



Universidad  
Nacional  
de Córdoba



FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

# Doctorado en Ciencias de la Ingeniería

## Tesis Doctoral

### **UNA HERRAMIENTA DE CO-SIMULACIÓN PARA EL ESTUDIO DE COSECHADORES PIEZOAEROELÁSTICOS DE ENERGÍA BASADOS EN FLUTTER**

Autor: **Ing. Emmanuel Beltramo**

Director: **Dr. Sergio Preidikman**

Junio 2023

# UNA HERRAMIENTA DE CO-SIMULACIÓN PARA EL ESTUDIO DE COSECHADORES PIEZOAEROELÁSTICOS DE ENERGÍA BASADOS EN FLUTTER

por Ing. Emmanuel Beltramo

Director

Dr. Sergio Preidikman- FCEFyN, UNC

Comisión Asesora

Dr. José Stuardi - FCEFyN, UNC

Dr. Marcelo Valdez - INENECO-CONICET-Salta

Esta Tesis fue enviada a la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba como requisito parcial para la obtención del grado académico de Doctor en Ciencias de la Ingeniería.

Córdoba, Argentina  
Junio, 2023



Universidad  
Nacional  
de Córdoba



FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES



### ACTA DE EXAMEN

Libro: E2023 Acta: 00052 Hoja 01/01  
LLAMADO: Llamado del Turno P10-(T209)\_TESIS 21/06/2023  
CATEDRA - MESA: 21-06-23 BELTRAMO EMMANUEL

(P10-DI002) TESIS DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA

NÚMERO	APELLIDO Y NOMBRE	DOCUMENTO	INGR.	COND.	NOTA	FIRMA
34338165	BELTRAMO, EMMANUEL	DNI 34338165	2017		A (Aprobado)	

CEBALLOS, MARCELO ALEJANDRO - MACHADO, SEBASTIAN PABLO - RIOS RODRIGUEZ, Gustavo Adolfo - STORTI,  
Observaciones:

Córdoba, \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_-.

Certifico que la/s firma/s que ha/n sido puesta/s en la presente Acta pertenece/n a: \_\_\_\_\_

1	0	1	0	1
Inscriptos	Ausentes	Examinados	Reprobados (0-3)	Aprobados (4-10)

21/06/2023 19.40.50

*Dedicado a mi abuelo Miguel*

## Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al director de esta tesis, Dr. Sergio Preidikman, por abrirme las puertas, por permitirme trabajar junto a usted, por ser un excelente profesor, por guiarme y ayudarme a lo largo de estos años.

A a mi Comisión Asesora, Dr. José Stuardi y Dr. Marcelo Valdéz, por sus consejos y sus contribuciones durante esta etapa de formación.

Al Dr. Bruno Roccia un agradecimiento especial por su aporte en este último tiempo.

A mis compañeros y amigos de estudio, Martín Pérez Segura, Santiago Ribero, Adriano Trono, Franco Soffietti y Agustina Aichino, con quienes hemos transitado este camino.

Agradezco a la carrera de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería y al Departamento Estructuras de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba, así como también al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, cuyo soporte económico hizo factible este trabajo.

Quiero agradecer enormemente a mi familia, en especial a mi mamá y a mi papá, por apoyarme en cada una de mis decisiones, por darme la posibilidad de formarme tanto a nivel personal como profesional y por permitirme alcanzar mis sueños. A mi hermana Brenda y a mi abuela Gloria.

Finalmente, agradezco profundamente a Sofía, la persona que estuvo a mi lado acompañándome desde el primer momento; su apoyo incondicional ha sido sumamente importante a lo largo de estos años.

---

## Una Herramienta de Co-Simulación para el Estudio de Cosechadores Piezoaeroelásticos de Energía basados en Flutter

### RESUMEN

El término cosecha piezoaeroelástica de energía se refiere al proceso de conversión de la energía eólica que rodea a un sistema en electricidad a través del uso de transductores piezoeléctricos. Es bien conocido que una estructura flexible inmersa en una corriente de aire puede experimentar respuestas no lineales de origen aeroelástico, tales como bifurcaciones y/o oscilaciones de ciclo límite asociadas al fenómeno de *flutter*. Respuestas de esta naturaleza han sido catalogadas como potencialmente destructivas en estructuras de gran envergadura debido a sus elevados niveles de vibración. Sin embargo, desde un nuevo enfoque han sido propuestas como una de las fuentes de energía más prometedoras para sistemas de pequeña escala. En este sentido, si el dispositivo de cosecha de energía o su estructura portante se sumergen en una corriente de aire las cargas aerodinámicas actuantes inducen deformaciones sobre los transductores que, debido al efecto piezoeléctrico directo, producen una diferencia de potencial entre sus electrodos. Para cuantificar la energía eléctrica recolectada es habitual conectar un circuito eléctrico entre dichos electrodos.

En esta tesis doctoral se desarrolla una herramienta computacional bajo un abordaje de co-simulación que está destinada a la realización de simulaciones numéricas para el estudio de cosechadores piezoeléctricos de energía sujetos a vibraciones de origen aeroelástico, especialmente, aquellas que provienen del fenómeno *flutter*. Dada la naturaleza multifísica del problema, se desarrolla un modelo electroelástico, se adopta un modelo aerodinámico y se desarrolla un método de interacción que favorezca el intercambio de información entre los dos primeros. Cada modelo constituye un módulo independiente dentro del software, lo que propicia su modificación o la incorporación de otros. El modelo electroelástico consiste en una formulación tridimensional de elementos finitos de viga piezoeléctrica que se sustenta en las hipótesis de la teoría clásica de Timoshenko e incorpora, de modo consistente, las no linealidades geométricas de Von Kármán para contemplar deformaciones moderadas. El modelo aerodinámico adoptado es una versión no lineal e inestacionaria del método de la red de vórtices, el cual se basa en distribución de singularidades sobre superficies sólidas, considera flujo incompresible y levemente viscoso a elevado número de Reynolds. El método de interacción implementado se caracteriza como fuerte. Esto obedece a que, a pesar de que cada modelo avanza en el dominio temporal con un paso de integración propio, la transferencia de información entre los modelos previos es bidireccional y tiene lugar en cada uno de estos pasos. Los modelos involucrados permiten captar fenómenos electroaeroelásticos subcríticos, así como comportamientos críticos y poscríticos típicos de la dinámica no lineal. Las ecuaciones de gobierno se integran numéricamente, simultáneamente e interactivamente en el dominio del tiempo empleando un esquema que se basa en un método predictor-corrector de cuarto orden. Finalmente, se presentan casos de estudio para validar y/o verificar la herramienta, como también mostrar su potencialidad y versatilidad.

## A Co-Simulation Tool to Assess Piezoaeroelastic Energy Harvesters based on Flutter

### ABSTRACT

The term piezoaeroelastic energy harvesting refers to the process of converting the wind energy that surrounds a system into electricity by means of piezoelectric transducers. It is well-known that a flexible structure immersed in an airflow may undergo different non-linear aeroelastic responses, such as limit cycle oscillations and/or bifurcations related to the flutter phenomenon. Researchers have worked on avoiding these types of responses in large scale systems to suppress possible failure or damage. However, a new approach has emerged recently and these aeroelastic vibrations have been proposed as one of the most promising power sources for small scale systems. When the harvester device or its host structure is placed in a flow field, the acting aerodynamics loads induce deformations on the transducers. Consequently, an electric potential difference between their electrodes is developed due to the direct piezoelectric effect. Usually, an electric circuit is connected between the electrodes to quantify the energy power.

In this work, a computational tool for studying piezoelectric energy harvesters subjected to aeroelastic vibrations based on flutter phenomenon is developed under a co-simulation approach. The multi-physics nature of the problem requires an electroelastic and an aerodynamic model combined by an interaction method. Each model constitutes a module into the software, which favors the software maintenance and reduces the reprogramming workload for modifications or the addition of further modules if needed. The electroelastic model consists on a three-dimensional formulation of a piezoelectric beam finite element according to Timoshenko's classic theory hypotheses. It consistently includes the Von Kármán's geometric nonlinearities to represent moderate strains. The aerodynamic model is based on a nonlinear and unsteady version of the vortex lattice method and it assumes incompressible and slightly viscous flow at high Reynolds number. Despite the fact that the interaction method allows one to use different time step for both models, it is characterized as strong-type since the communication between models is performed bidirectionally and it occurs in each one of these steps. The proposed models allow to capture subcritical electroaeroelastic phenomena as well as critical and postcritical behaviors which are typical of nonlinear dynamic. The integration of the governing equations is accomplished interactively, simultaneously, and numerically in the time domain using a scheme based on the fourth order predictor-corrector method. In order to validate and/or verificate the computational tool as well as to exhibit its potentiality and versatility a series of study cases are evaluated.

---

**Uma Ferramenta de Co-simulação para o Estudo de Coletores de Energia  
Piezoaeroelásticos baseados em Flutter**

**RESUMO**

O termo colheita de energia piezoaeroelástica refere-se ao processo de conversão de energia eólica em torno de um sistema em eletricidade através do uso de transdutores piezoelétricos. É bem conhecido que uma estrutura flexível imersa em uma corrente de ar pode experimentar diversas respostas de origem aeroelástica, como oscilações de ciclo limite e/ou bifurcações associadas ao fenômeno *flutter*. Respostas dessa natureza têm sido classificadas como altamente destrutivas em grandes estruturas devido aos seus altos níveis de vibração. No entanto, a partir de uma nova abordagem, eles foram propostos como uma das fontes de energia mais promissoras para sistemas de pequena escala. Nesse sentido, se o dispositivo de captação de energia ou sua estrutura de suporte for submerso em uma corrente de ar, as cargas aerodinâmicas que atuam sobre eles induzem deformações nos transdutores que, devido ao efeito piezoelétrico direto, produzem uma diferença de potencial entre seus eletrodos. Para quantificar a energia elétrica coletada é comum conectar um circuito elétrico entre tais eletrodos.

Nesta tese, é criada uma ferramenta computacional sob uma abordagem de co-simulação que se destina a realizar simulações numéricas para estudar coletores de energia piezoelétricos sujeitos a vibrações de origem aeroelástica, especialmente aquelas provenientes do fenômeno *flutter*. Dada a natureza multifísica do problema, desenvolve-se um modelo eletroelástico, adota-se um modelo aerodinâmico e desenvolve-se um modelo de interação para troca de informações entre os dois primeiros. Cada modelo constitui um módulo independente dentro do software, o que favorece sua modificação ou incorporação de outros. O modelo eletroelástico consiste em uma formulação de elemento finito de feixe piezoelétrico tridimensional que se baseia nas hipóteses da teoria clássica de Timoshenko e incorpora consistentemente não linearidades geométricas de Von Kármán para contemplar deformações moderadas. O modelo aerodinâmico adotado é uma versão não linear e instável do método da rede de vórtices. Este método é baseado na distribuição de singularidades em superfícies sólidas, considerando escoamentos incompressíveis e levemente viscosos com alto número de Reynolds. O modelo de interação implementado caracteriza-se como forte. Isso porque, apesar de cada modelo avançar no domínio temporal com sua própria etapa de integração, a transferência de informações entre os modelos anteriores é bidirecional e ocorre em cada uma dessas etapas. Os modelos envolvidos permitem captar fenômenos eletroaeroelásticos subcríticos, bem como comportamentos críticos e pós-críticos típicos da dinâmica não linear. As equações governantes são integradas numericamente, simultaneamente e interativamente no domínio do tempo usando um esquema baseado no método preditor-corretor de quarta ordem. Por fim, é apresentada uma série de estudos de caso que visam validar e/ou verificar a ferramenta, bem como mostrar o seu potencial e versatilidade.

# Índice General

Agradecimientos	i
Resumen	i
Abstract	ii
Resumo	iii
Índice de Tablas	ix
Índice de Figuras	xi
<b>1 Aspectos introductorios</b>	<b>1</b>
1.1 Contexto y motivación . . . . .	1
1.2 Revisión bibliográfica . . . . .	7
1.3 Alcances, objetivos y contribuciones . . . . .	16
1.3.1 Alcances . . . . .	16
1.3.2 Objetivos . . . . .	17
1.3.3 Contribuciones . . . . .	18
1.4 Organización de la tesis . . . . .	19
<b>2 Cinemática del sólido y relaciones constitutivas en piezoelasticidad</b>	<b>21</b>
2.1 Cinemática del sólido . . . . .	21
2.1.1 Hipótesis cinemáticas . . . . .	22
2.1.2 Espacio de configuración . . . . .	22
2.1.3 Campo de desplazamiento . . . . .	25
2.1.3.1 Linealización del tensor de rotación . . . . .	27
2.1.3.2 Linealización del campo de desplazamiento . . . . .	29
2.1.4 Tensor de deformaciones de Green-Lagrange . . . . .	31
2.1.4.1 Tensor de deformaciones de Von Kármán . . . . .	35
2.2 Relaciones constitutivas en piezoelasticidad . . . . .	37
2.2.1 Relaciones constitutivas para material elástico, isótropo y homogéneo . . . . .	37

2.2.2	Relaciones constitutivas para material piezoeléctrico . . . . .	40
2.2.3	Relaciones constitutivas para el modelo de viga . . . . .	44
<b>Apéndices</b>		<b>47</b>
2.A	Obtención del tensor de Green-Lagrange . . . . .	47
<b>3 Aspectos eléctricos del modelo</b>		<b>51</b>
3.1	Descripción de un transductor piezocerámico . . . . .	51
3.1.1	Hipótesis eléctricas . . . . .	53
3.2	Campo eléctrico del $k$ -ésimo transductor . . . . .	54
3.3	Circuito eléctrico para recolectar energía . . . . .	57
3.3.1	Conexión entre transductores piezocerámicos . . . . .	60
3.3.1.1	Transductores en serie . . . . .	60
3.3.1.2	Transductores en paralelo . . . . .	62
3.3.2	Circuito $RLC$ en paralelo . . . . .	63
3.3.2.1	Circuito $RLC$ con transductores en serie . . . . .	64
3.3.2.2	Circuito $RLC$ con transductores en paralelo . . . . .	67
<b>Apéndices</b>		<b>70</b>
3.A	Relaciones constitutivas de los componentes eléctricos pasivos . . . . .	70
3.A.1	Resistor . . . . .	70
3.A.2	Capacitor . . . . .	70
3.A.3	Inductor . . . . .	72
<b>4 Modelo electroelástico</b>		<b>74</b>
4.1	Medidas energéticas . . . . .	74
4.1.1	Energía cinética . . . . .	75
4.1.2	Energía interna . . . . .	75
4.1.3	Energía magnética . . . . .	76
4.1.4	Coenergía eléctrica . . . . .	76
4.2	Variación de las medidas energéticas y trabajo virtual no conservativo . . . . .	78
4.2.1	Variación de la energía cinética . . . . .	79
4.2.2	Variación de la energía interna . . . . .	79
4.2.3	Variación de la energía magnética . . . . .	80
4.2.4	Variación de la coenergía eléctrica . . . . .	80
4.2.5	Trabajo virtual no conservativo . . . . .	81
4.3	Método de elementos finitos . . . . .	85
4.3.1	Discretización espacial . . . . .	86
4.3.2	Esquema de interpolación elemental . . . . .	88
4.3.2.1	Interpolación de los campos cinemáticos fundamentales . . . . .	88

4.3.2.2	Interpolación de la geometría . . . . .	92
4.3.3	Aproximaciones sobre el dominio de un elemento . . . . .	93
4.3.3.1	Campo de desplazamiento . . . . .	93
4.3.3.2	Tensor de deformaciones . . . . .	95
4.3.3.3	Campo eléctrico del $k$ -ésimo transductor . . . . .	95
4.4	Obtención de las ecuaciones de gobierno . . . . .	96
4.4.1	Variación de las medidas energéticas y trabajo virtual no conservativo a nivel elemental . . . . .	96
4.4.1.1	Variación de la energía cinética . . . . .	96
4.4.1.2	Variación de la energía interna . . . . .	97
4.4.1.3	Variación de la coenergía eléctrica . . . . .	100
4.4.1.4	Trabajo virtual no conservativo . . . . .	101
4.4.2	Ecuaciones de movimiento de un elemento finito . . . . .	102
4.4.2.1	Comentarios adicionales . . . . .	104
<b>Apéndices</b>		<b>106</b>
4.A	Principio de Hamilton para sistemas electromecánicos . . . . .	106
4.B	Esquema de interpolación ligada . . . . .	108
4.C	Representación matricial de los campos cinemáticos y del campo eléctrico . . . . .	111
4.C.1	Campo de desplazamiento . . . . .	111
4.C.2	Tensor de deformaciones . . . . .	112
4.C.3	Campo eléctrico del $k$ -ésimo transductor . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Modelo aerodinámico</b>	<b>116</b>
5.1	Generalidades . . . . .	116
5.2	Hipótesis aerodinámicas del modelo . . . . .	118
5.3	Ecuaciones básicas . . . . .	118
5.4	Cinemática del flujo . . . . .	120
5.4.1	Campo de vorticidad . . . . .	120
5.4.1.1	Velocidad inducida por una sábana vorticiosa . . . . .	122
5.4.1.2	Velocidad inducida por un segmento vorticoso . . . . .	123
5.4.2	Campo de velocidad . . . . .	125
5.5	Método de la red de vórtices inestacionario: implementación numérica . . . . .	127
5.5.1	Discretización de las sábanas vorticosas . . . . .	127
5.5.2	Arranque impulsivo y coeficientes de influencia aerodinámicos . . . . .	130
5.5.3	Convección de vorticidad . . . . .	133
5.5.4	Determinación de las cargas aerodinámicas . . . . .	134
5.5.4.1	Cálculo de la discontinuidad tangencial de velocidad $\Delta \mathbf{V}(\mathbf{X}^i, t)$ . . . . .	136
5.5.4.2	Cálculo del término inestacionario . . . . .	138

<b>6 Aspectos de implementación de los modelos</b>	<b>140</b>
6.1 Interacción entre modelos . . . . .	140
6.1.1 Asociación entre un punto de la grilla aerodinámica y un elemento finito de la malla estructural . . . . .	141
6.1.2 Transferencia de desplazamientos y velocidades . . . . .	142
6.1.3 Transferencia de cargas aerodinámicas . . . . .	146
6.2 Implementación numérica . . . . .	148
6.2.1 Modelo electroaeroelástico no lineal . . . . .	148
6.2.2 Modelo electroaeroelástico lineal . . . . .	149
6.2.3 Formulación de primer orden . . . . .	151
6.3 Estrategia de co-simulación . . . . .	152
6.3.1 Esquema de integración numérica . . . . .	155
6.3.1.1 Determinación del paso de tiempo . . . . .	159
6.4 Estimación de la velocidad de <i>flutter</i> . . . . .	161
<b>Apéndices</b>	<b>163</b>
6.A Rotación de matrices y vectores elementales . . . . .	163
6.B Conexión eléctrica entre transductores . . . . .	165
<b>7 Resultados numéricos</b>	<b>167</b>
7.1 Validación y verificación del modelo . . . . .	168
7.1.1 Caso 1: Estructura de vigas en forma de L . . . . .	168
7.1.2 Caso 2: Cosechador piezoeléctrico en voladizo . . . . .	173
7.1.3 Caso 3: Ala - UAV . . . . .	182
7.1.4 Caso 4: Cosechador piezoaeroelástico . . . . .	189
7.2 Casos de aplicación . . . . .	201
7.2.1 Caso 5: Cosechador piezoaeroelástico de pequeña escala . . . . .	201
7.2.2 Caso 6: Cosechadores de energía embebidos en una estructura alar . . . . .	213
<b>Apéndices</b>	<b>228</b>
7.A Caso 2: Ala - UAV . . . . .	228
7.A.1 Propiedades elementales . . . . .	228
7.A.2 Resultados adicionales . . . . .	229
7.B Caso 5: Cosechador piezoaeroelástico de pequeña escala . . . . .	231
7.B.1 Resultados adicionales . . . . .	231
7.C Caso 6: Cosechadores de energía embebidos en una estructura alar . . . . .	232
7.C.1 Propiedades elementales . . . . .	232
7.C.2 Resultados adicionales . . . . .	232
<b>8 Aspectos finales</b>	<b>236</b>

8.1	Resumen de desarrollos . . . . .	236
8.2	Conclusiones . . . . .	238
8.3	Trabajos futuros . . . . .	240
8.4	Publicaciones . . . . .	241
<b>A</b>	<b>Representación vectorial y matricial de tensores simétricos</b>	<b>244</b>
A.1	Tensor de segundo orden en notación vectorial . . . . .	244
A.2	Tensor de tercer orden en notación matricial . . . . .	246
A.3	Tensor de cuarto orden en notación matricial . . . . .	248
<b>B</b>	<b>Matrices y vectores elementales</b>	<b>250</b>
B.1	Matriz de masa . . . . .	250
B.2	Matriz de rigidez elástica . . . . .	252
B.3	Matriz de rigidez geométrica . . . . .	253
B.4	Matriz de rigidez inducida lineal . . . . .	254
B.5	Matriz de rigidez inducida no lineal . . . . .	255
B.6	Matriz de rigidez eléctrica inducida . . . . .	256
B.7	Matriz de acoplamiento electromecánico lineal . . . . .	256
B.8	Matriz de acoplamiento electromecánico no lineal . . . . .	256
B.9	Matriz de acoplamiento electromecánico inducido . . . . .	257
B.10	Vector de cargas . . . . .	257
B.11	Nomenclatura . . . . .	258
<b>C</b>	<b>Propiedades mecánicas y eléctricas de los materiales utilizados</b>	<b>259</b>
C.1	Piezocerámicos PZT-5A y PZT-5H . . . . .	259
C.2	Aluminio . . . . .	260
C.3	Cobre . . . . .	260
C.4	Polietileno . . . . .	260
	<b>Bibliografía</b>	<b>261</b>

# Índice de Tablas

Tabla	Página
7.1 Propiedades geométricas de la estructura junto a la magnitud y frecuencia de las fuerzas. . . . .	168
7.2 Parámetros usados en las simulaciones numéricas. . . . .	168
7.3 Evolución de las frecuencias naturales con el número de elementos. . . . .	170
7.4 Diferencia absoluta porcentual entre frecuencias considerando dos discretizaciones consecutivas. . . . .	171
7.5 Propiedades geométricas y másicas del cosechador. . . . .	175
7.6 Parámetros usados en las simulaciones numéricas. . . . .	175
7.7 Propiedades geométricas del ala. . . . .	182
7.8 Parámetros usados en las simulaciones. . . . .	183
7.9 Frecuencias naturales de la estructura alar. . . . .	184
7.10 Parámetros geométricos del ala. . . . .	190
7.11 Parámetros usados en las simulaciones. . . . .	191
7.12 Comparación entre las primeras cinco frecuencias naturales determinadas con la herramienta numérica contra las reportadas en [33]. . . . .	191
7.13 Parámetros geométricos del cosechador piezoaeroelástico. . . . .	202
7.14 Parámetros usados en las simulaciones. . . . .	203
7.15 Frecuencias naturales de la estructura alar. . . . .	204
7.16 Parámetros geométricos de la aeronave. . . . .	213
7.17 Parámetros geométricos que definen la posición de los transductores (PZT-5A) en la sección transversal. . . . .	217
7.18 Parámetros usados en las simulaciones. . . . .	217
7.19 Frecuencias naturales de la estructura alar. . . . .	217
7.A.1 Propiedades mecánicas referidas al sistema de referencia elemental. . . . .	229
7.C.1 Propiedades mecánicas referidas al sistema de referencia elemental $(x_1, x_2, x_3)$ . . . . .	232
B.1 Nomenclatura asociada a cada componente de las matrices y vectores elementales. . . . .	258
C.1 Propiedades tridimensionales para un piezocerámico polarizado en dirección $X_3^k$ . . . . .	259

---

C.2	Propiedades mecánicas de diferentes aleaciones de aluminio. . . . .	260
C.3	Propiedades mecánicas del cobre. . . . .	260
C.4	Propiedades mecánicas del polietileno. . . . .	260

# Índice de Figuras

Figura	Página
1.1 Densidad de potencia en función del voltaje para diferentes fuentes de alimentación regenerativas. Imagen extraída y adaptada de [43]. . . . .	3
1.2 (a) Orientación aleatoria de los dominios antes de la polarización ( $\mathbf{P}_s = 0$ ). (b) Dominios alineados en la dirección positiva del campo eléctrico ( $V_s$ ). (c) Polarización remanente del material ( $\mathbf{P}_s \neq 0$ ). . . . .	5
1.3 Clasificación de las vibraciones inducidas por flujo de fluidos. Imagen extraída y adaptada de [120]. . . . .	7
2.1 Sección transversal de la viga compuesta por $n_t + 1$ subdominios $\mathcal{A}_0^i$ elementales, uno de los cuales está asociado al sustrato elástico y $n_t$ a los transductores piezoeléctricos.	23
2.2 Representación de una viga tridimensional embebida en el espacio euclídeo. Se esquematiza su ubicación en la configuración de referencia $\mathcal{C}_0$ y en la configuración actual $\mathcal{C}$ junto a las diversas entidades vectoriales utilizadas en la descripción del movimiento. . . . .	24
2.3 Sección transversal bajo movimiento de cuerpo rígido ( $\mathcal{A}_0$ ) y sección transversal alabeada por torsión ( $\mathcal{A}$ ) en dirección $\hat{\mathbf{e}}_1$ . . . . .	31
2.4 (a) Lámina piezocerámica polarizada en dirección $X_3^k$ . (b) Lámina piezocerámica polarizada en dirección $X_2^k$ . (c) Lámina piezocerámica polarizada en dirección $X_1^k$ . . . . .	42
3.1 (a) Representación tridimensional del $k$ -ésimo transductor piezocerámico polarizado en dirección $X_3^k$ . (b) Vista frontal del $k$ -ésimo transductor. (c) Vista lateral del $k$ -ésimo transductor. . . . .	52
3.2 Coordenadas del electrodo superior e inferior del transductor piezocerámico. . . . .	56
3.3 Circuito <i>RLC</i> embebido en la sección transversal: conexión en serie entre el conjunto de transductores y conexión en serie o en paralelo entre los componentes eléctricos. . . . .	59
3.4 Circuito <i>RLC</i> embebido en la sección transversal: conexión en paralelo entre el conjunto de transductores y conexión en serie o en paralelo entre los componentes eléctricos. . . . .	59
3.5 Orientación del sistema de referencia $(X_1^i, X_2^i, X_3^i)$ respecto al $(X_1, X_2, X_3)$ . . . . .	60

3.6	(a) Transductores piezocerámicos en serie. (b) Representación equivalente de la conexión en serie en el dominio eléctrico usando una fuente de corriente o una fuente de voltaje junto a un capacitor por cada transductor. . . . .	61
3.7	(a) Transductores piezocerámicos en paralelo. (b) Representación equivalente de la conexión en paralelo en el dominio eléctrico usando una fuente de corriente o una fuente de voltaje junto a un capacitor para cada transductor. . . . .	63
3.8	Circuito <i>RLC</i> en paralelo con los transductores conectados en serie. . . . .	64
3.9	Circuito <i>RLC</i> en paralelo con los transductores conectados en paralelo. . . . .	68
3.A.1	Interpretación gráfica de $W_e(t)$ y de $W_e^*(t)$ para un capacitor cuya relación constitutiva es: (a) no lineal; (b) lineal. . . . .	71
3.A.2	Interpretación gráfica de $W_m(t)$ y de $W_m^*(t)$ para un inductor cuya relación constitutiva es: (a) no lineal; (b) lineal. . . . .	72
4.1	Superficies de contorno de la viga sobre las que actúan las fuerzas de superficie. . .	83
4.2	Discretización del dominio de un cuerpo arbitrario a través de un conjunto de subdominios elementales. . . . .	87
4.3	(a) Malla de elementos finitos utilizada en la discretización de la viga. (b) Elemento finito de viga representado en el dominio físico. . . . .	88
4.4	Grados de libertad nodal: tres desplazamientos y tres giros por nodo. . . . .	91
4.5	Elemento físico y elemento maestro vinculado mediante una transformación afín. .	93
4.B.1	Esquema de interpolación ligada. . . . .	109
5.1	Nomenclatura usada en la ecuación que permite calcular la velocidad inducida por una región vorticiosa. . . . .	121
5.2	Ilustración del concepto de sábana vorticiosa. . . . .	122
5.3	Nomenclatura utilizada en la definición del campo de velocidad inducido por una sábana vorticiosa. . . . .	122
5.4	Nomenclatura usada en la ecuación que permite calcular la velocidad inducida por segmento. . . . .	124
5.5	Magnitud de la velocidad inducida por un segmento vorticoso a medida que nos alejamos de él calculada con: (a) <i>cut-off</i> suavizado, (b) <i>cut-off</i> lineal. . . . .	125
5.6	Representación esquemática de un ala. . . . .	127
5.7	Discretización de las sábanas vorticosas adheridas y libres. Convención positiva local para la circulación y los nodos aerodinámicos. . . . .	129
5.8	Transformación de circulación de anillo a circulación de segmento. Convención global para la circulación de los segmentos y los nodos aerodinámicos. . . . .	130
5.9	Interpretación gráfica de la velocidad que inducen los segmentos vorticosos del panel $j$ en el punto de control del panel $i$ . . . . .	131

5.10	Influencia de cada parte de la aeronave en la determinación de la matriz de influencia aerodinámica. . . . .	132
5.11	Cálculo de la discontinuidad tangencial de velocidad en el panel aerodinámico $i$ . . . . .	136
5.12	Obtención de la circulación del segmento $k$ del panel aerodinámico $i$ a partir de la vorticidad distribuida $\gamma(\mathbf{X}, t)$ . . . . .	137
5.13	Curva $C(t)$ utilizada en la determinación del término inestacionario del coeficiente de presión. . . . .	138
6.1	Asociación entre un punto de la grilla aerodinámica y un elemento finito de la malla estructural. . . . .	141
6.2	Desplazamiento de un punto interior arbitrario $k$ a partir del desplazamiento y giro del elemento finito $l$ asociado. . . . .	143
6.3	Vinculación de un punto exterior arbitrario $k$ al nodo estructural más cercano del elemento finito $l$ asociado: (a) conexión con el nodo inicial; (b) conexión con el nodo final. . . . .	145
6.4	Transformación de la carga aerodinámica que actúa en el punto de control $k$ a cargas nodales. . . . .	147
6.5	Esquema de co-simulación: acoplamiento entre simuladores. . . . .	155
6.6	Diagrama de flujo del Simulador 1 y del Simulador 2. . . . .	156
6.7	Influencia del paso de tiempo aerodinámico en el tamaño de los paneles de la SVL: (a) Paso de tiempo menor al recomendado; (b) Paso de tiempo recomendado; (c) Paso de tiempo mayor al recomendado. . . . .	160
6.B.1	Conexión eléctrica entre transductores de elementos diferentes. . . . .	166
7.1	Estructura formada por dos vigas dispuestas en forma de L: (a) modelo conceptual; (b) modelo computacional; (c) sección transversal. . . . .	169
7.2	Componentes del vector desplazamiento del nodo A en función del tiempo: (a) en dirección $X_1^G$ ; (b) en dirección $X_2^G$ ; (c) en dirección $X_3^G$ . . . . .	172
7.3	Componentes del vector desplazamiento del nodo A en función del tiempo: (a) en dirección $X_1^G$ ; (b) en dirección $X_2^G$ ; (c) en dirección $X_3^G$ . . . . .	173
7.4	Cosechador de energía en voladizo: (a) modelo físico; (b) discretización por elementos finitos; (c) sección transversal. . . . .	174
7.5	Evolución de las dos primeras frecuencias naturales de la viga sin considerar el circuito eléctrico en función del número de elementos. . . . .	176
7.6	Frecuencia fundamental en función de la resistencia eléctrica. . . . .	176
7.7	Componentes del vector desplazamiento del nodo A en función del tiempo para $R = 1$ [k $\Omega$ ] y $f = 45.7$ [Hz]. . . . .	177
7.8	Componentes del vector desplazamiento del nodo A en función del tiempo para $R = 470$ [k $\Omega$ ] y $f = 48.2$ [Hz]. . . . .	177

7.9	Componente $\dot{U}_3(t)$ del vector velocidad del nodo A en función del tiempo para $R = 1$ [k $\Omega$ ] - $f = 45.7$ [Hz] y para $R = 470$ [k $\Omega$ ] - $f = 48.2$ [Hz]. . . . .	178
7.10	Voltaje $\varphi_1(t)$ en función del tiempo para $R = 1$ [k $\Omega$ ] - $f = 45.7$ [Hz] y para $R = 470$ [k $\Omega$ ] - $f = 48.2$ [Hz]. . . . .	178
7.11	Potencia $P(t)$ en función del tiempo para $R = 1$ [k $\Omega$ ] - $f = 45.7$ [Hz] y para $R = 470$ [k $\Omega$ ] - $f = 48.2$ [Hz]. . . . .	179
7.12	Representación esquemática de un ala altamente flexible: (a) Modelo conceptual tridimensional; (b) Sección transversal; (c) Vista en planta y lateral. . . . .	182
7.13	Modelo computacional del ala: grilla aerodinámica y malla de elementos finitos. . .	184
7.14	Diagramas de bifurcación para las variables cinemáticas $u_3(t)$ y $\theta_2(t)$ . . . . .	185
7.15	Diagramas de fase de las variables cinemáticas $u_3(t)$ y $\theta_2(t)$ para dos velocidades de corriente libre: (a) 132 [m/s] y (b) 135.5 [m/s]. . . . .	186
7.16	Diagramas de fase de las variables cinemáticas $u_3(t)$ y $\theta_2(t)$ para una velocidad de corriente libre igual a 140 [m/s]. . . . .	187
7.17	Configuración deformada del ala para tres velocidades de corriente libre: (a) 132 [m/s]; (b) 135.5 [m/s] y (c) 140 [m/s]. . . . .	188
7.18	Cosechador piezoeléctrico embebido en una estructura alar: (a) visualización tridimensional; (b) Sección transversal. . . . .	189
7.19	Modelo computacional de la estructura alar: malla de elementos finitos y grilla aerodinámica. . . . .	190
7.20	Primeras cinco formas modales de la estructura alar. . . . .	192
7.21	Diagramas de fase para una velocidad $\ \mathbf{V}_\infty\  = 20$ [m/s]: (a) coordenada modal $q_1(t)$ ; (b) coordenada modal $q_2(t)$ ; (c) coordenada modal $q_3(t)$ ; (d) coordenada modal $q_4(t)$ ; (e) coordenada modal $q_5(t)$ . . . . .	193
7.22	Diagramas de fase para una velocidad $\ \mathbf{V}_\infty\  = 35$ [m/s]: (a) coordenada modal $q_1(t)$ ; (b) coordenada modal $q_2(t)$ ; (c) coordenada modal $q_3(t)$ ; (d) coordenada modal $q_4(t)$ ; (e) coordenada modal $q_5(t)$ ; (f) ampliación ciclo límite asociado a $q_5(t)$ . . . .	194
7.23	Diagramas de fase para una velocidad $\ \mathbf{V}_\infty\  = 41.55$ [m/s]: (a) coordenada modal $q_1(t)$ ; (b) coordenada modal $q_2(t)$ ; (c) coordenada modal $q_3(t)$ ; (d) coordenada modal $q_4(t)$ ; (e) coordenada modal $q_5(t)$ . . . . .	195
7.24	FFT de las coordenadas modales normalizadas para $\ \mathbf{V}_\infty\  = 20$ [m/s]. . . . .	196
7.25	FFT de las coordenadas modales normalizadas para $\ \mathbf{V}_\infty\  = 35$ [m/s]. . . . .	196
7.26	FFT de las coordenadas modales normalizadas para $\ \mathbf{V}_\infty\  = 41.55$ [m/s]. . . . .	197
7.27	Diagrama de bifurcación para: (a) la componente $u_3(t)$ del desplazamiento de la puntera y (b) el potencial $\varphi_1(t)$ . . . . .	197
7.28	Diagramas de fase de las variables $u_3(t)$ y $\varphi_1(t)$ para : (a) $\ \mathbf{V}_\infty\  = 42$ [m/s] y (b) $\ \mathbf{V}_\infty\  = 43$ [m/s] considerando en ambos casos $R = 1$ [k $\Omega$ ]. . . . .	198

7.29 Evolución temporal del (a) voltaje $\varphi_1(t)$ y (b) de la potencia eléctrica instantánea $P(t)$ para cuatro valores de resistencia eléctrica cuando $\ \mathbf{V}_\infty\  = 41.55$ [m/s]. . . . .	199
7.30 Distribución del coeficiente de presión sobre el ala cuando $\ \mathbf{V}_\infty\  = 44$ [m/s] y $R = 1$ [k $\Omega$ ]. . . . .	199
7.31 Cosechador piezoaeroelástico de energía: (a) idealización tridimensional; (b) Sección transversal. . . . .	202
7.32 Modelo computacional del cosechador: malla de elementos finitos y grilla aerodinámica.	203
7.33 (a) Diagrama de fase para $u_3(t)$ y $\theta_2(t)$ cuando $\ \mathbf{V}_\infty\  = 28$ [m/s]; (b) Diagrama de fase para $u_3(t)$ y $\theta_2(t)$ cuando $\ \mathbf{V}_\infty\  = 28.75$ [m/s]; (c) FFT aplicada sobre $u_3(t)$ y $\theta_2(t)$ para $\ \mathbf{V}_\infty\  = 28.75$ [m/s]. . . . .	205
7.34 Diagrama de bifurcación para las variables: (a) desplazamiento $u_3(t)$ ; giro $\theta_2(t)$ y (c) potencial eléctrico $\varphi_1(t)$ . . . . .	206
7.35 Diagrama de fase para el desplazamiento $u_3(t)$ y el giro $\theta_2(t)$ considerando tres velocidades del aire diferentes. . . . .	207
7.36 Diagrama de fase para el potencial $\varphi_1(t)$ considerando tres velocidades del aire diferentes. . . . .	208
7.37 Voltaje RMS y potencia media en función de la resistencia para: (a) y (b) $L = 156.3$ [H], $\ \mathbf{V}_\infty\  = 32$ [m/s] y $\ \mathbf{V}_\infty\  = 33$ [m/s]; (c) y (d) $L = 0$ [H], $\ \mathbf{V}_\infty\  = 32$ [m/s] y $\ \mathbf{V}_\infty\  = 33$ [m/s]. . . . .	209
7.38 Amplitud del desplazamiento $u_3(t)$ para: (a) $L = 156.3$ [H], $\ \mathbf{V}_\infty\  = 32$ [m/s] y $\ \mathbf{V}_\infty\  = 33$ [m/s]; (b) $L = 0$ [H], $\ \mathbf{V}_\infty\  = 32$ [m/s] y $\ \mathbf{V}_\infty\  = 33$ [m/s]. . . . .	210
7.39 (a) FFT aplicada sobre $u_3(t)$ y (b) respuesta en régimen de $u_3(t)$ para diferentes valores de los parámetros eléctricos. . . . .	210
7.40 Distribución del coeficiente de presión sobre el perfil alar para $\ \mathbf{V}_\infty\  = 29.5$ [m/s].	211
7.41 Aeronave tipo planeador: (a) Vista superior y vista lateral; (b) características del perfil alar considerado. . . . .	214
7.42 (a) Modelo numérico del ala izquierda (A1): malla estructural y grilla aerodinámica. (b) Configuración geométrica de los cinco cosechadores de energía. . . . .	216
7.43 Diagramas de bifurcación para: (a) el desplazamiento $u_2^A(t)$ ; (b) el giro $\theta_1^A(t)$ ; (c) el desplazamiento $u_1^B(t)$ y (d) el desplazamiento $u_3^B(t)$ . . . . .	218
7.44 Diagramas de bifurcación para: (a) el potencial $\varphi_1(t)$ - C1; (b) el potencial $\varphi_1(t)$ - C2; (c) el potencial $\varphi_1(t)$ - C3; (d) el potencial $\varphi_1(t)$ - C4 y (e) el potencial $\varphi_1(t)$ - C5.	219
7.45 Diagramas de fase para: (a) y (b) el desplazamiento $u_2^A(t)$ a 135 y 155 [m/s]; (c) y (d) el giro $\theta_1^A(t)$ a 135 y 155 [m/s]; (e) y (f) desplazamiento $u_1^B(t)$ a 135 y 155 [m/s].	220
7.46 Diagramas de fase: (a) y (b) desplazamiento $u_3^B(t)$ a 135 y 155 [m/s]. . . . .	221
7.47 Configuración deformada del ala para dos velocidades de la corriente libre: (a) 135 [m/s] y (b) 155 [m/s]. . . . .	222

---

7.48	FFT aplicada sobre: (a) desplazamiento $u_3^B(t)$ y (b) giro $\theta_1^A(t)$ para diferentes velocidades del aire. . . . .	223
7.49	Evolución del voltaje y de la potencia eléctrica en función de la resistencia para el cosechador C1. . . . .	223
7.50	Evolución del voltaje y de la potencia eléctrica en función de la resistencia para los cosechadores C2 a C5. . . . .	224
7.51	Potencia instantánea en función del tiempo para (a) cosechador C1 y (b) cosechador C2. . . . .	225
7.52	Potencia instantánea en función del tiempo para (a) cosechador C3, (b) cosechador C4 y (c) cosechador C5. . . . .	225
7.A.1	Evolución temporal de las variables cinemáticas $u_3(t)$ y $\theta_2(t)$ para dos velocidades de corriente libre: (a) 132 [m/s]; (b) 135.5 [m/s] y (c) 140 [m/s]. . . . .	230
7.B.1	Evolución temporal del voltaje (curvas negras) y de la potencia eléctrica instantánea (curvas rojas) para una resistencia de 75000 [ $\Omega$ ] y una inductancia de 156.3 [H]. . .	231
7.C.1	Evolución temporal: (a) y (b) desplazamiento $u_2^A(t)$ ; (c) y (d) giro $\theta_1^A(t)$ ; (e) y (f) desplazamiento $u_1^B(t)$ ; (g) y (h) desplazamiento $u_3^B(t)$ para 135 [m/s] y 155 [m/s]. .	233
7.C.2	Evolución temporal de los potenciales eléctricos (curvas negras) y de la potencia eléctrica instantánea (curvas rojas) para la resistencia que maximiza la potencia media. . . . .	234
7.C.3	Diagramas de bifurcación para: (a) el desplazamiento $u_1^A(t)$ ; (b) el giro $u_3^A(t)$ ; (c) el desplazamiento $u_2^B(t)$ y (d) el desplazamiento $\theta_3^B(t)$ . . . . .	235

# Aspectos introductorios

En este primer capítulo se describe el contexto que motiva el desarrollo del presente trabajo de tesis. Posteriormente, se sintetizan los principales esfuerzos referidos al tema central de estudio, haciendo una recorrida sobre cada uno de ellos con el propósito de caracterizar el estado del arte. A continuación, se presenta el alcance, los objetivos y las contribuciones originales del trabajo. Y, por último, se detalla la organización de esta tesis.

## 1.1 Contexto y motivación

El proceso de convertir o de transformar la energía disponible en el medio ambiente tales como la térmica, la química, la lumínica y la mecánica en energía eléctrica a través de mecanismos no convencionales se denomina cosecha de energía, en inglés *Energy Harvesting* [101].

Durante las últimas dos décadas, el desarrollo de dispositivos remotos de baja potencia, portables y de dimensiones reducidas junto a la crisis energética global y a la contaminación ambiental causada en mayor medida por el aumento en el consumo de energías no renovables ha fomentado la búsqueda de fuentes no convencionales de energía. Tradicionalmente, estos dispositivos se alimentaban a partir de baterías electroquímicas, las cuales se consideran fuentes convencionales de energía. Sin embargo, éstas exhiben algunas desventajas, tales como una vida útil y una eficiencia energética limitada, la necesidad de ser recargadas o reemplazadas con cierta frecuencia y su excesivo volumen y peso, lo que dificulta la miniaturización de los dispositivos [10]. A la vez, los avances tecnológicos en el área de las baterías tradicionales han permanecido relativamente estancos durante la década pasada en relación a otras áreas. Con el propósito de mitigar estos inconvenientes, la comunidad científica ha destinado esfuerzos significativos en investigación para introducir a la tecnología de cosecha de energía como fuente no convencional. Este concepto permite la eliminación de pequeñas baterías o extender su vida útil, dando lugar a dispositivos electrónicos parcial o totalmente autónomos con muy bajo costo

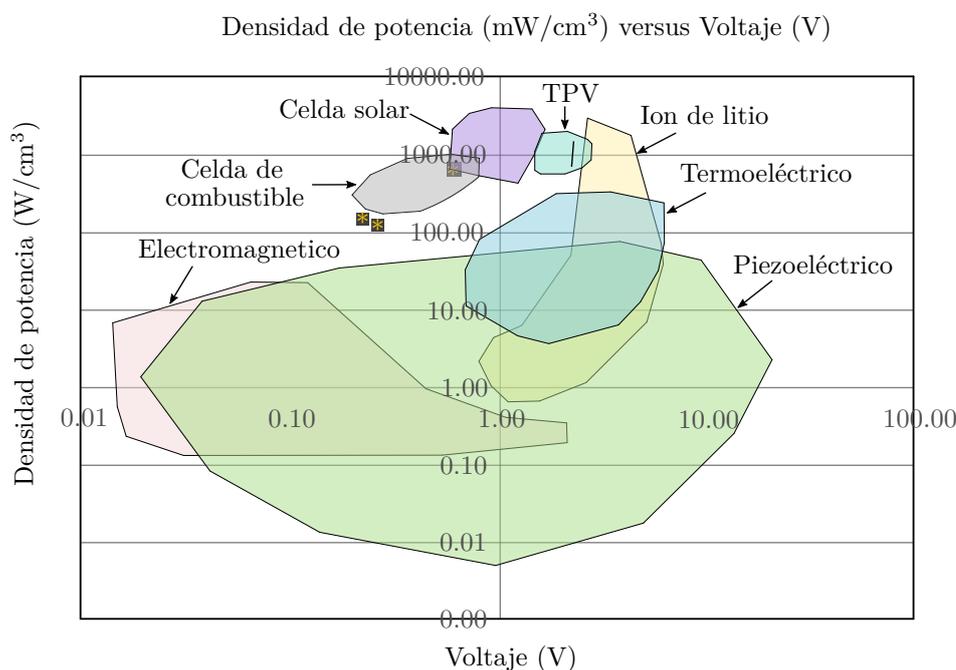
de mantenimiento. Un aspecto secundario, pero no menos importante, es el beneficio ecológico que trae aparejada su implementación, ya que reduce los residuos químicos generados por la sustitución de baterías electroquímicas. Por consiguiente, su uso está en concordancia con la tendencia actual de energías limpias y renovables [58].

Existen diferentes clases de materiales o tecnologías, cada uno de ellos con un mecanismo de transducción único, que pueden emplearse para recolectar la energía disponible en el medio ambiente. Entre los más comunes se puede destacar a los electromecánicos que transforman la energía mecánica de deformación o de vibración en energía eléctrica, a los termoeléctricos que hacen lo mismo con los gradientes de temperatura, los piroeléctricos que convierten las fluctuaciones térmicas en electricidad y a las celdas fotovoltaicas que hace lo propio con la energía solar. Por otra parte, entre las fuentes ambientales utilizables la energía mecánica es la forma más ubicua. Las vibraciones que provienen del viento, de las maquinarias industriales, de los vehículos durante el transporte, del tránsito de peatones y del propio movimiento del cuerpo humano pueden ser capturadas y transformadas en energía eléctrica [103].

En particular, el viento es un recurso natural renovable e inagotable que está presente en todas partes, características que lo han posicionado como una fuente natural por excelencia. Tradicionalmente, la conversión de la energía cinética del viento en electricidad se ha llevado a cabo mediante mecanismos convencionales, tales como el uso de turbinas eólicas. Sin embargo, en los últimos años los investigadores comenzaron a estudiar nuevos métodos que permitan extraer o cosechar energía del aire, incluyendo mecanismos no convencionales de origen aeroelástico [73]. En efecto, centraron su atención en las vibraciones mecánicas inducidas por el flujo de fluidos, consideradas como una de las fuentes de energía más promisorias para sistemas de pequeña escala [69]. La razón principal se debe a que tales vibraciones se pueden obtener de la interacción fluido-estructura utilizando cosechadores de energía inmersos en diversas condiciones de flujo natural [120].

Cuando una estructura elástica se encuentra sometida a la acción de cargas que provienen del flujo de fluidos, puede experimentar diversas respuestas incluyendo bifurcaciones, oscilaciones de ciclo límite, resonancias internas y movimientos caóticos [36]. Históricamente, los fenómenos aeroelásticos han sido catalogados como potencialmente destructivos e indeseados ya que se caracterizan por elevados niveles de vibración. Por este motivo, numerosos estudios han sido realizados por profesionales del campo aeronáutico y civil para reducir o eliminar sus efectos en estructuras de gran envergadura tales como puentes, aeronaves, líneas de transmisión de energía, entre otras [30, 31]. Desde una nueva perspectiva, las vibraciones aeroelásticas asociadas con no linealidades estructurales y/o aerodinámicas han sido propuestas como nuevas fuentes de generación de energía eléctrica.

Los tres mecanismos principales que propician la transformación de vibraciones mecánicas en energía eléctrica son la transducción electrostática, la electromagnética y la piezoeléctrica [121]. No obstante, la transducción piezoeléctrica ha recibido especial atención en comparación



**Figura 1.1:** Densidad de potencia en función del voltaje para diferentes fuentes de alimentación regenerativas. Imagen extraída y adaptada de [43].

con los otros mecanismos [43]. Sus principales ventajas se atribuyen a su facilidad de aplicación y a la gran densidad de potencia de los materiales piezoeléctricos, siendo 3 ~ 5 veces más altas que en el resto de los transductores. Con relación a ello, la densidad de potencia en función del voltaje de la Figura 1.1 muestra que los transductores piezoeléctricos cubren un área importante del gráfico con densidades similares a las baterías de litio. A su vez, en comparación con los cosechadores electromagnéticos, donde la señal eléctrica de salida es muy baja y requiere un acondicionamiento posterior para alcanzar niveles de voltaje útiles, y con los cosechadores electrostáticos, donde es necesario un voltaje de entrada para obtener energía utilizable, la señal eléctrica que proviene de los cosechadores piezoeléctricos puede ser utilizada directamente sin un posprocesamiento. En lo que respecta a su fabricación, los transductores piezoeléctricos pueden ser construidos fácilmente tanto en micro escala como en macro escala. En contraste, existen ciertas limitaciones físicas que impiden la fabricación de transductores electromagnéticos en micro escala, en cambio, los sistemas electrostáticos se restringen únicamente a esta última [43].

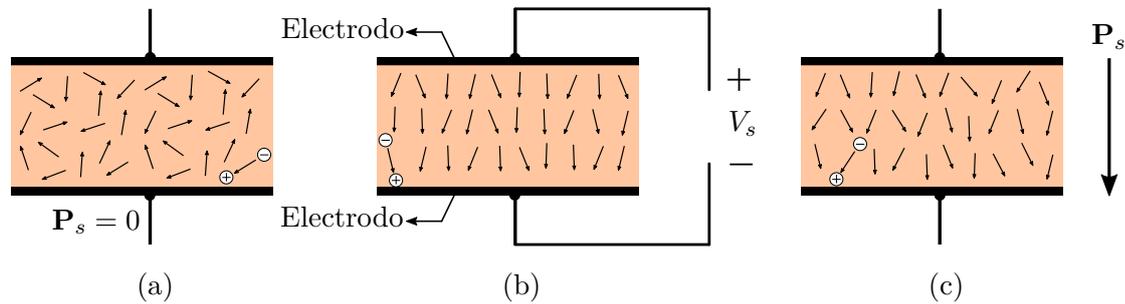
La cosecha piezoeléctrica de energía a partir de vibraciones mecánicas es una tecnología prometedora que ha encontrado aplicación en diversos campos. En infraestructura civil, en el caso de puentes, los sensores que monitorean la salud estructural suelen ubicarse en localizaciones remotas, por lo que el reemplazo de baterías se torna una tarea difícil y en ocasiones imposible. La energía vibratoria generada por el tránsito vehicular o el flujo de aire puede ser recolectada y luego utilizarse para reemplazar o recargar las baterías [54]. En el área de la bioingeniería,

los dispositivos médicos implantados en cuerpos humanos tales como desfibriladores cardíacos activos, marcapasos o estimuladores neurológicos pueden verse beneficiados con esta tecnología debido a que consumen muy baja potencia [7]. En el ámbito aeronáutico o aeroespacial, los esfuerzos van dirigidos al diseño de una nueva generación de vehículos aéreos no tripulados (UAVs, en inglés *Unmanned Aerial Vehicles*) que sean autónomos, autosustentables y amigables con el medio ambiente. La integración de sistemas cosecha de energía de pequeña escala en estructuras alares multifuncionales resulta muy atractivo, ya que puede proporcionar fuentes secundarias de energía. Las alas multifuncionales pertenecen al grupo de las estructuras multifuncionales e incluyen subsistemas para sensado, actuación, cosecha y almacenaje de energía. Estas estructuras son capaces de desempeñar múltiples funciones primarias y pueden, potencialmente, mejorar el rendimiento de una aeronave extendiendo la envolvente de vuelo a través de la consolidación de subsistemas, materiales y funciones [9, 115].

En virtud del sinnúmero de aplicaciones vinculadas a la recolección de energía empleando piezoeléctricos, la necesidad de contar con herramientas que permitan predecir de una manera confiable y eficiente el comportamiento electroelástico de los cosechadores se ha vuelto crucial. En este sentido, las simulaciones numéricas constituyen una alternativa económica y eficaz para este propósito y, en particular, son fundamentales durante la etapa de diseño de estos dispositivos. Debido a que la cosecha de energía, en especial la que aprovecha las vibraciones aeroelásticas, es un problema inherentemente multifísico, resulta adecuado el desarrollo de herramientas numéricas basadas en un abordaje de co-simulación [48].

La co-simulación es una técnica que propicia la simulación global de sistemas acoplados a partir de la simulación de sus partes. Dado que los sistemas ingenieriles modernos se tornan más y más complejos, es cada vez más común analizarlos a partir de una descomposición en subsistemas utilizando herramientas de análisis específicas para cada parte. Esta descomposición puede estar motivada por diferentes causas, una de las cuales es la presencia de subsistemas descritos por diferentes área de la física, por ejemplo, problemas termomecánicos, de interacción fluido-estructura, entre otros. Asimismo, este abordaje es atractivo por muchos motivos, entre ellos, que resulta intrínsecamente multidisciplinario y que permite la extensión de modelos por adición de nuevos módulos que complementen los ya vinculados, añadiendo funcionalidad y generalidad a las herramientas desarrolladas.

Concretamente, en esta tesis se construye una herramienta computacional que permite evaluar, a través de simulaciones numéricas, la respuesta de cosechadores piezoeléctricos de energía cuya fuente principal de alimentación provenga de vibraciones mecánicas de origen aeroelástico, especialmente, basadas en el fenómeno aeroelástico *flutter*. Como parte integral de este trabajo, se desarrolla un modelo de viga piezoeléctrica tridimensional que incorpora no linealidades geométricas, el cual se acopla a través de un método de interacción de tipo fuerte con un modelo aerodinámico inestacionario y no lineal basado en distribución de singularidades sobre superficies sólidas. Resulta evidente que la cosecha aeroelástica de energía constituye un



**Figura 1.2:** (a) Orientación aleatoria de los dominios antes de la polarización ( $\mathbf{P}_s = 0$ ). (b) Dominios alineados en la dirección positiva del campo eléctrico ( $V_s$ ). (c) Polarización remanente del material ( $\mathbf{P}_s \neq 0$ ).

problema multifísico ya que acopla simultáneamente a tres áreas del conocimiento: la dinámica estructural, la aerodinámica y la electricidad. En consecuencia, es un problema que puede ser abordado exitosamente por medio de una estrategia de co-simulación.

## Piezoelectricidad

El término piezoelectricidad es una palabra que proviene del griego y significa electricidad debido a presión. El hallazgo de estos materiales se atribuye a los hermanos Pierre y Jacques Curie, quienes descubrieron que ciertos cristales minerales cuando eran sometidos a un tensión mecánica desarrollaban un voltaje cuya magnitud era directamente proporcional a la carga aplicada y su polaridad era opuesta según se tratase de un esfuerzo de tracción o de compresión. Al mismo tiempo, confirmaron experimentalmente la existencia del efecto inverso mostrando que si un cristal era expuesto a un campo eléctrico experimentaba un acortamiento o un alargamiento dependiente de la polaridad del campo y proporcional a su intensidad. Estas dos particularidades reciben el nombre de *efecto piezoeléctrico directo* e *inverso* respectivamente [116].

La mayoría de los materiales piezoeléctricos son de naturaleza cristalina, ya sea compuestos por un monocristal o por múltiples cristales. Son materiales que pueden encontrarse en la naturaleza o pueden ser creados por medio de un proceso sintético. Con relación a los sintéticos, los de mayor difusión en aplicaciones tecnológicas son los piezocerámicos, que fueron concebidos durante la segunda mitad del siglo XX y su principal característica es que poseen coeficientes piezoeléctricos de mayor magnitud que los materiales naturales. Además, pueden ser fabricados en grandes cantidades y en diversas geometrías tales como discos, cilindros y láminas. Sin embargo, para adquirir los efectos piezoeléctricos deben ser sometidos, luego de ser fabricados, a un proceso denominado *polarización* [35].

Los piezocerámicos forman parte de una categoría de compuestos llamada perovskita que consiste de una combinación de metales tetravalentes (como el titanio o el circonio), metales divalentes (como el plomo o el bario) y oxígeno. Entre los piezocerámicos típicos se incluye el

titanato de bario ( $\text{BaTiO}_3$ ) y los titanatos de circonato de plomo ( $\text{PbZr}_{1-x}\text{Ti}_x\text{O}_3$ ) conocidos como PZT. El proceso de fabricación de los PZT consiste en mezclar polvos de óxido de plomo, titanio, circonio y frecuentemente son dopados mediante el agregado de ciertos elementos para obtener propiedades particulares.

A escala macroscópica, se puede imaginar que el material está formado por un conjunto de dominios dispuestos de forma aleatoria. A su vez, cada uno de ellos se compone de celdas unitarias que tienen un momento dipolar permanente. Debido al momento dipolar inherente a la celda, cada dominio dentro del material tiene una polarización espontánea ( $\mathbf{P}_s$ ) que se define como el momento dipolar por unidad de volumen. Esta polarización es la responsable de las características piezoeléctricas del dominio. Sin embargo, la aleatoriedad de los dominios produce que la orientación de las celdas unitarias cambie de una región a otra generando una polarización espontánea del material nula ( $\mathbf{P}_s = 0$ ) tal como se expone en la Figura 1.2a. En consecuencia, para que un piezocerámico adquiera propiedades piezoeléctricas debe ser sometido al proceso de polarización, el cual consiste en someter al cerámico a un campo eléctrico externo ( $V_s$ ) de gran magnitud. El campo eléctrico se aplica entre un par de electrodos metálicos dispuestos sobre superficies apropiadas del material, tal como se observa en la Figura 1.2b. Esto produce una alineación de la mayoría de los dipolos del material con la dirección del campo y genera una polarización remanente ( $\mathbf{P}_s \neq 0$ , Figura 1.2c) del material cuando el campo eléctrico es removido. De este modo, el material piezocerámico exhibe los efectos piezoeléctricos directo e inverso [28].

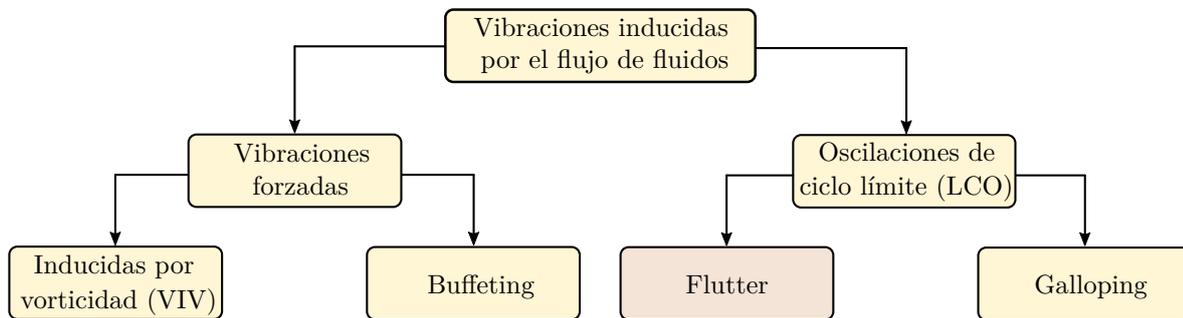
Los piezocerámicos mayormente utilizados en el campo de la cosecha de energía son el PZT-5A y el PZT-5H. Sus propiedades electromecánicas se resumen en el Anexo C. Si bien no son los únicos materiales que pueden emplearse para este propósito, en este trabajo se utilizarán los transductores fabricados a partir de estos materiales.

### Cosecha de energía a partir del fenómeno *flutter*

La aeroelasticidad es una rama de la ingeniería que estudia la interacción entre una estructura elástica inmersa en una corriente de aire y las cargas aerodinámicas que se desarrollan sobre la misma. En este sentido, las oscilaciones inducidas por el flujo de fluidos constituyen el tipo más común de interacción. En función de la naturaleza del fenómeno aerodinámico, las vibraciones se pueden clasificar según el esquema de la Figura 1.3. De todas ellas, en este esfuerzo reviste interés el fenómeno de *flutter*.

El *flutter* es una inestabilidad aeroelástica que acontece en estructuras flexibles inmersas en el flujo de fluidos. Se caracteriza por oscilaciones periódicas y auto sostenidas que provienen del acoplamiento entre cargas aerodinámicas y dos o más modos naturales de la estructura [51].

Para detallar este fenómeno, considérese una estructura aeronáutica sumergida en una corriente de aire. Cuando la velocidad del fluido es suficientemente baja, cualquier perturbación introducida sobre la estructura provocará oscilaciones con amplitudes que disminuyen hasta



**Figura 1.3:** Clasificación de las vibraciones inducidas por flujo de fluidos. Imagen extraída y adaptada de [120].

alcanzar el reposo, lo cual se debe a la presencia de amortiguamiento aerodinámico y estructural. Si la velocidad del fluido continúa aumentando, llegará un momento donde cualquier perturbación introducida inducirá un movimiento periódico con amplitud estable. Lo descrito ocurre para una velocidad del aire que se denomina velocidad crítica o de *flutter* y, en dicho caso, el movimiento de la estructura y las cargas aerodinámicas son tales que la energía extraída del medio fluido es igual a la energía disipada por cada ciclo de oscilación. La utilización de modelos estructurales y/o aerodinámicos no lineales permiten evaluar la respuesta poscrítica. Cuando la velocidad del aire supera a la de *flutter*, se desarrollan oscilaciones de ciclo límite con una amplitud que crece con la velocidad de la corriente. Este comportamiento generalmente está caracterizado por medio de una bifurcación (subcrítica o supercrítica) de *Hopf* [34].

Las oscilaciones de ciclo límite desempeñan un rol clave en el mecanismo de cosecha de energía, debido a que pueden ser transferidas a los transductores piezoeléctricos. En efecto, el flujo del aire genera cargas aerodinámicas sobre la estructura, las cuales inducen deformaciones sobre los transductores que, a partir del efecto piezoeléctrico directo, producen una diferencia de potencial entre sus electrodos. En consecuencia, existe una doble conversión de energía ya que la energía cinética del aire se convierte en energía de deformación y ésta en energía eléctrica. Por supuesto, la cosecha de energía no sólo se limita a un estado poscrítico, también es posible hacerlo para velocidades subcríticas. No obstante, la energía generada es menor y exhibe un comportamiento transitorio [45].

## 1.2 Revisión bibliográfica

En esta sección se efectúa una revisión de los trabajos más relevantes publicados en la literatura relacionados con la cosecha piezoeléctrica de energía basada en el fenómeno *flutter*, haciendo énfasis sobre los modelos electroelástico y aerodinámico adoptados en cada caso y destacando las diferencias existentes con lo propuesto en esta tesis. En primer lugar, se exponen todos aquellos trabajos llevados a cabo por miembros de un mismo grupo de investigación, luego los

artículos más recientes relacionados con el tópico de investigación y, por último los esfuerzos presentados por integrantes del grupo de trabajo al cual pertenece el autor de esta tesis.

Uno de los primeros artículos respecto a esta temática se remonta al año 2009 y se atribuye a Bryant y Garcia, dos investigadores de la Universidad de Cornell [20]. Estos autores presentaron un modelo de parámetro concentrado compuesto por un perfil alar bidimensional con dos grados de libertad geométricos y un grado de libertad eléctrico, excitado a partir de vibraciones aeroelásticas. Las cargas aerodinámicas sobre el perfil las determinaron en el dominio del tiempo utilizando un modelo lineal e inestacionario basado en el método de estado finito de Peters *et al.* [82]. Para un fluido invíscido e incompresible, este método aproxima los efectos inestacionarios por medio de términos de flujo inducido que contemplan el desprendimiento de vorticidad cerca del perfil. Además, evaluaron la respuesta del cosechador en condición de *flutter* y propusieron un esquema que activa o desactiva la recolección en función de la amplitud de oscilación para optimizar la extracción de energía. En el año 2009, Bryant y Garcia también presentaron un dispositivo novel de cosecha de energía basado en *flutter* compuesto por una viga empotrada con un perfil alar articulado en su extremo libre. Considerando este prototipo publicaron dos trabajos, uno en 2009 y otro en 2011.

En el esfuerzo de 2009 los investigadores adaptaron el modelo analítico presentado ese año para estimar sólo la velocidad lineal de *flutter*, lo cual se efectuó mediante un análisis de estabilidad de autovalores [21]. Los resultados obtenidos fueron contrastados contra mediciones experimentales realizadas en un túnel de viento, donde se determinó que el modelo analítico sobrestima ligeramente la velocidad crítica. Además, efectuaron estudios experimentales para velocidades poscríticas, analizando la influencia de dos perfiles alares geoméricamente diferentes sobre la energía cosechada. Ellos enfatizaron que la velocidad y que la frecuencia de *flutter* son independientes de la geometría adoptada.

En su trabajo de 2011 los autores mejoraron su modelo analítico [22]. En lo que respecta al modelo electroelástico, contemplaron las no linealidades asociadas a las grandes rotaciones del perfil, lo que repercute en la expresión de la energía cinética del sistema. Además, implementaron el método de Rayleigh-Ritz para aproximar el campo de desplazamiento transversal de la viga. De manera similar, modificaron el cálculo de cargas aerodinámicas para tener en cuenta los grandes ángulos de ataque. Los autores implementaron el modelo aerodinámico inestacionario de ONERA (*Office National D 'Etudes et de Recherches Aerospatiales*) desarrollado por Tran y Petot [114], el cual consiste en un método semi-empírico que tiene en cuenta la entrada en pérdida del perfil producto de grandes ángulos de ataque. Ciertos coeficientes involucrados en el método se determinan a partir de información que proviene de ensayar experimentalmente al perfil en un túnel de viento. Con relación a los resultados, los autores estimaron la velocidad de *flutter* con el modelo lineal y llevaron a cabo simulaciones poscríticas con el modelo analítico no lineal para estudiar la extracción de energía cuando la respuesta alcanza un ciclo límite. Compararon los resultados obtenidos con los experimentales, destacando la existencia de un

muy buen acuerdo.

