Dado  $w(x)$ , con  $x \in [-1, 1]$ , un polinomio con coeficientes complejos se pueden replicar los ejemplos anteriores (planteando la forma general de una factorización y comparando coeficientes) para obtener una posible factorización Wiener-Hopf. Aun así, esta forma depende fuertemente de cada problema y la existencia de la solución del sistema no lineal que puede aparecer. Por esto, buscamos una forma generalizada y constructiva de obtener la factorización de Wiener-Hopf. Esto será el objetivo de la próxima sección.

## 4.4. Una construcción explícita para polinomios matriciales

En esta sección se presenta una manera constructiva de obtener (explícitamente) a la factorización de Wiener-Hopf matricial en el caso de tener un polinomio de Laurent que fue introducida por Ephremidze [14]. En lo que sigue, se denota  $\mathfrak{D}^+ = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$  y  $\mathfrak{D}^- = \{z \in \mathbb{C}: |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ . Además,  $\mathfrak{R}_N$  denotará al anillo de funciones matriciales con entradas racionales definidas sobre  $\mathbb{C}$ .

Comenzamos dando un lema que originalmente fue presentado por Fejér [15] y Riesz [27] que nos dará la factorización en el caso escalar de manera constructiva. La demostración se encuentra detallada en diversos lugares (aquí se sigue [18, Capítulo 1 - Sección 12]):

**Lema 4.4.1** (Lema de Fejér-Riesz). *Sea  $q(z) = \sum_{k=-n}^n a_k z^k$  un polinomio de Laurent escalar con coeficientes complejos tal que  $q(z) \geq 0$  (real) para cada  $z \in S^1$ . Entonces  $q(z)$  se escribe de la siguiente forma:*

$$q(z) = |p(z)|^2 = p(z)\overline{p(1/\bar{z})}, \quad z \in S^1,$$

donde  $p(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$  es polinomio con coeficientes complejos y sin ceros sobre  $\mathfrak{D}^+ \cup S^1$ .

*Demostración:*

Vamos a suponer sin pérdida de generalidad que  $a_n \neq 0$ , con lo cual si se define:

$$r(z) = z^n q(z),$$

entonces  $r(z)$  es un polinomio con  $2n$  raíces no nulas pues  $\bar{a}_n = a_{-n} \neq 0$  (al ser  $q(z) \geq 0$  para cada  $z \in S^1$ ).

Ahora, notemos que  $q(z) = \overline{q(1/\bar{z})}$  con lo cual cada raíz  $z_0$  de  $q(z)$  que no está en  $S^1$  tiene una raíz correspondiente dada por  $1/\bar{z}_0$  (que será de la misma multiplicidad). Más aún, las raíces de  $q(z)$  sobre  $S^1$  son de multiplicidad par pues  $q(z) \geq 0$  para cada  $z \in S^1$ .

Por lo tanto, podemos escribir

$$r(z) = c \prod_i (z - \lambda_i)^2 \prod_k (z - z_k)(z - 1/\bar{z}_k),$$

donde  $c \neq 0$  es constante,  $|\lambda_i| = 1$  y  $|z_k| > 1$ . Además, tendremos que

$$q(z) = d \prod_i (z - \lambda_i)^2 \prod_k (z - z_k)(1/z - \bar{z}_k),$$

donde  $d = -c \prod_k 1/\bar{z}_k$  es positivo (por ser todos los demás términos en  $q(z)$  positivos).

Con esto, si se define

$$p(z) = \sqrt{d} \prod_i (z - \lambda_i) \prod_k (z - z_k),$$

se cumple que

$$q(z) = |p(z)|^2 = p(z)\overline{p(1/\bar{z})}, \quad z \in S^1.$$

Por lo tanto, obtuvimos la factorización buscada. ■

A continuación presentamos el teorema que extiende al lema anterior y cuya demostración nos dará la manera constructiva de encontrar la factorización de Wiener-Hopf matricial para polinomios de Laurent matriciales:

**Teorema 4.4.2.** *Sea  $P$  un polinomio de Laurent matricial dado por*

$$P(z) = \sum_{k=-n}^n A_k z^k, \quad A_k \in M_N(\mathbb{C}), \quad k = -n, \dots, n,$$

*tal que  $P(z)$  es definida positiva p.p.  $z \in S^1$ . Entonces  $P(z)$  admite una factorización de la siguiente forma:*

$$P(z) = \Phi^+(z)\Phi^-(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (4.18)$$

*donde se tiene que*

$$\Phi^+(z) = \sum_{k=0}^n B_k z^k,$$

*es polinomio matricial invertible en  $\mathfrak{D}^+$  (es decir,  $\det(\Phi^+(z)) \neq 0$  para  $|z| < 1$ ) y*

$$\Phi^-(z) = \overline{\Phi^+(1/\bar{z})}^T = \sum_{k=0}^n B_k^* z^{-k},$$

*es su adjunta (es decir,  $\Phi^-$  resulta analítica e invertible en  $\mathfrak{D}^-$ ). Más aún,  $\Phi^+$  es única salvo matrices unitarias multiplicativas.*

*Es decir, la factorización (4.18) vista sobre  $S^1$  es la factorización de Wiener-Hopf de  $P$ .*

*Demostración:*

Con el lema de Fejér-Riesz es posible obtener una factorización de la forma:

$$P(z) = P_0(z)\overline{P_0(1/\bar{z})}^T, \quad (4.19)$$

donde  $P_0 \in \mathfrak{R}_N$ . Más precisamente, dada  $A = [a_{i,j}] \in M_N(\mathbb{C})$  definida positiva, su descomposición de Cholesky está dada por  $A = BB^*$  donde  $B = [b_{i,j}]$  es una única matriz triangular inferior con entradas diagonales positivas. Denotando  $a^* = \bar{a}$ , las entradas de  $B$  se pueden determinar recursivamente por:

$$b_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}, \quad b_{k,1} = \frac{a_{k,1}}{\sqrt{a_{1,1}^*}},$$

$$b_{k,k} = \sqrt{a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{k,j}b_{k,j}^*}, \quad b_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} b_{i,j}b_{k,j}^*}{b_{k,k}^*},$$

para  $k = 2, 3, \dots, N$  y  $i = k+1, k+2, \dots, N$ . Se puede verificar que estas fórmulas siguen valiendo para funciones racionales cambiando  $a(z)^*$  por  $\overline{a(1/\bar{z})}^T$  y  $\sqrt{a(z)}$  por el factor polinomial  $p(z)$  que aparece al aplicarle el lema de Fejér-Riesz a  $a(z)$ .

Ahora, considerando a la descomposición como fue dada en (4.19), y en donde denotamos+  $P_0(z) = [p_{i,j}^0(z)]$ , para encontrar la factorización buscada se procede como sigue:

- Si  $p_{i,j}^0(z)$  tiene un polo  $a \in \mathfrak{D}^+$  de orden  $m$ , tomamos la función matricial:

$$U_0(z) = \text{diag}(1, \dots, u_0(z)^m, \dots, 1),$$

donde  $u_0(z)^m = \left( \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^m$  es su entrada  $(j, j)$ -ésima. De esta forma, tenemos que  $P_0(z)U_0(z)$  ya no tiene un polo en la entrada  $(i, j)$ . Además, se tiene que

$$P(z) = P_0(z)\overline{P_0(1/\bar{z})}^T = (P_0U_0)(z)\overline{(P_0U_0)(1/\bar{z})}^T.$$

Procediendo de esta forma podemos quitarle a cada entrada de  $P_0(z)$  los polos en  $\mathfrak{D}^+$ . Por lo tanto, obtenemos una factorización de la forma

$$P(z) = \Phi_0^+(z)\Phi_0^-(z), \tag{4.20}$$

donde  $\Phi_0^+ \in \mathfrak{R}_N$  es analítica en  $\mathfrak{D}^+$  y  $\Phi_0^-(z) = \overline{\Phi_0^+(1/\bar{z})}^T$ .

- Si  $\det(\Phi_0^+(z_0)) = 0$  para  $z_0 \in \mathfrak{D}^+$  entonces  $\Phi_0^+(z_0)$  tiene núcleo no trivial. Luego, podemos tomar  $v_1 \neq 0$  vector de norma 1 en el núcleo y completar este vector a una base ortonormal  $\{v_1, \dots, v_N\}$  de  $\mathbb{C}^N$  (considerado como espacio vectorial complejo). Así, la matriz  $V$  que tiene como columnas a  $v_1, \dots, v_N$  es unitaria y cumple que  $\Phi_0^+(z_0)V$  tiene como primera columna al vector 0. Es decir,  $z_0$  es un cero de cada entrada de la primera columna de  $\Phi_0^+(z)V$ . Luego, tomando la función matricial:

$$U_1(z) = \text{diag}(u_1(z), 1, \dots, 1),$$

donde  $u_1(z) = \frac{1 - \bar{z}_0 z}{z - z_0}$ , tenemos que  $\Phi_0^+(z)VU_1(z)$  es analítica en  $\mathfrak{D}^+$  con un cero menos en su determinante. Además, se tiene que

$$P(z) = \Phi_0^+(z)\Phi_0^-(z) = \Phi_0^+(z)\overline{\Phi_0^+(1/\bar{z})}^T = (\Phi_0^+VU_1)(z)\overline{(\Phi_0^+VU_1)(1/\bar{z})}^T.$$

Procediendo de esta forma podemos obtener una factorización de la forma

$$P(z) = \Phi^+(z)\Phi^-(z),$$

donde  $\Phi^+ \in \mathfrak{R}_N$  es analítica e invertible en  $\mathfrak{D}^+$  y  $\Phi^-(z) = \overline{\Phi^+(1/\bar{z})}^T$  es analítica e invertible en  $\mathfrak{D}^-$ .

