

Control de posición Híbrido Fraccional - Entero para un Motor DC Brushless

Sergio Laboret[†], Julián Pucheta[†], Cristian Rodríguez Rivero[†] y Reinaldo González Reyes[†]

[†]Departamento de Ingeniería Electrónica, Laboratorio de Investigación Matemática Aplicada a Control (LIMAC), Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
 slaboret@yahoo.com.ar, jpucheta@efn.uncor.edu, cristian.rodriguezrivero@gmail.com
 reinaldoelcuba15@gmail.com

Resumen— En este trabajo se presenta un controlador derivativo fraccional de orden $\frac{1}{4}$ implementado como filtro digital de ganancia estática unitaria para aumentar la robustez del control de posición de un motor DC Brushless frente a cambios en sus parámetros electromecánicos y ante la presencia de una fuerte alinealidad como saturación en la corriente y por ende torque de comando. La estrategia propuesta consiste en implementar un controlador de asignación de polos por realimentación de las variables de estado, con el derivador fraccional en serie con el mismo de modo de aportar un adelanto de fase casi plano y mayor ganancia en frecuencias altas, sin alterar las características de régimen.

Palabras claves— Control Fraccional – Control Robusto – Control de posición.

1. INTRODUCCION

El motor DC Brushless es un motor síncrono con un rotor de imanes permanentes y un estator bobinado trifásico. Un esquema típico de funcionamiento [1] puede verse en la Fig. 1, donde un micro controlador, toma las señales que representan la posición del sensor y genera las de excitación de las llaves electrónicas de un inversor trifásico de modo de conmutar los bobinados convenientemente y generar el torque necesario para la rotación. Gobernado por un algoritmo de control vectorial, que desacopla las componentes de corriente que producen torque y flujo magnético su modelo matemático se simplifica y es similar al de un motor de corriente continua de imanes permanentes [2].

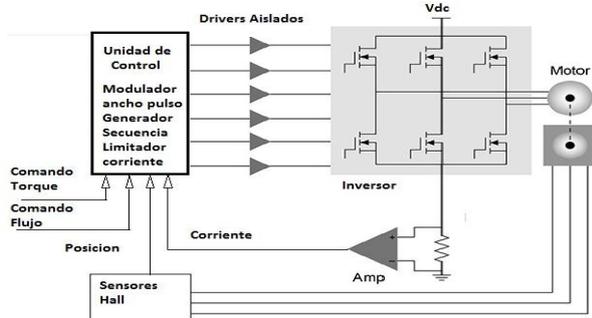


Figura 1: Esquema funcional de motor DC Brushless.

Despreciando el efecto de la inductancia de dispersión L y la fuerza contra electromotriz (f.c.e.m.) puede ser modelado como un sistema lineal de segundo orden con integración pura, para propósitos de diseño de

un controlador de posición por asignación de polos.

Las ecuaciones que rigen el movimiento pueden ser escritas en forma de variables de estado, según la terminología usada en la Tabla 1.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_T}{JR} \end{bmatrix} V, \quad (1)$$

Resultando su función de transferencia:

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K_T / R}{Js + B} \frac{1}{s}. \quad (2)$$

Tabla 1: Símbolos en las Ec. 1 y 2

Símbolo	Descripción	Unidades SI
θ	Angulo (Salida)	<i>Rad</i>
ω	Velocidad angular	<i>Rad / s</i>
T	Torque	<i>N · m</i>
K_T	Constante torque	<i>N · m / A</i>
J	Momento Inercia	<i>N · m · s²</i>
b	Fricción Viscosa	<i>N · m · s</i>
R	Resistencia	Ω
L	Inductancia	<i>Hy</i>
V	Voltaje (Entrada)	<i>Volt</i>

Suponiendo el vector de estados $[\theta \ \omega]^T$ disponible y como el sistema es de estado totalmente controlable, aplicando una tensión según la ley

$$V = -(K_P \theta + K_V \omega), \quad (3)$$

Los polos de lazo cerrado pueden ser ubicados arbitrariamente ajustando las ganancias K_P y K_V .