Otro trabajo llevado a cabo por investigadores de la Universidad de Cornell es el presentado por Bryant *et al.* en 2011 [24]. En este caso, el cosechador evaluado, tanto el modelo matemático como el experimental, es similar al presentado en estudios previos pero de menor dimensión. Los autores efectuaron un análisis de sensibilidad, el cual consiste en estudiar la relación entre determinados parámetros de diseño y la velocidad del flujo para la cual ocurre la inestabilidad aeroelástica de *flutter*. Entre los parámetros evaluados se destacan las propiedades másicas del perfil, la posición de su punto de sujeción a la viga, una masa puntual ubicada en el extremo libre de la viga, la rigidez torsional del resorte que vincula el perfil con la viga, entre otros. Para efectuar estos análisis utilizaron los modelos electroelástico y aerodinámico lineales propuestos en su primer estudio [20].

Un último trabajo de este grupo de investigadores corresponde al estudio experimental de un arreglo de dos cosechadores piezoaeroelásticos dispuestos en tandem [23]. Al respecto, los autores exploraron los efectos de la interacción aerodinámica en la eficiencia de los cosechadores. Los autores mostraron que la amplitud y la frecuencia de oscilación de un cosechador y, por consiguiente la potencia de salida, se ve significativamente afectada por la estela vorticiosa de un cosechador o de algún otro dispositivo situado corriente arriba.

En términos generales, los trabajos detallados en los párrafos precedentes son sumamente valiosos. A pesar de esto, existen dos aspectos que pueden ser mejorados a partir del enfoque que se propone en esta tesis. Por un lado, los modelos electroelásticos que adoptaron se limitan a casos puntuales que concentran la elasticidad de la viga en un resorte traslacional. El hecho de adoptar un modelo basado en elementos finitos con no linealidades geométricas permite estudiar configuraciones de mayor generalidad. Y, por otro lado, los modelos aerodinámicos empleados son lineales o requieren de datos experimentales para tener en cuenta grandes ángulos de ataque y ninguno de ellos puede usarse para analizar la interferencia aerodinámica entre cosechadores. En contraste, el método implementado en esta tesis es inestacionario, no lineal y tiene en cuenta la interacción aerodinámica entre cuerpos sumergidos en una corriente de aire.

Otro grupo de artículos se atribuyen a investigadores de Virginia Tech y de la Universidad de Sao Paulo. En este sentido, en 2009 De Marqui *et al.* desarrollaron un modelo electroelástico lineal de elementos finitos de placa basado en la teoría de Kirchoff, el cual es apropiado para modelar cosechadores piezoeléctricos de tipo laminar, admitiendo las dos configuraciones típicas: biforma y unimorfa (en inglés, *unimorph* y *bimorph*) [57]. En el dominio eléctrico los autores incluyeron una carga resistiva para cuantificar la energía extraída. Además, el modelo fue validado contra resultados analíticos en el dominio de la frecuencia y experimentales, mostrando un buen acuerdo. A partir de este modelo se desprenden las siguientes dos publicaciones.

En el año 2010, De Marqui *et al.* analizaron la respuesta electroaeroelástica de un ala plana con un cosechador piezoeléctrico embebido mediante simulaciones numéricas en el dominio del tiempo [32, 56]. En lo que respecta a los modelos, el ala se discretizó usando elementos finitos

lineales de placa, mientras que las cargas aerodinámicas sobre la superficie alar fueron predichas empleando el método de la red de vórtices inestacionario y no lineal, en particular la versión propuesta por Katz y Plotkin [62]. Los autores implementaron un esquema de solución iterativo y redujeron el orden de las ecuaciones estructurales a partir del método de descomposición modal. El objetivo del trabajo fue evaluar la respuesta del cosechador para diferentes velocidades del aire utilizando diversas cargas resistivas. Asimismo, los autores analizaron la influencia del uso de transductores con electrodos continuos y segmentados en la energía recolectada y en la velocidad crítica. Ellos enfatizaron la importancia de utilizar electrodos segmentados para evitar la cancelación de cargas asociadas a modos torsionales, demostrando que la energía cosechada es mayor si se emplean electrodos segmentados en lugar de electrodos continuos para cualquier carga resistiva. Esto también trae aparejado un aumento de la velocidad de *flutter* respecto al caso de electrodos continuos. El análisis se centró en velocidades subcríticas y en la velocidad de *flutter*.

En el 2011, De Marqui *et al.* evaluaron la respuesta electroaeroelástica de la estructura alar del trabajo previo pero en el dominio de la frecuencia. En este caso, el análisis se restringió a una configuración de electrodos continuos y se incorporó una inductancia en el dominio eléctrico. La diferencia principal respecto al esfuerzo previo radica en el modelo aerodinámico. Las cargas aerodinámicas fueron estimadas usando el método de la red de dobletes, en tanto que la velocidad del fluido para la cual el sistema posee estabilidad marginal se determinó a partir de un esquema  $p - k$ . La función Kernel que se aproxima con el método de dobletes asume un comportamiento armónico para las cargas aerodinámicas inestacionarias. A su vez, los autores presentaron las funciones de respuesta en frecuencia (FRFs) del sistema para determinada velocidad del flujo y parámetros eléctricos, combinando simultáneamente los efectos de un desplazamiento de base y cargas aerodinámicas inestacionarias. Ellos mostraron que emplear un circuito resistivo-inductivo mejora notablemente la eficiencia del cosechador. En efecto, en casi todo el rango de frecuencias evaluadas, la potencia eléctrica de salida obtenida con un circuito resistivo-inductivo es casi veinte veces más grande que la determinada con un circuito resistivo. En este caso, el inductor fue seleccionado de manera tal que la frecuencia de resonancia del circuito *RLC* coincida con la frecuencia de *flutter* en condición de cortocircuito. Asimismo, los autores reportaron un incremento del 7.5 % en la velocidad de *flutter* para los parámetros eléctricos (resistencia e inductancia) que maximizan la cosecha de energía en comparación con la situación de cortocircuito.

En otra publicación del mismo grupo de investigadores se analizó tanto analítica como experimentalmente la respuesta de un cosechador piezoaeroelástico en condición de *flutter* [44]. El modelo analítico es lineal y corresponde a un perfil alar con dos grados de libertad geométricos y uno eléctrico, de características similares al de Bryant y Garcia [20]. Los autores efectuaron el estudio en el dominio de la frecuencia usando la teoría de Theodorsen inestacionaria para perfiles delgados para predecir la sustentación y el momento aerodinámico. El modelo experimental está

compuesto por cuatro vigas empotrada-libre y dos resortes torsionales que las vinculan a un perfil alar con envergadura finita. En la raíz de dos de estas vigas se colocaron dos transductores piezoeléctricos en configuración bimorfa conectados en paralelo. El acoplamiento electromecánico asociado a esta conexión se estimó a partir de un modelo de parámetro distribuido. Los autores destacaron el excelente acuerdo que existe entre la velocidad de *flutter* estimada en forma experimental y analítica, tanto para una condición de cortocircuito como de circuito abierto. La potencia máxima cosechada es de 10.7 [mW] cuando se adopta una carga resistiva de 100 [k $\Omega$ ]. El incremento experimental de la velocidad de *flutter* para la resistencia óptima es de 5.1 %, mientras que el modelo predice un aumento del 5.5 % comparado con la de cortocircuito.

Otra investigación que se atribuye a este grupo de científicos fue llevado a cabo por Sousa *et al.* en el año 2011 y consiste en una extensión natural del esfuerzo comentado en el párrafo previo [106]. En este sentido, los autores usaron un modelo electroelástico similar al de Bryant y Garcia [20] pero introdujeron diferentes no linealidades en el grado de libertad de torsión. Las cargas aerodinámicas las computaron a partir de la aproximación que efectuó Jones de la función indicial de Wagner, que es una aproximación de la función generalizada de Theodorsen. Las ecuaciones rectoras del problema fueron integradas en el dominio del tiempo usando un algoritmo de Runge-Kutta junto a un método de Henon para evitar errores e inestabilidades numéricas. Los autores centraron su atención en la incidencia de las no linealidades (rigidez cúbica y de tipo *free play*) sobre la velocidad de *flutter* y, especialmente, en la respuesta del cosechador de energía para diferentes cargas resistivas.

Este grupo de investigación no sólo se limitó a la cosecha de energía basada en *flutter*, sino que poseen múltiples artículos donde evalúan tanto analítica como experimentalmente la extracción de energía a partir de movimientos de base [9, 40–42].

En resumen, este conjunto de trabajos que involucra a investigadores de la Universidad de Sao Paulo y Virginia Tech ha introducido novedosos e importantes aportes en el campo de la cosecha de energía. La gran mayoría de los modelos electroelásticos presentados son de parámetro concentrado ya sean lineales o no lineales, con excepción del modelo lineal de placas. Si bien, en ocasiones los elementos finitos de placas son superadores a los de vigas, el modelo que se propone en esta tesis exhibe ciertas ventajas. Entre ellas se destaca la consideración del efecto axial lineal en la generación de energía, la incorporación de no linealidades geométricas que repercuten tanto en el dominio mecánico como eléctrico (rigidez geométrica y efecto axial no lineal en la generación) y la inclusión de efectos inducidos en el potencial eléctrico. En lo que respecta a los modelos aerodinámicos adoptados, la mayoría de ellos se sustentan en teorías analíticas, excepto uno de los trabajos donde se implementó el método de la red de vórtices, el cual es de características similares al utilizado en esta tesis. No obstante, presenta ciertas diferencias en el cálculo de las cargas aerodinámicas.

Desde el año 2012, otro grupo de investigadores de Virginia Tech realizaron significativos aportes en este campo.

Abdelkefi *et al.* presentaron una variedad de publicaciones referidas a un cosechador piezoeléctrico de energía basado en *flutter*. El cosechador se representó por medio de un modelo de parámetro concentrado análogo al expuesto en [20] pero con rigideces no lineales. Las cargas aerodinámicas las estimaron usando una aproximación quasi-estacionaria con un modelo de desprendimiento [47]. El punto fuerte de estos esfuerzos radica en su abordaje analítico, implementando técnicas de análisis no lineal para estudiar la dinámica del sistema. No obstante, en ciertas ocasiones los autores recurren a soluciones basadas en integración numérica en el dominio del tiempo. En todos estos trabajos Abdelkefi *et al.* derivan y emplean la forma normal de la bifurcación de *Hopf* para analizar la dinámica del sistema, centrándose en los efectos de las no linealidades asociadas a las rigideces sobre la estabilidad del sistema [4]. También, se concentraron en ciertos aspectos de diseño con el fin de minimizar la velocidad *flutter* e incrementar las amplitudes de las oscilaciones de ciclo límite para mejorar el rendimiento del cosechador [2]. Destacaron que hay valores óptimos para los coeficientes lineales de rigidez que minimizan la velocidad de *flutter*. A su vez indicaron que la no linealidad aerodinámica debido al desprendimiento produce una inestabilidad supercrítica, mientras que los coeficientes no lineales de rigidez pueden originar una bifurcación supercrítica o subcrítica según su dureza. En este sentido, eligieron a dichos coeficientes para que la bifurcación sea supercrítica y de esta manera maximizar la energía extraída. En otro esfuerzo, estudiaron la influencia de la excentricidad entre el eje elástico y el eje de gravedad del perfil sobre la energía cosechada [3]. Los autores reportaron que existe un valor de excentricidad para la cual la velocidad de *flutter* es mínima. Al mismo tiempo, expusieron que la energía cosechada puede incrementarse eligiendo apropiadamente pequeñas excentricidades. Esto obedece a que dicha elección produce una reducción de la amplitud del grado de libertad torsional y un incremento de las asociadas al grado de libertad traslacional. En virtud de que el cosechador se encuentra acoplado a este último, la energía cosechada aumenta.

Por otro lado, en el año 2013, Abdelkefi y Nuhait estudiaron numéricamente los efectos de la combadura de un perfil alar en la velocidad de *flutter* y en la respuesta de un cosechador piezoeléctrico de energía [5]. De manera análoga a los trabajos previos, el modelo electroelástico es bidimensional, no lineal y consta de un perfil alar rígido con dos grados de libertad geométricos y uno eléctrico. Las cargas aerodinámicas se estimaron a partir de una versión 2D del método de la red de vórtices inestacionario y no lineal [78]. Los autores concluyeron que si la posición de la comba máxima se sitúa en cercanías del borde de ataque, la velocidad de *flutter* cambia en gran medida con el aumento de la combadura. En contraste, si la comba máxima se ubica próxima al borde de fuga, la variación de la velocidad de *flutter* con la combadura es insignificante. En lo que respecta a la cosecha de energía, un aumento en la combadura produce un descenso en la energía recolectada. En tanto que, a medida que la comba máxima tiende hacia el borde de fuga, el nivel de energía cosechada aumenta.

Un último esfuerzo que se atribuye a este grupo de científicos se publicó a fines del año

2013 [1]. El modelo electroelástico que proponen Abdelkefi *et al.* es una extensión tridimensional de los modelos bidimensionales usados en los esfuerzos previos. Está compuesto por un ala rígida de dimensiones finitas que está montada sobre dos resortes flexionales lineales y dos resortes torsionales que contemplan una no linealidad cúbica. Similarmente a los modelos previos, el grado de libertad traslacional está acoplado con la ecuación eléctrica. En lo que respecta a las cargas aerodinámicas, los autores implementaron la versión 3D del método de la red de vórtices inestacionario y no lineal [62]. Las ecuaciones de gobierno fueron integradas en el dominio del tiempo empleando un esquema predictor-corrector de cuarto orden y adoptando una interacción tipo fuerte. Los autores investigaron la influencia de la resistencia eléctrica, de la rigidez torsional y de la excentricidad entre el eje elástico y el eje gravitatorio sobre la energía cosechada.

En líneas generales, los esfuerzos resumidos en los párrafos previos poseen una relevancia superlativa. El hecho de adoptar modelos con relativa sencillez y pocos grados de libertad hizo factible que se empleen herramientas analíticas para su análisis, lo cual es un punto fuerte de este grupo de investigaciones. No obstante, en los últimos dos trabajos las cargas aerodinámicas se estimaron con el método de la red de vórtices, 2D o 3D según sea el caso. Este método es de implementación numérica y su complejidad es superior al método quasi-estacionario que fue usado en el resto de los esfuerzos. A su vez, posee características similares al que se utiliza en esta tesis, aunque existen ciertas diferencias en el cálculo de las cargas aerodinámicas [84]. Una mejora que se puede efectuar es la introducción de algún modelo basado en elementos finitos, ya que la diversidad de cosechadores que pueden ser representados con el modelo de parámetros concentrados es limitada.

Entre los años 2018 y 2020 un grupo de investigadores de la Universidad de Roma La Sapienza presentaron varios artículos referidos al tema.

En uno de estos esfuerzos, Elahi *et al.* estudiaron la extracción de energía a partir de un estado poscrítico, aprovechando las oscilaciones de ciclo límite debidas al *flutter* [39]. Para ello, usaron un modelo electroelástico de parámetro concentrado similar al de Bryant y Garcia [20] pero incorporaron una superficie de control articulada al borde de fuga del perfil a través de una rigidez de tipo *free play*. Con relación al modelo aerodinámico, adoptaron la teoría de Theodorsen para flujo incompresible, bidimensional e inestacionario. Además, utilizaron una aproximación por estados finitos para la función de Wagner que aparecen en los términos circulatorios de las cargas aerodinámicas [110]. La estimación de la velocidad de *flutter* fue realizada analizando el lugar geométrico de las raíces características del sistema. Entre los resultados, evaluaron la influencia de diferentes resistencias eléctricas y materiales piezoeléctricos sobre la energía recolectada.

En otros dos trabajos complementarios, Eugeni *et al.* y Elahi *et al.* analizaron la respuesta electroaeroelástica de una placa de fibra de vidrio en voladizo sujeta a flujo axial, tanto analítica como experimentalmente [38, 45]. El modelo numérico fue creado en MSC Nastran adoptando

elementos finitos bidimensionales de lámina que sólo tienen en cuenta efectos flexionales, en tanto que las cargas aerodinámicas se computaron a través del método de la red de dobletes, el cual contempla efectos inestacionarios. Los autores validaron los resultados analíticos contra experimentales, destacando la existencia de un muy buen acuerdo. Como parte de los resultados, analizaron la influencia de la longitud de la placa en la velocidad de *flutter* como también su influencia en la energía cosechada. De esto último concluyeron que, al igual que en el caso de la resistencia, existe una longitud óptima para la placa en virtud de que el voltaje generado es proporcional a su curvatura. A su vez, para una longitud fija, determinaron la evolución de la potencia eléctrica RMS en términos de la carga resistiva cuando la velocidad del flujo es igual a la crítica. Ellos también mostraron que el sistema está caracterizado por una bifurcación subcrítica de *Hopf*.

Continuando con la revisión, en el año 2016 Tsushima y Su presentaron un herramienta para estudiar la respuesta electroaeroelástica de un ala multifuncional altamente flexible [115]. Los autores acoplaron un modelo de viga geoméricamente exacto basado en deformaciones con un modelo aerodinámico de estado finito. El primero de ellos es un modelo de elementos finitos desarrollado en la Universidad de Michigan en el grupo de investigación liderado por Carlos Cesnik, que fue aplicado en numerosos análisis aeroelásticos [26, 107]. Con relación al segundo de ellos, las cargas aerodinámicas se predijeron aplicando un modelo aerodinámico bidimensional basado en la teoría de estado finito. Este método permite el cálculo de cargas sobre un perfil delgado deformable sumergido en un flujo invíscido y subsónico [81]. Los autores evaluaron el desempeño de una estructura alar en condición de *flutter* con diez cosechadores piezoeléctricos embebidos. Si bien el modelo electroelástico es complejo, el modelo aerodinámico exhibe algunas limitaciones ya que fue desarrollado para efectuar estudios bidimensionales en perfiles (con movimientos de *pitch* y *plunge*) y, además, no permite contemplar la interacción entre diferentes superficies sustentadoras.

Otro artículo vinculado con la temática es el presentado en el año 2017 por Tang y Dowell [109]. Estos autores desarrollaron un modelo electroelástico compuesto por una placa en voladizo cuya superficie superior e inferior está cubierta por un conjunto de transductores laminares de geometría rectangular. El modelo se sustenta en una teoría de placas inextensible, no lineal y cuyo campo de desplazamiento transversal se aproxima por el método de Rayleigh-Ritz. El modelo aerodinámico que utilizaron fue una versión lineal del método de la red de vórtices inestacionario con estela prescrita. La respuesta electroaeroelástica se obtuvo empleando un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para las ecuaciones modales estructurales y el método de diferencias finitas para las cargas aerodinámicas y las ecuaciones eléctricas. Los investigadores evaluaron la respuesta del cosechador de energía para diferentes direcciones del flujo de aire. Además, destacaron que la cantidad de energía recolectada depende fuertemente de la amplitud del ciclo límite. Aunque los modelos propuestos son interesantes, el electroelástico se restringe a una placa en voladizo y, el aerodinámico podría mejorarse introduciendo un

modelo dinámico de estela.

En el año 2019 Bao *et al.* propusieron un dispositivo de cosecha piezoeléctrica de energía basado en el *flutter* de un perfil alar [12]. El dispositivo consta de un ala finita y de una viga con un transductor en configuración unimorfa. La primera de ellas está montada sobre resortes, mientras que la segunda posee uno de sus extremos empotrado en el borde de fuga del ala en la dirección de la cuerda. El modelo electroelástico utilizado posee tres grados de libertad geométricos y uno eléctrico. De los geométricos, dos corresponden al *pitch* y al *plunge* del ala, y el tercero a la aproximación del primer modo flexional de la viga. Las cargas aerodinámicas sobre el ala se estimaron a partir de un modelo inestacionario y no lineal basado en una teoría semi-empírica [67]. Para resolver las ecuaciones de gobierno en el dominio del tiempo, se implementó un esquema iterativo basado en un método de Runge-Kutta de cuarto orden. Bao *et al.* evaluaron la influencia de la resistencia de carga, de la rigidez torsional, de la velocidad del aire, entre otras, sobre la energía cosechada.

Finalmente, se describen brevemente los trabajos publicados por el grupo de investigación al cual pertenece el autor de esta tesis.

A comienzos del año 2020, Rocca *et al.* publicaron un artículo en el que presentan una herramienta computacional para estudiar la respuesta de un arreglo de cosechadores de energía 2D basado en el fenómeno *flutter* [99]. Los autores consideraron un modelo electroelástico lineal, de parámetro concentrado y de idénticas características al propuesto por Erturk *et al.* [44]. En cuanto al modelo aerodinámico, las cargas fueron predichas empleando una versión bidimensional, no lineal e inestacionaria del método de la red de vórtices, el cual permite captar las interacciones aerodinámicas entre las estelas vorticosas que se desprenden de diferentes cuerpos [84]. Las ecuaciones que rigen el desempeño de sistema se integraron numéricamente y simultáneamente en el dominio del tiempo usando un esquema predictor-corrector de cuarto orden. En este sentido, el intercambio de información entre modelos se lleva a cabo en cada paso de tiempo, por lo tanto la técnica de interacción aplicada es de tipo fuerte. Con relación a los resultados, los autores analizaron un arreglo de dos cosechadores dispuestos en paralelo, concluyendo que la distancia que los separa influye en la velocidad de *flutter* del sistema. Debido a ello, definieron una zona favorable y una zona desfavorable para la extracción de energía.

Una extensión natural del esfuerzo previo fue presentado por Verstraete *et al.* [119]. Al respecto, aumentaron la complejidad del modelo electroelástico contemplando las no linealidades que provienen de las grandes rotaciones del perfil alar y de incluir relaciones constitutivas no lineales para los resortes involucrados. Los autores efectuaron un breve análisis de la influencia de tales no linealidades en la respuesta poscrítica del arreglo de cosechadores de energía.

A fines del año 2020, Beltramo *et al.* estudiaron la respuesta electroaeroelástica de dos alas planas dispuestas verticalmente con un cosechador piezoeléctrico de energía embebido en cada una de ellas [16]. Cada placa se modeló a partir de elementos finitos de viga tridimensional que se sustentan en la teoría de Euler-Bernoulli y contemplan la presencia de dos transductores

laminares en configuración bimorfa [15]. Por otra parte, las cargas aerodinámicas sobre cada placa se determinaron a través de una versión tridimensional del método de la red de vórtices inestacionario y no lineal que permite captar adecuadamente la interferencia aerodinámica entre los cuerpos [80]. Las ecuaciones de movimiento, reducidas por medio de los modos naturales de vibrar, se integraron en el dominio del tiempo adoptando el esquema predictor-corrector de cuarto orden de Hamming e implementando una interacción fuerte entre modelos. Como parte de los resultados, los autores exploraron la influencia de la separación entre alas sobre la velocidad de *flutter*, como así también la incidencia de las condiciones iniciales en la energía recolectada.

### 1.3 Alcances, objetivos y contribuciones

A continuación, se exponen los alcances, los objetivos y las contribuciones de la presente tesis. Los alcances permiten establecer los límites dentro de los cuales se sitúa el trabajo de investigación, los objetivos fijan las metas concretas que se pretenden alcanzar por medio del desarrollo del trabajo y las contribuciones reflejan los aportes que se realizaron a través del proceso.

#### 1.3.1 Alcances

En esta tesis se desarrolla una herramienta computacional bajo un abordaje de co-simulación que se destina al estudio numérico de problemas relacionados con cosechadores piezoeléctricos de energía alimentados a partir de vibraciones mecánicas que provienen de la interacción fluido-estructura. La herramienta se utiliza para analizar diferentes casos de estudio que tienen como propósito mostrar su potencialidad, aplicabilidad y desempeño.

Desde una perspectiva multifísica, se desarrolla íntegramente un modelo electroelástico, se adopta un modelo aerodinámico y se desarrolla un método de transferencia de información para vincular los dos anteriores. La herramienta se construye siguiendo un enfoque modular, lo que implica que cada modelo se encapsula en un unidad independiente dentro del código. A su vez, estas unidades se integran en un sistema global que controla el flujo de información entre modelos. Si bien los detalles acerca de la implementación exceden los alcances del trabajo, el software ha sido creado en su totalidad en lenguaje Fortran bajo el paradigma de programación orientado a objetos (OOP, en inglés *Object Oriented Programming*) y aplicando técnicas de computación de alto desempeño (HPC, en inglés *High Performance Computing*).

Con relación al modelo electroelástico, se desarrolla una formulación tridimensional de un modelo de viga piezoeléctrica basada en la teoría clásica de Timoshenko, la cual incorpora de forma consistente las no linealidades geométricas de Von Kármán y considera los efectos del alabeo por torsión de acuerdo a la teoría de Saint-Venant. La viga admite una cantidad arbitraria de transductores piezoeléctricos embebidos que pueden estar conectados en serie o en paralelo. A los fines de recolectar energía, un circuito eléctrico se conecta entre los terminales del

conjunto de transductores. El dominio continuo de la viga se discretiza espacialmente aplicando el método de elementos finitos. De ello resulta un elemento compuesto por dos nodos con seis grados de libertad geométricos por nodo y un cierto número de grados de libertad eléctricos. El sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna al elemento acopla efectos elásticos y eléctricos y se integra numéricamente en el dominio del tiempo usando el método predictor-corrector de cuarto orden de Hamming.

En lo que respecta al modelo aerodinámico, se emplea el método de la red de vórtices no lineal e inestacionario (UVLM, en inglés *Unsteady Vortex Lattice Method*). El mismo considera un flujo a elevado número de Reynolds, levemente viscoso e incompresible, que está dominado por vorticidad, lo que permite predecir apropiadamente las cargas aerodinámicas que se desarrollan sobre los cuerpos sustentadores. Estos cuerpos se idealizan por medio de su superficie media, la cual se discretiza a través de paneles rectangulares. Por su parte, los cuerpos de contorno (cuerpos que alteran el dominio fluido pero de los cuales no se convectan estelas) se modelan a través de las superficies exteriores y se discretizan usando paneles de la misma geometría. El método tiene la capacidad de representar la interacción aerodinámica entre cuerpos flexibles y rígidos que integran el sistema puesto en consideración. Al mismo tiempo, ofrece una excelente relación entre precisión y costo computacional pero como contrapartida exhibe limitaciones para la determinación de la resistencia aerodinámica y para representar fenómenos de difusión. En particular, en este trabajo se utiliza la versión implementada en [85].

Los modelos anteriores se acoplan a través de un método de transferencia de información bidireccional caracterizado como fuerte. Esto obedece a que, a pesar de que cada modelo posee un entorno de simulación con paso de tiempo de integración propio, el intercambio de información se lleva a cabo en cada uno de estos pasos, tanto en los aerodinámicos como en los estructurales. La transferencia de variables cinemáticas, desde el modelo estructural al aerodinámico, se realiza a través de un esquema que asocia a cada punto de un panel aerodinámico con un elemento finito, es decir, similar a un enfoque nodo maestro-esclavo. Mientras que en sentido inverso, las cargas aerodinámicas se transfieren a los nodos estructurales teniendo en cuenta esta asociación y garantizando además la conservación de la energía.

En cuanto a los resultados, se evalúan seis casos de estudio. Los primeros cuatro tienen como propósito la validación de la herramienta. Por su parte, en los últimos dos se analiza el desempeño de un cosechador piezoaeroelástico de pequeña escala como el de un conjunto de cosechadores embebidos en una estructura alar. El propósito es poder mostrar la potencialidad, capacidad, versatilidad y confiabilidad de la herramienta para estudiar problemas de interacción fluido-estructura, en particular, aquellos relacionadas con la cosecha de energía.

### 1.3.2 Objetivos

El objetivo principal del presente trabajo de tesis doctoral es *evaluar la posibilidad de generar energía eléctrica en condición de flutter empleando transductores piezoeléctricos*. Este objetivo,

que resulta verdaderamente general, se materializa a través del desarrollo de una herramienta computacional de co-simulación, robusta y eficiente, con la cual se pueden ejecutar simulaciones numéricas en el dominio del tiempo. Es evidente que los resultados que se obtienen de tales simulaciones propician una mejor comprensión del comportamiento electroaeroelástico de los cosechadores analizados, lo cual puede involucrar fenómenos dinámicos no lineales de distinta complejidad que se asocian a la interacción fluido-estructura.

Por su parte, los objetivos particulares de este trabajo son los siguientes:

- Formular un modelo de viga piezoeléctrica que combine consistentemente la teoría clásica de Timoshenko con las consideraciones geométricas de Von Kármán y, además, incorpore los efectos del alabeo por torsión según la teoría de Saint-Venant.
- Desarrollar un modelo de elementos finitos para la viga piezoeléctrica evitando el bloqueo del elemento por corte y por efectos membranales.
- Desarrollar un método de interacción que facilite el intercambio de información entre el modelo aerodinámico y el modelo electroelástico o de elementos finitos. Esto tiene que ver con la transferencia de cargas aerodinámicas desde el modelo aerodinámico al electroelástico y con la transferencia de variables cinemáticas desde el electroelástico al aerodinámico.
- Efectuar simulaciones numéricas para explorar la posibilidad de generar energía eléctrica en pequeña escala utilizando como fuente principal de energía las oscilaciones de ciclo límite que puede experimentar la estructura portante del cosechador.
- Completar la formación de un recurso humano. Este punto se relaciona con la formación del autor del trabajo en varias disciplinas de la ingeniería, entre ellas: *i*) estructuras y materiales inteligentes, *ii*) vibraciones mecánicas y dinámica estructural, *iii*) aerodinámica inestacionaria y aeroelasticidad no lineal, *iv*) métodos numéricos y *v*) computación de alto desempeño.

### 1.3.3 Contribuciones

Las principales contribuciones de este trabajo se resumen en los siguientes puntos:

- Un modelo de viga tridimensional que incorpora no linealidades geométricas y que permite representar cosechadores piezoeléctricos de energía. Esto involucra un análisis riguroso de la cinemática de la viga y de las relaciones constitutivas en piezoelasticidad, una descripción detallada de los aspectos eléctricos del modelo y la consecuente discretización por elementos finitos.
- Un anexo completo que incluye la versión explícita de cada una de las matrices y vectores elementales, tanto estructurales como eléctricos, que integran las ecuaciones rectoras.

- Una metodología para la transferencia o el intercambio de información entre el modelo electroelástico y el modelo aerodinámico, contemplando las diferencias topológicas que existen entre las dos discretizaciones empleadas. Esta metodología permite la utilización de pasos de tiempo de integración diferentes en cada modelo y compatibiliza en forma adecuada el intercambio de información, favoreciendo la estabilidad de la simulación.
- Un modelo electroaeroelástico que combina consistentemente el modelo electroelástico (aquí desarrollado) y el modelo aerodinámico (desarrollado por el grupo de investigación al cual pertenece el autor de este trabajo), apropiado para el estudio del comportamiento de cosechadores piezoeléctricos de energía sujetos a vibraciones aeroelásticas.
- Una herramienta numérica que implementa las formulaciones desarrolladas en el presente trabajo. El código está escrito en lenguaje Fortran, se sustenta en el paradigma de programación orientado a objetos y sobre él se aplicaron estrategias de computación de alto desempeño. La implementación se basa en un enfoque modular, lo cual facilita la sustitución de módulos existentes o la incorporación de otros nuevos sin alterar la estructura principal del código.
- Una versión linealizada del modelo electroelástico con reducción de orden modal, la cual puede aplicarse en determinados casos prácticos disminuyendo el tiempo total de cómputo.
- Un conjunto de resultados obtenidos de simulaciones numéricas aplicadas a casos de estudio publicados en la literatura que permiten verificar y validar la herramienta computacional. Se brinda la información necesaria para reproducir los resultados expuestos.
- Un conjunto de resultados que se obtuvieron de simulaciones numéricas aplicadas a casos de estudio de interés. En cada caso se presentan la información necesaria para la reproducción de resultados, incluyendo datos estructurales, aerodinámicos y eléctricos. En ellos se predice la aparición del fenómeno aeroelástico *flutter* y se evalúa la respuesta electroaeroelástica a velocidades subcríticas y/o poscríticas.

## 1.4 Organización de la tesis

A continuación, se sintetiza cómo se encuentra organizada la presente tesis. En el Capítulo 2 se desarrolla con alto nivel de detalle la cinemática de la viga. También, se exponen las relaciones constitutivas de los materiales involucrados contemplando el caso de un sólido tridimensional y, luego, la particularización al modelo de viga. En el Capítulo 3 se discuten los aspectos eléctricos del modelo, destacándose la derivación de una expresión para el campo eléctrico de un transductor piezocerámico basado en la teoría piezoeléctrica lineal. En el Capítulo 4 se obtiene, a través del principio de Hamilton para sistemas electromecánicos, el sistema de ecuaciones diferenciales electroelásticas que gobierna el comportamiento de un elemento finito

de viga. Previo a ello, se introducen las aproximaciones elementales de los campos cinemáticos fundamentales. En el Capítulo 5 se presentan las bases conceptuales más importantes del modelo aerodinámico junto a las particularidades de su implementación numérica. El Capítulo 6 engloba varios aspectos vinculados a la implementación. Se detalla el método de transferencia de información entre modelos y la estrategia seguida en la solución numérica del problema, como también se comentan ciertos aspectos a tener en cuenta cuando se llevan a cabo las simulaciones. En el Capítulo 7 se detallan los resultados obtenidos de las simulaciones. Ellos se dividen en dos grupos: por un lado, se exponen cuatro casos de estudio que tienen como propósito validar y verificar la herramienta y, por otro lado, se evalúan dos casos de aplicación. Finalmente, en el Capítulo 8 se resumen las conclusiones más importantes del trabajo y se detallan recomendaciones referidas a trabajos futuros.

Adicionalmente, en algunos capítulos se incorpora un Apéndice donde se exponen aspectos complementarios pero cuya lectura no es estrictamente necesaria. Además, el trabajo contiene tres anexos. En el Anexo A se sintetizan aspectos conceptuales relacionados con la representación matricial y vectorial de tensores simétricos. En el Anexo B se detalla la versión explícita de cada una de las matrices y vectores elementales presentes en las ecuaciones de gobierno elemental. Finalmente, en el Anexo C se tabulan las propiedades mecánicas y electromecánicas de los materiales utilizados en los casos de estudio.

# Cinemática del sólido y relaciones constitutivas en piezoelasticidad

En este capítulo se discuten dos aspectos esenciales de la formulación: la cinemática del modelo de viga y las ecuaciones constitutivas que gobiernan el comportamiento elástico y/o piezoelástico de los materiales involucrados. Para ello, el capítulo se divide en dos secciones. En la primera sección se efectúa un análisis exhaustivo del cuerpo bajo deformación adoptando las bases de la mecánica de medios continuos. En la segunda sección se explicitan las características más importantes de las relaciones constitutivas asociadas a los dos materiales que componen a la viga. En concreto, se exponen las ecuaciones para un sólido tridimensional y luego se particularizan al modelo de vigas.

## 2.1 Cinemática del sólido

La presente sección se organiza de la siguiente manera: en primer lugar se enuncian las hipótesis simplificadoras sobre las que se sustenta el modelo desarrollado, enfatizando los aspectos más relevantes. A continuación, se introduce el espacio de configuración y los marcos de referencia utilizados en la descripción cinemática, la cual se formula adoptando las herramientas de la mecánica de medios continuos. A partir de lo expuesto, se determina el campo de desplazamiento admitiendo rotaciones finitas y grandes desplazamientos del eje de la viga. Seguidamente, este campo se linealiza en términos de las rotaciones. Para ello, se aborda de modo superficial el proceso de linealización del tensor de rotación y se enuncian las propiedades más significativas de las rotaciones infinitesimales que serán de utilidad en este esfuerzo. Finalmente, se computa el tensor de deformaciones de Green-Lagrange y se lo simplifica adoptando las hipótesis cinemáticas de Von Kármán.

### 2.1.1 Hipótesis cinemáticas

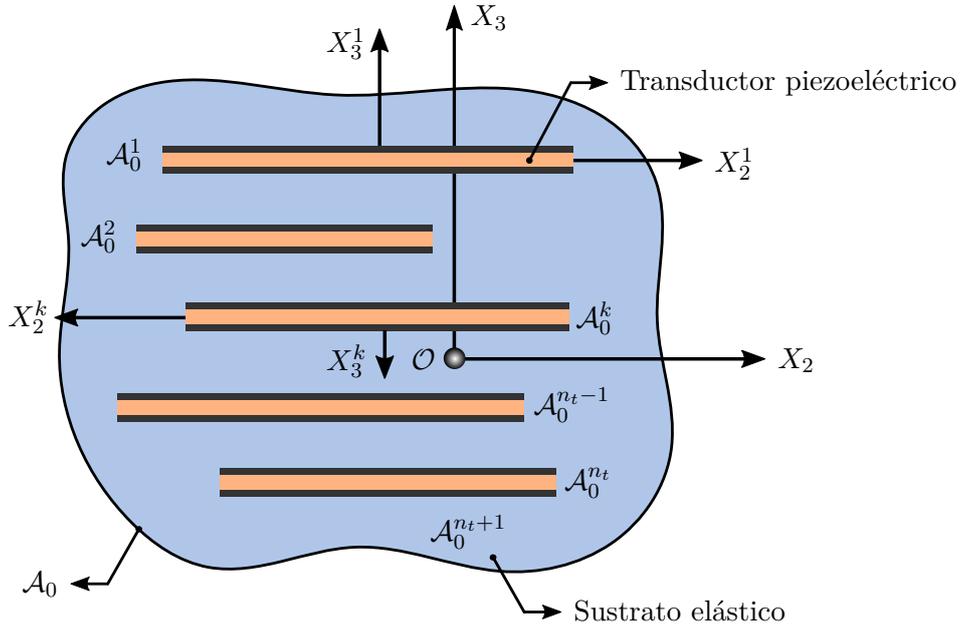
La cinemática del modelo de viga que se desarrolla en esta tesis se sustenta en las siguientes hipótesis simplificadoras:

1. Son válidas las hipótesis de la teoría clásica de Timoshenko, lo cual implica que, luego de la deformación, las secciones transversales se mantienen planas pero no ortogonales al eje de la viga.
2. Son válidas las hipótesis formuladas por Saint-Venant respecto al alabeo que experimenta la sección transversal de una viga sujeta a torsión pura [79].
3. La rotación de la sección transversal es infinitesimal y el desplazamiento del eje de la viga es pequeño respecto a su longitud.
4. Las contracciones laterales debido a elongaciones axiales se consideran despreciables, esto significa que se ignora el efecto Poisson. Además, las tensiones normales que provienen de las cargas transversales al eje de la viga son despreciables [55, 105].
5. Las únicas componentes no lineales de deformación que se retienen son aquellas que surgen de aplicar las hipótesis cinemáticas de Von Kármán [95].
6. La sección transversal de la viga está compuesta por un núcleo elástico y por transductores piezoeléctricos. Ambos materiales están perfectamente unidos, lo cual supone que no se admiten discontinuidades en el campo de deformaciones.

Las hipótesis enunciadas permiten afirmar que la cinemática de la viga se puede describir por medio de la superposición de tres efectos: *i*) la traslación del punto de vinculación de la sección transversal con el eje de la viga, *ii*) la rotación de la sección como cuerpo rígido y *iii*) el desplazamiento en dirección normal a la sección producto del alabeo por torsión.

### 2.1.2 Espacio de configuración

Una viga puede ser concebida como un cuerpo tridimensional  $\mathcal{B}_0$  compuesto por una colección infinita de puntos materiales  $P \in \mathcal{B}_0$ . Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, se considera que en su estado indeformado posee eje recto, sección transversal constante y se encuentra libre de tensiones. Inmersa en un espacio euclídeo, la localización espacial de los puntos materiales que la componen se puede describir en términos del producto cartesiano entre una línea recta  $\mathcal{P}_0 \in \mathbb{R}^3$ , denominada *eje de la viga*, y un dominio plano  $\mathcal{A}_0$ , denominado *sección transversal*. La línea  $\mathcal{P}_0$  se puede parametrizar a partir del mapa  $\varrho(s) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $L$  denota a la longitud de la viga y  $s$  es un parámetro que pertenece al intervalo  $[0, L]$ . Tal como se observa en la Figura 2.1, el dominio  $\mathcal{A}_0$  posee una geometría arbitraria y está compuesto por un sustrato de material elástico, isotrópico y homogéneo y por  $n_t \in \mathbb{N}$  transductores piezoeléctricos. En este



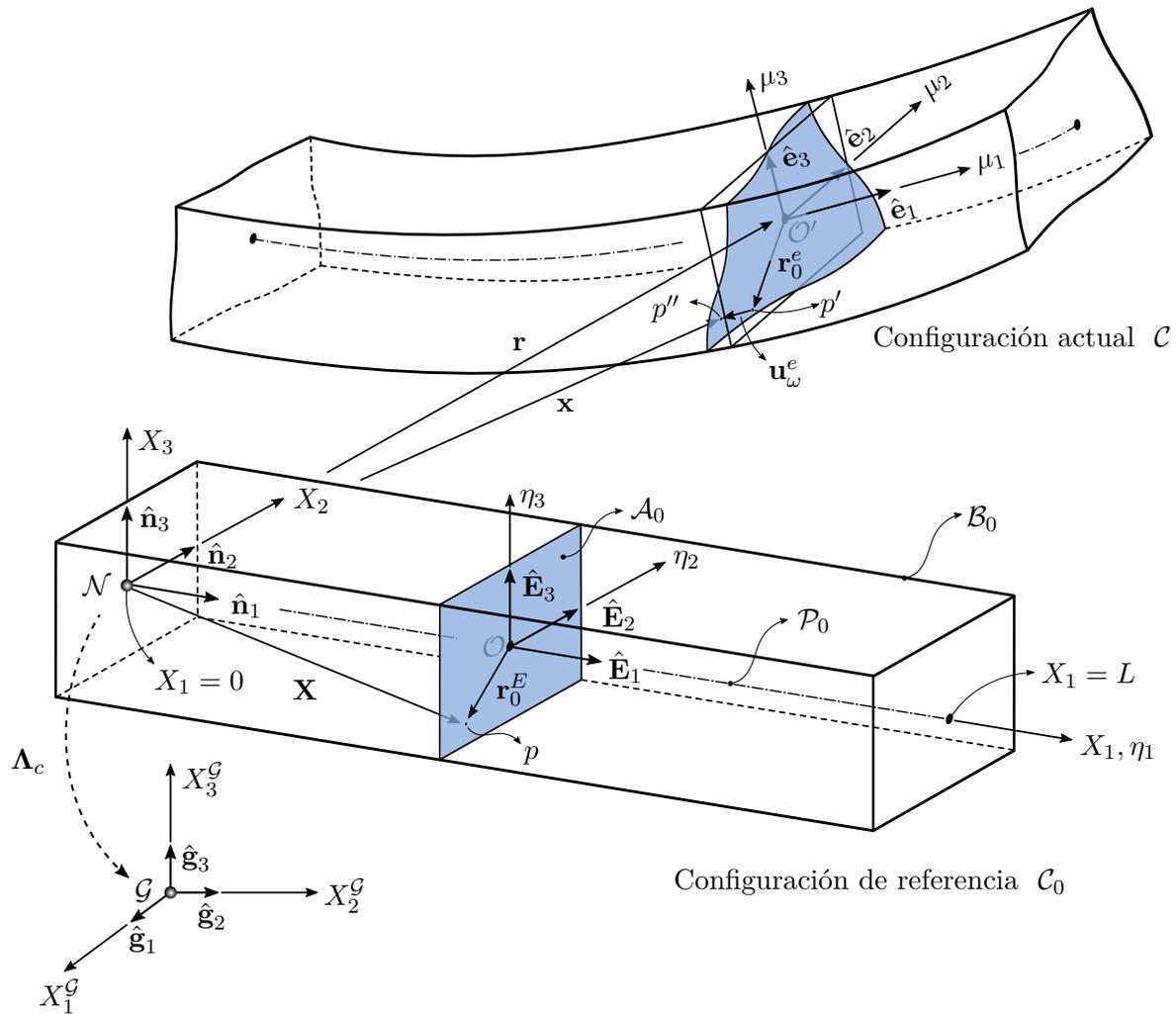
**Figura 2.1:** Sección transversal de la viga compuesta por  $n_t + 1$  subdominios  $\mathcal{A}_0^i$  elementales, uno de los cuales está asociado al sustrato elástico y  $n_t$  a los transductores piezoeléctricos.

sentido, el dominio  $\mathcal{A}_0$  puede ser expresado a través de la unión de subdominios elementales  $\mathcal{A}_0^i$  como:

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{i=1}^{n_t+1} \mathcal{A}_0^i \quad \text{con} \quad \mathcal{A}_0^i \cap \mathcal{A}_0^j = \emptyset \quad \text{y} \quad i \neq j, \quad (2.1)$$

donde  $\mathcal{A}_0^i$  con  $i = 1, \dots, n_t$  son los subdominios asociados a los transductores piezoeléctricos y  $\mathcal{A}_0^{n_t+1}$  es el subdominio asociado al núcleo elástico. Según se observa en la Figura 2.1, la única limitación viene dada por la orientación de los transductores respecto al sistema de referencia de la sección, se admite una traslación y/o una rotación de  $180^\circ$  del sistema  $(X_2^i, X_3^i)$  respecto al sistema  $(X_2, X_3)$ . En la mencionada figura, por cuestiones de espacio, sólo se indicó el sistema de referencia del primer transductor y del  $k$ -ésimo transductor piezoeléctrico, contemplando las dos posibles orientaciones.

En mecánica de medios continuos es habitual describir la cinemática de un cuerpo bajo deformación a partir de dos espacios de configuración: un estado de referencia denotado por  $\mathcal{C}_0$  y un estado actual denotado por  $\mathcal{C}$ . De igual manera, la descripción matemática de la deformación del continuo puede efectuarse siguiendo dos enfoques: descripción material o Lagrangiana y descripción espacial o Euleriana. En el primero de ellos el movimiento del cuerpo se refiere a la configuración de referencia, mientras que en el segundo de ellos el movimiento se especifica en términos de la configuración actual. En este trabajo, la cinemática de la viga se estudia siguiendo el enfoque Lagrangiano.



**Figura 2.2:** Representación de una viga tridimensional embebida en el espacio euclídeo. Se esquematiza su ubicación en la configuración de referencia  $\mathcal{C}_0$  y en la configuración actual  $\mathcal{C}$  junto a las diversas entidades vectoriales utilizadas en la descripción del movimiento.

Para introducir un cuerpo  $\mathcal{B}_0$  en la configuración de referencia se define un mapa  $\kappa(P) : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que relaciona a cada punto material  $P \in \mathcal{B}_0$  con un punto espacial  $\mathbf{X} \in \kappa(\mathcal{B}_0) \subset \mathbb{R}^3$  en el espacio euclídeo tridimensional. Además, para describir la configuración actual del cuerpo se define un mapa vectorial de deformación  $\chi(\mathbf{X}, t) : \kappa(\mathcal{B}_0) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  que asocia a cada punto  $\mathbf{X} \in \kappa(\mathcal{B}_0)$  con una posición espacial  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  para cada instante de tiempo  $t$ . En la Figura 2.2 se detallan los dos espacios de configuración usados en el análisis cinemático del presente modelo de viga.

Para especificar la configuración  $\mathcal{C}_0$  se considera un sistema de coordenadas local fijo en el espacio  $(X_1, X_2, X_3)$  y una base ortonormal dextrógira asociada  $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$ . El sistema de

coordenadas tiene su origen en el punto  $\mathcal{N}$  y el eje  $X_1$  se asume coincidente con el eje de la viga. A su vez, para una sección transversal arbitraria, se introduce un sistema de coordenadas  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  junto a una base ortonormal dextrógira  $\{\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \hat{\mathbf{E}}_3\}$ . Los versores  $\hat{\mathbf{E}}_2$  y  $\hat{\mathbf{E}}_3$  están contenidos en el plano de la sección, y el versor  $\hat{\mathbf{E}}_1$  es normal a ella, tangente al eje  $X_1$ . De acuerdo a la Figura 2.2, el sistema de referencia de la sección se caracteriza por una traslación respecto al local y tiene su origen en el punto  $\mathcal{O}$ . Este punto se sitúa sobre el eje de la viga y resulta de la intersección entre dominio  $\mathcal{A}_0$  y la línea  $\mathcal{P}$ .

Por otro lado, para especificar la configuración  $\mathcal{C}$  se introduce un sistema de coordenadas  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  con origen en  $\mathcal{O}'$  y una base ortonormal dextrógira  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ . Los versores  $\hat{\mathbf{e}}_2$  y  $\hat{\mathbf{e}}_3$  están contenidos en el plano de la sección no alabeada, mientras que el versor  $\hat{\mathbf{e}}_1$  es normal al plano. A su vez, se observa que el punto  $\mathcal{O}'$  proviene de la intersección entre el eje de la viga deformado y la sección transversal bajo movimiento de cuerpo rígido. Finalmente, se introduce un sistema de referencia global fijo en el espacio  $(X_1^{\mathcal{G}}, X_2^{\mathcal{G}}, X_3^{\mathcal{G}})$  junto a una base ortonormal dextrógira  $\{\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2, \hat{\mathbf{g}}_3\}$  y cuyo origen se sitúa en un punto  $\mathcal{G}$  arbitrario. La orientación del sistema de referencia local  $(X_1, X_2, X_3)$  respecto al sistema de referencia global  $(X_1^{\mathcal{G}}, X_2^{\mathcal{G}}, X_3^{\mathcal{G}})$  queda caracterizada por medio de un tensor de rotación constante  $\mathbf{\Lambda}_c \in SO(3)$ , donde  $SO(3)$  denota al grupo especial de tensores ortogonales en  $\mathbb{R}^3$ . El sistema de referencia global se utilizará para expresar a las propiedades de todas las vigas que constituyen una estructura respecto de una misma referencia.

En la siguiente descripción los subíndices con letras latinas adoptan valores de 1 a 3, mientras que los subíndices con letras griegas van de 2 a 3, a menos que se indique lo contrario. Además, se aplica la notación de Einstein para la suma y se omite por simplicidad la dependencia funcional respecto a la variable temporal en las expresiones obtenidas. Todas aquellas cantidades vectoriales y tensoriales que tengan el subíndice o supraíndice  $\mathcal{G}$  significa que están expresadas en la base  $\{\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2, \hat{\mathbf{g}}_3\}$  del sistema global.

### 2.1.3 Campo de desplazamiento

El vector posición  $\mathbf{X}(X_1, \eta_\alpha) \in \mathbb{R}^3$  de un punto material arbitrario  $p$  ubicado sobre la sección transversal  $\mathcal{A}_0$  en la configuración  $\mathcal{C}_0$  se define por:

$$\mathbf{X}(X_1, \eta_\alpha) = X_1 \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{r}_0^E(\eta_\alpha), \quad (2.2)$$

donde  $X_1 \hat{\mathbf{E}}_1$  es el vector posición del punto  $\mathcal{O}$  respecto del origen  $\mathcal{N}$  y  $\mathbf{r}_0^E(\eta_\alpha) = \eta_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha$  es el vector posición del punto  $p$  relativo al punto  $\mathcal{O}$ . Como consecuencia de la traslación y de la rotación de la sección transversal como cuerpo rígido, el punto  $p$  pasa a denotarse por  $p'$ . Además, si se considera el alabeo por torsión el punto  $p'$  se identifica mediante  $p''$ . Por lo tanto, la posición de  $p''$  en la configuración deformada se define por el vector  $\mathbf{x}(X_1, \mu_\alpha) \in \mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{x}(X_1, \mu_\alpha) = \mathbf{r}(X_1) + \mathbf{r}_0^e(\mu_\alpha) + \mathbf{u}_\omega^e(X_1, \mu_\alpha), \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{r}(X_1)$  es el vector posición del punto  $\mathcal{O}'$  respecto del origen  $\mathcal{N}$  y  $\mathbf{r}_0^e(\mu_\alpha) = \mu_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha$  es el vector posición del punto  $p'$  relativo a  $\mathcal{O}'$ . Además,

$$\mathbf{u}_\omega^e(X_1, \mu_\alpha) = \overline{p'p''} = u_\omega(X_1, \mu_\alpha) \hat{\mathbf{e}}_1, \quad (2.4)$$

es el vector que denota el desplazamiento axial asociado al alabeo por torsión, donde  $u_\omega(X_1, \mu_\alpha)$  es una función escalar que se detallará más adelante. Por otro lado, los vectores  $\mathbf{r}_0^e(\mu_\alpha)$  y  $\mathbf{u}_\omega^e(X_1, \mu_\alpha)$  se pueden expresar en la base  $\{\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \hat{\mathbf{E}}_3\}$  mediante la introducción de un tensor de rotación  $\mathbf{\Lambda}(X_1) \in SO(3)$  uniparamétrico definido por  $\mathbf{\Lambda}(X_1) = \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_i$ , donde  $\otimes$  denota el producto tensorial. En base a lo expuesto, la ecuación (2.4) se puede reescribir como:

$$\mathbf{x}(X_1, \mu_\alpha) = \mathbf{r}(X_1) + \mu_\alpha \mathbf{\Lambda}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_\alpha + u_\omega(X_1, \mu_\alpha) \mathbf{\Lambda}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (2.5)$$

De acuerdo a lo descrito anteriormente, se debe notar que las coordenadas a lo largo de los ejes  $\hat{\mathbf{E}}_\alpha$  o  $\hat{\mathbf{e}}_\alpha$  de un punto material sobre la sección tienen valores idénticos, lo cual se debe a que se desprecian las contracciones laterales de la sección debido a una elongación axial. A su vez, sabiendo que los sistemas  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  y  $(X_1, X_2, X_3)$  sólo difieren en una traslación, la ecuación (2.5) se transforma en:

$$\mathbf{x}(X_i) = \mathbf{r}(X_1) + X_\alpha \mathbf{\Lambda}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_\alpha + u_\omega(X_i) \mathbf{\Lambda}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (2.6)$$

El campo de desplazamiento  $\mathbf{U}(X_i) \in \mathbb{R}^3$  se determina a partir de la diferencia entre los vectores posición  $\mathbf{x}(X_i)$  y  $\mathbf{X}(X_i)$ , es decir,  $\mathbf{U}(X_i) = \mathbf{x}(X_i) - \mathbf{X}(X_i)$ . Considerando las ecuaciones (2.2) y (2.6) se obtiene:

$$\mathbf{U}(X_i) = \mathbf{r}(X_1) + X_\alpha \mathbf{\Lambda}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_\alpha + u_\omega(X_i) \mathbf{\Lambda}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 - X_1 \hat{\mathbf{E}}_1 - X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha \quad (2.7)$$

De la expresión anterior se deduce que la diferencia  $\mathbf{r}(X_1) - X_1 \hat{\mathbf{E}}_1$  determina el desplazamiento del eje de la viga y se denotará por medio de la función  $\mathbf{U}_0(X_1)$ . Consecuentemente, la ecuación (2.7) resulta:

$$\mathbf{U}(X_i) = \mathbf{U}_0(X_1) + [\mathbf{\Lambda}(X_1) - \mathbf{I}] X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + u_\omega(X_i) \mathbf{\Lambda}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1, \quad (2.8)$$

siendo  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  el tensor identidad de segundo orden. Asimismo, resulta de interés expresar el campo de desplazamiento en la base  $\{\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2, \hat{\mathbf{g}}_3\}$  del sistema global. Para ello se premultiplica al vector  $\mathbf{U}(X_i)$  por el tensor de rotación constante  $\mathbf{\Lambda}_c$  introducido previamente y definido por:

$$\mathbf{\Lambda}_c = \hat{\mathbf{g}}_i \otimes \hat{\mathbf{n}}_i = \hat{\mathbf{g}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_i, \quad (2.9)$$

el cual relaciona las bases  $\{\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \hat{\mathbf{E}}_3\}$  y  $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$  con la base  $\{\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2, \hat{\mathbf{g}}_3\}$ , es decir  $\hat{\mathbf{g}}_i = \mathbf{\Lambda}_c \hat{\mathbf{E}}_i = \mathbf{\Lambda}_c \hat{\mathbf{n}}_i$ . De ello resulta:

$$\mathbf{U}^G(X_i) = \mathbf{\Lambda}_c \left\{ \mathbf{U}_0(X_1) + [\mathbf{\Lambda}(X_1) - \mathbf{I}] X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + u_\omega(X_i) \mathbf{\Lambda}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 \right\} \quad (2.10)$$

La ecuación (2.8) o la (2.10) permiten inferir que el campo de desplazamiento  $\mathbf{U}(X_i)$  o  $\mathbf{U}^G(X_i)$  queda completamente caracterizado por medio de la superposición de tres efectos: la traslación de la línea que representa al eje de la viga (primer término), la rotación de la sección transversal como cuerpo rígido (segundo término), y el desplazamiento axial que produce el alabeo por torsión (tercer término). Esta expresión admite rotaciones finitas de la sección y grandes desplazamientos del eje de la viga. Además, se observa que las bases  $\{\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \hat{\mathbf{E}}_3\}$  y  $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$  se pueden usar indistintamente ya que los versores que las constituyen son coincidentes.

### 2.1.3.1 Linealización del tensor de rotación

El teorema de Euler establece que el desplazamiento más general de un cuerpo rígido con un punto fijo es una rotación alrededor de un eje, el cual se denomina eje instantáneo de rotación y pasa a través de ese punto fijo. De acuerdo a este teorema, la rotación se especifica por medio del vector  $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{e}$ , donde  $\theta$  es el ángulo de rotación y  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$  es el vector unitario que define al eje de rotación [13]. Sean los vectores  $\mathbf{z}_0, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ , la transformación de  $\mathbf{z}_0$  en  $\mathbf{z}$  bajo una rotación caracterizada por  $\boldsymbol{\theta}$  se expresa a través del siguiente mapa:

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}) \mathbf{z}_0, \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un tensor de rotación que transforma linealmente e isométricamente un vector en otro vector. En general, un tensor de estas características se puede representar de múltiples formas, una de ellas es en función del ángulo  $\theta$  y del vector  $\mathbf{e}$  empleando la fórmula de Rodrigues [104]:

$$\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}) = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{e}} \sin(\theta) + 2\tilde{\mathbf{e}}^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.12)$$

donde  $\tilde{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  es un tensor antisimétrico cuyo vector axial asociado es el vector  $\mathbf{e}$ . En virtud de ello, se satisface que  $\tilde{\mathbf{e}} \mathbf{z} = \mathbf{e} \times \mathbf{z} \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ , donde  $\times$  denota la operación producto vectorial. Para obtener una expresión equivalente a la ecuación (2.12), pero bajo la hipótesis de rotaciones infinitesimales, se expande en serie de Taylor a la función trigonométrica seno alrededor de  $\theta = 0$ . De ello resulta:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots \\ \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1}{4}\theta^2 - \frac{1}{48}\theta^4 + \frac{1}{1440}\theta^6 - \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

Reemplazando la ecuación anterior en la ecuación (2.12) se obtiene:

$$\mathbf{\Lambda}(\theta, \mathbf{e}) = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{e}} \left( \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots \right) + 2\tilde{\mathbf{e}}^2 \left( \frac{1}{4}\theta^2 - \frac{1}{48}\theta^4 + \frac{1}{1440}\theta^6 - \dots \right) \quad (2.14)$$

Asumiendo rotaciones infinitesimales ( $\theta \ll 1$ ) es posible despreciar todos aquellos términos que incluyan el ángulo  $\theta$  elevado a potencias iguales o superiores a 2. El orden de estos términos se indicará por medio de  $O(\theta^2)$ , donde  $O$  representa al símbolo de orden. Bajo estas consideraciones se obtiene la versión linealizada del tensor de rotación expresado en (2.14) como:

$$\mathbf{\Lambda}_l(\theta, \mathbf{e}) = \mathbf{I} + \theta\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta, \mathbf{e}) \quad (2.15)$$

Por simplicidad se agrupó el producto  $\theta\tilde{\mathbf{e}}$  en un nuevo tensor antisimétrico  $\tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta, \mathbf{e}) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ . A continuación, se evalúan dos aspectos: la ortogonalidad del tensor y la conmutatividad de las rotaciones. Para analizar el primer aspecto se efectúa el producto entre el tensor  $\mathbf{\Lambda}_l(\theta, \mathbf{e})$  y su transpuesto, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_l(\theta, \mathbf{e})\mathbf{\Lambda}_l(\theta, \mathbf{e})^T &= \left[ \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta, \mathbf{e}) \right] \left[ \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta, \mathbf{e}) \right]^T \\ \mathbf{\Lambda}_l(\theta, \mathbf{e})\mathbf{\Lambda}_l(\theta, \mathbf{e})^T &= \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta, \mathbf{e}) + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta, \mathbf{e})^T + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta, \mathbf{e})\tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta, \mathbf{e})^T = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta, \mathbf{e})\tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta, \mathbf{e}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

De la ecuación anterior se puede observar que el producto entre el tensor de rotación linealizado y su transpuesto no produce al tensor identidad sino que, adicionalmente, surge un término que es función del cuadrado del ángulo. Como este último término es de  $O(\theta^2)$  se concluye que la versión linealizada del tensor de rotación es ortogonal hasta primer orden [49]. Para analizar la conmutatividad se consideran dos rotaciones sucesivas caracterizadas por los tensores  $\mathbf{\Lambda}_l(\theta_1, \mathbf{e}_1)$  y  $\mathbf{\Lambda}_l(\theta_2, \mathbf{e}_2)$  que actúan sobre un vector arbitrario  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ . Por ende, se puede expresar:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_l(\theta_1, \mathbf{e}_1)\mathbf{\Lambda}_l(\theta_2, \mathbf{e}_2)\mathbf{z} &= \left[ \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_1, \mathbf{e}_1) \right] \left[ \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_2, \mathbf{e}_2) \right] \mathbf{z} \\ &= \left[ \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_1, \mathbf{e}_1) + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_2, \mathbf{e}_2) + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_1, \mathbf{e}_1)\tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_2, \mathbf{e}_2) \right] \mathbf{z} \\ \mathbf{\Lambda}_l(\theta_2, \mathbf{e}_2)\mathbf{\Lambda}_l(\theta_1, \mathbf{e}_1)\mathbf{z} &= \left[ \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_2, \mathbf{e}_2) \right] \left[ \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_1, \mathbf{e}_1) \right] \mathbf{z} \\ &= \left[ \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_2, \mathbf{e}_2) + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_1, \mathbf{e}_1) + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_2, \mathbf{e}_2)\tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_1, \mathbf{e}_1) \right] \mathbf{z} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nuevamente, los productos entre los tensores  $\tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_1, \mathbf{e}_1)$  y  $\tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_2, \mathbf{e}_2)$  son función del cuadrado del ángulo. Como esos ángulos son infinitesimales el producto entre los tensores antisimétricos es de  $O(\theta^2)$  y se desprecia. Por esta razón, las rotaciones son conmutativas hasta primer orden y se puede expresar que:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_l(\theta_1, \mathbf{e}_1)\mathbf{\Lambda}_l(\theta_2, \mathbf{e}_2)\mathbf{z} &\approx \mathbf{\Lambda}_l(\theta_2, \mathbf{e}_2)\mathbf{\Lambda}_l(\theta_1, \mathbf{e}_1)\mathbf{z} \\ \left[ \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_1, \mathbf{e}_1) + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_2, \mathbf{e}_2) \right] \mathbf{z} &\approx \left[ \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_2, \mathbf{e}_2) + \tilde{\mathbf{\Theta}}(\theta_1, \mathbf{e}_1) \right] \mathbf{z} \end{aligned} \quad (2.18)$$

La ecuación (2.18) tiene una implicancia significativa en el ámbito de la mecánica, ya que revela que las rotaciones infinitesimales pertenecen a un espacio lineal, es decir, estas rotaciones pueden ser tratadas como entidades vectoriales [49].

### 2.1.3.2 Linealización del campo de desplazamiento

En el campo estructural es bien sabido que las formulaciones de viga geoméricamente exactas admiten rotaciones finitas de la sección transversal [11]. En virtud de ello, es necesario describir al campo de desplazamiento mediante expresiones que involucren al tensor no lineal de rotación, análogas a la presentada en la ecuación (2.8) o (2.10). En el modelo que se propone en este trabajo las rotaciones se consideran infinitesimales, por lo tanto resulta indispensable obtener una expresión del campo de desplazamiento que se ajuste a tal hipótesis. Para ello, se introduce la versión linealizada del tensor de rotación dada por (2.15) en la ecuación (2.8) resultando:

$$\mathbf{U}_l(X_i) = \mathbf{U}_0(X_1) + [\mathbf{I} + \tilde{\Theta}(X_1) - \mathbf{I}] X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + u_\omega(X_i) [\mathbf{I} + \tilde{\Theta}(X_1)] \hat{\mathbf{E}}_1, \quad (2.19)$$

la cual, operando, se puede reescribir como,

$$\mathbf{U}_l(X_i) = \mathbf{U}_0(X_1) + \tilde{\Theta}(X_1) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + u_\omega(X_i) [\mathbf{I} + \tilde{\Theta}(X_1)] \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (2.20)$$

Adicionalmente, la introducción de un tensor linealizado en la formulación cinemática de la viga tiene dos implicaciones que merecen ser comentadas. En primer lugar, al asumir rotaciones infinitesimales y desplazamientos pequeños comparados con la longitud de la viga  $L$ , resulta válido considerar que la configuración de referencia  $\mathcal{C}_0$  y la configuración actual  $\mathcal{C}$  se encuentran próximas entre sí, aspecto que será de utilidad en los siguientes capítulos. En segundo lugar y poniendo en consideración lo mencionado, las componentes  $\theta_i(X_1)$  del tensor  $\tilde{\Theta}(X_1)$  pueden ser interpretadas como rotaciones infinitesimales alrededor de los ejes coordenados  $X_i$ . La versión explícita del tensor antisimétrico  $\tilde{\Theta}(X_1) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  en conjunto con su vector axial asociado están dados por,

$$\tilde{\Theta}(X_1) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3(X_1) & \theta_2(X_1) \\ \theta_3(X_1) & 0 & -\theta_1(X_1) \\ -\theta_2(X_1) & \theta_1(X_1) & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}(X_1) = \begin{bmatrix} \theta_1(X_1) \\ \theta_2(X_1) \\ \theta_3(X_1) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Por otra parte, en esta etapa de la formulación es necesario profundizar respecto al alabeo por torsión. En relación a ello se conoce que una sección no circular sujeta a un momento torsor experimenta desplazamientos fuera del plano conocidos como desplazamientos por alabeo. Para cuantificar este fenómeno se introdujo en la expresión del campo de desplazamiento el vector  $\mathbf{u}_\omega(X_i)$ , cuya norma euclídea está dada por la función escalar  $u_\omega(X_i)$  y su dirección por el versor  $\hat{\mathbf{e}}_1$ , el cual es normal a la sección plana. En la Figura 2.3 se esquematiza a la viga en su configuración deformada, donde se puede observar el efecto del alabeo superpuesto

a la sección plana. Con el propósito de explicitar a la función  $u_\omega(X_i)$  se adopta el principio de Saint-Venant, quien establece que la proyección de la sección deformada por alabeo sobre el plano que contiene a la sección indeformada coincide con la forma de la sección original [13]. Además, este principio supone que las deformaciones y tensiones axiales inducidas por el alabeo son despreciables. Sin embargo, esto último sólo se cumple si la viga esta sometida a un momento torsor constante a lo largo de su eje y si no existen restricciones al alabeo. A pesar de ello, esta teoría brinda una buena aproximación para situaciones donde el momento torsor no es uniforme, fundamentalmente para vigas de secciones sólidas y de secciones celulares huecas [79]. En base a lo expuesto, la magnitud del desplazamiento axial inducido por alabeo se expresa de manera proporcional al ángulo de torsión por unidad de longitud  $\phi(X_1)$  [8]. Este ángulo se calcula a partir del giro por torsión  $\theta_1(X_1)$  como,

$$\phi(X_1) = \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \quad (2.22)$$

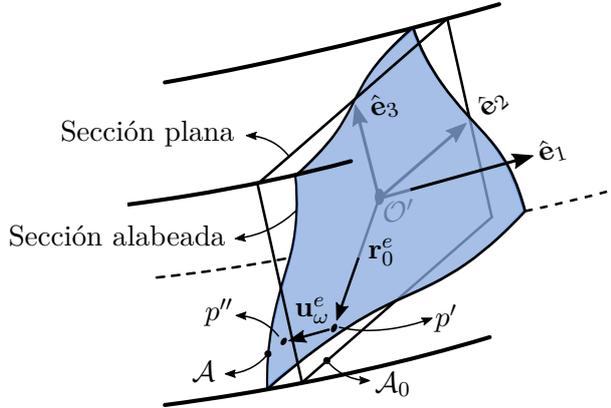
En consecuencia, la función  $u_\omega(X_i)$  se define de la siguiente manera:

$$u_\omega(X_i) = \phi(X_1) \omega(X_\alpha) = \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \omega(X_\alpha) \quad (2.23)$$

La ecuación anterior pone de manifiesto que la magnitud del desplazamiento axial que induce el alabeo se define a través del producto entre el ángulo por unidad de longitud  $\phi(X_1)$  y una función  $\omega(X_\alpha)$  que se denomina función de *warping* o alabeo. Considerando que, para una sección dada, el ángulo por unidad de longitud  $\phi(X_1)$  es constante, la función de alabeo caracteriza la magnitud del desplazamiento de los diferentes puntos que componen a la sección. La función de alabeo depende de la geometría y de los materiales que integran a la sección y su determinación requiere resolver un problema de valores en la frontera (ecuación de Laplace) con condiciones de borde de Neumann. En la literatura existen soluciones de esta ecuación para secciones de geometría simple y homogéneas [83], mientras que para secciones complejas y compuestas por múltiples materiales la solución puede obtenerse utilizando técnicas de aproximación, por ejemplo, haciendo uso del método de elementos finitos [60, 97]. En este trabajo, la función de alabeo no representa una incógnita sino que se supone conocida para las secciones de interés. A continuación, se reemplaza la aproximación dada por la ecuación (2.23) en la ecuación (2.20) resultando:

$$\mathbf{U}_i(X_i) = \mathbf{U}_0(X_1) + \tilde{\Theta}(X_1) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \omega(X_\alpha) \tilde{\Theta}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (2.24)$$

El último término de la expresión anterior contiene el producto entre la derivada del giro por torsión  $\partial \theta_1(X_1)/\partial X_1$  y el tensor  $\tilde{\Theta}(X_1)$ . Asumiendo que  $\partial \theta_1(X_1)/\partial X_1$  tiene el mismo orden que las componentes del tensor  $\tilde{\Theta}(X_1)$ , entonces el último término de (2.24) puede despreciarse.