Por lo tanto, obtuvimos una factorización de  $P$  de la forma buscada y solo falta verificar que  $\Phi^+(z)$  efectivamente es un polinomio matricial de grado  $n$ . Veamos esto: tenemos que  $\Phi^+$  no tiene polos sobre  $S^1$  pues

$$\Phi^+(z)\Phi^+(z)^* = P(z), \quad z \in S^1,$$

y las sumas  $\sum_{j=1}^N |\Phi_{i,j}^+(z)|^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , aparecen en la diagonal de  $P(z)$  la cual es

acotada sobre  $S^1$ . Además, tenemos que  $z^{-n}\Phi^+(z) = z^{-n}P(z)\Phi^-(z)^{-1}$  es analítica sobre  $\mathfrak{D}^-$ . Por lo tanto,  $\Phi^+(z)$  es analítica sobre  $\mathbb{C}$  y  $z^{-n}\Phi^+(z)$  lo es sobre  $\mathfrak{D}^-$ . Esto implica que  $\Phi^+(z)$  es un polinomio matricial de grado  $n$ .

Ahora, veamos la unicidad: si tenemos otra factorización que cumple lo buscado:

$$\Phi_1^+(z)\Phi_1^-(z) = P(z) = \Phi^+(z)\Phi^-(z),$$

entonces  $\tilde{\Phi}(z) = \Phi_1^+(z)^{-1}\Phi^+(z)$  es analítica e invertible en  $\mathfrak{D}^+$  y cumple que

$$\tilde{\Phi}(z)\overline{\tilde{\Phi}(1/\bar{z})}^T = I.$$

Además,  $\tilde{\Phi}(z)$  no tiene polos ni singularidades sobre  $S^1$  pues

$$\tilde{\Phi}(z)\tilde{\Phi}(z)^* = \tilde{\Phi}(z)\overline{\tilde{\Phi}(1/\bar{z})}^T = I, \quad z \in S^1.$$

Así, los coeficientes de Fourier de  $\tilde{\Phi}(e^{i\theta})$  son todos nulos excepto por el coeficiente asociado a  $n = 0$ . Luego,  $\tilde{\Phi}(e^{i\theta})$  es matriz constante y por cómo está dada la factorización está claro que deberá ser unitaria. Por lo tanto,  $\Phi^+$  es única salvo matrices unitarias multiplicativas. ■

**Observación 4.4.3.** La manera constructiva de encontrar la factorización para un polinomio de Laurent matricial puede ser fácilmente interpretado como un algoritmo que podemos implementar en un lenguaje de programación.

En el archivo “factorizacion\_wiener\_hopf.mw” del repositorio de GitHub dado en [1] se encuentra una implementación posible realizada en Maple. Es necesario tener la primera factorización como fue dada en (4.19) de antemano y a partir de esto se puede encontrar el factor  $\Phi^+$  de la factorización de Wiener-Hopf buscada.

Se puede también establecer un teorema equivalente sobre la recta real aunque esto no será el enfoque de este trabajo [14, Teorema 1.2]:

**Teorema 4.4.4.** Sea  $P$  un polinomio matricial dado por

$$P(z) = \sum_{k=-n}^{2n} A_k z^k, \quad A_k \in M_N(\mathbb{C}), \quad k = -n, \dots, n,$$

tal que  $P(z)$  es definida positiva p.p.  $z \in \mathbb{R}$ . Entonces  $P(z)$  admite una factorización de la siguiente forma:

$$P(z) = \Phi^+(z)\Phi^-(z),$$

donde se tiene que

$$\Phi^+(z) = \sum_{k=0}^n B_k z^k,$$

es polinomio matricial invertible en  $\mathbb{R}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$  y

$$\Phi^-(z) = \overline{\Phi^+(\bar{z})}^T = \sum_{k=0}^n B_k^* z^k,$$

es su adjunta. Más aún,  $\Phi^+$  es única salvo matrices unitarias multiplicativas.

**Un ejemplo concreto**

Dado  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , consideremos la matriz  $A \in M_N(\mathbb{R})$  dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a & 0 & & & \\ & a & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, tomemos el peso matricial  $\widetilde{W}$  dado por:

$$\widetilde{W}(x) = e^{xA} e^{xA^*}, \quad x \in [-1, 1].$$

Notemos que  $A$  es trivialmente nilpotente de orden  $N$  y por lo tanto

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(xA)^k}{k!},$$

es polinomio matricial. Vale lo análogo para  $e^{xA^*}$  con lo cual  $\widetilde{W}(x)$  es polinomio matricial. Además, resulta que  $\widetilde{W}(x)$  es hermitiana, definida positiva para todo  $x \in [-1, 1]$ .

Ahora, como fue hecho en la sección anterior, es posible llevar  $\widetilde{W}$  a  $S^1$  considerando:

$$W(z) = \widetilde{W}(\varphi^{-1}(z)) = \widetilde{W}\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \exp\left(\frac{z+z^{-1}}{2}A\right) \exp\left(\frac{z+z^{-1}}{2}A^*\right).$$

A continuación calculamos la factorización de Wiener-Hopf de  $W$  explícitamente para ciertas dimensiones utilizando el Teorema 4.4.2.

**Caso  $N = 2$**

Tenemos que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$  con

$$W(z) = \exp\left(\frac{z+z^{-1}}{2}A\right) \exp\left(\frac{z+z^{-1}}{2}A^*\right).$$

Así, tomando

$$W_0(z) = \exp\left(\frac{z+z^{-1}}{2}A\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a\frac{z+z^{-1}}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos la primera factorización buscada como fue dada en (4.19) del Teorema 4.4.2:

$$W(z) = W_0(z) \overline{W_0(1/\bar{z})}^T,$$

donde  $W_0 \in \mathfrak{R}_N$ . Ahora, procedemos como en la demostración del Teorema 4.4.2 para encontrar la factorización de Wiener-Hopf:

- Tenemos que la entrada (2, 1) de  $W_0(z)$  dada por  $w_{2,1}^0(z) = a \frac{z + z^{-1}}{2}$  tiene un polo de orden 1 en  $0 \in \mathfrak{D}^+$ . Por lo tanto, definimos la función matricial

$$U_0(z) = \begin{pmatrix} \frac{z-0}{1-0z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y tomamos

$$\Phi_0^+(z) = W_0(z)U_0(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a \frac{z+z^{-1}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ a \frac{z^2+1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Con esto obtenemos la segunda factorización buscada como fue dada en (4.20):

$$W(z) = \Phi_0^+(z)\Phi_0^-(z),$$

donde  $\Phi_0^+ \in \mathfrak{R}_N$  es analítica en  $\mathfrak{D}^+$  y  $\Phi_0^-(z) = \overline{\Phi_0^+(1/\bar{z})}^T$ .

- Tenemos que  $\det(\Phi_0^+(z)) = z$  con lo cual  $\det(\Phi_0^+(0)) = 0$  para  $0 \in \mathfrak{D}^+$ . Como

$$\Phi_0^+(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a/2 & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos que  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}(2, -a)^T \neq 0$  es vector de norma 1 en el núcleo de  $\Phi_0^+(0)$ .

Ahora, podemos completar este vector a una base ortonormal de  $\mathbb{C}^2$  trivialmente tomando  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}(a, 2)^T$ . Así, tenemos una matriz unitaria  $V$  dada por

$$V = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 2 \end{pmatrix},$$

tal que  $\Phi_0^+(0)V$  tiene como primera columna al vector 0. Finalmente, definimos la función matricial

$$U_1(z) = \begin{pmatrix} \frac{1-\bar{0}z}{z-0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y tomamos

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_0^+(z)VU_1(z) \\ &= \begin{pmatrix} z & 0 \\ a \frac{z^2+1}{2} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} \begin{pmatrix} 2 & az \\ az & a^2 \frac{z^2+1}{2} + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con el procedimiento anterior obtuvimos la factorización de Wiener-Hopf de  $W$ :

$$W(z) = \Phi_2(z)\Phi_2^*(z), \quad z \in S^1,$$

donde  $\Phi_2(z) = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} \begin{pmatrix} 2 & az \\ az & a^2 \frac{z^2+1}{2} + 2 \end{pmatrix}$  es analítica e invertible en  $\mathfrak{D}^+$ .