Al tener un integrador a la salida el sistema puede ser reordenado para seguir una referencia del tipo escalón sin error de régimen como se muestra en la Fig. 2.

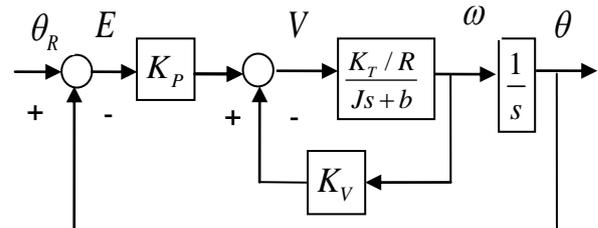


Figura 2: Realimentación de estados para seguimiento.

2. PLANTEO DEL PROBLEMA

El sistema lineal de la Fig. 2. con la ley de control (3) cumplirá las especificaciones si el modelado es exacto, pero la presencia de incertidumbre paramétrica deteriorará el desempeño del control. Altas ganancias del controlador permiten minimizar el efecto de la incertidumbre pero generan grandes esfuerzos de control y en un sistema real hay limitaciones técnicas que conducen a la saturación de los actuadores.

En el caso de un motor eléctrico por razones de eficiencia las tensiones que actúan sobre los bobinados no son continuas de amplitud variable, sino son ondas cuadradas de amplitud fija V_{DC} y alta frecuencia f_p del orden de decenas de KHz, en las cuales se controla su ciclo de trabajo de forma que su valor medio sea proporcional a la tensión continua equivalente deseada. Si el período $1/f_p$ es varios órdenes de magnitud menor respecto de la constante de tiempo eléctrica L/R , los armónicos de corriente circulantes, que a su vez producen pulsaciones de torque, son bajos y puede considerarse que el torque es proporcional a la salida del controlador y prácticamente exento de ripple.

Si el motor parte del reposo o se encuentra girando en sentido contrario a la referencia deseada se produce una corriente excesiva, ya que la f.c.e.m. es nula o bien del mismo signo que la tensión aplicada y además al ser grande el error y por ende la salida del controlador un valor absoluto máximo de tensión quedaría aplicado al motor por un tiempo considerable, siendo la corriente solo limitada después de algunos ciclos por la resistencia parásita de bobinado. Para evitarlo se puede usar como en la Fig.1, la presencia de una resistencia shunt en serie con la alimentación cuya caída de tensión es proporcional a la corriente, una vez amplificada es comparada con una de consigna y si supera en modulo un valor máximo prefijado I_{MAX} , se recorta el ciclo de trabajo. En los controles vectoriales se utilizan métodos más elaborados [2] pero siempre existe una limitación de corriente, por razones de seguridad.

Esto hace que para errores grandes exista un efecto de saturación del torque disponible y por ende pérdida de capacidad de aceleración, haciendo el sistema fuertemente no lineal, ya que trabaja en 2 modos: a torque variable cuando el error es pequeño y fijo cuando es grande.

3. CONTROLADOR PROPUESTO

En este trabajo se propone un control híbrido que consta de asignación de polos por realimentación de estados seguido de un derivador de orden no entero basado en los lineamientos del Cálculo Fraccional.

3.1 Derivador Fraccional

El Cálculo fraccional permite extender las operaciones de derivación e integración a un orden arbitrario no necesariamente entero y sus fundamentos pueden verse en [3] y [4]. Existen muchas aplicaciones a sistemas de control, varias de ellas resumidas en [5] y [6] y sus referencias.

