FORMACIÓN DE PROFESORES QUE ENSEÑAN MATEMÁTICA Y PRÁCTICAS EDUCATIVAS EN DIFERENTES ESCENARIOS

Aportes para la Educación Matemática

Editoras

Dilma Fregona · Silvina Smith · Mónica Villarreal · Fernanda Viola

UNC
Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF
FAMAF
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios

Aportes para la Educación Matemática

Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios : aportes para la educación matemática / Analía Cristante ... [et al.] ; editado por Dilma Fregona ... [et al.]. - 1a ed . - Córdoba : Universidad Nacional de Córdoba, 2017.
314 p. ; 21 x 14 cm. - (Educación en ciencias y tecnología / Iriondo, Mirta, ; 1)

ISBN 978-950-33-1377-0

1. Matemática. 2. Formación Docente. I. Cristante, Analía II. Fregona, Dilma, ed.
CDD 371.1

ISBN: 978-950-33-1377-0

Impreso en Argentina
Printed in Argentina
Hecho el depósito que marca la Ley 11.723

Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios

Aportes para la Educación Matemática

UNC
Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF
FAMAF
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

A la memoria de Humberto Alagia, maestro que con su atenta escucha de dedicado docente y su permanente actitud de investigador supo forjar el grupo al cual hoy pertenecemos autores de este libro. Sus valiosos y desinteresados aportes de genuino pensador constituyen para nosotros uno de sus mejores legados.

Índice

BLOQUE 2:
Experiencias y propuestas didácticas

BLOQUE 3:
Educación matemática de jóvenes y adultos (EDJA)

Enseñanza del algoritmo convencional de la división por dos cifras (en números naturales) en tanto objeto de enseñanza en la escuela primaria

María Fernanda Delprato
María Alejandra Foglia

En este capítulo nos interesa abordar la enseñanza del algoritmo convencional de la división por dos cifras (en números naturales) en tanto objeto desafiante[1] de enseñanza en la escuela primaria y las especificaciones que materiales de apoyo para la enseñanza (libros de texto) incorporan para que los alumnos de Nivel Primario se apropien del mismo (Foglia, 2015).

Analizaremos la jerarquía que se asigna al tratamiento de este objeto de enseñanza, comparándolo brevemente con la otorgada a otros contenidos. Posteriormente nos detendremos en algunos momentos de la secuencia de enseñanza del algoritmo convencional de la división: la presentación de esta técnica y el trabajo posterior.

Los puntos de mira: perspectivas curriculares y didáctica de la matemática «francesa»

Hacer un análisis didáctico de actividades para rastrear *especificaciones* (Tergi, 1999) de los materiales de apoyo para la cons-

[1] En intercambios con docentes, en instancias de capacitación y en la propia experiencia profesional de ambas autoras, suele ser frecuente identificar la enseñanza de la división y en particular del algoritmo convencional como un gran desafío didáctico.

trucción del objeto escolar división, supone el empleo de referentes teórico-analíticos. Puesto que este análisis pretende considerar el algoritmo convencional de la división en tanto contenido escolar prescripto en un currículum, nos situaremos desde una **perspectiva** en relación a las múltiples concepciones del campo **curricular**. Como sostiene Terigi (1999), este campo es muy amplio y complejo, pudiéndose encontrar una multiplicidad de sentidos y concepciones que inciden en los modos de interpretación de los procesos curriculares entre los Diseños Curriculares y su enseñanza en las aulas. Así el currículum ha sido entendido de modo polarizado como texto (documento escrito) o como todo lo educativo («práctica escolar efectiva», «aprendizaje real de los alumnos», etc.). La autora critica esta polarización por sus consecuencias políticas, es decir, la reducción del accionar de los diseñadores de políticas curriculares a la revisión de los textos escritos o, desde el polo contrario, la proliferación de prescripciones o la renuncia a toda pretensión de eficacia en la incidencia de la transformación de las prácticas curriculares. Por lo tanto propone una concepción de currículum que integre tanto el carácter textual-prescriptivo del currículum como las modificaciones existencia como objeto social[2].

En nuestro caso no estamos analizando el texto curricular como tal, sino a documentos de desarrollo curricular en la escala

[2] El currículum supondría entonces «una prescripción selectiva de los contenidos de la enseñanza» pero «no equivale al documento escrito» porque hay prescripciones no escritas que constituyen «tradiciones acumuladas». Asimismo «el sentido del currículum no se agota en las prescripciones» formales, porque existen procesos curriculares de aceptación, rechazo y redefinición sobre lo prescripto que lo transforman. Terigi propone algunas categorías para el análisis curricular que retoman la premisa teórico-metodológica de asumir a lo prescripto como un buen punto de partida, definiendo escalas de análisis de esos procesos (gestión política, institución escolar y del aula) que sean adecuadas a las diferentes objetivaciones de lo prescripto (diseños curriculares, planes institucionales, planificación docente). Además, discute con las interpretaciones de los procesos curriculares sostenidas por las hipótesis de aplicación y de disolución proponiendo una hipótesis de especificación.

política, según las categorías empleadas por la autora, pero que están mediando con las otras dos escalas: la institución y el aula.

Los Cuadernos para el Aula (en adelante CA) surgen entonces como una mediación entre el currículum (nivel de gestión política) y las realidades de las instituciones escolares, las prácticas docentes. Del mismo modo, los libros de texto analizados de la editorial Santillana llegaron a las instituciones en el marco de una política de provisión de materiales que intentaron promover prácticas educativas desde los Ministerios de Educación de la Nación.

Pensar al texto como punto de partida que no agota los procesos curriculares conlleva adoptar metodológicamente un enfoque interpretativo[3] que reconstruya huellas en el texto curricular de decisiones. Asumiendo este desafío analítico recuperamos claves e indicios de análisis del texto curricular suministradas por Alterman (2008, p. 3). Priorizamos aquellas claves que nos permitan caracterizar inicialmente el lugar que ocupa en la producción de materiales la enseñanza del algoritmo convencional de la división[4].

En nuestro análisis de las fuentes citadas (libros de texto y materiales curriculares) recurrimos al tiempo destinado a sugerencias para el tratamiento de los contenidos (bajo diversas modalidades: actividades sugeridas y comentarios para su implementación, registros de intercambios en clases o de estrategias de resolución de alumnos) como uno de los criterios para determinar la importancia del contenido en relación a otras temáticas curriculares.

---

[3] Este enfoque se asienta en la advertencia de que «…la autonomización de un texto curricular del contexto, proceso y sujetos que intervienen en su producción, reclama una lectura que procure reconocer sus huellas en la materialidad textual» (Coria, 2013, p. 100).

[4] «Bernstein identifica la existencia de status y jerarquía con el tiempo asignado para su enseñanza. (…) a mayor tiempo asignado a la enseñanza, mayor jerarquía de la disciplina». (Alterman, 2008, p. 13)

Cabe señalar además que en estas decisiones teórico-analíticas subyace un reconocimiento de que la prescripción selectiva de contenidos de enseñanza que supone el currículum conlleva asumirlo como «una opción cultural» determinada socialmente (Terigi, 1999; Chevallard *et al.* 1997, p. 118).

Desde el otro punto de mira adoptado, hemos recuperado aportes de la Didáctica de la Matemática, fundamentalmente de autores franceses: concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas provenientes de la Teoría de la Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 2007) y conceptualizaciones sobre la composición de una obra matemática producidas desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997).

