

MEJORA DEL EXPONENTE GRAVITATORIO USANDO LA BALANZA DE CAVENDISH

Farías de la Torre, E. *; Gonzalez Dondo, D. ** ; Zacco Franco**; Tempo, M. **

* UTN (FRC), UNC (FCEEyN)

** UTN (FRC)

e-mail: faríasdelatorre@gmail.com

1 RESUMEN

Se propone un experimento para la medición del exponente gravitatorio mediante la utilización de la balanza gravitatoria (Cavendish). Importantes mejoras en el sistema de medición y del equipo en si permitieron repetir la experiencia tradicional para distintas separaciones entre las masas lo cual posibilitó medir el exponente gravitatorio con las limitaciones propias de un equipo destinado al uso didáctico.

2 INTRODUCCIÓN

Como es ampliamente conocido, la experiencia de la balanza gravitatoria tiene por objeto la medición de la constante de gravitación universal, G , que interviene en la ecuación que determina la interacción entre masas:

$$f = G \frac{Mm}{d^2}$$

Donde, f es la fuerza de atracción entre las masas esféricas m y M ; d es la distancia entre sus centros y G es la constante que vincula la fuerza con las restantes variables físicas.

En la actualidad se dispone de varios tipos de equipos comerciales ^(1,2) destinados a este fin y, todos ellos basan su principio de funcionamiento en la medición del efecto del torque gravitatorio sobre un péndulo de torsión, fundamento de la experiencia realizada por H. Cavendish hacia 1798 ⁽³⁾.

Por otra parte y, en relación a los conceptos físicos utilizados permite al alumno introducirse en la dinámica del péndulo de torsión, las oscilaciones amortiguadas y la medición del periodo y el coeficiente de amortiguamiento viscoso para estas últimas.

En el presente trabajo se propone la utilización del método de medición opto-digital aplicado, previamente, para experiencias de dinámica en 2D: choque elástico de discos ⁽⁴⁾, tiro oblicuo ⁽⁵⁾ e interacción explosiva ⁽⁶⁾, extendiendo el mismo, para el caso actual, a la dinámica unidimensional: oscilación del brazo de palanca del péndulo de torsión en la experiencia de Cavendish.

El objetivo de este trabajo es aprovechar los resultados del experimento para medir el exponente gravitatorio suponiendo conocida la constante de gravitación, G , y variando la distancia entre masas. Esto es posible debido a que dicha constante ha sido medida por distintos métodos ^(7, 8,9) obteniéndose un valor con muy bajo error para las necesidades del presente Trabajo.

3 OBJETIVOS

I.- Mejorar el sistema de medición de la Balanza Gravitatoria introduciendo el método opto-digital desarrollado por los autores y oportunamente aplicado a experiencias de dinámica bidimensional (ver *Introducción*).

II.- Incorporar mejoras ya introducidas en los modelos de equipamientos comerciales posteriores al nuestro y referidas a: i) aumentar la distancia espejo escala y, ii) utilización de una fuente de luz láser.

III.- A partir de I y II optimizar la medición de la distancia entre posiciones de equilibrio del spot luminoso sobre la escala y aplicarlo para distintas distancias entre masas.

4 METODOLOGIA

Este Trabajo está orientado como actividad a desarrollar por *ayudantes de cátedra o adscriptos* a la asignatura de Física I debido a que la realización del experimento requiere un tiempo prolongado de ejecución como así también la aplicación de mejoras al equipo tradicional (ver *objetivos*). Finalmente, en este sentido, se utilizan conceptos que no han sido desarrollados en la asignatura tales como movimiento amortiguado (amortiguación viscosa), decremento logarítmico y péndulo de torsión.

¿Cómo se transfiere al ámbito curricular el presente trabajo? Nuestra propuesta es a través de videos interactivos on-line por medio de los cuales el alumno se interiorice de la experiencia que se realiza y tenga oportunidad de interactuar mediante preguntas y sugerencias estructuradas pedagógicamente.