**Figura 2.3:** Sección transversal bajo movimiento de cuerpo rígido ( $\mathcal{A}_0$ ) y sección transversal alabeada por torsión ( $\mathcal{A}$ ) en dirección  $\hat{e}_1$ .

En consecuencia, el campo de desplazamiento linealizado  $\mathbf{U}_l(X_i)$  resulta:

$$\mathbf{U}_l(X_i) = \mathbf{U}_0(X_1) + \tilde{\Theta}(X_1)X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1)\omega(X_\alpha)\hat{\mathbf{E}}_1 \quad (2.25)$$

Por último, se expresa al campo linealizado  $\mathbf{U}_l(X_i)$  en el sistema de referencia global por medio del tensor de rotación  $\Lambda_c$  resultando:

$$\mathbf{U}_l^g(X_i) = \Lambda_c \left[ \mathbf{U}_0(X_1) + \tilde{\Theta}(X_1)X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1)\omega(X_\alpha)\hat{\mathbf{E}}_1 \right] \quad (2.26)$$

Las últimas dos expresiones describen completamente la cinemática del modelo de viga propuesto en el presente trabajo, satisfaciendo de manera simultánea las hipótesis 1 a 3 definidas en la subsección 2.1.1.

#### 2.1.4 Tensor de deformaciones de Green-Lagrange

Los cambios que experimenta la geometría de un cuerpo continuo  $\mathcal{B}_0$  que está sujeto a la acción de un sistema de cargas externas puede ser cuantificado de diversas maneras. Una de las etapas previas a la obtención de la formulación variacional del continuo y, por ende del modelo de elementos finitos, consiste en la selección de una medida de deformación. A tal efecto, reviste interés introducir una cantidad básica en el análisis de deformaciones que se denomina tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  [91],

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}, \quad (2.27)$$

el cual proporciona la relación entre una línea material  $d\mathbf{X} \in \kappa(\mathcal{B}_0)$  antes de la deformación y la misma línea material  $d\mathbf{x} \in \chi(\kappa(\mathcal{B}_0), t)$  después de la deformación para un instante de tiempo  $t$  [91]. Este tensor se puede calcular a partir del vector posición  $\mathbf{x}(X_i)$  en la configuración actual

de una partícula que ocupa la posición  $\mathbf{X}(X_i)$  en la configuración de referencia:

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x}(X_i) = \mathbf{x}(X_i) \otimes \nabla, \quad (2.28)$$

donde  $\nabla$  denota al operador Nabla. En el presente desarrollo y siguiendo el enfoque Lagrangiano se optó por trabajar con la medida de deformación descrita por el tensor de Green-Lagrange  $\mathbf{E}_{gl}^{\mathcal{G}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ . Este tensor se puede definir en términos del gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  a través de la siguiente expresión:

$$\mathbf{E}_{gl}^{\mathcal{G}}(X_i) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.29)$$

Una definición alternativa del tensor de Green-Lagrange se obtiene a partir del tensor gradiente de desplazamiento  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ . Éste se calcula por medio de:

$$\mathbf{H} = \nabla \mathbf{U}_l^{\mathcal{G}}(X_i) = \mathbf{U}_l^{\mathcal{G}}(X_i) \otimes \nabla \quad (2.30)$$

No obstante, existe una identidad tensorial que relaciona el gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  con el gradiente de desplazamiento  $\mathbf{H}$  que está dada por:

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (2.31)$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (2.31) en la ecuación (2.29) resulta la expresión del tensor de Green-Lagrange en términos del gradiente  $\mathbf{H}$  [91]:

$$\mathbf{E}_{gl}^{\mathcal{G}}(X_i) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (2.32)$$

De acuerdo a lo expuesto en las subsecciones anteriores resulta conveniente obtener el tensor de Green-Lagrange a partir de la ecuación (2.32) y del campo de desplazamiento especificado por la ecuación (2.26). Como el campo  $\mathbf{U}_l^{\mathcal{G}}(X_i)$  está expresado en la base del sistema global, el operador Nabla se define por:

$$\nabla \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_k} \hat{\mathbf{g}}_k \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_k} \mathbf{\Lambda}_c \hat{\mathbf{E}}_k \quad (2.33)$$

Luego, se calcula el gradiente de desplazamiento reemplazando la ecuación (2.26) en la (2.30):

$$\mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial X_k} \left\{ \mathbf{\Lambda}_c \left[ \mathbf{U}_0(X_1) + \tilde{\Theta}(X_1) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \right] \right\} \otimes \mathbf{\Lambda}_c \hat{\mathbf{E}}_k \quad (2.34)$$

Como el tensor  $\mathbf{\Lambda}_c$  es constante se lo puede extraer como factor común e introducir el operador gradiente dentro del corchete. Además, distribuyendo este operador en cada término y aplicando

propiedades tensoriales resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \Lambda_c \left\{ \frac{\partial}{\partial X_k} \mathbf{U}_0(X_1) \otimes \hat{\mathbf{E}}_k + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \tilde{\Theta}(X_1) X_\alpha \right] \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_k + \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \right] \otimes \hat{\mathbf{E}}_k \right\} \Lambda_c^T \end{aligned} \quad (2.35)$$

Con el propósito de clarificar el procedimiento seguido se detallan en el Apéndice 2.A los pasos y las propiedades utilizadas en la obtención del tensor de Green-Lagrange, aquí solo se presentan los pasos principales. Luego, la ecuación (2.35) se puede escribir de la siguiente manera,

$$\mathbf{H} = \Lambda_c \left( \mathbf{b}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{b}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \tilde{\Theta} \right) \Lambda_c^T, \quad (2.36)$$

donde  $\mathbf{b}_1$  y  $\mathbf{b}_\alpha$  se definen por:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial X_1}(X_1) - \tilde{\Theta}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 + X_\alpha \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial X_1}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1, \\ \mathbf{b}_\alpha &= \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha}(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Aquí  $\mathbf{b}_1$  es un vector que contiene deformaciones que surgen del movimiento de cuerpo rígido de la sección y del alabeo por torsión. De acuerdo al principio de Saint-Venant, el último término de  $\mathbf{b}_1$  debería anularse ya que este principio supone un momento torsor constante sobre la viga, lo cual implica una distribución lineal del giro por torsión. Sin embargo, este término no será eliminado ya que se admite la posibilidad de un momento torsor no uniforme. Por otro lado,  $\mathbf{b}_\alpha$  es un vector que contiene las deformaciones de corte provenientes del alabeo por torsión. El gradiente de desplazamiento transpuesto se obtiene transponiendo la ecuación (2.36), esto es:

$$\mathbf{H}^T = \left[ \Lambda_c \left( \mathbf{b}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{b}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \tilde{\Theta} \right) \Lambda_c^T \right]^T = \Lambda_c \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1 + \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha - \tilde{\Theta} \right) \Lambda_c^T \quad (2.38)$$

Adicionalmente, se tiene que, para determinar el tensor de Green-Lagrange también se necesita conocer el producto entre  $\mathbf{H}^T$  y  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \Lambda_c \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1 + \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha - \tilde{\Theta} \right) \Lambda_c^T \Lambda_c \left( \mathbf{b}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{b}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \tilde{\Theta} \right) \Lambda_c^T \quad (2.39)$$

Expandiendo la ecuación (2.39) y operando sobre ella se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \Lambda_c \left[ (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1) \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_\alpha) \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) + \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1 \right) \tilde{\Theta} + \right. \\ \left. + (\mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_1) \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + (\mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\alpha) \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) + \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha \right) \tilde{\Theta} - \right. \\ \left. - \tilde{\Theta} \left( \mathbf{b}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) - \tilde{\Theta} \left( \mathbf{b}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) - \tilde{\Theta} \tilde{\Theta} \right] \Lambda_c^T, \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde  $\cdot$  denota producto escalar. Sustituyendo las ecuaciones (2.36), (2.38) y (2.40) en la ecuación (2.32) resulta el tensor de deformaciones de Green-Lagrange:

$$\mathbf{E}_{gl}^{\mathcal{G}}(X_i) = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{G}\mathbf{E}_{gl}^l(X_i) + \mathcal{G}\mathbf{E}_{gl}^{nl}(X_i) \right] \quad (2.41)$$

La ecuación anterior pone de manifiesto que el tensor de Green-Lagrange  $\mathbf{E}_{gl}^{\mathcal{G}}(X_i)$  se representa matemáticamente a través de la suma de dos tensores simétricos, un tensor lineal denotado por  $\mathcal{G}\mathbf{E}_{gl}^l(X_i)$  y uno no lineal denotado por  $\mathcal{G}\mathbf{E}_{gl}^{nl}(X_i)$ . La versión explícita del primero de ellos está dada por:

$$\mathcal{G}\mathbf{E}_{gl}^l(X_i) = \mathbf{\Lambda}_c \left( \mathbf{b}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha \right) \mathbf{\Lambda}_c^T, \quad (2.42)$$

y la versión explícita del segundo de ellos por:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}\mathbf{E}_{gl}^{nl}(X_i) = & \mathbf{\Lambda}_c \left[ \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1 \right) \tilde{\mathbf{\Theta}} - \tilde{\mathbf{\Theta}} \left( \mathbf{b}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha \right) \tilde{\mathbf{\Theta}} - \tilde{\mathbf{\Theta}} \left( \mathbf{b}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) + \right. \\ & + \left( \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 \right) \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + \left( \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\alpha \right) \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) + \left( \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_\alpha \right) \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) + \\ & \left. + \left( \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_1 \right) \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) - \tilde{\mathbf{\Theta}} \tilde{\mathbf{\Theta}} \right] \mathbf{\Lambda}_c^T \end{aligned} \quad (2.43)$$

El tensor  $\mathcal{G}\mathbf{E}_{gl}^l(X_i)$ , conocido en la literatura como tensor de pequeñas deformaciones, posee tres componentes no nulas, una componente de deformación axial y dos componentes de corte. Mientras que el tensor no lineal  $\mathcal{G}\mathbf{E}_{gl}^{nl}(X_i)$  contribuye a las mismas componentes de deformación que  $\mathcal{G}\mathbf{E}_{gl}^l(X_i)$ , pero adicionalmente aporta términos en las restantes componentes normales de deformación, lo cual proviene del término asociado al alabeo por torsión. Además, las expresiones anteriores muestran que el tensor de Green-Lagrange se obtuvo en la configuración de referencia y está expresado respecto de la base  $\{\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2, \hat{\mathbf{g}}_3\}$ . Por último, si en la ecuación (2.30) se sustituye a  $\mathbf{U}_l^{\mathcal{G}}(X_i)$  por  $\mathbf{U}_l(X_i)$  y se define al operador Nabla mediante:

$$\nabla \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_k} \hat{\mathbf{E}}_k, \quad (2.44)$$

se obtiene el tensor de deformaciones en el sistema de referencia local:

$$\mathbf{E}_{gl}(X_i) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_{gl}^l(X_i) + \mathbf{E}_{gl}^{nl}(X_i) \right], \quad (2.45)$$

donde  $\mathbf{E}_{gl}^l(X_i) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  está dado por:

$$\mathbf{E}_{gl}^l(X_i) = \mathbf{b}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha, \quad (2.46)$$

y  $\mathbf{E}_{gl}^{nl}(X_i) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{gl}^{nl}(X_i) = & \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1 \right) \tilde{\Theta} - \tilde{\Theta} \left( \mathbf{b}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha \right) \tilde{\Theta} - \tilde{\Theta} \left( \mathbf{b}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) + \\ & + \left( \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 \right) \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + \left( \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_\alpha \right) \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) + \left( \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_\alpha \right) \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) + \\ & + \left( \mathbf{b}_\alpha \cdot \mathbf{b}_1 \right) \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) - \tilde{\Theta} \tilde{\Theta} \end{aligned} \quad (2.47)$$

#### 2.1.4.1 Tensor de deformaciones de Von Kármán

El tensor de deformaciones de Von Kármán se deriva a partir del tensor de Green-Lagrange presentado en la subsección previa. A tal fin, se retienen las componentes lineales de deformación y las no lineales que surgen exclusivamente de adoptar la hipótesis cinemática de Von Kármán. Esta hipótesis establece que a medida que aumenta su esbeltez la viga puede experimentar rotaciones moderadas, incluso cuando las deformaciones son pequeñas. En consecuencia, como los términos asociados a los desplazamientos transversales,

$$\frac{\partial U_0^\alpha}{\partial X_1}(X_1), \quad (2.48)$$

son una medida de la rotación del eje de la viga pueden ser considerados de un orden intermedio [95]. Con la finalidad de lograr una simplificación consistente de términos y, siguiendo a los trabajos expuestos en la literatura [92, 126] se propone:

$$\frac{\partial U_0^\alpha}{\partial X_1} \sim O(\sqrt{\theta}), \quad \frac{\partial U_0^1}{\partial X_1} \sim O(\theta), \quad \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial X_1} \sim O(\tilde{\Theta}) \sim O(\theta) \quad (2.49)$$

Lo anterior indica que los términos de Von Kármán se asumen del mismo orden que las rotaciones infinitesimales contenidas en el tensor antisimétrico  $\tilde{\Theta}(X_1)$ . Basado en lo expuesto, se puede efectuar un análisis de orden sobre los términos de la ecuación (2.43) y retener todas aquellas componentes de  $O(\theta)$  inclusive. Si bien en este trabajo no se detalla el análisis de orden, el lector puede dirigirse a la obra de Pérez Segura [86], quien efectúa un estudio minucioso al respecto. De acuerdo a lo mencionado anteriormente, se concluye que el único término no lineal a considerar es,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = & \left( \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial X_1} - \tilde{\Theta} \hat{\mathbf{E}}_1 + X_\alpha \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \omega(X_\alpha) \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial X_1} - \tilde{\Theta} \hat{\mathbf{E}}_1 + \right. \\ & \left. + X_\alpha \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \omega(X_\alpha) \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2} \hat{\mathbf{E}}_1 \right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

el cual, luego de efectuar el producto escalar, se reduce a:

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 \approx \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial X_1} \quad (2.51)$$

Si se expresa al vector  $\mathbf{U}_0(X_1)$  en componentes y se lo sustituye en la ecuación anterior se obtiene:

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 \approx \frac{\partial U_0^k}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_k \cdot \frac{\partial U_0^l}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_l = \left( \frac{\partial U_0^1}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_0^2}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_0^3}{\partial X_1} \right)^2 \quad (2.52)$$

Se observa que el primer término del miembro derecho de la ecuación (2.52) es de  $O(\theta^2)$ . Por lo tanto, dicho término se desprecia y las componentes de deformación de Von Kármán resultan:

$$\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 \approx \left( \frac{\partial U_0^2}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial U_0^3}{\partial X_1} \right)^2 \quad (2.53)$$

Teniendo en cuenta que el único término no lineal no nulo es el presentado con anterioridad, el tensor de deformaciones de Von Kármán  $\mathbf{E}_{vk}(X_i) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{vk}^G(X_i) = & \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{\Lambda}_c \left( \mathbf{b}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha \right) \mathbf{\Lambda}_c^T + \right. \\ & \left. + \mathbf{\Lambda}_c \left[ (\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0) \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \right] \mathbf{\Lambda}_c^T \right\} \end{aligned} \quad (2.54)$$

La ecuación (2.54) expone que el tensor de Von Kármán está dado por la suma de dos tensores simétricos, uno de ellos lineal y el otro no lineal. El primero de ellos es idéntico al tensor lineal de Green-Lagrange, mientras que el tensor no lineal está compuesto por una única componente que corresponde a una deformación normal. A su vez, un análisis sobre el tensor  $\mathbf{E}_{vk}^G(X_i)$  revela que no existen contribuciones de los desplazamientos transversales  $U_0^\alpha(X_1)$  en la componente lineal de deformación normal. Por esta razón, si se pretende considerar el efecto de estos desplazamientos en la única componente normal de deformación, indefectiblemente hay que considerar términos no lineales. La expresión del tensor de Von Kármán en el sistema local se obtiene efectuando las simplificaciones correspondientes sobre la ecuación (2.46):

$$\mathbf{E}_{vk}(X_i) = \frac{1}{2} \left[ \left( \mathbf{b}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha \right) + (\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0) \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \right] \quad (2.55)$$

Finalmente, se introduce una notación alternativa para representar tensores simétricos de segundo orden, y por ende el tensor de deformaciones. Los aspectos conceptuales más importantes de esta representación, denominada notación de Mandel-Kelvin, se exponen en el Anexo A tanto para tensores de segundo orden como para aquellos de tercer y cuarto orden. Considerando la ecuación (A.8) el tensor  $\mathbf{E}_{vk}(X_i)$  se puede expresar como,

$$\bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i) = \left[ E_{11}(X_i) \quad E_{22}(X_i) \quad E_{33}(X_i) \quad \sqrt{2}E_{12}(X_i) \quad \sqrt{2}E_{23}(X_i) \quad \sqrt{2}E_{13}(X_i) \right]^T \quad (2.56)$$

donde,

$$E_{22}(X_i) = E_{33}(X_i) = E_{23}(X_i) = 0 \quad (2.57)$$

Mientras que las componentes no nulas están dadas por:

$$\begin{aligned}
E_{11}(X_i) &= \frac{\partial U_0^1}{\partial X_1}(X_1) + X_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial X_1}(X_1) - X_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial X_1}(X_1) + \omega(X_\alpha) \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_0^2}{\partial X_1}(X_1) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_0^3}{\partial X_1}(X_1) \right]^2 \\
E_{12}(X_i) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial U_0^2}{\partial X_1}(X_1) - \theta_3(X_1) - \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \left[ X_3 - \frac{\partial \omega}{\partial X_2}(X_\alpha) \right] \right\} \\
E_{13}(X_i) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial U_0^3}{\partial X_1}(X_1) + \theta_2(X_1) + \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \left[ X_2 + \frac{\partial \omega}{\partial X_3}(X_\alpha) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Claramente, esta notación permite representar a los tensores de segundo orden mediante vectores o tensores de primer orden.

## 2.2 Relaciones constitutivas en piezoelasticidad

En mecánica de medios continuos las variables cinemáticas o primarias tales como deformaciones o campos eléctricos y, las variables cinéticas o secundarias tales como tensiones o desplazamientos eléctricos se introducen de manera independiente. Para el caso de cuerpos deformables, estas variables no son suficientes para describir completamente la respuesta del sólido bajo deformación. En efecto, se requiere introducir un conjunto adicional de ecuaciones, denominadas *relaciones constitutivas*, que vinculan o relacionan las variables cinéticas con las variables cinemáticas. Estas ecuaciones no se derivan de ningún principio físico, sino que son postulados que se basan fundamentalmente en observaciones experimentales. A pesar de que los datos experimentales se utilizan en la definición de ciertos parámetros intrínsecos al material, el modelo matemático que describe la respuesta real del material debe seguir ciertas reglas o axiomas tal como expone Reddy [91]. En este trabajo interesan únicamente los materiales elásticos, cuyo comportamiento se especifica a través de relaciones constitutivas que son función únicamente del estado actual de las variables primarias. Además, se asume que estas ecuaciones son isotérmicas, es decir, se consideran independientes de la temperatura.

En esta sección se presentan las relaciones constitutivas para los dos materiales de la viga, tanto para el material del sustrato como para los transductores piezoeléctricos. En primer lugar, se efectúa un abordaje general para un sólido elástico tridimensional, luego se expone una versión de las relaciones constitutivas que se adecúa al modelo de viga.

### 2.2.1 Relaciones constitutivas para material elástico, isotrópico y homogéneo

El comportamiento elástico del material del sustrato de la viga se evalúa a partir de la ley Hooke generalizada. Esta ley establece que el estado tensional asociado a un punto del cuerpo elástico es una función lineal del estado actual de deformación. Es importante reconocer que la

expresión matemática que define a esta ley debe involucrar medidas consistentes de tensión y de deformación [91, 104]. En este sentido, sabiendo que el tensor de Green-Lagrange y el de Von Kármán están expresados respecto a la configuración indeformada, se debe adoptar un tensor de tensiones definido en la misma configuración; a tal efecto, se adopta el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchoff. Además, se debe destacar que este tensor carece de sentido físico si se lo compara con el tensor de tensiones de Cauchy, el cual se expresa en la configuración actual y comúnmente se denomina tensor de tensiones reales. Por conveniencia, se considera que las relaciones constitutivas se definen en el sistema de referencia local utilizando la base vectorial  $\{\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \hat{\mathbf{E}}_3\}$  y el sistema de referencia  $(X_1, X_2, X_3)$  de la Figura 2.2. Por lo tanto, la ley de Hooke para un cuerpo elástico tridimensional bajo condiciones isotérmicas está dada por la siguiente expresión [29]:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C}_s : \mathbf{E}_{gl} \quad (2.59)$$

Se observa de (2.59) que el tensor de deformaciones es la variable cinemática y el tensor de tensiones la variable cinética. El símbolo  $:$  denota una doble contracción tensorial. En notación indicial las relaciones constitutivas se pueden expresar de la siguiente manera,

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}, \quad (2.60)$$

donde  $C_{ijkl}$  son las componentes cartesianas del tensor de elasticidad (o tensor constitutivo)  $\mathbb{C}_s \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ ,  $S_{ij}$  las componentes cartesianas del segundo tensor de tensiones simétrico de Piola-Kirchoff  $\mathbf{S} \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  y  $E_{kl}$  las componentes cartesianas del tensor de deformaciones simétrico  $\mathbf{E}_{gl} \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  de Green-Lagrange. Por su parte, el espacio vectorial  $\mathcal{L}$  representa al espacio de tensores simétricos de segundo orden y su definición se presenta en el Anexo A. Además, como los tensores de la ecuación (2.59) se expresan en términos de una base vectorial ortonormal, no hay distinción entre componentes covariantes y contravariantes.

En general, el tensor de elasticidad posee 81 componentes escalares a determinar. Sin embargo, la simetría de los tensores de tensiones y de deformaciones garantiza simetría menor del tensor constitutivo, es decir, simetría respecto de los dos primeros y de los dos últimos índices:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jikl} \quad (2.61)$$

Por ende el número de constantes a determinar se reduce a 36. Además, se impone la condición de simetría mayor del tensor constitutivo,

$$C_{klij} = C_{ijkl}, \quad (2.62)$$

con lo cual las constantes a determinar se limitan a 21 y de esta manera se puede afirmar que  $\mathbb{C}_s \in \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ , donde  $\mathcal{N}$  es un espacio vectorial definido en el Anexo A.

Asimismo, es importante comentar que la ecuación (2.62) exige que el trabajo externo neto en un ciclo completo de carga y descarga sea nulo, lo cual permite calcular a la energía interna de deformación utilizando la definición dada en el Capítulo 4. Por otro lado, se sabe que el sustrato satisface las propiedades de isotropía y homogeneidad. La primera de ellas implica que las propiedades del material son independientes de la dirección considerada, mientras que la segunda indica que tales propiedades son idénticas en cada uno de los puntos del sólido. En consecuencia, el número de constantes elásticas a determinar se reduce a 2 y se denominan *constantes de Lammé*. Por último, la simetría de los tensores introducidos con anterioridad favorece la representación de las ecuaciones constitutivas mediante la notación de Mandel-Kelvin. Luego, a partir de las ecuaciones (A.8) y (A.26) se expresa a la ecuación (2.59) como:

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{C}}_s \bar{\mathbf{E}}_{gl}, \quad (2.63)$$

donde  $\bar{\mathbf{S}} \in \mathcal{L}^* \subset \mathbb{R}^6$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_s \in \mathcal{N}^* \subset \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$  y  $\bar{\mathbf{E}}_{gl} \in \mathcal{L}^* \subset \mathbb{R}^6$ . Por su parte, los espacios vectoriales  $\mathcal{L}^*$  y  $\mathcal{N}^*$  se definen en el Anexo A y sus bases tensoriales se construyen empleando la base vectorial  $\{\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \hat{\mathbf{E}}_3\}$  junto a la ecuación (A.6). La versión explícita de la ecuación anterior es:

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ \sqrt{2} S_{12} \\ \sqrt{2} S_{23} \\ \sqrt{2} S_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \sqrt{2} E_{12} \\ \sqrt{2} E_{23} \\ \sqrt{2} E_{13} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Mientras que las componentes elásticas del tensor constitutivo están dadas por:

$$C_{1111} = E_s \frac{1 - \nu_s}{(1 - \nu_s)(1 + 2\nu_s)}, \quad C_{1122} = E_s \frac{\nu_s}{(1 - \nu_s)(1 + 2\nu_s)}, \quad C_{1212} = E_s \frac{1}{2(1 + \nu_s)}, \quad (2.65)$$

donde  $E_s$  es el módulo de elasticidad o módulo de Young del material y  $\nu_s$  es el coeficiente de Poisson.

Por otro lado, por razones de completitud es interesante conocer como se transforman las relaciones constitutivas de una base a otra. En este sentido, se pretende expresar a la ecuación (2.63) con respecto al sistema de referencia global cuya base vectorial asociada es  $\{\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2, \hat{\mathbf{g}}_3\}$ . A partir de esta última y de la ecuación (A.9) se construye la base tensorial del sistema global. Luego, teniendo en cuenta la ley de transformación dada por la ecuación (A.12) resulta,

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{\Lambda}}_c^T \bar{\mathbf{S}}_G, \quad \bar{\mathbf{E}}_{gl} = \bar{\mathbf{\Lambda}}_c^T \bar{\mathbf{E}}_{gl}^G, \quad (2.66)$$

donde  $\bar{\mathbf{\Lambda}}_c \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$  es el tensor de rotación ortogonal que se obtiene utilizando la expresión (A.10). Sustituyendo la ecuación (2.66) en la (2.63) y operando algebraicamente se obtienen las

relaciones constitutivas respecto de la base del sistema global:

$$\bar{\mathbf{S}}_{\mathcal{G}} = \bar{\mathbf{C}}_s^{\mathcal{G}} \bar{\mathbf{E}}_{gl}^{\mathcal{G}}, \quad \bar{\mathbf{C}}_s^{\mathcal{G}} = \bar{\mathbf{\Lambda}}_c \bar{\mathbf{C}}_s \bar{\mathbf{\Lambda}}_c^T \quad (2.67)$$

### 2.2.2 Relaciones constitutivas para material piezoeléctrico

El comportamiento electroelástico de un material piezoeléctrico se estudia a partir de relaciones constitutivas que se basan en la teoría piezoeléctrica lineal [28]. Estas relaciones acoplan la teoría de la elasticidad lineal con la teoría electrostática a través de los coeficientes piezoeléctricos. En la teoría lineal, los coeficientes elásticos, piezoeléctricos y dieléctricos se asumen constantes e independientes del campo eléctrico y del estado de deformación. No obstante, esta hipótesis tiene validez para bajos campos eléctricos y pequeñas deformaciones mecánicas. Las relaciones constitutivas se pueden expresar de diversas maneras según las variables primarias adoptadas. En este trabajo, el tensor de deformaciones y el vector campo eléctrico se seleccionan como variables primarias ya que resulta apropiado para el desarrollo posterior de la formulación de elementos finitos. Por conveniencia, estas ecuaciones se expresan en el sistema de referencia local utilizando la base  $\{\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \hat{\mathbf{E}}_3\}$  y el sistema de coordenadas  $(X_1^k, X_2^k, X_3^k)$  de la Figura 2.2. En consecuencia, las relaciones constitutivas bajo condiciones isotérmicas para un cuerpo piezoelástico tridimensional resultan,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbb{C}_p : \mathbf{E}_{gl} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e} : \mathbf{E}_{gl} + \epsilon_E \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.68)$$

o en notación indicial se expresan como [53]:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= C_{ijkl}^p E_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_i &= e_{ikl} E_{kl} + \epsilon_{ik} E_k, \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde  $C_{ijkl}^p$  son las componentes cartesianas del tensor de elasticidad (o tensor constitutivo) de cuarto orden a campo eléctrico constante  $\mathbb{C}_p \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ ,  $S_{ij}$  las componentes cartesianas del segundo tensor de tensiones simétrico de Piola-Kirchoff  $\mathbf{S} \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ ,  $E_{kl}$  las componentes cartesianas del tensor de deformaciones simétrico de Green-Lagrange  $\mathbf{E}_{gl} \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ ,  $e_{kij}$  las componentes cartesianas del tensor de coeficientes piezoeléctricos de tercer orden a deformación constante  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ ,  $\epsilon_{ik}^E$  las componentes cartesianas del tensor de segundo orden de permitividad eléctrica a deformación constante  $\epsilon_E \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ ,  $E_k$  las componentes cartesianas del vector campo eléctrico  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^3$  y  $D_i$  las componentes cartesianas del vector desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^3$ . A su vez, como los vectores y tensores se definen en una base vectorial ortonormal no es necesario diferenciar entre componentes covariantes y contravariantes.

Por otro lado, como el tensor de elasticidad satisface las condiciones de simetría dadas

por las ecuaciones (2.61) y (2.62) hay 21 coeficientes elásticos a determinar y, por consiguiente, se puede afirmar que  $\mathbb{C}_p \in \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ . Asimismo, el tensor de coeficientes piezoeléctricos posee simetría respecto de los dos últimos índices:

$$e_{ikl} = e_{ilk}, \quad (2.70)$$

en consecuencia, el número de coeficientes desconocidos que lo componen es de 18 y  $\mathbf{e} \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  (ver Anexo A). Mientras que el tensor de permitividad eléctrica satisface la condición:

$$\epsilon_{ik}^E = \epsilon_{ki}^E, \quad (2.71)$$

lo que implica que  $\epsilon_E \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  y, por lo tanto, posee 6 constantes dieléctricas a ser determinadas. Las propiedades de simetría previamente descritas permiten representar a las ecuaciones constitutivas utilizando la notación de Mandel-Kelvin. Por consiguiente, teniendo en cuenta las ecuaciones (A.8), (A.18) y (A.26) resulta:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \bar{\mathbf{C}}_p \bar{\mathbf{E}}_{gl} - \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{gl} + \epsilon_E \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

donde  $\bar{\mathbf{S}} \in \mathcal{L}^* \subset \mathbb{R}^6$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_p \in \mathcal{N}^* \subset \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$ ,  $\bar{\mathbf{E}}_{gl} \in \mathcal{L}^* \subset \mathbb{R}^6$ ,  $\bar{\mathbf{e}} \in \mathcal{M}^* \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6$  y  $\epsilon^E \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ . Los espacios vectoriales  $\mathcal{L}^*$ ,  $\mathcal{M}^*$  y  $\mathcal{N}^*$  se definen en el Anexo A y sus bases tensoriales se construyen empleando la base  $\{\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \hat{\mathbf{E}}_3\}$  y la ecuación (A.6).

Análogamente al material del sustrato, es de interés conocer como se transforman estas relaciones de una base a otra. Se busca expresar a la ecuación (2.72) en el sistema de referencia global cuya base vectorial es  $\{\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2, \hat{\mathbf{g}}_3\}$ . Por lo tanto, a partir de la ecuación (A.9) y de esta base se construye la base tensorial del sistema global. Luego, teniendo en cuenta las leyes de transformación correspondientes (Anexo A) se tiene:

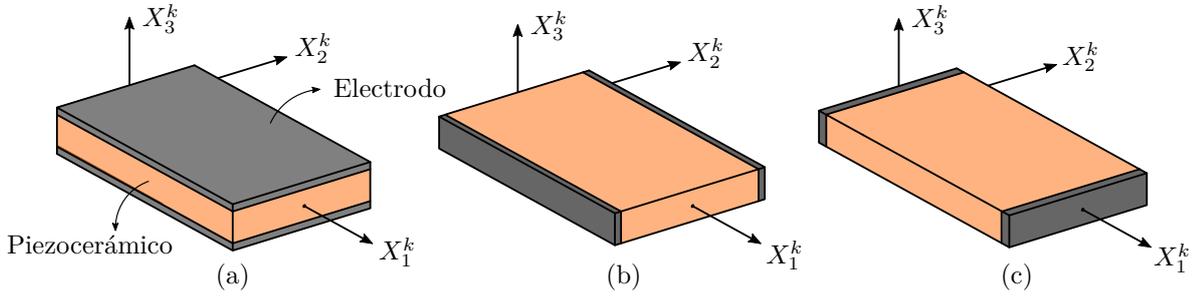
$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\Lambda}_c^T \bar{\mathbf{S}}_G, \quad \bar{\mathbf{E}}_{gl} = \bar{\Lambda}_c^T \bar{\mathbf{E}}_{gl}^G, \quad \mathbf{E} = \Lambda_c^T \mathbf{E}_G, \quad \mathbf{D} = \Lambda_c^T \mathbf{D}_G, \quad (2.73)$$

donde  $\bar{\Lambda}_c \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$  es el tensor de rotación ortogonal que se obtiene a partir de (A.10) y de  $\Lambda_c \in SO(3)$ . Reemplazando la ecuación (2.73) en la (2.72) y operando convenientemente resultan las ecuaciones constitutivas en la nueva base:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_G &= \bar{\mathbf{C}}_p^G \bar{\mathbf{E}}_{gl}^G - \bar{\mathbf{e}}_G^T \mathbf{E}_G \\ \mathbf{D}_G &= \bar{\mathbf{e}}_G \bar{\mathbf{E}}_{gl}^G + \epsilon_E^G \mathbf{E}_G, \end{aligned} \quad (2.74)$$

donde:

$$\bar{\mathbf{C}}_p^G = \bar{\Lambda}_c \bar{\mathbf{C}}_p \bar{\Lambda}_c^T, \quad \bar{\mathbf{e}}_G = \Lambda_c \bar{\mathbf{e}} \bar{\Lambda}_c^T, \quad \epsilon_E^G = \Lambda_c \epsilon_E \Lambda_c^T \quad (2.75)$$



**Figura 2.4:** (a) Lámina piezocerámica polarizada en dirección  $X_3^k$ . (b) Lámina piezocerámica polarizada en dirección  $X_2^k$ . (c) Lámina piezocerámica polarizada en dirección  $X_1^k$ .

En este trabajo existe particular interés en un tipo de piezoeléctrico que se denomina piezocerámico, el cual es un material sintético caracterizado por un efecto piezoeléctrico de mayor intensidad que los materiales naturales. A diferencia de estos últimos, los piezocerámicos no poseen características piezoeléctricas en su estado original, razón por la cual necesitan ser polarizados para adquirir este efecto. La polarización es un proceso que consiste en aplicar un voltaje externo de alta intensidad entre un par de electrodos situados estratégicamente sobre el material según la dirección de polarización deseada. A modo ilustrativo, en la Figura 2.4 se esquematiza el  $k$ -ésimo transductor piezocerámico con los electrodos ubicados de tres maneras diferentes: (a) paralelos al plano  $X_1^k - X_2^k$ , (b) paralelos al plano  $X_1^k - X_3^k$  y (c) paralelos al plano  $X_2^k - X_3^k$ . En cada una de estas alternativas, la dirección de polarización es perpendicular al plano de los electrodos. Por consiguiente, para la primera de ellas la dirección está dada por  $X_3^k$ , para la segunda por  $X_2^k$  y para la tercera por  $X_1^k$ . Desde un punto de vista constitutivo, el material sintético posee características isotrópicas antes de ser polarizado, pero luego de este proceso se convierte en anisótropo. A pesar de esto, un transductor como el de la Figura 2.4 puede ser idealizado como transversalmente isotrópico, es decir, los planos perpendiculares a la dirección de polarización son isótropos [28]. Para modelar su comportamiento se pueden utilizar las relaciones constitutivas definidas en la ecuación (2.73) aunque sus coeficientes dependerán de la dirección de polarización adoptada. Observando la Figura 2.1 se deduce que la sección transversal está compuesta por transductores piezocerámicos similares al expuesto en la Figura 2.4a. Por consiguiente, las relaciones constitutivas se presentan para tal configuración. Debido a la condición de isotropía transversal, el número de coeficientes desconocidos se reduce a 5 para el tensor constitutivo, a 3 para el tensor de coeficientes piezoeléctricos y a 2 para el tensor de permitividad eléctrica. De esta manera, la versión explícita de las ecuaciones constitutivas

en notación de Mandel-Kelvin se pueden expresar de la siguiente manera [76]:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}e_{113} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}e_{113} & 0 \\ e_{311} & e_{311} & e_{333} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \sqrt{2}E_{12} \\ \sqrt{2}E_{23} \\ \sqrt{2}E_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^E & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^E & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ \sqrt{2}S_{12} \\ \sqrt{2}S_{23} \\ \sqrt{2}S_{13} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \sqrt{2}E_{12} \\ \sqrt{2}E_{23} \\ \sqrt{2}E_{13} \end{bmatrix} - \\
 &- \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{311} \\ 0 & 0 & e_{311} \\ 0 & 0 & e_{333} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}e_{113} & 0 \\ \sqrt{2}e_{113} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

Los coeficientes elásticos a campo eléctrico constante resultan:

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= \frac{pE_1(pE_1\nu_{31}^2 - pE_3)}{\Delta(\nu_{12} + 1)}, \quad C_{1122} = \frac{-pE_1(pE_1\nu_{31}^2 + pE_3\nu_{12})}{\Delta(1 + \nu_{12})}, \quad C_{2323} = \frac{pE_3}{(1 + \nu_{31})} \\
 C_{3333} &= \frac{pE_3^2(\nu_{12} - 1)}{\Delta}, \quad C_{1133} = \frac{-pE_1pE_3\nu_{31}}{\Delta}, \quad C_{1212} = \frac{pE_1}{(1 + \nu_{12})}
 \end{aligned} \quad (2.77)$$

con  $\Delta = 2_pE_1\nu_{31}^2 - pE_3 + pE_3\nu_{12}$ . En este caso  $_pE_1$  y  $_pE_3$  son los correspondientes módulos de elasticidad o módulos de Young y,  $\nu_{12}$  y  $\nu_{31}$  los coeficientes de Poisson. Por su parte, los coeficientes piezoeléctricos a deformación constante están dados por:

$$\begin{aligned}
 e_{311} &= \frac{pE_1pE_3(d_{311} + \nu_{31}d_{333})}{\Delta}, \quad e_{333} = \frac{pE_3^2(d_{333} - \nu_{12}d_{333}) + 2pE_3pE_1\nu_{31}d_{311}}{\Delta} \\
 e_{113} &= \frac{-pE_3d_{113}}{2(1 + \nu_{31})},
 \end{aligned} \quad (2.78)$$

donde  $d_{311}$ ,  $d_{113}$  y  $d_{333}$  son los coeficientes piezoeléctricos a tensión mecánica constante. Por

último, los coeficientes de permitividad eléctrica a deformación constante son:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11}^E &= \epsilon_{11}^S - \frac{{}_pE_3 d_{113}^2}{2(\nu_{31} + 1)} \\ \epsilon_{33}^E &= \epsilon_{33}^S + \frac{{}_pE_3 [{}_pE_3 d_{333}^2 (1 - \nu_{12}) + 2{}_pE_1 d_{311} (d_{311} + 2\nu_{31} d_{333})]}{\Delta},\end{aligned}\tag{2.79}$$

donde  $\epsilon_{11}^S$  y  $\epsilon_{33}^S$  son los coeficientes de permitividad eléctrica a tensión mecánica constante. En el Anexo C se tabulan los coeficientes elásticos, piezoeléctricos y dieléctricos de dos piezocerámicos típicos.

### 2.2.3 Relaciones constitutivas para el modelo de viga

El comportamiento electroelástico de una viga piezoeléctrica que posee una sección transversal similar a la de la Figura 2.1 se puede evaluar mediante la combinación apropiada de las relaciones constitutivas de los materiales involucrados. En consecuencia, las ecuaciones para el modelo de viga en notación tensorial se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \mathbb{C} : \mathbf{E}_{vk} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e} : \mathbf{E}_{vk} + \epsilon_E \cdot \mathbf{E}\end{aligned}\tag{2.80}$$

En este caso,  $\mathbf{E}_{vk} \in \mathcal{L}$  corresponde al tensor de Von Kármán definido en (2.55), mientras que  $\mathbb{C} \in \mathcal{N}$  es un tensor de elasticidad que incorpora la contribución tanto del sustrato como de los transductores piezocerámicos. En notación de Mandel-Kelvin se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}} &= \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{E}}_{vk} - \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{E}} \\ \bar{\mathbf{D}} &= \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{vk} + \bar{\epsilon}_E \bar{\mathbf{E}},\end{aligned}\tag{2.81}$$

donde  $\bar{\mathbf{E}}_{vk}$  está dado por la ecuación (2.56). Las propiedades electromecánicas son función de las coordenadas  $X_\alpha$  pues ciertas regiones de la sección transversal están ocupadas por el sustrato y otras por los piezocerámicos. Por consiguiente, se puede especificar que:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{0}, \bar{\epsilon} = \mathbf{0} \text{ y } \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}_s \text{ para } \mathcal{B}_0^{n_t+1} &= \mathcal{P} \times \mathcal{A}_0^{n_t+1} \\ \bar{\mathbf{e}} \neq \mathbf{0}, \bar{\epsilon} \neq \mathbf{0} \text{ y } \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}_p \text{ para } \mathcal{B}_0^i &= \mathcal{P} \times \mathcal{A}_0^i \quad \forall i = 1, \dots, n_t\end{aligned}\tag{2.82}$$

$\mathcal{B}_0^{n_t+1}$  denota el volumen ocupado por el sustrato elástico en la configuración de referencia, el cual se define a través del producto cartesiano entre el subdominio  $\mathcal{A}_0^{n_t+1}$  y la recta  $\mathcal{P}$ ; mientras que  $\mathcal{B}_0^i$  denota el volumen ocupado por el  $i$ -ésimo transductor piezoeléctrico en la configuración de referencia, el cual se define mediante el producto cartesiano entre el subdominio  $\mathcal{A}_0^i$  y la recta  $\mathcal{P}$ . De este modo, el volumen  $\mathcal{B}_0$  se puede expresar mediante la unión de subdominios

elementales:

$$\mathcal{B}_0 = \bigcup_{i=1}^{n_t+1} \mathcal{B}_0^i \quad \text{con} \quad \mathcal{B}_0^i \cap \mathcal{B}_0^j = \emptyset \quad \text{y} \quad i \neq j \quad (2.83)$$

En las dos subsecciones anteriores se presentaron las relaciones constitutivas en su versión tridimensional tanto para un material elástico e isotrópico como para un material piezoeléctrico. Estas relaciones deben ser simplificadas a partir de las hipótesis que caracterizan al modelo de viga con el objetivo de hallar una versión que describa al modelo estructural desarrollado. En este sentido, de la ecuación (2.61) se desprende que:

$$E_{22} = E_{33} = E_{23} = 0 \quad (2.84)$$

Además, considerando la expresión anterior, la hipótesis 5 enunciada en la subsección 2.2.1 y las relaciones constitutivas descritas previamente se llega a:

$$S_{22} \approx S_{33} \approx 0 \quad \text{y} \quad S_{23} = 0 \quad (2.85)$$

De acuerdo a lo expuesto por Shames [105], en un modelo de viga las tensiones normales asociadas a cargas transversales pueden ser despreciadas frente a la tensión normal debido a flexión y esfuerzo axial, hecho que justifica la simplificación introducida anteriormente. Por lo tanto, la versión explícita de las relaciones constitutivas definidas en la ecuación (2.82) es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_{11} \\ \sqrt{2}S_{12} \\ \sqrt{2}S_{13} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{1111} & 0 & 0 \\ 0 & 2C_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ \sqrt{2}E_{12} \\ \sqrt{2}E_{13} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{311} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}e_{113} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}e_{113} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{311} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ \sqrt{2}E_{12} \\ \sqrt{2}E_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^E & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^E & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Los coeficientes elásticos para el dominio ocupado por el sustrato  $\mathcal{B}_0^{n_t+1}$  son:

$$C_{1111} = E = E_s \quad , \quad C_{1212} = G_2 = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \quad , \quad C_{2323} = G_3 = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)} \quad (2.87)$$

Mientras que los coeficientes elásticos para el dominio  $\mathcal{B}_0^i$  ocupado por el  $i$ -ésimo transductor son:

$$C_{1111} = E = {}_pE_1 \quad , \quad C_{1212} = G_2 = \frac{{}_pE_1}{2(1+\nu_{12})} \quad , \quad C_{2323} = G_3 = \frac{{}_pE_3}{2(1+\nu_{31})} \quad (2.88)$$

La componente  $C_{1111}$  para ambos materiales se determina igualando a cero los coeficientes de Poisson de las ecuaciones (2.65) y (2.77) debido a que la contracción lateral es ignorada. Los coeficientes piezoeléctricos y dieléctricos para el dominio ocupado por el  $i$ -ésimo transductor

están dados por:

$$e_{113} = \frac{pE_3d_{113}}{2(1 + \nu_{31})} \quad , \quad e_{311} = pE_1d_{311} \quad , \quad \epsilon_{11}^E = \epsilon_{11}^S - \frac{pE_3d_{113}^2}{(1 + \nu_{31})} \quad , \quad \epsilon_{33}^E = \epsilon_{33}^S - pE_1d_{311}^2 \quad (2.89)$$

Antes de finalizar con esta sección, dos aspectos merecen ser comentados. Por un lado, resulta de interés notar que la representación en notación de Mandel-Kelvin de los tensores de tensiones, de deformaciones y de coeficientes piezoeléctricos que componen la ecuación (2.86) presentan una reducción en sus dimensiones respecto a los dados en la ecuación (2.76). Si bien esta reducción se debe a las hipótesis adoptadas en el modelo de viga hay que tener presente que, para mantener el carácter tensorial, estas cantidades deben tener las mismas dimensiones que sus análogos de la ecuación (2.76). Esto se consigue expandiendo y completando apropiadamente con ceros. Por otro lado, para expresar a la ecuación (2.86) en el sistema de referencia global se necesita considerar lo mencionado anteriormente. Es decir, la dimensión de los vectores y matrices de (2.86) tiene que ser consistente con aquellos dados en (2.76). De esta manera, los tensores de rotación  $\bar{\mathbf{\Lambda}}_c$  y  $\mathbf{\Lambda}_c$  se pueden emplear sin inconvenientes.

# Apéndices

## 2.A Obtención del tensor de Green-Lagrange

Poniendo en consideración lo presentado en la subsección 2.1.4, el tensor de deformaciones de Green-Lagrange  $\mathbf{E}_{gl} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  se determina, por definición, a partir de la siguiente expresión [91]:

$$\mathbf{E}_{gl}(X_i) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (2.A.1)$$

Para computar el gradiente de desplazamiento  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  se considera el sistema de referencia  $(X_1, X_2, X_3)$  y la base ortonormal  $\{\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \hat{\mathbf{E}}_3\}$  asociada, véase Figura 2.2. En consecuencia, se puede expresar:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}_l^{\mathcal{G}}(X_i) \otimes \nabla = \mathbf{U}_l(X_i) \otimes \frac{\partial}{\partial X_k} \Lambda_c \hat{\mathbf{E}}_k, \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial X_k} \Lambda_c \hat{\mathbf{E}}_k \equiv \frac{\partial}{\partial X_k} \hat{\mathbf{g}}_k \quad (2.A.2)$$

Reemplazando el campo de desplazamiento  $\mathbf{U}_l^{\mathcal{G}}(X_i) \in \mathbb{R}^3$  dado por la ecuación (2.26) en la (2.A.2) resulta:

$$\mathbf{H}(X_i) = \Lambda_c \left[ \mathbf{U}_0(X_1) + \tilde{\Theta}(X_1) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \right] \otimes \frac{\partial}{\partial X_k} \Lambda_c \hat{\mathbf{E}}_k \quad (2.A.3)$$

Distribuyendo el operador derivada sobre los términos del corchete de (2.A.3) se tiene:

$$\mathbf{H} = \Lambda_c \left\{ \frac{\partial}{\partial X_k} \mathbf{U}_0(X_1) + \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \tilde{\Theta}(X_1) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right] + \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \right] \right\} \otimes \Lambda_c \hat{\mathbf{E}}_k \quad (2.A.4)$$

La propiedad tensorial  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{A}\mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{A}^T \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  y  $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  permite expresar a (2.A.4) de la siguiente manera [27]:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \Lambda_c \left\{ \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \tilde{\Theta}(X_1) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right] \otimes \hat{\mathbf{E}}_k \right\} \Lambda_c^T + \\ & + \Lambda_c \left\{ \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \right] \otimes \hat{\mathbf{E}}_k \right\} \Lambda_c^T + \Lambda_c \left\{ \frac{\partial}{\partial X_k} \mathbf{U}_0(X_1) \otimes \hat{\mathbf{E}}_k \right\} \Lambda_c^T \end{aligned} \quad (2.A.5)$$

A continuación, se calculan los gradientes de los términos situados entre llaves. En este sentido, para el primer término del miembro derecho de (2.A.5) se tiene que el tensor antisimétrico

$\tilde{\Theta}(X_1) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  es función de  $X_1$  y que el vector  $X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha$  es función de  $X_2$  y  $X_3$ . Por lo tanto, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \tilde{\Theta}(X_1) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right] \otimes \hat{\mathbf{E}}_k &= \left[ \frac{\partial}{\partial X_k} \tilde{\Theta}(X_1) \right] (X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \otimes \hat{\mathbf{E}}_k + \\ &+ \tilde{\Theta}(X_1) \left[ \frac{\partial}{\partial X_k} (X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \right] \otimes \hat{\mathbf{E}}_k \\ &= \frac{\partial}{\partial X_1} \tilde{\Theta}(X_1) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\Theta}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \end{aligned} \quad (2.A.6)$$

Considerando el segundo término del miembro derecho de (2.A.5) se observa que la derivada del giro  $\theta_1(X_1)$  es función de  $X_1$  y que la función de alabeo depende de  $X_2$  y  $X_3$ . En consecuencia, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \right] \otimes \hat{\mathbf{E}}_k &= \frac{\partial}{\partial X_k} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1} \right) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_k + \\ &+ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1} \frac{\partial}{\partial X_k} \left[ \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \right] \otimes \hat{\mathbf{E}}_k \\ &= \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \\ &+ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha}(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \end{aligned} \quad (2.A.7)$$

Finalmente, para el tercer término del miembro derecho de la expresión (2.A.5) se deduce que el desplazamiento del eje de la viga  $\mathbf{U}_0(X_1)$  es únicamente función de la coordenada espacial  $X_1$ . Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_k} \mathbf{U}_0(X_1) \otimes \hat{\mathbf{E}}_k &= \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{U}_0(X_1) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial}{\partial X_2} \mathbf{U}_0(X_1) \otimes \hat{\mathbf{E}}_2 + \frac{\partial}{\partial X_3} \mathbf{U}_0(X_1) \otimes \hat{\mathbf{E}}_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{U}_0(X_1) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \end{aligned} \quad (2.A.8)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.A.6) a (2.A.8) en (2.A.5) y, sumando y restando el término  $\tilde{\Theta}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1$  dentro de las llaves se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \Lambda_c \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{U}_0 + \frac{\partial}{\partial X_1} \tilde{\Theta}(X_1) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \right] \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \left[ \tilde{\Theta}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha}(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \right] \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \tilde{\Theta}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\Theta}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right\} \Lambda_c^T \end{aligned} \quad (2.A.9)$$

A su vez, teniendo en cuenta la siguiente relación,

$$\tilde{\Theta}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \tilde{\Theta}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 = \tilde{\Theta}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_k \otimes \hat{\mathbf{E}}_k = \tilde{\Theta}(X_1), \quad (2.A.10)$$

la ecuación (2.A.9) se puede expresar como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Lambda}_c \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{U}_0(X_1) + \frac{\partial}{\partial X_1} \tilde{\Theta}(X_1) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\Theta}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 \right] \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha}(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \right] \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \tilde{\Theta}(X_1) \right\} \mathbf{\Lambda}_c^T \quad (2.A.11)$$

Posteriormente, designando mediante  $\mathbf{b}_1(X_i)$  y  $\mathbf{b}_\alpha(X_i)$  a los términos ubicados dentro de los corchetes en la ecuación (2.A.11) resulta,

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Lambda}_c \left[ \mathbf{b}_1(X_i) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{b}_\alpha(X_i) \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \tilde{\Theta}(X_1) \right] \mathbf{\Lambda}_c^T, \quad (2.A.12)$$

donde  $\mathbf{b}_1(X_i)$  y  $\mathbf{b}_\alpha(X_i)$  están dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1(X_i) &= \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial X_1}(X_1) - \tilde{\Theta}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 + X_\alpha \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial X_1}(X_1) \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \\ \mathbf{b}_\alpha(X_i) &= \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha}(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \end{aligned} \quad (2.A.13)$$

Por otro lado, para obtener  $\mathbf{H}^T$  se necesita trasponer la ecuación (2.A.12), de lo cual se obtiene:

$$\mathbf{H}^T = \mathbf{\Lambda}_c \left[ \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1(X_i) + \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha(X_i) + \tilde{\Theta}^T(X_1) \right] \mathbf{\Lambda}_c^T \quad (2.A.14)$$

Como el tensor  $\tilde{\Theta}(X_1)$  es antisimétrico se cumple que  $\tilde{\Theta}^T(X_1) = -\tilde{\Theta}(X_1)$ . Por consiguiente, la ecuación (2.A.14) se expresa como:

$$\mathbf{H}^T = \mathbf{\Lambda}_c \left[ \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1(X_i) + \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha(X_i) - \tilde{\Theta}(X_1) \right] \mathbf{\Lambda}_c^T \quad (2.A.15)$$

Por último, se requiere calcular el producto  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ , el cual está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^T \mathbf{H} &= \mathbf{\Lambda}_c \left[ \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1(X_i) + \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha(X_i) - \tilde{\Theta}(X_1) \right] \mathbf{\Lambda}_c^T \mathbf{\Lambda}_c \left[ \mathbf{b}_1(X_i) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{b}_\alpha(X_i) \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \tilde{\Theta}(X_1) \right] \mathbf{\Lambda}_c^T \end{aligned} \quad (2.A.16)$$

Operando sobre los términos de la expresión anterior, considerando que  $\mathbf{\Lambda}_c^T \mathbf{\Lambda}_c = \mathbf{\Lambda}_c \mathbf{\Lambda}_c^T = \mathbf{I}$  (por ser  $\mathbf{\Lambda}_c \in SO(3)$  un tensor ortonormal  $\mathbf{\Lambda}_c^T = \mathbf{\Lambda}_c^{-1}$ ) y teniendo en cuenta la propiedad tensorial  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}) \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$  se obtiene [27]:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^T \mathbf{H} &= \mathbf{\Lambda}_c \left\{ [\mathbf{b}_1(X_i) \cdot \mathbf{b}_1(X_i)] \left[ \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right] + [\mathbf{b}_\alpha(X_i) \cdot \mathbf{b}_\alpha(X_i)] \left[ \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right] + \right. \\ &\quad + [\mathbf{b}_1(X_i) \cdot \mathbf{b}_\alpha(X_i)] \left[ \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right] + [\mathbf{b}_\alpha(X_i) \cdot \mathbf{b}_1(X_i)] \left[ \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right] + \\ &\quad + \left[ \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1(X_i) \right] \tilde{\Theta}(X_1) - \tilde{\Theta}(X_1) \left[ \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1(X_i) \right] + \left[ \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha(X_i) \right] \tilde{\Theta}(X_1) - \\ &\quad \left. - \tilde{\Theta}(X_1) \left[ \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha(X_i) \right] - \tilde{\Theta}(X_1) \tilde{\Theta}(X_1) \right\} \mathbf{\Lambda}_c^T \end{aligned} \quad (2.A.17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.A.12), (2.A.15) y (2.A.17) en la ecuación (2.A.1) resulta,

$$\mathbf{E}_{gl}(X_i) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_{gl}^l(X_i) + \mathbf{E}_{gl}^{nl}(X_i) \right], \quad (2.A.18)$$

donde la componente lineal  $\mathbf{E}_{gl}^l(X_i) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  del tensor  $\mathbf{E}_{gl}(X_i)$  es:

$$\mathbf{E}_{gl}^l(X_i) = \mathbf{\Lambda}_c \left[ \mathbf{b}_1(X_i) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1(X_i) + \mathbf{b}_\alpha(X_i) \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha(X_i) \right] \mathbf{\Lambda}_c^T \quad (2.A.19)$$

Y la componente no lineal  $\mathbf{E}_{gl}^{nl}(X_i) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  del tensor  $\mathbf{E}_{gl}(X_i)$  es:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{gl}^{nl}(X_i) = & \mathbf{\Lambda}_c \left\{ \left[ \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1(X_i) \right] \tilde{\mathbf{\Theta}}(X_1) - \tilde{\mathbf{\Theta}}(X_1) \left[ \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{b}_1(X_i) \right] + \right. \\ & + \left[ \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha(X_i) \right] \tilde{\mathbf{\Theta}}(X_1) - \tilde{\mathbf{\Theta}}(X_1) \left[ \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\alpha(X_i) \right] + \\ & + [\mathbf{b}_1(X_i) \cdot \mathbf{b}_1(X_i)] \left[ \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right] + [\mathbf{b}_\alpha(X_i) \cdot \mathbf{b}_\alpha(X_i)] \left[ \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right] + \\ & + [\mathbf{b}_1(X_i) \cdot \mathbf{b}_\alpha(X_i)] \left[ \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right] + [\mathbf{b}_\omega(X_i) \cdot \mathbf{b}_1(X_i)] \left[ \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right] - \\ & \left. - \tilde{\mathbf{\Theta}}(X_1) \tilde{\mathbf{\Theta}}(X_1) \right\} \mathbf{\Lambda}_c^T \end{aligned} \quad (2.A.20)$$

Por último, vale la pena notar que las ecuaciones (2.A.19) y (2.A.20) ponen de manifiesto que para rotar una entidad tensorial se debe premultiplicar y posmultiplicar dicha entidad por el tensor de rotación.

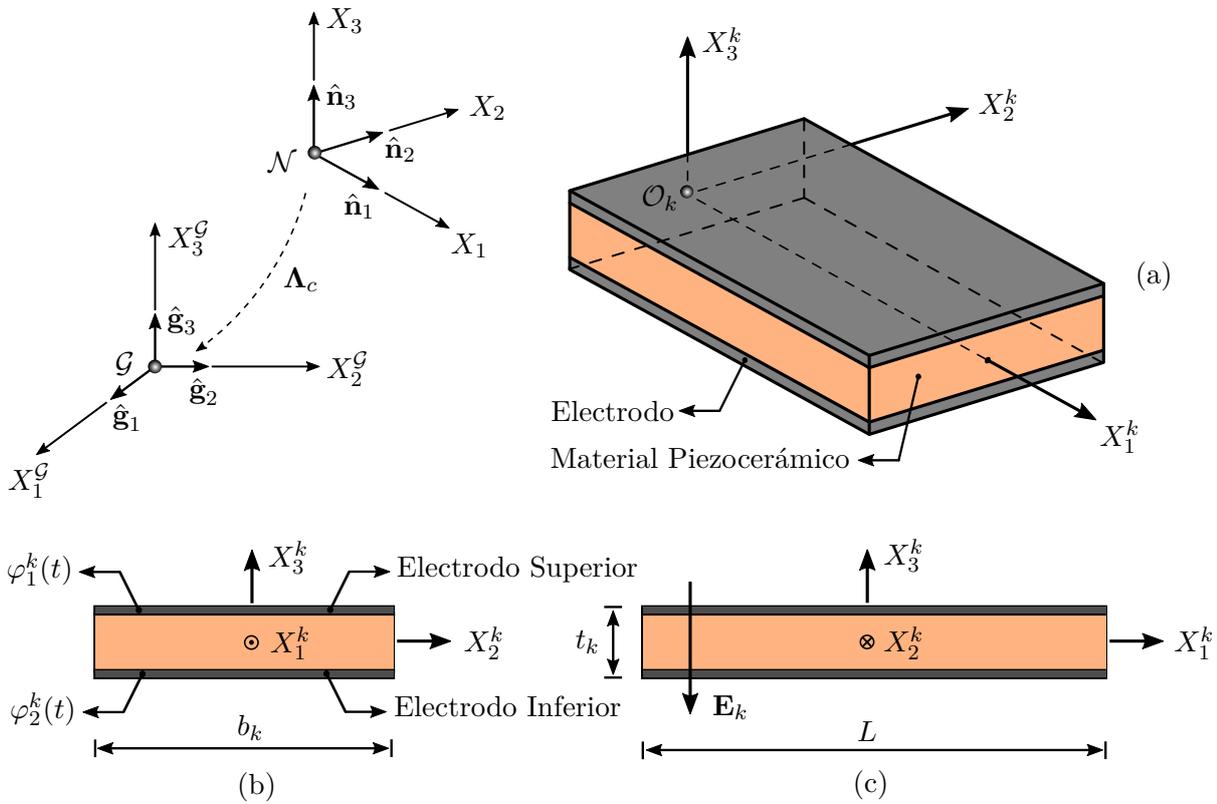
## Aspectos eléctricos del modelo

En el presente capítulo se discuten los aspectos eléctricos asociados al modelo de viga desarrollado. El mismo comienza con una breve descripción de las principales características del transductor piezocerámico utilizado. A continuación, se establecen una serie de simplificaciones y se utiliza la teoría piezoeléctrica lineal para derivar una expresión para el campo eléctrico del transductor. Posteriormente, se presenta el circuito eléctrico empleado para cosechar o recolectar energía y se analizan las conexiones eléctricas entre transductores. Por último, se derivan las ecuaciones diferenciales que gobiernan el desempeño de cada circuito siguiendo un enfoque puramente eléctrico. Esto se efectúa considerando una conexión en paralelo entre componentes eléctricos. Adicionalmente, en el Apéndice del capítulo se detallan las relaciones constitutivas que rigen a cada uno de los componentes pasivos.

### 3.1 Descripción de un transductor piezocerámico

Un transductor piezoeléctrico y, en particular un transductor piezocerámico, se puede definir como un dispositivo que convierte o que transforma energía de una forma a otra. Los materiales piezoeléctricos tienen la particularidad de desarrollar un campo eléctrico cuando se los deforma mecánicamente y, de experimentar una deformación mecánica cuando se les aplica un campo eléctrico externo. Estas dos propiedades, que se denominan *efecto piezoeléctrico directo* e *inverso* respectivamente, permiten afirmar que un transductor de estas características tiene la capacidad de convertir energía mecánica de deformación en energía eléctrica o viceversa.

En la Figura 3.1 se expone una representación esquemática del  $k$ -ésimo transductor de la sección transversal de la viga junto a su sistema de coordenadas cartesianas  $(X_1^k, X_2^k, X_3^k)$ . Este sistema tiene su origen en el punto  $\mathcal{O}_k$  y presenta una traslación respecto al sistema de coordenadas local de la viga  $(X_1, X_2, X_3)$  y una rotación respecto al sistema de coordenadas global  $(X_1^{\mathcal{G}}, X_2^{\mathcal{G}}, X_3^{\mathcal{G}})$  definida por el tensor  $\mathbf{\Lambda}_c \in SO(3)$ . A partir de la Figura 3.1b y 3.1c se



**Figura 3.1:** (a) Representación tridimensional del  $k$ -ésimo transductor piezocerámico polarizado en dirección  $X_3^k$ . (b) Vista frontal del  $k$ -ésimo transductor. (c) Vista lateral del  $k$ -ésimo transductor.

observa que el transductor posee una geometría rectangular con un espesor denotado por  $t_k$ , un ancho denotado por  $b_k$  y una longitud indicada por  $L$ . La longitud del transductor es idéntica a la de la viga ya que se considera que la sección transversal permanece constante a lo largo del eje longitudinal  $X_1$ . De acuerdo a la disposición de los electrodos, se deduce que el transductor se encuentra polarizado en dirección  $X_3^k$ , por esta razón la respuesta electromecánica se evalúa a partir de las relaciones constitutivas expuestas en el capítulo previo. Además, el vector campo eléctrico se denota por  $\mathbf{E}_k$  y el potencial eléctrico de cada electrodo se indica por medio de  $\varphi_1^k(t)$  y  $\varphi_2^k(t)$ , donde el subíndice refiere al electrodo superior (1) o inferior (2) y el supraíndice al número de transductor de la sección.

La efectividad de un transductor se puede especificar en términos de un coeficiente que se denomina *factor de acoplamiento electromecánico*, el cual puede ser utilizado tanto en problemas estáticos como en problemas dinámicos [68]. Existen diversas definiciones de este coeficiente pero, en términos generales, todas ellas tienen como finalidad relacionar la energía convertida o transformada de una forma a otra con la energía externa aplicada. Es usual expresar al factor

de acoplamiento electromecánico  $k_{ij}$  como [28]:

$$k_{ij}^2 = \frac{\text{Energía mecánica (eléctrica) almacenada en dirección } j}{\text{Energía eléctrica (mecánica) aplicada en dirección } i}, \quad (3.1)$$

donde  $ij$  están asociados al sistema de referencia utilizado para detallar el comportamiento electromecánico del material. Una expresión general para este factor se puede obtener en función de la energía interna y de la energía eléctrica del transductor. En consecuencia, considerando la ecuación (2.73) se tiene [17]:

$$k^2 = \frac{U_{em}}{\sqrt{U_e W_e^*}}, \quad (3.2)$$

donde  $U_{em}$  es la energía electromecánica o mutua almacenada en el transductor,  $U_e$  la energía elástica y  $W_e^*$  la coenergía eléctrica. Estas funciones energéticas se definen en las ecuaciones (4.8) y (4.12) respectivamente. A modo de ejemplo, para un caso estático y adoptando un modelo de viga, si se aplica una tensión mecánica en dirección  $X_1^k$  sobre el transductor de la Figura 3.1 el coeficiente de acoplamiento electromecánico es:

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31p}^2 E_1}{\epsilon_{33}^S} \quad (3.3)$$

Se observa que este factor queda completamente caracterizado por las propiedades elásticas, piezoeléctricas y dieléctricas del piezocerámico. Para mayores detalles acerca de este factor el lector puede consultar los trabajos de Berlincourt [17], Ducarne [37] y Brissaud [19].