**Caso**  $N = 3$

Tomamos  $a = 1$  para simplificar las cuentas. Luego, tenemos que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  con

$$W(z) = \exp\left(\frac{z+z^{-1}}{2}A\right) \exp\left(\frac{z+z^{-1}}{2}A^*\right).$$

Así, tomando

$$W_0(z) = \exp\left(\frac{z+z^{-1}}{2}A\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{z+z^{-1}}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 & \frac{z+z^{-1}}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos la primera factorización buscada como fue dada en (4.19) del Teorema 4.4.2:

$$W(z) = W_0(z)\overline{W_0(1/\bar{z})}^T,$$

donde  $W_0 \in \mathfrak{R}_N$ . Ahora, procedemos como en la demostración del Teorema 4.4.2 para encontrar la factorización de Wiener-Hopf:

- Las entrada (2, 1) y (3, 2) de  $W_0(z)$  dadas por  $w_{2,1}^0(z) = \frac{z+z^{-1}}{2} = w_{3,2}^0(z)$  tienen un polo de orden 1 en  $0 \in \mathfrak{D}^+$  y la entrada (3, 1) dada por  $w_{3,1}^0(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2$  tiene un polo de orden 2 en  $0 \in \mathfrak{D}^+$ . Por lo tanto, basta definir las funciones matriciales

$$U_0(z) = \begin{pmatrix} z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y tomamos

$$\begin{aligned} \Phi_0^+(z) &= W_0(z)U_0(z)U_1(z) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{z+z^{-1}}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 & \frac{z+z^{-1}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^2 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z^2 & 0 & 0 \\ \frac{z^3+z}{2} & z & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{2}\right)^2 & \frac{z^2+1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con esto obtenemos la segunda factorización buscada como fue dada en (4.20):

$$W(z) = \Phi_0^+(z)\Phi_0^-(z),$$

donde  $\Phi_0^+ \in \mathfrak{R}_N$  es analítica en  $\mathfrak{D}^+$  y  $\Phi_0^-(z) = \overline{\Phi_0^+(1/\bar{z})}^T$ .

- Tenemos que  $\det(\Phi_0^+(z)) = z^3$  con lo cual  $\det(\Phi_0^+(0)) = 0$  para  $0 \in \mathfrak{D}^+$ . Como

$$\Phi_0^+(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos que  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{65}}(-8, 0, 1)^T \neq 0$  es vector de norma 1 en el núcleo de  $\Phi_0^+(0)$ .

Trivialmente podemos completar este vector a una base de  $\mathbb{C}^3$  tomando  $\tilde{v}_2 = (1, 0, 8)^T$  y  $\tilde{v}_3 = (0, 1, 0)^T$ . Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base  $\{v_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$  obtenemos una base ortonormal  $\{v_1, v_2, v_3\}$  donde  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{65}}(1, 0, 8)^T$  y  $v_3 = \tilde{v}_3$ . Así, tenemos una matriz unitaria  $V_0$  dada por

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{65} \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix},$$

tal que  $\Phi_0^+(0)V_0$  tiene como primera columna al vector 0. Por lo tanto, definimos la función matricial

$$U(z) = \begin{pmatrix} 1/z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y tomamos

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \Phi_0^+(z)V_0U(z) \\ &= \begin{pmatrix} z^2 & 0 & 0 \\ \frac{z^3+z}{2} & z & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{z^2+1}{2}\right)^2 & \frac{z^2+1}{2} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{65} \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{pmatrix} -8z & z^2 & 0 \\ -4(z^2+1) & \frac{z(z^2+1)}{2} & \sqrt{65}z \\ -z(z^2+2) & \frac{z^4+2z^2+1}{8} + 8 & \sqrt{65}\frac{z^2+1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esta matriz satisface  $\det(\Phi_0(z)) = z^2$  con lo cual tiene un cero menos que  $\det(\Phi_0^+(z))$ . Aun así, se debe continuar el proceso iterativo hasta no tener más raíces.

- Tenemos que  $\det(\Phi_0(z)) = z^2$  con lo cual  $\det(\Phi_0(0)) = 0$  para  $0 \in \mathfrak{D}^+$ . Como

$$\Phi_0(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{65}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{65}}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

tenemos que  $v_1 = \frac{1}{9}(0, -4, \sqrt{65})^T \neq 0$  es vector de norma 1 en el núcleo de  $\Phi_0(0)$ .

Podemos completar este vector a una base de  $\mathbb{C}^3$  tomando  $\tilde{v}_2 = (0, \sqrt{65}, 4)^T$  y  $\tilde{v}_3 = (1, 0, 0)^T$ . Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base  $\{v_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3\}$  obtenemos una base ortonormal  $\{v_1, v_2, v_3\}$  donde  $v_2 = \frac{1}{9}(0, \sqrt{65}, 4)^T$  y  $v_3 = \tilde{v}_3$ . Así, tenemos una matriz unitaria  $V_1$  dada por

$$V_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ -4 & \sqrt{65} & 0 \\ \sqrt{65} & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

tal que  $\Phi_0(0)V_1$  tiene como primera columna al vector 0. Así, tomamos

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0(z) &= \Phi_0(z)V_1U(z) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{4z}{9\sqrt{65}} & \frac{z^2}{9} & -\frac{8z}{\sqrt{65}} \\ -\frac{2z^2-63}{9\sqrt{65}} & \frac{z^3}{18} + \frac{z}{2} & -\frac{4(z^2+1)}{\sqrt{65}} \\ -\frac{z(z^2-63)}{18\sqrt{65}} & \frac{(z^2+9)^2}{72} & -\frac{z(z^2+2)}{\sqrt{65}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esta matriz satisface  $\det(\tilde{\Phi}_0(z)) = -z$  con lo cual tiene un cero menos que  $\det(\Phi_0(z))$ . Aun así, debemos continuar el proceso iterativo.

- Tenemos que  $\det(\tilde{\Phi}_0(z)) = -z$  con lo cual  $\det(\tilde{\Phi}_0(0)) = 0$  para  $0 \in \mathfrak{D}^+$ . Con un procedimiento análogo a los casos anteriores obtenemos la matriz unitaria  $V_2$  dada por

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{65}} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{65} \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

tal que  $\tilde{\Phi}_0(0)V_2$  tiene como primera columna al vector 0. Finalmente, tomamos

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \tilde{\Phi}_0(z)V_2U(z) \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & -4z & z^2 \\ -4z & -(2z^2+9) & \frac{z^3+9z}{2} \\ -z^2 & -\frac{z^3+9z}{2} & \frac{(z^2+9)^2}{8} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con el procedimiento anterior obtuvimos la factorización de Wiener-Hopf de  $W$ :

$$W(z) = \Phi_3(z)\Phi_3^*(z), \quad z \in S^1,$$

donde  $\Phi_3(z) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & -4z & z^2 \\ -4z & -(2z^2+9) & \frac{z^3+9z}{2} \\ -z^2 & -\frac{z^3+9z}{2} & \frac{(z^2+9)^2}{8} \end{pmatrix}$  es analítica e invertible en  $\mathfrak{D}^+$ .

**Caso**  $N = 4$

Tomamos  $a = 1$  para simplificar las cuentas. Así, tenemos que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  con

$$W(z) = \exp\left(\frac{z + z^{-1}}{2}A\right) \exp\left(\frac{z + z^{-1}}{2}A^*\right).$$

Utilizando el algoritmo detallado en la Observación 4.4.3 se puede ver que la factorización de Wiener-Hopf de  $W$  es de la forma:

$$W(z) = \Phi_4(z)\Phi_4^*(z), \quad z \in S^1,$$

con  $\Phi_4(z) = \frac{1}{\sqrt{2917}}\tilde{\Phi}_4(z)$ , donde  $\tilde{\Phi}_4(z)$  está dado por la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} -48 & -\frac{5208z}{\sqrt{47297}} & -\frac{1350z^2}{\sqrt{47297}} & z^3 \\ -24z & -\frac{2604z^2 + 11668}{\sqrt{47297}} & -\frac{675z^3 + 5858z}{\sqrt{47297}} & \frac{z^2(z^2 + 13)}{2} \\ -6z^2 & -\frac{651z^3 + 5834z}{\sqrt{47297}} & -\frac{675z^4 + 11716z^2 + 47297}{4\sqrt{47297}} & \frac{z^5 + 26z^3 + 217z}{8} \\ -z^3 & -\frac{217z^4 + 2917z^2}{2\sqrt{47297}} & -\frac{225z^5 + 5858z^3 + 47297z}{8\sqrt{47297}} & \frac{z^6 + 39z^4 + 651z^2 + 2917}{48} \end{pmatrix}.$$

Es decir,  $\Phi(z)$  es analítica e invertible en  $\mathcal{D}^+$ .

**Observación 4.4.5.** Notemos que si analizamos los grados de cada entrada del factor polinomial  $\Phi_k(z)$  de las factorizaciones de Wiener-Hopf que se obtuvieron para las diferentes dimensiones ( $k = 2, 3, 4$ ) obtenemos:

$$\deg(\Phi_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \deg(\Phi_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \deg(\Phi_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

con lo cual los tres trivialmente siguen un mismo patrón.

Un trabajo a futuro sería determinar si esto se generaliza para un  $N$  arbitrario y, más aún, determinar una fórmula general para los coeficientes de los polinomios en cada entrada de  $\Phi_N(z)$  que por ahora no parecieran tener relación.