En la TSD, brevemente, y entonces un tanto esquemáticamente, podemos afirmar que la didáctica de la matemática es entendida como un área de investigación que trata los fenómenos de «comunicación de los conocimientos y sus transformaciones (…) Esta ciencia se interesa, en lo que estos fenómenos tienen de específico del conocimiento que se tienen en el punto de mira (…)» (Brousseau, 1990, p. 260). Asimismo las matemáticas son consideradas como un producto social y cultural, siendo la enseñanza «…una actividad que concilia dos procesos: uno de aculturación y otro de adaptación independiente» (Brousseau, 2007, p. 14). Con esta conceptualización y con respecto al proceso de adaptación relativamente independiente, Brousseau plantea que es necesario modelizar el medio, considerándolo como un sistema autónomo, antagonista del sujeto concebido para producir una confrontación con el alumno y que «resista» a sus primeras interacciones.

Se propone entonces al alumno un trabajo intelectual que por momentos es comparable al de los matemáticos en su actividad científica. Para hacer posible tal actividad el profesor debe imaginar y proponer a sus alumnos situaciones en las que ellos puedan tomar decisiones y en las que los conocimientos van a aparecer como la solución óptima y posible de ser descubiertos, a los problemas planteados. En particular nos interesa señalar que en la distribución de responsabilidades, es el docente quien tiene a su cargo la institucionalización de los conocimientos producidos en el aula, es decir dar cuenta de lo que habían hecho los alumnos, describir lo que había sucedido y lo que estaba vinculado con el conocimiento en cuestión, brindarles un estado a los eventos de la clase en cuanto resultados de los alumnos y resultados de la enseñanza, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, acercar las producciones de los conocimientos a otras creaciones (culturales o del programa), indicar cuáles podían ser reutilizadas nuevamente». (Op. cit., 2007, p. 27)

Estos desarrollos teóricos, nos permitieron analizar las actividades propuestas[5] en torno al algoritmo convencional de la división y advertir tensiones que genera a este trabajo docente las condiciones del medio creado en dichas actividades. Es decir, son apoyos que nos sirven para determinadas cuestiones más puntuales. En cambio la TAD que desarrollaremos a continuación es transversal a todo el trabajo.

Para la TAD, «la didáctica de las matemáticas se define (…) como la ciencia del estudio de las matemáticas» (Chevallard *et al.* 1997, p. 47). Desde esta perspectiva, se concibe a las matemáticas como una obra humana, de la cual el proceso de elaboración del currículo selecciona algunas obras que deben ser estudiadas, no solamente enseñadas. Esto se vincula, como planteamos anteriormente, con los aportes de Terigi en relación a cómo se define el currículum.

---

[5]Cabe advertir que no fue un criterio de selección de los referentes teóricos reseñados su coherencia con las perspectivas didácticas de los materiales de apoyo analizados (libros de texto y Cuadernos para el Aula) sino su fertilidad para el análisis didáctico de fenómenos advertidos en la exploración de estos materiales. No obstante, los productores de ambos materiales son reconocidos por su adhesión a «la Didáctica francesa» y por promover su divulgación.

¿De qué está hecha una obra matemática? Puede haber diferentes respuestas, desde la TAD distinguen: «Una obra matemática nace como respuesta a un tipo de cuestiones o tareas problemáticas y está formada por elementos técnicos, tecnológicos y teóricos.» (Op. Cit. p. 126). ¿A qué se refieren los autores con cada uno de esos elementos? Advierten que se necesita

> (…) disponer de una «manera de hacer» determinada que nos permita realizar las tareas en cuestión de una forma relativamente sistemática y segura. Llamaremos técnica matemática o, simplemente, técnica, a cada una de estas maneras de hacer. (Op. Cit. p. 123)

Nuestro trabajo apunta a reflexionar sobre la enseñanza de «los modos de hacer» una división por dos cifras. Hasta ahora, hemos hablado de «algoritmo convencional» de la división como contenido escolar, y a la luz de la TAD, conviene distinguir las nociones «algoritmo» de «técnica»:

> Aunque los algoritmos constituyen un tipo muy particular de técnicas, es importante no confundir ambas nociones. Sólo en ocasiones excepcionales una técnica matemática puede llegar a sistematizarse hasta tal punto que su aplicación esté totalmente determinada y pueda, por lo tanto, ser considerada como un algoritmo. En general, la aplicación de una técnica matemática siempre mantiene cierto grado de indeterminación, aun y cuando su definición sea precisa y por grande que sea el dominio que el estudiante tenga de ella (Idem).

En los Diseños Curriculares, en otros materiales de apoyo a la enseñanza, se habla de «algoritmos convencionales» o «algoritmos usuales» para las operaciones básicas. Los textos de Ed. Santillana utilizan «algoritmos», en plural, para una operación determinada. Para facilitar la lectura en este trabajo, usamos indistintamente «técnica convencional» o «algoritmo convencional». Es posible que, en ese sentido, se aproxime a los «modos de hacer» a que se refiere la T.A.D. al definir técnica:

¿Cómo se vinculan la técnica con la tecnología? «Para que una técnica pueda ser utilizada de manera normalizada, debe aparecer como algo a la vez correcto, comprensible y justificado. La existencia de una técnica supone que también exista en su entorno un discurso interpretativo y justificativo de la técnica y de su ámbito de aplicabilidad o validez. Llamaremos a este discurso sobre la técnica una tecnología (…) (Op. Cit.p. 125).

¿Cómo se vinculan la tecnología con la teoría? «Llamaremos teoría asociada a una técnica a la tecnología de su tecnología, esto es, a un discurso matemático suficientemente amplio como para interpretar y justificar la tecnología» (Idem)

Atendiendo a las características de los procesos de transposición didáctica, asumimos la pregunta de Terigi «¿cómo se fabrica el contenido escolar?»[6]. Un modo de reflexionar sobre ese proceso de escolarización, y atendiendo a la necesidad de una tecnología asociada a la técnica para resolver una división, nos condujo a buscar una[7] definición de división entera que se aproxima al contenido escolar:

> Dividir un entero a (dividendo) por el entero positivo b (divisor) es encontrar dos enteros, q (cociente: positivo, nulo o negativo) y r (resto: no negativo) siempre determinados unívocamente (…), tales que: a = bq + r con 0 d» r < b.
> La división entera suele indicarse con el esquema

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

[6] En este punto debería estar finamente establecida la idea de que el contenido escolar no es un reflejo de la producción social del saber, sino una construcción específica del ámbito educativo y, por tanto, una fabricación de naturaleza didáctica. Este objeto didáctico, tiene, en cuanto a tal, características particulares, y debería ser claro que éstos no son problemas o defectos de un contenido «mal elaborado» sino rasgos producidos por el inevitable proceso de escolarización del saber. (Terigi, 1999, p. 64)

[7] Una definición de división en los números reales, se elabora mediante la ecuación a: b = a . 1/b con $b \neq 0$.

> utilizado en la práctica de la operación (Rey Pastor y otros, 1959, p. 46).