El operador derivada fraccional denotado como ${}_c D^\alpha (f)$ representa la derivada de orden no entero $0 < \alpha < 1$ y se define como

$${}_c D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau. \quad (4)$$

Siendo ésta definición debida a Caputo [7], y corresponde a la integral fraccional de la derivada entera, teniendo como función de transferencia la función irracional compleja:

$$C_{DF}(s) = s^\alpha \quad (5)$$

Al igual que la acción derivativa entera [8], se utiliza para amortiguar la respuesta transitoria y aumentar la estabilidad relativa, pero en el caso no entero el efecto puede ponderarse mediante el orden α y además es menos sensible a ruidos y perturbaciones de alta frecuencia.

En el plano complejo curva el lugar de raíces hacia la izquierda actuando como un pseudo cero cuya contribución de argumento varía según el exponente α , descomponiendo la variable compleja en módulo y fase por la propiedad de la exponencial

$$s = r e^{j\theta} \Rightarrow s^\alpha = r^\alpha e^{j\alpha\theta} \quad (6)$$

Las condiciones de módulo (7) y argumento (8) de las raíces de lazo cerrado para un proceso genérico con función de transferencia $G(s)$ en serie con el derivador fraccional resultan:

$$|s^\alpha G(s)| = r^\alpha |G(s)| = 1, \quad (7)$$

$$\arg[s^\alpha G(s)] = \arg[G(s)] + \alpha\theta = (2k+1)\pi \quad (8)$$

La contribución de ángulo del derivador fraccional es $\varphi_{DF} = \alpha\theta$, entonces al aumentar α mejora la estabilidad relativa, pero como contrapartida hace más lenta la respuesta transitoria.

Visto en el dominio de la frecuencia (Bode) aporta una pendiente de módulo de 20α decibels por década y una fase positiva de 90α grados.

3.1.1 Implementación del controlador Fraccional

Existen muchas formas de implementar el controlador de la Ec. 5 en forma digital, para ello hay que tener en cuenta el método de conversión de tiempo continuo a discreto, la forma de expansión y el grado de truncado de la función irracional resultante, una discusión de métodos puede verse en [9] y [10].

En este trabajo se utiliza una realización digital de orden $\alpha = 1/4$ con un periodo de muestreo de $T = 0.01$ seg. Método de conversión por diferencia regresivas de segundo orden, aproximación por fracciones continuadas y grado de truncado 8, obtenido mediante la librería Ninteger [10] para Matlab y modificado para obtener ganancia en continua unitaria, resultando la siguiente función de transferencia

$$C_{DF}(z) = \frac{3.162 - 6.731z^{-1} + 4.724z^{-2} - 1.215z^{-3} + 0.08581z^{-4}}{1 - 1.795z^{-1} + 0.9787z^{-2} - 0.1611z^{-3} + 0.00389z^{-4}}, \quad (9)$$

la cual es de cuarto orden y fácilmente realizable como filtro recursivo IIR. Su forma factorizada es

$$C_{DF}(z) = \frac{(z - 0.9504)(z - 0.7050)(z - 0.3610)(z - 0.1122)}{(z - 0.9061)(z - 0.6218)(z - 0.2383)(z - 0.0290)}. \quad (10)$$

3.1.2 Análisis del controlador Fraccional Digital

La Fig. 3 muestra la respuesta al escalón versus la teórica que según [7] está dada por $t^{-1/4} / \Gamma(1/4)$, la Fig. 4 el mapa de polos y ceros y la Fig. 5 la respuesta en frecuencia.