Los pasos para abordar el experimento son los siguientes: a) Comprensión de la experiencia tradicional destinada a medir G donde se asume el valor $n=2$ para el exponente gravitatorio. El método de medición y los conceptos asociados: péndulo de torsión y movimiento amortiguado. b) Introducción de las mejoras indicadas a fin de medir el exponente gravitatorio. c) Comprensión del sistema de medición opto-digital y el procesamiento digital de las imágenes. d) Realización del experimento.

5 DESARROLLO

5.1 ECUACIONES BÁSICAS

Consideremos un péndulo de torsión constituido por un brazo de palanca con dos masas extremas m y suspendido en su punto medio por un hilo de torsión.

La ecuación diferencial que vincula el desplazamiento angular, θ , y el torque aplicado, τ_e , resulta⁽¹⁰⁾:

$$\dot{\theta} + \frac{c}{I} \dot{\theta} + \frac{k_{\theta}}{I} \theta = \frac{\tau_e}{I}$$

donde θ representa el desplazamiento angular; c el coeficiente de fricción viscosa; I el momento de inercia del sistema respecto del centro de la barra (masas y eje que las une); k_{θ} la constante de torsión del alambre y, finalmente, τ_e es el torque externo aplicado (debido a la atracción gravitatoria entre las masas m y M).

La solución de la ecuación anterior es la suma de una función transitoria, θ_{tr} , y una estacionaria, θ_{ss} :

$$\theta(t) = \theta_{tr}(t) + \theta_{ss}$$

donde:

$$\theta_{tr} = A e^{\frac{-c}{2I}t} \sin(\omega_a t + \varphi)$$

Y:

$$\theta_{ss} = \frac{\tau_e}{k_\theta}$$

siendo A y φ constantes determinadas a partir de las condiciones iniciales; c es el coeficiente de amortiguamiento y, ω_a es la pulsación de la componente oscilatoria de la función amortiguada:

$$\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_c^2}} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k_\theta}{I}}$$

con ω_n : pulsación de la oscilación libre ($c = 0$):

Finalmente, c_c es el coeficiente de amortiguamiento crítico el cual determina si el comportamiento de la solución es oscilante ($c < c_c$) o monótona decreciente ($c > c_c$):

$$c_c = 2\sqrt{k_\theta I}$$

En el experimento tradicional, la medición de la constante de gravitación, G , se realiza a partir de la utilización de la información que proporcionan las soluciones transitoria y estacionaria.

$$\tau_e = G \frac{mM}{d^2} l$$

Teniendo en cuenta que:

y, siendo l la longitud del brazo de palanca. Se obtiene para G :

$$G = \frac{y_{ss} d^2 k_\theta}{mML}$$

donde se reemplazó θ_{ss} por su equivalente en función del desplazamiento sobre la escala, y_{ss} :

$$\theta_{ss} = \frac{y_{ss}}{L}$$

; siendo L la distancia espejo – escala.

Los datos provenientes de la solución transitoria se utilizan para reemplazar la constante k_θ en la ecuación anterior como función del periodo de la componente oscilatoria de la amortiguada, T_a , y verificándose que este último es, aproximadamente igual, al intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos (esto ocurre cuando $c \ll c_c$, (ver párrafos subsiguientes). Finalmente, si designamos como T_n al periodo de la oscilación libre se tiene:

$$T_n = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{k_\theta}}$$

Y, por otra parte:

$$T_a = \frac{T_n}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_c^2}}}$$

Por todo lo precedente, resulta para G:

$$G = \frac{2\pi^2 d^2 y_{ss} l}{MLT_a^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_c^2}\right)} \left(1 + \frac{m_b}{6m}\right)$$

En la cual se observan los siguientes factores: un primer factor debido al amortiguamiento: $1 - c^2/c_c^2$

Un segundo factor se corresponde con el valor finito, no cero, de la masa m_b del eje del brazo de palanca: $1 + m_b/6m$ determinando una contribución al momento de inercia del sistema.