¿Qué nos dice esta definición y cómo nos puede ayudar a entender la estructura profunda del algoritmo convencional y las posibilidades de recrearlo? Nos comunica que:

- el dividendo **a** es un número entero (puede ser positivo, negativo o cero) pero el divisor **b** es positivo, es decir estrictamente mayor que cero. En la escuela primaria, tanto el dividendo como el divisor se toman de los números naturales y se aclara (eventualmente) que **b** es distinto de cero;
- al resolver la división entera, encontramos (o buscamos) dos números: el cociente **q** y el resto **r.** La mayoría de los problemas escolares llamados «de división» apuntan a calcular el cociente solamente;
- los cuatro números involucrados se relacionan bajo ciertas condiciones, expresadas en la «fórmula»[8]

  $\mathbf{a} = \mathbf{bq} + \mathbf{r}$ con $0\ d \leqslant \mathbf{r} < \mathbf{b}$

El resto es positivo y puede ser igual a 0, en cuyo caso la división es exacta y entonces decimos que **a** es múltiplo[9] de **b**, o que **b** es divisor de **a**. Además, el resto tiene que ser estrictamente menor que el divisor. En caso de que el número **a** no sea múltiplo de **b**, por las condiciones dadas en la «fórmula», podemos interpretar que **a** está comprendido entre dos múltiplos consecutivos de **b.**

---

[8] Usamos la designación expresada por Sadovsky (2003). Para los alumnos de la escuela primaria, la división está caracterizada casi exclusivamente como un algoritmo de cálculo, mientras que la definición expresa nuevas relaciones entre los números que intervienen.

[9] Es importante para el análisis tener clara la siguiente definición: dados dos números enteros **a** y **b**, donde **b** es distinto de cero, se dice que **b** divide a **a**, si existe un entero **q** tal que **b . q = a**

Pensar la operación de división de esta manera, hace indistinguible el algoritmo convencional cuando el divisor es un dígito o un polidígito. En todos los casos se trata de buscar dos múltiplos consecutivos del divisor entre los cuales está el dividendo.

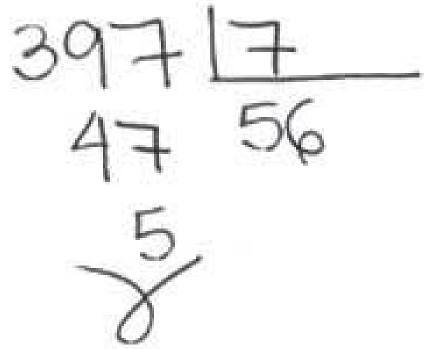
¿Qué plantean los DCJ (Diseños Curriculares Jurisdiccionales) en relación al algoritmo convencional?

En los DCJ (MEPC, 2012) se mencionan como contenidos de enseñanza «algoritmos convencionales» o «algoritmos usuales» para distintas operaciones pero no hay una identificación de cuál es ese algoritmo para el caso específico de la división. Desde una perspectiva de hacer matemática en clase (entre otros autores, Chevallard *et al.* 1997) se favorecen diferentes tipos de cálculos (con calculadora, mentales, aplicando propiedades del sistema de numeración y de las respectivas operaciones, etc.). ¿Cuál es el algoritmo convencional de la división? En la sección «Aprendizajes y contenidos» de los DCJ (MEPC, 2012, p. 110) para quinto y sexto grado se explicita: «Uso reflexivo de los algoritmos convencionales de la multiplicación y división por una y dos cifras como una estrategia económica para resolverlas».

En los establecimientos educativos se interpreta[10] que ese algoritmo convencional es el que la mayoría de nosotros aprendimos en nuestra escolaridad obligatoria, a saber:

---

[10] Autores como David Block (2013) nos ayudan a desnaturalizar la técnica más familiar entre los maestros de la escuela primaria. Esa técnica no ha sido siempre usada y a lo largo de diferentes épocas se han puesto el acento en diferentes aspectos de la misma. Por ejemplo en los años setenta una característica que se menciona es «el intento de no limitarse a enseñar las técnicas, sino también aquello que las explica o justifica. Para ello, se buscaron formas de concretar las nociones abstractas. Así, en la división, se establecen las decenas y las unidades del dividendo, para dividir decenas y unidades por separado, además de transformar decenas en unidades en su momento» (Block 2013: 110). En cambio en los años noventa el acento se puso en la variedad de procedimientos. Luego caracteriza la técnica «a danda» empleada en el siglo XV como precursora de la hoy conocida y



En los DCJ[11] y en los materiales de apoyo curricular se utiliza vocabulario diverso (algoritmo, procedimientos de cálculo o estrategias, técnicas, etc.) para designar el modo de resolver un cálculo, de allí la necesidad de identificar cuál es el que reconocemos en esos materiales, como el algoritmo convencional. En los mismos CA se emplea la palabra estrategia[12] y también se usa el término técnicas[13]. En nuestro trabajo, y a partir de la perspecti-

---

que se empleó en los años setenta del siglo pasado. Las primeras impresiones de técnicas de dividir datan de 1491 y también se menciona a la técnica «Cataldi» muy usada en el siglo XVI.
Esta breve caracterización, nos hace tomar conciencia de los cambios que las técnicas y los métodos para la enseñanza de la división han sufrido históricamente.

[11] En los DCJ al referirse a la multiplicación se expresa: «Emplear cálculos exactos y aproximados de números de una y dos cifras, eligiendo hacerlo en forma mental o escrita -en función de los números involucrados- y articulando los procedimientos personales con los algoritmos usuales para el caso de la multiplicación por una cifra» (MEPC, 2012, p. 94). De igual modo en los CA se menciona: «En relación con las formas de calcular, es importante considerar como inicio del trabajo la utilización de diferentes procedimientos de cálculo en función de los conocimientos disponibles de los alumnos sobre los números involucrados y sobre las operaciones antes de comenzar con los algoritmos convencionales que todos realizamos de la misma manera» (MECyT, 2006a, p. 34).

[12] Sin embargo, y aunque podrían ser usadas indistintamente en tanto refieren al mismo número, los contextos de uso y las estrategias de cálculo suelen determinar la conveniencia de utilizar una u otra representación. (MECyT, 2007, p. 21).

[13] Para evaluar si es posible utilizar o no alguno de los criterios que se presentan aquí es necesario, en primera instancia, interpretarlos, lo que implica un avance sobre lo requerido en las tareas realizadas anteriormente, ya que aquí hay que

va de la TAD, vamos a hablar de «técnicas», como un modo de hacer un tipo de tareas que inicialmente son problemáticas.

Además, la TAD plantea que en el proceso de elaboración del currículo se seleccionan algunas obras matemáticas que deben ser estudiadas y no solamente enseñadas. Es el caso del «algoritmo convencional» de la división. Si analizamos la jerarquía otorgada a este contenido en los DCJ, en función al espacio destinado a su desarrollo medido en páginas, observamos que tanto en el primer ciclo como en el segundo este espacio es menor a un 10% del total de los aprendizajes y contenidos propuestos. Cabe aclarar que dentro de ese porcentaje se incluye tanto el trabajo con el sentido como con la técnica, la distinción se hace a los fines del análisis ya que están profundamente vinculados. Como veremos a continuación, la jerarquía otorgada a este objeto en los DCJ es consistente con el espacio asignado en materiales de desarrollo curricular y libros de texto como componentes de políticas de distribución de materiales curriculares.