## CAPÍTULO 5

---

# OTRA FACTORIZACIÓN PARA FUNCIONES MATRICIALES

---

En este capítulo se presentará otra posible factorización de funciones matriciales definidas sobre curvas en el plano complejo. Además, veremos una manera constructiva de obtener dicha factorización en el caso de tener funciones matriciales con entradas racionales que fue presentada por Gohberg, Kaashoek y Spitkovsky [17]. Por último, veremos cómo esta factorización se relaciona con la factorización de Wiener-Hopf.

En lo que sigue,  $\Gamma$  denotará una *curva de Jordan* cerrada (acotada) sobre  $\mathbb{C}$ , esto es,  $\Gamma$  es la imagen de un homeomorfismo del círculo unidad  $S^1$ . Por el teorema de Jordan [28],  $\mathbb{C} \setminus \{\Gamma\}$  consiste de dos componentes conexas, una acotada que denotaremos  $\mathcal{D}_\Gamma^+$  y otra no acotada cuya unión con el punto  $\{\infty\}$  la denotaremos  $\mathcal{D}_\Gamma^-$ .

Tomamos  $\mathcal{C}(\Gamma)$  el espacio de funciones continuas sobre  $\Gamma$  con valores complejos. Resulta que  $\mathcal{C}(\Gamma)$  es espacio de Banach con las operaciones usuales y la norma infinito. Además, denotamos por  $\mathcal{C}^\pm(\Gamma)$  a la subálgebra cerrada de  $\mathcal{C}(\Gamma)$  conformado por las funciones que admiten extensiones continuas a  $\mathcal{D}_\Gamma^\pm \cup \{\Gamma\}$  y son analíticas en  $\mathcal{D}_\Gamma^\pm$ . Al ser únicas estas extensiones, identificamos naturalmente a las funciones de  $\mathcal{C}(\Gamma)$  (definidas sobre  $\Gamma$ ) con sus extensiones (definidas sobre  $\mathcal{D}_\Gamma^\pm \cup \{\Gamma\}$ ). Claramente  $\mathcal{C}^\pm(\Gamma)$  contiene a las funciones racionales con polos exclusivamente en  $\mathcal{D}_\Gamma^\pm$ .

También denotaremos por  $[\mathcal{C}(\Gamma)]_N$  al espacio de funciones matriciales con entradas en  $\mathcal{C}(\Gamma)$  y análogo para  $[\mathcal{C}^\pm(\Gamma)]_N$ .

### 5.1. Las factorizaciones a izquierda y a derecha

En esta sección definiremos la nueva factorización buscada para funciones matriciales y algunas de sus propiedades.

La idea básica es factorizar a una función matricial  $G \in [\mathcal{C}(\Gamma)]_N$  sobre  $\Gamma$  como un producto de la siguiente forma:

$$G(z) = G_+(z)G_-(z), \quad z \in \Gamma, \quad (5.1)$$

donde  $G_\pm$  son invertibles sobre  $\Gamma$  con  $(G_+)^{\pm 1} \in [\mathcal{C}^+(\Gamma)]_N$  y  $(G_-)^{\pm 1} \in [\mathcal{C}^-(\Gamma)]_N$ .

Ahora, para que exista esta factorización surge un problema (incluso en el caso escalar): si  $N = 1$ , consideremos el número  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G'(z)}{G(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{G(\Gamma)} \frac{1}{w} dw \in \mathbb{Z}$  que representa el índice de la curva  $G(\Gamma)$  con respecto al origen. Si se cumple (5.1), tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G'(z)}{G(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G'_+(z)G_-(z) + G_+(z)G'_-(z)}{G_+(z)G_-(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G'_+(z)}{G_+(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G'_-(z)}{G_-(z)} dz. \end{aligned}$$

Aplicando el Principio del Argumento a  $G_{\pm}$  (vistas como funciones analíticas sobre  $\mathfrak{D}_{\Gamma}^{\pm}$ ), entonces se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G'(z)}{G(z)} dz = 0.$$

Para solucionar esto, la factorización en (5.1) deberá ser modificada incluyendo un factor adicional que tome en cuenta el comportamiento posible de este índice  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G'(z)}{G(z)} dz$ .

En el caso escalar, el factor más simple que logra esto es  $\Lambda(z) = (z - z_0)^m$ , donde  $z_0 \in \mathfrak{D}_{\Gamma}^+$  es un punto fijo (arbitrario) y  $m \in \mathbb{Z}$ . Con un cambio de variable, se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $0 \in \mathfrak{D}_{\Gamma}^+$  y  $z_0 = 0$ .

Por otro lado, en el caso matricial, se deberá definir un factor de la forma

$$\Lambda(z) = \text{diag}(z^{\kappa_1}, \dots, z^{\kappa_N}),$$

donde  $\kappa_1, \dots, \kappa_N \in \mathbb{Z}$ .

Por lo tanto, se toma la siguiente definición:

**Definición 5.1.1.** Dada  $G \in [\mathcal{E}(\Gamma)]_N$  función matricial, una **factorización (a izquierda)** de  $G$  con respecto a  $\Gamma$  es una descomposición de la forma

$$G(z) = G_+(z)\Lambda(z)G_-(z), \quad z \in \Gamma, \quad (5.2)$$

donde  $G_{\pm}$  son invertibles sobre  $\Gamma$  con  $(G_+)^{\pm 1} \in [\mathcal{E}^+(\Gamma)]_N$  y  $(G_-)^{\pm 1} \in [\mathcal{E}^-(\Gamma)]_N$  y  $\Lambda(z) = \text{diag}(z^{\kappa_1}, \dots, z^{\kappa_N})$  para  $\kappa_1, \dots, \kappa_N \in \mathbb{Z}$ .

Se tiene la definición equivalente de una **factorización (a derecha)** de  $G$  con respecto a  $\Gamma$  intercambiando  $G_+$  y  $G_-$  en (5.2).

Notemos que para que exista una factorización (a izquierda) como fue dada en (5.2) es necesario que  $G$  sea invertible en  $[\mathcal{E}(\Gamma)]_N$ .

**Observación 5.1.2.** En el caso escalar las factorizaciones a izquierda y a derecha son iguales.

Claramente (5.1) es un caso particular de una factorización (a izquierda) de  $G$  con respecto a  $\Gamma$  en donde  $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = 0$ . De esta forma, se define:

**Definición 5.1.3.** Dada  $G \in [\mathcal{E}(\Gamma)]_N$ , una **factorización (a izquierda)** de la forma

$$G(z) = G_+(z)G_-(z), \quad z \in \Gamma,$$

se llamará una **factorización canónica (a izquierda)** de  $G$  con respecto a  $\Gamma$ .

Vamos a trabajar principalmente con factorizaciones a izquierda ya que la teoría para factorizaciones a izquierda y a derecha son esencialmente equivalentes. De hecho, tomando la transpuesta, toda factorización a izquierda de  $G$  nos da una factorización a derecha de  $G^T$  y viceversa. Más aún, en el caso en que  $\Gamma = S^1$  es el círculo unidad, se obtiene un resultado análogo cambiando la variable  $z$  por la variable  $1/z$ .

### 5.1.1. Unicidad de la factorización

Supongamos que  $G \in [\mathcal{C}(\Gamma)]_N$  admite una factorización (a izquierda) con respecto a  $\Gamma$  de la forma:

$$G(z) = G_+(z)\Lambda(z)G_-(z), \quad z \in \Gamma, \quad (5.3)$$

donde  $\Lambda(z) = \text{diag}(z^{\kappa_1}, \dots, z^{\kappa_N})$  para  $\kappa_1, \dots, \kappa_N \in \mathbb{Z}$ .

Notemos que el orden de los  $\kappa_1, \dots, \kappa_N$  puede ser cambiado arbitrariamente. El siguiente teorema nos dice que, salvo esta condición, son únicos los  $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ . No daremos la demostración (ver [6, Capítulo 1 - Teorema 1.1]).

**Teorema 5.1.4.** *Si  $G \in [\mathcal{C}(\Gamma)]_N$  admite una factorización (a izquierda) con respecto a  $\Gamma$  como en (5.3), entonces los números  $\kappa_1, \dots, \kappa_N$  son únicos salvo orden.*

Con este teorema, se justifica la siguiente definición:

**Definición 5.1.5.** *Se llaman los **índices de factorización** de la función matricial  $G$  a los números  $\kappa_1, \dots, \kappa_N$  de la entrada diagonal en*

$$\Lambda(z) = \text{diag}(z^{\kappa_1}, \dots, z^{\kappa_N}),$$

*correspondiente a una factorización (a izquierda) de  $G$  con respecto a  $\Gamma$  de la forma:  $G(z) = G_+(z)\Lambda(z)G_-(z)$ .*

De ahora en más vamos a suponer sin pérdida de generalidad que dado una factorización (a izquierda) de  $G$ , los índices de factorización de  $G$  están ordenados de manera no creciente:

$$\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_N.$$

En este sentido, el factor diagonal  $\Lambda$  en la factorización dada en (5.3) se considera única.