Un tercer factor que es necesario incorporar y que no está presente en la ecuación anterior proviene del efecto de la fuerza cruzada (figura 1) producido por la otra masa M interviniente, el cual afecta al torque gravitatorio:

M
M
m
m

Figura 1: Corrección por fuerzas cruzadas.

$$\tau_e = \frac{GMm}{d^2} l \left[1 - \frac{\frac{d^3}{l^3}}{\left(1 + \frac{d^2}{l^2}\right)^{3/2}} \right]$$

Resultando, como expresión final para G:

$$G = \alpha y_{ss} d^2 \left[1 - \frac{\frac{d^3}{l^3}}{\left(1 + \frac{d^2}{l^2}\right)^{3/2}} \right]^{-1}$$

donde:

$$\alpha = \frac{2\pi^2}{LM} l \frac{1}{T_a^2} \left[1 - \frac{c^2}{c_c^2} \right]^{-1} \left[1 + \frac{m_b}{6m} \right]$$

agrupa todos los factores que no se ven afectados al variar la distancia entre masas, d .

La última ecuación para G , como es evidente, incorpora todos los factores mencionados y mejora la ecuación obtenida anteriormente (sin corrección por fuerzas cruzadas).

La determinación del cociente c/c_c se realiza a partir del concepto de decremento logarítmico el cual relaciona, en una función amortiguada, dos amplitudes máximas sucesivas x_1 y x_2 distanciadas, temporalmente, en T_a ⁽¹⁰⁾:

$$\frac{c}{c_c} = \frac{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right]^2}}$$

Para el presente trabajo que utilizaremos derivan de las anteriores como consecuencia de que el objetivo es medir el exponente gravitatorio suponiendo un valor universalmente aceptado para G . A partir de la ecuación final de G despejamos y_{ss} considerando que tenemos un exponente gravitatorio a determinar y que designamos con β . La fórmula final para y_{ss} con la modificación apuntada resulta:

$$y_{ss} = \frac{G}{\alpha} \frac{1}{d^\beta} \left[1 - \frac{\left(\frac{d}{l}\right)^{\beta+1}}{\left(1 + \frac{d^2}{l^2}\right)^{\frac{\beta+1}{2}}}\right]$$

Esta fórmula será utilizada para determinar el exponente gravitatorio usando el método de cuadrados mínimos como se explicara en el punto 8.

5.2 DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO

El equipo para la medición de G , y en nuestro caso para la medición del exponente gravitatorio, es el provisto por Griffin & George Ltd. Consta de un péndulo de torsión constituido por un brazo de palanca con dos masas, m , en sus extremos, suspendido desde su punto medio por un hilo de torsión (de bronce fosforoso). Además se sujeta una placa metálica con un espejo circular el cual permitirá medir, mediante la reflexión de un haz luminoso (láser), la oscilación del brazo como consecuencia de la aplicación del torque gravitatorio. Se coloca un recipiente parcialmente lleno de aceite liviano (grado 30) donde se sumerge parte de la placa metálica (figura 2). Dos masas, M , determinan la aplicación de sendas fuerzas gravitatorias a las masas del brazo y con ello la oscilación del péndulo. Finalmente, en el equipo original se incorpora un receptáculo o caja metálica que encierra al péndulo y evita el efecto de las corrientes de aire.

Se introdujeron algunas modificaciones al respecto: a) Se reemplazó un lateral del receptáculo contra corrientes de aire por uno de acrílico a fin de poder visualizar si las masas hacen contacto con las paredes. b) Se agregó un cilindro metálico el cual protege de corrientes de aire al hilo del péndulo de torsión. c) Se incorporó una escala graduada en 2D (en mm) donde se apoyan las masas M a fin de medir la distancia entre m y M .

El sistema de detección de las oscilaciones del péndulo se realiza mediante el uso de una fuente láser cuyo rayo incide sobre el espejo y se refleja luego, en una escala ubicada a

una distancia suficientemente alejada para obtener la mayor separación posible entre los puntos de equilibrio y con ello disminuir su error relativo.