### 3.1.1 Hipótesis eléctricas

La determinación del campo eléctrico  $\mathbf{E}_k$  que se expone en la próxima subsección se sustenta en las hipótesis simplificadoras que se enumeran a continuación:

1. Los electrodos están compuestos por una delgada capa de material altamente conductor, lo cual significa que su espesor es despreciable comparado con el espesor del piezocerámico.
2. El potencial eléctrico sobre la superficie de cada electrodo es uniforme, es decir,  $\varphi_1^k(t)$  y  $\varphi_2^k(t)$  son independientes de las coordenadas espaciales  $X_i^k$  o  $X_i$ .
3. De acuerdo a las características constructivas, es válido considerar que la única componente no nula del vector campo eléctrico  $\mathbf{E}_k$  es la componente  $E_3^k$  cuya dirección coincide con el eje  $X_3^k$ .
4. El campo eléctrico se determina en la configuración de referencia. Esto se sustenta en la linealización del campo de desplazamiento, lo cual permite suponer que la configuración de referencia  $\mathcal{C}_0$  y la configuración actual  $\mathcal{C}$  están próximas entre sí.

### 3.2 Campo eléctrico del $k$ -ésimo transductor

La teoría piezoeléctrica lineal asume un comportamiento cuasiestático para el campo eléctrico. Esta consideración se sustenta en el hecho de que el tiempo característico asociado a fenómenos eléctricos es mucho menor que el tiempo característico correspondiente a fenómenos mecánicos, lo cual pone de manifiesto que eventuales ondas electromagnéticas pueden ser despreciadas [53, 111]. En virtud de ello, la ley de Gauss para un material dieléctrico con una densidad de carga libre nula se expresa en función del desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}_k(X_i, t)$  de la siguiente manera [76]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_k(X_i, t) = 0 \quad (3.4)$$

La aproximación cuasiestática del campo eléctrico también implica que:

$$\nabla \times \mathbf{E}_k(X_i, t) = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

lo que implica que  $\mathbf{E}_k(X_i, t)$  es un campo conservativo que se puede definir a través del gradiente de una función potencial. En base a lo expuesto, se tiene que:

$$\mathbf{E}_k(X_i, t) = \left[ E_1^k(X_i, t) \quad E_2^k(X_i, t) \quad E_3^k(X_i, t) \right]^T = -\nabla \varphi^k(X_i, t), \quad (3.6)$$

donde la función escalar  $\varphi^k(X_i, t)$  se denomina función potencial eléctrico y debe ser conocida previo a la determinación del campo eléctrico. Por su parte, el operador Nabla se define por:

$$\nabla \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_k} \hat{\mathbf{E}}_k \quad (3.7)$$

Teniendo en cuenta que existe una relación funcional entre  $\mathbf{D}_k(X_i, t)$  y  $\mathbf{E}_k(X_i, t)$  que está dada por las ecuaciones constitutivas, se reemplaza la ecuación (3.6) en la segunda expresión de (2.72). De ello se obtiene:

$$\mathbf{D}_k(X_i, t) = \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{gl}(X_i, t) - \epsilon_E \nabla \varphi^k(X_i, t) \quad (3.8)$$

A su vez, sustituyendo la ecuación (3.8) en la (3.4) resulta,

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_k(X_i, t) = \nabla \cdot \left[ \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{gl}(X_i, t) - \epsilon_E \nabla \varphi^k(X_i, t) \right] = 0, \quad (3.9)$$

la cual es una ecuación diferencial en derivadas parciales cuya incógnita es la función potencial eléctrico  $\varphi^k(X_i, t)$ .

A continuación, se restringe este problema al transductor empleado en el presente modelo de viga. En consecuencia, poniendo en consideración la Figura 3.1 y las hipótesis enunciadas en 3.1.1 se observa que la única componente no nula del vector campo eléctrico es la que está

asociada al eje  $X_3^k$ . En efecto, la ecuación (3.6) para este transductor se reduce a:

$$\mathbf{E}_k(X_i, t) = E_3^k(X_i, t) \hat{\mathbf{E}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_3^k(X_i, t) \end{bmatrix}^T, \quad (3.10)$$

donde:

$$E_3^k(X_i, t) = -\frac{\partial \varphi^k}{\partial X_3}(X_i, t) \quad (3.11)$$

Se puede apreciar que el vector campo eléctrico  $\mathbf{E}_k(X_i, t)$  se expresa en la base  $\{\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \hat{\mathbf{E}}_3\}$  del sistema de referencia local  $(X_1, X_2, X_3)$ . A partir de lo expuesto, la ecuación (3.9) se reduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_k(X_i, t) = \nabla \cdot \left\{ \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t) - \epsilon_E \left[ \frac{\partial \varphi^k}{\partial X_3}(X_i, t) \hat{\mathbf{E}}_3 \right] \right\} = 0 \quad (3.12)$$

Luego, desarrollando (3.12) se obtiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_k(X_i, t) = 2e_{113} \frac{\partial}{\partial X_1} E_{13}(X_i, t) + e_{311} \frac{\partial}{\partial X_3} E_{11}(X_i, t) - \epsilon_{33}^E \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial X_3^2}(X_i, t) = 0 \quad (3.13)$$

La expresión (3.13) constituye una ecuación diferencial que contiene la función incógnita  $\varphi^k(X_i, t)$  derivada dos veces con respecto a la coordenada espacial  $X_3$ . Con el propósito de obtener una solución, se introducen en ella los términos  $E_{13}(X_i, t)$  y  $E_{11}(X_i, t)$  definidos en la ecuación (2.58) y se calculan las correspondientes derivadas. De ello resulta:

$$\begin{aligned} e_{113} \left[ \frac{\partial^2 U_0^3}{\partial X_1^2}(X_1, t) + \frac{\partial \theta_2}{\partial X_1}(X_1, t) + \left( X_2 + \frac{\partial \omega}{\partial X_3}(X_\alpha) \right) \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1, t) \right] + \\ + e_{311} \left[ \frac{\partial \theta_2}{\partial X_1}(X_1, t) + \frac{\partial \omega}{\partial X_3}(X_\alpha, t) \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1, t) \right] - \epsilon_{33}^E \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial X_3^2}(X_i, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

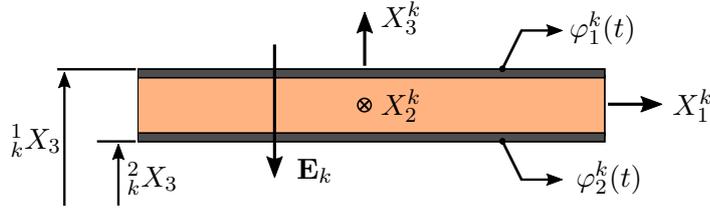
Nótese que, a diferencia de lo presentado en el capítulo previo, aquí se explicita la dependencia temporal de las componentes de deformación. Luego de efectuar una doble integración de la ecuación (3.14) respecto a la variable  $X_3$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \varphi^k(X_i, t) = \frac{1}{\epsilon_{33}^E} \left\{ C_2 + C_1 X_3 + \frac{1}{2} e_{113} X_3^2 \left[ \frac{\partial^2 U_0^3}{\partial X_1^2}(X_1, t) + \frac{\partial \theta_2}{\partial X_1}(X_1, t) + \right. \right. \\ \left. \left. X_2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1, t) \right] + (e_{113} + e_{311}) \tilde{\omega}(X_\alpha) \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1, t) + \frac{1}{2} e_{311} X_3^2 \frac{\partial \theta_2}{\partial X_1}(X_1, t) \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Donde  $C_1(X_i, t)$  y  $C_2(X_i, t)$  son dos funciones a determinar y  $\tilde{\omega}(X_\alpha)$  es:

$$\tilde{\omega}(X_\alpha) = \int \omega(X_\alpha) dX_3 \quad (3.16)$$

De la integral indefinida de la ecuación anterior surge una constante de integración que es



**Figura 3.2:** Coordenadas del electrodo superior e inferior del transductor piezocerámico.

absorbida por las funciones  $C_1(X_i, t)$  y  $C_2(X_i, t)$ . Para calcular estas funciones se construye un sistema de dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas a partir de las condiciones de contorno que se definen teniendo en cuenta la intensidad del potencial eléctrico sobre los electrodos:

$$\varphi^k(X_{\alpha, \frac{1}{k}} X_3, t) = \varphi_1^k(t), \quad \varphi^k(X_{\alpha, \frac{2}{k}} X_3, t) = \varphi_2^k(t), \quad (3.17)$$

donde  $\frac{1}{k} X_3$  y  $\frac{2}{k} X_3$  denotan las coordenadas, en el sistema  $(X_1, X_2, X_3)$ , del electrodo superior e inferior del transductor tal como se observa en la Figura 3.2. Una vez obtenidas las funciones  $C_1(X_i, t)$  y  $C_2(X_i, t)$  se sustituyen en la ecuación (3.15) resultando:

$$\varphi^k(X_i, t) = \varphi_l^k(X_3, t) + \varphi_i^k(X_i, t), \quad (3.18)$$

donde  $\varphi_l^k(X_3, t)$  denota al término lineal del potencial y su expresión está dada por:

$$\varphi_l^k(X_3, t) = \varphi_1^k(t) \frac{X_3 - \frac{2}{k} X_3}{t_k} + \varphi_2^k(t) \frac{\frac{1}{k} X_3 - X_3}{t_k} \quad (3.19)$$

Claramente, de la ecuación anterior se observa que  $\varphi_l^k(X_3, t)$  sólo depende de la coordenada  $X_3$  y presenta una variación lineal en la dirección del espesor. Por su parte,  $\varphi_i^k(X_i, t)$  es el término que representa el potencial inducido y está dado por:

$$\begin{aligned} \varphi_i^k(X_i, t) = A(X_3) & \left\{ e_{311} \frac{\partial \theta_2}{\partial X_1}(X_1, t) + e_{113} \left[ \frac{\partial^2 U_0^3}{\partial X_3^2}(X_1, t) + X_2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1, t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \theta_2}{\partial X_1}(X_1, t) \right] \right\} + B \left[ \omega(X_{\alpha}) t_k + \tilde{\omega} \left( X_{2, \frac{1}{k}} X_3 \right) \left( X_3 - \frac{2}{k} X_3 \right) + \right. \\ & \left. + \tilde{\omega} \left( X_{2, \frac{2}{k}} X_3 \right) \left( \frac{1}{k} X_3 - X_3 \right) \right] \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1, t), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde,

$$A(X_3) = \frac{(X_3 - \frac{1}{k} X_3)(X_3 - \frac{2}{k} X_3)}{2\epsilon_{33}^E}, \quad B = 2 \frac{e_{113}}{\epsilon_{33}^E t_k} \quad (3.21)$$

Se puede observar de (3.20) que el término inducido del campo eléctrico es una función de las derivadas de las variables cinemáticas que describen la configuración de la viga. A su vez, muestra

una dependencia lineal y cuadrática con relación a las coordenadas  $X_2$  y  $X_3$  respectivamente. Tal como exponen Sulbhevar y Raveendranath, el termino inducido del potencial modifica la rigidez de la estructura piezoeléctrica y en ocasiones es un término no despreciable, fundamentalmente cuando el material piezoeléctrico es predominante en la configuración estructural [108]. Sin embargo, si el espesor del transductor  $t_k$  es muy pequeño frente al resto de las dimensiones de la sección transversal los efectos del potencial inducido son mínimos. De esta manera, la función potencial se aproxima sólo con el término lineal:

$$\varphi^k(X_i, t) \approx \varphi_l^k(X_3, t) = \varphi_1^k(t) \frac{X_3 - \frac{2}{k} X_3}{t_k} + \varphi_2^k(t) \frac{\frac{1}{k} X_3 - X_3}{t_k} \quad (3.22)$$

Luego, para calcular el campo eléctrico se reemplaza las ecuaciones (3.19) y (3.20) en la (3.18) y, luego esta última en (3.10). De ello se obtiene que la componente  $E_3^k(X_i, t)$  del vector campo eléctrico es:

$$\begin{aligned} E_3^k(X_i, t) = & -\frac{\varphi_1^k(t) - \varphi_2^k(t)}{t_k} - \frac{\partial A}{\partial X_3}(X_3) \left\{ e_{113} \left[ \frac{\partial \theta_2}{\partial X_1}(X_1, t) + \frac{\partial^2 U_0^3}{\partial X_1^2}(X_1, t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + X_2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1, t) \right] + e_{311} \frac{\partial \theta_2}{\partial X_1}(X_1, t) \right\} - B \left[ t_k \frac{\partial \omega}{\partial X_3}(X_\alpha) - \tilde{\omega} \left( X_2, \frac{1}{k} X_3 \right) + \right. \\ & \left. + \tilde{\omega} \left( X_2, \frac{2}{k} X_3 \right) \right] \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial X_1^2}(X_1, t) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Si se desprecia el término inducido, la única componente no nula del campo eléctrico resulta,

$$E_3^k(X_i, t) \approx -\frac{\varphi_1^k(t) - \varphi_2^k(t)}{t_k}, \quad (3.24)$$

la cual muestra que el campo eléctrico es constante. Nótese que la resta  $\varphi_1^k(t) - \varphi_2^k(t)$  define la diferencia de potencial o voltaje entre los electrodos del transductor. Por último, para expresar al campo eléctrico en el sistema de referencia global se aplica la ley de transformación o cambio de base de una cantidad vectorial sobre la ecuación (3.10), lo que implica premultiplicar a  $\mathbf{E}_k(X_i, t)$  por  $\mathbf{\Lambda}_c$ . De ello se tiene:

$$\mathbf{E}_k^G(X_i, t) = E_3^k(X_i, t) \mathbf{\Lambda}_c \hat{\mathbf{E}}_3 = \mathbf{\Lambda}_c \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_3^k(X_i, t) \end{bmatrix}^T \quad (3.25)$$

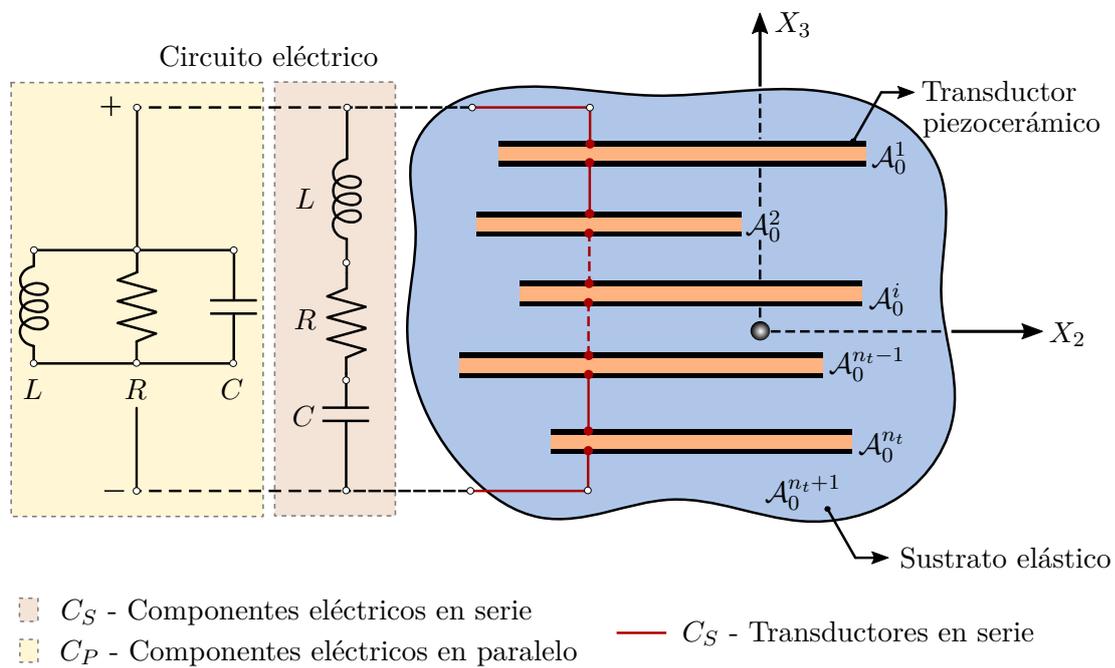
En la literatura, la mayoría de los autores utilizan al voltaje o a la carga eléctrica como coordenada generalizada pero, por conveniencia, en este trabajo el comportamiento eléctrico se describirá a partir de los potenciales de cada electrodo [40, 57, 115].

### 3.3 Circuito eléctrico para recolectar energía

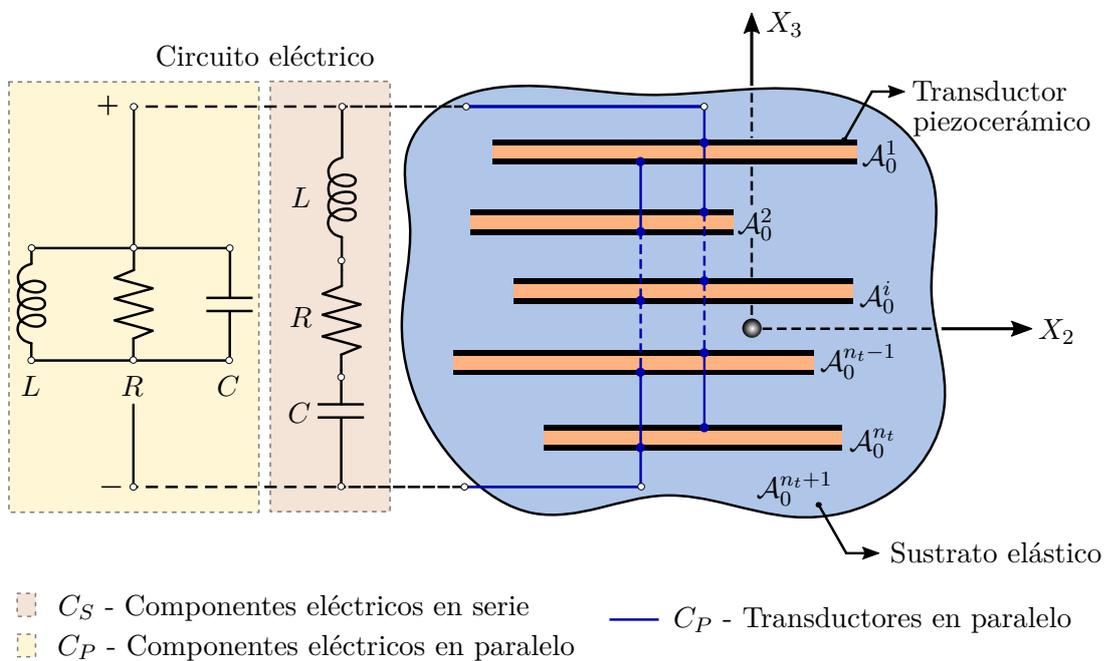
De las bases de la mecánica de sólidos es bien conocido que si un cuerpo elástico ideal se encuentra sometido a un sistema de cargas externas éste experimenta un cambio en su geometría.

A medida que se produce la deformación del cuerpo, las fuerzas internas efectúan un trabajo a través de sus desplazamientos hasta alcanzar la configuración final. Cuando las cargas externas desaparecen, y admitiendo la posibilidad de un retorno lento a su configuración indeformada, el cuerpo debería ser capaz de devolver el trabajo efectuado por las fuerzas externas. Esta capacidad que tienen los esfuerzos internos de realizar trabajo en un cuerpo elástico deformado se atribuye a la energía interna de deformación [124]. Lo anterior supone que la trayectoria de carga-desplazamiento seguida por el cuerpo durante el proceso de carga y descarga es la misma. A su vez, si se admite la presencia de transductores piezoeléctricos embebidos en el cuerpo elástico, el trabajo desarrollado por el sistema externo de cargas se manifiesta en forma de energía interna de deformación y de energía eléctrica. Esta última se adjudica al efecto piezoeléctrico directo ya que éste permite la conversión parcial del trabajo externo en energía eléctrica, la cual se almacena en forma de campo eléctrico y se exterioriza a través de una diferencia de potencial entre los electrodos de los transductores. Previo a la aplicación de las cargas el campo eléctrico entre los electrodos de los transductores es nulo (condición de cortocircuito) y luego de aplicar las cargas el campo eléctrico adopta un valor constante (condición de circuito abierto). Debido a la alteración de las condiciones de borde eléctricas, el comportamiento mecánico del material piezoeléctrico durante el proceso de descarga se modifica [37]. Cuando las cargas externas desaparecen, la energía almacenada en el transductor en forma de energía de deformación y energía eléctrica permiten que el cuerpo elástico recupere su configuración inicial debido al efecto piezoeléctrico inverso. En base a lo expuesto, se infiere que si este proceso se repite en el tiempo y si se pretende transformar parte del trabajo externo en energía eléctrica utilizable se puede conectar un circuito eléctrico entre los electrodos de los transductores para recolectar o cosechar esta energía.

En las Figuras 3.3 y 3.4 se presenta la sección transversal de la viga junto al circuito eléctrico propuesto, el cual corresponde a un circuito  $RLC$  compuesto por tres elementos pasivos: un resistor eléctrico  $R$ , un inductor  $L$  y un capacitor  $C$  conectados entre los terminales del conjunto que forman los  $n_t$  transductores piezocerámicos. Si bien la cantidad de circuitos distribuidos en la sección transversal puede ser arbitraria, a los fines descriptivos se supone la existencia de uno sólo. No obstante, es importante mencionar que se asume independencia eléctrica entre ellos, es decir, las ecuaciones que gobiernan a cada circuito no están acopladas con las ecuaciones que rigen a los restantes. A su vez, observando las dos figuras mencionadas se distinguen dos tipos de conexiones posibles: entre transductores y entre componentes eléctricos. Al respecto, es factible una conexión en serie  $C_S$  o en paralelo  $C_P$  entre los transductores y una conexión en serie  $C_S$  o en paralelo  $C_P$  entre los componentes eléctricos, lo que origina cuatro posibles alternativas de conexión. A pesar de ello, por simplicidad se considerarán dos de estas alternativas, las cuales surgen de limitar la conexión entre los componentes del circuito  $RLC$  a una configuración en paralelo y admitir que los transductores se dispongan en serie o en paralelo.

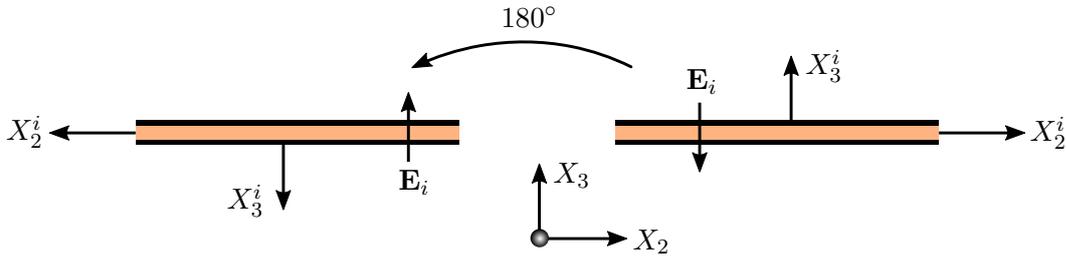


**Figura 3.3:** Circuito  $RLC$  embebido en la sección transversal: conexión en serie entre el conjunto de transductores y conexión en serie o en paralelo entre los componentes eléctricos.



**Figura 3.4:** Circuito  $RLC$  embebido en la sección transversal: conexión en paralelo entre el conjunto de transductores y conexión en serie o en paralelo entre los componentes eléctricos.

Antes de detallar las conexiones entre transductores, un aspecto que merece ser comentado es la orientación de los piezocerámicos en la sección transversal, lo cual se especifica en términos de la orientación del sistema de referencia  $(X_1^i, X_2^i, X_3^i)$  de cada transductor con respecto al sistema de referencia  $(X_1, X_2, X_3)$  de la sección. En este trabajo se admiten simultáneamente dos posibilidades: *i*) traslación de un sistema respecto al otro; *ii*) rotación del transductor alrededor del eje de la viga ( $X_1$ ) un ángulo igual a 180 grados. A los fines prácticos, la segunda alternativa implica una rotación del vector campo eléctrico del transductor, tal como se muestra en la Figura 3.5.



**Figura 3.5:** Orientación del sistema de referencia  $(X_1^i, X_2^i, X_3^i)$  respecto al  $(X_1, X_2, X_3)$ .

### 3.3.1 Conexión entre transductores piezocerámicos

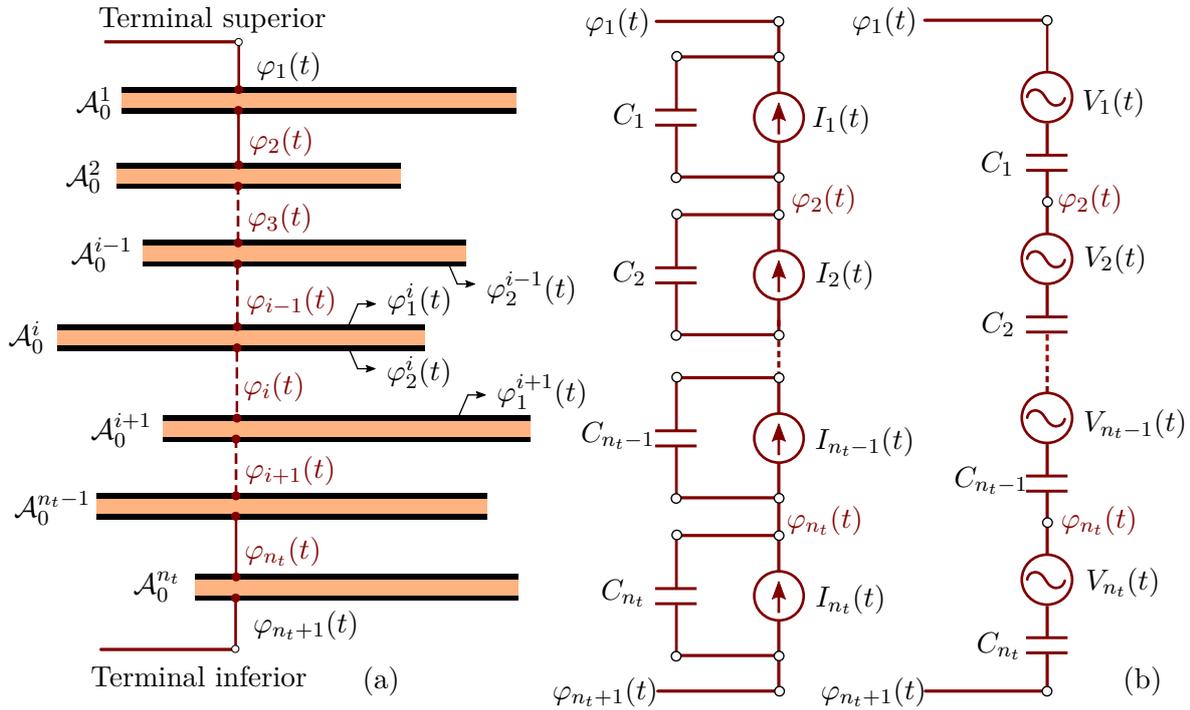
Los  $n_t$  transductores piezocerámicos de la Figura 3.3 pueden estar conectados en serie o en paralelo pero no se admite una conexión mixta, es decir, que algunos de ellos estén en serie y el resto en paralelo. La vinculación ocurre a nivel de sus electrodos y se materializa por medio de un elemento conductor cuya resistencia eléctrica se considera despreciable. Para detallar ambos tipos de conexión se supone, sin pérdida de generalidad, que el sistema de referencia  $(X_1^i, X_2^i, X_3^i)$  de cada transductor sólo presenta una traslación en relación al sistema de referencia de la sección  $(X_1, X_2, X_3)$ .

#### 3.3.1.1 Transductores en serie

En la Figura 3.6a se detalla la conexión en serie entre los  $n_t$  transductores. Este tipo de conexión implica que, por ejemplo, el electrodo superior  $\varphi_1^i(t)$  del transductor  $i$  se conecte con el electrodo inferior  $\varphi_2^{i-1}(t)$  del transductor  $i - 1$  y, el electrodo inferior  $\varphi_2^i(t)$  del transductor  $i$  se conecte con el electrodo superior  $\varphi_1^{i+1}(t)$  del transductor  $i + 1$ . A su vez, los potenciales de los electrodos extremos, que constituyen los terminales del conjunto de transductores, se denotan por  $\varphi_1(t)$  y  $\varphi_{n_t+1}(t)$  y, satisfacen:

$$\varphi_1(t) = \varphi_1^1(t) , \quad \varphi_{n_t+1}(t) = \varphi_2^{n_t}(t) \quad (3.26)$$

Por otra parte, previo a la conexión el número de potenciales requeridos para caracterizar al conjunto es igual a  $2n_t$ . Sin embargo, teniendo en cuenta que los electrodos se vinculan entre



**Figura 3.6:** (a) Transductores piezocerámicos en serie. (b) Representación equivalente de la conexión en serie en el dominio eléctrico usando una fuente de corriente o una fuente de voltaje junto a un capacitor por cada transductor.

sí por medio de un elemento de resistencia despreciable, el número de potenciales necesarios para describir a este tipo de conexión se reduce a  $N_v = n_t + 1$ . Esto obedece a que dos electrodos consecutivos pertenecientes a diferentes transductores se encuentran al mismo potencial, los cuales se denotarán sin supraíndice por medio de  $\varphi_i(t)$  con  $i = 2, \dots, n_t$ , tal como se presenta en la Figura 3.6. Por simplicidad, los potenciales necesarios para describir a esta conexión se agrupan en un vector  $\varphi_s(t) \in \mathbb{R}^{N_v \times 1}$  que se denomina vector de potenciales, donde el subíndice  $s$  se refiere a la conexión en serie entre transductores. El primer componente del vector es  $\varphi_1(t)$  y el último de ellos es  $\varphi_{n_t+1}(t)$ , mientras que el resto de los potenciales se ubican consecutivamente entre estos dos, es decir:

$$\varphi_s(t) = [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \varphi_3(t) \quad \cdots \quad \varphi_{n_t-1}(t) \quad \varphi_{n_t}(t) \quad \varphi_{n_t+1}(t)]^T \quad (3.27)$$

Para definir a la diferencia de potencial o voltaje entre los electrodos de cada transductor en términos del vector de potenciales  $\varphi_s(t)$  se introduce un nuevo vector que se denomina vector de compatibilidad de potenciales. En este sentido, para el  $k$ -ésimo transductor este vector se denota por  ${}_k\mathbf{B}_s \in \mathbb{Z}^{1 \times N_v}$  y se lo construye de tal manera que el producto,

$$\varphi_1^k(t) - \varphi_2^k(t) = {}_k\mathbf{B}_s \varphi_s(t) \quad (3.28)$$

sea igual a la diferencia de potencial  $\varphi_1^k(t) - \varphi_2^k(t)$ .

En correspondencia con lo publicado en la literatura, un transductor piezocerámico se puede modelar, en el dominio eléctrico, a través de una fuente de corriente con un capacitor conectado en paralelo o, alternativamente, por medio de una fuente de voltaje con el capacitor dispuesto en serie [43]. En general, la intensidad de las fuentes eléctricas es variable con el tiempo y, en el ámbito de la cosecha de energía, su magnitud está estrechamente relacionada con la deformación mecánica del transductor, en tanto que el capacitor contempla la capacitancia inherente al transductor. De acuerdo a la Figura 3.6b la fuente de corriente asociada al  $k$ -ésimo transductor se denota por  $I_k(t)$  y la fuente de voltaje por  $V_k(t)$ . Por su parte, la capacitancia inherente al  $k$ -ésimo transductor se indica por  $C_k$  y se determina empleando la siguiente expresión:

$$C_k = \frac{1}{t_k} \epsilon_{33}^E L b_k \quad (3.29)$$

Puede notarse que un elemento similar al de la Figura 3.1a constituye un capacitor de placas paralelas con el piezocerámico actuando de dieléctrico.

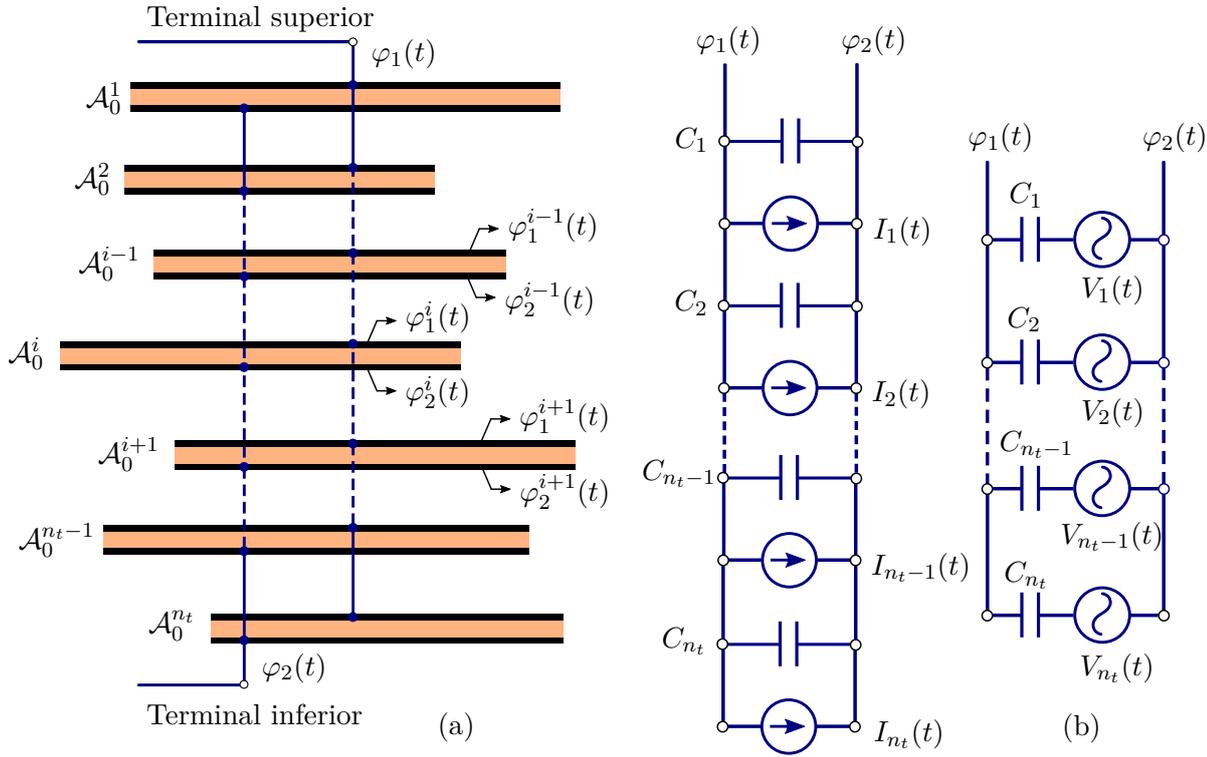
### 3.3.1.2 Transductores en paralelo

En la Figura 3.7a se esquematiza la conexión en paralelo. En este caso, los electrodos superiores de todos los transductores se conectan entre sí, lo mismo sucede con los electrodos inferiores. Lo expuesto significa que, por ejemplo, el electrodo superior  $\varphi_1^i(t)$  del transductor  $i$  se vincula con los electrodos superiores  $\varphi_1^{i-1}(t)$  y  $\varphi_1^{i+1}(t)$  de los transductores  $i - 1$  e  $i + 1$ , respectivamente. Análogamente, el electrodo inferior  $\varphi_2^i(t)$  del transductor  $i$  se conecta con los electrodos inferiores  $\varphi_2^{i-1}(t)$  y  $\varphi_2^{i+1}(t)$  de los transductores  $i - 1$  e  $i + 1$ , respectivamente. Además, los potenciales de los electrodos extremos, que también constituyen los terminales del conjunto, se denotan por  $\varphi_1(t)$  y  $\varphi_2(t)$  y satisfacen:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \varphi_1^1(t) = \varphi_1^2(t) = \dots = \varphi_1^{n_t-1}(t) = \varphi_1^{n_t}(t) \\ \varphi_2(t) &= \varphi_2^1(t) = \varphi_2^2(t) = \dots = \varphi_2^{n_t-1}(t) = \varphi_2^{n_t}(t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Lo explicitado implica que el potencial de todos los electrodos superiores son los mismos e iguales  $\varphi_1(t)$  y que el potencial de todos los electrodos inferiores son idénticos e iguales a  $\varphi_2(t)$ . Consecuentemente, el número de potenciales necesarios para describir a una conexión en paralelo es igual a  $N_v = 2$ . En base a lo expuesto, para esta conexión el vector de potenciales se denota por  $\varphi_p(t) \in \mathbb{R}^{N_v \times 1}$ , donde el subíndice  $p$  refiere a la conexión en paralelo entre los transductores, y está dado por:

$$\varphi_p(t) = \left[ \varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \right]^T \quad (3.31)$$



**Figura 3.7:** (a) Transductores piezocerámicos en paralelo. (b) Representación equivalente de la conexión en paralelo en el dominio eléctrico usando una fuente de corriente o una fuente de voltaje junto a un capacitor para cada transductor.

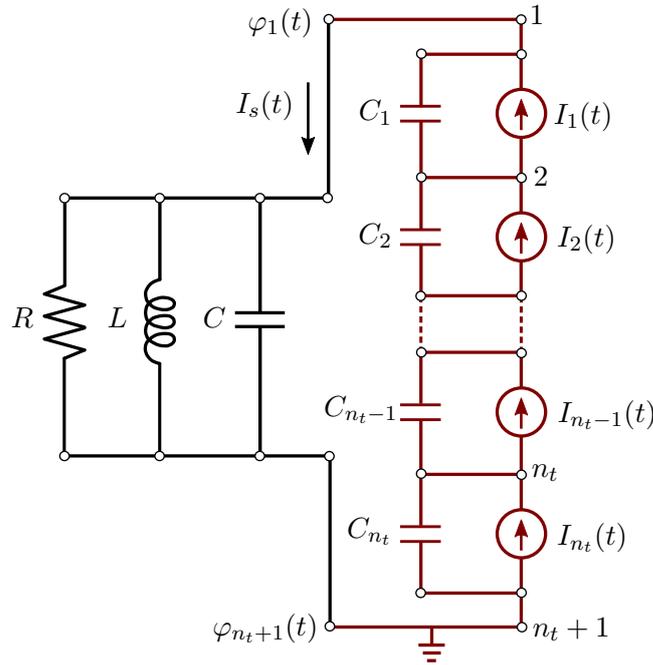
De manera similar a la conexión en serie, se introduce el vector de compatibilidad de potenciales  $\mathbf{B}_p^k \in \mathbb{Z}^{1 \times N_v}$  que, para este tipo de conexión, es único e idéntico para todos los transductores. En base a lo anterior, la diferencia de potencial para el  $k$ -ésimo transductor se expresa como:

$$\varphi_1^k(t) - \varphi_2^k(t) = {}_k\mathbf{B}_p \boldsymbol{\varphi}_p(t) \quad \text{con} \quad \mathbf{B}_p = {}_k\mathbf{B}_p \quad \forall k = 1, 2, \dots, n_t \quad (3.32)$$

De acuerdo a la Figura 3.7b, cada uno de los  $n_t$  transductores en paralelo se modela en el dominio eléctrico por medio de una fuente de corriente  $I_k(t)$  con un capacitor en paralelo cuya capacitancia inherente es  $C_k$ , o equivalentemente a través de una fuente de voltaje  $V_k(t)$  con el capacitor dispuesto en serie. De modo similar a la conexión en serie, la intensidad de las fuentes eléctricas está estrechamente relacionada con la deformación mecánica que producen las cargas externas sobre los transductores. Al mismo tiempo, la capacitancia  $C_k$  se calcula por medio de la ecuación (3.29).

### 3.3.2 Circuito $RLC$ en paralelo

En esta subsección, se derivan, siguiendo un enfoque eléctrico, las ecuaciones que gobiernan a un circuito  $RLC$  con sus componentes dispuestos en paralelo. Estas ecuaciones se expresan



**Figura 3.8:** Circuito *RLC* en paralelo con los transductores conectados en serie.

en función del vector de potenciales  $\varphi_j(t)$  y admiten dos alternativas de conexión entre transductores: en serie,  $j = s$ , o en paralelo,  $j = p$ . En el desarrollo que se expone, las ecuaciones no contemplan la interacción existente entre el dominio eléctrico y el dominio mecánico sino que describen a los circuitos desde una perspectiva eléctrica. Su acoplamiento con las ecuaciones que gobiernan la dinámica de la viga se abordará más adelante cuando se obtengan las ecuaciones de movimiento de un elemento finito de viga piezoeléctrica. El objetivo de este desarrollo es complementar y mejorar la comprensión de las ecuaciones rectoras que se derivan en el próximo capítulo.

### 3.3.2.1 Circuito *RLC* con transductores en serie

En la Figura 3.8 se presenta un circuito *RLC* con sus componentes eléctricos pasivos dispuestos en paralelo y conectados entre los terminales del conjunto formado por los  $n_t$  transductores. Tal como se observa, los piezocerámicos se conectan en serie y cada uno de ellos se idealiza por medio de una fuente de corriente  $I_k(t)$  con un capacitor  $C_k$  en paralelo. Se considera que cada componente pasivo del circuito posee un comportamiento lineal y, debido al tipo de conexión, los terminales de los tres componentes están sometidos a la misma diferencia de potencial.

Las ecuaciones que gobiernan a la red eléctrica de la Figura 3.8 se determinan efectuando un balance de corrientes sobre cada uno de los nodos del circuito, los cuales han sido numerados de 1 a  $n_t + 1$ . Desarrollando la expresión de balance para los nodos extremos, 1 y  $n_t + 1$ , se

obtiene:

$$\begin{aligned} C_1 [\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t)] + I_s(t) &= I_1(t), \\ C_{n_t} [\dot{\varphi}_{n_t+1}(t) - \dot{\varphi}_{n_t}(t)] - I_s(t) &= -I_{n_t}(t), \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde la intensidad de corriente  $I_s(t)$  es igual a la suma algebraica de las corrientes que atraviesan al resistor, al inductor y al capacitor. Esta corriente  $I_s(t)$  se determina a partir de las relaciones constitutivas (véase Apéndice 3.A) de cada uno de los componentes pasivos y de la diferencia de potencial entre sus terminales:

$$I_s(t) = \frac{1}{R} [\varphi_1(t) - \varphi_{n_t+1}(t)] + C [\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_{n_t+1}(t)] + \frac{1}{L} \int_0^t [\varphi_1(\tau) - \varphi_{n_t+1}(\tau)] d\tau \quad (3.34)$$

Si se deriva respecto al tiempo a las ecuaciones de balance dadas por (3.33) y a la expresión (3.34) y luego se reemplaza esta última en la primera de ellas resulta:

$$\begin{aligned} C_1 [\ddot{\varphi}_1(t) - \ddot{\varphi}_2(t)] + C [\ddot{\varphi}_1(t) - \ddot{\varphi}_{n_t+1}(t)] + \frac{1}{R} [\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_{n_t+1}(t)] + \frac{1}{L} [\varphi_1(t) - \\ - \varphi_{n_t+1}(t)] &= \dot{I}_1(t) \\ C_{n_t} [\ddot{\varphi}_{n_t+1}(t) - \ddot{\varphi}_{n_t}(t)] + C [\ddot{\varphi}_{n_t+1}(t) - \ddot{\varphi}_1(t)] + \frac{1}{R} [\dot{\varphi}_{n_t+1}(t) - \dot{\varphi}_1(t)] + \frac{1}{L} [\varphi_{n_t+1}(t) - \\ - \varphi_1(t)] &= -\dot{I}_{n_t}(t), \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde la notación,

$$\frac{d}{dt}(\cdot) = (\dot{\cdot})(t), \quad \frac{d^2}{dt^2}(\cdot) = (\ddot{\cdot})(t), \quad (3.36)$$

se utiliza para indicar derivadas temporales. Adicionalmente, las dos expresiones presentadas en (3.35) deben complementarse con las  $n_t - 1$  ecuaciones de balance correspondientes a los nodos intermedios, las cuales surgen de plantear equilibrio de corrientes en dichos nodos y derivar respecto al tiempo cada una de las ecuaciones resultantes. A modo de ejemplo, para los nodos 2 y  $n_t$  se tiene,

$$\begin{aligned} -C_1 [\ddot{\varphi}_1(t) - \ddot{\varphi}_2(t)] + C_2 [\ddot{\varphi}_2(t) - \ddot{\varphi}_3(t)] &= \dot{I}_2(t) - \dot{I}_1(t), \\ -C_{n_t-1} [\ddot{\varphi}_{n_t-1}(t) - \ddot{\varphi}_{n_t}(t)] + C_{n_t} [\ddot{\varphi}_{n_t}(t) - \ddot{\varphi}_{n_t+1}(t)] &= \dot{I}_{n_t}(t) - \dot{I}_{n_t-1}(t), \end{aligned} \quad (3.37)$$

mientras que este balance para un nodo genérico  $k$  situado entre el nodo 2 y el  $n_t$  se expresa por:

$$-C_{k-1} [\ddot{\varphi}_{k-1}(t) - \ddot{\varphi}_k(t)] + C_k [\ddot{\varphi}_k(t) - \ddot{\varphi}_{k-1}(t)] = \dot{I}_k(t) - \dot{I}_{k-1}(t) \quad (3.38)$$

Un análisis de las ecuaciones (3.35) a (3.38) permite inferir que constituyen un sistema de  $n_t + 1$  ecuaciones diferenciales ordinarias que están acopladas en términos de los potenciales eléctricos.

Por simplicidad, este sistema se puede reescribir en notación matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_s \ddot{\varphi}_s(t) + \mathbf{R}_s \dot{\varphi}_s(t) + \mathbf{L}_s \varphi_s(t) = \dot{\mathbf{I}}_s(t), \quad (3.39)$$

donde las matrices de resistencia  $\mathbf{R}_s \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}$ , de inductancia  $\mathbf{L}_s \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}$  y de capacitancia  $\mathbf{C}_s \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}$  se definen por:

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{B}_s^T \frac{1}{R} \mathbf{B}_s, \quad \mathbf{L}_s = \mathbf{B}_s^T \frac{1}{L} \mathbf{B}_s, \quad \mathbf{C}_s = \mathbf{B}_s^T C \mathbf{B}_s + \sum_{k=1}^{n_t} {}_k\mathbf{B}_s^T C_k {}_k\mathbf{B}_s \quad (3.40)$$

En este caso,  $\mathbf{B}_s \in \mathbb{Z}^{1 \times N_v}$  es el vector de compatibilidad de los componentes pasivos. Además, se puede percibir que la sumatoria de la ecuación anterior representa a la capacitancia inherente del conjunto de transductores. Por su parte, el vector lado derecho  $\dot{\mathbf{I}}_s(t) \in \mathbb{R}^{N_v \times 1}$  es,

$$\dot{\mathbf{I}}_s(t) = \left[ \dot{I}_1(t) \quad \dot{I}_2(t) - \dot{I}_1(t) \quad \cdots \quad \dot{I}_{n_t}(t) - \dot{I}_{n_t-1}(t) \quad -\dot{I}_{n_t}(t) \right]^T \quad (3.41)$$

y está compuesto por las derivadas temporales de las fuentes de corriente. El subíndice  $s$  que contienen las matrices y vectores introducidos con anterioridad refiere a una conexión en serie entre transductores. Por otra parte, es importante destacar que en esta instancia de la formulación se desconoce el comportamiento temporal de las fuentes de corrientes, ya que éste proviene de la interacción o acoplamiento entre el dominio eléctrico y el mecánico.

El sistema de ecuaciones diferenciales expuesto en la ecuación (3.39) debe complementarse con las condiciones de borde ya que caso contrario la solución no es única. Esto se atribuye a que la intensidad de corriente que atraviesa a cada uno de los componentes eléctricos pasivos no depende de la magnitud que adopta cada potencial sino de la diferencia de potencial entre sus terminales. En consecuencia, para garantizar la unicidad de la solución se debe eliminar la singularidad que existe en las matrices de (3.39). Esto se puede conseguir adoptando a uno de los potenciales como referencia y fijando su valor. En este sentido, observando la Figura 3.8 resulta oportuno seleccionar como potencial de referencia al potencial inferior del transductor  $n_t$  tal que:

$$\varphi_{n_t+1}(t) = \dot{\varphi}_{n_t+1}(t) = \ddot{\varphi}_{n_t+1}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.42)$$

Consecuentemente, la condición dada en (3.42) reduce el orden del sistema (3.39) de  $n_t + 1$  a  $n_t$ . Además, el sistema debe satisfacer un conjunto de condiciones iniciales para  $t = t_0$  dadas por:

$$\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0, \quad \dot{\varphi}_i(t_0) = \dot{\varphi}_i^0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n_t \quad \text{y } t_0 = 0 \quad (3.43)$$

Por otra parte, a los fines prácticos, aplicar la condición (3.42) sobre (3.39) implica eliminar filas y columnas en las matrices y en los vectores definidos en (3.40) y (3.41). Estas filas y columnas están asociadas al potencial de referencia y a sus derivadas temporales.

Finalmente, se pone de manifiesto que la energía cosechada se puede cuantificar a partir de la disipación eléctrica que tiene lugar en el resistor. En este sentido, la potencia disipada se obtiene sustituyendo la corriente que atraviesa a este componente en la ecuación (3.A.2):

$$P(t) = \frac{1}{R} [\varphi_1(t) - \varphi_{n_t+1}(t)]^2 = \frac{1}{R} [\varphi_1(t)]^2 \quad (3.44)$$

### 3.3.2.2 Circuito *RLC* con transductores en paralelo

En la Figura 3.9 se esquematiza el circuito *RLC* formado por tres componentes eléctricos en paralelo y por  $n_t$  transductores dispuestos en paralelo. Similarmente al circuito anterior, los piezocerámicos se idealizan por medio de una fuente de corriente  $I_k(t)$  junto a un capacitor  $C_k$  en paralelo. Los componentes pasivos del circuito se describen mediante relaciones constitutivas lineales y la diferencia de potencial entre sus terminales es idéntica para los tres.

El comportamiento de la red eléctrica de la Figura 3.9 está gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que puede ser derivado partiendo de una expresión de balance. La corriente  $I_p(t)$  es igual a la diferencia entre la suma de las intensidades de las fuentes  $I_k(t)$  y la suma de las corrientes que atraviesan a cada uno de los capacitores  $C_k$ , esto es:

$$I_p(t) = \sum_{k=1}^{n_t} I_k(t) - \sum_{k=1}^{n_t} C_k [\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t)] \quad (3.45)$$

Al mismo tiempo, la corriente  $I_p(t)$  también es igual a la suma de las corrientes que circulan por cada componente pasivo. Considerando las relaciones constitutivas de los componentes (véase Apéndice 3.A) se tiene:

$$I_p(t) = \frac{1}{R} [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] + C [\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t)] + \frac{1}{L} \int_0^t [\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)] d\tau \quad (3.46)$$

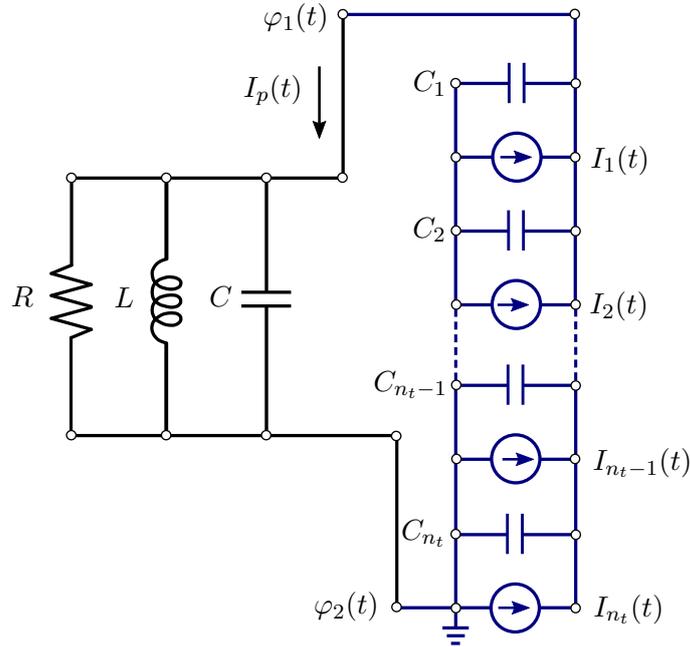
Sustituyendo la ecuación (3.46) en (3.45) y derivando respecto al tiempo la expresión resultante se obtiene:

$$\left( C + \sum_{k=1}^{n_t} C_k \right) [\ddot{\varphi}_1(t) - \ddot{\varphi}_2(t)] + \frac{1}{R} [\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t)] + \frac{1}{L} [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] = \sum_{k=1}^{n_t} \dot{I}_k(t) \quad (3.47)$$

La ecuación anterior constituye un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas en términos de los potenciales que se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{C}_p \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_p(t) + \mathbf{R}_p \dot{\boldsymbol{\varphi}}_p(t) + \mathbf{L}_p \boldsymbol{\varphi}_p(t) = \dot{\mathbf{I}}_p(t), \quad (3.48)$$

donde la matriz de resistencia  $\mathbf{R}_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , de inductancia  $\mathbf{L}_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y de capacitancia



**Figura 3.9:** Circuito  $RLC$  en paralelo con los transductores conectados en paralelo.

$\mathbf{C}_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  están dadas por:

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{B}_p^T \frac{1}{R} \mathbf{B}_p, \quad \mathbf{L}_p = \mathbf{B}_p^T \frac{1}{L} \mathbf{B}_p, \quad \mathbf{C}_p = \mathbf{B}_p^T C \mathbf{B}_p + \sum_{k=1}^{n_t} \mathbf{B}_p^T C_k \mathbf{B}_p \quad (3.49)$$

Por su parte, el vector lado derecho  $\dot{\mathbf{I}}_p(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  es,

$$\dot{\mathbf{I}}_p(t) = \sum_{k=1}^{n_t} \begin{bmatrix} \dot{I}_k(t) \\ -\dot{I}_k(t) \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

y está compuesto por la derivada temporal de las fuentes de corriente. En este caso el subíndice  $p$  en las matrices y en los vectores refiere a una conexión en paralelo entre transductores.

De manera similar a lo expuesto en la subsección previa, para obtener una solución única del sistema de ecuaciones diferenciales se requiere eliminar la singularidad presente en (3.48). Esto se consigue adoptando a uno de los dos potenciales como referencia y especificando su valor. En este sentido, observando la Figura 3.9 se propone,

$$\varphi_2(t) = \dot{\varphi}_2(t) = \ddot{\varphi}_2(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.51)$$

es decir, el potencial inferior de cada transductor se adopta como referencia. De esta manera, el circuito de la Figura 3.9 queda caracterizado mediante una única ecuación diferencial expresada en términos del potencial  $\varphi_1(t)$ . A su vez, la ecuación (3.48) debe satisfacer la siguiente condición

inicial para  $t = t_0$ ,

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_1^0, \dot{\varphi}_1(t_0) = \dot{\varphi}_1^0 \text{ para } t_0 = 0 \quad (3.52)$$

Por último, la potencia disipada por el resistor se calcula mediante la ecuación (3.44).

# Apéndices

## 3.A Relaciones constitutivas de los componentes eléctricos pasivos

Poniendo en consideración a la Figura 3.3 se observa que los tres componentes que integran el circuito eléctrico son elementos de parámetro concentrado y de características pasivas ya que no introducen energía en el sistema. En lo que sigue, se exponen las ecuaciones constitutivas de cada uno de ellos.

### 3.A.1 Resistor

El resistor es un componente de dos terminales que limita el flujo de corriente en un circuito transformando energía eléctrica en energía térmica. Cuando una corriente de intensidad  $i(t)$  circula por este elemento se produce una caída de potencial o voltaje  $v(t)$  entre sus terminales. Para una relación constitutiva lineal la magnitud del voltaje se puede determinar por [102]:

$$v(t) = Ri(t) \quad (3.A.1)$$

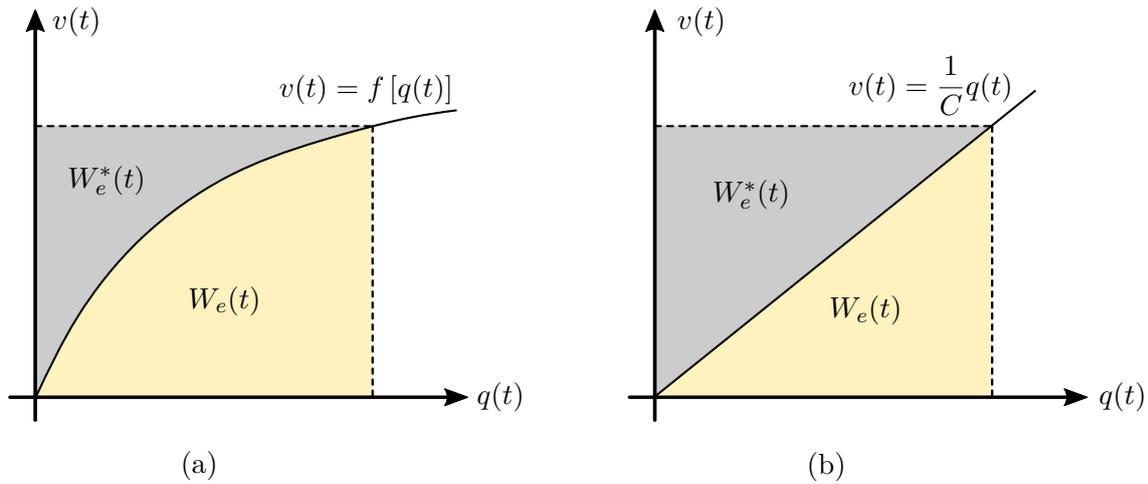
Esta expresión, denominada ley de Ohm, establece que la caída de potencial entre los terminales del resistor es directamente proporcional a la intensidad de corriente, donde la constante de proporcionalidad es la resistencia  $R$ . La energía que disipa el resistor por unidad de tiempo o la potencia eléctrica instantánea  $P(t)$  se determina por medio de:

$$P(t) = i(t)v(t) = Ri^2(t) \quad (3.A.2)$$

### 3.A.2 Capacitor

El capacitor es un componente pasivo compuesto por dos terminales que almacena energía en un campo eléctrico. La corriente  $i(t)$  que circula por este elemento lo hace desde el electrodo con carga eléctrica positiva hacia el electrodo con carga eléctrica negativa y se define por:

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t) \quad (3.A.3)$$



**Figura 3.A.1:** Interpretación gráfica de  $W_e(t)$  y de  $W_e^*(t)$  para un capacitor cuya relación constitutiva es: (a) no lineal; (b) lineal.

La ecuación constitutiva de este elemento relaciona la carga eléctrica  $q(t)$  acumulada en sus electrodos con la diferencia de potencial o voltaje  $v(t)$  entre sus terminales, pudiendo ser expresada como  $v = f(q)$  o  $q = f(v)$ . La descripción de este elemento se puede especificar en términos de un par de funciones de estado complementarias  $W_e(t)$  y  $W_e^*(t)$ . La energía eléctrica  $W_e(t)$  almacenada en el capacitor se puede definir como el trabajo efectuado para cargar el capacitor desde un estado de referencia hasta un estado con carga  $q(t)$ . Este trabajo se computa considerando la relación  $v = f(q)$  y (3.A.3):

$$W_e(t) = \int_0^t v(\tau) i(\tau) d\tau = \int_0^{q(t)} v(t) dq, \quad (3.A.4)$$

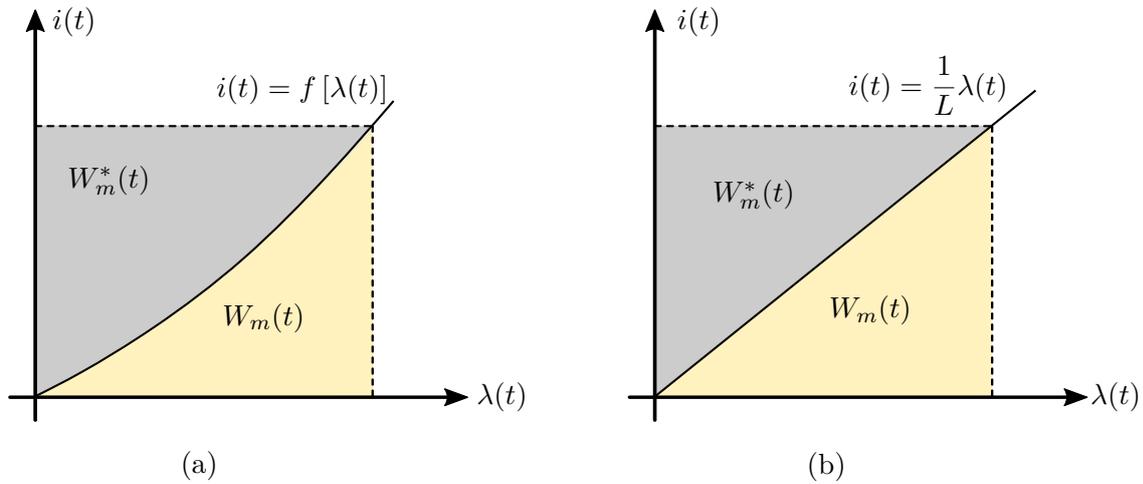
donde  $\tau$  es una variable auxiliar utilizada para realizar la integral. Una interpretación gráfica de la ecuación (3.A.4) se representa por medio del área sombreada bajo la curva de la Figura 3.A.1a. La coenergía eléctrica  $W_e^*(t)$  es una cantidad no física que presenta utilidad en el estudio de sistemas electromecánicos que almacenan o transforman energía. Se relaciona con la energía eléctrica por medio de la transformada de Legendre [61]:

$$W_e^*(t) = q(t)v(t) - W_e(t) = q(t)v(t) - \int_0^{q(t)} v(t) dq \quad (3.A.5)$$

La coenergía también se puede definir utilizando la relación  $q = f(v)$  como:

$$W_e^*(t) = \int_0^{v(t)} q(t) dv \quad (3.A.6)$$

La expresión anterior se representa gráficamente por el área sombreada en la región superior a la curva de la Figura 3.A.1a. La mayoría de estos componentes presenta un comportamiento



**Figura 3.A.2:** Interpretación gráfica de  $W_m(t)$  y de  $W_m^*(t)$  para un inductor cuya relación constitutiva es: (a) no lineal; (b) lineal.

lineal, es decir, la carga eléctrica en el capacitor es directamente proporcional al voltaje aplicado por medio de la capacitancia  $C$ . Por lo tanto, la relación constitutiva lineal queda definida por [102]:

$$q(t) = Cv(t) \quad (3.A.7)$$

A partir de la constitutiva lineal se determina la energía y la coenergía eléctrica empleando (3.A.4) y (3.A.5):

$$W_e(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}(t), \quad W_e^*(t) = \frac{1}{2} Cv^2(t) \quad (3.A.8)$$

Para una constitutiva de las características de (3.A.3) se puede mostrar que  $W_e(t)$  y  $W_e^*(t)$  son idénticas [100].

### 3.A.3 Inductor

El inductor es un componente de dos terminales cuyo desempeño se puede estudiar en función de la intensidad de corriente  $i(t)$ , del flujo magnético  $\lambda(t)$  y del voltaje  $v(t)$  entre sus terminales. Su ecuación constitutiva relaciona la corriente  $i(t)$  con el flujo magnético  $\lambda(t)$  y se puede expresar por  $i = f(\lambda)$  o  $\lambda = f(i)$ . El voltaje  $v(t)$  desarrollado entre los terminales del inductor es igual a la derivada temporal del flujo magnético según lo expuesto por la ley de Faraday:

$$v(t) = \frac{d}{dt} \lambda(t) \quad (3.A.9)$$

De manera similar al capacitor, la descripción del inductor se puede especificar en términos de dos funciones de estado complementarias  $W_m(t)$  y  $W_m^*(t)$ . La energía magnética  $W_m(t)$  almacenada en un inductor ideal es igual al trabajo efectuado sobre el inductor cuando su estado magnético varía desde una condición de flujo magnético nulo a un estado con flujo magnético  $\lambda(t)$ . Esto se puede expresar considerando (3.A.9) como:

$$W_m(t) = \int_0^t v(\tau)i(\tau) d\tau = \int_0^{\lambda(t)} i(t)d\lambda \quad (3.A.10)$$

La expresión anterior se esquematiza por medio del área debajo de la curva de la Figura 3.A.2a. La coenergía magnética  $W_m^*(t)$  es una cantidad que tiene las mismas unidades que  $W_m(t)$  pero carece de sentido físico. Al igual que  $W_e^*(t)$  es de utilidad en el estudio de sistemas electromecánicos que transforman energía de un tipo a otro. Su definición se obtiene aplicando la transformada de Legendre [61]:

$$W_m^*(t) = \lambda(t)i(t) - W_m(t) = \lambda(t)i(t) - \int_0^{\lambda(t)} i(t)d\lambda \quad (3.A.11)$$

La coenergía magnética también se puede obtener utilizando la relación constitutiva  $\lambda = f(i)$ :

$$W_m^*(t) = \int_0^{i(t)} \lambda(t)di \quad (3.A.12)$$

La representación gráfica de  $W_m^*(t)$  viene dada por el área sombreada sobre la curva de la Figura 3.A.2a. En general, la mayoría de los inductores exhiben un comportamiento lineal dado por:

$$\lambda(t) = Li(t), \quad (3.A.13)$$

es decir, el flujo magnético es directamente proporcional a la intensidad de corriente, donde la inductancia  $L$  es la constante de proporcionalidad. Sustituyendo (3.A.13) en (3.A.10) y (3.A.11) se obtiene la energía y la coenergía magnética para un inductor lineal:

$$W_m(t) = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L}(t), \quad W_m^*(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (3.A.14)$$

Se puede mostrar que  $W_m(t)$  y  $W_m^*$  son idénticas para una relación constitutiva lineal [100].

# Modelo electroelástico

En el presente capítulo se describe el procedimiento seguido en la obtención de las ecuaciones que gobiernan a un elemento finito de viga piezoeléctrica. El desarrollo que se expone a continuación se restringe a una viga compuesta por un circuito eléctrico  $RLC$  con sus componentes pasivos conectados en paralelo, pero se admite la posibilidad de ambos tipos de conexión, serie o paralelo, entre el conjunto de transductores piezocerámicos.

El capítulo se organiza de la siguiente manera: inicialmente se definen, sobre el dominio de la viga, las medidas energéticas que forman parte de la función Lagrangiana del modelo. Luego, se determinan las variaciones de estas medidas y se calcula el trabajo virtual no conservativo desarrollado por las fuerzas externas y por los componentes eléctricos pasivos. A continuación, se discretiza el dominio de la viga por medio del método de elementos finitos y se aproximan los campos continuos sobre un subdominio elemental genérico. Posteriormente, haciendo uso de estos campos aproximados, se restringen las variaciones de las medidas energéticas y el trabajo virtual no conservativo al dominio elemental. En base a esto último, se determinan las ecuaciones rectoras para un elemento finito aplicando el principio de Hamilton.