Jerarquía de este contenido en el segundo ciclo de los libros de textos de editorial Santillana

La serie de libros de la editorial Santillana (Broitman, Escobar, Grimaldi, Novembre & Sancha, 2010) fueron remitidos a las escuelas por el Ministerio de Educación de la Nación junto a otros libros y materiales de desarrollo curricular (como los CA) como parte de una política de distribución de materiales[14] que sirvieron de apoyo a la tarea docente. Ese material se remitió a las instituciones escolares entre los años 2009 y 2011. Una de las autoras de esta serie es reconocida en el campo de la didáctica de

entender un criterio que elaboró otra persona, hay que ser capaz de interpretar una técnica explicada coloquialmente para poder opinar sobre su validez. (MECyT, 2007, p. 65).

[14] Para un análisis detallado de estas políticas véase Coria (2013).

la matemática desde hace varios años y ha sido convocada por los Ministerios de Educación Nacional y provinciales de diferentes jurisdicciones de nuestro país para producir diferentes documentos curriculares. En ellos trataremos de caracterizar cuál es el tratamiento que se le da al algoritmo convencional de la división por dos cifras.

Un modo de interpretar la jerarquía que le asignaron a los contenidos en los libros de texto de editorial Santillana y en los C.A. la obtuvimos desde la comparación de los espacios destinados a los diferentes apartados (medidos en páginas)[15]. Comparamos así el espacio que se destina al abordaje de las operaciones del campo multiplicativo, en especial de la división, en relación al campo aditivo:

Grado	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Campo aditivo	97%	61%	20%	53%	36%	27%
Campo multiplicativo	3%	39%	80%	47%	64%	73%
División	0%	0%	18%	5%	14%	13%

Cuadro 1: Comparación del espacio destinado al campo multiplicativo, –en particular a la división– con el campo aditivo en los libros de texto de Santillana

Dentro del eje Operaciones, la importancia que se le atribuye al campo multiplicativo tiende a aumentar al interior del Primer Ciclo. Por eso en primer grado se le asigna un porcentaje del 3% y en tercer grado llega a un 80%. En el Segundo Ciclo

[15] La estructura de los contenidos, para cada grado, distingue dos Ejes: «Número y Operaciones» y «Geometría y Medida». Por razones de espacio y para ser específicos en el análisis nos abocaremos al análisis del campo multiplicativo dentro del Eje «Número y operaciones» de (1° a 6° grados) ya que el tema en cuestión (el algoritmo convencional de la división) se inscribe en esos materiales. Esta organización de los CA se desprende de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios.

ocurre lo mismo pasa de un 47% en cuarto grado a un 73% en sexto. En cuarto grado vuelve a destinarse menor espacio en relación al grado anterior. Vale la pena destacar que el espacio destinado a la división en ningún grado llega a un espacio mayor que el 18% que alcanza en tercer grado. Mientras que en el trabajo con el campo aditivo, es en tercer grado el menor espacio dedicado y es del 20%. A partir de esos datos, inferimos que hay menor espacio dedicado a la división en relación al campo aditivo.

Procedimos de manera similar en los C.A, dentro del eje «Números y Operaciones», las páginas destinadas a «Para avanzar en el uso de las operaciones con números naturales al resolver problemas» representan un 11% del mismo eje para cuarto grado; en quinto grado se destina a ese título el 10% mientras que en sexto grado ese título ni siquiera está presente. Lo mismo ocurre con el apartado titulado: «Para avanzar en las formas de calcular con números naturales» en el que se destina un 25% del mismo eje en cuarto grado, un 19% en quinto grado, y desaparece por completo en sexto grado.

Cabe mencionar que en los CA se explicita que la enseñanza de las operaciones implicaría «considerar en la enseñanza dos aspectos: por un lado, los procesos que llevan a la construcción de los diferentes algoritmos de cada operación y, por otro, los distintos significados a los que pueden asociarse en los problemas que resuelven» (MECyT, 2006b, p. 67). No obstante, al trabajo con el cálculo se le asigna una menor jerarquía (con la excepción de 4º y 5º grado) en la comunicación de orientaciones a los docentes, como se advierte en el siguiente cuadro:

Sub aspectos	1° grado	2° grado	3° grado	4° grado	5° grado	6° grado
Significado	0%	17%	17%	8%	9%	51%
Cálculo	0%	0%	10%	12%	19%	16%

Cuadro 2: Cuadro comparativo de los porcentajes de las operaciones multiplicativas entre los diferentes grados

Probablemente esta jerarquía se vincule al supuesto de que hay una menor tradición en el tratamiento escolar del significado o sentidos de las operaciones y se procure así su rejerarquización brindando fundamentalmente sugerencias para reconocer el trabajo con esta diversidad de sentidos en el recorrido escolar. Esta presencia menor de discusiones y acompañamientos para el abordaje del cálculo en momentos el recorrido escolar en que se promueve la presentación del algoritmo de la división (tercer grado), como veremos, quizás coadyuve a la transparencia de las técnicas de cálculo y su enseñanza que se advierte en los libros de texto analizados.

En síntesis, de la lectura y análisis de los cuadros 1 referido a los libros de la editorial Santillana se infiere que el espacio dedicado a la división en el primero no supera el 20% en ningún grado. Entonces si se compara con el campo aditivo la jerarquía que se le otorga a la división es menor. Y de la lectura del cuadro 2 de los C.A. al trabajar con el sentido en relación al cálculo, este último tampoco supera el 20%.

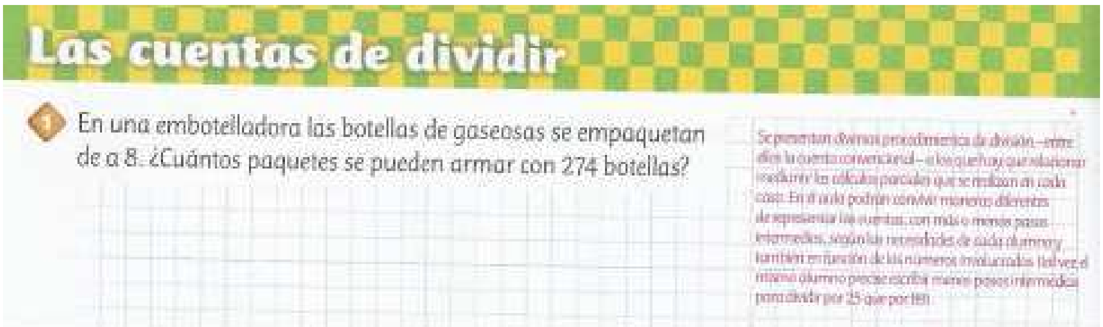
La propuesta de enseñanza del algoritmo de la división en los libros de texto

A continuación analizamos las actividades que se proponen para la enseñanza del algoritmo convencional de la división y las que se proponen para continuar el trabajo sobre este algoritmo ya presentado. Para ello empleamos los libros del docente de primero, segundo, tercero, cuarto, quinto y sexto grados de la primera edición y primera reimpresión (Broitman et al., 2010b). Se opta por el libro del docente y no por los libros del alumno debido a la importante notificación de intenciones que se incorporan al interior de esa bibliografía. Por caso, al margen de las situaciones problemáticas y títulos, se explicitan intenciones didácticas, observaciones, recomendaciones u objetivos de la tarea y al pie de las páginas se recuerda el contenido que se está abordando.