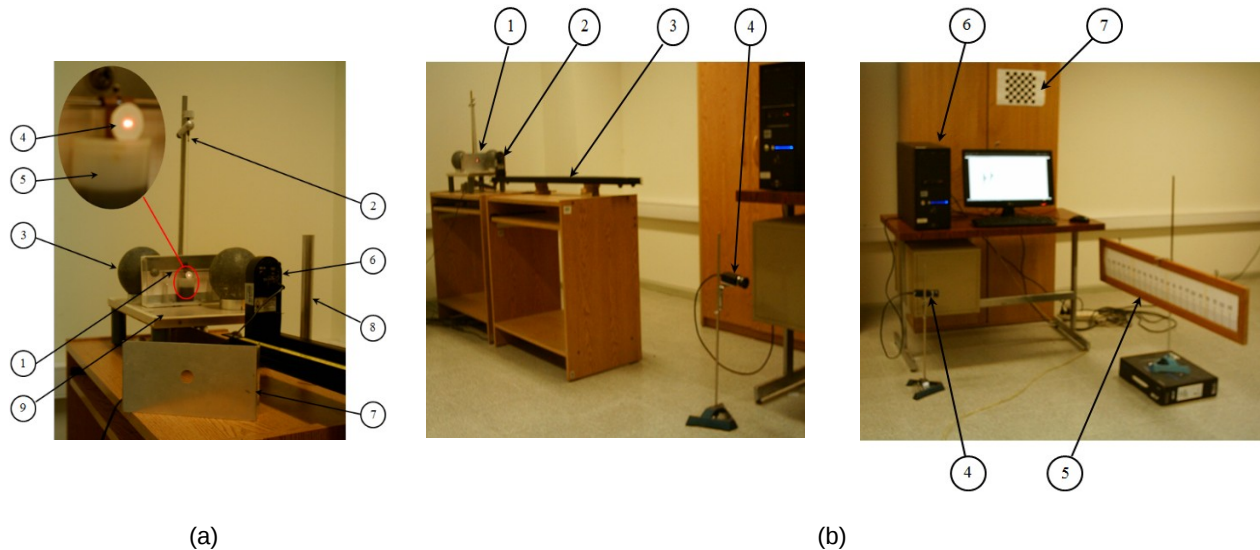


Figura 2: (a) Péndulo de torsión y accesorios: 1.- brazo de palanca con masas m ; 2.- hilo de torsión con tornillo regulador; 3.- masas M ; 4.- espejo con placa amortiguadora; 5.- recipiente con aceite amortiguador; 6.- láser; 7.- placa metálica contra corrientes; 8.- cilindro metálico contra corrientes (para hilo de torsión); 9.- base graduada en coordenadas (x, y) en mm. (b) Vista general del equipo: 1.- balanza gravitatoria; 2.- fuente emisora de láser; 3.- riel; 4.- cámara Basler scA 640; 5.- escala graduada; 6.- PC; 7.- figura tipo tablero de ajedrez para calibración de la cámara.

La dependencia temporal de las coordenadas del centro del círculo luminoso en la escala es medida a partir de la captura de las sucesivas imágenes y su posterior procesamiento por el método opto – digital. ⁽⁴⁾

6 REALIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA

La experiencia se realizó para distintas distancias entre m y M : 8 cm; 8,5 cm; 9 cm; 9,5 cm; 10 cm; 11 cm; 11,5 cm y 12 cm. Las magnitudes físicas involucradas fueron: $M = 7,5$ kg; $m = 32$ g; $m_b = 12$ g; $l = 14,5$ cm y, $L = 586$ cm.

Las etapas en la realización de la misma fueron las siguientes:

a) Fijación del alambre de torsión; b) Estabilización del péndulo; c) Realización de la experiencia:

c.1) Montaje de la cámara, fijación del foco; c.2) Calibración de la cámara; c.3) Captura de imágenes.

a) El alambre de torsión se fija por sus extremos a sendos tornillos de bronce a los cuales se suelda. Para un mejor posicionamiento del eje del alambre en relación al eje del tornillo se procede a efectuar un orificio de 1mm de diámetro en la cabeza de este último, el cual sirve como guía para efectuar la soldadura.