Complementariamente, en el Apéndice del capítulo se introduce el principio de Hamilton para sistemas electromecánicos.

## 4.1 Medidas energéticas

A continuación, se definen las medidas energéticas que conforman el Lagrangiano del modelo sin pormenorizar sus expresiones. Bajo la consideración de que los componentes del circuito están conectados en paralelo, se deduce que la variable eléctrica común a todos ellos es la diferencia de potencial. En consecuencia, es conveniente adoptar al potencial eléctrico  $\varphi(t)$  como coordenada generalizada para evaluar el comportamiento eléctrico del sistema. Por lo tanto, el Lagrangiano

del modelo está dado por la ecuación (4.A.12) y su variación es:

$$\delta L = \delta T - \delta U - \delta W_m + \delta W_e^* \quad (4.1)$$

Mayores detalles sobre las funciones energéticas que componen el Lagrangiano se encuentran en el Apéndice 4.A.

#### 4.1.1 Energía cinética

La energía cinética  $T$  de la viga piezoeléctrica se define por:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \rho(X_i) [\mathbf{v}(X_i, t) \cdot \mathbf{v}(X_i, t)] d\mathcal{B}_0, \quad (4.2)$$

donde  $\mathcal{B}_0$  denota al volumen del cuerpo,  $\rho(X_i)$  a la densidad másica y  $\mathbf{v}(X_i, t)$  al vector velocidad absoluta de un punto arbitrario de la viga, el cual resulta de calcular la derivada con respecto al tiempo del campo de desplazamiento:

$$\mathbf{v}(X_i, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{U}_l(X_i, t) = \frac{d\mathbf{U}_0}{dt}(X_1, t) + \frac{d\tilde{\Theta}}{dt}(X_1, t) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1) \right] \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (4.3)$$

Reemplazando la expresión (4.3) en (4.2) se obtiene la energía cinética del modelo. Asimismo, usando la notación vector columna, la ecuación (4.2) también se puede escribir como:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{v}^T(X_i, t) \rho(X_i) \mathbf{v}(X_i, t) d\mathcal{B}_0 \quad (4.4)$$

#### 4.1.2 Energía interna

La energía interna  $U$  asociada a la viga piezoeléctrica se define por:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \mathbf{E}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0, \quad (4.5)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchoff y  $\mathbf{E}_{vk}(X_i, t)$  denota al tensor de deformaciones de Von Kármán definido en la ecuación (2.56). Sustituyendo en la expresión anterior la relación constitutiva asociada a las tensiones dada por la ecuación (2.81) se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \left[ \mathbb{C} : \mathbf{E}_{vk}(X_i, t) - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E}(X_i, t) \right] : \mathbf{E}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0 \quad (4.6)$$

Luego de distribuir la doble contracción tensorial en ambos miembros de la integral, la energía interna se puede descomponer en los siguientes dos términos:

$$U = U_e - U_{em}, \quad (4.7)$$

donde  $U_e$  es la energía elástica de deformación y  $U_{em}$  la energía mutua o electromecánica. Sus expresiones están dadas por:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} [\mathbf{C} : \mathbf{E}_{vk}(X_i, t)] : \mathbf{E}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0, \\ U_{em} &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} [\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E}(X_i, t)] : \mathbf{E}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

A su vez, se observa que la energía electromecánica se expresa a través de una integración sobre el dominio completo  $\mathcal{B}_0$  de la viga. Sin embargo, las únicas regiones que contribuyen con esta integral son las ocupadas por los transductores piezocerámicos. Por lo tanto, la integral sobre  $\mathcal{B}_0$  se reemplaza por una suma de integrales sobre los dominios  $\mathcal{B}_0^k$ . En base a ello,  $U_{em}$  se puede calcular mediante:

$$U_{em} = \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} [\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E}_k(X_i, t)] : \mathbf{E}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k \quad (4.9)$$

Adicionalmente, es importante destacar que el acoplamiento entre el dominio elástico y el dominio eléctrico tiene su origen en la energía electromecánica. De forma alternativa, las ecuaciones (4.8) y (4.9) pueden escribirse empleando la notación de Mandel-Kelvin. Para este fin se consideran las ecuaciones (2.58) y (2.87) resultando,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{E}}_{vk}^T(X_i, t) \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0, \quad U_{em} = \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \mathbf{E}_k^T(X_i, t) \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k, \quad (4.10)$$

donde  $\mathcal{B}_0^k$  denota el volumen ocupado por el  $k$ -ésimo transductor.

### 4.1.3 Energía magnética

La energía magnética  $W_m$  del modelo corresponde únicamente a la energía que se almacena en el campo magnético del inductor. En este sentido, teniendo en cuenta que la diferencia de potencial entre los terminales de este componente es  $\Delta\varphi(t)$  y considerando la ecuación (3.A.14), la energía magnética está dada por:

$$\lambda(t) = \int_0^t \Delta\varphi(\tau) d\tau, \quad W_m = \frac{1}{2L} \left[ \int_0^t \Delta\varphi(\tau) d\tau \right]^2, \quad (4.11)$$

donde  $\tau$  es una variable auxiliar utilizada en la integración,  $L$  representa a la inductancia del inductor y  $\lambda(t)$  es el flujo magnético.

### 4.1.4 Coenergía eléctrica

La coenergía eléctrica  $W_e^*$  del modelo está compuesta por dos partes, por un lado la coenergía asociada a los  $n_t$  transductores y, por otro lado, la coenergía asociada al capacitor externo.

Esta última se determina observando el tipo de conexión entre componentes eléctricos y usando la ecuación (3.A.10). De acuerdo a lo mencionado, la coenergía está dada por:

$$W_e^* = \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \mathbf{D}_k(X_i, t) \cdot \mathbf{E}_k(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k + \frac{1}{2} C [\Delta\varphi(t)]^2, \quad (4.12)$$

donde  $\mathbf{D}_k(X_i, t)$  y  $\mathbf{E}_k(X_i, t)$  denotan al desplazamiento eléctrico y al campo eléctrico del  $k$ -ésimo transductor, mientras que  $\Delta\varphi(t)$  es la diferencia de potencial entre los terminales del capacitor. Reemplazando la relación constitutiva asociada al desplazamiento eléctrico dada por la ecuación (2.81) en la expresión anterior se obtiene:

$$W_e^* = \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} [\mathbf{e} : \mathbf{E}_{vk}(X_i, t) + \epsilon_E \cdot \mathbf{E}(X_i, t)] \cdot \mathbf{E}_k(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k + \frac{1}{2} C [\Delta\varphi(t)]^2 \quad (4.13)$$

Operando sobre (4.13) se la puede reescribir como,

$$W_e^* = W_{em}^* + W_d^* + W_c^*, \quad (4.14)$$

donde  $W_e^*$  es la coenergía mutua o electromecánica,  $W_d^*$  la coenergía eléctrica inherente a los transductores piezocerámicos y  $W_c^*$  la coenergía eléctrica del capacitor externo. Sus expresiones están dadas por:

$$\begin{aligned} W_{em}^* &= \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} [\mathbf{e} : \mathbf{E}_{vk}(X_i, t)] \cdot \mathbf{E}_k(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k, \quad W_c^* = \frac{1}{2} C [\Delta\varphi(t)]^2 \\ W_d^* &= \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \epsilon_E \cdot \mathbf{E}_k(X_i, t) \cdot \mathbf{E}_k(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k \end{aligned} \quad (4.15)$$

A partir de la propiedad tensorial  $(\mathbf{C} : \mathbf{B}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{a}) : \mathbf{B}$ ,  $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ , se puede reescribir a  $W_{em}^*$  como:

$$W_{em}^* = \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} [\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E}_k(X_i, t)] : \mathbf{E}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k, \quad (4.16)$$

lo cual muestra que la energía electromecánica  $U_{em}$  y la coenergía electromecánica  $W_{em}^*$  son idénticas. Además, haciendo uso de la notación de Mandel-Kelvin las coenergías  $W_{em}^*$  y  $W_d^*$  se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W_{em}^* &= \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \mathbf{E}_k^T(X_i, t) \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k, \\ W_d^* &= \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \mathbf{E}_k^T(X_i, t) \epsilon_E \mathbf{E}_k(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k \end{aligned} \quad (4.17)$$

## 4.2 Variación de las medidas energéticas y trabajo virtual no conservativo

Las medidas energéticas presentadas anteriormente dependen en forma implícita de las variables fundamentales, tanto cinemáticas como eléctricas. De acuerdo a lo expuesto en capítulos previos, el desplazamiento del eje de la viga  $\mathbf{U}_0(X_1, t)$  y la rotación infinitesimal  $\boldsymbol{\theta}(X_1, t)$  de la sección transversal constituyen los campos cinemáticos fundamentales. A partir de ellos, la posición espacial de cada uno de los puntos materiales de la viga queda completamente caracterizada en cada instante. Al mismo tiempo, los potenciales contenidos en el vector  $\boldsymbol{\varphi}_j(t)$  son las variables eléctricas fundamentales del modelo y permite evaluar en cada instante el comportamiento de la red eléctrica utilizada en la recolección de energía.

En esta subsección se calculan las variaciones de las medidas energéticas introducidas previamente y el trabajo virtual desarrollado por los elementos no conservativos del sistema. A tal efecto, se adopta como punto de partida las expresiones energéticas escritas en notación de Mandel-Kelvin. Como se busca explicitar la dependencia de estas cantidades respecto a las variables cinemáticas y eléctricas fundamentales, se denota al tensor de deformaciones  $\bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t)$  y al vector campo eléctrico  $\mathbf{E}_k(X_i, t)$  del  $k$ -ésimo transductor como:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t) &= \bar{\mathbf{E}}_{vk}[\mathbf{U}_l(X_i, t)] \quad , \quad \mathbf{E}_k(X_i, t) = \mathbf{E}_k[\mathbf{U}_l(X_i, t), \mathbf{B}_j^k \boldsymbol{\varphi}_j(t)] \quad , \\ \text{con } \mathbf{U}_l(X_i, t) &= \mathbf{U}_l[\mathbf{U}_0(X_1, t), \boldsymbol{\theta}(X_1, t), X_\alpha] \end{aligned} \quad (4.18)$$

En esta oportunidad, la dependencia de  $\mathbf{E}_k(X_i, t)$  respecto a la variable eléctrica implica algún tipo de conexión entre transductores, lo cual se especifica por la matriz de compatibilidad  $\mathbf{B}_j^k$  y el vector  $\boldsymbol{\varphi}_j(t)$ , donde el subíndice  $j$  refiere a una conexión en serie  $j = s$  o en paralelo  $j = p$ . Por su parte, la diferencia de potencial entre los terminales de los componentes eléctricos de parámetro concentrado se puede explicitar de dos maneras diferentes. Por un lado, mediante  $\Delta\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_k(t)$ , con  $k = n_t + 1$  si los transductores están en serie o  $k = 2$  si están en paralelo. Y, por otro lado, se puede emplear la matriz de compatibilidad  $\mathbf{B}_j$  asociada a los componentes de la red y expresar esta diferencia de potencial por medio de  $\Delta\varphi(t) = \mathbf{B}_j \boldsymbol{\varphi}_j(t)$ . Por último, la variación de (4.18) se indica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t) &= \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}[\delta \mathbf{U}_l(X_i, t)] \quad , \quad \delta \mathbf{E}_k(X_i, t) = \delta \mathbf{E}_k[\delta \mathbf{U}_l(X_i, t), \mathbf{B}_j^k \delta \boldsymbol{\varphi}_j(t)] \quad , \\ \text{con } \delta \mathbf{U}_l(X_i, t) &= \delta \mathbf{U}_l[\delta \mathbf{U}_0(X_1, t), \delta \boldsymbol{\theta}(X_1, t), X_\alpha] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Este abuso de notación tiene como finalidad dejar en claro cuáles son las variables cinemáticas y eléctricas del sistema bajo estudio.

### 4.2.1 Variación de la energía cinética

La variación de la energía cinética, denotada por  $\delta T$ , se obtiene calculando la variación de la ecuación (4.2):

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \rho(X_i) [\delta \mathbf{v}(X_i, t) \cdot \mathbf{v}(X_i, t)] d\mathcal{B}_0 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \rho(X_i) [\mathbf{v}(X_i, t) \cdot \delta \mathbf{v}(X_i, t)] d\mathcal{B}_0 \quad (4.20)$$

Aprovechando la conmutatividad del producto escalar y utilizando la notación vector columna la expresión anterior resulta,

$$\begin{aligned} \delta T &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \rho(X_i) [\delta \mathbf{v}^T(X_i, t) \mathbf{v}(X_i, t)] d\mathcal{B}_0 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \rho(X_i) [\delta \mathbf{v}^T(X_i, t) \mathbf{v}(X_i, t)] d\mathcal{B}_0 \\ &= \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{v}^T(X_i, t) \rho(X_i) \mathbf{v}(X_i, t) d\mathcal{B}_0 = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{U}_l^T(X_i, t) \rho(X_i) \frac{d}{dt} \mathbf{U}_l(X_i, t) d\mathcal{B}_0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde debido a la suposición implícita de que el sistema es holonómico, se intercambié el operador variacional con el operador derivada.

### 4.2.2 Variación de la energía interna

La variación de la energía interna, denotada por  $\delta U$ , se compone de dos términos: la variación de la energía elástica  $\delta U_e$  y la variación de la energía electromecánica (o mutua)  $\delta U_{em}$ . Considerando las ecuaciones (4.7) y (4.10) y calculando las variaciones correspondientes se tiene:

$$\delta U = \delta U_e - \delta U_{em} \quad (4.22)$$

$\delta U_e$  está dado por:

$$\delta U_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}^T(X_i, t) \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0 + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{E}}_{vk}^T(X_i, t) \bar{\mathbf{C}} \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0 \quad (4.23)$$

Teniendo en cuenta la simetría de los tensores involucrados la expresión anterior resulta:

$$\delta U_e = \int_{\mathcal{B}_0} \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}^T(X_i, t) \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0 \quad (4.24)$$

Por su parte,  $\delta U_{em}$  está dado por:

$$\delta U_{em} = \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \delta \mathbf{E}_k^T(X_i, t) \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k + \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \mathbf{E}_k^T(X_i, t) \bar{\mathbf{e}} \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k \quad (4.25)$$

A su vez, poniendo en consideración la ecuación (4.19), la ecuación (4.24) se puede expresar como:

$$\delta U_e = \int_{\mathcal{B}_0} \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}^T [\delta \mathbf{U}_l(X_i, t)] \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{E}}_{vk} [\mathbf{U}_l(X_i, t)] d\mathcal{B}_0 \quad (4.26)$$

y la (4.25) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta U_{em} = & \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \delta \mathbf{E}_k^T \left[ \delta \mathbf{U}_l(X_i, t), \mathbf{B}_j^k \delta \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right] \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{vk} [\mathbf{U}_l(X_i, t)] d\mathcal{B}_0^k + \\ & + \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \mathbf{E}_k^T \left[ \mathbf{U}_l(X_i, t), \mathbf{B}_j^k \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right] \bar{\mathbf{e}} \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk} [\delta \mathbf{U}_l(X_i, t)] d\mathcal{B}_0^k \end{aligned} \quad (4.27)$$

Además, para el integrando del segundo término de la variación de la energía electromecánica se cumple que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k^T \left[ \mathbf{U}_l(X_i, t), \mathbf{B}_j^k \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right] \bar{\mathbf{e}} \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk} [\delta \mathbf{U}_l(X_i, t)] = \\ \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}^T [\delta \mathbf{U}_l(X_i, t)] \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{E}_k \left[ \mathbf{U}_l(X_i, t), \mathbf{B}_j^k \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Consecuentemente,  $\delta U_{em}$  se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \delta U_{em} = & \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \delta \mathbf{E}_k^T \left[ \delta \mathbf{U}_l(X_i, t), \mathbf{B}_j^k \delta \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right] \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{vk} [\mathbf{U}_l(X_i, t)] d\mathcal{B}_0^k + \\ & + \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}^T [\delta \mathbf{U}_l(X_i, t)] \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{E}_k \left[ \mathbf{U}_l(X_i, t), \mathbf{B}_j^k \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right] d\mathcal{B}_0^k \end{aligned} \quad (4.29)$$

### 4.2.3 Variación de la energía magnética

La variación de la energía magnética, denotada por  $\delta W_m$ , se obtiene calculando la variación de (4.11) y está dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \delta W_m = & \frac{1}{L} \left\{ \int_0^t [\varphi_1(\tau) - \varphi_k(\tau)] d\tau \right\} \delta \left\{ \int_0^t [\varphi_1(\tau) - \varphi_k(\tau)] d\tau \right\} \\ = & \left[ \int_0^t \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(\tau) d\tau \right] \mathbf{B}_j^T \frac{1}{L} \mathbf{B}_j \left[ \int_0^t \boldsymbol{\varphi}_j(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (4.30)$$

### 4.2.4 Variación de la coenergía eléctrica

La variación de la coenergía eléctrica, denotada por  $\delta W_e^*$ , se determina calculando la variación de la ecuación (4.14). De ello surge:

$$\delta W_e^* = \delta W_{em}^* + \delta W_d^* + \delta W_c^* \quad (4.31)$$

Luego,  $\delta W_{em}^*$  se obtiene a partir de la ecuación (4.17) y teniendo en cuenta la relación (4.28):

$$\delta W_{em}^* = \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \delta \mathbf{E}_k^T(X_i, t) \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{vk}(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k + \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}^T(X_i, t) \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{E}_k(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k \quad (4.32)$$

Aprovechando la simetría del tensor de permitividad eléctrica  $\delta W_d^*$  se representa por:

$$\begin{aligned}\delta W_d^* &= \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \delta \mathbf{E}_k^T(X_i, t) \epsilon_E \mathbf{E}_k(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \mathbf{E}_k^T(X_i, t) \epsilon_E \delta \mathbf{E}_k(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k \\ &= \sum_{k=1}^{n_t} \int_{\mathcal{B}_0^k} \delta \mathbf{E}_k^T(X_i, t) \epsilon_E \mathbf{E}_k(X_i, t) d\mathcal{B}_0^k\end{aligned}\quad (4.33)$$

Finalmente,  $\delta W_e^*$  es:

$$\delta W_e^* = C [\varphi_1(t) - \varphi_k(t)] [\delta \varphi_1(t) - \delta \varphi_k(t)] = \delta \varphi_j^T(t) \mathbf{B}_j^T C \mathbf{B}_j \varphi_j(t) \quad (4.34)$$

A su vez, a  $\delta W_{em}^*$  y a  $\delta W_d^*$  se las puede escribir mostrando su dependencia respecto a las variables cinemáticas y eléctricas como:

$$\begin{aligned}\delta W_{em}^* &= \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \delta \mathbf{E}_k^T [\delta \mathbf{U}_l(X_i, t), \mathbf{B}_j^k \delta \varphi_j(t)] \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{vk} [\mathbf{U}_l(X_i, t)] d\mathcal{B}_0^k + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0^k} \delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}^T [\delta \mathbf{U}_l(X_i, t)] \bar{\mathbf{e}}^T \mathbf{E}_k [\mathbf{U}_l(X_i, t), \mathbf{B}_j^k \varphi_j(t)] d\mathcal{B}_0^k \\ \delta W_d^* &= \sum_{k=1}^{n_t} \int_{\mathcal{B}_0^k} \delta \mathbf{E}_k^T [\delta \mathbf{U}_l(X_i, t), \mathbf{B}_j^k \delta \varphi_j(t)] \epsilon_E \mathbf{E}_k [\mathbf{U}_l(X_i, t), \mathbf{B}_j^k \varphi_j(t)] d\mathcal{B}_0^k\end{aligned}\quad (4.35)$$

#### 4.2.5 Trabajo virtual no conservativo

El trabajo virtual no conservativo, denotado por  $\delta \bar{W}_{nc}$ , recibe contribuciones de dos efectos: por un lado, el trabajo virtual  $\delta \bar{W}_{nc}^r$  desarrollado por cada elemento no conservativo de la red eléctrica y, por otro lado, el trabajo virtual  $\delta \bar{W}_{nc}^f$  efectuado por las fuerzas mecánicas no conservativas. Esto se expresa por medio de:

$$\delta \bar{W}_{nc} = \delta \bar{W}_{nc}^r + \delta \bar{W}_{nc}^f \quad (4.36)$$

Respecto al primer efecto, el único elemento no conservativo del circuito eléctrico es el resistor  $R$  que, en el presente trabajo, se supone de características lineales. Si la corriente que atraviesa este elemento es  $i(t)$  y la diferencia de potencial entre sus terminales es  $v(t)$ , el trabajo diferencial efectuado durante un intervalo de tiempo  $dt$  es:

$$dW_{nc}^r = v(t)i(t)dt = v(t)dq(t), \quad (4.37)$$

donde  $dq(t)$  denota el diferencial de carga eléctrica. Por lo tanto, el trabajo incremental realizado

por el resistor está dado por [61]:

$$\delta\bar{W}_{nc}^r = -v(t)\delta q(t) \quad (4.38)$$

Partiendo de la relación constitutiva del resistor presentada en (3.A.3), la carga eléctrica se puede expresar como:

$$q(t) = \frac{1}{R} \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad (4.39)$$

donde  $\tau$  es una variable auxiliar. Reemplazando (4.39) en (4.38) y sabiendo que la diferencia de potencial entre los terminales del resistor para el circuito de interés es  $\varphi_1(t) - \varphi_k(t)$ , la expresión del trabajo virtual eléctrico no conservativo está dada por:

$$\begin{aligned} \delta\bar{W}_{nc}^r &= -\frac{1}{R} [\varphi_1(t) - \varphi_k(t)] \int_0^t \delta [\varphi_1(\tau) - \varphi_k(\tau)] d\tau \\ &= - \left[ \int_0^t \delta\varphi_j(\tau) d\tau \right] \mathbf{B}_j^T \frac{1}{R} \mathbf{B}_j \varphi_j(t) \end{aligned} \quad (4.40)$$

En lo que respecta al segundo efecto y siguiendo lo expuesto por Reddy, el trabajo virtual desarrollado por la resultante de las fuerzas mecánicas no conservativas se expresa como [93]:

$$\delta\bar{W}_{nc}^f = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{f}_v(X_i, t) \cdot \delta\mathbf{U}_l(X_i, t) d\mathcal{B}_0 + \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \delta\mathbf{U}_l(X_i, t) d\mathcal{S}_0, \quad (4.41)$$

donde  $\mathbf{f}_v(X_i, t)$  es el vector que denota las fuerzas cuerpo por unidad de volumen, mientras que  $\mathbf{t}(X_i, t)$  es el vector que representa las fuerzas de superficie por unidad de área. La primera de ellas actúan sobre cada una de las partículas materiales que constituyen el cuerpo elástico  $\mathcal{B}_0$ , las segundas actúan sobre la superficie de contorno  $\mathcal{S}_0$ . En la presente formulación, las fuerzas cuerpo se suponen idénticamente nulas,  $\mathbf{f}_v(X_i, t) \equiv 0$ , por ende la ecuación (4.41) se reduce a:

$$\delta\bar{W}_{nc}^f = \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \delta\mathbf{U}_l(X_i, t) d\mathcal{S}_0 \quad (4.42)$$

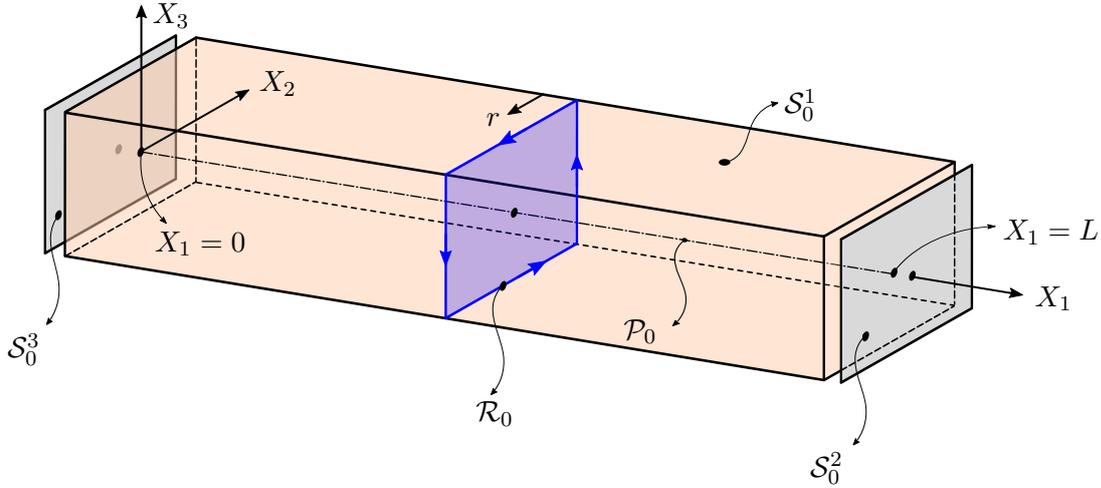
Calculando la variación  $\delta\mathbf{U}_l(X_i, t)$  y reemplazándola en la expresión anterior se obtiene:

$$\delta\bar{W}_{nc}^f = \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \left\{ \delta\mathbf{U}_0(X_1, t) + \delta\tilde{\Theta}(X_1, t) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \delta \left[ \frac{\partial\theta_1}{\partial X_1}(X_1, t) \right] \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \right\} d\mathcal{S}_0 \quad (4.43)$$

Además, considerando la Figura 4.1, la superficie de contorno  $\mathcal{S}_0$  se define mediante:

$$\mathcal{S}_0 = \bigcup_{i=1}^3 \mathcal{S}_0^i, \quad \text{con } \mathcal{S}_0^i \cap \mathcal{S}_0^j = \emptyset \quad \text{y } i \neq j \quad (4.44)$$

Por consiguiente, cada una de las integrales de la ecuación (4.43) se puede expresar a través de la suma de tres integrales de superficie. En este sentido, para la primera de ellas se tiene:



**Figura 4.1:** Superficies de contorno de la viga sobre las que actúan las fuerzas de superficie.

$$\begin{aligned}
 \int_{S_0} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \delta \mathbf{U}_0(X_1, t) dS_0 &= \int_{S_0^1} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \delta \mathbf{U}_0(X_1, t) dS_0^1 + \\
 &+ \int_{S_0^2} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \delta \mathbf{U}_0(0, t) dS_0^2 + \\
 &+ \int_{S_0^3} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \delta \mathbf{U}_0(L, t) dS_0^3
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

A su vez, la superficie  $S_0^1$  se puede representar a través del producto cartesiano entre la línea que caracteriza al eje de la viga  $\mathcal{P}_0 \in \mathbb{R}^3$  y la curva  $\mathcal{R}_0 \in \mathbb{R}^3$ . Esto permite descomponer a la primera integral del miembro derecho de (4.45) en un producto de integrales de línea según el teorema de Fubini [6]. La línea  $\mathcal{P}_0$  se parametriza mediante el mapa  $\varrho(s) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  en tanto que la curva  $\mathcal{R}_0$  por el mapa  $\varpi(r) : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$  donde  $r$  es el parámetro y  $l$  denota la longitud de la curva. Como la viga presenta eje recto, el parámetro  $s$  puede reemplazarse por la coordenada espacial  $X_1$ . En base a lo expuesto, se tiene:

$$\int_{S_0^1} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \delta \mathbf{U}_0(X_1, t) dS_0^1 = \int_0^L \left\{ \int_0^l \mathbf{t}[X_1, X_\alpha(r), t] dr \right\} \cdot \delta \mathbf{U}_0(X_1, t) dX_1, \tag{4.46}$$

donde el término entre llaves se denota por  $\mathbf{f}(X_1, t)$  y constituye la fuerza distribuida por unidad de longitud actuando sobre el eje de la viga. En tanto que, la segunda y la tercera integral de (4.45) se indican por  $\delta F_0(t)$  y  $\delta F_L(t)$ , respectivamente. Luego, la ecuación (4.45) se reescribe como:

$$\int_{S_0} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \delta \mathbf{U}_0(X_1, t) dS_0 = \int_0^L \mathbf{f}(X_1, t) \cdot \delta \mathbf{U}_0(X_1, t) dX_1 + \delta F_0(t) + \delta F_L(t) \tag{4.47}$$

La expresión anterior representa el trabajo virtual desarrollado por las fuerzas de superficie a través del desplazamiento virtual del eje de la viga.

La segunda integral de (4.43) se expresa por:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \delta \tilde{\Theta}(X_1, t) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha d\mathcal{S}_0 &= \int_{\mathcal{S}_0^1} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot [\delta \boldsymbol{\theta}(X_1, t) \times X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha] d\mathcal{S}_0^1 + \\ + \int_{\mathcal{S}_0^2} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot [\delta \boldsymbol{\theta}(0, t) \times X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha] d\mathcal{S}_0^2 &+ \int_{\mathcal{S}_0^3} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot [\delta \boldsymbol{\theta}(L, t) \times X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha] d\mathcal{S}_0^3 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Es importante advertir que sobre la expresión anterior se aplicó la propiedad  $\tilde{\Theta}(X_1, t) = \boldsymbol{\theta}(X_1, t) \times$  donde  $\boldsymbol{\theta}(X_1, t)$  es el vector axial asociado al tensor antisimétrico  $\tilde{\Theta}(X_1, t)$ . Aplicando la propiedad vectorial  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  con  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  sobre la primera integral de (4.48) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_0^1} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot [\delta \boldsymbol{\theta}(X_1, t) \times X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha] d\mathcal{S}_0^1 &= \\ \int_0^L \left\{ \int_0^l X_\alpha(r) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \times \mathbf{t}[X_1, X_\alpha(r), t] dr \right\} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}(X_1, t) dX_1 \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde el término entre llaves se denota por  $\mathbf{m}(X_1, t)$  y representa el momento distribuido a lo largo del eje de la viga. Además, la segunda y la tercera integral de (4.48) se indican por  $\delta M_0(t)$  y  $\delta M_L(t)$ , respectivamente. Luego, la ecuación (4.48) se reescribe como:

$$\int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \delta \tilde{\Theta}(X_1, t) X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha d\mathcal{S}_0 = \int_0^L \mathbf{m}(X_1, t) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}(X_1, t) dX_1 + \delta M_0(t) + \delta M_L(t) \quad (4.50)$$

La expresión anterior representa el trabajo virtual efectuado por los momentos que originan las fuerzas de superficie a través de la rotación virtual de la sección transversal.

Por último, la tercera integral de (4.43) se expresa como:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \delta \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1, t) \right] \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 d\mathcal{S}_0 &= \\ \int_{\mathcal{S}_0^1} t_{X_1}(X_i, t) \omega(X_\alpha) \delta \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1, t) \right] d\mathcal{S}_0^1 &+ \int_{\mathcal{S}_0^2} t_{X_1}(X_i, t) \omega(X_\alpha) \delta \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(0, t) \right] d\mathcal{S}_0^2 + \\ \int_{\mathcal{S}_0^3} t_{X_1}(X_i, t) \omega(X_\alpha) \delta \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(L, t) \right] d\mathcal{S}_0^3, \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde  $t_{X_1}(X_i, t)$  es la componente de la fuerza de superficie en dirección  $X_1$ . Nuevamente, a la primera integral del miembro derecho de (4.51) se la expresa como:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_0^1} t_{X_1}(X_i, t) \omega(X_\alpha) \delta \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1, t) \right] d\mathcal{S}_0^1 &= \\ \int_0^L \left\{ \int_0^l t_{X_1}[X_1, X_\alpha(r), t] \omega[X_\alpha(r)] dr \right\} \delta \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1, t) \right] dX_1, \end{aligned} \quad (4.52)$$

donde el término entre llaves es una cantidad asociada al alabeo expresada por unidad de longitud que se denota por  $f_\omega(X_1, t)$ . En tanto que, la segunda y la tercera integral de (4.51) se

denotan por  $\delta F_0^\omega(t)$  y  $\delta F_L^\omega(t)$ , respectivamente. Luego, la ecuación (4.51) se reescribe como:

$$\int_{S_0} \mathbf{t}(X_i, t) \cdot \delta \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1, t) \right] \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 dS_0 = \int_0^L f_\omega(X_1, t) \delta \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1, t) \right] dX_1 + \delta F_0^\omega(t) + \delta F_L^\omega(t) \quad (4.53)$$

La ecuación predecesora especifica el trabajo virtual desarrollado por las fuerzas de superficie con respecto al desplazamiento virtual asociado al alabeo por torsión.

Finalmente, llevando las ecuaciones (4.47), (4.50) y (4.53) a la ecuación (4.43) surge la expresión que define el trabajo virtual de las fuerzas mecánicas no conservativas,

$$\delta \bar{W}_{nc}^f = \int_0^L \left\{ \mathbf{f}(X_1, t) \cdot \delta \mathbf{U}_0(X_1, t) + \mathbf{m}(X_1, t) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}(X_1, t) + f_\omega(X_1, t) \delta \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial X_1}(X_1, t) \right] \right\} dX_1 + \delta F, \quad (4.54)$$

donde:

$$\delta F = \delta F_0(t) + \delta F_L(t) + \delta M_0(t) + \delta M_L(t) + \delta F_0^\omega(t) + \delta F_L^\omega(t) \quad (4.55)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.40) y (4.54) en (4.36) se obtiene el trabajo virtual no conservativo en términos de las variables cinemáticas y eléctricas fundamentales. A su vez, si esto último se reemplaza en el principio de Hamilton dado por la ecuación (4.A.10) junto a las variaciones previamente calculadas se obtiene la formulación variacional en términos de las variables continuas del modelo.

### 4.3 Método de elementos finitos

En líneas generales, el método de elementos finitos es una técnica numérica de amplia difusión dentro del campo de la ingeniería que se utiliza para aproximar la solución de las ecuaciones que gobiernan a un problema físico de interés. La idea básica del método consiste en dividir el dominio de análisis en una colección finita de subdominios de geometría simple que se denominan *elementos finitos*. En el interior de cada subdominio se plantean las ecuaciones rectoras para luego obtener, a través de un proceso de ensamble, un sistema discreto de ecuaciones (algebraicas y/o diferenciales según sea el caso) expresado en términos de variables que se definen en ciertos puntos estratégicos denominados *nodos*. Una vez resuelto este sistema, se interpola la solución a todo el dominio por medio de funciones de forma o de aproximación que han sido preestablecidas en el interior de los elementos.

En la presente subsección se aplica el método de elementos finitos con el objetivo de obtener soluciones aproximadas para los campos cinemáticos continuos fundamentales  $\mathbf{U}_0(X_1, t)$  y  $\boldsymbol{\theta}(X_1, t)$  en el interior de cada elemento. En virtud de ello, las integrales definidas sobre el volumen de la viga o a lo largo de su eje longitudinal se sustituyen por una colección de

integrales especificadas sobre cada subdominio elemental. Consecuentemente, el trabajo virtual no conservativo y las variaciones de las funciones que integran el Lagrangiano del modelo se restringen al dominio de un elemento y se reemplaza en ellos a los campos continuos por sus aproximaciones elementales. Posteriormente, esto se sustituye en el principio de Hamilton y desde allí se deriva el sistema de ecuaciones de movimiento buscado.

Tal como se puede notar, el procedimiento que se sigue en este desarrollo difiere de la metodología tradicional. Habitualmente, se emplea el principio de Hamilton para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales en función de los campos continuos y, a partir de éste, se determina la formulación débil del problema para, posteriormente, obtener la versión discretizada de las ecuaciones de gobierno. A diferencia de ello, en este trabajo, las ecuaciones rectoras en su versión discreta se las extrae directamente del principio de Hamilton introduciendo en él las aproximaciones propuestas para  $\mathbf{U}_0(X_1, t)$  y  $\boldsymbol{\theta}(X_1, t)$ .

### 4.3.1 Discretización espacial

Consideremos el cuerpo continuo de geometría arbitraria y de volumen  $\Omega$  que se esquematiza en la Figura 4.2. Siguiendo el enfoque tradicional, este cuerpo se descompone en  $N_{el}$  elementos finitos de modo que:

$$\Omega \approx \check{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} \Omega_e \quad (4.56)$$

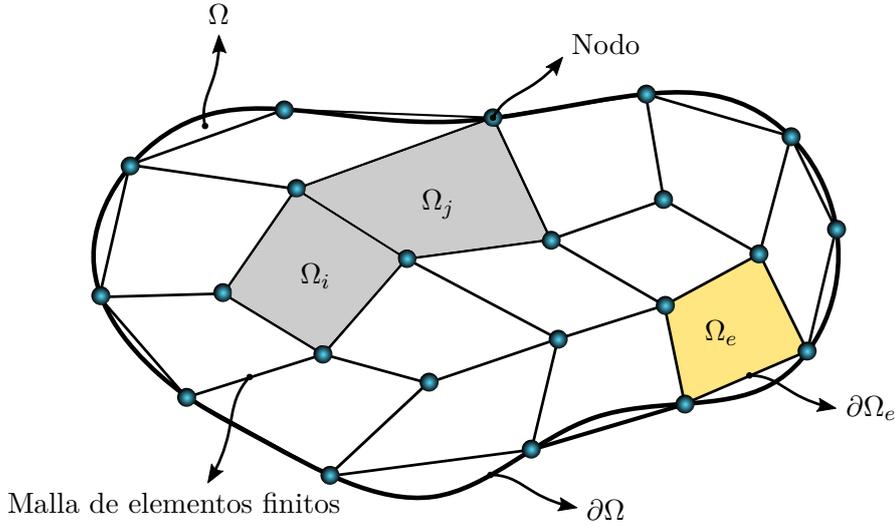
donde  $\check{\Omega}$  representa al dominio aproximado por la colección elemental,  $\Omega_e$  denota al dominio de un elemento típico y  $N_{el}$  es el número de elementos empleados en la discretización del continuo. Los subdominios están interconectados a través de ciertos puntos que se denominan nodos o puntos nodales y el conjunto de todos los subdominios elementales constituye la *mall de elementos finitos*. Es importante destacar que no se admite el solapamiento entre elementos, es decir, se debe cumplir que:

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ con } i \neq j \quad (4.57)$$

A su vez, el contorno del continuo, que se indica por  $\partial\Omega$ , se puede aproximar mediante  $\partial\check{\Omega}$ , lo cual consiste en una colección de curvas o áreas  $\partial\Omega_e$  asociadas a los elementos ubicados en los contornos del cuerpo:

$$\partial\Omega \approx \partial\check{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} \partial\Omega_e \quad (4.58)$$

En base a lo expuesto, resulta válido descomponer a todas aquellas integrales definidas sobre el volumen  $\Omega$  en una suma de integrales especificadas sobre cada uno de los volúmenes elementales



**Figura 4.2:** Discretización del dominio de un cuerpo arbitrario a través de un conjunto de subdominios elementales.

$\Omega_e$ . Esto se puede expresar como:

$$\int_{\Omega} (\cdot) d\Omega \approx \int_{\check{\Omega}} (\cdot) d\check{\Omega} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \left[ \int_{\Omega_e} (\cdot) d\Omega_e \right] \quad (4.59)$$

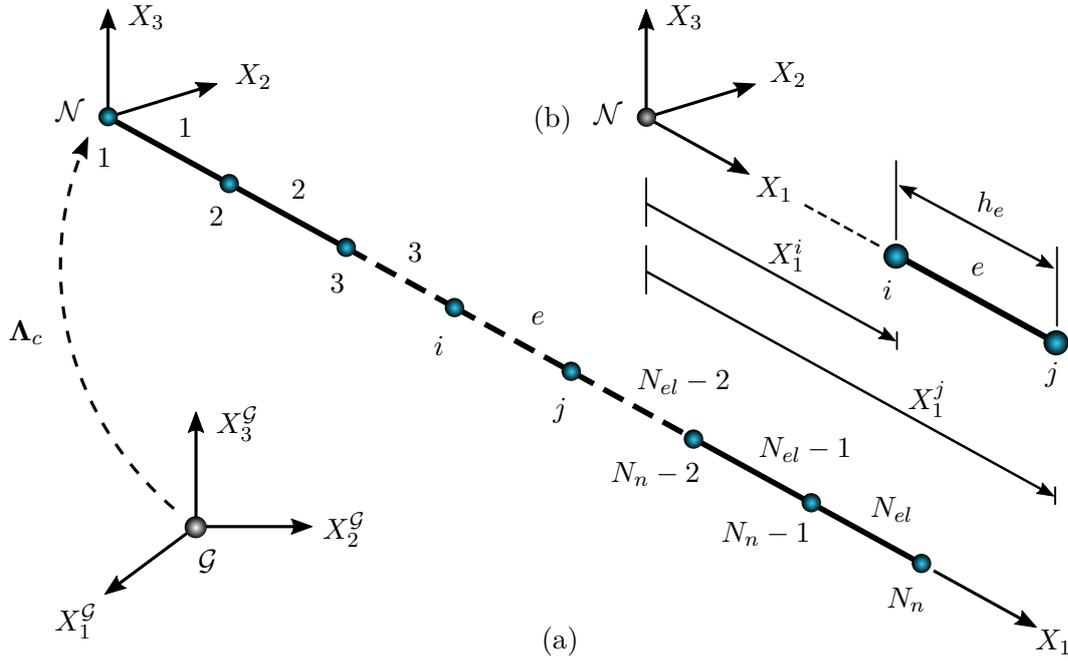
En el contexto del modelo de viga, la línea  $\mathcal{P}_0 \in \mathbb{R}^3$  que describe al eje de la viga se divide en  $N_{el}$  subdominios unidimensionales tal que:

$$[0, L] = \bigcup_{e=1}^{N_{el}} I_e^{h_e}, \quad I_e^{h_e} \subset [X_1^i, X_1^j], \quad (4.60)$$

donde  $L$  representa a la longitud de la viga,  $I_e^{h_e}$  denota a un elemento finito típico,  $X_1^i$  y  $X_1^j$  son las coordenadas cartesianas del nodo inicial y final del elemento, y  $h_e = X_1^j - X_1^i$  indica la longitud del elemento. Además, estos subdominios  $I_e^{h_e}$  satisfacen que:

$$I_i^{h_i} \cap I_j^{h_j} = \emptyset, \quad i \neq j, \quad \text{con } i, j \in \{1, 2, \dots, N_{el}\} \quad (4.61)$$

En la Figura 4.3a se presenta la malla de elementos finitos que se usa en la discretización del eje de la viga en su configuración de referencia, la cual está compuesta por  $N_{el}$  subdominios y  $N_n$  puntos nodales. En tanto que en la Figura 4.3b se muestra el elemento genérico  $e$  con las coordenadas cartesianas que definen la posición de sus nodos extremos.



**Figura 4.3:** (a) Malla de elementos finitos utilizada en la discretización de la viga. (b) Elemento finito de viga representado en el dominio físico.

### 4.3.2 Esquema de interpolación elemental

A continuación, se expone el esquema propuesto para interpolar el desplazamiento del eje de la viga y las rotaciones infinitesimales de la sección transversal, como también el esquema usado para interpolar a la geometría elemental.

#### 4.3.2.1 Interpolación de los campos cinemáticos fundamentales

La idea básica del método de elementos finitos consiste en buscar una solución aproximada para los campos continuos,

$$\mathbf{U}_0(X_1, t) : [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\theta}(X_1, t) : [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (4.62)$$

sobre cada subdominio elemental  $I_e^{h_e}$  a partir de una colección de funciones de aproximación y de coeficientes indeterminados. Si se restringe el dominio de estos campos al dominio de un elemento genérico  $I_e^{h_e}$  se los puede redefinir como:

$$\check{\mathbf{U}}_0^e(X_1, t) : [X_1^i, X_1^j] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad \check{\boldsymbol{\theta}}^e(X_1, t) : [X_1^i, X_1^j] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4.63)$$

En consecuencia, la solución aproximada de  $\check{\mathbf{U}}_0(X_1, t)$  y  $\check{\boldsymbol{\theta}}(X_1, t)$  sobre  $I_e^{h_e}$  se propone de la forma:

$$\check{\mathbf{U}}_0^e(X_1, t) \approx \mathbf{U}_0^e(X_1, t) = \sum_{k=1}^n \psi_k(X_1) \mathbf{c}_k^e(t), \quad \check{\boldsymbol{\theta}}^e(X_1, t) \approx \boldsymbol{\theta}^e(X_1, t) = \sum_{k=1}^n \phi_k(X_1) \mathbf{d}_k^e(t), \quad (4.64)$$

donde  $\psi_k(X_1)$  y  $\phi_k(X_1)$  representan al conjunto de funciones de aproximación,  $\mathbf{c}_k^e(t)$  y  $\mathbf{d}_k^e(t)$  son multiplicadores dependientes del tiempo que deben ser determinados y  $n$  es el número de términos que componen las sumatorias de la expresión predecesora. Con el propósito de garantizar la continuidad de la solución sobre el dominio de la viga se requiere que las aproximaciones sobre elementos adyacentes adopten los mismos valores en los puntos de interconexión, razón por la cual los nodos constituyen los puntos base en la construcción de la solución aproximada sobre cada elemento. De esta manera, los campos continuos se aproximan a nivel elemental por medio de una interpolación lineal que, en forma general, está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0^e(X_1, t) &= \sum_{k=1}^n \psi_k(X_1) \mathbf{u}_k^e(t) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\theta}^e(X_1, t) = \sum_{k=1}^n \phi_k(X_1) \boldsymbol{\theta}_k^e(t) \\ &\text{con } \mathbf{c}_k^e(t) \equiv \mathbf{u}_k^e(t), \quad \mathbf{d}_k^e(t) \equiv \boldsymbol{\theta}_k^e(t), \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde  $\psi_k(X_1)$  y  $\phi_k(X_1)$  denotan al conjunto de funciones de aproximación o funciones de forma elemental y,  $\mathbf{u}_k^e(t) \in \mathbb{R}^3$  y  $\boldsymbol{\theta}_k^e(t) \in \mathbb{R}^3$  son los vectores de grados de libertad nodal, los cuales son variables discretas dependientes del tiempo y están asociados a los nodos del elemento. Además, la condición de continuidad de la solución entre elementos se puede expresar como,

$$\mathbf{U}_0^e(X_1^k, t) = \mathbf{U}_0(X_1^k, t) = \mathbf{u}_k^e(t), \quad \boldsymbol{\theta}^e(X_1^k, t) = \boldsymbol{\theta}(X_1^k, t) = \boldsymbol{\theta}_k^e(t) \quad \text{con } X_1^k \in [X_1^i, X_1^j], \quad (4.66)$$

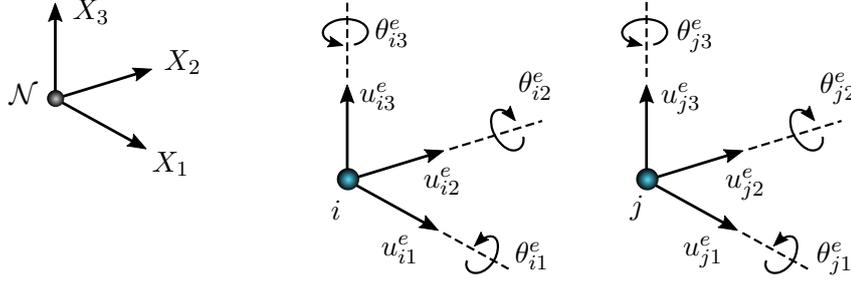
donde la coordenada  $X_1^k$  define la posición de los puntos nodales. Puede notarse que la expresión anterior no sólo impone la continuidad requerida sino también exige que la solución aproximada coincida con la real en nodos ubicados en el interior del elemento (en caso que existan), aunque esto último no resulte estrictamente necesario. Por otra parte, es común adoptar funciones de aproximación polinómicas en la construcción de la solución elemental ya que poseen ciertas ventajas, entre ellas, su facilidad de obtención y la simplicidad de evaluar integrales numéricas cuando se trabaja con polinomios algebraicos. No obstante, estas funciones deben cumplir una serie de requisitos para asegurar que la solución aproximada converja a la solución real a medida que se incrementa la cantidad de elementos de la malla. Estos requisitos son: *i*) garantizar la continuidad implícita en el Lagrangiano de la formulación; *ii*) satisfacer la propiedad de interpolación, esto es

$$\psi_i(X_1^k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = k \\ 0 & \text{Si } i \neq k \end{cases} \quad \phi_i(X_1^k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = k \\ 0 & \text{Si } i \neq k \end{cases} \quad (4.67)$$

iii) obedecer la propiedad de completitud, es decir, cada función polinómica deben incluir todos los términos de orden inferior al orden del polinomio y, iv) cada conjunto  $\psi_k(X_1)$  y  $\phi_k(X_1)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) debe estar compuesto por funciones linealmente independientes. En la expresión (4.67)  $\delta_{ik}$  es el delta de Kronecker.

En la literatura se puede encontrar una gran variedad de modelos de elementos finitos basados en la teoría de Timoshenko que difieren entre sí principalmente en el esquema de interpolación utilizado. El elemento más simple y de mayor difusión práctica es el isoparamétrico lineal, el cual emplea los polinomios lineales de Lagrange para interpolar tanto a la geometría como al campo de desplazamiento. Si bien satisface los requisitos enunciados previamente, experimenta un comportamiento no deseado denominado *bloqueo por corte* y cuya consecuencia es un incremento ficticio de la rigidez estructural. Tal como expone Reddy, este fenómeno se produce debido a la incapacidad que tiene el elemento para representar un estado de corte constante o, equivalentemente debido a una inconsistencia en las interpolaciones de los desplazamientos transversales  $U_0^\alpha(X_1, t)$  y de las rotaciones de la sección  $\theta_\alpha(X_1, t)$  alrededor de los ejes  $X_\alpha$  ( $\alpha = 2, 3$ ) perpendiculares al eje de la viga. En virtud de lo mencionado, numerosos investigadores estudiaron este inconveniente y propusieron diversas alternativas para subsanarlo. La propuesta de mayor popularidad consiste en mantener la interpolación isoparamétrica pero utilizar un esquema de integración reducida para evaluar los coeficientes de rigidez asociados al corte e integrar de forma exacta al resto de ellos [90]. Otra alternativa, denominada interpolación consistente, surge de interpolar a los desplazamientos  $U_0^\alpha(X_1, t)$  a partir de funciones polinómicas con un orden mayor a las empleadas en la interpolación de los giros  $\theta_\alpha(X_1, t)$  y evaluar a los coeficientes de rigidez mediante integración exacta [89]. La interpolación interdependiente es otra alternativa atractiva, la cual se basa en la solución exacta de la forma homogénea del sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna a un modelo de viga de Timoshenko [70, 89]. En este esquema, los desplazamientos  $U_0^\alpha(X_1, t)$  y los giros  $\theta_\alpha(X_1, t)$  están acoplados ya que se interpolan usando los mismos grados de libertad. Luo señala que este acoplamiento es quien garantiza que el elemento este libre de bloqueo por corte [125]. Por último, Oñate propuso otra alternativa denominada interpolación ligada, cuyo objetivo es garantizar que los elementos basados en ella permitan modelar adecuadamente a vigas de gran longitud y su comportamiento tienda al de un modelo de Euler-Bernoulli a medida que la esbeltez de la viga aumenta [79]. En este esquema, los desplazamientos  $U_0^\alpha(X_1, t)$  se interpolan utilizando adicionalmente grados de libertad rotacionales.

Por otro lado, si las no linealidades geométricas de Von Kármán también son consideradas, los elementos pueden incurrir, además, en *bloqueo membranar* en determinadas situaciones. Según expone Reddy esto se debe a la incapacidad que posee el elemento para representar un estado de deformación axial nula [92]. Para evitar este fenómeno numérico indeseado, también se recurre a la integración reducida de los términos de rigidez asociados a las no linealidades o bien al uso de funciones de forma que evitan el fenómeno [117].



**Figura 4.4:** Grados de libertad nodal: tres desplazamientos y tres giros por nodo.

El esquema de interpolación elemental usado en este esfuerzo se sustenta en un elemento finito compuesto por dos nodos, de idénticas características al de la Figura 4.3b. Cada nodo posee seis grados de libertad geométricos que consisten en tres desplazamientos y en tres rotaciones, tal como se indica en la Figura 4.4. Los desplazamientos y los giros del nodo  $i$  se designan por medio de  $u_{ik}^e(t) \in \mathbf{u}_i^e(t)$  y  $\theta_{ik}^e(t) \in \boldsymbol{\theta}_i^e(t)$  respectivamente, mientras que los desplazamientos y los giros asociados al nodo  $j$  se especifican por medio de  $u_{jk}^e(t) \in \mathbf{u}_j^e(t)$  y  $\theta_{jk}^e(t) \in \boldsymbol{\theta}_j^e(t)$  respectivamente. En tanto que el subíndice  $k$  indica el eje respecto al cual se mide la variable geométrica, en este caso se asocia al sistema de referencia  $(X_1, X_2, X_3)$  y adopta valores de 1 a 3. Es común agrupar a los grados de libertad nodal en un vector columna  $\boldsymbol{\eta}_e(t) \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$

$$\boldsymbol{\eta}_e(t) = \left[ \boldsymbol{\eta}_e^i(t) \quad \boldsymbol{\eta}_e^j(t) \right]^T, \quad (4.68)$$

donde  $\boldsymbol{\eta}_e^i(t)$  y  $\boldsymbol{\eta}_e^j(t) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$  son los vectores que reúnen los grados de libertad de cada nodo y están constituidos por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_e^i(t) &= \left[ \mathbf{u}_i^e(t) \quad \boldsymbol{\theta}_i^e(t) \right]^T = \left[ u_{i1}^e(t) \quad u_{i2}^e(t) \quad u_{i3}^e(t) \quad \theta_{i1}^e(t) \quad \theta_{i2}^e(t) \quad \theta_{i3}^e(t) \right]^T \\ \boldsymbol{\eta}_e^j(t) &= \left[ \mathbf{u}_j^e(t) \quad \boldsymbol{\theta}_j^e(t) \right]^T = \left[ u_{j1}^e(t) \quad u_{j2}^e(t) \quad u_{j3}^e(t) \quad \theta_{j1}^e(t) \quad \theta_{j2}^e(t) \quad \theta_{j3}^e(t) \right]^T \end{aligned} \quad (4.69)$$

La interpolación de los campos continuos  $\mathbf{U}_0^e(X_1, t)$  y  $\boldsymbol{\theta}^e(X_1, t)$  sobre el subdominio  $I_e^{he}$  se sustenta en un esquema mixto y tiene como finalidad evitar el bloqueo por corte cuando todas las integrales asociadas a los términos lineales de rigidez se calculan en forma exacta. En este sentido, el desplazamiento axial  ${}_eU_0^1(X_1, t)$  y los giros  ${}_e\theta_k(X_1, t)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) se interpolan adoptando a los polinomios lineales de Lagrange como funciones de forma, mientras que los desplazamientos transversales  ${}_eU_0^\alpha(X_1, t)$  se aproximan con un orden cuadrático a partir de funciones de forma que provienen del esquema de interpolación ligada. No obstante, resulta necesario aplicar integración reducida en los términos de rigidez no lineales para evitar el bloqueo membranar. Teniendo en cuenta lo mencionado, la interpolación del desplazamiento

$\mathbf{U}_0^e(X_1, t)$  está dada por:

$$\mathbf{U}_0^e(X_1, t) = \left\{ \begin{array}{l} N_1^1(X_1) u_{i1}^e(t) + N_7^1(X_1) u_{j1}^e(t) \\ N_2^2(X_1) u_{i2}^e(t) + N_8^2(X_1) u_{j2}^e(t) + N_6^2(X_1) \theta_{i3}^e(t) + N_{12}^2(X_1) \theta_{j3}^e(t) \\ N_3^3(X_1) u_{i3}^e(t) + N_9^3(X_1) u_{j3}^e(t) + N_5^3(X_1) \theta_{i2}^e(t) + N_{11}^3(X_1) \theta_{j2}^e(t) \end{array} \right\} \quad (4.70)$$

y la interpolación de los giros  $\theta^e(X_1, t)$  por:

$$\theta^e(X_1, t) = \left\{ \begin{array}{l} P_4^1(X_1) \theta_{i1}^e(t) + P_{10}^1(X_1) \theta_{j1}^e(t) \\ P_5^2(X_1) \theta_{i2}^e(t) + P_{11}^2(X_1) \theta_{j2}^e(t) \\ P_6^3(X_1) \theta_{i3}^e(t) + P_{12}^3(X_1) \theta_{j3}^e(t) \end{array} \right\} \quad (4.71)$$

En el presente caso,  $N_i^k(X_1)$  y  $P_i^k(X_1)$  denotan a las funciones de forma que se utilizan en la interpolación de los desplazamientos y de las rotaciones respectivamente, ambas expresadas en función de la coordenada  $X_1$  del sistema de referencia de la viga. Tal como se observa en las expresiones anteriores, la interpolación produce una separación de variables ya que las funciones de forma sólo dependen de la coordenada espacial, mientras que los grados de libertad nodal sólo del tiempo. En el Apéndice 4.B, se detalla el proceso de derivación de las funciones de forma asociadas al esquema de interpolación ligada.

### 4.3.2.2 Interpolación de la geometría

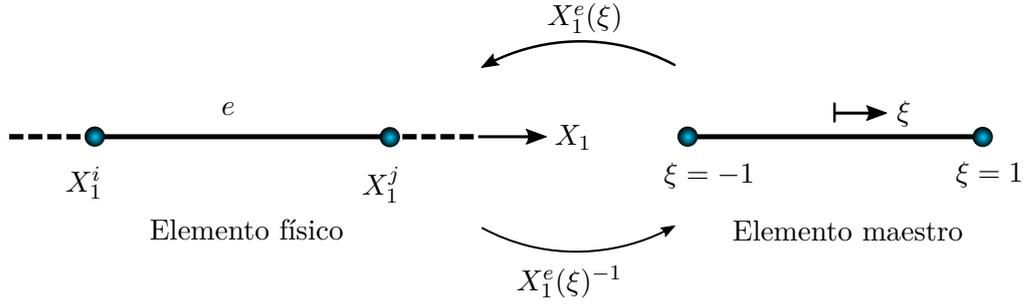
La geometría de cada elemento finito se interpola a partir de una combinación lineal entre los polinomios de primer grado de Lagrange,  $N_1(\xi)$  y  $N_2(\xi)$ , y las coordenadas cartesianas  $X_1$  de los nodos extremos del elemento. Si se considera un subdominio genérico  $I_e^{he}$  la interpolación se define mediante:

$$X_1^e(\xi) : [\xi_1, \xi_2] \rightarrow [X_1^i, X_1^j] \quad \text{tal que} \quad X_1^e(\xi_1) = X_1^i \quad \text{y} \quad X_1^e(\xi_2) = X_1^j, \quad (4.72)$$

donde  $\xi$  es una coordenada natural y  $[\xi_1, \xi_2]$  es el dominio de un elemento particular que recibe el nombre de *elemento maestro*. Es práctica estandar adoptar a  $\xi_1 = -1$  y  $\xi_2 = 1$  como valores extremos de este dominio, por consiguiente la versión explícita de la interpolación de la geometría se puede expresar por medio de:

$$X_1^e(\xi) = N_1(\xi) X_1^i + N_2(\xi) X_1^j = \frac{1}{2} (1 - \xi) X_1^i + \frac{1}{2} (1 + \xi) X_1^j \quad (4.73)$$

La transformación anterior recibe el nombre de *transformación afín* y permite mapear puntos del dominio del elemento maestro en puntos sobre el dominio de un elemento físico. Es decir, existe una correspondencia uno a uno entre puntos del elemento maestro y del elemento físico [52]. Por su parte, el determinante jacobiano  $J$  de la transformación se obtiene de la siguiente



**Figura 4.5:** Elemento físico y elemento maestro vinculado mediante una transformación afín.

manera:

$$J = \frac{\partial X_1^e}{\partial \xi} = \frac{1}{2}X_1^j - \frac{1}{2}X_1^i = \frac{h_e}{2} \quad (4.74)$$

A su vez, como la transformación es uno a uno la inversa  $X_1^e(\xi)^{-1}$  está definida:

$$X_1^e(\xi)^{-1} : [\xi_1, \xi_2] \rightarrow [X_1^i, X_1^j] \quad \text{tal que} \quad X_1^e(X_1^i) = -1 \quad \text{y} \quad X_1^e(X_1^j) = 1 \quad (4.75)$$

y se expresa como:

$$X_1^e(\xi)^{-1} = \frac{1}{X_1^j - X_1^i} [2X_1 - (X_1^i + X_1^j)] = \frac{1}{h_e} [2X_1 - (X_1^i + X_1^j)] \quad (4.76)$$

En la Figura 4.5 se muestra el elemento físico  $e$  y el elemento maestro junto a la transformación afín  $X_1^e(\xi)$  que relaciona ambos dominios. Es importante destacar que cada uno de los elementos de la malla tiene asociado una transformación de estas características.

### 4.3.3 Aproximaciones sobre el dominio de un elemento

En la presente subsección se emplean los esquemas interpolantes propuestos para los campos cinemáticos fundamentales y para la geometría con la finalidad de obtener aproximaciones elementales para el campo de desplazamiento, el tensor de deformaciones y el campo eléctrico.

#### 4.3.3.1 Campo de desplazamiento

La aproximación del campo de desplazamiento sobre el subdominio elemental  $I_e^{h_e}$  se denota por  $\mathbf{U}_l^e(X_i, t)$  y se obtiene partiendo de las interpolaciones propuestas para los campos cinemáticos fundamentales  $\mathbf{U}_0^e(X_1, t)$  y  $\boldsymbol{\theta}^e(X_1, t)$ . Considerando la propiedad  $\tilde{\boldsymbol{\Theta}}(X_1, t) = \boldsymbol{\theta}(X_1, t) \times$  la ecuación (2.25) a nivel elemental se puede expresar como:

$$\mathbf{U}_l^e(X_i, t) = \mathbf{U}_0^e(X_1, t) + \boldsymbol{\theta}^e(X_1, t) \times X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \frac{\partial_e \theta_1}{\partial X_1}(X_1, t) \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (4.77)$$

Es habitual definir a las funciones de forma sobre el dominio del elemento maestro, razón por la cual es apropiado reescribir a las ecuaciones (4.70) y (4.71) en función de la coordenada natural  $\xi$ . De acuerdo a ello, el campo  $\mathbf{U}_0^e(\xi, t)$  sobre  $I_e^{h_e}$  está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0^e(\xi, t) &= \begin{Bmatrix} {}_eU_0^1(\xi, t) \\ {}_eU_0^2(\xi, t) \\ {}_eU_0^3(\xi, t) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} N_1^1(\xi) u_{i1}^e(t) + N_7^1(\xi) u_{j1}^e(t) \\ N_2^2(\xi) u_{i2}^e(t) + N_8^2(\xi) u_{j2}^e(t) + N_6^2(\xi) \theta_{i3}^e(t) + N_{12}^2(\xi) \theta_{j3}^e(t) \\ N_3^3(\xi) u_{i3}^e(t) + N_9^3(\xi) u_{j3}^e(t) + N_5^3(\xi) \theta_{i2}^e(t) + N_{11}^3(\xi) \theta_{j2}^e(t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.78)$$

y las funciones de forma son:

$$\begin{aligned} N_1^1(\xi) = N_2^2(\xi) = N_3^3(\xi) &= \frac{1}{2} (1 - \xi) , \quad N_7^1(\xi) = N_8^2(\xi) = N_9^3(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \xi) \\ N_{11}^3(\xi) = N_6^2(\xi) &= \frac{h_e}{8} (1 - \xi^2) , \quad N_5^3(\xi) = N_{12}^2(\xi) = \frac{h_e}{8} (\xi^2 - 1) \end{aligned} \quad (4.79)$$

Con el objetivo de facilitar la implementación computacional se introduce la siguiente matriz de interpolación de desplazamientos  $\mathbf{N}_u(\xi) \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$

$$\mathbf{N}_u(\xi) = \begin{bmatrix} N_1^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_7^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2^2 & 0 & 0 & 0 & N_6^2 & 0 & N_8^2 & 0 & 0 & 0 & N_{12}^2 \\ 0 & 0 & N_3^3 & 0 & N_5^3 & 0 & 0 & 0 & N_9^3 & 0 & N_{11}^3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

De este modo, la ecuación (4.78) se puede escribir en forma compacta empleando la matriz  $\mathbf{N}_u(\xi)$  y el vector de grados de libertad nodal  $\boldsymbol{\eta}_e(t)$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{U}_0^e(\xi, t) = \mathbf{N}_u(\xi) \boldsymbol{\eta}_e(t) \quad (4.81)$$

Por otra parte, la interpolación del campo  $\boldsymbol{\theta}^e(\xi, t)$  sobre el subdominio  $I_e^{h_e}$  se expresa por medio de:

$$\boldsymbol{\theta}^e(\xi, t) = \begin{Bmatrix} {}_e\theta_1(\xi, t) \\ {}_e\theta_2(\xi, t) \\ {}_e\theta_3(\xi, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_4^1(\xi) \theta_{i1}^e(t) + P_{10}^1(\xi) \theta_{j1}^e(t) \\ P_5^2(\xi) \theta_{i2}^e(t) + P_{11}^2(\xi) \theta_{j2}^e(t) \\ P_6^3(\xi) \theta_{i3}^e(t) + P_{12}^3(\xi) \theta_{j3}^e(t) \end{Bmatrix} \quad (4.82)$$

y sus funciones de forma están dadas por:

$$P_4^1(\xi) = P_5^2(\xi) = P_6^3(\xi) = \frac{1}{2} (1 - \xi) , \quad P_{10}^1(\xi) = P_{11}^2(\xi) = P_{12}^3(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (4.83)$$

Nuevamente, introduciendo la matriz de interpolación de rotaciones  $\mathbf{N}_\theta(\xi) \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$

$$\mathbf{N}_\theta(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & P_4^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{10}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_6^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{12}^3 \end{bmatrix}, \quad (4.84)$$

la ecuación (4.82) se puede escribir en forma compacta empleando esta matriz y el vector de grados de libertad nodal  $\boldsymbol{\eta}_e(t)$  de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\theta}^e(\xi, t) = \mathbf{N}_\theta(\xi) \boldsymbol{\eta}_e(t) \quad (4.85)$$

A los fines prácticos, resulta conveniente expresar al campo de desplazamiento  $\mathbf{U}_l^e(\xi, X_\alpha, t)$  en notación matricial. En consecuencia, teniendo en cuenta lo desarrollado en el Apéndice 4.C, el campo de desplazamiento a nivel elemental se aproxima mediante:

$$\mathbf{U}_l^e(\xi, X_\alpha, t) = \bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) \quad (4.86)$$

Por otra parte, resulta oportuno calcular la variación de  $\mathbf{U}_l^e(\xi, X_\alpha, t)$  la cual está dada por:

$$\delta \mathbf{U}_l^e(\xi, X_\alpha, t) = \bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) \delta \boldsymbol{\eta}_e(t) \quad (4.87)$$

#### 4.3.3.2 Tensor de deformaciones

La representación matricial del tensor de deformaciones en el interior de un subdominio  $I_e^{h_e}$  se puede obtener considerando la ecuación (2.59) y los campos cinemáticos  $\mathbf{U}_0^e(\xi, t)$  y  $\boldsymbol{\theta}^e(\xi, t)$ . Al respecto, el tensor elemental  $\bar{\mathbf{E}}_{vk}^e(\xi, X_\alpha, t)$  se expresa a través de la suma de los siguientes dos términos,

$$\bar{\mathbf{E}}_{vk}^e(\xi, X_\alpha, t) = \bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \boldsymbol{\eta}_e(t)], \quad (4.88)$$

donde  $\bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha)$  agrupa a las componentes lineales de deformación, en tanto que  $\bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \boldsymbol{\eta}_e(t)]$  a las componentes no lineales. La versión explícita de cada uno de ellos se detalla en el Apéndice 4.C. Asimismo, la variación del tensor  $\bar{\mathbf{E}}_{vk}^e(\xi, X_\alpha, t)$  se expresa como:

$$\delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}^e(\xi, X_\alpha, t) = \bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha) \delta \boldsymbol{\eta}_e(t) + \frac{1}{2} \delta \bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \delta \boldsymbol{\eta}_e(t)] \quad (4.89)$$

#### 4.3.3.3 Campo eléctrico del $k$ -ésimo transductor

La representación matricial del campo eléctrico del  $k$ -ésimo transductor en el interior del elemento genérico  $I_e^{h_e}$  se obtiene empleando las interpolaciones de los campos cinemáticos,  $\mathbf{U}_0^e(\xi, t)$  y  $\boldsymbol{\theta}^e(\xi, t)$ , y la ecuación (3.12). Se propone expresar al campo  $\mathbf{E}_k^e(\xi, X_\alpha, t)$  por medio

de la suma de dos términos:

$$\mathbf{E}_k^e(\xi, X_\alpha, t) = {}^j\mathbf{E}_k \varphi_j(t) + {}^i\mathbf{E}_k(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t), \quad (4.90)$$

donde  ${}^j\mathbf{E}_k$  corresponde a la componente lineal ( $l$ ) y  ${}^i\mathbf{E}_k(\xi, X_\alpha)$  a la componente inducida ( $i$ ). En el Apéndice 4.C se explicita a cada uno de ellos. Finalmente, la variación de  $\delta\mathbf{E}_k^e(\xi, X_\alpha, t)$  se obtiene a partir de la expresión anterior:

$$\delta\mathbf{E}_k^e(\xi, X_\alpha, t) = {}^j\mathbf{E}_k \delta\varphi_j(t) + {}^i\mathbf{E}_k(\xi, X_\alpha) \delta\boldsymbol{\eta}_e(t) \quad (4.91)$$

## 4.4 Obtención de las ecuaciones de gobierno

En esta instancia de la formulación se utilizan los campos aproximados para obtener el sistema discreto de ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de un elemento finito de viga piezoeléctrica. En este sentido, se sustituyen las aproximaciones de los campos elementales en las variaciones de las medidas energéticas y en el trabajo virtual no conservativo. Luego, se restringe el dominio de las integrales de volumen, inicialmente definidas sobre el dominio de la viga, al de un subdominio elemental. Por último, se sustituyen en el principio de Hamilton.