Ahora, presentamos un teorema que nos dará una relación simple que debe existir entre diferentes factorizaciones (a izquierda) de una función matricial:

**Teorema 5.1.6.** *Sea  $G \in [\mathcal{C}(\Gamma)]_N$  que admite una factorización (a izquierda) con respecto a  $\Gamma$  dada por  $G(z) = G_+(z)\Lambda(z)G_-(z)$ . Entonces  $G(z) = \tilde{G}_+(z)\Lambda(z)\tilde{G}_-(z)$ , donde*

$$\begin{aligned} \tilde{G}_+(z) &= G_+(z)H(z), \\ \tilde{G}_-(z) &= \Lambda^{-1}(z)H^{-1}(z)\Lambda(z)G_-(z), \end{aligned} \quad (5.4)$$

*es también una factorización (a izquierda) de  $G$  con respecto a  $\Gamma$  para cualquier función matricial  $H(z) = [h_{i,j}(z)]$  invertible cuyas entradas satisfacen:*

1.  $h_{i,j}(z) = 0$  si  $\kappa_i < \kappa_j$ .
2.  $h_{i,j}(z)$  es constante si  $\kappa_i = \kappa_j$ .
3.  $h_{i,j}(z)$  es polinomio de grado a lo sumo  $\kappa_i - \kappa_j$  si  $\kappa_i > \kappa_j$ .

*Recíprocamente, todas las factorizaciones de  $G$  con respecto a  $\Gamma$  son de esta forma.*

*Demostración:*

Notemos que una función matricial  $H$  que satisface las propiedades (1) – (3) resulta ser triangular superior en bloques donde los bloques diagonales  $D_1, \dots, D_m$  son matrices constantes e invertibles. La cantidad de estos bloques diagonales coincide con el número de índices de factorización distintos y los tamaños coinciden con las multiplicidades de los mismos. Así, el determinante de  $H$  es constante con

$$\det(H(z)) = \det(D_1) \dots \det(D_m).$$

Luego, si  $\tilde{G}_+$  y  $\tilde{G}_-$  están dados por (5.4), es fácil verificar que  $\tilde{G}_\pm$  son invertibles sobre  $\Gamma$  con  $(\tilde{G}_+)^{\pm 1} \in [\mathcal{E}^+(\Gamma)]_N$  y  $(\tilde{G}_-)^{\pm 1} \in [\mathcal{E}^-(\Gamma)]_N$ . Por lo tanto, tenemos que  $G(z) = \tilde{G}_+(z)\Lambda(z)\tilde{G}_-(z)$  es una factorización (a izquierda) de  $G$  con respecto a  $\Gamma$ .

Recíprocamente, supongamos que tenemos dos factorizaciones de  $G$  con respecto a  $\Gamma$ :

$$G_+(z)\Lambda(z)G_-(z) = G(z) = \tilde{G}_+(z)\Lambda(z)\tilde{G}_-(z).$$

Entonces, se cumple que

$$H(z)\Lambda(z) = \Lambda(z)\tilde{H}(z), \tag{5.5}$$

donde  $H = G_+^{-1}\tilde{G}_+ \in [\mathcal{E}^+(\Gamma)]_N$  y  $\tilde{H} = G_-\tilde{G}_-^{-1} \in [\mathcal{E}^-(\Gamma)]_N$  son invertibles. Además,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_+(z) &= G_+(z)H(z), \\ \tilde{G}_-(z) &= \Lambda^{-1}(z)H^{-1}(z)\Lambda(z)G_-(z). \end{aligned}$$

Ahora, la igualdad en (5.5) implica que  $h_{i,j}(z) = z^{\kappa_i - \kappa_j} \tilde{h}_{i,j}(z)$ , con lo cual está claro que  $H$  cumple las propiedades (1) – (3). ■

**Observación 5.1.7.** En la demostración del teorema anterior vimos que el determinante de  $H$  es constante. En el caso más simple en el que coinciden los índices de factorización (en particular, para la factorización canónica),  $H$  es simplemente una matriz constante invertible. Así, el teorema anterior nos da una “unicidad” para la factorización canónica.

## 5.2. Una construcción explícita para funciones racionales

Vamos a establecer la existencia de la factorización (a izquierda) con respecto a  $\Gamma$  de forma constructiva en el caso de tener una función matricial racional. En lo que sigue, dada una función escalar  $f$ , el índice de  $f$  con respecto a  $\Gamma$  denotará al número  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \mathbb{Z}$ .

### Caso escalar

Sea  $r(z)$  función racional escalar. Vamos a suponer que los ceros y polos de  $r(z)$  no están sobre  $\Gamma$  (en tal caso  $r$  o  $r^{-1}$  no es acotada y por ende la factorización no puede existir). Ahora, tenemos que  $r(z) = p(z)/q(z)$  con  $p(z)$  y  $q(z)$  polinomios con ceros fuera de  $\Gamma$ . Así, basta factorizar a  $p(z)$  y  $q(z)$  por separado y los factores de la factorización de  $r(z)$  se obtienen dividiendo término a término los factores de  $p(z)$  y de  $q(z)$ .

Por lo tanto, debemos ver la factorización de un polinomio  $p(z)$  con ceros fuera de  $\Gamma$ : sean  $a_1, \dots, a_m$  todos los ceros de  $p(z)$  en  $\mathfrak{D}_\Gamma^+$ , contando multiplicidades. Entonces la factorización (a izquierda) con respecto a  $\Gamma$  dada por

$$p(z) = p_+(z)z^\kappa p_-(z),$$

se puede obtener definiendo

$$\kappa = m, \quad p_+(z) = p(z) \left/ \left( \prod_{i=1}^m (z - a_i) \right) \right. \quad \text{y} \quad p_-(z) = \prod_{i=1}^m (1 - a_i/z). \quad (5.6)$$

**Observación 5.2.1.** Las fórmulas dadas en (5.6) se pueden entender como el resultado de un proceso iterativo de  $m$  pasos, comenzando con la representación

$$p(z) = p_+^{(m)}(z)\Lambda^{(m)}(z)p_-^{(m)}(z) \quad \text{para} \quad p_+^{(m)}(z) = p(z), \quad \Lambda^{(m)}(z) = 1, \quad p_-^{(m)}(z) = 1,$$

y luego, para  $i = m, \dots, 0$ , tomando

$$p_+^{(i-1)}(z) = \frac{p_+^{(i)}(z)}{z - a_i}, \quad \Lambda^{(i-1)}(z) = z\Lambda^{(i)}(z) \quad \text{y} \quad p_-^{(i-1)}(z) = (1 - a_i/z)p_-^{(i)}(z).$$

Por lo tanto,  $p_+^{(0)}(z)$ ,  $\Lambda^{(0)}(z)$  y  $p_-^{(0)}(z)$  serán los factores buscados.

### Caso matricial

Consideremos  $R(z)$  función matricial con entradas racionales. Se puede representar a  $R(z)$  de la forma  $F(z)/p(z)$  donde  $F(z)$  es polinomio matricial y  $p(z)$  es polinomio escalar. Nuevamente, basta factorizar a  $F(z)$  y  $p(z)$  por separado.

Por lo tanto, basta ver la factorización de un polinomio matricial  $F$  cuyos ceros del determinante están fuera de  $\Gamma$ . Claramente las fórmulas en (5.6) ya no se pueden aplicar, pero si podemos replicar el proceso iterativo explicado en la Observación 5.2.1. Más precisamente, consideremos un familia de representaciones de la forma

$$F(z) = F_+^{(i)}(z)\Lambda^{(i)}(z)F_-^{(i)}(z), \quad (5.7)$$

donde  $F_+^{(i)}(z)$  es polinomio matricial cuyo determinante tiene exactamente  $i$  ceros en  $\mathfrak{D}_\Gamma^+$  contando multiplicidades,  $F_-^{(i)}(z)$  es función matricial racional analítica e invertible en  $\mathfrak{D}_\Gamma^-$  y  $\Lambda^{(i)}(z) = \text{diag}(z^{\kappa_1^{(i)}}, \dots, z^{\kappa_N^{(i)}})$  para  $\kappa_1^{(i)}, \dots, \kappa_N^{(i)} \in \mathbb{Z}$  sucesión no creciente.

Para  $i = m$ , donde  $m$  es el índice de  $\det(F)$ , tenemos una representación trivial dada por

$$F_+^{(m)}(z) = F(z), \quad \Lambda^{(m)}(z) = I \quad \text{y} \quad F_-^{(m)}(z) = I.$$

Notemos que  $m$  resulta ser la cantidad de ceros (contando multiplicidades) de  $\det(F(z))$  dentro de  $\mathfrak{D}_\Gamma^+$  por el principio del argumento ya que  $\det(F(z))$  es polinomio.