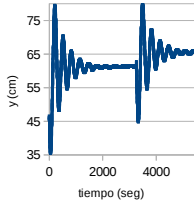
b) Una vez montado el péndulo se debe dejar estabilizar entre 12 y 24 horas ajustando, con pequeños giros del tornillo soporte, a fin de separar las masas m de las paredes del receptáculo contra corrientes de aire.

c) Realización de la experiencia:

c.1) Se monta la cámara en un trípode y se enfoca la escala donde se desplazará el punto luminoso.

c.2) Con el foco determinado en c.1, se realiza la calibración de la cámara, proceso que tiene por objeto valorar las distorsiones por paralaje y aberraciones. Esto se hace utilizando una figura en forma de tablero de ajedrez (figura 2b) con dimensiones conocidas.

c.3) Para una separación entre masas, d , se captan las imágenes del spot luminoso proyectado, por la fuente láser, sobre la escala y para una dada posición de las masas M (figura 4).



(a)

(b)

Figura 4: a) Dos posiciones de las masas M para la medición; b) Gráfica de $y(t)$ obtenida para $d = 9\text{cm}$

Una nueva captura de imágenes se realiza cuando se procede a cambiar la posición de las masas M (líneas punteadas) y lo cual se hace durante un tiempo suficientemente largo que abarque las oscilaciones correspondientes a la solución transitoria como así también las pequeñas amplitudes entorno al punto de equilibrio. El tiempo promedio de captura para cada posición de las masas M es de, aproximadamente, 50 minutos. La captura se realizó a razón de 1,875 cuadros/s.

7 PROCESAMIENTO DE IMÁGENES

A partir de la captura de las imágenes realizadas para las dos posiciones de las masas M , se procede a determinar mediante las librerías disponibles de Open CV ^(11, 12,13) la posición, como función del tiempo, del centro del disco luminoso.

La utilización del sistema opto-digital permite realizar la medición de las posiciones de equilibrio con buena exactitud debido a que se obtienen varias capturas por segundo superando ampliamente el sistema de medición tradicional para el cual y, mediante dos operadores no se podían realizar mediciones a intervalos menores de 15 o 20 segundos. Como consecuencia de esta mejora es posible obtener una mayor definición de los máximos y mínimos de la solución transitoria y con ello la determinación mas precisa del periodo T_a .

8 MEDICION DEL EXPONENTE GRAVITATORIO

En la figura 4(b) se presenta la gráfica obtenida para $y(t)$ con su solución transitoria y estacionaria cuando se efectúa el cambio en la posición de las masas M . En ordenadas se representa el desplazamiento en centímetros (6.22 pixeles/cm) mientras que en abscisa, el tiempo en segundos (a razón de 1,875 cuadros/s). Es de observar en este grafico los mayores desplazamientos que se obtienen en relación a los logrados con el equipo original. En efecto, en este ultimo la distancia espejo-escala es del orden de 1m mientras que nosotros, al usar una fuente laser, hemos podido extender la misma a 5.86m con las consiguientes mayores amplitudes de y_{ss} . A partir de esto:

1) Se determinaron las posiciones de equilibrio para cada distancia, d , entre m y M (figura 4). Y con ellas las correspondientes y_{ss} .

2) Se mide el periodo de la componente oscilatoria de la amortiguada y el cociente de amortiguamiento c/c_c (ver 5.1). Los valores obtenidos fueron $T_a = (658 \pm 13)$ s y, $c/c_c = 0,12$.

3) Asumiendo para G el valor aceptado universalmente: $6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{g} \cdot \text{s}^2$ en conjunción con el valor de α : $1.6215 \times 10^{-10} \text{ 1/g} \cdot \text{s}^2$ y utilizando la fórmula para y_{ss} deducida en 5.1 se procede a calcular para las distintas distancias d y para valores de β próximos al valor aceptado $\beta=2$ la función y_{ss} a la cual designaremos como y_{ss}^c (valor calculado). A continuación confrontamos este valor con el medido para cada distancia determinando el error cuadrático medio obtenido sobre el conjunto de mediciones. Finalmente, el valor que se adopta para β es aquel que minimiza el error cuadrático medio. En la figura 5 se muestra la gráfica del error como función de β determinándose, a partir de ella un exponente gravitatorio $\beta=1.89 \pm 0.07$ lo cual arroja un error relativo de 3.66%. El error relativo respecto al valor aceptado universalmente: $\beta=2$ resulta de 5.5%.