Es importante notar que todas las variaciones de las medidas energéticas que sólo dependen de las variables eléctricas no sufren modificaciones al restringir el dominio, lo cual obedece a que estas variables son de parámetro concentrado.

### 4.4.1 Variación de las medidas energéticas y trabajo virtual no conservativo a nivel elemental

#### 4.4.1.1 Variación de la energía cinética

La variación de la energía cinética a nivel elemental  $\delta T^e$  se obtiene sustituyendo las ecuaciones (4.86) y (4.87) en la (4.21):

$$\delta T^e = \int_{\mathcal{B}_0^e} \frac{d}{dt} [\bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) \delta\boldsymbol{\eta}_e(t)]^T \rho(X_i) \frac{d}{dt} [\bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t)] d\mathcal{B}_0^e, \quad (4.92)$$

donde  $\mathcal{B}_0^e$  denota el volumen de elemento finito genérico  $I_e^{h_e}$ . Además, sabiendo que el volumen de la viga  $\mathcal{B}_0$  se desarrolla a través del producto cartesiano entre el eje de la viga  $\mathcal{P}_0 \in \mathbb{R}^3$  y el dominio plano  $\mathcal{A}_0$  representativo de la sección transversal, la integral predecesora se puede descomponer en un producto de dos integrales de acuerdo al teorema de Fubini [6]:

$$\delta T^e = \int_{X_1^i}^{X_1^j} \left\{ \int_{\mathcal{A}_0} \frac{d}{dt} [\bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) \delta\boldsymbol{\eta}_e(t)]^T \rho(X_\alpha) \frac{d}{dt} [\bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t)] d\mathcal{A}_0 \right\} dX_1 \quad (4.93)$$

Como las funciones de forma se expresan en términos de la coordenada natural  $\xi$ , el diferencial  $dX_1$  se relaciona con el diferencial  $d\xi$  por medio del jacobiano  $J$  de la transformación afín del elemento, esto implica  $dX_1 = Jd\xi$ . A su vez, teniendo en cuenta que la única variable dependiente del tiempo es el vector de grados de libertad nodal, la ecuación anterior resulta:

$$\delta T^e = \frac{d}{dt} \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \left\{ \int_{-1}^1 \left[ \int_{\mathcal{A}_0} \bar{\mathbf{U}}^T(\xi, X_\alpha) \rho(X_\alpha) \bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) d\mathcal{A}_0 \right] J d\xi \right\} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta}_e(t) \quad (4.94)$$

El término situado entre llaves recibe el nombre de *matriz de masa elemental*, se la denota por medio de  $\mathbf{M}_e \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  y se determina a través de:

$$\mathbf{M}_e = \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0} \bar{\mathbf{U}}^T(\xi, X_\alpha) \rho(X_\alpha) \bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) d\mathcal{A}_0 J d\xi \quad (4.95)$$

En consecuencia, la variación  $\delta T^e$  se puede expresar en notación compacta como:

$$\delta T^e = \frac{d}{dt} \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{M}_e \frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta}_e(t) \quad (4.96)$$

#### 4.4.1.2 Variación de la energía interna

La variación de la energía interna a nivel elemental  $\delta U^e$  está compuesta por:

$$\delta U^e = \delta U_e^e - \delta U_{em}^e \quad (4.97)$$

El primer sumando, es decir, la variación de la energía interna de deformación  $\delta U_e^e$ , se determina sustituyendo las ecuaciones (4.88) y (4.89) en (4.26). Luego de expandir la expresión resultante se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta U_e^e = & \int_{\mathcal{B}_0^e} \left\{ \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \left[ \bar{\mathbf{E}}_l^T(\xi, X_\alpha) \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}}_l^T(\xi, X_\alpha) \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \boldsymbol{\eta}_e(t)] \right] + \delta \bar{\mathbf{E}}_{nl}^T[\xi, X_\alpha, \delta \boldsymbol{\eta}_e(t)] \left[ \frac{1}{2} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \boldsymbol{\eta}_e(t)] \right] \right\} d\mathcal{B}_0^e \end{aligned} \quad (4.98)$$

De manera similar a (4.93) la integral predecesora se descompone en un producto de integrales, siendo una de ellas de línea en dirección  $X_1$  y la restante de superficie definida sobre el dominio de la sección transversal  $\mathcal{A}_0$ . Además, como las funciones de forma se especifican sobre el elemento maestro se requiere cambiar los límites de integración de la integral de línea y transformar el  $dX_1$  a través del jacobiano  $J$ , es decir  $dX_1 = Jd\xi$ . En consecuencia, las integrales especificadas sobre  $\mathcal{B}_0^e$  se expresan:

$$\int_{d\mathcal{B}_0^e} ( ) d_e \mathcal{B}_0 = \int_{X_1^i}^{X_1^j} \int_{\mathcal{A}_0} ( ) d\mathcal{A}_0 dX_1 = \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0} ( ) d\mathcal{A}_0 J d\xi \quad (4.99)$$

Posteriormente, se opera sobre cada uno de los cuatro términos que componen la expresión (4.98) y se introduce un conjunto de cantidades con la finalidad de obtener una versión compacta de ella. En este sentido, considerando el primer término se define a  $\mathbf{K}_e^e \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  como,

$$\mathbf{K}_e^e = \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0} \bar{\mathbf{E}}_l^T(\xi, X_\alpha) \bar{\mathbf{C}}(X_\alpha) \bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha) d\mathcal{A}_0 J d\xi, \quad (4.100)$$

quien constituye la *matriz de rigidez elástica elemental*. A su vez, debe notarse que se explicita la dependencia del tensor constitutivo  $\bar{\mathbf{C}}(X_\alpha)$  con respecto a las coordenadas  $X_\alpha$ , lo cual obedece a que la sección transversal está compuesta por dos materiales diferentes.

En segundo lugar, operando sobre el segundo y el tercer término de (4.98) se puede definir a  $\mathbf{K}_g^e(\boldsymbol{\eta}_e) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  por medio de:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_g^e(\boldsymbol{\eta}_e) &= \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0} E(X_\alpha) \mathbf{E}_1(X_\alpha) \mathbf{B}_1(\xi) \boldsymbol{\eta}_e(t) \mathbf{B}_{nl}^T(\xi) d\mathcal{A}_0 J d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0} E(X_\alpha) \mathbf{B}_1^T(\xi) \mathbf{E}_1^T(X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{B}_{nl}(\xi) d\mathcal{A}_0 J d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0} E(X_\alpha) \mathbf{B}_{nl}^T(\xi) \boldsymbol{\eta}_e(t) \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{B}_{nl}(\xi) d\mathcal{A}_0 J d\xi, \end{aligned} \quad (4.101)$$

la cual recibe el nombre de *matriz de rigidez geométrica elemental* y queda expresada en función del vector de grados de libertad geométricos  $\boldsymbol{\eta}_e(t)$ . Los dos primeros términos de esta matriz son lineales en  $\boldsymbol{\eta}_e(t)$ , mientras que el tercero es cuadrático en  $\boldsymbol{\eta}_e(t)$ . Por su parte,  $E(X_\alpha)$  denota al módulo de Young de los materiales de la sección. Con el propósito de evitar el bloqueo membranar, los términos dependientes de la variable  $\xi$  en (4.101) se integran de manera reducida empleando un punto de integración de Gauss [94]. Luego, sustituyendo las ecuaciones (4.100) y (4.101) en (4.98) la variación de la energía elástica de deformación se puede expresar mediante:

$$\delta U_e^e = \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{K}_e^e \boldsymbol{\eta}_e(t) + \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{K}_g^e(\boldsymbol{\eta}_e) \boldsymbol{\eta}_e(t) \quad (4.102)$$

Por otro lado, la variación de la energía electromecánica  $\delta U_{em}^e$  surge de reemplazar las ecuaciones (4.88), (4.89), (4.90) y (4.91) en la ecuación (4.29):

$$\delta U_{em}^e = \delta U_{em}^{e1} + \delta U_{em}^{e2}, \quad (4.103)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta U_{em}^{e1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_t} \int_{e\mathcal{B}_0^k} \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(t) \left\{ {}^j \mathbf{E}_k^T \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) + \frac{1}{2} {}^j \mathbf{E}_k^T \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \boldsymbol{\eta}_e(t)] \right\} d_e \mathcal{B}_0^k \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_t} \int_{e\mathcal{B}_0^k} \frac{1}{2} \delta \bar{\mathbf{E}}_{nl}^T[\xi, X_\alpha, \delta \boldsymbol{\eta}_e(t)] \bar{\mathbf{e}}^T \left[ {}^j \mathbf{E}_k \boldsymbol{\varphi}_j(t) + {}^i \mathbf{E}_k(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) \right] d_e \mathcal{B}_0^k, \end{aligned} \quad (4.104)$$

y

$$\begin{aligned} \delta U_{em}^{e2} = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_t} \int_{e\mathcal{B}_0^k} \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \left\{ \bar{\mathbf{E}}_l^T(\xi, X_\alpha) \bar{\mathbf{e}}^{Tj} \mathbf{E}_k \boldsymbol{\varphi}_i(t) + \bar{\mathbf{E}}_l^T(\xi, X_\alpha) \bar{\mathbf{e}}^T {}_i\mathbf{E}_k(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) \right. \\ & \left. + {}_i\mathbf{E}_k^T(\xi, X_\alpha) \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) + \frac{1}{2} {}_i\mathbf{E}_k^T(\xi, X_\alpha) \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \boldsymbol{\eta}_e(t)] \right\} d_e\mathcal{B}_0^k \end{aligned} \quad (4.105)$$

De manera análoga a lo expuesto con anterioridad, las integrales definidas sobre el volumen elemental de cada transductor  $e\mathcal{B}_0^k$  se descomponen en un producto de integrales, una de ellas definida sobre la superficie de la sección transversal de cada transductor  $\mathcal{A}_0^k$  y la otra sobre una línea asociada al eje  $X_1$ . Al mismo tiempo, teniendo presente que las funciones de forma están dadas en términos de la coordenada natural  $\xi$  se puede expresar que:

$$\int_{e\mathcal{B}_0^k} (\cdot) d_e\mathcal{B}_0^k = \int_{X_1^i}^{X_1^j} \int_{\mathcal{A}_0^k} (\cdot) d\mathcal{A}_0^k dX_1 = \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0^k} (\cdot) d\mathcal{A}_0^k J d\xi \quad (4.106)$$

Con el propósito de obtener una notación compacta de la ecuación (4.103) se definen a continuación un conjunto de cantidades. A tal fin, los dos primeros términos del miembro derecho de (4.104) dan origen a la *matriz de acoplamiento electromecánico lineal elemental*  ${}_e\boldsymbol{\Theta}_l \in \mathbb{R}^{12 \times N_v}$  dada por:

$${}_e\boldsymbol{\Theta}_l = \sum_{k=1}^{n_t} {}_e\boldsymbol{\Theta}_l^k = \sum_{k=1}^{n_t} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0^k} \bar{\mathbf{E}}_l^T(\xi, X_\alpha) \bar{\mathbf{e}}^{Tj} \mathbf{E}_k d\mathcal{A}_0^k J d\xi, \quad (4.107)$$

y a la *matriz de acoplamiento electromecánico no lineal elemental*  ${}_e\boldsymbol{\Theta}_{nl} \in \mathbb{R}^{12 \times N_v}$  dada por:

$${}_e\boldsymbol{\Theta}_{nl}(\boldsymbol{\eta}_e) = \sum_{k=1}^{n_t} {}_e\boldsymbol{\Theta}_{nl}^k(\boldsymbol{\eta}_e) = - \sum_{k=1}^{n_t} \frac{1}{t_k} e_{311} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0^k} \mathbf{B}_{nl}^T(\xi) \boldsymbol{\eta}_e(t) \mathbf{B}_j^k d\mathcal{A}_0^k J d\xi \quad (4.108)$$

La primera de estas matrices surge de la interacción o acoplamiento entre la componente lineal del campo eléctrico y la componente lineal del tensor de deformaciones, mientras que la segunda de ellas resulta del acoplamiento entre la componente lineal del campo eléctrico y los términos no lineales del tensor de deformaciones. Como la matriz de acoplamiento no lineal tiene su origen en las componentes no lineales de deformación, los términos dependientes de  $\xi$  en (4.108) se integran usando un punto de integración de Gauss. Adicionalmente, del tercer término de (4.104) y del primer término término de (4.105) resulta la *matriz de rigidez inducida lineal elemental* cuyo origen se atribuye al acoplamiento entre las deformaciones lineales y el término inducido del campo eléctrico. Esta matriz se denota por  ${}_i\mathbf{K}_l^e \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  y su expresión es:

$$\begin{aligned} {}_i\mathbf{K}_l^e &= - \sum_{k=1}^{n_t} {}_i\mathbf{K}_l^k \\ &= - \sum_{k=1}^{n_t} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0^k} \left[ {}_i\mathbf{E}_k^T(\xi, X_\alpha) \bar{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha) + \bar{\mathbf{E}}_l^T(\xi, X_\alpha) \bar{\mathbf{e}}^T {}_i\mathbf{E}_k(\xi, X_\alpha) \right] d\mathcal{A}_0^k J d\xi \end{aligned} \quad (4.109)$$

Por último, el cuarto término de (4.104) y de (4.105) producen la *matriz de rigidez inducida no lineal elemental* cuya procedencia deriva del acoplamiento entre las deformaciones no lineales y el campo eléctrico inducido. Esta matriz se designa por  ${}_i\mathbf{K}_{nl}^e \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  y se determina a través de:

$$\begin{aligned} {}_i\mathbf{K}_{nl}^e(\boldsymbol{\eta}_e) &= - \sum_{k=1}^{n_t} {}_i\mathbf{K}_{nl}^k \\ &= - \sum_{k=1}^{n_t} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0^k} \left\{ \frac{e_{311}}{2} \left[ \mathbf{B}_u^T(\xi) \mathbf{E}_u^T(X_\alpha) + \mathbf{B}_\theta^T(\xi) \mathbf{E}_\theta^T(X_\alpha) \right] \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{B}_{nl}(\xi) + \right. \\ &\quad \left. + e_{311} \mathbf{B}_{nl}^T(\xi) \boldsymbol{\eta}_e(t) \left[ \mathbf{B}_u^T(\xi) \mathbf{E}_u^T(X_\alpha) + \mathbf{B}_\theta^T(\xi) \mathbf{E}_\theta^T(X_\alpha) \right]^T \right\} d\mathcal{A}_0^k J d\xi \end{aligned} \quad (4.110)$$

Nuevamente, los términos dependientes de  $\xi$  en (4.110) se integran de forma reducida usando un punto de integración. Luego, poniendo en consideración las cantidades definidas, la variación  $\delta U_{em}^e$  se puede aproximar y escribir en forma compacta como:

$$\begin{aligned} \delta U_{em}^e &= - \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) {}_i\mathbf{K}_l^e \boldsymbol{\eta}_e(t) + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) {}_e\boldsymbol{\Theta}_l \boldsymbol{\varphi}_j(t) + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) {}_e\boldsymbol{\Theta}_{nl}(\boldsymbol{\eta}_e) \boldsymbol{\varphi}_j(t) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(t) {}_e\boldsymbol{\Theta}_l^T \boldsymbol{\eta}_e(t) + \frac{1}{4} \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(t) {}_e\boldsymbol{\Theta}_{nl}^T(\boldsymbol{\eta}_e) \boldsymbol{\eta}_e(t) - \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) {}_i\mathbf{K}_{nl}^e(\boldsymbol{\eta}_e) \boldsymbol{\eta}_e(t) \end{aligned} \quad (4.111)$$

#### 4.4.1.3 Variación de la coenergía eléctrica

La variación de la coenergía eléctrica a nivel elemental  $\delta W_e^{*e}$  se expresa por medio de la suma de los siguientes tres términos,

$$\delta W_e^{*e} = \delta W_{em}^{*e} + \delta W_d^{*e} + \delta W_c^{*e}, \quad (4.112)$$

donde el primero de ellos corresponde a la variación de la coenergía electromecánica  $\delta W_{em}^{*e}$  que, según la ecuación (4.25), es igual a  $\delta U_{em}^e$  y está dada por la ecuación (4.111). Por su parte, la variación  $\delta W_d^{*e}$  se obtiene sustituyendo las ecuaciones (4.90) y (4.91) en la (4.33) resultando:

$$\begin{aligned} \delta W_d^{*e} &= \sum_{k=1}^{n_t} \int_{e\mathcal{B}_0^k} \left\{ \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(t) \left[ {}_l^j \mathbf{E}_k^T \boldsymbol{\epsilon}_E {}_l^j \mathbf{E}_k \boldsymbol{\varphi}_j(t) + {}_l^j \mathbf{E}_k^T \boldsymbol{\epsilon}_E {}_i \mathbf{E}_k(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) \right] d_e \mathcal{B}_0^k + \right. \\ &\quad \left. + \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \left[ {}_i \mathbf{E}_k^T(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\epsilon}_E {}_l^j \mathbf{E}_k \boldsymbol{\varphi}_j(t) + {}_i \mathbf{E}_k^T(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\epsilon}_E {}_i \mathbf{E}_k(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) \right] \right\} d_e \mathcal{B}_0^k \end{aligned} \quad (4.113)$$

Siguiendo el mismo procedimiento empleado en las dos subsecciones previas, la integral de la ecuación predecesora se descompone de acuerdo a (4.107). A su vez, con el propósito de obtener una versión en notación compacta se introducen tres nuevas cantidades, donde la primera de ellas se asocia al primer sumando de (4.113) y se denomina *matriz de capacitancia elemental* inherente a los piezocerámicos. Esta matriz se denota mediante  ${}_e\mathbf{C}_j \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}$  y se computa

utilizando la siguiente expresión:

$${}^e\mathbf{C}_j = \sum_{k=1}^{n_t} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0^k} {}^j\mathbf{E}_k^T \epsilon_E {}^j\mathbf{E}_k d\mathcal{A}_0^k J d\xi \quad (4.114)$$

Del segundo término de (4.113) surge la *matriz de acoplamiento electromecánico inducido elemental* cuyo origen se atribuye a la interacción entre el término lineal y el término inducido del campo eléctrico. Esta matriz se indica por  ${}^e\mathbf{\Theta}_i \in \mathbb{R}^{12 \times N_v}$  y su expresión resulta de computar:

$${}^e\mathbf{\Theta}_i = \sum_{k=1}^{n_t} {}^e\mathbf{\Theta}_i^k = \sum_{k=1}^{n_t} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0^k} {}^i\mathbf{E}_k^T(\xi, X_\alpha) \epsilon_E {}^j\mathbf{E}_k d\mathcal{A}_0^k J d\xi \quad (4.115)$$

Finalmente, considerando el último término de (4.113) se define a la *matriz de rigidez eléctrica inducida elemental*, la cual se asocia al potencial inducido, se denota por  ${}^i\mathbf{K}_e^e \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  y se calcula mediante:

$${}^i\mathbf{K}_e^e = \sum_{k=1}^{n_t} {}^e\mathbf{K}_e^k = \sum_{k=1}^{n_t} \int_{-1}^1 \int_{\mathcal{A}_0^k} {}^i\mathbf{E}_k^T(\xi, X_\alpha) \epsilon_E {}^i\mathbf{E}_k(\xi, X_\alpha) d\mathcal{A}_0^k J d\xi \quad (4.116)$$

Luego, teniendo en cuenta las ecuaciones (4.114) a (4.116) se obtiene la versión compacta de la variación  $\delta W_d^{*e}$ :

$$\delta W_d^{*e} = \delta \varphi_j^T(t) {}^e\mathbf{C}_j \varphi_j(t) + \delta \varphi_j^T(t) {}^e\mathbf{\Theta}_i^T \eta_e(t) + \delta \eta_e^T(t) {}^e\mathbf{\Theta}_i \varphi_j(t) + \delta \eta_e^T(t) {}^i\mathbf{K}_e^e \eta_e(t) \quad (4.117)$$

#### 4.4.1.4 Trabajo virtual no conservativo

El trabajo virtual no conservativo se expresa por medio de la suma de dos términos:

$$\delta \bar{W}_{nc}^e = \delta \bar{W}_{nc}^r + \delta \bar{W}_{nc}^{fe} \quad (4.118)$$

El trabajo virtual no conservativo de las cargas externas  $\delta \bar{W}_{nc}^{fe}$  se obtiene sustituyendo las aproximaciones de los campos cinemáticos fundamentales en la ecuación (4.54). Sin embargo, antes de presentar la expresión resultante, se introducen dos hipótesis adicionales: *i*) por un lado, se supone que las fuerzas de superficie sobre las caras laterales  $\mathcal{S}_0^2$  y  $\mathcal{S}_0^3$  de la Figura 4.1 son nulas, lo cual implica que  $\delta F = 0$  en (4.54); y, *ii*) por otro lado, la componente en dirección  $X_1$  de las fuerzas de superficie sobre  $\mathcal{S}_0^1$  también se asume nula  $t_{X_1}(X_i, t) = 0$ . Por consiguiente, la aproximación del trabajo virtual no conservativo de las cargas externas sobre un elemento genérico de la malla se reduce a:

$$\delta \bar{W}_{nc}^{fe} = \int_{X_1^i}^{X_1^j} [\mathbf{f}(X_1, t) \cdot \delta \mathbf{U}_0^e(X_1, t) + \mathbf{m}(X_1, t) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}^e(X_1, t)] dX_1 \quad (4.119)$$

Empleando la transformación afín del elemento se expresa a las fuerzas y momentos distribuidos por  $\mathbf{f}[X_1^e(\xi), t]$  y  $\mathbf{m}[X_1^e(\xi), t]$ . Además, la integral anterior sobre el dominio del elemento maestro

se define a partir de la ecuación (4.106) como:

$$\delta \overline{W}_{nc}^{fe} = \int_{-1}^1 \{ \mathbf{f} [X_1^e(\xi), t] \cdot \delta \mathbf{U}_0^e [X_1^e(\xi), t] + \mathbf{m} [X_1^e(\xi), t] \cdot \delta \boldsymbol{\theta}^e [X_1^e(\xi), t] \} J d\xi \quad (4.120)$$

Luego, se introducen las aproximaciones dadas por (4.81) y (4.85) y se expresan los productos escalares en notación matricial. De ello surge,

$$\delta \overline{W}_{nc}^{fe} = \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{f}_e(t) + \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{m}_e(t), \quad (4.121)$$

donde el *vector elemental de fuerzas nodales*  $\mathbf{f}_e(t) \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$  y el *vector elemental de momentos nodales*  $\mathbf{m}_e(t) \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$  están dados por:

$$\mathbf{f}_e(t) = \int_{-1}^1 \mathbf{N}_u^T(\xi) \mathbf{f} [X_1^e(\xi), t] J d\xi, \quad \mathbf{m}_e(t) = \int_{-1}^1 \mathbf{N}_\theta^T(\xi) \mathbf{m} [X_1^e(\xi), t] J d\xi \quad (4.122)$$

Por otra parte, el trabajo virtual no conservativo  $\delta \overline{W}_{nc}^{fe}$  corresponde al trabajo desarrollado por un elemento eléctrico de parámetro concentrado, por lo cual no es necesario restringir su expresión al dominio elemental.

#### 4.4.2 Ecuaciones de movimiento de un elemento finito

Las ecuaciones rectoras de un elemento finito de viga piezoeléctrica se obtienen sustituyendo las expresiones (4.30), (4.34), (4.40), (4.96), (4.102), (4.111), (4.117) y (4.121) en el principio de Hamilton dado por la ecuación (4.A.10),

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{d}{dt} \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{M}_e \frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta}_e(t) + \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{A} [\boldsymbol{\eta}_e(t), \boldsymbol{\varphi}_j(t)] + \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(t) \mathbf{B} [\boldsymbol{\eta}_e(t), \boldsymbol{\varphi}_j(t)] - \right. \\ & \left. - \left[ \int_0^t \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(\tau) d\tau \right] \mathbf{B}_j^T \frac{1}{L} \mathbf{B}_j \left[ \int_0^t \boldsymbol{\varphi}_j(\tau) d\tau \right] - \left[ \int_0^t \delta \boldsymbol{\varphi}_j(\tau) d\tau \right] \mathbf{B}_j^T \frac{1}{R} \mathbf{B}_j \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (4.123)$$

donde,

$$\mathbf{A} [\boldsymbol{\eta}_e(t), \boldsymbol{\varphi}_j(t)] \text{ y } \mathbf{B} [\boldsymbol{\eta}_e(t), \boldsymbol{\varphi}_j(t)], \quad (4.124)$$

agrupan a todos los términos premultiplicados por  $\delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t)$  y  $\delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(t)$  respectivamente. A su vez, para determinar las ecuaciones de movimiento es necesario efectuar integraciones por parte sobre el primer sumando y sobre los últimos dos términos de (4.123). Esto permite expresar todas las variaciones en términos de  $\boldsymbol{\eta}_e^T(t)$  y de  $\boldsymbol{\varphi}_j^T(t)$ , ambas con el mismo orden de derivación. En este sentido, para el primer sumando se tiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{M}_e \frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta}_e(t) dt = \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{M}_e \frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta}_e(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{M}_e \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{\eta}_e(t) dt \quad (4.125)$$

Como las variaciones en  $t_1$  y  $t_2$  son arbitrarias se adopta  $\delta\boldsymbol{\eta}_e^T(t_1) = \delta\boldsymbol{\eta}_e^T(t_2) = \mathbf{0}$ . Por lo tanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{M}_e \frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta}_e(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{M}_e \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{\eta}_e(t) dt \quad (4.126)$$

Operando de manera similar sobre el penúltimo término y considerando que en el instante inicial todos los potenciales eléctricos son nulos,  $\boldsymbol{\varphi}_j(0) = \mathbf{0}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^t \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(\tau) d\tau \mathbf{B}_j^T \frac{1}{L} \mathbf{B}_j \int_0^t \boldsymbol{\varphi}_j(\tau) d\tau dt = \\ & \int_0^t \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(\tau) d\tau \mathbf{B}_j^T \frac{1}{L} \mathbf{B}_j \int_0^t \int_0^t \boldsymbol{\varphi}_j(\tau) d\tau d\tau \Big|_{t_1}^{t_2} - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(t) \mathbf{B}_j^T \frac{1}{L} \mathbf{B}_j \int_0^t \left[ \int_0^t \boldsymbol{\varphi}_j(\tau) d\tau \right] d\tau dt \end{aligned} \quad (4.127)$$

Como los instantes  $t_1$  y  $t_2$  son arbitrarios, pueden seleccionarse tal que la variación de la integral de  $\boldsymbol{\varphi}_j(\tau)$  sea nula en dichos instantes. Luego,

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^t \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(\tau) d\tau \mathbf{B}_j^T \frac{1}{L} \mathbf{B}_j \int_0^t \boldsymbol{\varphi}_j(\tau) d\tau dt = \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(t) \mathbf{B}_j^T \frac{1}{L} \mathbf{B}_j \int_0^t \left[ \int_0^t \boldsymbol{\varphi}_j(\tau) d\tau \right] d\tau dt \end{aligned} \quad (4.128)$$

De manera análoga, el último término resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^t \delta \boldsymbol{\varphi}_j(\tau) d\tau \right] \mathbf{B}_j^T \frac{1}{R} \mathbf{B}_j \boldsymbol{\varphi}_j(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(t) \mathbf{B}_j^T \frac{1}{R} \mathbf{B}_j \left[ \int_0^t \boldsymbol{\varphi}_j(\tau) d\tau \right] dt \quad (4.129)$$

Posteriormente, los términos,

$$\mathbf{A} \left[ \boldsymbol{\eta}_e(t), \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right] \text{ y } \mathbf{B} \left[ \boldsymbol{\eta}_e(t), \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right], \quad (4.130)$$

se redefinen incorporando en ellos las ecuaciones (4.126) a (4.129). Introduciendo la notación dada por la expresión (3.36) para las derivadas temporales, la ecuación (4.123) se puede escribir como:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{A} \left[ \ddot{\boldsymbol{\eta}}_e(t), \boldsymbol{\eta}_e(t), \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\varphi}_j^T(t) \mathbf{B} \left[ \boldsymbol{\eta}_e(t), \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right] dt = 0, \quad (4.131)$$

Como las variaciones  $\delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t)$  y  $\delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(t)$  son arbitrarias, para que la expresión (4.131) se anule se debe cumplir que:

$$\mathbf{A} \left[ \ddot{\boldsymbol{\eta}}_e(t), \boldsymbol{\eta}_e(t), \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} \left[ \boldsymbol{\eta}_e(t), \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right] = \mathbf{0} \quad (4.132)$$

Expandiendo la ecuación anterior y derivando dos veces respecto al tiempo a  $\mathbf{B} \left[ \boldsymbol{\eta}_e(t), \boldsymbol{\varphi}_j(t) \right]$  para eliminar las integrales que provienen de (4.127) y (4.129) se obtiene un sistema de

ecuaciones diferenciales de segundo orden, ordinarias, acopladas y no homogéneas. Este sistema gobierna el comportamiento electroelástico de un elemento finito de viga piezoeléctrica que está compuesta por  $n_t$  transductores piezocerámicos y por un circuito eléctrico  $RLC$  en paralelo. Las ecuaciones de gobierno están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e \ddot{\boldsymbol{\eta}}_e(t) + \left[ \mathbf{K}_e^e + \mathbf{K}_i^e(\boldsymbol{\eta}_e) + \mathbf{K}_g^e(\boldsymbol{\eta}_e) \right] \boldsymbol{\eta}_e(t) - [{}_e\boldsymbol{\Theta}_l + {}_e\boldsymbol{\Theta}_i + {}_e\boldsymbol{\Theta}_{nl}(\boldsymbol{\eta}_e)] \boldsymbol{\varphi}_j(t) &= \mathbf{p}_e(t) \\ \mathbf{C}_j^e \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_j(t) + \mathbf{R}_j^e \dot{\boldsymbol{\varphi}}_j(t) + \mathbf{L}_j^e \boldsymbol{\varphi}_j(t) &= \dot{\mathbf{I}}_j^e(t) \end{aligned} \quad (4.133)$$

Con el propósito de obtener una expresión más compacta se agruparon los términos de rigidez inducida en una única matriz  $\mathbf{K}_i^e(\boldsymbol{\eta}_e)$  y los vectores de fuerzas y momentos nodales en un único vector  $\mathbf{p}_e(t)$ ,

$$\mathbf{K}_i^e(\boldsymbol{\eta}_e) = {}_i\mathbf{K}_e^e + {}_i\mathbf{K}_l^e + {}_i\mathbf{K}_{nl}^e(\boldsymbol{\eta}_e), \quad \mathbf{p}_e(t) = \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{m}_e(t) \quad (4.134)$$

Además, se introdujeron los siguientes términos en el conjunto de ecuaciones eléctricas:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_j^e &= \mathbf{B}_j^T \frac{1}{R} \mathbf{B}_j, \quad \mathbf{L}_j^e = \mathbf{B}_j^T \frac{1}{L} \mathbf{B}_j, \quad \mathbf{C}_j^e = {}_e\mathbf{C}_j + \mathbf{B}_j^T C \mathbf{B}_j, \\ \dot{\mathbf{I}}_j^e(t) &= - \left[ \frac{1}{2} {}_e\boldsymbol{\Theta}_{nl}^T(\boldsymbol{\eta}_e) + {}_e\boldsymbol{\Theta}_l^T + {}_e\boldsymbol{\Theta}_i^T \right] \ddot{\boldsymbol{\eta}}_e(t) - {}_e\dot{\boldsymbol{\Theta}}_{nl}^T(\boldsymbol{\eta}_e) \dot{\boldsymbol{\eta}}_e(t) - \frac{1}{2} {}_e\ddot{\boldsymbol{\Theta}}_{nl}^T(\boldsymbol{\eta}_e) \boldsymbol{\eta}_e(t), \end{aligned} \quad (4.135)$$

donde  $\mathbf{R}_j^e \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}$  es la matriz de resistencia,  $\mathbf{L}_j^e \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}$  es la matriz de inductancia,  $\mathbf{C}_j^e \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}$  es la matriz de capacitancia total y  $\dot{\mathbf{I}}_j^e(t) \in \mathbb{R}^{N_v \times 1}$  es un vector que agrupa términos vinculados al acoplamiento electromecánico lineal, no lineal e inducido. En el Anexo B se explicitan las matrices y vectores de la ecuación (4.133).

#### 4.4.2.1 Comentarios adicionales

Habiendo obtenido las ecuaciones rectoras para un elemento finito se pueden contrastar las ecuaciones que gobiernan el dominio eléctrico con aquellas derivadas en el Capítulo 3. En este sentido, adoptando una conexión en serie entre transductores,  $j = s$ , se puede apreciar que cada una de las matrices dadas en (4.135) son idénticas a las expuestas en la ecuación (3.38). Por su parte, comparando el vector  $\dot{\mathbf{I}}_s(t)$  dado en (3.39) con el vector  $\dot{\mathbf{I}}_s^e(t)$  de (4.135) se puede afirmar que la intensidad y la evolución temporal de la fuente de corriente del circuito depende del acoplamiento electromecánico de cada transductor, del vector de grados de libertad nodal y de las derivadas temporales de este vector. Por otra parte, si los transductores se conectan en paralelo,  $j = p$ , se puede percibir que la versión explícita de las matrices introducidas en (4.135) son las mismas que las presentadas en la ecuación (3.49). Además, observando el vector  $\dot{\mathbf{I}}_p(t)$  definido en (3.49) y el vector  $\dot{\mathbf{I}}_p^e(t)$  de (4.135) se deduce que las derivadas de las fuentes de corriente están estrechamente relacionadas con el acoplamiento electromecánico y con el vector de grados de libertad. Lo mencionado muestra que existe una interacción mutua entre el dominio mecánico y el dominio eléctrico.

Por último, el sistema de ecuaciones diferenciales dado por la ecuación (4.133) también puede ser empleado para modelar miembros estructurales sin piezoeléctricos. Para ello, se debe tomar en consideración el primer conjunto de ecuaciones y eliminar todos aquellos vectores y matrices asociadas al acoplamiento electromecánico lineal, no lineal e inducido.

# Apéndices

## 4.A Principio de Hamilton para sistemas electromecánicos

El principio de Hamilton para sistemas mecánicos consiste en una generalización del principio de desplazamientos virtuales y se utiliza para describir la dinámica de sistemas compuestos por partículas, sólidos rígidos o cuerpos deformables. Este principio considera que la dinámica del sistema se caracteriza por dos funciones energéticas, la energía cinética  $T$  y la energía potencial total  $\Pi$ . El principio de Hamilton para un sistema conservativo establece que, de todas las trayectorias posibles que el sistema mecánico podría seguir desde su posición en el tiempo  $t_1$  a otra posición en el tiempo  $t_2$ , la trayectoria real será aquella para la cual la integral,

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt, \quad (4.A.1)$$

es un extremo [93]. La diferencia  $L \equiv T - \Pi$  recibe el nombre de función Lagrangiana. Lo anterior implica que la integral de línea sobre la función Lagrangiana es un extremo para la trayectoria de movimiento. Luego, el principio de Hamilton puede ser expresado como:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi) dt = 0, \quad (4.A.2)$$

donde  $\delta$  denota al operador variacional. Si el sistema es holonómico la integración y la variación conmutan, por esta razón la ecuación anterior se expresa en términos de la función Lagrangiana como:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (4.A.3)$$

La última integral se denomina integral de acción y Joseph-Louis Lagrange fue quien introdujo por primera vez este concepto. El término acción implica la transformación de energía cinética en potencial o viceversa. A su vez, la energía potencial total se especifica por medio de  $\Pi = U - W_E$ , donde  $U$  es la energía interna de deformación del cuerpo elástico y  $W_E$  es la energía potencial asociada a las cargas exteriores. En consecuencia, la expresión anterior adopta la forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_E) dt = 0 \quad (4.A.4)$$

Cuando las fuerzas externas son no conservativas no se puede definir un potencial  $W_E$  a partir del cual derivan estas cargas. En tal situación,  $\delta W_E$  se reemplaza por  $\delta \overline{W}_{nc}$  que denota el trabajo virtual desarrollado por las fuerzas mecánicas no conservativas. En virtud de ello, el principio de Hamilton para sistemas mecánicos es:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta \overline{W}_{nc}) dt = 0, \quad (4.A.5)$$

donde en este caso el Lagrangiano queda definido simplemente por  $L = T - U$ .

Para abordar sistemas electromecánicos conservativos se requiere efectuar una extensión del principio de Hamilton, la cual puede tomar dos variantes según la variable eléctrica que se elija como coordenada generalizada. Al respecto, si se adopta a la *carga eléctrica* como coordenada generalizada se debe modificar la expresión de la energía potencial total  $\Pi$  incorporando a la energía eléctrica  $W_e$ . Además, se introduce una coenergía potencial total  $\Pi^*$  que tiene en cuenta la coenergía magnética  $W_m^*$  del sistema:

$$\Pi = U + W_e - W_E, \quad \Pi^* = W_m^* \quad (4.A.6)$$

Luego, el principio de Hamilton para sistemas electromecánicos con las cargas eléctricas como coordenadas generalizadas resulta [61]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U - \delta W_e + \delta W_m^* + \delta W_E) dt = 0 \quad (4.A.7)$$

Por otro lado, si se adopta a los *enlaces de flujo* (en inglés, *flux linkages*) se modifica la energía potencial total del sistema mecánico  $\Pi$  añadiendo la energía magnética  $W_m$ . A su vez, se introduce una coenergía potencial total  $\Pi^*$  que tiene en cuenta la coenergía eléctrica  $W_e^*$  del sistema:

$$\Pi = U + W_m - W_E, \quad \Pi^* = W_e^* \quad (4.A.8)$$

Luego, el principio de Hamilton para sistemas electromecánicos con los enlaces de flujo como coordenadas generalizadas resulta [61]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U - \delta W_m + \delta W_e^* + \delta W_E) dt = 0 \quad (4.A.9)$$

A su vez, si el trabajo desarrollado por las cargas externas es no conservativo no es posible definir una función energía potencial  $W_E$ . Por consiguiente, se reemplaza a  $\delta W_E$  por  $\delta \overline{W}_{nc}$ , donde  $\delta \overline{W}_{nc}$  representa el trabajo virtual efectuado por elementos eléctricos no conservativos y por fuerzas mecánicas no conservativas. Finalmente, el principio de Hamilton para sistemas

electromecánicos se expresa por medio de [61]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta \bar{W}_{nc}) dt = 0, \quad (4.A.10)$$

y se enuncia de la siguiente manera: de todas las trayectorias admisibles que puede seguir un sistema electromecánico desde su posición en el tiempo  $t_1$  hasta su posición en el tiempo  $t_2$ , la trayectoria real será aquella para la cual la integral de (4.A.10) se anule. En este caso el Lagrangiano  $L = T - \Pi + \Pi^*$  es igual a,

$$L = T - U - W_e + W_m^*, \quad (4.A.11)$$

si se adopta a las cargas eléctricas como coordenadas generalizadas. En cambio, es igual a,

$$L = T - U - W_m + W_e^*, \quad (4.A.12)$$

cuando los enlaces de flujo se emplean como coordenadas generalizadas. Es importante tener presente que, por definición, la derivada temporal del enlace de flujo es igual al voltaje entre los terminales del componente eléctrico. Por consiguiente, es común adoptar a este último como coordenada generalizada.

## 4.B Esquema de interpolación ligada

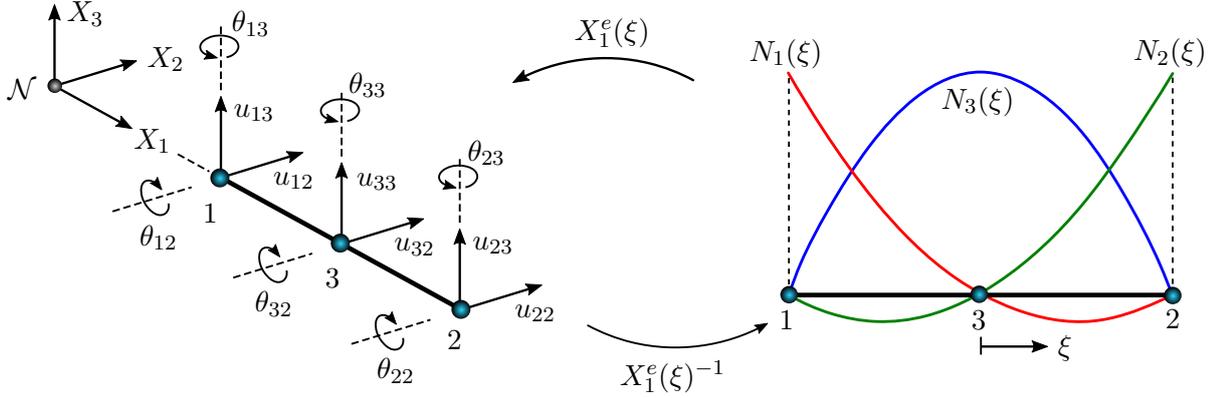
El esquema de interpolación ligada o vinculada tiene como propósito evitar el *bloqueo por corte* y garantizar que la condición de deformación por corte nula correspondiente a la teoría de Euler-Bernoulli sea satisfecha para una viga suficientemente esbelta. Para derivar las funciones de forma asociadas a este esquema se considera un elemento finito compuesto por tres nodos, dos nodos extremos y un nodo central, tal como se esquematiza en la Figura 4.B.1. A partir de ello, se propone interpolar a los desplazamientos transversales  ${}_e U_0^\alpha(\xi, t)$  y a los giros flexionales  ${}_e \theta_\alpha(\xi, t)$  empleando los polinomios cuadráticos de Lagrange [52]. Por consiguiente, se puede expresar,

$$\begin{aligned} {}_e U_0^\alpha(\xi, t) &= N_1(\xi) u_{1\alpha}(t) + N_3(\xi) u_{3\alpha}(t) + N_2(\xi) u_{2\alpha}(t) \\ {}_e \theta_\alpha(\xi, t) &= N_1(\xi) \theta_{1\alpha}(t) + N_3(\xi) \theta_{3\alpha}(t) + N_2(\xi) \theta_{2\alpha}(t), \end{aligned} \quad (4.B.1)$$

donde  $\alpha = 2, 3$  y las funciones de interpolación  $N_i(\xi)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son los polinomios de Lagrange que están dados por:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi, \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 1)\xi, \quad N_3(\xi) = (1 - \xi^2) \quad (4.B.2)$$

A partir de la ecuación (2.58) las deformaciones de corte asociadas al corte (es decir, no se ponen en consideración las deformaciones cortantes por torsión) se pueden expresar de la siguiente



**Figura 4.B.1:** Esquema de interpolación ligada.

manera:

$$\begin{aligned}
 E_{12}(X_1, t) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial_e U_0^2}{\partial X_1}(X_1, t) - \epsilon \theta_3(X_1, t) \right], \\
 E_{13}(X_1, t) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial_e U_0^3}{\partial X_1}(X_1, t) + \epsilon \theta_2(X_1, t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.B.3}$$

Teniendo presente las aproximaciones propuestas para los desplazamientos y giros, y observando que los polinomios de Lagrange se definen sobre el elemento maestro, las deformaciones dadas anteriormente se pueden expresar de la forma:

$$\begin{aligned}
 E_{12}(\xi, t) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial_e U_0^2}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X_1}(\xi, t) - \epsilon \theta_3(\xi, t) \right], \\
 E_{13}(\xi, t) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial_e U_0^3}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X_1}(\xi, t) + \epsilon \theta_2(\xi, t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.B.4}$$

Luego, sustituyendo (4.B.1) en (4.B.2) y la expresión resultante en (4.B.4) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 E_{12}(\xi, t) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2J}(2\xi - 1) u_{12}(t) - \frac{2}{J}\xi u_{32}(t) + \frac{1}{2J}(2\xi + 1) u_{22}(t) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi \theta_{13}(t) - (1 - \xi^2) \theta_{33}(t) - \frac{1}{2}(\xi + 1)\xi \theta_{23}(t) \right] \\
 E_{13}(\xi, t) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2J}(2\xi - 1) u_{13}(t) - \frac{2}{J}\xi u_{33}(t) + \frac{1}{2J}(2\xi + 1) u_{23}(t) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi \theta_{12}(t) + (1 - \xi^2) \theta_{32}(t) + \frac{1}{2}(\xi + 1)\xi \theta_{22}(t) \right]
 \end{aligned} \tag{4.B.5}$$

Reemplazando el jacobiano de la transformación afín ( $J = h_e/2$ ) y reordenando términos en la ecuación predecesora se tiene:

$$\begin{aligned}
E_{12}(\xi, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{22}(t) - u_{12}(t)}{h_e} + \frac{2}{h_e} \xi [u_{12}(t) - 2u_{32}(t) + u_{22}(t)] - \theta_{33}(t) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \xi [\theta_{23}(t) - \theta_{13}(t)] - \frac{1}{2} \xi^2 [\theta_{13}(t) + \theta_{23}(t) - 2\theta_{33}(t)] \right\} \\
E_{13}(\xi, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{23}(t) - u_{13}(t)}{h_e} + \frac{2}{h_e} \xi [u_{13}(t) - 2u_{33}(t) + u_{23}(t)] + \theta_{32}(t) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \xi [\theta_{22}(t) - \theta_{12}(t)] + \frac{1}{2} \xi^2 [\theta_{12}(t) + \theta_{22}(t) - 2\theta_{32}(t)] \right\}
\end{aligned} \tag{4.B.6}$$

El bloqueo por corte se puede evitar si las deformaciones de corte por corte tienden a cero a medida que aumenta la esbeltez de la viga y, en condición límite, se debe cumplir la siguiente condición:

$$E_{12}(\xi, t) = 0, \quad E_{13}(\xi, t) = 0, \tag{4.B.7}$$

lo que se obtiene imponiendo que los coeficientes de los términos lineales y cuadráticos en  $\xi$  sean iguales a cero [79]. De ello resulta:

$$E_{12}(\xi, t) = 0 \longrightarrow \frac{u_{22}(t) - u_{12}(t)}{h_e} = \theta_{33}(t), \quad E_{13}(\xi, t) = 0 \longrightarrow \frac{u_{13}(t) - u_{23}(t)}{h_e} = \theta_{32}(t) \tag{4.B.8}$$

La condición  $E_{1\alpha}(\xi, t) = 0$  implica que la pendiente promedio de los desplazamientos transversales (nodales) sea igual a la rotación del nodo central, lo cual constituye la condición física para vigas esbeltas. En consecuencia, anulando los términos lineales y cuadráticos para ambas deformaciones en la ecuación (4.B.6) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\text{Para } E_{12}(\xi, t) &\longrightarrow \begin{cases} \frac{2}{h_e} [u_{12}(t) - 2u_{32}(t) + u_{22}(t)] - \frac{1}{2} [\theta_{23}(t) - \theta_{13}(t)] = 0 \\ \frac{1}{2} [\theta_{13}(t) + \theta_{23}(t) - 2\theta_{33}(t)] = 0 \end{cases} \\
\text{Para } E_{13}(\xi, t) &\longrightarrow \begin{cases} \frac{2}{h_e} [u_{13}(t) - 2u_{33}(t) + u_{23}(t)] + \frac{1}{2} [\theta_{22}(t) - \theta_{12}(t)] = 0 \\ \frac{1}{2} [\theta_{12}(t) + \theta_{22}(t) - 2\theta_{32}(t)] = 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.B.9}$$

De la ecuación (4.B.9) se despejan los grados de libertad del nodo central en función de los grados de libertad de los nodos extremos:

$$\begin{aligned}
u_{23}(t) &= \frac{1}{2} [u_{21}(t) + u_{22}(t)] - \frac{h_e}{8} [\theta_{32}(t) - \theta_{31}(t)], \quad \theta_{33}(t) = \frac{1}{2} [\theta_{31}(t) + \theta_{32}(t)] \\
u_{33}(t) &= \frac{1}{2} [u_{31}(t) + u_{32}(t)] + \frac{h_e}{8} [\theta_{22}(t) - \theta_{21}(t)], \quad \theta_{23}(t) = \frac{1}{2} [\theta_{21}(t) + \theta_{22}(t)]
\end{aligned} \tag{4.B.10}$$

Luego de sustituir la expresión (4.B.10) en la (4.B.1) y operar algebraicamente resulta el esquema de interpolación buscado:

$$\begin{aligned}
{}^eU_0^2(\xi, t) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) u_{12}(t) + \frac{1}{2}(1 + \xi) u_{22}(t) + \frac{h_e}{8}(1 - \xi^2) \theta_{13}(t) + \\
&\quad + \frac{h_e}{8}(\xi^2 - 1) \theta_{23}(t) \\
{}^e\theta_3(\xi, t) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \theta_{13}(t) + \frac{1}{2}(1 + \xi) \theta_{23}(t) \\
{}^eU_0^3(\xi, t) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) u_{13}(t) + \frac{1}{2}(1 + \xi) u_{23}(t) + \frac{h_e}{8}(\xi^2 - 1) \theta_{12}(t) + \\
&\quad + \frac{h_e}{8}(1 - \xi^2) \theta_{22}(t) \\
{}^e\theta_2(\xi, t) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \theta_{12}(t) + \frac{1}{2}(1 + \xi) \theta_{22}(t)
\end{aligned} \tag{4.B.11}$$

De la ecuación predecesora se infiere que los desplazamientos transversales se interpolan usando polinomios lineales y cuadráticos. Los primeros de ellos utilizan a los desplazamientos nodales como variables interpolantes, mientras que los segundos emplean a las rotaciones nodales. A su vez, los giros se interpolan usando polinomios lineales. Puede notarse que las funciones de forma lineales, tanto las usadas en los desplazamientos como en los giros, corresponden a los polinomios de Lagrange de primer grado.

## 4.C Representación matricial de los campos cinemáticos y del campo eléctrico

A los fines de implementación, resulta conveniente expresar las versiones elementales del campo de desplazamiento, del tensor de deformaciones y del campo eléctrico en formato matricial. A continuación, se detalla la construcción de las matrices involucradas para cada caso.

### 4.C.1 Campo de desplazamiento

El campo de desplazamiento elemental  $\mathbf{U}_l^e(\xi, X_\alpha, t)$  en notación matricial se obtiene sustituyendo las ecuaciones (4.81) y (4.85) en la (4.77) y considerando la transformación afín del elemento. De ello resulta:

$$\mathbf{U}_l^e(\xi, X_\alpha, t) = \left[ \bar{\mathbf{U}}_u(X_\alpha) + \bar{\mathbf{U}}_\omega(X_\alpha) \mathbf{D}_\omega \right] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u(\xi) \\ \mathbf{N}_\theta(\xi) \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_e(t), \tag{4.C.1}$$

donde las matrices  $\bar{\mathbf{U}}_u(X_\alpha)$ ,  $\bar{\mathbf{U}}_\omega(X_\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  dependen de las coordenadas cartesianas de la sección  $X_\alpha$  y de la función de alabeo. La versión explícita de cada una de ellas es:

$$\bar{\mathbf{U}}_u(X_\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & X_3 & -X_2 \\ 0 & 1 & 0 & -X_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & X_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{U}}_\omega(X_\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega(X_\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.C.2)$$

mientras que  $\mathbf{D}_\omega$  es un operador diferencial que actúa sobre las matrices de funciones de forma y cuya expresión matricial está dada por:

$$\mathbf{D}_\omega = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \partial_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (4.C.3)$$

$J$  es el determinante jacobiano de la transformación afín definido en (4.74). Por simplicidad, se introduce la matriz  $\bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$  para denotar al siguiente producto,

$$\bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) = [\bar{\mathbf{U}}_u(X_\alpha) + \bar{\mathbf{U}}_\omega(X_\alpha) \mathbf{D}_\omega] \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u(\xi) \\ \mathbf{N}_\theta(\xi) \end{bmatrix} \quad (4.C.4)$$

En base a lo expuesto, la ecuación (4.C.1) se reescribe como:

$$\mathbf{U}_l^e(\xi, X_\alpha, t) = \bar{\mathbf{U}}(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) \quad (4.C.5)$$

#### 4.C.2 Tensor de deformaciones

La representación matricial del tensor de deformaciones elemental se obtiene a partir de los campos cinemáticos,  $\mathbf{U}_0^e(\xi, t)$  y  $\boldsymbol{\theta}^e(\xi, t)$ , y considerando la ecuación (2.59). En consecuencia, se expresa a  $\bar{\mathbf{E}}_{vk}^e(\xi, X_\alpha, t)$  a través de la suma de dos términos, uno de los cuales agrupa a las componentes lineales de deformación y el otro a las no lineales:

$$\bar{\mathbf{E}}_{vk}^e(\xi, X_\alpha, t) = \bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \boldsymbol{\eta}_e(t)] \quad (4.C.6)$$

A su vez, se expande a la componente lineal  $\bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha)$  en tres términos,

$$\bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha) = \bar{\mathbf{E}}_1(X_\alpha) \mathbf{D}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u(\xi) \\ \mathbf{N}_\theta(\xi) \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{E}}_2(X_\alpha) \mathbf{D}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u(\xi) \\ \mathbf{N}_\theta(\xi) \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{E}}_3(X_\alpha) \mathbf{D}_3 \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u(\xi) \\ \mathbf{N}_\theta(\xi) \end{bmatrix}, \quad (4.C.7)$$

donde el primero de ellos representa a la deformación axial, mientras que el segundo y el tercero a las deformaciones de corte por corte y por torsión. Por otro lado, el término correspondiente

a las componentes no lineales se puede expresar como:

$$\bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \boldsymbol{\eta}_e(t)] = \left[ [\mathbf{D}_{u_2} \mathbf{N}_u(\xi) \boldsymbol{\eta}_e(t)]^2 + [\mathbf{D}_{u_3} \mathbf{N}_u(\xi) \boldsymbol{\eta}_e(t)]^2 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (4.C.8)$$

A continuación se detalla cada una de los términos de las ecuaciones (4.C.7) y (4.C.8). En este sentido,  $\bar{\mathbf{E}}_k(X_\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$  (con  $k = 1, 2, 3$ ) son matrices que dependen de las coordenadas cartesianas  $X_\alpha$  y de la función de alabeo, sus expresiones están dadas por:

$$\bar{\mathbf{E}}_1(X_\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{E}}_2(X_\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{E}}_3(X_\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}, \quad (4.C.9)$$

donde  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$  es un vector fila idénticamente nulo y el resto de los términos son:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \omega(X_2, X_3) & X_3 & -X_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \partial_2 \omega(X_2, X_3) - X_3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \partial_3 \omega(X_2, X_3) + X_2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial X_2}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial X_3} \end{aligned} \quad (4.C.10)$$

Por otra parte,  $\mathbf{D}_k$  (con  $k = 1, 2, 3$ ) son operadores diferenciales matriciales que están asociados a las componentes lineales de deformación y que actúan sobre las matrices de interpolación de desplazamientos y de rotaciones. Por su parte,  $\mathbf{D}_{u_\alpha}$  (con  $\alpha = 2, 3$ ) es un operador diferencial vinculado a la componente no lineal de deformación que opera sobre la matriz de interpolación de desplazamientos. La versión explícita de cada uno de ellos es:

$$\mathbf{D}_1 = \frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} J\partial_\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J\partial_\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J\partial_\xi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix} \quad (4.C.11)$$

$$\mathbf{D}_3 = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{u_2} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & \partial_\xi & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{u_3} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_\xi \end{bmatrix} \quad (4.C.12)$$

$$\partial_{\xi\xi} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

Con el propósito de compactar la notación, se propone designar al producto entre los operadores diferenciales y las matrices de interpolación mediante  $\mathbf{B}_k(\xi) \in \mathbb{R}^{6 \times 12}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) y  $\mathbf{B}_{u_\alpha}(\xi) \in \mathbb{R}^{1 \times 12}$  ( $\alpha = 2, 3$ ), las cuales están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(\xi) &= \mathbf{D}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u(\xi) \\ \mathbf{N}_\theta(\xi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2(\xi) = \mathbf{D}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u(\xi) \\ \mathbf{N}_\theta(\xi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3(\xi) = \mathbf{D}_3 \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u(\xi) \\ \mathbf{N}_\theta(\xi) \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{u_2}(\xi) &= \mathbf{D}_{u_2} \mathbf{N}_u(\xi), \quad \mathbf{B}_{u_3}(\xi) = \mathbf{D}_{u_3} \mathbf{N}_u(\xi) \end{aligned} \quad (4.C.13)$$

En base a la ecuación anterior la matriz  $\bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha)$  se puede expresar como,

$$\bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha) = \bar{\mathbf{E}}_1(X_\alpha) \mathbf{B}_1(\xi) + \bar{\mathbf{E}}_2(X_\alpha) \mathbf{B}_2(\xi) + \bar{\mathbf{E}}_3(X_\alpha) \mathbf{B}_3(\xi), \quad (4.C.14)$$

y la matriz  $\bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \boldsymbol{\eta}_e(t)]$  se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \boldsymbol{\eta}_e(t)] &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{B}_{nl}(\xi) \boldsymbol{\eta}_e(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{B}_{nl}(\xi) &= \mathbf{B}_{u_2}^T(\xi) \mathbf{B}_{u_2}(\xi) + \mathbf{B}_{u_3}^T(\xi) \mathbf{B}_{u_3}(\xi) \end{aligned} \quad (4.C.15)$$

Finalmente, calculando la variación del tensor elemental  $\bar{\mathbf{E}}_{vk}^e(\xi, X_\alpha, t)$  se obtiene:

$$\delta \bar{\mathbf{E}}_{vk}^e(\xi, X_\alpha, t) = \bar{\mathbf{E}}_l(\xi, X_\alpha) \delta \boldsymbol{\eta}_e(t) + \frac{1}{2} \delta \bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \delta \boldsymbol{\eta}_e(t)], \quad (4.C.16)$$

donde:

$$\delta \bar{\mathbf{E}}_{nl}[\xi, X_\alpha, \delta \boldsymbol{\eta}_e(t)] = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{B}_{nl}(\xi) \boldsymbol{\eta}_e(t) + \boldsymbol{\eta}_e^T(t) \mathbf{B}_{nl}(\xi) \delta \boldsymbol{\eta}_e(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.C.17)$$

### 4.C.3 Campo eléctrico del $k$ -ésimo transductor

La representación matricial del campo eléctrico del  $k$ -ésimo transductor en el subdominio elemental se obtiene empleando las interpolaciones de los campos cinemáticos,  $\mathbf{U}_0^e(\xi, t)$  y  $\boldsymbol{\theta}^e(\xi, t)$ , y la ecuación (3.12). Al respecto, se expresa al campo eléctrico  $\mathbf{E}_k^e(\xi, X_\alpha, t)$  por medio de la suma de dos términos, el primero de ellos corresponde a la componente lineal ( $l$ ) y el segundo a la componente inducida ( $i$ ):

$$\mathbf{E}_k^e(\xi, X_\alpha, t) = {}^j_l \mathbf{E}_k \boldsymbol{\varphi}_j(t) + {}^i \mathbf{E}_k(\xi, X_\alpha) \boldsymbol{\eta}_e(t) \quad (4.C.18)$$

En lo que respecta a la matriz de la componente lineal  ${}^j_l \mathbf{E}_k \in \mathbb{R}^{3 \times N_v}$  la misma puede ser definida en términos del espesor del transductor  $t_k$  y de la matriz de compatibilidad de potenciales  $\mathbf{B}_j^k$  de la siguiente forma:

$${}^j_l \mathbf{E}_k = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & t_k^{-1} \end{bmatrix}^T \mathbf{B}_j^k \quad (4.C.19)$$

En este caso el subíndice o supraíndice  $j$  es igual a  $s$  si los transductores están conectados en serie o igual a  $p$  para una conexión en paralelo. Por otro lado, la matriz asociada a la componente inducida  ${}_i\mathbf{E}_k(\xi, X_\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$  está dada por:

$${}_i\mathbf{E}_k(\xi, X_\alpha) = \bar{\mathbf{E}}_u^k(X_\alpha) \mathbf{D}_u \mathbf{N}_u(\xi) + \bar{\mathbf{E}}_\theta^k(X_\alpha) \mathbf{D}_\theta \mathbf{N}_\theta(\xi) \quad (4.C.20)$$

En tanto que, las matrices  $\bar{\mathbf{E}}_u^k(X_\alpha), \bar{\mathbf{E}}_\theta^k(X_\alpha) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  dependen de propiedades piezoeléctricas y de las coordenadas cartesianas  $X_\alpha$ . Ellas se expresan por medio de,

$$\bar{\mathbf{E}}_u^k(X_\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_u \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{E}}_\theta^k(X_\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_u = [0 \quad 0 \quad E_u], \quad \mathbf{E}_\theta = [E_\theta^1 \quad E_\theta^2 \quad 0], \quad (4.C.21)$$

donde  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$  es un vector fila idénticamente nulo, mientras que  $E_u, E_\theta^1$  y  $E_\theta^2$  son escalares que se definen de la siguiente manera:

$$E_u = \frac{{}^2_k X_3 + {}^1_k X_3 - 2X_3}{2\epsilon_{33}^E} e_{113}, \quad E_\theta^2 = \frac{{}^2_k X_3 + {}^1_k X_3 - 2X_3}{2\epsilon_{33}^E} (e_{113} + e_{311})$$

$$E_\theta^1 = \frac{e_{113}}{\epsilon_{33}^E} \left\{ \frac{{}^2_k X_3 + {}^1_k X_3 - 2X_3}{2} X_2 - 2 \left[ \frac{\partial \omega}{\partial X_3}(X_\alpha) - \frac{\tilde{\omega}(X_{2,{}^2_k} X_3) - \tilde{\omega}(X_{2,{}^1_k} X_3)}{t_k} \right] \right\} \quad (4.C.22)$$

Por otra parte,  $\mathbf{D}_u$  y  $\mathbf{D}_\theta$  son operadores diferenciales matriciales que actúan sobre las matrices de interpolación  $\mathbf{N}_u(\xi)$  y  $\mathbf{N}_\theta(\xi)$ . Ellos están dados por:

$$\mathbf{D}_u = \frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{\xi\xi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_\theta = \frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} \partial_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & J\partial_\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.C.23)$$

Nuevamente, por simplicidad el producto entre los operadores diferenciales y las matrices de interpolación se agrupan en las matrices  $\mathbf{B}_u(\xi)$  y  $\mathbf{B}_\theta(\xi) \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$

$$\mathbf{B}_u(\xi) = \mathbf{D}_u \mathbf{N}_u(\xi), \quad \mathbf{B}_\theta(\xi) = \mathbf{D}_\theta \mathbf{N}_\theta(\xi) \quad (4.C.24)$$

Por último, sustituyendo la ecuación anterior en la (4.C.20) y esta última en la (4.C.18) resulta:

$$\mathbf{E}_k^e(\xi, X_\alpha, t) = {}_l^j \mathbf{E}_k \varphi_j(t) + \left[ \bar{\mathbf{E}}_u^k(X_\alpha) \mathbf{B}_u(\xi) + \bar{\mathbf{E}}_\theta^k(X_\alpha) \mathbf{B}_\theta(\xi) \right] \boldsymbol{\eta}_e(t) \quad (4.C.25)$$

# Modelo aerodinámico

En este capítulo se discuten los aspectos más relevantes del modelo aerodinámico. El mismo comienza con una breve descripción de las características generales del modelo y, en particular, del método utilizado en la evaluación de las cargas aerodinámicas. Posteriormente, se detallan las hipótesis simplificadoras adoptadas y se presentan las ecuaciones básicas junto a una serie de conceptos generales que contribuyen a una correcta interpretación del método. Finalmente, se exponen los detalles de implementación más significativos, esto es, cómo se representan las superficies sustentadoras y las diferentes etapas de cálculo que incluye la determinación de las cargas aerodinámicas. A pesar de la información brindada en este capítulo, en este trabajo se emplea la implementación de Pérez Segura [85].

## 5.1 Generalidades

Los modelos aerodinámicos se emplean con la finalidad de predecir las cargas aerodinámicas que actúan sobre los cuerpos inmersos en un dominio fluido. En general, estos modelos pueden agruparse en las siguientes tres categorías: modelos analíticos, modelos que utilizan algoritmos numéricos para aproximar la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes y modelos que se basan en la distribución de singularidades. Para el problema que se aborda en este trabajo es válido considerar que el flujo que circunda las superficies alares está caracterizado por un elevado número de Reynolds. Por consiguiente, se puede asumir que los efectos viscosos están confinados en delgadas capas, adyacentes a las superficies sólidas, y en las estelas que se desprenden desde los bordes filosos de las alas. Teniendo en cuenta lo mencionado, las cargas aerodinámicas pueden ser predichas adoptando un método basado en la distribución de singularidades sobre superficies sólidas, tal como lo es el método de la red de vórtices inestacionario y no lineal (UVLM) [84]. Un aspecto particularmente interesante de este método es que permite efectuar análisis más generales que los correspondientes a los modelos analíticos, a la vez que requiere un volumen

de cálculo mucho menor que aquellos que buscan aproximar la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes. Esta característica lo dota de un excelente balance entre generalidad y costo computacional [71].