Tareas y técnicas para enseñar el algoritmo convencional de la división

El algoritmo convencional de la división por un dígito se presenta en tercer grado hacia el final del bloque IV de operaciones y el tratamiento es muy similar al de cuarto grado (Broitman et al., 2010a, p. 120). El trabajo que proponen los libros para cuarto grado comienza con un capítulo para recordar las cuatro operaciones básicas y en las que se trabaja tanto procedimientos de cálculos como problemas. Específicamente en el campo multiplicativo se proponen situaciones que revisan el repertorio multiplicativo[16], proponen algunas estimaciones de productos y cocientes y cálculos mentales que multiplican o dividen por la unidad seguida de ceros.

Nos focalizaremos en la siguiente situación que consta de seis actividades.


Las cuentas de dividir

1 En una embotelladora las botellas de gaseosas se empaquetan de a 8. ¿Cuántos paquetes se pueden armar con 274 botellas?

Figura 1. Broitman et al., 2010b, p. 62

La primera actividad es un problema que se podría resolver de manera económica con la cuenta: 274:8. En las observaciones para los maestros se propone:

> Se presentan diversos procedimientos de división-entre ellos la cuenta convencional-a los que hay que relacionar mediante los cálculos parciales que se realizan en cada caso. En el aula po-

[16] Se refiere a «conjunto de cálculos memorizados y relacionados entre sí» (MECyT, 2006c, p. 84).

> drán convivir maneras diferentes de representar las cuentas, con más o menos pasos intermedios, según las necesidades de cada alumno y también en función a los números involucrados (tal vez el mismo alumno precise escribir menos pasos intermedios para dividir por 25 que por 89) (Idem)

La actividad uno es un problema que apunta al sentido de partir[17]. Si los alumnos recurrieran a realizar procedimientos aditivos (adición o sustracción) es muy probable que les resulte poco sintética la tarea y se aleje del sentido de la actividad: presentar la cuenta de dividir. Por eso consideramos que hubiese sido apropiado para avanzar en esa dirección, colocarle condiciones a la actividad por ejemplo que se usen procedimientos estudiados anteriormente como cuentas de multiplicar.

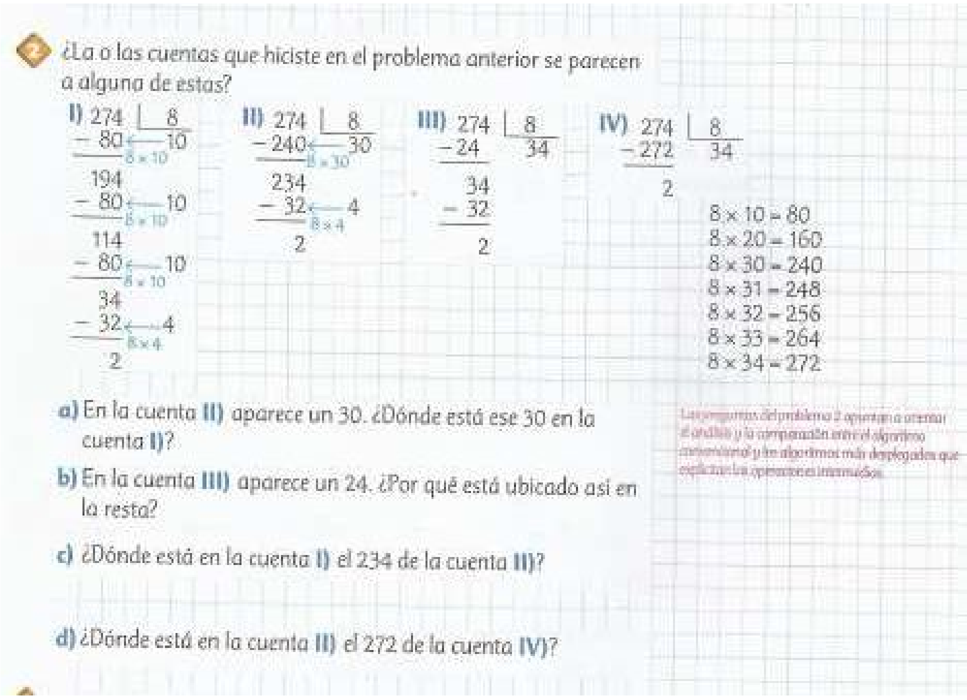


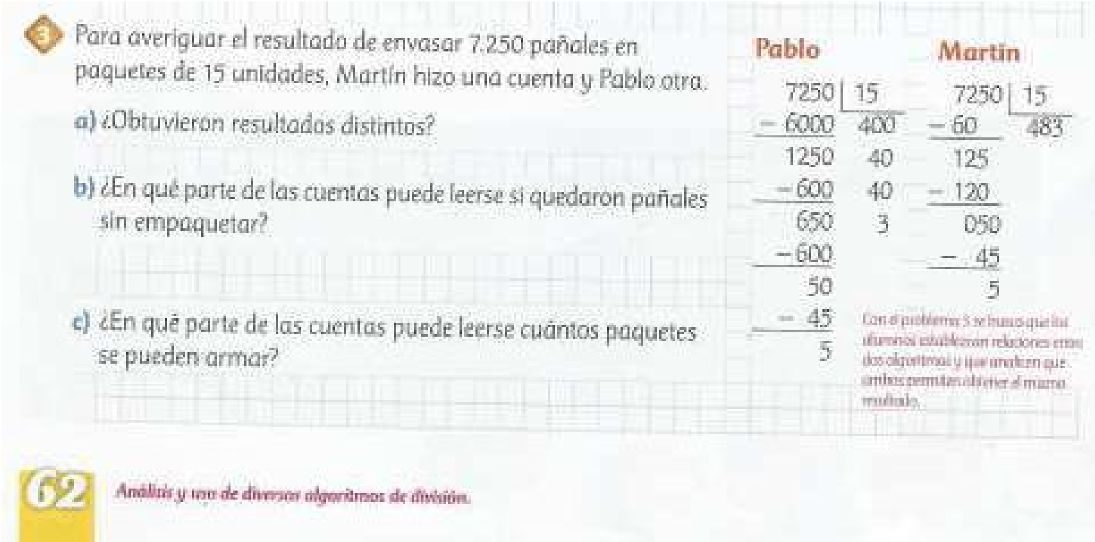
Figura 2. Broitman et al., 2010b, p. 62

[17] En los C.A. de segundo grado se expresa; «También para la iniciación en la división es conveniente incluir problemas que nos permitan abordar diferentes significados: los de reparto y los de partición. Estos problemas surgen de cambiar de lugar la incógnita de la multiplicación. En los problemas de reparto, se conoce la cantidad total de elementos a repartir y la de partes, pero no cuántos elementos corresponden a cada una de las partes» (MECyT, 2006b, p. 79).

En la actividad dos se les propone a los alumnos mirar de forma reflexiva las cuentas de dividir que otras personas resolvieron. Dentro de las observaciones para los maestros encontramos la siguiente sugerencia: «Las preguntas del problema 2 apuntan a orientar el análisis y comparación entre el algoritmo convencional y los algoritmos más desplegados que explicitan las operaciones intermedias» (Idem).