Ahora, veamos de definir  $F_+^{(i-1)}$ ,  $\Lambda^{(i-1)}$  y  $F_-^{(i-1)}$  de manera iterativa: para  $i \geq 1$ , tomemos cualquier punto  $z_i \in \mathfrak{D}_\Gamma^+$  tal que  $\det(F_+^{(i)}(z_i)) = 0$ . Luego, las columnas de  $F_+^{(i)}(z_i)$  son linealmente dependientes y así, una de ellas, digamos la  $k$ -ésima, es combinación lineal de las anteriores. Denotemos por  $c_1, \dots, c_{k-1}$  a los coeficientes de esta combinación lineal y definamos la matriz triangular superior  $U_i(z)$  dada por:

$$U_i(z) = \begin{pmatrix} 1 & & & c_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & c_{k-1} & & & \\ & & & z - z_i & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

que difiere de la matriz identidad en la  $k$ -ésima columna. Es fácil verificar que

$$U_i^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & & & -c_1/(z - z_i) & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -c_{k-1}/(z - z_i) & & & \\ & & & 1/(z - z_i) & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, denotando por  $f_1^{(i)}(z), \dots, f_n^{(i)}(z)$  a las columnas de  $F_+^{(i)}(z)$ , tenemos que la  $k$ -ésima columna de  $F_+^{(i)}(z)U_i^{-1}(z)$  está dada por

$$C_k^{(i)}(z) = \left( f_k^{(i)}(z) - \sum_{j=1}^{k-1} c_j f_j^{(i)}(z) \right) / (z - z_i).$$

Como  $f_k^{(i)}(z) - \sum_{j=1}^{k-1} c_j f_j^{(i)}(z)$  es vector polinomial con un cero en  $z_i$ ,  $C_k^{(i)}(z)$  también es vector polinomial. Las demás columnas de  $F_+^{(i)}(z)U_i^{-1}(z)$  coinciden con las respectivas columnas de  $F_+^{(i)}(z)$  con lo cual son polinomiales también. Luego,  $F_+^{(i)}(z)U_i^{-1}(z)$  es un polinomio matricial y el índice de su determinante es  $i - 1$ .

Ahora, denotemos por  $\kappa_1^{(i-1)}, \dots, \kappa_N^{(i-1)}$  al reordenamiento no creciente de la sucesión

$$\kappa_1^{(i)}, \dots, \kappa_{k-1}^{(i)}, \kappa_k^{(i)} + 1, \kappa_{k+1}^{(i)}, \dots, \kappa_N^{(i)},$$

y por  $\Pi_i$  a la matriz de permutación asociada a este reordenamiento. Tomando

$$V_i(z) = \begin{pmatrix} 1 & & & c_1 z^{\kappa_k^{(i)} - \kappa_1^{(i)}} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & c_{k-1} z^{\kappa_k^{(i)} - \kappa_{k-1}^{(i)}} & & & \\ & & & 1 - z_i/z & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

que difiere de la matriz identidad en la  $k$ -ésima columna, tenemos que  $V_i(z)$  es función matricial racional cuyas raíces del determinante y polos están en  $\mathfrak{D}_\Gamma^\dagger$ . Además, vemos que  $U_i \Lambda^{(i)}(z) = \Pi_i \Lambda^{(i-1)}(z) \Pi_i V_i(z)$ .

Por lo tanto, basta definir

$$\begin{aligned} F_+^{(i-1)}(z) &= F_+^{(i)}(z)U_i^{-1}(z)\Pi_i, \\ \Lambda^{(i-1)}(z) &= \text{diag}(z^{\kappa_1^{(i-1)}}, \dots, z^{\kappa_n^{(i-1)}}), \\ F_-^{(i-1)}(z) &= \Pi_i V_i(z)F_-^{(i)}(z). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Así, comenzando con la representación (5.7) para  $i = m$  y disminuyendo el valor de  $i$ , obtenemos un proceso iterativo que en  $m$  pasos finalmente nos dará la representación:

$$F(z) = F_+^{(0)}(z)\Lambda^{(0)}(z)F_-^{(0)}(z),$$

y esta será la factorización (a izquierda) de  $F$  con respecto a  $\Gamma$ .

Notemos que todos los factores en cada representación dada en (5.7) resultan ser funciones matriciales racionales. Luego, por la construcción anterior y la descripción de todas las factorizaciones cuando se tiene una dada en el Teorema 5.1.6, se sigue que toda factorización de una matriz racional tiene factores racionales.

En conclusión, hemos probado el siguiente teorema:

**Teorema 5.2.2.** *Sea  $R$  una función matricial racional y  $\Gamma$  una curva de Jordan. Entonces  $R$  admite una factorización (a izquierda) con respecto a  $\Gamma$  si y solo si todos los ceros de  $\det(R)$  y los polos de  $R$  están fuera de  $\Gamma$ .*

*Más aún, si la condición anterior se cumple, entonces los factores de toda factorización son funciones matriciales racionales también y se pueden obtener a través del proceso iterativo dado anteriormente.*

**Observación 5.2.3.** Notemos que con un proceso iterativo análogo es posible obtener una factorización a derecha. La diferencia es que en cada paso se calculan los coeficientes de la dependencia lineal de las *filas* de  $F_+^{(i)}(z_i)$  en vez de las columnas. Por lo tanto, se deben considerar las transpuestas de  $U_i^{-1}(z)$  y  $V_i(z)$  como fueron definidas anteriormente. Finalmente, en cada paso del proceso se hacen los cambios correspondientes de definir

$$F_+^{(i-1)}(z) = \Pi_i U_i^{-1}(z)^T F_+^{(i)}(z) \quad \text{y} \quad F_-^{(i-1)}(z) = F_-^{(i)}(z) V_i(z)^T \Pi_i, \quad (5.9)$$

y luego de  $m$  pasos tendremos la factorización a derecha buscada.

**Ejemplo 5.2.4.** Consideremos a la matriz de Vandermonde dada por:

$$F(z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & 2z & 4z^2 \end{pmatrix},$$

y calculemos su factorización (a izquierda) con respecto a  $\Gamma$  dado por el círculo de radio  $3/2$  centrado en el origen del plano complejo.

Por la fórmula general del determinante de una matriz de Vandermonde tenemos que

$$\det(F(z)) = (z-2)(2z-2)(2z-z) = 2z(z-2)(z-1),$$

cuyas raíces serán  $z = 0, 1, 2$ . Luego, el índice de  $\det(F)$  con respecto a  $\Gamma$  es  $m = 2$  pues solo dos de sus raíces (ambas con multiplicidad uno) están en  $\mathcal{D}_\Gamma^+$ .

Comencemos el proceso iterativo que en  $m = 2$  pasos nos dará la factorización buscada:

- Primero se toma

$$F_+^{(2)}(z) = F(z), \quad \Lambda^{(2)}(z) = I \quad \text{y} \quad F_-^{(2)}(z) = I.$$

- Para encontrar a  $F_+^{(1)}(z)$ , consideremos  $0 \in \mathfrak{D}_\Gamma^+$  que cumple  $\det(F_+^{(2)}(0)) = 0$ . Tenemos que

$$F_+^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por ende la columna  $k = 3$  es combinación lineal de las primeras dos columnas con los coeficientes de la dependencia lineal dados por  $c_1 = 0$  y  $c_2 = 2$ .

Ahora, tomamos  $\kappa_1^{(1)} = 1, \kappa_2^{(1)} = 0, \kappa_3^{(1)} = 0$  al ser reordenamiento no creciente de

$$\kappa_1^{(2)} = 0, \quad \kappa_2^{(2)} = 0, \quad \kappa_3^{(2)} + 1 = 1.$$

Es decir, tenemos que

$$\Lambda^{(1)}(z) = \text{diag}(z^{\kappa_1^{(1)}}, z^{\kappa_2^{(1)}}, z^{\kappa_3^{(1)}}) = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, la matriz de permutación asociada al reordenamiento anterior está dada por

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, siguiendo a (5.8), tenemos que

$$\begin{aligned} F_+^{(1)}(z) &= F_+^{(2)}(z)U_2^{-1}(z)\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & 2z & 4z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/z \\ 0 & 0 & 1/z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ z-2 & z & 1 \\ 4(z-1) & 2z & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$F_-^{(1)}(z) = \Pi_2 V_2(z) F_-^{(2)}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para encontrar a  $F_+^{(0)}(z)$ , como tenemos que

$$\det(F_+^{(1)}(z)) = -2(z-1)(z-2),$$

consideremos  $1 \in \mathfrak{D}_\Gamma^+$  que cumple  $\det(F_+^{(1)}(1)) = 0$ . Tenemos que

$$F_+^{(1)}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y por ende la columna  $k = 3$  es combinación lineal de las primeras dos columnas con los coeficientes de la dependencia lineal dados por  $c_1 = -1/2$  y  $c_2 = 1/2$ .

Ahora, se tiene que  $\kappa_1^{(0)} = 1, \kappa_2^{(0)} = 1, \kappa_3^{(0)} = 0$  con

$$\Lambda^{(0)}(z) = \text{diag}(z^{\kappa_1^{(0)}}, z^{\kappa_2^{(0)}}, z^{\kappa_3^{(0)}}) = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y cuya matriz de permutación asociada está dada por

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, siguiendo a (5.8), tenemos que

$$\begin{aligned} F_+^{(0)}(z) &= F_+^{(1)}(z)U_1^{-1}(z)\Pi_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ z-2 & z & 1 \\ 4(z-1) & 2z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2(z-1)} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2(z-1)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(z-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ z-2 & 0 & z \\ 4(z-1) & 1 & 2z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_-^{(0)}(z) &= \Pi_1 V_1(z)F_-^{(1)}(z) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2z \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1-1/z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/2z & 0 & 1 \\ (z-1)/z & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtuvimos que  $F$  tiene una factorización (a izquierda) con respecto a  $\Gamma$  de la siguiente forma:

$$F(z) = F_+^{(0)}(z)\Lambda^{(0)}(z)F_-^{(0)}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ z-2 & 0 & z \\ 4z-4 & 1 & 2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2z & 0 & 1 \\ (z-1)/z & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 5.2.5.** Consideremos a la matriz dada por:

$$G(z) = \begin{pmatrix} 1+p-p\left(\frac{z+1/z}{4} + \frac{1}{2}\right) & \frac{z+1/z}{4} + \frac{1}{2} \\ \frac{z+1/z}{4} + \frac{1}{2} & \left(\frac{z+1/z}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 \end{pmatrix},$$

y calculemos su factorización (a derecha) con respecto a  $\Gamma = S^1$  el círculo unidad.