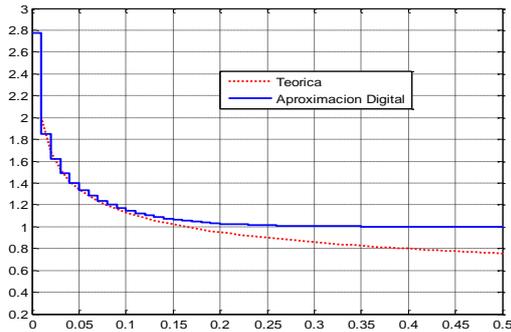


Figura 3: Respuestas al escalón de la aproximación digital y teórica

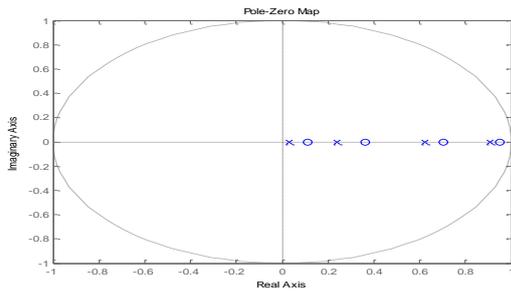


Figura 4: Mapa de polo y ceros

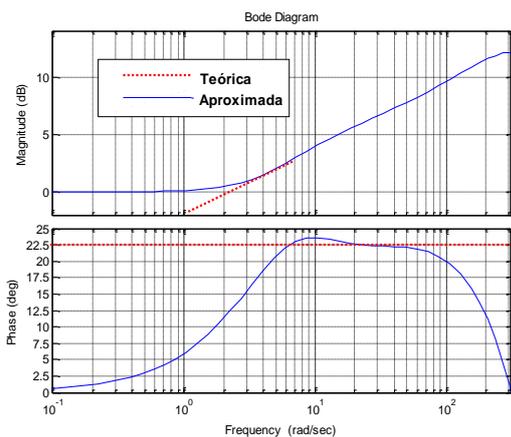


Figura 5: Respuesta en frecuencia (Bode) del controlador digital y teórica.

Analizando la implementación surge que consta de polos y ceros alternados en el eje real positivo, es estable, de fase mínima y respuesta suave.

Tiene ganancia estática unitaria (0dB) y aporta

adelanto de fase de forma bastante plana en frecuencias altas, hasta valores cercanos a la de muestreo.

En base a lo anterior es razonable pensar que puede actuar en serie sin cambiar el comportamiento estático y aportar fase en altas frecuencias y por ende sustituir con éxito a un controlador de adelanto, de hecho puede verse en la Ec. 10 y en la Fig. 4, como una sucesión de adelantadores superpuestos en frecuencias logáritmicamente espaciadas.

3.2 Diseño del controlador de realimentación de estados

Sea la planta definida en la Ec. 1 con los parámetros de la tabla 2 y sujeta a especificaciones tales que el tiempo de establecimiento al 2% (t_{ss}) sea de 2 segundos sin sobrepaso, ello puede satisfacerse con la siguiente asignación de polos en el plano s

$$p_1 = -1.6 \quad p_2 = -10. \quad (11)$$

El controlador obtenido para dicha asignación siendo $e(t)$ el error de posición angular es

$$V(t) = 30e(t) - 15\omega(t). \quad (12)$$

3.3 Controlador Híbrido

La estrategia de control propuesta para aumentar la robustez, siguiendo un lineamiento similar al establecido en [11], para una planta genérica similar e introduciendo ciertas variantes estructurales y de diseño, consiste en insertar en serie a la salida del controlador de la Ec. 12 el controlador fraccional derivativo de orden $1/4$ de la Ec 9 como se muestra en la Fig. 5. Dicho orden fue obtenido experimentalmente y representa un grado de compromiso entre aumento de robustez versus distorsión de la respuesta original, quedando la nueva ley de control híbrida como:

$$V(t) = {}_C D^{1/4} [30e(t) - 15\omega(t)] \quad (13)$$

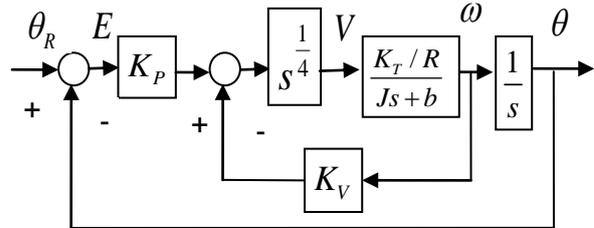


Figura 5 : Esquema de control propuesto

Tabla 2: Parámetros del motor y tolerancias

Par	Descripción	Valor
R	Resistencia	$0.55 \pm 10\% \Omega$
L	Inductancia	$0.96 \pm 10\% mH$
K_T	Constante f.e.m.	$16 \pm 10\% V / Krpm$
K_T	Constante torque	$71 \pm 10\% N \cdot mm / A$
J	Momento inercia	$150 \pm 50\% N \cdot mm \cdot Sec^2$
B	Fricción	$25 \pm 20\% N \cdot mm \cdot Sec$
V	Tensión nominal	48V
T	Torque nominal	$636 N \cdot mm$
n	Velocidad	3000rpm

4. RESULTADOS SIMULACION

El sistema fue simulado comparativamente para ambos controladores: el entero (12) y el híbrido (13) con el derivador fraccional digital (9), usando Matlab – Simulink, teniendo en cuenta los efectos de tensión finita de alimentación (24 V) y de limitación de corriente (9 A) que es la que el motor soporta en estado permanente. La simulación fue hecha para dos escalones de amplitud de 180 y 360 grados y en 2 situaciones de valores de los parámetros: el caso nominal (A) y el peor caso de sobrepaso y tiempo de establecimiento (B).

La denominación corriente: demandada es la que circularía por el motor si no actuara la limitación y es proporcional a la salida del controlador.

4.1 Caso nominal (A)

En este caso se suponen los valores exactos en los parámetros, con lo cual el modelo concuerda con el sistema. La respuesta ante un escalón de 180 grados puede verse en la Fig. 5, donde se nota que ambos controladores tienen similares respuestas sin sobrepaso y un t_{ss} de 2.2 segundos, levemente mayor de lo solicitado, ello es debido a la limitación inicial de la corriente y torque en el arranque, lo cual puede verse en la Fig. 6. ya que en el inicio el controlador demandaría aproximadamente 42 A, pero el limitador recorta a 9 A.

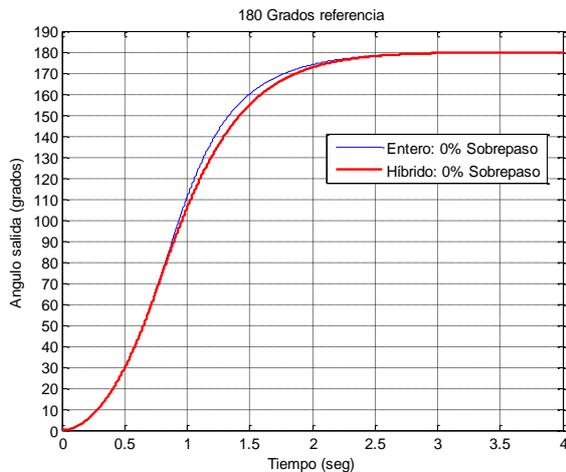


Figura 5: Respuestas para 180 grados de referencia en el caso A.

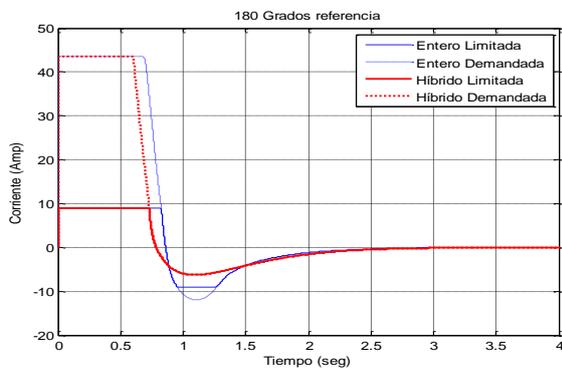


Figura 6: Corrientes reales y demandadas en el motor para 180 grados de referencia en el caso A.

La respuesta para 360 grados puede verse en la Fig. 7, aquí el controlador entero presenta un sobrepaso de 4.8 % y un t_{ss} de 3 segundos contra 0 % y 2.6 segundo del híbrido. Se observa en la Fig. 8 que hay una zona de saturación negativa de la corriente, la cual dura el doble en el caso entero, es decir el controlador híbrido trabaja más tiempo en la zona lineal y su acción de control es más moderada.