La tarea consiste en vincular los procedimientos empleados por los alumnos y la presentación de otro tipo de cuenta en la que no se ha trabajado previamente en el libro de cuarto (lo mismo sucede en el de tercer grado). Notamos «un salto cualitativo» con las cuentas que los chicos podrían haber desarrollado en la actividad 1 y 2. Existe una distancia que quizás se pueda acotar si se evitan algunos procedimientos aditivos en la primera actividad, pero en la que necesariamente habrá que disponer de una *tecnología* que justifique la *técnica* que se desea presentar (Chevallard *et al.* 1997).

Consideramos que es una actividad valiosa para comparar procedimientos una vez que a los alumnos se les haya presentado la cuenta de dividir. Entre otras cuestiones, porque permitiría a los alumnos que realicen procedimientos más largos (cuenta I) avanzar hacia otros más sintéticos (cuenta III o IV). Desde la tecnología desplegada por los alumnos que sustente las técnicas por ellos usadas (cuenta I y II), quizás sea posible que aquellos alumnos que usan procedimientos más desarrollados pero menos desplegados (cuenta IV), puedan hacer más transparentes y evidentes cuentas que se encuentran ocultas a partir del análisis de procedimientos más desplegados. Nos preguntamos entonces cómo proceden los maestros para relacionar la actividad 1 y 2. ¿Cuáles son las intervenciones didácticas que tienen para que los alumnos se apropien de la cuenta de dividir?



3 Para averiguar el resultado de envasar 7.250 pañales en paquetes de 15 unidades, Martín hizo una cuenta y Pablo otra.

a) ¿Obtuvieron resultados distintos?

b) ¿En qué parte de las cuentas puede leerse si quedaron pañales sin empaquetar?

c) ¿En qué parte de las cuentas puede leerse cuántos paquetes se pueden armar?

Pablo

```
 7250 | 15
−6000  400
 1250   40
 −600   40
  650    3
 −600
   50
  −45
    5
```

Martín

```
7250 | 15
−60    483
 125
−120
 050
 −45
   5
```

62 Análisis y uso de diversos algoritmos de división.

Figura 3. Broitman et al., 2010b, p. 62

En la actividad tres, se presentan cuentas en las que el divisor tiene dos cifras (y es la primera vez que el divisor no es la unidad seguida de ceros). Dentro de las sugerencias para maestros se expresa: «Con el problema 3 se busca que los alumnos, establezcan relaciones entre dos algoritmos y que analicen que ambos permiten obtener el mismo resultado» (Idem).

Consideramos que vincular dos técnicas, requiere de un trabajo más profundo que sólo comparar cocientes y restos. Por ejemplo en la cuenta de Pablo se expresa: 6000 y en la de Martín 60 ¿Cómo se relacionan esos números? ¿El 400 de la cuenta de Pablo, dónde estará en la cuenta de Martín? ¿Por qué se escriben diferentes? Tal vez podríamos pensar que esta actividad es prematura y sería más potente cuando se tenga mayor dominio de las dos técnicas.

Las actividades cuatro y seis tienen el mismo objetivo que la tres, reflexionar sobre un algoritmo intermedio. En la actividad 4 b se presenta el algoritmo convencional y en la actividad seis los alumnos pueden elegir cómo resolver las cuentas (2274:18; 2520:24 y 8577:32).

4 Un chico estaba haciendo estas cuentas y se le manchó la hoja. Completalas.

a)

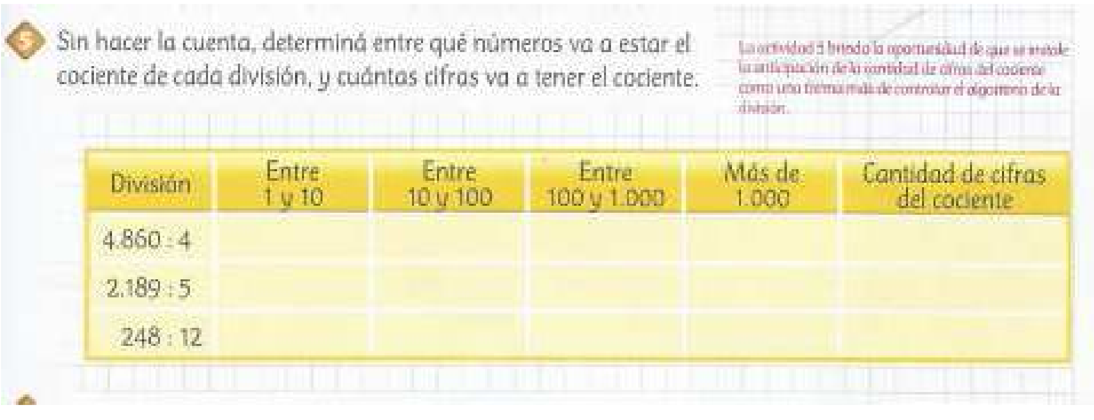
```
 3 813 | 31
-3 100
   713
-  310
   403
-  310
    93
-   93
     0
```

b)

```
 8 818 | 38
- 7 6    232
```

Figura 4. Broitman et al., 2010b, p. 63

Las observaciones para el docente que acompañan la actividad 4b poco ayudan a la gestión de la clase. Las vinculaciones que los docentes tienen que establecer entre unas cuentas y otras no son inmediatas ni sencillas, creemos que tampoco para los alumnos lo serán.



5 Sin hacer la cuenta, determiná entre qué números va a estar el cociente de cada división, y cuántas cifras va a tener el cociente.

División	Entre 1 y 10	Entre 10 y 100	Entre 100 y 1.000	Más de 1.000	Cantidad de cifras del cociente
4.860 : 4					
2.189 : 5					
248 : 12					

Figura 5. Broitman et al., 2010b, p. 63

La actividad 5 propone pensar entre qué números va a estar el cociente, promoviendo la posibilidad de estimar el cociente y en particular el número de cifras del cociente.

Como ya dijimos, en la vinculación entre procedimientos no convencionales y el algoritmo convencional, no se proponen demasiadas pistas a docentes y alumnos para que se usen unas u otras técnicas en función de la situación propuesta. Por otro lado nos preguntamos cómo hacemos para que ese algoritmo convencional sobre el que no se dan demasiadas explicaciones sea enseñado y aprendido. No quedan muy explícitas en las propuestas analizadas cuál de las técnicas propuestas es la que el docente va a institucionalizar y cómo se procede frente a la posibilidad de que todos los alumnos empleen diferentes técnicas.

Sabemos que no es sencilla la relación con el algoritmo convencional ¿cómo se hace entonces a partir de las propuestas de los libros para que los alumnos lo tengan a disposición para resolver situaciones problemáticas o cálculos?

Situaciones para seguir una vez enseñado el algoritmo convencional

En los libros de quinto y sexto grado, se trabaja específicamente con el campo multiplicativo en dos capítulos. Se presentan problemas que apuntan a reflexionar sobre los sentidos de la multiplicación y división, los cálculos mentales que favorecen la estimación usando resultados conocidos para deducir nuevos, aproximaciones y relaciones entre la multiplicación y la división y entre el dividendo, divisor y resto. En particular, en este último caso se pone el acento en las condiciones que debe cumplir el resto, por ejemplo:

> 5. Sofía compró una bolsa con 135 caramelos. Quiere llevar caramelos a la escuela durante varios días para convidar a cada una de sus 16 compañeras. ¿Cuántos caramelos le quedarán en la bolsa cuando ya no le alcance para todas? (Broitman et al., 2010c, p. 20).