Primero, se debe separar a la parte que hace de  $G$  una matriz racional y, luego, factorizar este factor y el polinomio matricial que queda por separado. Más precisamente, vemos que

$$G(z) = \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} z^2 + pz^2 - p \left( \frac{z^3 + z}{4} + \frac{z^2}{2} \right) & \frac{z^3 + z}{4} + \frac{z^2}{2} \\ \frac{z^3 + z}{4} + \frac{z^2}{2} & \left( \frac{z^2 + 1}{4} + \frac{z}{2} \right)^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{z^2} F(z),$$

donde, por un lado,  $z^2$  se factoriza como  $1z^21$ , y, por otro lado,  $F(z)$  es polinomio matricial con lo cual le podemos aplicar el algoritmo.

Veamos de factorizar a  $F$ : tenemos que

$$\det(F(z)) = -\frac{p}{64} z(z-1)^2(z+1)^4,$$

con raíces  $z = 0, -1, 1$ . Luego, el índice de  $\det(F)$  con respecto a  $\Gamma$  es  $m = 1$  pues 0 es la única raíz en  $\mathcal{D}_\Gamma^+$ . Así, solo tenemos un paso en el proceso iterativo para encontrar la factorización buscada. Comencemos:

- Primero se toma

$$F_+^{(1)}(z) = F(z), \quad \Lambda^{(1)}(z) = I \quad \text{y} \quad F_-^{(1)}(z) = I.$$

- Para encontrar a  $F_+^{(0)}(z)$ , consideremos  $0 \in \mathcal{D}_\Gamma^+$  que cumple  $\det(F_+^{(1)}(0)) = 0$ . Tenemos que  $F_+^{(1)}(0) = 0$  y así, en particular, la fila  $k = 1$  es combinación lineal de la segunda fila con el coeficiente de la dependencia lineal dado por  $c_1 = 1$ .

Ahora, se tiene que  $\kappa_1^{(0)} = 1, \kappa_2^{(0)} = 0$  al ser el reordenamiento no creciente de

$$\kappa_1^{(1)} + 1 = 1, \quad \kappa_2^{(1)} = 0,$$

con lo cual tenemos que

$$\Lambda^{(0)} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y además la matriz de permutación asociada a este reordenamiento será  $\Pi_1 = I$ .

Así, siguiendo a (5.9), tenemos que

$$\begin{aligned} F_+^{(0)}(z) &= \Pi_1 U_1^{-1}(z)^T F_+^{(1)}(z) = I \begin{pmatrix} 1/z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F(z) \\ &= \begin{pmatrix} z + pz - p \left( \frac{z^2 + 1}{4} + \frac{z}{2} \right) & \frac{z^2 + 1}{4} + \frac{z}{2} \\ \frac{z^3 + z}{4} + \frac{z^2}{2} & \left( \frac{z^2 + 1}{4} + \frac{z}{2} \right)^2 \end{pmatrix}, \\ F_-^{(0)}(z) &= F_-^{(1)}(z) V_1(z)^T \Pi_1 = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I = I. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $F$  tiene una factorización (a derecha) con respecto a  $\Gamma$  dada por:

$$\begin{aligned} F(z) &= F_-^{(0)}(z)\Lambda^{(0)}(z)F_+^{(0)}(z) \\ &= I \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z + pz - p \left( \frac{z^2 + 1}{4} + \frac{z}{2} \right) & \frac{z^2 + 1}{4} + \frac{z}{2} \\ \frac{z^3 + z}{4} + \frac{z^2}{2} & \left( \frac{z^2 + 1}{4} + \frac{z}{2} \right)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que  $G = \frac{1}{z^2}F(z)$  tendrá una factorización (a derecha) con respecto a  $\Gamma$  dada por:

$$G(z) = I \begin{pmatrix} 1/z & 0 \\ 0 & 1/z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z + pz - p \left( \frac{z^2 + 1}{4} + \frac{z}{2} \right) & \frac{z^2 + 1}{4} + \frac{z}{2} \\ \frac{z^3 + z}{4} + \frac{z^2}{2} & \left( \frac{z^2 + 1}{4} + \frac{z}{2} \right)^2 \end{pmatrix}.$$

**Observación 5.2.6.** El proceso iterativo dado para obtener la factorización de un polinomio matricial  $F$  puede ser fácilmente interpretado como un algoritmo que podemos implementar en un lenguaje de programación.

En el archivo “factorizacion\_izquierda\_derecha.py” del repositorio de GitHub dado en [1] se encuentra una implementación posible en Python en donde es posible realizar tanto la factorización a izquierda como a derecha con respecto a un círculo  $\Gamma$  de radio  $r$  a elección (centrado en el origen).

Por supuesto, existen limitaciones al utilizar este algoritmo. Más precisamente, para el proceso iterativo es necesario encontrar el índice de  $\det(F)$  con respecto a  $\Gamma$  y esto implica encontrar las raíces del polinomio  $\det(F(z))$  dentro de  $\mathfrak{D}_\Gamma^+$ . Pero, es sabido que no existen fórmulas cerradas para encontrar raíces de polinomios de grado mayor a 4. Por esto, en el algoritmo de Python presentado es posible tener una factorización exacta cuando  $\deg(\det(F)) \leq 4$  pero más allá de esto el algoritmo falla y es necesario realizar modificaciones (por ejemplo, a través de aproximaciones numéricas de las raíces).

### 5.3. Relación con la factorización de Wiener-Hopf

En esta sección daremos una relación entre la factorización (a izquierda) y la factorización de Wiener-Hopf que fue definida en el capítulo anterior. Para esto se necesita una condición bajo la cual la factorización (a izquierda) resulta canónica y en donde los factores de esta factorización canónica son iguales a diferencia de una adjunta.

Se necesita la siguiente definición:

**Definición 5.3.1.** Una función matricial  $G \in [\mathcal{C}(S^1)]_N$  se llama **disipativa** si existe  $\epsilon > 0$  tal que la parte real  $\Re(G) = \frac{G + G^*}{2}$  de  $G$  cumple que

$$\langle \Re(G(z)) w, w \rangle \geq \epsilon \quad \text{para cada } z \in S^1, \quad w \in \mathbb{C}^N, \|w\| = 1, \quad (5.10)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interno usual de  $\mathbb{C}^N$ . La condición (5.10) se denotará  $\Re(G) \geq \epsilon I$  para simplificar notación.

**Observación 5.3.2.** Claramente toda  $G \in [\mathcal{C}(S^1)]_N$  disipativa es invertible.

La siguiente proposición nos dará una condición suficiente para tener una factorización canónica. Omitimos la demostración (ver [6, Capítulo 3 - Proposición 1.2]).

**Proposición 5.3.3.** *Si  $G \in [\mathcal{E}(S^1)]_N$  es disipativa y admite una factorización (a izquierda) con respecto a  $S^1$ , entonces esta factorización es canónica.*

Ahora, el siguiente teorema nos dará la relación entre la factorización (a izquierda) y la factorización de Wiener-Hopf:

**Teorema 5.3.4.** *Sea  $G \in [\mathcal{E}(S^1)]_N$  una función matricial hermitiana, es decir, tal que  $G(z) = G^*(z)$ , y supongamos que  $G \geq \epsilon I$  para algún  $\epsilon > 0$ . Si  $G$  admite una factorización (a izquierda) con respecto a  $S^1$ , entonces esta factorización es de la forma*

$$G(z) = G_+(z)G_+^*(z), \quad z \in S^1, \quad (5.11)$$

donde  $G_+ \in [\mathcal{E}^+(S^1)]_N$  es invertible sobre  $\mathfrak{D}^+ \cup S^1$ . Es decir, (5.11) es una factorización de Wiener-Hopf de  $G$ .