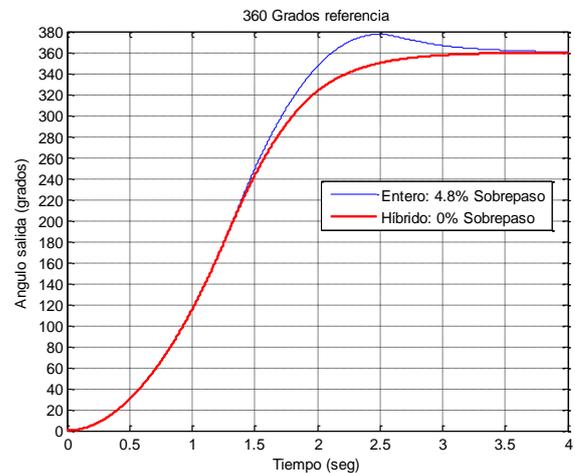


Figura 7: Salida para 360 grados de referencia en el caso A.

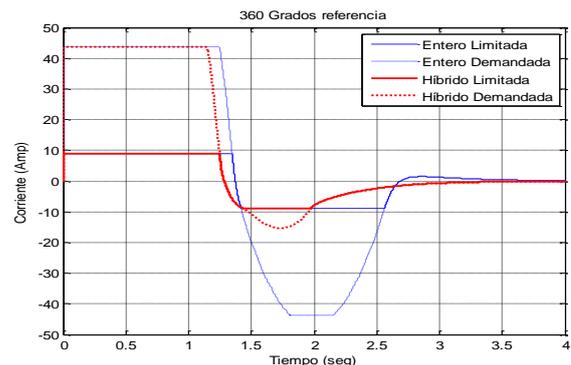


Figura 8: Corrientes reales y demandadas en el motor para 360 grados de referencia en el caso A.

4.2 Peor caso de sobrepaso y t_{ss} (B)

Este caso se daría cuando el momento de Inercia es máximo: $J=225$, y la constante de cupla y rozamiento mínimos, $K_T=64$ y $b=12.5$, dentro de las tolerancias especificadas en la tabla 2.

Aquí aumenta la constante de tiempo J/b y a su vez disminuye la ganancia estática K_T/b , siendo el sistema de lazo abierto más lento en responder, por lo que las alinealidades cobran más importancia.

En la Fig. 9 se observan las respuestas para un escalón de 180 grados de referencia, resultando un sobrepaso para el controlador entero de 5.6 % y para el híbrido de 0.13 %, los tiempos de establecimiento son 2.8 y 2.1 segundos respectivamente.

En la Fig. 10 se muestran las corrientes, resultando un gran efecto de saturación negativa para el controlador entero, mientras que para el híbrido es mucho menor.

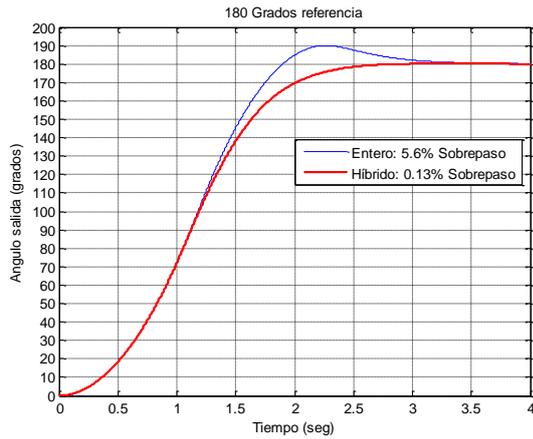


Figure 9: Respuestas para 180 grados de referencia en el caso B.