El modelo aerodinámico que se implementa permite estimar las cargas sobre cuerpos de forma general que están inmersos en el seno de un fluido. Se consideran flujos dominados por vorticidad en los que el fenómeno llamado *vortex bursting* no sucede. A su vez, el modelo permite incluir varios cuerpos para estudiar las interferencias aerodinámicas estacionarias e inestacionarias y, podría tener en cuenta no linealidades aerodinámicas asociadas a grandes ángulos de ataque (en este caso el desprendimiento ocurrirá desde una región a determinar situada sobre el extradós) y grandes deformaciones.

Como resultado del movimiento relativo entre los cuerpos y el fluido que está en reposo, se desarrollan gradientes de velocidad que dan origen a vorticidad concentrada en una delgada capa adherida a las superficies de los cuerpos, la cual se denomina capa límite. En ella, hay suficiente vorticidad para incrementar la velocidad del flujo desde cero, condición de no deslizamiento, sobre las superficies hasta la condición de flujo externo. A medida que aumenta el número de Reynolds, el espesor de la capa límite disminuye debido a la reducción progresiva de la influencia de la difusión viscosa en relación con el transporte de momento lineal convectivo. En el caso límite de un número de Reynolds infinito, las capas límites y todas aquellas regiones que contienen vorticidad se vuelven extremadamente delgadas pero con suficiente vorticidad para producir una transición de velocidad desde la condición de no deslizamiento hacia las condiciones de flujo externo. De hecho, en tal situación, las capas límites parecen producir una discontinuidad en la componente tangencial de la velocidad del flujo, asemejándose a una superficie vorticiosa.

En virtud de lo expuesto, en el UVLM se divide al dominio fluido en dos regiones bien definidas: *i*) una región pequeña y compacta de flujo rotacional con vorticidad no nula asociada a las capas límites y las estelas; *ii*) el resto del dominio infinito se considera irrotacional. Debido a lo mencionado, las capas límites y las estelas se idealizan por medio de dos tipos de sábanas (láminas) vorticosas: sábanas adheridas (SVAs) y sábanas libres (SVLs). Las SVAs modelan las capas límites adyacentes a las superficies sólidas inmersas en el fluido y se mueven siguiendo la dinámicas de éstas, por consiguiente se desarrolla a través de ellas un salto finito de presión. En este trabajo, los perfiles aerodinámicos utilizados son delgados; por lo tanto, las SVAs de ambos lados del cuerpo colapsan en una única SVA. Por su parte, las SVLs, que modelan las estelas, ocupan posiciones libres de fuerza en todo momento ya que se trasladan y se deforman sin restricciones siguiendo la velocidad local del fluido, esto es, no se produce ningún salto de presión a través de las SVLs. Las SVLs son creadas por medio de la convección de vorticidad desde los bordes afilados de los cuerpos, definidos a priori como los puntos donde la separación de flujo tiene lugar. Los dos tipos de sábanas están unidas en los bordes filosos de las alas, donde se impone la condición de Kutta para flujos inestacionarios [59].

El flujo asociado a la vorticidad de las estelas que se ubica en cercanías de las alas afecta al flujo alrededor de ellas y por ende a las cargas aerodinámicas actuantes. Debido a que la vorticidad presente en las estelas en un instante dado fue generada y convectada desde las alas en un instante de tiempo anterior, las cargas aerodinámicas dependen de la historia reciente del movimiento, la cual se encuentra almacenada en las estelas. El campo de velocidad asociado a la vorticidad existente en un punto del espacio decae al alejarse de dicho punto. En consecuencia, a medida que la vorticidad en la estela va siendo transportada corriente abajo, su influencia decrece.

## 5.2 Hipótesis aerodinámicas del modelo

El modelo aerodinámico se sustenta en las siguientes hipótesis simplificadoras:

1. Se considera flujo incompresible a elevado número de Reynolds.
2. Se desprecian los fenómenos de transporte molecular que incluyen fricción, conductividad térmica y difusión. Esto implica que el problema a resolver no incluye a la viscosidad del fluido como variable de estado, es decir, el flujo se asume de viscosidad despreciable.
3. Se considera al dominio fluido dividido en dos regiones bien determinadas: *i*) una de ellas altamente compacta, capas límites y estelas, que está dominada por la vorticidad del fluido; *ii*) la otra región se asume irrotacional.

## 5.3 Ecuaciones básicas

Las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido con densidad constante  $\rho$ , viscosidad cinemática  $\nu$  y sujeto a fuerzas inerciales por unidad de masa  $\mathbf{F}$  se expresan en su forma más general como:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) + [\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla] \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{X}, t) + \nu \nabla^2 \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{F}, \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{X}$  es el vector posición de un punto en el espacio,  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  es el campo de velocidad,  $p(\mathbf{X}, t)$  es el campo de presión y  $\nabla$  es el operador Nabla cuya representación en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional  $(X_1, X_2, X_3)$  con una base ortonormal dextrógira asociada  $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$  es,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial X_i} \hat{\mathbf{n}}_i \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

Por otro lado, la forma más general de la ecuación de conservación de la masa se expresa como,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla \rho(\mathbf{X}, t) + \rho(\mathbf{X}, t) \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = 0 \quad (5.3)$$

Aplicando la hipótesis 1 sobre la ecuación (5.3) la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = 0 \quad (5.4)$$

Las ecuaciones (5.1) y (5.4) constituyen un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales escalares en derivadas parciales que son suficientes para determinar el campo de velocidad  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  y el campo de presión  $p(\mathbf{X}, t)$  asumiendo conocidas las condiciones iniciales y condiciones de borde adecuadas. El hecho de considerar a la densidad del fluido como constante afecta la precisión del modelo, no obstante, es una hipótesis válida cuando el número de Match del flujo es relativamente bajo, como regla general menor a 0.3 [85]. Por otro lado, teniendo en cuenta la hipótesis 2, un flujo puede tratarse estrictamente como no viscoso cuando el número de Reynolds (Re) tiende a infinito, es decir,

$$\text{Re} = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{V l}{\nu} \longrightarrow \infty, \quad (5.5)$$

donde  $V$  es el módulo de la velocidad característica,  $l$  es una longitud característica y  $\mu$  la viscosidad dinámica. Luego, sustituyendo la ecuación (5.4) en (5.1) y, teniendo en cuenta (5.5) (es decir,  $\nu \rightarrow 0$ ) las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{X}, t), \quad (5.6)$$

las cuales se conocen como ecuaciones de Euler y tienen validez en el campo exterior de fluido, esto es, todas aquellas regiones del espacio externas a las superficies del sólido, capas límites y estelas. A su vez, todas las fuerzas de campo (por ejemplo, las fuerzas debida a la acción del campo gravitatorio terrestre) se suponen conservativas y sus potenciales se introdujeron directamente en el término de presión.

Para completar la descripción del problema es necesario adicionar a las ecuaciones rectoras, (5.4) y (5.6), un conjunto de condiciones de contorno [64, 65]. La posición de la superficie del sólido es conocida, como una función del tiempo, y la componente normal de la velocidad del fluido es prescrita en esta frontera. De este modo, la primera condición de contorno requiere que la componente normal de velocidad del fluido relativa a la superficie del sólido sea nula. Esta condición, denominada comúnmente como condición de no penetración, se puede expresar como:

$$[\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{V}_S(\mathbf{X}, t)] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{X}, t) = 0, \text{ para } \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B} \quad (5.7)$$

donde  $\mathbf{V}_S(\mathbf{X}, t)$  es la velocidad del sólido,  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{X}, t)$  es el versor unitario normal a dicha frontera y  $\partial \mathcal{B}$  denota la frontera del sólido. La segunda condición es la de regularidad en el infinito, la cual requiere que las perturbaciones producidas en el fluido por la presencia y el movimiento

del sólido inmerso decaigan a medida que uno se aleje del cuerpo. Esta condición está dada por:

$$\lim_{\|\mathbf{X}\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)\| = \|\mathbf{V}_\infty(\mathbf{X}, t)\|, \quad (5.8)$$

donde  $\mathbf{V}_\infty(\mathbf{X}, t)$  es el campo de velocidad de la corriente libre y  $\|\cdot\|$  denota la norma vectorial euclidiana. Adicionalmente a las condiciones de contorno anteriormente expuestas, los teoremas de Kelvin-Helmholtz y la condición inestacionaria de Kutta son utilizados para determinar la intensidad y la posición de las estelas vorticosas [59, 65, 84].

## 5.4 Cinemática del flujo

### 5.4.1 Campo de vorticidad

La cinemática del problema hace referencia a la relación entre la distribución de velocidad  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  y de vorticidad  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}, t)$  en cada instante de tiempo. Se debe enfatizar que esta relación es puramente cinemática, ambos campos coexisten. Las ecuaciones diferenciales que la describen están dadas por la ecuación de continuidad y la definición de vorticidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}, t) \quad (5.9)$$

En general, para un fluido incompresible, o más estrictamente barotrópico, donde los fenómenos de difusión viscosa sean despreciables y las fuerzas externas conservativas, se satisfacen las leyes de conservación de Helmholtz. Estas leyes indican que la vorticidad, la cual es una propiedad cinemática de las partículas, no puede crearse o destruirse en el seno de un fluido y que las distribuciones compactas permanecerán compactas. Esto último significa que la vorticidad se mantendrá confinada en regiones delgadas. Bajo estas condiciones, la estructura y evolución del flujo puede describirse convenientemente en términos del campo de vorticidad [59, 85].

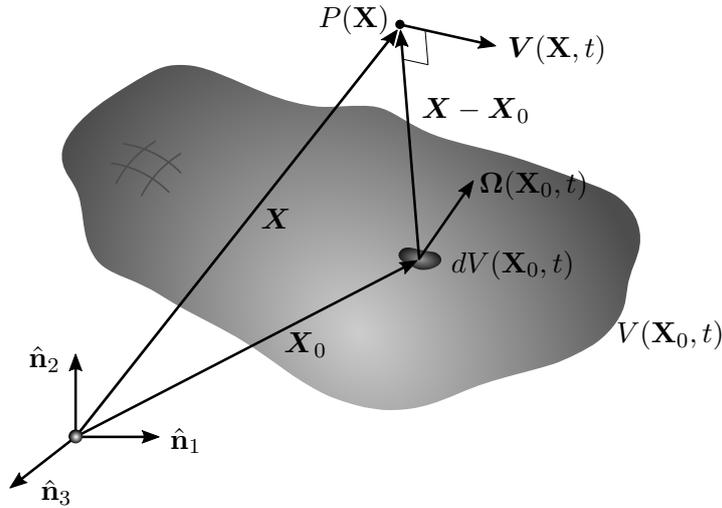
Basándose en la ecuación (5.9) se infiere que el campo de velocidad es solenoidal y, por lo tanto, se lo puede introducir a través de un campo vectorial potencial  $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, t)$  como [59]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \nabla \times \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, t) \quad (5.10)$$

Sustituyendo a (5.10) en la definición de vorticidad resulta:

$$\nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, t)] = \nabla [\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, t)] - \nabla^2 \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}, t) \quad (5.11)$$

Hasta el momento, la única exigencia que debe satisfacer  $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, t)$  se indica en la ecuación (5.10). No obstante, esta condición no determina de manera única a este campo ya que siempre es posible añadir el gradiente de alguna función escalar  $f$  sin modificar a (5.10) ya que  $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ . Por consiguiente se puede seleccionar a  $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, t)$  tal que  $\nabla \cdot \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{X}, t) = 0$  y, de esta manera, la



**Figura 5.1:** Nomenclatura usada en la ecuación que permite calcular la velocidad inducida por una región vorticiosa.

expresión (5.11) se simplifica a la siguiente ecuación vectorial de Poisson [88]:

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{X}, t) = -\Omega(\mathbf{X}, t) \quad (5.12)$$

La solución de (5.12) está dada por [59]:

$$\Psi(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Omega(\mathbf{X}_0, t)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|} dV(\mathbf{X}_0, t), \quad (5.13)$$

donde  $\mathbf{X}_0$  es el vector posición de los puntos contenidos en una región tridimensional del dominio fluido,  $V(\mathbf{X}_0, t)$  es la región que contiene la vorticidad distribuida y  $\Omega(\mathbf{X}_0, t)$  es la vorticidad en el punto  $\mathbf{X}_0$ . Finalmente, para obtener una representación integral del campo de velocidad en función de la vorticidad se sustituye la ecuación (5.13) en la (5.10). Luego, para una partícula de fluido que ocupa un punto espacial  $P(\mathbf{X})$ , el campo de velocidad  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  inducido por la distribución vorticiosa se puede determinar mediante [59, 84]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Omega(\mathbf{X}_0, t) \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^3} dV(\mathbf{X}_0, t), \quad (5.14)$$

donde la nomenclatura presentada en la expresión anterior se esquematiza en la Figura 5.1. Por otro lado, es interesante recalcar que el argumento de (5.14) es cero cuando la vorticidad se anula, por lo tanto, la región donde el fluido es irrotacional no realiza ninguna contribución sobre el campo de velocidad. En cada punto, el campo de velocidad puede ser computado explícita e independientemente de la evaluación en puntos vecinos. Como consecuencia de esta característica, la evaluación del campo de velocidad puede ser confinada a las regiones viscosas. La distribución de vorticidad en las regiones viscosas determina el campo de fluido, tanto en la región viscosa como en la no viscosa.

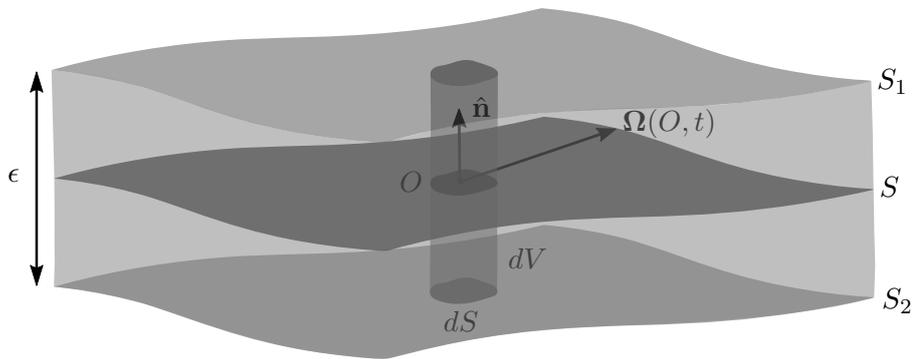


Figura 5.2: Ilustración del concepto de sábana vorticiosa.

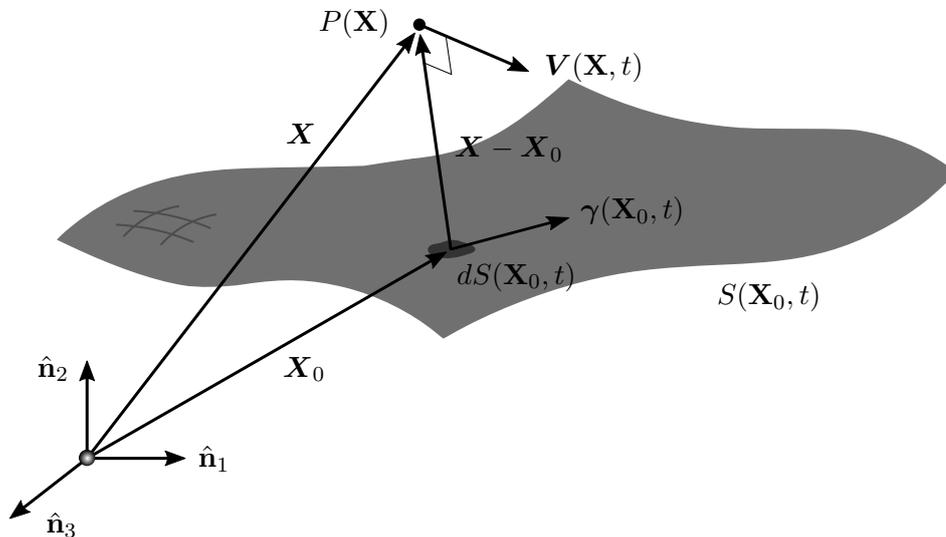


Figura 5.3: Nomenclatura utilizada en la definición del campo de velocidad inducido por una sábana vorticiosa.

### 5.4.1.1 Velocidad inducida por una sábana vorticiosa

Una sábana o lámina vorticiosa es una superficie sobre la cual la vorticidad es infinita. Ésta puede ser introducida formalmente a partir de un proceso de toma de límite. Para ello, se considera una región vorticiosa comprendida entre dos superficies,  $S_1$  y  $S_2$ , que están separadas una distancia  $\epsilon$ , tal como se muestra en la Figura 5.2. Además, en ella se presenta un punto  $O$  situado sobre un elemento  $\hat{n}dS$  que pertenece a una superficie intermedia  $S$ , donde  $\hat{n}dS$  es la sección transversal de un cilindro que pasa a través de  $O$  y tiene una altura  $\epsilon$ . Si  $\Omega(O, t)$  define la vorticidad a través de  $O$  se puede expresar que:

$$\Omega(O, t) dV = \Omega(O, t) \epsilon dS, \tag{5.15}$$

donde  $dV$  es el volumen del cilindro infinitesimal. Luego, tomando el límite se tiene que:

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \Omega(O, t) \epsilon = \gamma(O, t), \quad (5.16)$$

es decir, cuando el espesor  $\epsilon$  tiende a cero y la magnitud de la vorticidad  $\Omega(O, t)$  tiende a infinito, el producto  $\epsilon\Omega(O, t)$  tiende a  $\gamma(O, t)$ . En este caso,  $\gamma(\mathbf{X}, t)$  adopta un valor finito y define la vorticidad distribuida sobre la superficie  $S$ . Vale la pena notar que en el límite el volumen considerado colapsa en la superficie  $S$ . El campo de velocidad  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  inducido por una sábana vorticiosa en un punto espacial  $P(\mathbf{X})$  puede derivarse a partir de la ecuación (5.14) y está dado por [84]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\gamma(\mathbf{X}_0, t) \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^3} dS(\mathbf{X}_0, t), \quad (5.17)$$

donde  $S(\mathbf{X}_0, t)$  es la superficie del dominio ocupada por la lámina, tal como se esquematiza en la Figura 5.3. Un análisis detallado de lo que sucede con el campo de velocidad a medida que uno se aproxima a la sábana desde ambos lados permite mostrar que ésta produce una discontinuidad en el campo de velocidad, la cual se expresa por [84]:

$$\Delta \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \gamma(\mathbf{X}_0, t) \times \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{X}_0, t) \quad (5.18)$$

Esta discontinuidad sólo ocurre en la componente tangencial de la velocidad, mientras que la componente normal permanece continua.

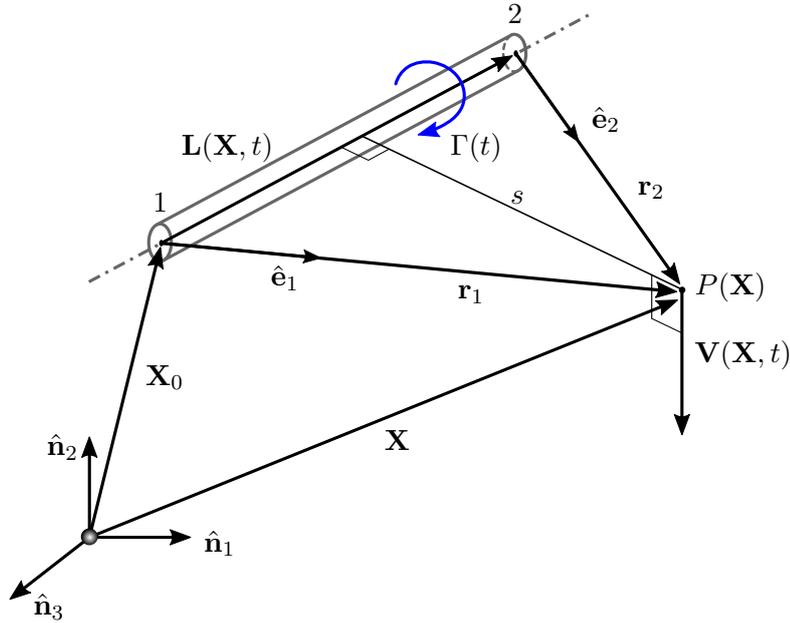
#### 5.4.1.2 Velocidad inducida por un segmento vorticioso

Un filamento vorticioso es una singularidad en la cual la vorticidad infinita se concentra sobre una línea espacial. La circulación  $\Gamma(t)$  alrededor de una curva cerrada que encierra al filamento se mantiene constante a lo largo de éste. Siguiendo un razonamiento similar al expuesto en la subsección anterior se puede derivar, aunque no se detalla aquí, la expresión general del campo de velocidad asociada a un filamento vorticioso. A tal efecto se hace colapsar, a través de un proceso de límite, un tubo vorticioso en una línea. Consecuentemente, el campo de velocidad  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  inducido por el filamento en un punto espacial  $P(\mathbf{X})$  se determina por [59]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^3}, \quad (5.19)$$

donde  $d\mathbf{l}$  es la longitud de un elemento infinitesimal sobre el filamento. La ecuación (5.19) recibe el nombre de ley de Biot-Savart.

Un filamento vorticioso puede ser discretizado por medio de líneas rectas de longitud finita que reciben el nombre de segmentos vorticiosos. El campo de velocidad  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  que induce un segmento en un punto  $P(\mathbf{X})$  se calcula a partir de la versión discreta de la ley de Biot-Savart



**Figura 5.4:** Nomenclatura usada en la ecuación que permite calcular la velocidad inducida por segmento.

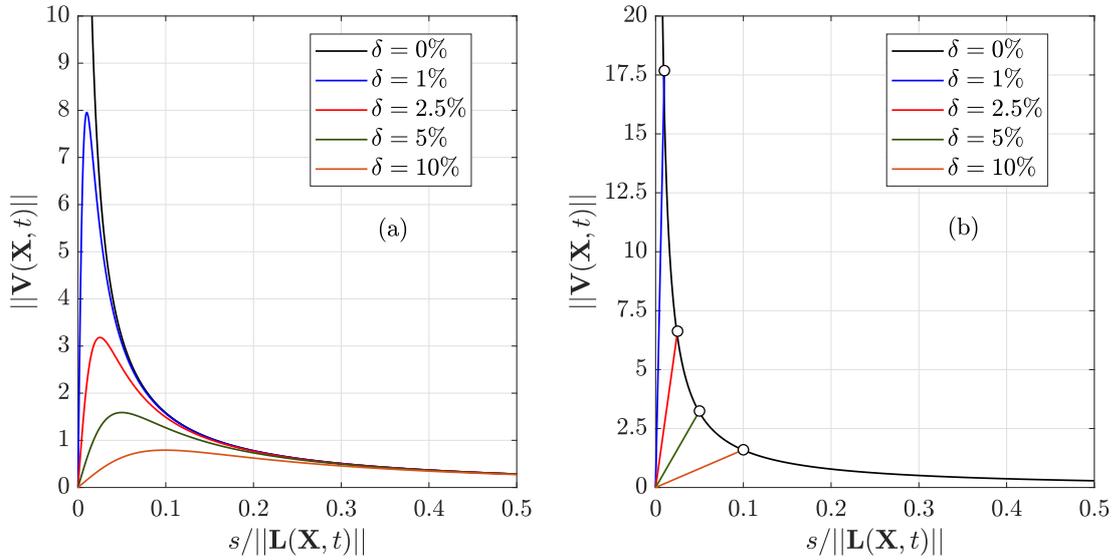
[84]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\Gamma(t)}{4\pi} \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1\|^2} \mathbf{L} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2), \quad \mathbf{L} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (5.20)$$

donde  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  son los vectores posición del punto del campo fluido donde se computa la velocidad relativo a los extremos del segmento,  $\hat{\mathbf{e}}_1$  y  $\hat{\mathbf{e}}_2$  son vectores unitarios asociados a los vectores  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , y  $\mathbf{L}$  es el vector representativo de la longitud del segmento, véase Figura 5.4.

En ocasiones, cuando la partícula de fluido se encuentra próxima al segmento vorticoso, la velocidad inducida adopta valores extremadamente elevados. Desde una perspectiva numérica esta característica es indeseada y su origen se atribuye a la singularidad que posee la ecuación (5.20) cuando el punto  $P(\mathbf{X})$  se localiza sobre el segmento. La manera mas sencilla de subsanar este inconveniente consiste en reemplazar el núcleo singular de la mencionada ecuación por un núcleo suavizado. Una primera alternativa, la cual se adopta en el presente trabajo, es la técnica de regularización *ad hoc* propuesta por van Garrel [118] e implementada con éxito en los trabajos de Rocca, Ceballos y Pérez Segura [25, 85, 96]. Su objetivo es imponer una variación suave de la velocidad cuando la distancia entre la partícula y el segmento es inferior a un cierto valor. En esta técnica, el núcleo singular  $\mathbf{K}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$  es reemplazado por un núcleo suavizado  $\mathbf{K}_\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0, \delta)$ , donde  $\delta$  es un parámetro que se denomina comúnmente radio de *cut-off*. Con esta regularización, la expresión (5.20) adopta la siguiente forma:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\Gamma(t)}{4\pi} \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1\|^2 + [\delta\|\mathbf{L}\|]^2} \mathbf{L} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2) \quad (5.21)$$



**Figura 5.5:** Magnitud de la velocidad inducida por un segmento vorticoso a medida que nos alejamos de él calculada con: (a) *cut-off* suavizado, (b) *cut-off* lineal.

En la Figura 5.5a se grafica la influencia del radio de *cut-off* sobre la magnitud de la velocidad inducida en función de la distancia  $s$ , la cual se mide en dirección perpendicular al segmento. Se observa que el efecto del radio  $\delta$  sobre la velocidad es significativo en la vecindad del segmento, pero su influencia disminuye a medida que la partícula se aleja de él. El valor de  $\delta$  se determina a partir de comparaciones entre simulaciones realizadas mediante el uso de la ecuación (5.21) y soluciones conocidas que fueron obtenidas con otras técnicas, no habiendo bases teóricas para su justificación.

Una segunda alternativa ampliamente utilizada para eliminar la singularidad de (5.20) consiste en usar una función lineal para el radio de *cut-off*. Es decir, dentro de una región de radio  $\delta$  la velocidad decrece linealmente a medida que disminuye la distancia al segmento. Debe notarse que esta región está formada por un cilindro cuyo eje es el segmento con dos semiesferas de radio  $\delta$  en sus extremos. Esta técnica también fue propuesta *ad hoc* por van Garrel [118] y su implementación se detalla en la Figura 5.5b.

Una tercera y última alternativa, quizás la más sencilla, consiste en imponer un valor nulo de velocidad a la partícula de fluido involucrada cuando la distancia que la separa del segmento es inferior al radio de *cut-off*.

### 5.4.2 Campo de velocidad

El campo de velocidad se puede expresar mediante la suma de dos velocidades:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{U}(\mathbf{X}, t), \quad (5.22)$$

donde  $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$  es el campo de velocidad de perturbación creado por el cuerpo. Este último está asociado con la vorticidad distribuida en las sábanas continuas que representan a las estelas y a la capa límite. Alternativamente, la expresión anterior puede desarrollarse y escribirse de la siguiente manera:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_B(\mathbf{X}, t) + \mathbf{V}_W(\mathbf{X}, t), \quad (5.23)$$

donde  $\mathbf{V}_B(\mathbf{X}, t)$  y  $\mathbf{V}_W(\mathbf{X}, t)$  denotan a las velocidades inducidas por las sábanas vorticosas adheridas y libres, respectivamente. Lo mencionado permite reescribir la condición de no penetración de la expresión (5.7) como:

$$[\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_B(\mathbf{X}, t) + \mathbf{V}_W(\mathbf{X}, t) - \mathbf{V}_S(\mathbf{X}, t)] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{X}, t) = 0, \text{ para } \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B} \quad (5.24)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la hipótesis 3, el campo  $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$  es irrotacional fuera de las sábanas libres y adheridas. Por lo tanto, también se lo puede expresar como el gradiente de una función potencial  $\Theta(\mathbf{X}, t)$ :

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}_B(\mathbf{X}, t) + \mathbf{V}_W(\mathbf{X}, t) = \nabla\Theta(\mathbf{X}, t) \quad (5.25)$$

Sabiendo que tanto  $\mathbf{V}_\infty$  como  $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$  satisfacen la ecuación (5.4) resulta:

$$\nabla^2\Theta(\mathbf{X}, t) = 0 \quad (5.26)$$

Las condiciones de borde para (5.26) se obtienen a partir de (5.7) y (5.8) y están dadas por:

$$\left. \frac{\partial\Theta}{\partial\hat{\mathbf{n}}} \right|_{\partial\mathcal{B}} = (-\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_S) \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{\partial\mathcal{B}}, \quad \lim_{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{\partial\mathcal{B}}\| \rightarrow \infty} \|\nabla\Theta\| = 0, \quad (5.27)$$

donde  $\partial\mathcal{B}$  representa el contorno del cuerpo y  $\mathbf{X}_{\partial\mathcal{B}}$  es el vector posición de un punto situado sobre el cuerpo. En el presente trabajo, el campo de velocidad  $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$  se determina a partir de la ecuación (5.17), por lo tanto, la condición de regularidad en el infinito (5.27) se satisface idénticamente.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, se puede inferir que el campo de velocidad para flujos potenciales incompresibles se determina usando la ecuación de continuidad, y por tal motivo, ésta debe ser establecida independientemente de la presión. Una vez conocido el campo de velocidad, la presión se calcula con la versión inestacionaria de la ecuación de Bernoulli, la cual puede derivarse de la ecuación de Euler dada por (5.6). Además, al considerar que la velocidad del sonido es infinita, la influencia de las condiciones de contorno es comunicada instantáneamente a todo el dominio de fluido, y por lo tanto, el campo de velocidad instantáneo se obtiene a partir de las condiciones de contorno instantáneas.

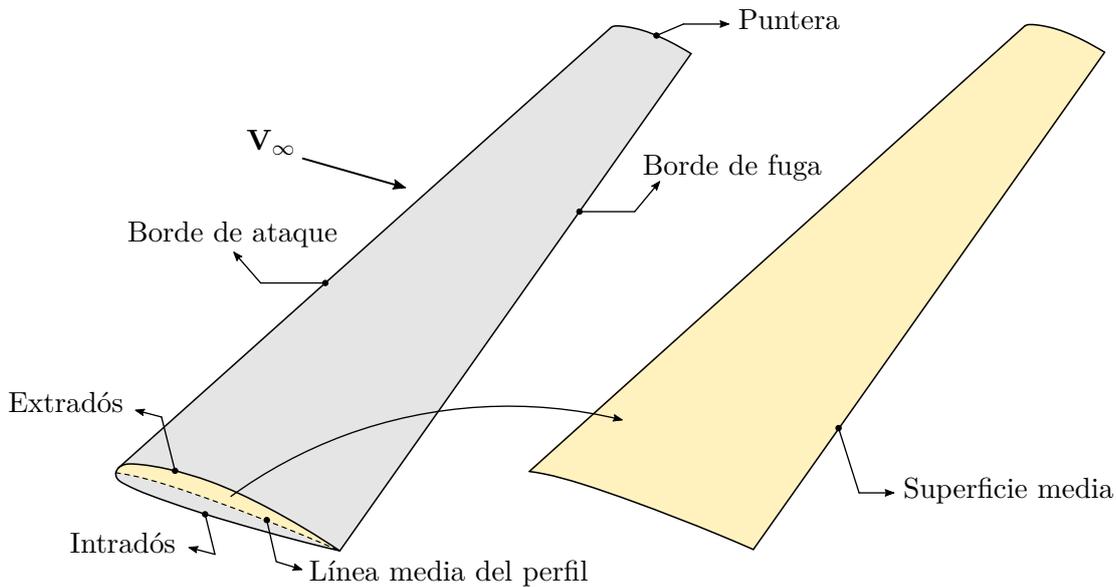


Figura 5.6: Representación esquemática de un ala.

## 5.5 Método de la red de vórtices inestacionario: implementación numérica

### 5.5.1 Discretización de las sábanas vorticosas

Como se comentó oportunamente, los perfiles aerodinámicos con los cuales se trabaja en esta tesis se asumen delgados. En virtud de ello, las alas o las superficies sustentadoras pueden ser representadas convenientemente a través de la superficie media, tal como se muestra en la Figura 5.6. En consecuencia, las SVAs en el intradós y en el extradós colapsan en una única sábana continua. Desde el punto de vista del modelo numérico, las sábanas continuas, tanto las adheridas como las libres, son reemplazadas por arreglos o redes de segmentos vorticosos de longitud finita y circulación  $\Gamma(t)$  constante en su longitud, dando origen a las denominadas grillas o mallas aerodinámicas. Las SVAs y SVLs se unen entre sí en las líneas de separación de flujo, como pueden ser el borde de fuga o la puntera del ala. La justificación de esta simplificación en el modelado de flujos tridimensionales está lejos de ser rigurosa. No obstante, alcanza con decir que numerosas comparaciones con las pocas soluciones exactas que existen, observaciones experimentales, y soluciones numéricas de las ecuaciones de Navier-Stokes, han demostrado que conduce a buenos resultados cuando las líneas de separación son conocidas y el fenómeno de *vortex bursting* no ocurre en las proximidades del sólido inmerso en el fluido.

La experiencia adquirida en la utilización del UVLM sugiere que la forma geométrica de los elementos de área, también denominados paneles aerodinámicos, que componen las grillas afectan directamente la precisión y la velocidad de convergencia del método [65]. En particular,

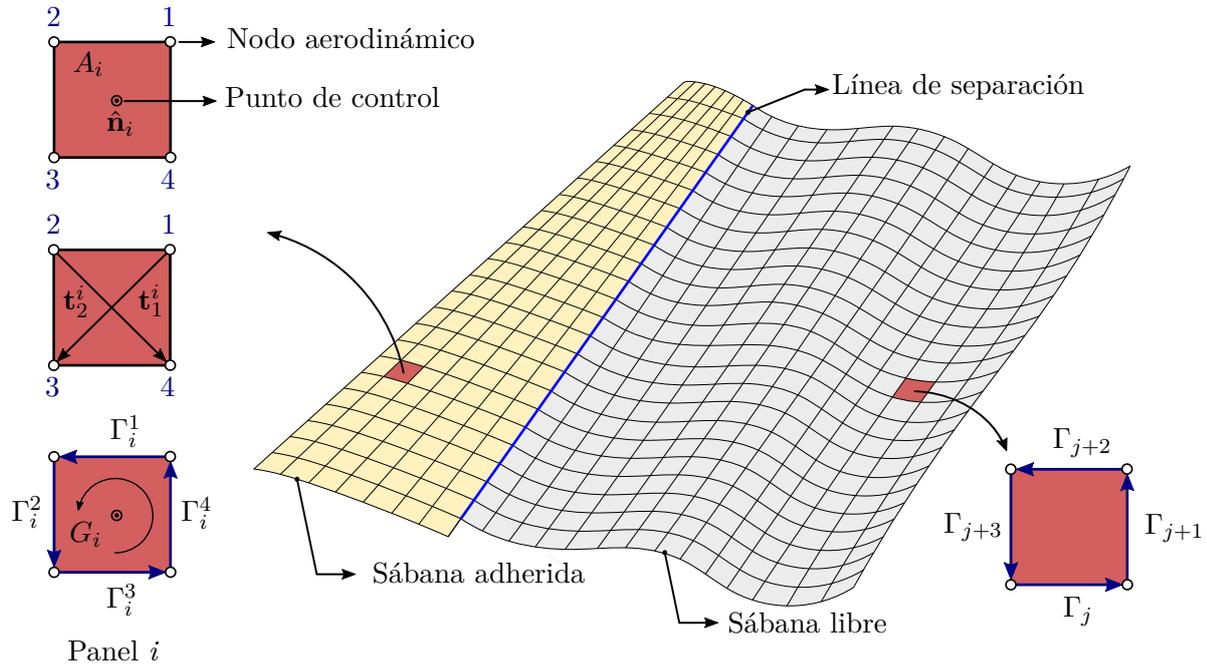
se encontró que la forma rectangular es la que produce mejores resultados, motivo por el cual en este trabajo se utilizan elementos de tales características para discretizar tanto las SVAs a los cuerpos como así también para las SVLs que se desprenden desde las zonas de separación. Asimismo, la experiencia mostró que el método resulta más estable si los paneles de las SVLs no poseen una distorsión geométrica excesiva respecto a los de las SVAs.

En la Figura 5.7 se presenta de forma esquemática la discretización utilizada en un ala para ambos tipos de sábanas junto a la línea donde tiene lugar la separación del flujo, la cual se indica en color azul. Se puede notar que el desprendimiento no llega hasta la raíz del ala, este ajuste mejora notablemente la forma de la estela en las proximidades de la unión del ala con el fuselaje. Al mismo tiempo, en la citada figura se presenta un detalle del  $i$ -ésimo panel aerodinámico, donde se observa que posee un área  $A_i$  y cuatro nodos que facilitan su vinculación con los paneles adyacentes. Además, cada panel de las SVAs posee un punto de control ubicado en el centroide del elemento rectangular y un versor normal  $\hat{\mathbf{n}}_i$  saliente, ambos permiten imponer la condición de no penetración y determinar las cargas aerodinámicas sobre el panel. El versor se determina a través del producto vectorial entre los vectores diagonales  $\mathbf{t}_1^i$  y  $\mathbf{t}_2^i$ :

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \frac{\mathbf{t}_1^i \times \mathbf{t}_2^i}{\|\mathbf{t}_1^i \times \mathbf{t}_2^i\|} \quad (5.28)$$

Nótese que la numeración local de los nodos de cada panel debe tener el mismo sentido de tal manera que todos los versores normales apunten en la misma dirección.

Por otra parte, cada panel está encerrado por cuatro segmentos vorticosos rectilíneos que constituyen un lazo alrededor del mismo, siendo la circulación  $\Gamma_i^k(t)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) de cada segmento la incógnita a determinar. Para resolver el problema se emplea la condición de no penetración, establecida para cada panel aerodinámico, y el teorema de conservación espacial de la vorticidad. Sin embargo, existe una manera de reducir sustancialmente el tamaño del problema y obtener la solución en forma más eficiente [84]. Tal estrategia se basa en considerar a cada panel aerodinámico encerrado por un único anillo vorticoso cerrado con el mismo valor de circulación  $G_i(t)$ . Bajo esta suposición, el requerimiento de conservación espacial de la circulación se satisface automáticamente. Además, se debe notar que la circulación de cada segmento recto, excepto posiblemente aquellos ubicados en los vértices de la grilla, se obtiene por medio de la suma vectorial de las circulaciones correspondientes a los anillos adyacentes a dicho segmento. En la Figura 5.7 se presenta la convención positiva local de la circulación de los segmentos vorticosos, lo cual es consistente con la numeración nodal indicada en color azul. Sin embargo, desde una perspectiva práctica, es común adoptar y operar a partir de una convención global para la circulación de los segmentos. Esto implica que todos los segmentos horizontales de la grilla se consideren positivos en una dirección y lo mismo para los segmentos verticales. No obstante, la numeración nodal global debe ser coherente con la definición de la ley de Biot-Savart, de modo que pueda ser aplicada tal como se definió en la Figura 5.4. A



**Figura 5.7:** Discretización de las sábanas vorticosas adheridas y libres. Convención positiva local para la circulación y los nodos aerodinámicos.

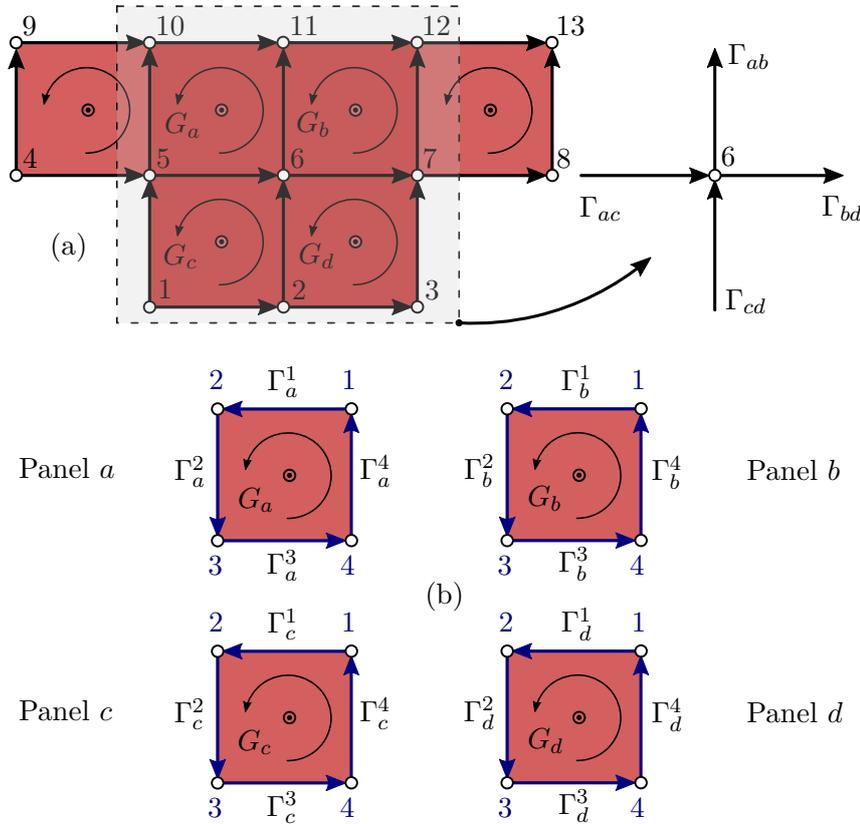
modo de ejemplo, en la Figura 5.8a se presenta una SVA compuesta por 6 paneles y 13 nodos. En ella se observa la convención positiva global adoptada para la circulación de los segmentos y la numeración global de los nodos. Considerando la circulación de anillo de cada panel se puede calcular la circulación de los segmentos compartidos como:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}(t) &= G_a(t) - G_b(t) , \quad \Gamma_{bd}(t) = G_b(t) - G_d(t) \\ \Gamma_{cd}(t) &= G_c(t) - G_d(t) , \quad \Gamma_{ac}(t) = G_a(t) - G_c(t) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Luego, a partir de la Figura 5.8b y teniendo en cuenta la convención positiva local para la circulación de los segmentos se puede relacionar a estos últimos con los de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} -\Gamma_b^2(t) &= \Gamma_a^4(t) = \Gamma_{ab}(t) , \quad -\Gamma_c^1(t) = \Gamma_a^3(t) = \Gamma_{ac}(t) \\ -\Gamma_d^1(t) &= \Gamma_b^3(t) = \Gamma_{bd}(t) , \quad -\Gamma_d^2(t) = \Gamma_c^4(t) = \Gamma_{cd}(t) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Antes de continuar, vale la pena introducir la siguiente aclaración: el presente desarrollo se basa en la implementación computacional desarrollada por Pérez Segura [85] y en la cual el concepto de panel aerodinámico como una entidad en sí misma se restringe únicamente a las SVAs. En el caso de las SVLs se las trata como una colección de segmentos vorticosos que comparten nodos como conectividades. No obstante, estos segmentos forman elementos rectangulares en las estelas. La diferencia respecto de las implementaciones tradicionales es que no se incluye el concepto de anillo vorticoso en las estelas [85].

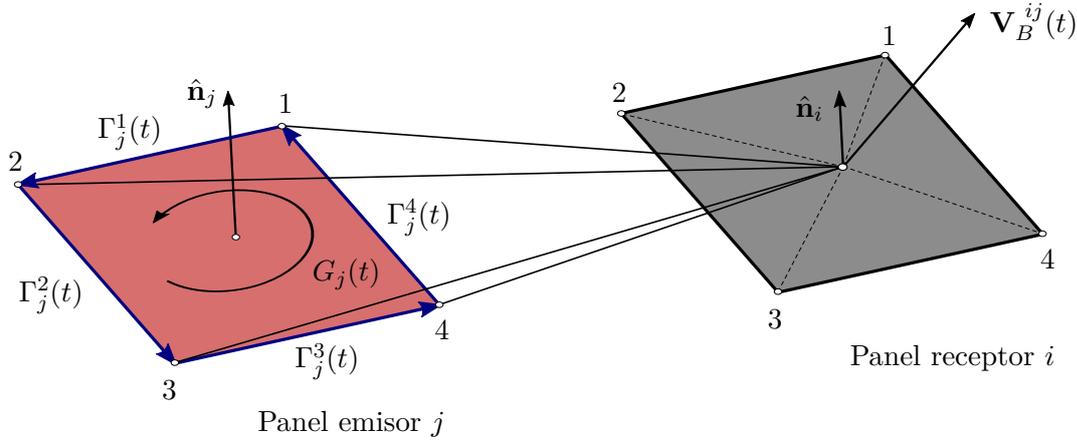


**Figura 5.8:** Transformación de circulación de anillo a circulación de segmento. Convención global para la circulación de los segmentos y los nodos aerodinámicos.

### 5.5.2 Arranque impulsivo y coeficientes de influencia aerodinámicos

Cuando el cuerpo sustentador se encuentra en reposo, esto es  $t < 0$ , las circulaciones sobre las SVAs son todas iguales a cero. Luego, se considera que éste comienza a moverse impulsivamente en el instante  $t = 0$  con una velocidad  $\mathbf{V}_S(\mathbf{X}, t)$  a través del dominio fluido. En ese momento, las circulaciones sobre las SVAs cambian instantáneamente y se forma una línea de vórtices sobre los bordes filosos de las alas, lo cual representa el vórtice de arranque que fue observado en experimentos y descrito por Prandtl y Tietjens [112]. La existencia de este vórtice se debe al requerimiento de la conservación espacial de la circulación, tal como establece el primer teorema de la vorticidad de Helmholtz (o también el teorema de Kelvin de la circulación) para un fluido invíscido y barotrópico [84]. Es importante destacar que, en el instante que comienza el movimiento, no existe la estela ya que todavía no se ha convectado vorticidad.

Para determinar en cada instante de tiempo la circulación de los anillos vorticosos, o en su defecto la de los segmentos, de las SVAs se impone la condición de no penetración sobre la superficie media del ala. Idealmente, sería preferible satisfacer esta condición en cada uno de los puntos de la superficie pero, debido a que fue discretizada a través de una cantidad finita  $N_P$  de paneles, sólo es posible aplicar esta condición en una cantidad finita de puntos que



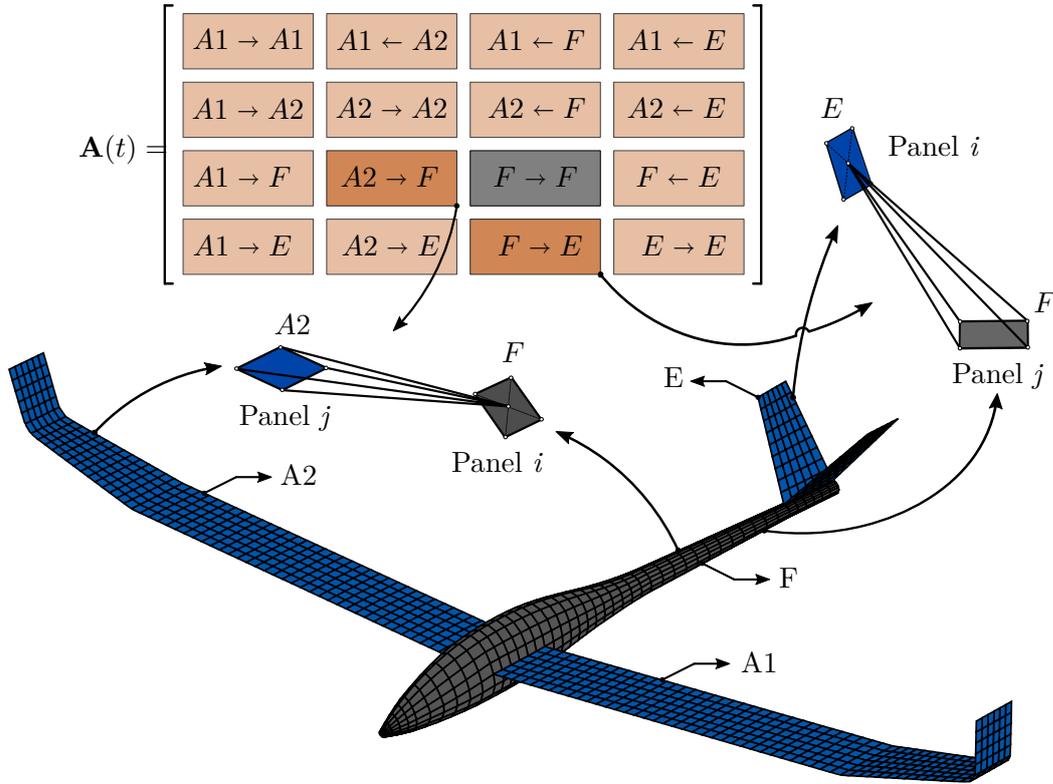
**Figura 5.9:** Interpretación gráfica de la velocidad que inducen los segmentos vorticosos del panel  $j$  en el punto de control del panel  $i$ .

corresponden a los puntos de control. En general, la componente normal de la velocidad de una partícula relativa al sólido es función de la velocidad que inducen los vórtices ubicados en ambos tipos de sábanas vorticosas, como así también de la velocidad debida al movimiento del cuerpo. Cuando se impone la condición dada por (5.24) en cada punto de control, la componente de velocidad asociada a los vórtices de las SVAs puede expresarse en términos de la circulación  $G_j(t)$  de cada anillo y de los coeficientes de influencia aerodinámico  $a_{ij}(t)$ . De este modo, para el punto de control  $i$  la condición de no penetración se materializa por:

$$\sum_{j=1}^{N_P} a_{ij}(t) G_j(t) + [\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_W^i(\mathbf{X}, t) - \mathbf{V}_S^i(\mathbf{X}, t)] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i(\mathbf{X}, t) = 0 \text{ para } \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B} \quad (5.31)$$

El coeficiente de influencia  $a_{ij}(t)$  se define como la componente de velocidad que es normal a la superficie del sólido en el punto de control  $i$  inducida por los segmentos vorticosos adheridos de intensidad unitaria que integran el panel  $j$ . Tanto los coeficientes  $a_{ij}(t)$  como la velocidad  $\mathbf{V}_W^i(\mathbf{X}, t)$  inducida en el punto de control del panel  $i$  por la vorticidad presente en las SVLs se computan utilizando la ley de Biot-Savart discreta. En el primer caso, se debe recorrer los paneles de las SVAs asignando un valor de circulación unitaria, mientras que en el segundo caso, se tiene que recorrer los segmentos de las SVLs y emplear su correspondiente valor de circulación. En la Figura 5.9 se muestra una interpretación gráfica de la velocidad que inducen los segmentos vorticosos que forman parte de un panel genérico  $j$  en el punto de control del panel genérico  $i$ . A su vez, la velocidad  $\mathbf{V}_S^i(\mathbf{X}, t)$  en el punto de control asociada al movimiento del sólido se obtiene luego de resolver la dinámica del sistema. En virtud de lo mencionado, el segundo término de la ecuación (5.31) es conocido y puede transferirse al lado derecho:

$$RHS_i = - [\mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_W^i(\mathbf{X}, t) - \mathbf{V}_S^i(\mathbf{X}, t)] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i(\mathbf{X}, t) \text{ para } \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B} \quad (5.32)$$



**Figura 5.10:** Influencia de cada parte de la aeronave en la determinación de la matriz de influencia aerodinámica.

Consecuentemente, la especificación de la condición de no penetración en cada uno de los puntos de control produce el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N_P} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N_P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_P1} & a_{N_P2} & \cdots & a_{N_P N_P} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \\ \vdots \\ G_{N_P}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ \vdots \\ RHS_{N_P} \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

donde  $N_P$  es el número de paneles. En forma compacta se puede expresar como:

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{G}(t) = \mathbf{RHS}(t), \quad (5.34)$$

donde  $\mathbf{A}(t)$  es la matriz de influencia aerodinámica,  $\mathbf{G}(t)$  es el vector de circulaciones de anillo y  $\mathbf{RHS}(t)$  es el vector lado derecho. Es importante destacar que la matriz  $\mathbf{A}(t)$  contiene bloques que posiblemente deban computarse en cada paso de tiempo. Esta dependencia temporal se debe a cambios en la geometría y movimiento relativo entre los diversos componentes del sistema en estudio. A modo ilustrativo, en la Figura 5.10 se presenta una aeronave donde las

grillas representativas de las alas delanteras se designan mediante  $A1$  y  $A2$ , en tanto que la grilla aerodinámica del fuselaje y del empenaje se denotan por  $F$  y  $E$ , respectivamente. En este caso, el fuselaje se modela como un cuerpo rígido, por ende, el bloque de  $\mathbf{A}(t)$  (identificado en gris) que contabiliza la influencia del fuselaje consigo mismo se computa una sola vez y, en consecuencia, no necesita ser actualizado en cada instante de tiempo. En cambio, el resto de los bloques que integran a la matriz de influencia deben ser actualizados en cada instante de tiempo como consecuencia de la deformación que sufren los diversos miembros elásticos. Por otra parte, en este modelo el fuselaje es idealizado mediante una SVA pero solamente se impone la condición de no penetración, es decir, no se calculan cargas aerodinámicas sobre él ni se emite vorticidad. Comúnmente a este tipo de grillas se las denomina grillas de contorno.

En última instancia, vale la pena mencionar que el sistema de ecuaciones algebraicas lineales presentado en (5.34) puede ser resuelto para conocer el valor de las incógnitas  $G_i(t)$  mediante procedimientos directos tales como descomposición LU o eliminación de Gauss y sustitución hacia atrás, o por medio de procedimientos iterativos, tales como el método de Jacobi o el método de Gauss-Seidel.

### 5.5.3 Convección de vorticidad

Una vez obtenidas las circulaciones de cada uno de los paneles de las SVAs se ejecuta el proceso de convección de vorticidad. Para ello, se debe satisfacer la condición de Kutta inestacionaria, la cual requiere que los flujos que provengan de la región superior e inferior de la superficie sustentadora tengan la misma presión a lo largo de los bordes filosos, de tal manera que el campo de presiones adyacente a estos bordes sea continuo. La condición de Kutta se impone automáticamente si los segmentos vorticosos se convectan hacia el seno del fluido desde estos bordes agudos a la velocidad local de las partículas de fluido relativa al cuerpo [84]. A su vez, para garantizar que la presión sea continua en la estela y, por lo tanto, que la estela este libre de fuerzas, los teoremas de Kelvin-Helmholtz postulan que toda la vorticidad debe ser transportada por el fluido. En consecuencia, los segmentos vorticosos que integran las SVLs también se mueven con la velocidad local de las partículas de fluido.

Para mover un segmento vorticoso hacia la estela se determina el desplazamiento de sus nodos extremos. Para un nodo genérico  $i$ , el desplazamiento  $\Delta \mathbf{x}_i(\mathbf{X}, t)$  se puede expresar como:

$$\Delta \mathbf{x}_i(\mathbf{X}, t) = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{v}_i(\mathbf{X}, \tau) d\tau, \quad (5.35)$$

donde  $\mathbf{v}_i(\mathbf{X}, t)$  denota la velocidad local de la partícula que se ubica sobre el nodo a desplazar y  $\Delta t$  es el incremento de tiempo. Existen diferentes alternativas para computar la integral anterior, por ejemplo, utilizar la velocidad local del paso previo, la del paso actual o su promedio. En todas estas opciones, con excepción de la primera de ellas, se requiere implementar un esquema iterativo, lo cual incrementa el tiempo de computo. Afortunadamente, se encontró que un

esquema de integración simple de primer orden es estable, aunque no haya ningún esfuerzo que muestre que es estable para todos los casos [64]. Además, se puede probar que las diferencias entre soluciones convergentes es muy pequeña para justificar la utilización de esquemas de mayor orden [63]. Por lo tanto, se emplea el método de primer orden de Euler hacia adelante y la posición del nodo  $i$  en el tiempo  $t + \Delta t$  está dada por [84]:

$$\mathbf{x}_i(t + \Delta t) \approx \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(\mathbf{X}, t)\Delta t \quad (5.36)$$

#### 5.5.4 Determinación de las cargas aerodinámicas

El cálculo de las cargas aerodinámicas se efectúa computando el salto de presión a través de la superficie sustentadora en cada uno de los puntos de control de los diferentes paneles que integran las SVAs. Posteriormente, para obtener el vector fuerza se multiplica a este salto de presión por el área del panel y se lo proyecta en la dirección del versor normal al elemento. Para calcular la distribución de presión sobre las superficies alares se utiliza la versión inestacionaria de la ecuación de Bernoulli que está dada por [84]:

$$H(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) + \frac{1}{2} \nabla \Phi(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{X}, t) + \frac{p(\mathbf{X}, t)}{\rho}, \quad (5.37)$$

donde  $\mathbf{X}$  es un punto espacial,  $p(\mathbf{X}, t)$  es el campo de presión,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $H(t)$  es la energía total que sólo depende del tiempo y tiene un valor uniforme para todo punto del fluido y,  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  es el potencial total de velocidad tal que:

$$\nabla \Phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t), \quad (5.38)$$

donde  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  denota al campo de velocidad total y  $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$  la perturbación asociada a los cuerpos. A grandes distancias desde los cuerpos y las estelas, esto es  $\|\mathbf{X}\| \rightarrow \infty$ , se cumple que:

$$\Phi(\mathbf{X}, t) \rightarrow \Phi_\infty, \quad p(\mathbf{X}, t) \rightarrow p_\infty, \quad \nabla \Phi(\mathbf{X}, t) \rightarrow \mathbf{V}_\infty, \quad (5.39)$$

donde  $\Phi_\infty$  y  $p_\infty$  son constantes. Teniendo en cuenta la expresión anterior se llega a:

$$H(t) \rightarrow \frac{1}{2} (\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}_\infty) + \frac{p_\infty}{\rho} \quad (5.40)$$

Luego, sustituyendo (5.40) en (5.37) resulta:

$$\frac{p(\mathbf{X}, t) - p_\infty}{\rho} = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}_\infty) \left[ 1 - \frac{\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}_\infty} - \frac{2}{\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right] \quad (5.41)$$

Introduciendo el coeficiente de presión  $C_p$ ,

$$C_p = [p(\mathbf{X}, t) - p_\infty] \left( \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \right)^{-1}, \quad (5.42)$$

y teniendo presente que,

$$V_\infty^2 = \|\mathbf{V}_\infty\|^2 = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}_\infty, \quad V^2(\mathbf{X}, t) = \|\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)\|^2 = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t), \quad (5.43)$$

la expresión (5.41) queda:

$$C_p = 1 - \left[ \frac{V(\mathbf{X}, t)}{V_\infty} \right]^2 - \frac{2}{V_\infty^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad (5.44)$$

A continuación, la variación del coeficiente de presión, el cual es representativo del salto de presión a través de la superficie sustentadora, en un punto de control genérico  $i$  de la grilla aerodinámica adherida está dado por:

$$\Delta C_p^i = C_p^{i,L} - C_p^{i,U} = \frac{1}{V_\infty^2} \left[ V^2(\mathbf{X}^U, t) - V^2(\mathbf{X}^L, t) \right] + 2 \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}^U, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}^L, t) \right]_i \quad (5.45)$$

Considerando la ecuación (5.43) la expresión anterior se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \Delta C_p^i &= \frac{1}{V_\infty^2} \left[ \mathbf{V}(\mathbf{X}^U, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}^U, t) - \mathbf{V}(\mathbf{X}^L, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}^L, t) \right] + \\ &+ 2 \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}^U, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}^L, t) \right]_i, \end{aligned} \quad (5.46)$$

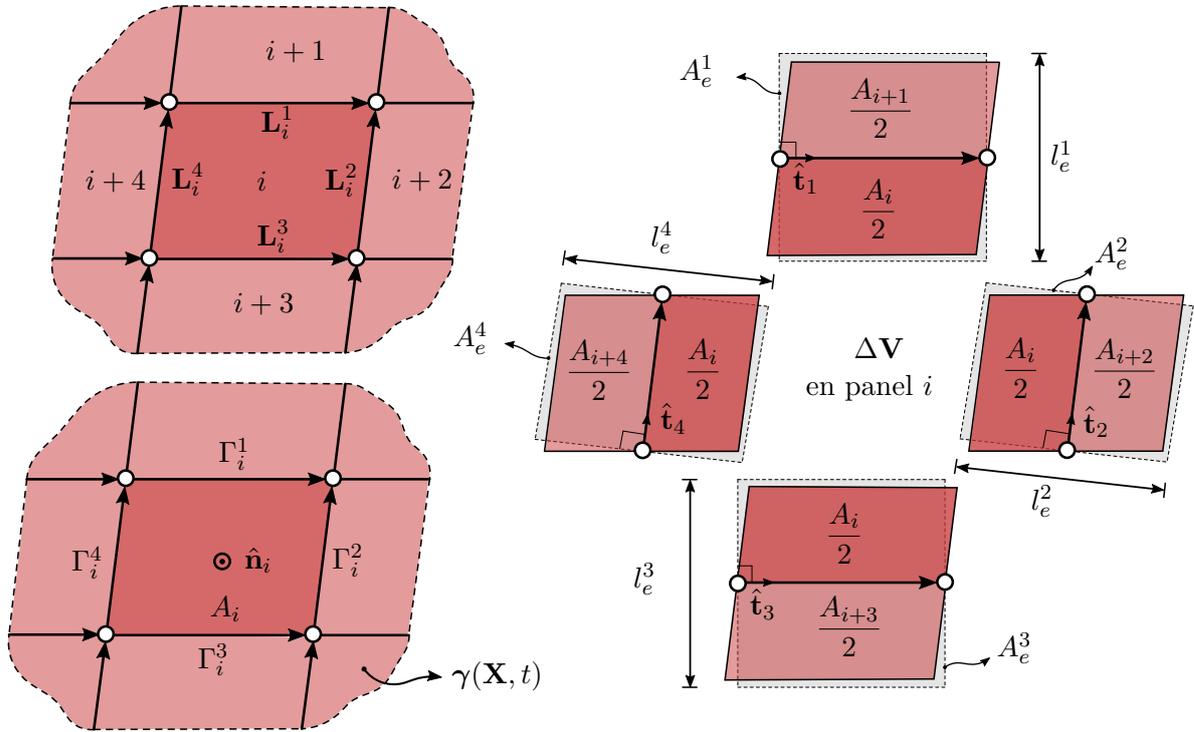
donde  $\mathbf{V}(\mathbf{X}^U, t)$  y  $\mathbf{V}(\mathbf{X}^L, t)$  representan a la velocidad de una partícula de fluido que se sitúa inmediatamente por encima y por debajo del punto de control  $i$  respectivamente, mientras que  $\mathbf{X}^U$  y  $\mathbf{X}^L$  son los vectores posición de estas partículas. De acuerdo a lo expuesto por Preidikman, la expresión situada entre el primer conjunto de corchetes de (5.46) se puede escribir como [84]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}^U, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}^U, t) - \mathbf{V}(\mathbf{X}^L, t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}^L, t) = 2\mathbf{V}_m(\mathbf{X}^i, t) \cdot \Delta \mathbf{V}(\mathbf{X}^i, t), \quad (5.47)$$

donde  $\mathbf{V}_m(\mathbf{X}^i, t)$  es la velocidad inducida en el punto de control  $i$  por todos los segmentos vorticosos de las SVAs y las SVLs excepto por aquellos del propio panel, mientras que  $\Delta \mathbf{V}(\mathbf{X}^i, t)$  denota la discontinuidad en la componente tangencial de velocidad en el punto de control correspondiente. A su vez, el segundo término entre corchetes del miembro derecho de (5.46) se puede expresar como sigue [84]:

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}^U, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}^L, t) \right]_i = \frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}t} \left[ \Phi(\mathbf{X}^U, t) - \Phi(\mathbf{X}^L, t) \right]_i - \Delta \mathbf{V}(\mathbf{X}^i, t) \cdot \mathbf{V}_S(\mathbf{X}^i, t), \quad (5.48)$$

donde  $\frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}t}$  es una derivada *sustancial* que sigue a un punto material del ala y no a una partícula de fluido, en tanto que  $\mathbf{V}_S(\mathbf{X}^i, t)$  es la velocidad del punto de control producida por el movimiento del sólido.



**Figura 5.11:** Cálculo de la discontinuidad tangencial de velocidad en el panel aerodinámico  $i$ .

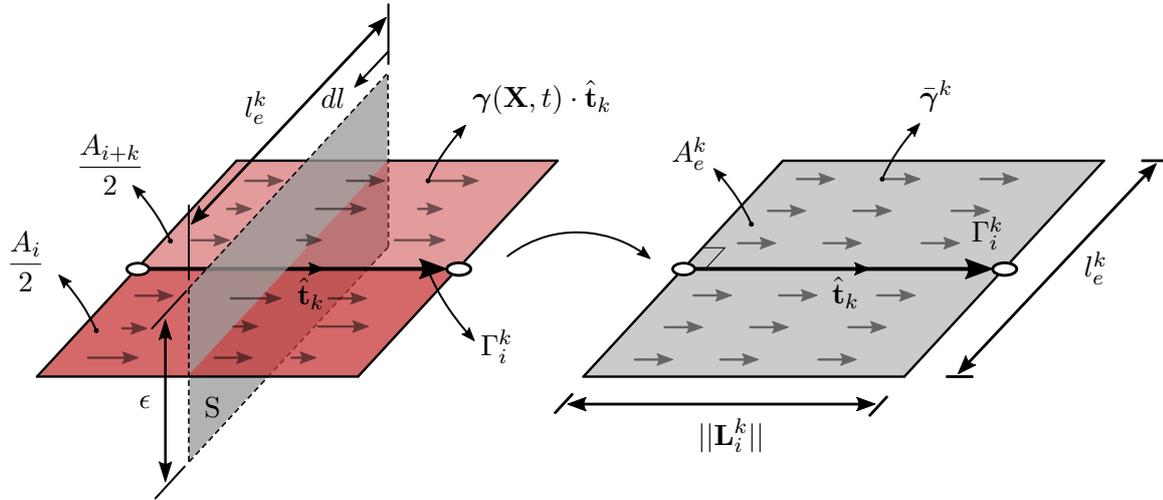
### 5.5.4.1 Cálculo de la discontinuidad tangencial de velocidad $\Delta \mathbf{V}(\mathbf{X}^i, t)$

Bajo la consideración de lo expuesto previamente, se sabe que la vorticidad distribuida  $\gamma(\mathbf{X}, t)$  se representa mediante una red de segmentos vorticosos. Teniendo en cuenta que la incógnita numérica es la circulación de cada segmento, se requiere analizar cómo se condensa la vorticidad distribuida sobre cada uno de ellos con el propósito de aplicar la ecuación (5.18) sobre cada panel. Solamente se aborda el caso de un panel interno de la grilla aerodinámica pero, mediante un procedimiento similar, se puede estudiar lo que ocurre con paneles ubicados en los contornos de las SVAs.