*Demostración:*

Como  $G \geq \epsilon I$  para algún  $\epsilon > 0$ , tenemos que la factorización (a izquierda) de  $G$  es canónica por la Proposición 5.3.3. Luego, tenemos que

$$G(z) = A_+(z)A_-(z), \quad z \in S^1,$$

donde  $A_{\pm} \in [\mathcal{E}^{\pm}(S^1)]_N$  son invertibles sobre  $\mathfrak{D}^{\pm} \cup S^1$ . Más aún, como  $G$  es hermitiana, se cumple que

$$A_+(z)A_-(z) = G(z) = G^*(z) = A_-^*(z)A_+^*(z), \quad z \in S^1.$$

Ahora, notemos que  $(\mathcal{E}^{\pm}(S^1))^* = \mathcal{E}^{\mp}(S^1)$  con lo cual  $A_{\pm}^* \in [\mathcal{E}^{\mp}(S^1)]_N$  es invertible sobre  $\mathfrak{D}^{\mp} \cup S^1$ . Por lo tanto, tenemos dos factorizaciones (a izquierda) canónicas de  $G$  con respecto a  $S^1$  dadas por:

$$G(z) = A_+(z)A_-(z) = A_-^*(z)A_+^*(z), \quad z \in S^1.$$

Por la “unicidad” de la factorización canónica (ver Teorema 5.1.6), se debe tener

$$A_- (A_+^*)^{-1} = (A_+)^{-1} A_-^* = H,$$

donde  $H$  es una matriz hermitiana constante. Así, obtenemos que

$$G(z) = A_+(z)HA_+^*(z), \quad z \in S^1.$$

Claramente  $H$  es definida no negativa y, luego,  $H = R^2$  donde  $R$  es definida no negativa e invertible. Por lo tanto, tomando  $G_+(z) = A_+(z)R$ , obtenemos la factorización buscada:

$$G(z) = G_+(z)G_+^*(z), \quad z \in S^1,$$

donde  $G_+ \in [\mathcal{E}^+(S^1)]_N$  es invertible sobre  $\mathfrak{D}^+ \cup S^1$ . ■

**Ejemplo 5.3.5.** Tomemos el ejemplo (de dimensión 2) dado en la sección “Una construcción explícita para polinomios matriciales” del capítulo “La factorización de Wiener-Hopf” donde, dado  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , tenemos la función matricial  $W$  definida sobre  $S^1$  dada por:

$$\begin{aligned} W(z) &= \exp\left(\frac{z+z^{-1}}{2}A\right)\exp\left(\frac{z+z^{-1}}{2}A^*\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z+z^{-1}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{z+z^{-1}}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{z+z^{-1}}{2} \\ \frac{z+z^{-1}}{2} & \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tenemos que  $W$  es hermitiana y definida positiva (con lo cual entra bajo las hipótesis del teorema anterior).

Utilizando el algoritmo de Python detallado en la Observación 5.2.6, es posible ver que la factorización (a izquierda) de  $W$  es canónica y está dada por

$$W(z) = W_+(z)W_-(z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{2} & \frac{4}{5} \\ \frac{z^2}{4} + \frac{5}{4} & \frac{2z}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5z} & \frac{1}{5z^2} + 1 \\ 1 & \frac{1}{2z} \end{pmatrix}, \quad z \in S^1.$$

En particular, notemos que

$$\begin{aligned} W_-(z) &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5z} & \frac{1}{5z^2} + 1 \\ 1 & \frac{1}{2z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4/5 & 0 \\ 0 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2z} & \frac{1}{4z^2} + \frac{5}{4} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4/5 & 0 \\ 0 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{z}{2} & \frac{4}{5} \\ \frac{z^2}{4} + \frac{5}{4} & \frac{2z}{5} \end{pmatrix}^* \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^2 W_+^*(z), \end{aligned}$$

y así, tenemos que

$$W(z) = W_+(z)W_-(z) = W_+(z) \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^2 W_+^*(z).$$

Luego, tomando

$$G(z) = W_+(z) \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{2} & \frac{4}{5} \\ \frac{z^2}{4} + \frac{5}{4} & \frac{2z}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} z & 2 \\ \frac{z^2}{2} + \frac{5}{2} & z \end{pmatrix},$$

obtenemos la factorización de  $W$  dada por

$$W(z) = G(z)G^*(z), \quad z \in S^1, \quad (5.12)$$

donde  $G \in [\mathcal{E}^+(S^1)]_N$  es invertible sobre  $\mathcal{D}^+ \cup S^1$ . Por lo tanto, tenemos que (5.12) es tanto una factorización (a izquierda) de  $W$  como una factorización de Wiener-Hopf de ella y verificamos el teorema anterior.

Cabe destacar que la factorización de Wiener-Hopf encontrada anteriormente (en el capítulo anterior) estaba dada por:

$$W(z) = \Phi(z)\Phi^*(z), \quad z \in S^1,$$

donde  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & z \\ z & \frac{z^2}{2} + \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ . Así, está claro que  $G(z)$  y  $\Phi(z)$  son iguales a diferencia de una matriz de permutación (unitaria):

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & z \\ z & \frac{z^2}{2} + \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} z & 2 \\ \frac{z^2}{2} + \frac{5}{2} & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = G(z) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] C. Aagaard. Trabajo Especial de Licenciatura en Matemática - Camila Aagaard. <https://github.com/camila-aagaard/Trabajo-Especial-de-Licenciatura-Aagaard/>, 2024.
- [2] W. A. Al-Salam and T. S. Chihara. Another characterization of the classical orthogonal polynomials. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 3(1):65–70, 1972.
- [3] C. Berg. The matrix moment problem. In A. J. P. L. Branquinho and A. P. Foulquié Moreno, editors, *Coimbra Lecture Notes on Orthogonal Polynomials*, pages 1–58. Nova Science Publishers, 2008.
- [4] W. R. Casper and M. Yakimov. The matrix Bochner problem. *American Journal of Mathematics*, 144(4):1009–1065, 2022.
- [5] G. A. Cassatella-Contra and M. Mañas. Riemann-Hilbert problems, matrix orthogonal polynomials and discrete matrix equations with singularity confinement. *Studies in Applied Mathematics*, 128(3):252–274, 2011.
- [6] K. F. Clancey and I. Gohberg. *Factorization of matrix functions and singular integral operators*, volume 3 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser, 1981.
- [7] H. Cramér. On the theory of stationary random processes. *The Annals of Mathematics*, 41:215–230, 1940.
- [8] A. Deaño, A. B. J. Kuijlaars, and P. Román. Asymptotics of matrix valued orthogonal polynomials on  $[-1, 1]$ . *Advances in Mathematics*, 423:109043, 2023.
- [9] P. Deift. *Orthogonal polynomials and random matrices: A Riemann-Hilbert approach*, volume 3 of *Courant Lecture Notes*, pages 1–261. American Mathematical Society and Courant Institute of Mathematical Sciences, 2000.
- [10] P. Deift and X. Zhou. A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26(1):119–123, 1992.
- [11] P. Deift and X. Zhou. A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation. *Annals of Mathematics*, 137(2):295–368, 1993.
- [12] J. L. Doob. *Stochastic Processes*. Wiley, 1953.
- [13] J. Duoandikoetxea Zuazo. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2001.

- [14] L. Ephremidze. An elementary proof of the polynomial matrix spectral factorization theorem. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 144(4):747–751, 2014.
- [15] L. Fejér. Über trigonometrische Polynome. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 146:53–82, 1916.
- [16] A. S. Fokas, A. R. Its, and A.V. Kitaev. The isomonodromy approach to matrix models in 2d quantum gravity. *Communications in Mathematical Physics*, 147(2):395–430, 1992.
- [17] I. Gohberg, M. A. Kaashoek, and I. M. Spitkovsky. An overview of matrix factorization theory and operator applications. *Factorization and integrable systems (Faro, 2000)*, 141:1–102, 2003.
- [18] U. Grenander and G. Szegő. *Toeplitz forms and their applications*. University of California Press, 1958.
- [19] F. A. Grünbaum, M. D. De la Iglesia, and A. Martínez-Finkelshtein. Properties of matrix orthogonal polynomials via their Riemann-Hilbert characterization. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 7:98, 2011.
- [20] F. A. Grünbaum and J. Tiraó. The algebra of differential operators associated to a weight matrix. *Integral Equations and Operator Theory*, 58(4):449–475, 2007.
- [21] W. Hahn. Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen. *Mathematische Zeitschrift*, 39(1):634–638, 1935.
- [22] K. Hoffman and R. Kunze. *Linear algebra*. Prentice Hall, second edition, 1971.
- [23] M. E. H. Ismail. *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, volume 98 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 2005.
- [24] A. N. Kolmogorov. Stationary sequences in Hilbert space. In A. N. Shiryaev, editor, *Selected works of A.N. Kolmogorov, Volume II: Probability Theory and Mathematical Statistics*, pages 228–271. Springer, 1992. Translated from Russian by G. Lindquist.
- [25] A. B. J. Kuijlaars. Riemann-Hilbert analysis for orthogonal polynomials. In E. Koelink and W. Van Assche, editors, *Orthogonal Polynomials and Special Functions: Leuven 2002*, pages 167–210. Springer, 2003.
- [26] A. B. J. Kuijlaars, K. T. R. McLaughlin, W. Van Assche, and M. Vanlessen. The Riemann-Hilbert approach to strong asymptotics for orthogonal polynomials on  $[-1, 1]$ . *Advances in Mathematics*, 188(2):337–398, 2004.
- [27] F. Riesz. Über ein Problem des Herrn Carathéodory. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 146:83–87, 1916.
- [28] H. Tverberg. A proof of the Jordan curve theorem. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 12(1):34–38, 1980.
- [29] N. Wiener and P. Masani. The prediction theory of multivariate stochastic processes: I. The regularity condition. *Acta Mathematica*, 98(1-4):111–150, 1957.
- [30] A. Zygmund. *Trigonometric series*, volume 1. Cambridge University Press, 2002.