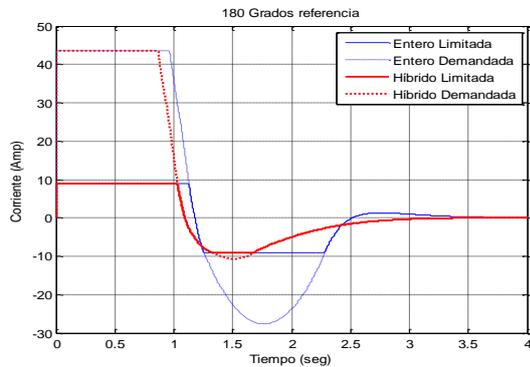


Figure 10: Corrientes reales y demandadas en el motor para 180 grados de referencia en el caso B.

En la Fig. 11 se observan las respuestas para 360 grados, aquí se manifiesta mucho más el efecto de la saturación negativa, debido a que es mayor la energía cinética acumulada en la parte inercial cuando se produce el pico de velocidad, resultando un sobrepasso para el controlador entero de 21 % y para el fraccional de 11%, los *t_{ss}* son 4.8 y 4.3 segundos respectivamente.

En la Fig. 11 se muestran las corrientes, donde se nota que la duración del efecto de saturación negativa es mucho mayor para el caso entero.

Tabla 3: Sobrepassos (%)

Caso	Referencia	Entero	Híbrido	Diferencia
A	180	0	0	0
A	360	4.8	0	4.8
B	180	5.6	0.13	5.47
B	360	21	11	10

Tabla 4: Tiempo de establecimiento 2 % [seg.].

Caso	Referencia	Entero	Híbrido	Diferencia
A	180	2.2	2,2	0
A	360	3	2.6	0.4
B	180	2.8	2.3	0.5
B	360	4.8	4.3	0.5

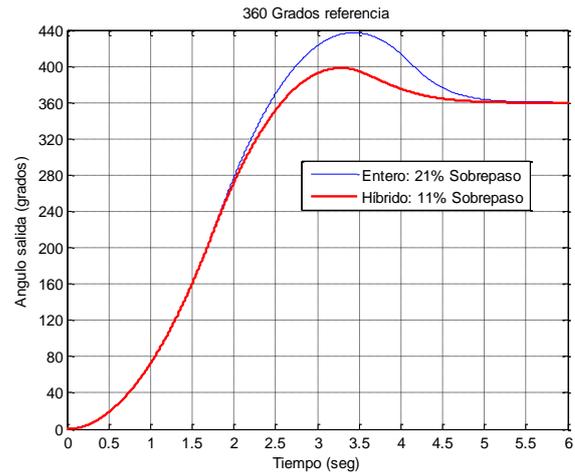


Figura 12: Respuestas para 360 grados de referencia en el caso B.

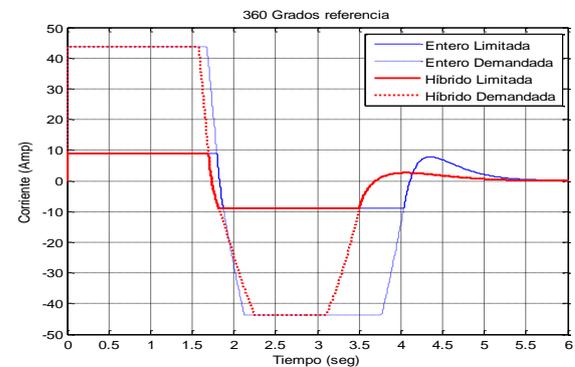


Figura 13: Corrientes reales y demandadas en el motor para 360 grados de referencia en el caso B.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado el diseño y validación por simulación de un controlador derivativo fraccional de orden $\frac{1}{4}$ con el objetivo de aumentar la robustez del control de posición de un servomotor frente a cambios en sus parámetros electromecánicos y ante la presencia de una fuerte alinealidad como saturación en la corriente y por ende en el torque de comando.