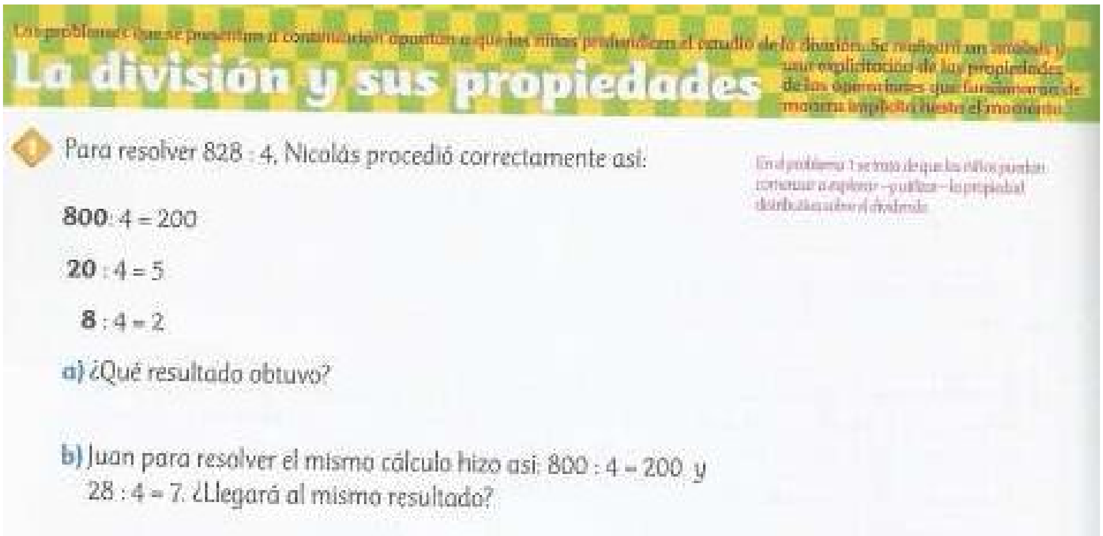
Para finalizar el segundo capítulo de los libros de quinto y sexto grados se propone una actividad que recupera las propiedades de la multiplicación y la división. En sexto grado se continúa exactamente con el mismo tipo de actividades sólo que distribuidas de forma diferente en los capítulos. La única actividad diferente (Broitman et al., 2010d, p. 54), si se compara con quinto, es un cálculo que combina sumas con multiplicaciones y divisiones realizadas con calculadora para analizar la jerarquía en el orden de resolución de las operaciones.

Podemos advertir que en los libros se ofrecen actividades tendientes a descubrir diferentes técnicas que pueden favorecer resoluciones de cálculos pero no se advierten tecnologías que sustenten estas técnicas. Por ejemplo encontramos varias actividades que promueven dividir o multiplicar por la unidad seguida de ceros, vincular cuentas o estimar el resultado de un cociente:

> 4. Usando que 1600:80=20, averiguá el resultado de los siguientes cálculos sin realizar las cuentas. Luego comprobar con la calculadora:
> 1600:40= c) 1600:8=
> 1600:20= d) 1600:4= (Broitman et al., 2010c, p. 22).

De alguna manera esas vinculaciones entre técnicas y tecnologías quedan supeditadas al docente y a su grupo clase. Ya hemos observado lo mismo para la vinculación de los algoritmos intermedios y el algoritmo convencional. Así en los libros de quinto y sexto grado no se proponen actividades para reflexionar, ejercitar, descubrir los límites y posibilidades de esa técnica.

A continuación se trascriben algunas de las propiedades que se analizan en quinto y sexto grado ilustrando el tipo de vínculo que estamos buscando entre las técnicas y las tecnologías. La actividad seleccionada a continuación busca, según se enuncia en las orientaciones para los docentes, que los alumnos puedan descomponer el dividendo.



Los problemas que se presentan a continuación apuntan a que los niños profundicen el estudio de la división. Se realizará un análisis y una explicitación de las propiedades de las operaciones que funcionaron de manera implícita hasta el momento.

La división y sus propiedades

1 Para resolver 828 : 4, Nicolás procedió correctamente así:

En el problema 1 se trata de que los niños puedan comenzar a explorar —y utilizar— la propiedad distributiva sobre el dividendo.

800 : 4 = 200

20 : 4 = 5

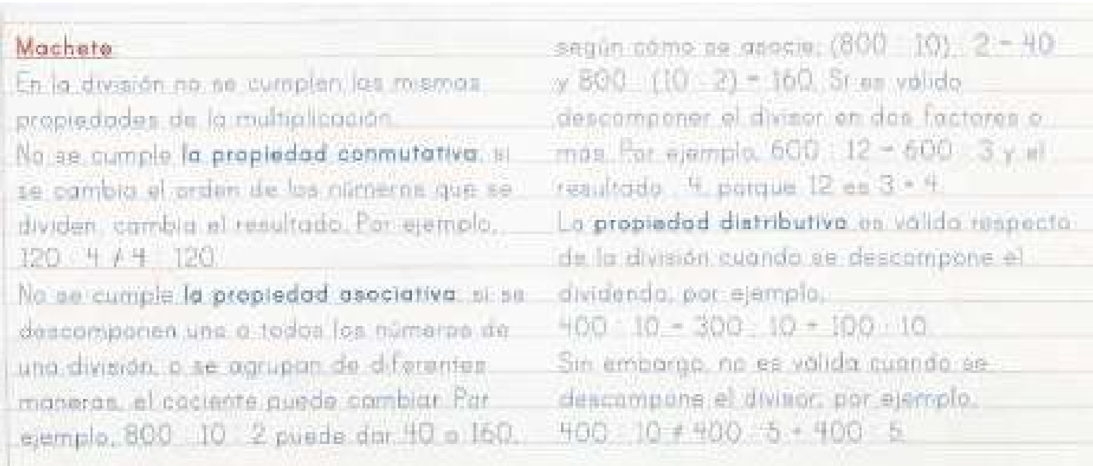
8 : 4 = 2

a) ¿Qué resultado obtuvo?

b) Juan para resolver el mismo cálculo hizo así: 800 : 4 = 200 y 28 : 4 = 7. ¿Llegará al mismo resultado?

Figura 6. Broitman et al., 2010c, p. 52

Luego se proponen cinco actividades más para poner en tensión las descomposiciones del dividendo o del divisor y explorar qué condiciones tienen que cumplir en cada caso. Posteriormente se propone la lectura de propiedades bajo el título: «Machete»… Su función será justificar las técnicas que se emplearán o descartarán en las situaciones posteriores propuestas?



Machete

En la división no se cumplen las mismas propiedades de la multiplicación.

No se cumple **la propiedad conmutativa**, si se cambia el orden de los números que se dividen, cambia el resultado. Por ejemplo, 120 : 4 ≠ 4 : 120.

No se cumple **la propiedad asociativa**, si se descomponen uno o todos los números de una división, o se agrupan de diferentes maneras, el cociente puede cambiar. Por ejemplo, 800 : 10 : 2 puede dar 40 o 160, según cómo se asocie: (800 : 10) : 2 = 40 y 800 : (10 : 2) = 160. Sí es válido descomponer el divisor en dos factores o más. Por ejemplo, 600 : 12 = 600 : 3 y el resultado : 4, porque 12 es 3 × 4.