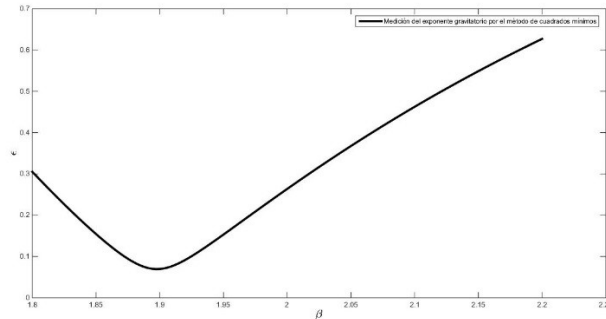


Figura 5: Medición del exponente gravitatorio.

9 CONCLUSIONES

- Las mejoras introducidas al equipo tradicional ya sea de adaptación a las nuevas generaciones de equipos con mejoras tales como la mayor distancia espejo- escala y el cambio de la fuente de luz por una fuente laser como así también la incorporación del sistema opto-digital posibilitaron la medición de las distancias y_{ss} entre posiciones de equilibrio para valores crecientes de las mismas.
- La aplicación del método opto-digital permitió mejorar apreciablemente la determinación del periodo de la componente oscilatoria de la solución transitoria debida a una mejor definición de los máximos correspondientes a la misma. Por la misma razón, fue posible definir con bastante exactitud la relación c/c_c , aunque esta no afecta significativamente a y_{ss} .
- El método para la medición del exponente gravitatorio resultó adecuado permitiendo obtener el valor especificado en el punto anterior.

10 REFERENCIAS

- Leybold, Leybold Didactic GMBH (2007).
- Pasco, Physics & Engineering Education (2010).
- H. Cavendish, Phil. Trans. Roy. Soc. 88, 469 (1798).
- Farias de la Torre, E. M., Tempo, M. E., Gonzalez Dondo, D., Bergues, G. J., Mansilla, J.C. and Novillo, D. Anales AFA, 22, 23-29 (2010).
- Farias de la Torre, E. M., Tempo, M. E., Gonzalez Dondo, D. Anales APFA (2011)
- Farias de la Torre E. M., Gonzalez Dondo D., Gelerstein S., Zacco F., Fuhrer M., Novillo D., Molina E. Poster 99° Reunion Nacional de Física (Tandil, Bs. As., Argentina – Setiembre del 2014).
- Jun Luo, Qi Liu, Liang-Cheng Tu, Cheng-Gang Shao, Lin-Xia Liu, Shan-Qing Yang, Qing Li, and Ya-Ting Zhang. "Determination of the Newtonian Gravitational Constant G with Time-of-Swing Method". Phys. Rev. Lett. 102, 240801 (2009).

- 8) [Harold V. Parks](#), [James E. Faller](#). "A Simple Pendulum Determination of the Gravitational Constant". Phys.Rev.Lett.105, 110801 (2010).
- 9) G. Rosi, F. Sorrentino, L. Cacciapuoti, M. Prevedelli, G. M. Tino. "Precision measurement of the Newtonian gravitational constant using cold atoms". Nature 510, 518-521 (2014)
- 10) Beer, F. P. Johnston, E. R. Mecanica Vectorial para ingenieros (Dinamica) VI de Mc. Graw Hill, Mexico.
- 11) Bradsky, G. Kaehler, Learning Open CV. 2 Ed. O'Really Media (2005).
- 12) Martin Sanz, G. P.; Garcia J. Vision por computador, imagenes digitales y aplicaciones.1 Ed. Alfa omega Ra-Ma, Mexico (2002).
- 13) Forsyth, D. Ponce, J. Computer vision: A modern approach. Prentice Hall, New Jersey (2003).