La estrategia propuesta consistió en implementar un controlador convencional por realimentación de las variables de estado, seguido de un derivador fraccional en serie con el mismo y de ganancia estática unitaria.

El controlador fraccional es fácilmente realizable en forma digital en tiempo real como filtro IIR al tener una cantidad moderada de 10 coeficientes según se muestra en la Ec. 9 y un tiempo de muestreo razonable fijado en $T = 0.01$ seg. el cual fue seleccionado para ser, por un lado mucho menor que el tiempo de respuesta deseado y a su vez no tan bajo para que las operaciones matemáticas involucradas puedan ser llevadas a cabo en un tiempo sustancialmente menor al mismo en un procesador y además ser compatible con el sensado electrónico de las variables.

En base a los resultados de la simulación resumidos en las tablas 3 y 4 puede apreciarse el mejor desempeño del controlador propuesto en cuanto a sobrepasso y

tiempo de establecimiento frente a variaciones en los parámetros y para distintas referencias.

Además, el sistema propuesto tiene un mejor comportamiento ante la saturación de torque impuesta por el limitador de corriente.

Como conclusión final puede decirse que el uso del controlador derivativo fraccional mejora el comportamiento del sistema haciéndolo más robusto sin incrementar de modo significativo la complejidad de diseño ni realización.

Si bien sólo se ha validado el controlador por simulación y con simplificaciones, está previsto implementar el sistema real. Se dispone hasta el momento de un motor, fuente de alimentación de potencia, inversor, driver opto acoplado y un generador de PWM basado en un microprocesador PIC, el cual funciona a lazo abierto y fue realizado como trabajo final de la carrera de Ing. Electrónica de la F.C.E.F.yN. de la Universidad Nacional de Córdoba y puede verse en la Fig. 14.

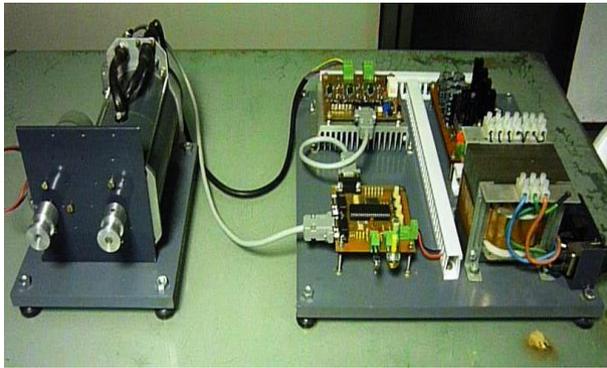


Figura 14: Prototipo experimental en construcción

REFERENCIAS

- [1] B. Bose, *Modern Power Electronic and AC Drives*, Pearson Education, Asia, 2002.
- [2] N. Mohan, *Advanced Electric Drives*, , New York, 2014.
- [3] K. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York, 1974.
- [4] K. S. Miller, B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, John Wiley & Sons New York. 1993.
- [5] Y.Q. Chen, I. Petras. D. Xue. "Fractional Order Control. A Tutorial", *American Control Conference*, 2009.
- [6] D. Shantanu. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Control*. Springer, Verlag, 2002.
- [7] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Pres, Sap Diego CA , 1999.
- [8] B. Vinagre. *Modelado y Control de Sistemas Dinámicos Caracterizados por Ecuaciones Integro*

Diferenciales de Orden Fraccionario. Tesis Doctoral UPM. 2001.

- [9] B. Vinagre, Y. Q. Chen, "Some approximation of fractional order operators use in control theory and application", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2000.
- [10] D. Valério, J. Da Costa, *Ninteger v.2.3 fractional Control toolbox for Matlab*. Universidad Técnica de Lisboa, 2005.
- [11] S. Laboret, C. Rodríguez Rivero, J. Pucheta, V. Sauchelli. "Robust Fractional Digital Control of a First Order plus Integrator Process". *Proc. of the 2012 Ninth Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference*, IEEE Mexico 2012, pág. 225 - 230.