La **propiedad distributiva** es válida respecto de la división cuando se descompone el dividendo, por ejemplo, 400 : 10 = 300 : 10 + 100 : 10.

Sin embargo, no es válida cuando se descompone el divisor, por ejemplo, 400 : 10 ≠ 400 : 5 + 400 : 5.

Figura 7. Broitman et al., 2010c, p. 53

Llama la atención que se listan las propiedades que «no» se cumplen, ese no suele ser el modo en que se mencionan en el campo de la Matemática. Por otro lado tampoco se expresa que los modos de descomponer el dividendo para el caso de la propiedad distributiva tiene las limitaciones de que los sumandos tienen que ser múltiplos del divisor. Con tantas condiciones que debe cumplir esa propiedad nos preguntamos ¿es conveniente promover este tipo de descomposiciones?

En el apartado sobre la jerarquía del contenido, advertimos el escaso espacio atribuido a la enseñanza del algoritmo convencional de la división en los libros analizados. Observamos además que en esos espacios escasos las orientaciones que reciben los docentes para la enseñanza en general son poco explícitas o inexistentes. En la mayoría de los casos quedan a cargo de los alumnos y docentes establecer vínculos entre los algoritmos intermedios y los convencionales. En este «vacío» entre los materiales que sirven de insumo para preparar las clases y planificaciones docentes y los objetivos y aprendizajes que esos mismos materiales pretenden alcanzar nos preguntamos ¿qué hacen los docentes? ¿Cómo se trasmiten esas técnicas si no es a través de estos insumos? Por esa razón nos preguntamos, en los últimos años de la escuela primaria: ¿Cómo harán los alumnos para reconocer que el algoritmo convencional de la división es la técnica más genérica que resuelve la mayoría de los problemas de esa colección? ¿Y para reconocer cuáles son las ocasiones en que es más oportuno usarla?

Asimismo, si concebimos a este objeto como un componente de una obra matemática (Chevallard *et al.* 1997) supone una actividad humana que para su apropiación requiere momentos de interacción con tareas y técnicas y tecnologías y teorías. Observamos que en estos materiales se han desarrollado tipos de problemas (o tareas) asociados a la división y se han habilitado situaciones en que los alumnos realizan exploraciones de técnicas alternativas de resolución de las mismas. Asimismo advertimos que la técnica privilegiada en la comunidad de enseñantes, el algoritmo convencional de la división por dos cifras, no tiene una tecnología suficientemente desarrollada quedando así a cargo del docente este vacío que contribuiría a sostener la gestión de momentos de transición de algoritmos intermedios hacia esta técnica.

Estos fenómenos reconocidos nos alertan sobre dificultades en construcciones didácticas disponibles para el estudio de este objeto escolar asumido como un desafío de enseñanza por docentes de nuestro medio. Asimismo nos advierte una línea de indagación y profundización abierta para estudios futuros: la elaboración de una praxeología en la que necesariamente se contemplen momentos tecnológicos y teóricos para poder aproximarse a este componente de la obra matemática escolar de la división.

Agradecimientos: agradecemos la colaboración de Dilma Fregona y de Nicolás Gerez Cuevas en la reflexión sobre el algoritmo de la división en tanto objeto de estudio y con su lectura crítica.

Referencias

Alterman, N. (2008). La construcción del currículum escolar. Claves de lectura de diseños y práctica. *Páginas. Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, 10(6), 127-145.

Block Sevilla, D., Martínez Falcón, P. & Moreno Sánchez, E. (2013). *Repartir y comparar. La enseñanza de la división entera en la escuela primaria.* México DF: Ediciones SM.

Broitman, C., Escobar, M., Grimaldi, V., Novembre, A. & Sancha, I. (2010a). *Matemática en tercero. Libro del docente.* Buenos Aires: Santillana.

Broitman, C., Escobar, M., Grimaldi, V., Novembre, A. & Sancha, I. (2010b). *Matemática en cuarto. Libro del docente.* Buenos Aires: Santillana.

Broitman, C., Escobar, M., Grimaldi, V., Novembre, A. & Sancha, I. (2010c). *Matemática en quinto. Libro del docente.* Buenos Aires: Santillana.

Broitman, C., Escobar, M., Grimaldi, V., Novembre, A. & Sancha, I. (2010d). *Matemática en sexto. Libro del docente*. Buenos Aires: Santillana.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? *Enseñanza de las Ciencias,* 8(3), 259-267.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE- Horsori.

Coria, A. (2013). Entre curriculum y enseñanza. Aristas de un proceso político-pedagógico en la construcción de la política curricular y de enseñanza en Argentina (2004-2007). En E. Miranda & N. Bryan (Comp.), *Formación de Profesores, Curriculum, Sujetos y Prácticas Educativas. La perspectiva de la investigación en Argentina y Brasil*, (pp. 143-186). Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba.

Foglia, M. (2015). *Tendencias en la enseñanza del algoritmo convencional de la división por dos cifras en documentos curriculares y textos escolares.* (Tesis inédita de grado). Facultad de Educación, Universidad Católica de Córdoba, Argentina.

Fregona, D. y Orús, P. (2011). *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Fregona, D. y Orús, P. (2012). Enseñar la división en la escuela primaria: un problema de investigación y de formación docente. En: *XXXV Reunión de Educación Matemática*. Córdoba: Unión Matemática Argentina. Recuperado de www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_28/28-1_FregonaOtros-EnsenarDivision.pdf (último acceso 22/11/2016).

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, Presidencia de la Nación. *Cuadernos para el aula. Primero y* segundo *ciclo de EGB/Nivel Primario. Matemática 1,* 2006a. Buenos Aires, Argentina: MCyT. Recuperado de www.me.gov.ar/curriform/matematica.html (último acceso 22/11/2016).

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, Presidencia de la Nación. *Cuadernos para el aula. Primero y segundo ciclo de EGB/Nivel Primario. Matemática 2,* 2006b. Buenos Aires, Argentina: MCyT. Recuperado de www.me.gov.ar/curriform/matematica.html (último acceso 22/11/2016).

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, Presidencia de la Nación. *Cuadernos para el aula. Primero y segundo ciclo de EGB/ Nivel Primario. Matemática 3,* 2006c. Buenos Aires, Argentina: MCyT. Recuperado de www.me.gov.ar/curriform/matematica.html (último acceso 22/11/2016).

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología, Presidencia de la Nación. *Cuadernos para el aula. Primero y segundo ciclo de EGB/ Nivel Primario. Matemática 5,* 2007. Buenos Aires, Argentina: MCyT. Recuperado de www.me.gov.ar/curriform/matematica.html (último acceso 22/11/2016).

Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. *Diseño Curricular de la Educación Primaria (2012-2015)*, 2011. Córdoba: Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. Recuperado de www.igualdadycalidadcba. gov.ar/SIPEC CBA/publicaciones/EducacionPrimaria/DCJ_PRIMARIO %2023%20de%20noviembre.pdf (último acceso 22/11/2016).

Rey Pastor, J., Trejo, C. & Calleja, P. (1959). *Análisis matemático.* Buenos Aires: Kapelusz.

Sadovsky, P. (2003). *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas*. (Tesis inédita de doctorado). Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires, Argentina.

Terigi, F. (1999). *Currículum. Itinerarios para aprehender un territorio*. Buenos Aires: Santillana.