En la Figura 5.11 se expone al panel aerodinámico  $i$  rodeado por los cuatro paneles con los que comparte los segmentos  $\Gamma_i^k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ). Para las grillas de interés, es válido suponer que cada segmento concentra la mitad de la vorticidad distribuida sobre cada panel del que forma parte. La dirección del segmento se caracteriza por el versor  $\hat{\mathbf{t}}_k$  que está dado por:

$$\hat{\mathbf{t}}_k = \frac{\mathbf{L}_i^k}{\|\mathbf{L}_i^k\|} \quad (5.49)$$

A continuación, se calcula por definición la circulación del segmento  $\Gamma_i^k$ , esto es, computando el flujo de vorticidad a través de la superficie  $S$  presentada en la Figura 5.12. Esta superficie se



**Figura 5.12:** Obtención de la circulación del segmento  $k$  del panel aerodinámico  $i$  a partir de la vorticidad distribuida  $\gamma(\mathbf{X}, t)$ .

caracteriza por el versor normal  $\hat{\mathbf{t}}_k$ , posee una longitud  $l_e^k$  y una altura  $\epsilon$ . En consecuencia, es válido expresar que:

$$\Gamma_i^k = \int_S \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}}_k dS = \int_0^{l_e^k} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}}_k \epsilon dl = \int_0^{l_e^k} \gamma(\mathbf{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}}_k dl, \quad (5.50)$$

donde  $\gamma(\mathbf{X}, t) \cdot \hat{\mathbf{t}}_k$  es la vorticidad distribuida proyectada en la dirección del segmento, tal como se muestra en la Figura 5.12. La integral predecesora se puede aproximar considerando una vorticidad promedio distribuida sobre un área rectangular  $A_e^k$  equivalente a la que aportan los paneles que comparten el segmento. De acuerdo a ello, la expresión anterior se puede aproximar por:

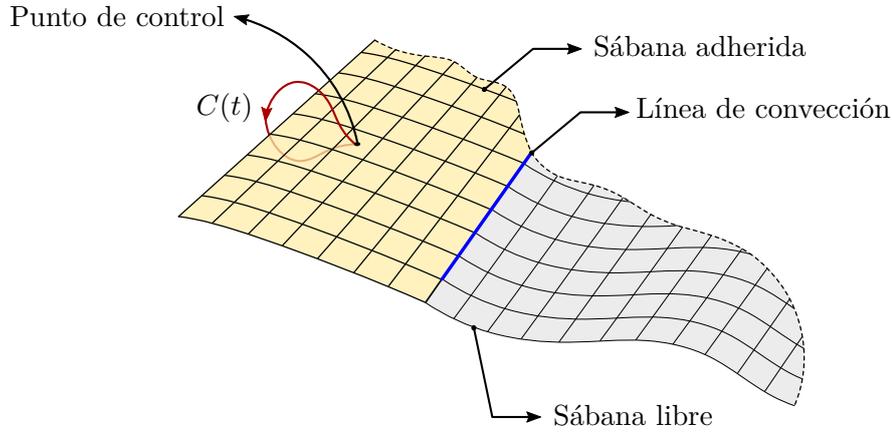
$$\Gamma_i^k = \|\bar{\gamma}^k\| \int_0^{l_e^k} dl = \|\bar{\gamma}^k\| l_e^k \quad (5.51)$$

Consecuentemente, la vorticidad promedio  $\bar{\gamma}^k$  en términos de la circulación del segmento  $\Gamma_i^k$  es:

$$\bar{\gamma}^k = \frac{\Gamma_i^k}{l_e^k} \hat{\mathbf{t}}_k, \quad (5.52)$$

donde la longitud  $l_e^k$  es igual a uno de los lados del área rectangular  $A_e^k$ , mientras que el restante lado está dado por la longitud del segmento. Estos parámetros geométricos se esquematizan en la Figura 5.12. Ahora bien, para determinar  $l_e^k$  se plantea la siguiente equivalencia entre áreas:

$$A_e^k = l_e^k \|\mathbf{L}_i^k\| = \frac{A_i + A_{i+k}}{2} \rightarrow l_e^k = \frac{A_i + A_{i+k}}{2\|\mathbf{L}_i^k\|} \quad (5.53)$$



**Figura 5.13:** Curva  $C(t)$  utilizada en la determinación del término inestacionario del coeficiente de presión.

Luego, reemplazando la ecuación (5.53) en (5.52) se obtiene:

$$\bar{\gamma}^k = \frac{2\|\mathbf{L}_i^k\|}{A_i + A_{i+k}} \Gamma_i^k \hat{\mathbf{t}}_k \quad (5.54)$$

Finalmente, la discontinuidad en la componente tangencial de velocidad en el punto de control del panel  $i$  se obtiene sustituyendo la ecuación anterior en la expresión (5.18) y considerando el aporte de los cuatro segmentos que integran el panel. De ello resulta:

$$\Delta \mathbf{V}(\mathbf{X}_i, t) = \sum_{k=1}^4 \left( \frac{2\alpha_i^k \|\mathbf{L}_i^k\|}{A_i + A_{i+k}} \Gamma_i^k \hat{\mathbf{t}}_k \right) \times \hat{\mathbf{n}}_i \quad (5.55)$$

Se observa que, en la expresión anterior, se introdujo el coeficiente  $\alpha_i^k$ , el cual relaciona el área del panel  $i$  con el área total de los paneles que comparten un segmento y permite ponderar la vorticidad aportada por cada panel al segmento compartido. Este coeficiente se define por:

$$\alpha_i^k = \frac{A_i}{A_i + A_{i+k}} \quad (5.56)$$

Puede notarse que si los paneles adyacentes son idénticos el coeficiente  $\alpha_i^k$  es igual a 0.5, lo que constituye una buena aproximación para mallas regulares. Asimismo, la ecuación (5.55) muestra que la discontinuidad tangencial queda expresada en términos de las circulaciones de los segmentos que constituyen el panel.

#### 5.5.4.2 Cálculo del término inestacionario

El término inestacionario está dado por la derivada *sustancial* del lado derecho de (5.48). El argumento de esta derivada, esto es  $\Phi(\mathbf{X}^U, t) - \Phi(\mathbf{X}^L, t)$ , se puede determinar de la siguiente

manera,

$$\Phi(\mathbf{X}^U, t) - \Phi(\mathbf{X}^L, t) = \oint_{C(t)} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{X} = \Gamma(t), \quad (5.57)$$

donde  $C(t)$  es una trayectoria en el espacio que tiene su origen en un punto ubicado por debajo de la superficie sustentadora, rodea al ala, y llega hasta el mismo punto pero por encima de la superficie alar. Aplicando el teorema de Stokes se puede demostrar que la circulación  $\Gamma(t)$  es igual a la circulación  $G_i(t)$  de anillo para una curva que encierra al punto de control  $i$ . Luego, la ecuación (5.48) se reescribe como [84]:

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}^U, t) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}^L, t) \right]_i = \frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}t} G_i(t) - \Delta \mathbf{V}(\mathbf{X}^i, t) \cdot \mathbf{V}_S(\mathbf{X}^i, t) \quad (5.58)$$

Aquí, la derivada *sustancial* de la expresión anterior se calcula empleando una aproximación por diferencias finitas hacia atrás de primer orden,

$$\frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}t} G_i(t) = \frac{G_i(t) - G_i(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad (5.59)$$

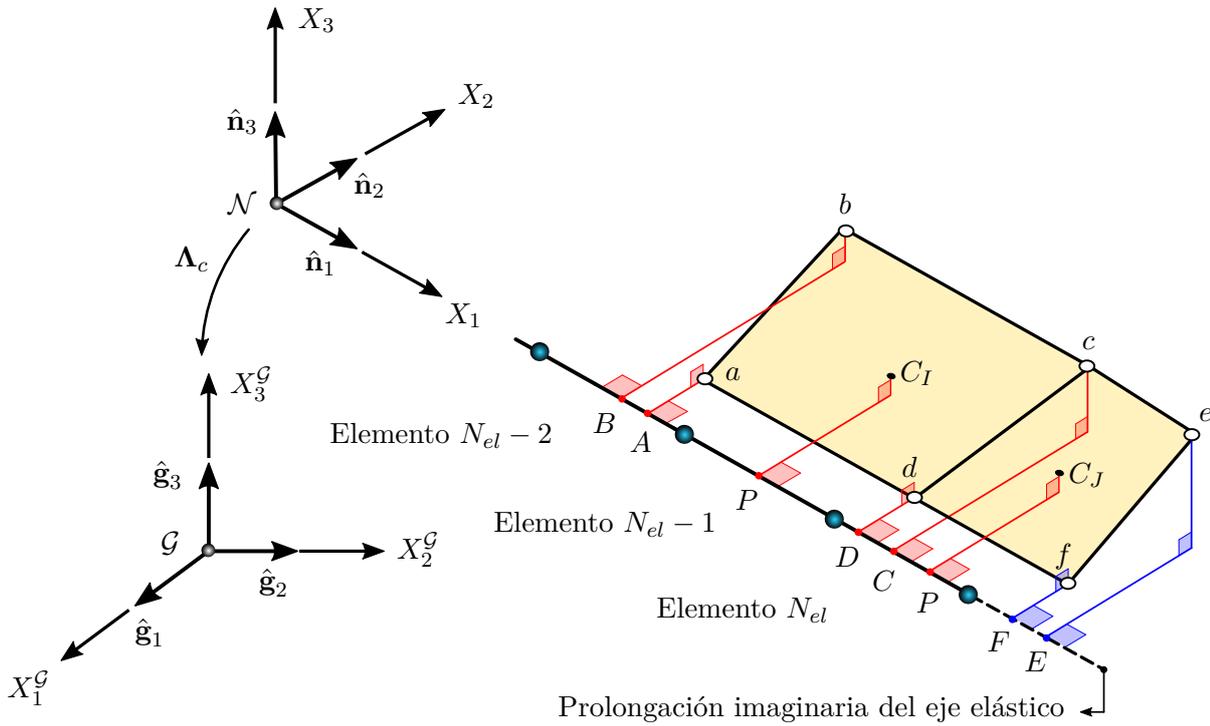
por lo tanto, el término inestacionario se determina utilizando la información de la circulación del paso anterior y del instante de tiempo actual. Se debe notar que la ecuación (5.58) es válida si y sólo si la superficie sustentadora contiene un borde por el cual no se desprende vorticidad. En caso contrario la curva  $C(t)$  debería encerrar a la estela unida al ala en las zonas de separación. En la Figura 5.13 se muestra la apariencia que debería tener la curva  $C(t)$  para el modelo que se aborda en este trabajo.

# Aspectos de implementación de los modelos

En el presente capítulo se expone una serie de aspectos relacionados con la implementación de los modelos introducidos en los capítulos previos. A tal fin se desarrollan cuatro secciones: en la primera de ellas se describe el esquema de interacción empleado en el intercambio de información entre modelos. En la segunda sección, se exponen las ecuaciones de gobierno de una estructura piezoeléctrica considerando dos alternativas, lineal y no lineal. Asimismo, se aborda de manera breve el acondicionamiento de dichas ecuaciones para su posterior integración numérica. En la tercera sección, se detalla la estrategia de co-simulación implementada y se expone el esquema numérico utilizado para hallar la respuesta electroelástica. En tanto que, en la cuarta sección se describe cómo se usa la herramienta numérica para estimar la velocidad de *flutter*. Finalmente, en el Apéndice del capítulo se analiza el cambio de base de las matrices y vectores elementales como también la conexión eléctrica entre transductores de elementos contiguos.

## 6.1 Interacción entre modelos

Un aspecto que debe ser abordado en todo análisis aeroelástico tiene que ver con la interacción entre los modelos involucrados, es decir, entre el modelo electroelástico y el modelo aerodinámico. En general, las cargas aerodinámicas dependen de la configuración estructural y, el movimiento de la estructura depende de las cargas actuantes, por lo cual existe un intercambio bidireccional de información entre modelos. La interacción entre modelos está asociada con: *i*) la transferencia de las variables cinemáticas desde los nodos de la malla de elementos finitos hacia los nodos y puntos de control de las grillas aerodinámicas y, *ii*) la transferencia de cargas desde los puntos de control de las grillas aerodinámicas hacia los nodos de la malla de elementos finitos.



**Figura 6.1:** Asociación entre un punto de la grilla aerodinámica y un elemento finito de la malla estructural.

En virtud de las diferencias que existen entre la grilla aerodinámica y la malla de elementos finitos, tanto en su naturaleza como en su topología, el método de interacción debe ser capaz de adecuar la información obtenida sobre una de ellas para poder utilizarla exitosamente sobre la otra. Para ello, se debe poner en consideración que tanto la grilla como la malla son discretizaciones de un mismo cuerpo. Así, resulta natural interpretar el método de transferencia de desplazamientos y velocidades como un conjunto de relaciones cinemáticas. Por otra parte, la determinación de estas relaciones, en conjunto con un resultado de conservación de la energía, son suficientes para deducir la regla de transferencia de cargas [71].

### 6.1.1 Asociación entre un punto de la grilla aerodinámica y un elemento finito de la malla estructural

En primer lugar, para aplicar la estrategia de interacción adoptada en el presente trabajo se necesita asociar a un punto arbitrario de la grilla aerodinámica con un elemento finito de la malla estructural. Desde una perspectiva práctica, sólo revisten interés los nodos aerodinámicos y los puntos de control de la grilla. La asociación se determina uniendo mediante una o más líneas rectas el punto en consideración con el eje de la viga que, en esta instancia, se restringe al *eje elástico*. La particularidad de esta unión es que estas líneas deben estar contenidas en un

plano que interseque perpendicularmente al eje elástico. De esta manera, el punto se vincula con el elemento finito que fue atravesado por el plano. Además, es importante mencionar que la asociación se efectúa por única vez cuando la estructura está en su configuración de referencia y no se actualiza durante la simulación.

A modo ilustrativo, en la Figura 6.1 se presenta la última parte de la malla estructural representativa del eje elástico junto a dos paneles aerodinámicos. Con este ejemplo se pretende exponer las dos situaciones posibles de vinculación, donde una de ellas corresponde a puntos interiores y la otra a puntos exteriores. En lo que respecta al primer caso, los puntos interiores son todos aquellos puntos cuyo plano asociado corta al eje elástico de la viga y no su prolongación imaginaria, tal como se muestra en color rojo en la Figura 6.1. En ella, los nodos  $a$  y  $b$  se asocian al elemento  $N_{el} - 2$ , los nodos  $c$  y  $d$  al elemento  $N_{el}$ , mientras que los puntos de control  $C_I$  y  $C_J$  a los elementos  $N_{el} - 1$  y  $N_{el}$  respectivamente. En lo que respecta al segundo caso, los puntos exteriores son todos aquellos puntos cuyo plano asociado corta a la prolongación imaginaria del eje elástico de la viga, tal como se presenta en color azul en la Figura 6.1. En este caso, los nodos  $e$  y  $f$  se asocian al último elemento de la malla, es decir, a  $N_{el}$ . Por claridad, en la Figura 6.1 no se dibujan los planos sino las líneas y los puntos de intersección.

### 6.1.2 Transferencia de desplazamientos y velocidades

El desplazamiento de un punto arbitrario de la grilla aerodinámica, tanto interior como exterior, se escribe en términos del vector de grados de libertad nodal del elemento finito asociado a partir de una transformación lineal de la forma,

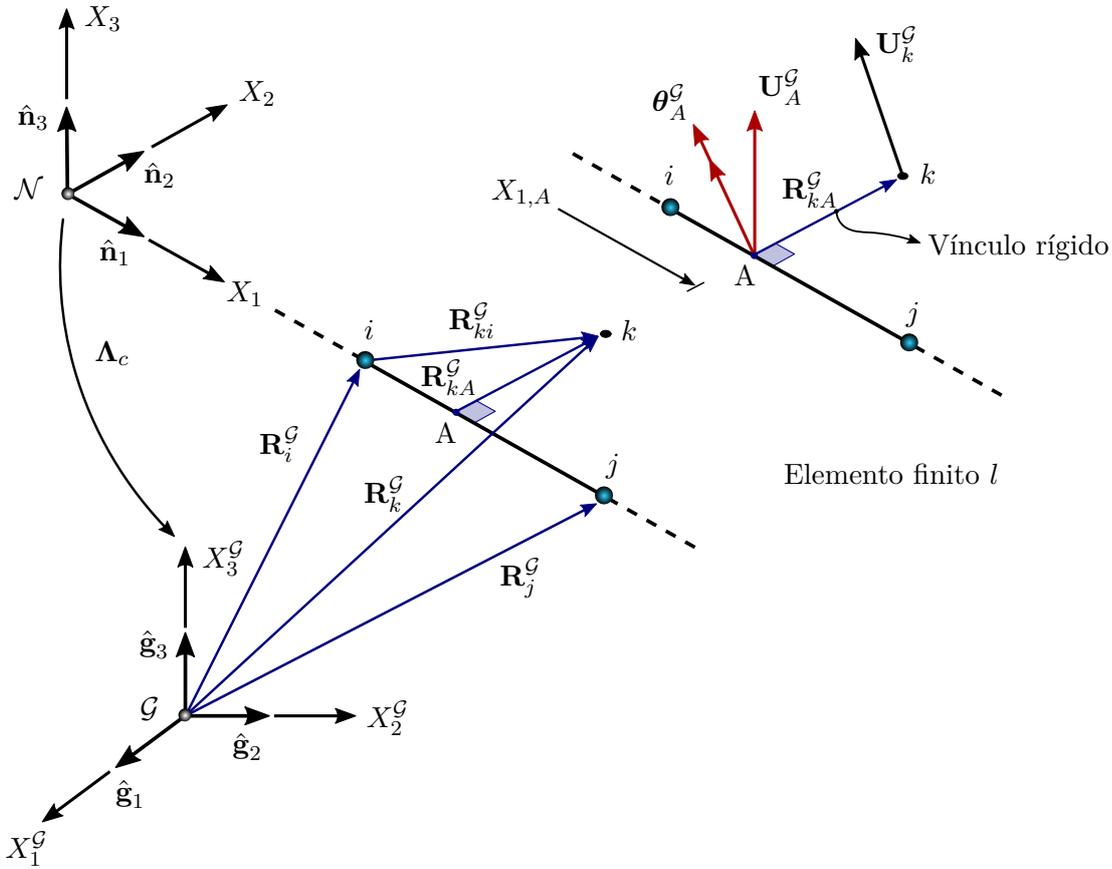
$$\mathbf{U}_k^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t) = \mathbf{G}_{kl}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}) \boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}}(t), \quad (6.1)$$

donde  $\mathbf{U}_k^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t)$  es el vector desplazamiento de un punto  $k$  de la grilla,  $\mathbf{G}_{kl}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A})$  es la matriz de interpolación que relaciona el desplazamiento del punto  $k$  con los desplazamientos y giros del elemento finito  $l$  asociado,  $\boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}}(t)$  es el vector global de grados de libertad nodal del elemento  $l$  y  $X_{1,A}$  es la coordenada del punto  $A$  en el sistema local de la viga. En lo que sigue, todos los vectores que se definan se expresan en la base  $\{\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2, \hat{\mathbf{g}}_3\}$  del sistema global  $\mathcal{G}$ .

Con el propósito de obtener una expresión para la matriz de interpolación se introduce la Figura 6.2. En ella se presenta un punto interior arbitrario  $k$  de la grilla aerodinámica que está unido rígidamente al elemento  $l$  por medio del vector  $\mathbf{R}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}})$ . Según se observa, este vector conecta el punto  $A$ , situado sobre el eje elástico del elemento, con el punto  $k$  y se puede calcular a partir de los vectores posición de los nodos estructurales y del punto en consideración. Estos vectores también se grafican en la Figura 6.2. En base a lo mencionado se puede expresar:

$$\mathbf{R}_{ki}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) = \mathbf{R}_k^{\mathcal{G}} - \mathbf{R}_i^{\mathcal{G}} \quad (6.2)$$

Asimismo, el vector  $\mathbf{R}_{ki}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}})$  también se puede escribir por medio de la suma entre el vector



**Figura 6.2:** Desplazamiento de un punto interior arbitrario  $k$  a partir del desplazamiento y giro del elemento finito  $l$  asociado.

$\mathbf{R}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}})$  y el vector que une el nodo  $i$  con el punto  $A$ :

$$\mathbf{R}_{ki}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) = \mathbf{R}_{kA}^{\mathcal{G}} + \left( \frac{\mathbf{R}_j^{\mathcal{G}} - \mathbf{R}_i^{\mathcal{G}}}{\|\mathbf{R}_j^{\mathcal{G}} - \mathbf{R}_i^{\mathcal{G}}\|} \cdot \mathbf{R}_{ki}^{\mathcal{G}} \right) \frac{\mathbf{R}_j^{\mathcal{G}} - \mathbf{R}_i^{\mathcal{G}}}{\|\mathbf{R}_j^{\mathcal{G}} - \mathbf{R}_i^{\mathcal{G}}\|} \quad (6.3)$$

Luego, sustituyendo la ecuación (6.2) en ambos miembros de (6.3) y operando se tiene:

$$\mathbf{R}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) = \left( \mathbf{R}_k^{\mathcal{G}} - \mathbf{R}_i^{\mathcal{G}} \right) - \left[ \frac{\mathbf{R}_j^{\mathcal{G}} - \mathbf{R}_i^{\mathcal{G}}}{\|\mathbf{R}_j^{\mathcal{G}} - \mathbf{R}_i^{\mathcal{G}}\|} \cdot \left( \mathbf{R}_k^{\mathcal{G}} - \mathbf{R}_i^{\mathcal{G}} \right) \right] \frac{\mathbf{R}_j^{\mathcal{G}} - \mathbf{R}_i^{\mathcal{G}}}{\|\mathbf{R}_j^{\mathcal{G}} - \mathbf{R}_i^{\mathcal{G}}\|} \quad (6.4)$$

Posteriormente, el vector desplazamiento  $\mathbf{U}_k^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t)$  del punto  $k$  se determina a partir del desplazamiento y de la rotación del punto  $A$ . Poniendo en consideración la hipótesis de rotaciones infinitesimales expuesta en el Capítulo 3, el vector  $\mathbf{U}_k^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t)$  se puede expresar como:

$$\mathbf{U}_k^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t) = \mathbf{U}_A^{\mathcal{G}}(X_{1,A}, t) + \mathbf{R}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) \times \boldsymbol{\theta}_A^{\mathcal{G}}(X_{1,A}, t), \quad (6.5)$$

donde  $\mathbf{U}_A^{\mathcal{G}}(X_{1,A}, t)$  y  $\boldsymbol{\theta}_A^{\mathcal{G}}(X_{1,A}, t)$  son los vectores que denotan al desplazamiento y a la rotación del eje elástico en el punto  $A$  del elemento. Luego, estos vectores se interpolan a partir de las variables nodales elementales teniendo en cuenta las aproximaciones propuestas en el Capítulo 4 para los campos continuos. Por consiguiente, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_A^{\mathcal{G}}(X_{1,A}, t) &= \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{U}_0^e(\xi_A, t) = \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_u(\xi_A) \check{\check{\boldsymbol{\Lambda}}}_c^T \boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}}(t) \\ \boldsymbol{\theta}_A^{\mathcal{G}}(X_{1,A}, t) &= \boldsymbol{\Lambda}_c \boldsymbol{\theta}^e(\xi_A, t) = \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_\theta(\xi_A) \check{\check{\boldsymbol{\Lambda}}}_c^T \boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}}(t),\end{aligned}\quad (6.6)$$

donde de acuerdo a la inversa de la transformación afín del elemento, dada por la ecuación (4.76), la coordenada  $\xi_A$  sobre el elemento maestro se calcula utilizando:

$$\xi_A(X_{1,A}) = \frac{1}{X_1^j - X_1^i} \left[ 2X_{1,A} - (X_1^i + X_1^j) \right] \quad (6.7)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (6.6) en (6.5) se obtiene la expresión buscada:

$$\mathbf{U}_k^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t) = \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_u(\xi_A) \check{\check{\boldsymbol{\Lambda}}}_c^T \boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}}(t) + \tilde{\mathbf{R}}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) \times \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_\theta(\xi_A) \check{\check{\boldsymbol{\Lambda}}}_c^T \boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}}(t) \quad (6.8)$$

Considerando la propiedad  $\tilde{\mathbf{R}}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) = \mathbf{R}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) \times$  la expresión anterior se puede reescribir de la siguiente manera,

$$\mathbf{U}_k^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t) = \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_u(\xi_A) \check{\check{\boldsymbol{\Lambda}}}_c^T \boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}}(t) + \tilde{\mathbf{R}}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_\theta(\xi_A) \check{\check{\boldsymbol{\Lambda}}}_c^T \boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}}(t), \quad (6.9)$$

de la cual resulta que la matriz de interpolación  $\mathbf{G}_{kl}^{\mathcal{G}}(X_{1,A}, X_i^{\mathcal{G}}) \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$  se determina por medio de la siguiente expresión:

$$\mathbf{G}_{kl}^{\mathcal{G}}(X_{1,A}, X_i^{\mathcal{G}}) = \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_u(\xi_A) \check{\check{\boldsymbol{\Lambda}}}_c^T + \tilde{\mathbf{R}}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_\theta(\xi_A) \check{\check{\boldsymbol{\Lambda}}}_c^T, \quad (6.10)$$

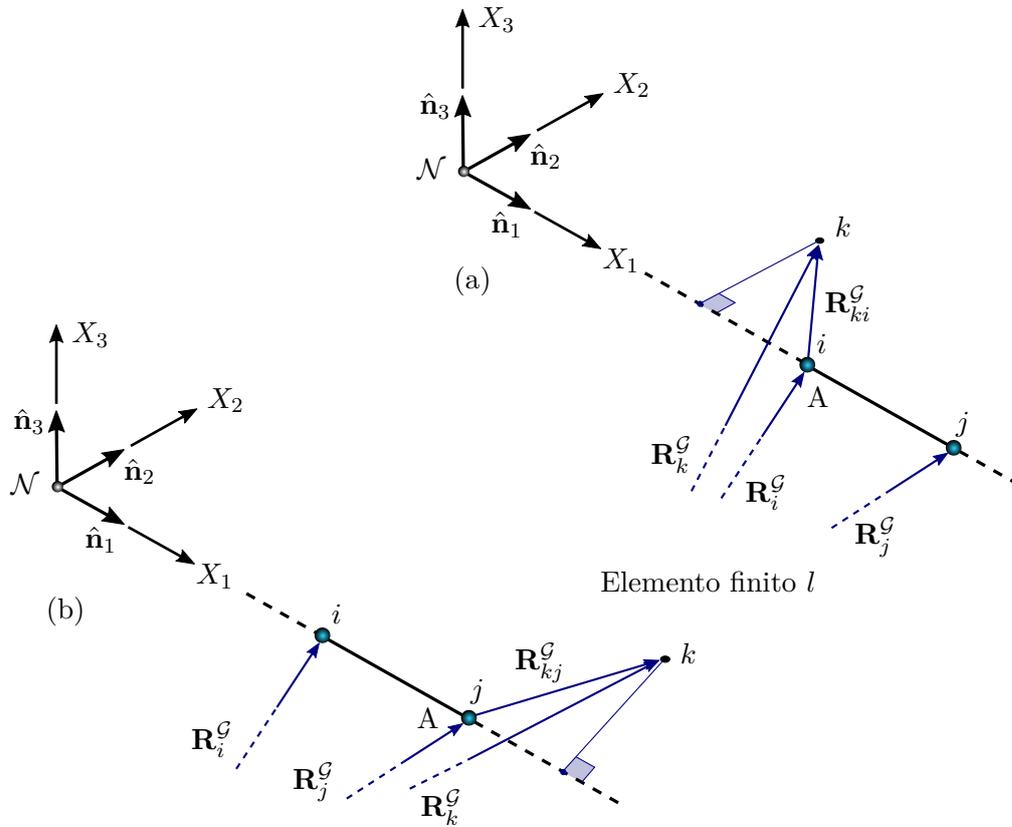
donde  $\tilde{\mathbf{R}}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}})$  es un tensor antisimétrico cuyas componentes son las componentes cartesianas del vector axial asociado  $\mathbf{R}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}})$  y su versión explícita es,

$$\tilde{\mathbf{R}}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) = \begin{bmatrix} 0 & -R_{kA}^3 & R_{kA}^2 \\ R_{kA}^3 & 0 & -R_{kA}^1 \\ -R_{kA}^2 & R_{kA}^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Adicionalmente, la velocidad del punto  $k$  se obtiene simplemente derivando respecto al tiempo la ecuación (6.9), lo cual produce:

$$\dot{\mathbf{U}}_k^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t) = \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_u(\xi_A) \check{\check{\boldsymbol{\Lambda}}}_c^T \dot{\boldsymbol{\eta}}_l^{\mathcal{G}}(t) + \tilde{\mathbf{R}}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_\theta(\xi_A) \check{\check{\boldsymbol{\Lambda}}}_c^T \dot{\boldsymbol{\eta}}_l^{\mathcal{G}}(t) \quad (6.12)$$

Nótese que la matriz de interpolación  $\mathbf{G}_{kl}^{\mathcal{G}}(X_{1,A}, X_i^{\mathcal{G}}) \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$  no depende del tiempo, sólo es función de coordenadas espaciales.



**Figura 6.3:** Vinculación de un punto exterior arbitrario  $k$  al nodo estructural más cercano del elemento finito  $l$  asociado: (a) conexión con el nodo inicial; (b) conexión con el nodo final.

Por otra parte, la matriz de interpolación para un punto exterior puede obtenerse aplicando ciertas consideraciones sobre la ecuación (6.10) con la ayuda de la Figura 6.3. En ella se presentan dos situaciones posibles respecto a la posición del punto  $k$ , en ambos casos el punto a considerar se vincula rígidamente al nodo más cercano del elemento finito asociado. En la Figura 6.3a el punto  $k$  se ubica a la izquierda del elemento, por lo tanto, se vincula rígidamente al nodo inicial  $i$ . En tanto que, en la Figura 6.3b el punto  $k$  se sitúa a la derecha del elemento, por consiguiente, se vincula rígidamente al nodo final  $j$ . De esta manera se tiene, respectivamente, para ambos casos que:

$$X_{1,A} = X_1^i, \mathbf{R}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) = \mathbf{R}_{ki}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) \text{ y } X_{1,A} = X_1^j, \mathbf{R}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) = \mathbf{R}_{kj}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) \quad (6.13)$$

Luego, reemplazando la ecuación anterior en (6.7) y (6.10) se obtiene la matriz de interpolación para ambas situaciones.

### 6.1.3 Transferencia de cargas aerodinámicas

Para transferir las cargas aerodinámicas hacia los nodos estructurales se debe garantizar la conservación de la energía. Para ello, se exige que el trabajo virtual realizado por el sistemas de cargas aerodinámicas sea equivalente al trabajo virtual efectuado por el sistema de cargas estructurales, esto es:

$$\delta\bar{W}_a = \delta\bar{W}_e, \quad (6.14)$$

donde  $\delta\bar{W}_a$  denota el trabajo virtual de las cargas aerodinámicas y  $\delta\bar{W}_e$  el trabajo virtual del sistema de cargas estructurales equivalente. Teniendo en cuenta que la fuerza aerodinámica aplicada en el punto de control es  $\mathbf{F}_k^{\mathcal{G}}(t)$  se puede expresar a (6.14) como,

$$\mathbf{F}_k^{\mathcal{G}}(t) \cdot \delta\mathbf{U}_k^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t) = \mathbf{F}_l^{\mathcal{G}} \cdot \delta\boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}}(t) + \mathbf{M}_l^{\mathcal{G}}(t) \cdot \delta\boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}}(t), \quad (6.15)$$

donde  $\mathbf{F}_l^{\mathcal{G}}, \mathbf{M}_l^{\mathcal{G}} \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$  son vectores que contienen, respectivamente, las fuerzas y momentos que actúan en los nodos del elemento finito  $l$ . Reemplazando la ecuación (6.9) en (6.15) resulta:

$$\mathbf{F}_k^{\mathcal{G}}(t) \cdot \left[ \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_u(\xi_A) \check{\boldsymbol{\Lambda}}_c^T + \tilde{\mathbf{R}}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_\theta(\xi_A) \check{\boldsymbol{\Lambda}}_c^T \right] \delta\boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}} = \mathbf{F}_l^{\mathcal{G}}(t) \cdot \delta\boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}} + \mathbf{M}_l^{\mathcal{G}}(t) \cdot \delta\boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}} \quad (6.16)$$

Escribiendo el producto escalar de la expresión anterior en notación matricial y designando,

$$\mathbf{P}_l^{\mathcal{G}} = \mathbf{F}_l^{\mathcal{G}} + \mathbf{M}_l^{\mathcal{G}}, \quad (6.17)$$

se tiene que:

$$\delta\boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}T} \left[ \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_u(\xi_A) \check{\boldsymbol{\Lambda}}_c^T + \tilde{\mathbf{R}}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_\theta(\xi_A) \check{\boldsymbol{\Lambda}}_c^T \right]^T \mathbf{F}_k^{\mathcal{G}}(t) = \delta\boldsymbol{\eta}_l^{\mathcal{G}T} \mathbf{P}_l^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t) \quad (6.18)$$

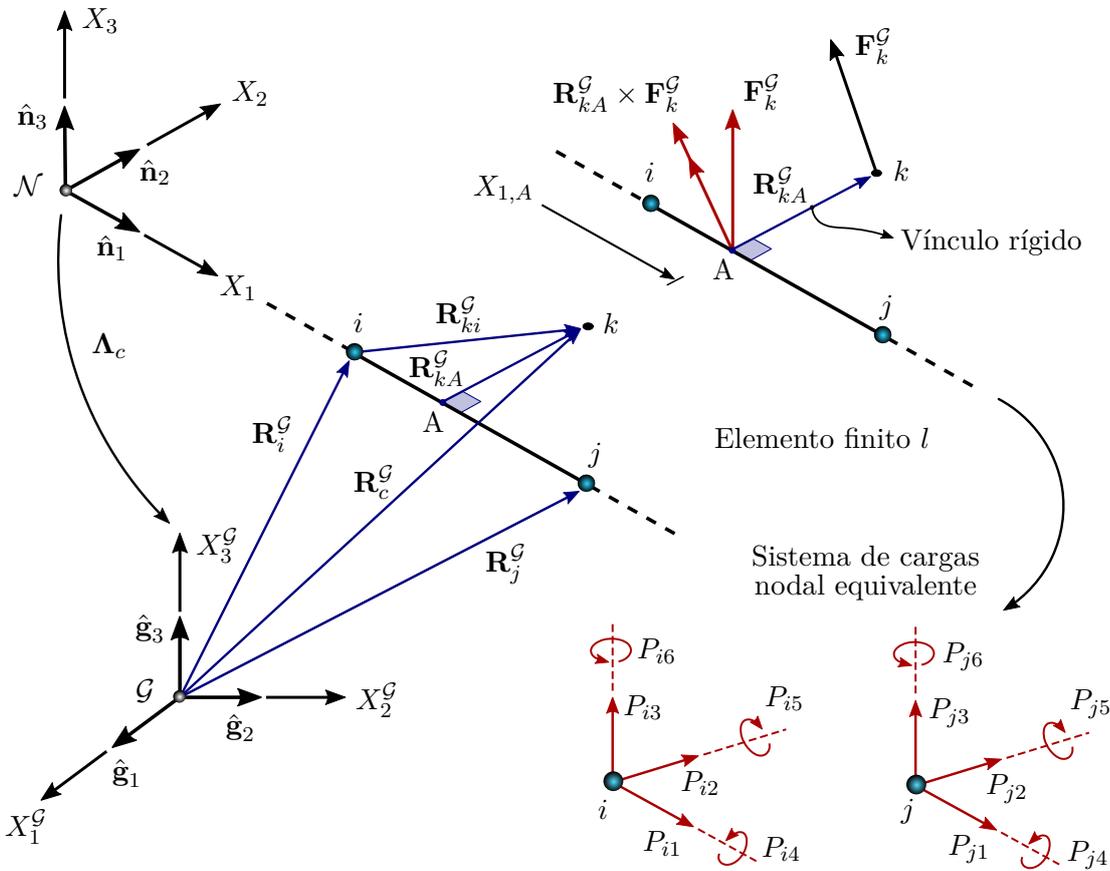
Observando la ecuación anterior se infiere que el vector de cargas nodales  $\mathbf{P}_l^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t) \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$  que produce el mismo efecto que la fuerza aerodinámica en el punto de control  $k$  se determina por medio de la siguiente expresión:

$$\mathbf{P}_l^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t) = \left[ \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_u(\xi_A) \check{\boldsymbol{\Lambda}}_c^T + \tilde{\mathbf{R}}_{kA}^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}) \boldsymbol{\Lambda}_c \mathbf{N}_\theta(\xi_A) \check{\boldsymbol{\Lambda}}_c^T \right]^T \mathbf{F}_k^{\mathcal{G}}(t) \quad (6.19)$$

En forma compacta, la ecuación anterior se escribe como:

$$\mathbf{P}_l^{\mathcal{G}}(X_i^{\mathcal{G}}, X_{1,A}, t) = \mathbf{G}_{kl}^{\mathcal{G}T}(\xi_A, X_i^{\mathcal{G}}) \mathbf{F}_k^{\mathcal{G}}(t) \quad (6.20)$$

La ecuación (6.20) muestra que el sistema de cargas nodal que produce el mismo trabajo que la carga aerodinámica que actúa en el punto de control se obtiene premultiplicando a esta última fuerza por una matriz igual a la transpuesta de la matriz de interpolación de desplazamientos. En consecuencia, la matriz de interpolación asociada a un punto de control posee una doble



**Figura 6.4:** Transformación de la carga aerodinámica que actúa en el punto de control  $k$  a cargas nodales.

utilidad: *i*) se emplea para desplazar al punto de control de acuerdo al movimiento de la estructura y, *ii*) para transferir la carga que actúa en este punto hacia los nodos estructurales.

Es importante destacar que la ecuación (6.20) también puede derivarse con ayuda de la Figura 6.4. A tal efecto, se traslada la fuerza  $\mathbf{F}_k^G(t)$  al punto  $A$  con el correspondiente momento y luego éstos se llevan hacia los nodos del elemento. Adicionalmente, en la Figura 6.4 se dibujan las componentes nodales  $P_{ik}, P_{jk} \in \mathbf{P}_l^G(X_i^G, X_{1,A}, t)$ , donde  $k = 1, 2, 3$ .

Si el punto de control es un punto exterior se aplican sobre la matriz de interpolación las consideraciones presentadas en la ecuación (6.13) según se sitúe a la izquierda o derecha del elemento finito asociado. Por último, una vez determinado el vector  $\mathbf{P}_l^G(X_i^G, X_{1,A}, t)$  para cada punto de control, tanto interior como exterior, se ensambla el vector de cargas global de la estructura.

## 6.2 Implementación numérica

La simulación numérica de la respuesta de modelos ingenieriles complejos usualmente requiere determinar la solución de grandes sistemas de ecuaciones, algebraicas y/o diferenciales, lo cual puede ser costoso desde una perspectiva computacional. Esta dificultad ha sido reconocida en el campo de la dinámica estructural y una gran variedad de métodos de reducción de orden han sido reportados en la literatura, tanto para sistemas lineales como no lineales [113].

La idea básica de los métodos de reducción consiste en condensar un sistema de ecuaciones (algebraicas y/o diferenciales) de grandes dimensiones en uno similar pero de dimensiones más pequeñas. Sin embargo, esta reducción trae aparejada una pérdida de información que puede repercutir en mayor o menor medida en la solución obtenida. Respecto al análisis de estructuras lineales, el método de superposición o descomposición modal ha sido y continúa siendo utilizado con éxito en una gran variedad de aplicaciones [18]. En este caso, la dinámica del sistema puede ser descrita por unos pocos modos naturales de vibrar, los cuales son invariantes en el tiempo. Por su parte, en el análisis de estructuras que involucran no linealidad geométrica el estado de deformación cambia permanentemente. Esta característica debe ser tomada en cuenta por el método de reducción empleado. Tal como expone Wriggers [123], no existe una metodología que se adapte convenientemente a todos los sistemas no lineales, sino que diferentes esquemas de reducción han sido propuestos para diversas aplicaciones con distinto grado de no linealidad [77].

A pesar de las ventajas en términos de tiempo de cómputo que conlleva la aplicación de algún método de reducción, en este trabajo se proponen las siguientes dos alternativas de solución: *i*) integración numérica del modelo no lineal sin reducción de orden, lo cual también se denomina integración numérica directa; y *ii*) integración numérica del modelo lineal con reducción de orden.

### 6.2.1 Modelo electroaeroelástico no lineal

La respuesta electroaeroelástica de una estructura piezoeléctrica integrada por una cantidad arbitraria de vigas, discretizada por medio de  $N_{el}$  elementos finitos y compuesta por  $N_c$  circuitos eléctricos está gobernada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas,

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{C}_a\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_i + \mathbf{K}_g)\boldsymbol{\eta}(t) - \sum_{k=1}^{N_c} ({}^k\boldsymbol{\Theta}_t + {}^k\boldsymbol{\Theta}_i + {}^k\boldsymbol{\Theta}_{nl})\boldsymbol{\varphi}_j^k(t) = \mathbf{P}[\boldsymbol{\eta}(t)] \quad (6.21)$$

$$\mathbf{C}_j^k\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_j^k(t) + \mathbf{R}_j^k\dot{\boldsymbol{\varphi}}_j^k(t) + \mathbf{L}_j^k\boldsymbol{\varphi}_j^k(t) = \dot{\mathbf{I}}_j^k(t),$$

donde

$$\dot{\mathbf{I}}_j^k(t) = - \left( \frac{1}{2} {}^k\boldsymbol{\Theta}_{nl}^T + {}^k\boldsymbol{\Theta}_t^T + {}^k\boldsymbol{\Theta}_i^T \right) \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) - {}^k\dot{\boldsymbol{\Theta}}_{nl}^T \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) - \frac{1}{2} {}^k\ddot{\boldsymbol{\Theta}}_{nl}^T \boldsymbol{\eta}(t) \quad (6.22)$$

El subíndice o el supraíndice  $k$  denotan al  $k$ -ésimo circuito eléctrico de la estructura, mientras que el subíndice  $j$  refiere a una conexión en serie,  $j = s$ , o en paralelo,  $j = p$ , entre transductores. La nomenclatura presente en la ecuación anterior constituye la versión global de aquella introducida a nivel elemental en el Capítulo 4 con excepción del vector  $\mathbf{P}[\boldsymbol{\eta}(t)]$  que representa al vector global de cargas nodales y cuyo efecto es equivalente al sistema de cargas aerodinámicas que actúan en los puntos de control. La dimensión de los vectores y matrices de (6.21) son,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &\in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}, \mathbf{K}_e \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}, \mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}, \mathbf{K}_g \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}, \mathbf{P}[\boldsymbol{\eta}(t)] \in \mathbb{R}^{N_e \times 1} \\ \boldsymbol{\eta}(t) &\in \mathbb{R}^{N_e \times 1}, {}^k\boldsymbol{\Theta}_l \in \mathbb{R}^{N_e \times N_p^k}, {}^k\boldsymbol{\Theta}_i \in \mathbb{R}^{N_e \times N_p^k}, {}^k\boldsymbol{\Theta}_{nl} \in \mathbb{R}^{N_e \times N_p^k}, \mathbf{C}_j^k \in \mathbb{R}^{N_p^k \times N_p^k} \\ \mathbf{R}_j^k &\in \mathbb{R}^{N_p^k \times N_p^k}, \mathbf{L}_j^k \in \mathbb{R}^{N_p^k \times N_p^k}, \boldsymbol{\varphi}_j^k(t) \in \mathbb{R}^{N_p^k \times 1}, \mathbf{C}_a \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

donde  $N_e$  denota el número de ecuaciones estructurales y  $N_p^k$  indica el número de potenciales independientes requeridos para describir al  $k$ -ésimo circuito. A su vez, el primer conjunto de ecuaciones gobierna la dinámica de la estructura y está acoplado, mediante los vectores  $\boldsymbol{\varphi}_j^k(t)$ , con los segundos  $k$  conjuntos de ecuaciones que rigen la dinámica de los circuitos eléctricos embebidos en la estructura. Al existir independencia eléctrica entre los circuitos, las ecuaciones diferenciales que describen a cada uno de ellos están eléctricamente desacopladas entre sí. Adicionalmente se incorporó en (6.21) una matriz de amortiguamiento  $\mathbf{C}_a$  que, en general, es de tipo proporcional.

Por otro lado, cada uno de los términos de (6.21) y (6.22) se obtienen ensamblando de manera convencional a las matrices y vectores elementales y aplicando las correspondientes condiciones de contorno. Con relación a las ecuaciones estructurales y, en particular al caso de matrices, esto se consigue eliminando las filas y columnas asociadas a los grados de libertad geométricos restringidos, mientras que para los vectores se deben eliminar las filas asociadas a los mismos grados de libertad. En lo que respecta a las ecuaciones eléctricas, las matrices se reducen eliminando las filas y columnas asociadas al potencial de referencia. Una excepción se presenta en las matrices de acoplamiento, donde las filas y las columnas a eliminar dependen del número de apoyos de la estructura y del número de potenciales de referencia, respectivamente. Adicionalmente, la construcción del sistema presentado en (6.21) requiere abordar dos aspectos: la rotación de matrices y vectores elementales previo al proceso de ensamble y, la conexión eléctrica entre transductores de elementos diferentes. Ambas particularidades se detallan en el Apéndice 6.A del capítulo.

### 6.2.2 Modelo electroaeroelástico lineal

La versión linealizada de la ecuación (6.21) se obtiene despreciando todos aquellos términos cuyo origen se vincule a las deformaciones no lineales. Poniendo en consideración lo mencionado,

el sistema de ecuaciones diferenciales dado por (6.21) se reduce a:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{C}_a\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\eta}(t) - \sum_{k=1}^{N_e} ({}_k\boldsymbol{\Theta}_l + {}_k\boldsymbol{\Theta}_i) \boldsymbol{\varphi}_j^k(t) &= \mathbf{P}[\boldsymbol{\eta}(t)] \\ \mathbf{C}_j^k \dot{\boldsymbol{\varphi}}_j^k(t) + \mathbf{R}_j^k \boldsymbol{\varphi}_j^k(t) + \mathbf{L}_j^k \boldsymbol{\varphi}_j^k(t) + ({}_k\boldsymbol{\Theta}_l^T + {}_k\boldsymbol{\Theta}_i^T) \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

donde  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + {}_i\mathbf{K}_e + {}_i\mathbf{K}_l$ . La aplicación del método de descomposición modal sobre la ecuación (6.24) se puede sintetizar en las siguientes dos etapas.

### 1. Obtención de las frecuencias naturales de vibrar y las formas modales asociadas

- (a) Para el vector global de grados de libertad nodal de la estructura se asume una respuesta del tipo:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\phi}_i e^{j\omega_i t} \quad (6.25)$$

donde  $j$  es la unidad imaginaria,  $\boldsymbol{\phi}_i$  es un vector desconocido y  $\omega_i$  es una frecuencia desconocida.

- (b) Se sustituye la expresión anterior en la versión homogénea de la ecuación estructural de (6.24). Despreciando los términos eléctricos, se obtiene el siguiente problema de autovalores generalizado:

$$(\mathbf{K}_e - \omega_i^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (6.26)$$

- (c) Se resuelve el problema anterior calculando las frecuencias naturales  $\omega_i$  y los modos de vibrar  $\boldsymbol{\phi}_i \in \mathbb{R}^{N_e \times 1}$  asociados. Teniendo en cuenta que todas las matrices involucradas en la expresión anterior son reales y simétricas, los autovalores y autovectores también son reales. Posteriormente, se construye la matriz modal  $\boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{N_e \times N_m}$  ubicando a los modos en columnas,

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \quad \boldsymbol{\phi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_{N_m}] \quad (6.27)$$

donde  $N_m$  es el número de modos que integran la base vectorial utilizada para aproximar la solución. Además, se asume que los modos se encuentran ortonormalizados respecto a la matriz de masa, por lo tanto, satisfacen las siguientes propiedades [87]:

$$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i = 1, \quad \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K}_e \boldsymbol{\phi}_i = \omega_i^2, \quad \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j = 0, \quad \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K}_e \boldsymbol{\phi}_j = 0 \quad (6.28)$$

### 2. Reducción de orden del sistema de ecuaciones diferenciales

- (a) Se aproxima al vector global de grados de libertad por medio de una combinación lineal de los modos de vibrar (vectores de la base) y un conjunto de coordenadas modales, las

cuales a priori son desconocidas. En forma compacta, esto se expresa como:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{N_m} \boldsymbol{\phi}_k q_k(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t), \quad (6.29)$$

donde  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{N_m \times 1}$  es el vector de coordenadas modales.

- (b) Se sustituye la aproximación propuesta por (6.29) en las dos ecuaciones del sistema (6.24) y se premultiplica a la primera de ellas por la matriz modal transpuesta.

Aplicando la secuencia de pasos previamente detallados se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de orden reducido,

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C}_a \boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t) - \boldsymbol{\Phi}^T \sum_{k=1}^{N_c} ({}_k \boldsymbol{\Theta}_l + {}_k \boldsymbol{\Theta}_i) \boldsymbol{\varphi}_j^k(t) = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{P} [\boldsymbol{\eta}(t)] \quad (6.30)$$

$$\mathbf{C}_j^k \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_j^k(t) + \mathbf{R}_j^k \dot{\boldsymbol{\varphi}}_j^k(t) + \mathbf{L}_j^k \boldsymbol{\varphi}_j^k(t) + ({}_k \boldsymbol{\Theta}_l^T + {}_k \boldsymbol{\Theta}_i^T) \boldsymbol{\Phi} \ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0},$$

Como la base vectorial empleada se computa ignorando los términos eléctricos, la reducción de orden se efectúa sobre los grados de libertad geométricos del problema. En consecuencia, no se altera el número de coordenadas eléctricas del modelo pero sí se modifica la dimensión de los términos de acoplamiento electromecánico. Por otra parte, la cantidad de modos a incluir en la matriz modal introduce cierto grado de incertidumbre ya que, a priori, no se conoce las formas modales de mayor participación en la respuesta estructural. Esto se debe a que la magnitud y la dirección de las cargas aerodinámicas son desconocidas. Por este motivo, es recomendable efectuar un análisis de convergencia de la solución para diferentes números de modos.

### 6.2.3 Formulación de primer orden

En general, los métodos de integración numérica operan sobre sistemas de primer orden de la forma,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F} [\mathbf{z}(t), t], \quad (6.31)$$

donde  $\mathbf{z}(t)$  se conoce como vector de estado y  $\mathbf{F} [\mathbf{z}(t), t]$  es una función vectorial de dicho vector y del tiempo. De acuerdo a lo mencionado, resulta indispensable reescribir a los sistemas expuestos en (6.21) y (6.30) como sistemas de primer orden. En este sentido, se define al vector

de estado y a su derivada temporal para el modelo lineal de la siguiente manera,

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\varphi}_j^1(t) \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_j^{N_c}(t) \\ \mathbf{q}(t) \\ \varphi_j^1(t) \\ \vdots \\ \varphi_j^{N_c}(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\varphi}_j^1(t) \\ \vdots \\ \ddot{\varphi}_j^{N_c}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\varphi}_j^1(t) \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_j^{N_c}(t) \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Por su parte, para el modelo no lineal estos vectores están dados por:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \\ \dot{\varphi}_j^1(t) \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_j^{N_c}(t) \\ \boldsymbol{\eta}(t) \\ \varphi_j^1(t) \\ \vdots \\ \varphi_j^{N_c}(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) \\ \ddot{\varphi}_j^1(t) \\ \vdots \\ \ddot{\varphi}_j^{N_c}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \\ \dot{\varphi}_j^1(t) \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_j^{N_c}(t) \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Donde  $\mathbf{z}(t)$  y  $\dot{\mathbf{z}}(t) \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$  siendo la dimensión  $N$  del vector de estado igual a:

$$N = N_m + \sum_{k=1}^{N_c} N_p^k, \quad (6.34)$$

para el modelo lineal e igual a:

$$N = N_e + \sum_{k=1}^{N_c} N_p^k, \quad (6.35)$$

para el modelo no lineal. Para construir la función  $\mathbf{F}[\mathbf{z}(t), t]$  asociada el modelo lineal se despeja a los vectores  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  y  $\ddot{\varphi}_j^k(t)$  de la expresión (6.30). De modo análogo, para el modelo no lineal se despeja a los vectores  $\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t)$  y  $\ddot{\varphi}_j^k(t)$  de la ecuación (6.21).

### 6.3 Estrategia de co-simulación

Actualmente, la creciente complejidad de los modelos involucrados en las aplicaciones modernas de ingeniería ha incrementado su dificultad de resolución. En virtud de ello, es práctica común particionar al sistema global en dos o más subsistemas y utilizar solucionadores específicos para

cada uno de ellos. En general, cada solucionador intercambia información y opera iterativamente con los restantes hasta alcanzar la convergencia. En el contexto del presente trabajo, se empleará el término simulación para referir a la solución numérica de un sistema continuo, mientras que se adoptará la palabra co-simulación para describir el concepto de múltiples subsistemas simuladores interactuando e intercambiando información [16, 98].

La implementación de una estrategia de co-simulación permite introducir un enfoque particionado dividiendo al sistema electroaeroelástico en dos subsistemas que son representados por modelos distintos con entornos de simulación propio: el modelo electroelástico, denominado Simulador 1, y el modelo aerodinámico, denominado Simulador 2. Si bien ambos modelos son independientes, ya que cada uno representa a un campo físico distinto, el acoplamiento entre ellos se caracteriza como fuerte. Esto se debe a que no sólo existe un intercambio bidireccional de información, sino que también la comunicación entre ambos simuladores se efectúa en cada paso de integración, a pesar de que se admite la utilización de pasos de tiempo diferentes en cada modelo. De esta manera, esta estrategia permite integrar numéricamente y simultáneamente en el dominio del tiempo las ecuaciones que gobiernan al sistema electroaeroelástico. En contraposición, un ejemplo de interacción débil puede encontrarse en [72].

Previo a detallar la estrategia implementada en este trabajo se introducen dos aspectos. En primer lugar, sin pérdida de generalidad, se puede establecer que un sistema electroaeroelástico está compuesto por múltiples cuerpos flexibles independientes sumergidos en el dominio fluido. A su vez, cada cuerpo se representa por al menos una viga y una grilla aerodinámica. En esta descripción se considera que dos cuerpos son independientes entre sí, ya que caso contrario formarían parte de un mismo cuerpo. En segundo lugar, aunque la definición de los pasos de tiempo se aborda más adelante, se asume que, en principio, son diferentes para el Simulador 1 y el Simulador 2. Con relación a ello, se considera que el paso de tiempo aerodinámico  $\Delta t_a$  es  $N$  veces mayor al paso de tiempo estructural  $\Delta t_s$ , es decir:

$$\Delta t_a = N\Delta t_s, \quad (6.36)$$

donde  $N \in \mathbb{N}$ . La diferencia de escalas temporales entre el Simulador 1 y el Simulador 2 implica que por cada paso de integración aerodinámico se efectúan  $N$  pasos de integración estructurales.

Para detallar la estrategia de co-simulación se define un contador parcial  $p$  de pasos estructurales, el cual se reinicia al comienzo de cada paso aerodinámico y adopta valores enteros de 1 a  $N$ . En este sentido, el cómputo de la solución del sistema electroaeroelástico en el tiempo  $t + \Delta t_a$  (o  $t + N\Delta t_s$ ) se implementa a través de la siguiente secuencia de pasos que se muestra en la Figura 6.5 y que se detalla a continuación:

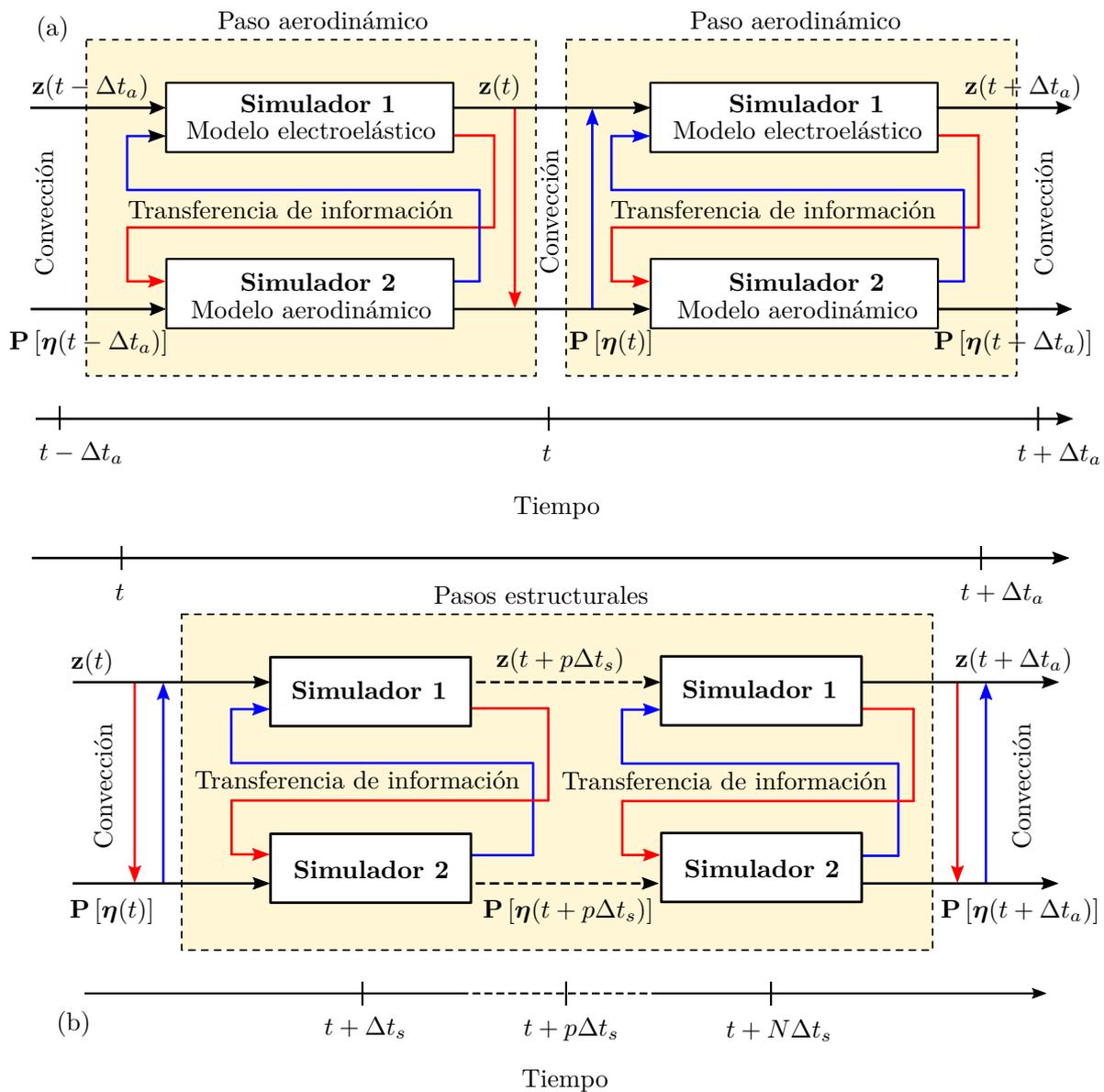
1. En primer lugar, se utiliza el Simulador 2 para actualizar la configuración de las SVLs. Los nodos de cada uno de los segmentos vorticosos se mueven desde su posición actual  $\mathbf{x}(t)$  hacia su nueva posición  $\mathbf{x}(t + \Delta t_a)$  de acuerdo a la ecuación (5.36). Las SVLs permanecen fijas en el espacio durante el resto del proceso del paso de integración aerodinámico

actual, lo cual contempla los  $N$  pasos estructurales. Esto se debe a la diferencia de escala temporal que existe entre  $\Delta t_a$  y  $\Delta t_s$ .

2. El contador parcial  $p$  se inicia en 1 y se ejecutan los siguientes pasos:
  - 2.1 Las variables del campo fluido son resueltas por el Simulador 2 para luego determinar las cargas aerodinámicas  $\mathbf{F}_k^{\mathcal{G}}[\boldsymbol{\eta}(t + p\Delta t_s)]$  en cada uno de los puntos de control de las SVAs. Estas cargas se determinan teniendo en cuenta la influencia de las SVLs que se mantienen inalteradas sobre las SVAs y la influencia de las SVAs sobre sí mismas.
  - 2.2 Se transfieren las cargas aerodinámicas  $\mathbf{F}_k^{\mathcal{G}}[\boldsymbol{\eta}(t + p\Delta t_s)]$  desde los puntos de control hacia los nodos estructurales empleando la ecuación (6.20) y, posteriormente, se ensambla el vector global de cargas nodales  $\mathbf{P}[\boldsymbol{\eta}(t + p\Delta t_s)]$ .
  - 2.3 La respuesta estructural y eléctrica son predichas utilizando el Simulador 1 junto a la condición de carga obtenida en el paso anterior. La primera de estas respuestas implica la estimación de  $\boldsymbol{\eta}(t + p\Delta t_s)$  y  $\dot{\boldsymbol{\eta}}(t + p\Delta t_s)$ , mientras que la segunda involucra la determinación de  $\boldsymbol{\varphi}_j^k(t + p\Delta t_s)$  y  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_j^k(t + p\Delta t_s)$ .
  - 2.4 Una vez actualizada la configuración espacial de la estructura se utiliza la ecuación (6.9) para desplazar a los nodos aerodinámicos y a los puntos de control hacia sus nuevas posiciones, como también calcular la velocidad de los puntos de control de las SVAs. Luego, se recalculan las cargas aerodinámicas.
  - 2.5 Los pasos 1 a 4 son repetidos hasta satisfacer el criterio de convergencia. Este criterio exige que la norma infinita de la diferencia entre la solución computada en la iteración actual y la solución correspondiente a la interacción previa sea inferior a una cierta tolerancia de error prefijada  $\epsilon$ , véase ecuación (6.40) Esta norma se calcula en términos del vector de estado  $\mathbf{z}(t)$ . Una vez alcanzada la convergencia se avanza hacia el próximo valor de  $p$ .
3. La secuencia de pasos 2.1 a 2.5 se repite hasta que  $p$  sea igual a  $N$ .
4. En último lugar, se repiten los pasos 2.2 y 2.3 para determinar las cargas aerodinámicas  $\mathbf{F}_k^{\mathcal{G}}[\boldsymbol{\eta}(t + \Delta t_a)]$  correspondientes a la configuración estructural final y dar inicio al paso siguiente. Al cumplimentar este paso se tiene que  $t + \Delta t_a = t + N\Delta t_s$ .

En la Figura 6.5 se presenta un esquema que sintetiza el proceso de co-simulación y la interacción entre los simuladores. En particular, de la Figura 6.5a se aprecia la secuencia entre dos pasos aerodinámicos consecutivos, en tanto que, en la Figura 6.5b se detalla la interacción entre simuladores para los pasos estructurales contenidos en cada paso aerodinámico. En ambas figuras se utilizan flechas de colores rojo y azul para representar la comunicación bidireccional entre simuladores. El Simulador 1 computa la configuración espacial actualizada a partir de

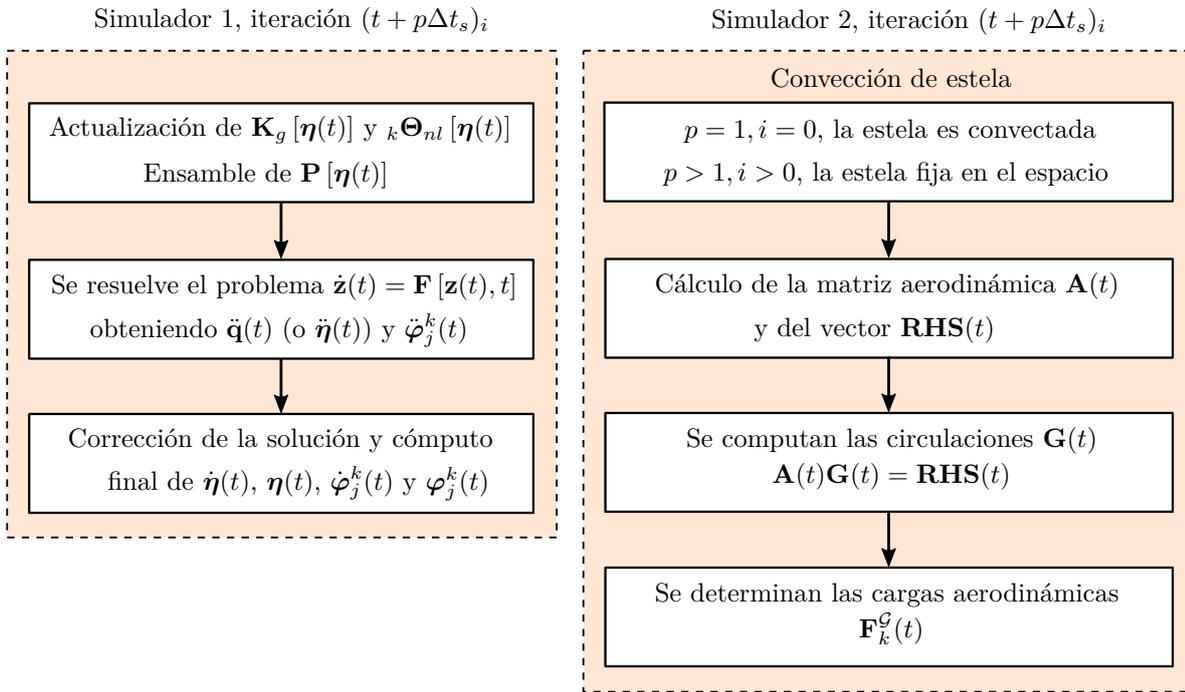
las cargas aerodinámicas determinadas por el Simulador 2, las cuales a su vez dependen de la configuración espacial del paso previo. Adicionalmente, en la Figura 6.6 se exponen los diagramas de flujo de cada simulador que detallan la secuencia de pasos seguida por cada uno de ellos durante una iteración. Esta iteración se da para cada paso estructural.



**Figura 6.5:** Esquema de co-simulación: acoplamiento entre simuladores.

### 6.3.1 Esquema de integración numérica

Según lo comentado en la subsección anterior, el sistema electroaeroelástico está compuesto por dos subsistemas: el modelo electroelástico (Simulador 1) y el modelo aerodinámico (Simulador 2).



**Figura 6.6:** Diagrama de flujo del Simulador 1 y del Simulador 2.

Debido a la naturaleza del problema abordado existe un intercambio recíproco de información entre los simuladores siguiendo una secuencia iterativa. A pesar de eso, cada uno de ellos sigue un esquema numérico diferente durante la obtención de la solución en cada instante de tiempo.

En lo que respecta al Simulador 1, se utiliza un esquema de integración de tipo iterativo ya que permite contemplar la interacción entre los modelos involucrados. Este esquema se basa en el método predictor-corrector de cuarto orden de Hamming, el cual fue seleccionado por dos razones principales: por un lado, porque el Simulador 2 es más eficiente cuando las cargas se evalúan en pasos enteros de tiempo y, por otro lado, debido a que las cargas aerodinámicas contienen contribuciones, provenientes del término inestacionario de Bernoulli, que son proporcionales a la aceleración [84]. Por estos motivos, los métodos del tipo predictor-corrector pueden tratar términos de aceleración presentes en ambos lados de las ecuaciones de movimiento sin evaluar las cargas en fracciones del paso de tiempo, mientras que los métodos del tipo Runge-Kutta no son adecuados para estos casos.

Los detalles básicos del esquema numérico adoptado para integrar las ecuaciones de movimiento no lineales (6.21) o lineales (6.30) se basan en la formulación (6.31) y se exponen a continuación:

1. En el instante inicial  $t_0$ , esto es  $t = 0$ , las condiciones iniciales son conocidas,  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0)$ .

Por lo tanto, empleando la ecuación (6.31) se obtiene el valor de  $\dot{\mathbf{z}}_0$  como:

$$\dot{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}[\mathbf{z}(t_0), t_0] \quad (6.37)$$

2. En  $t_1$ , es decir  $t = \Delta t_s$ , donde  $\Delta t_s$  es el paso de tiempo del integrador, se predice la solución  $\mathbf{z}_1^p$  utilizando el método explícito de Euler:

$$\mathbf{z}_1^p = \mathbf{z}_0 + \Delta t_s \mathbf{F}_0 \quad (6.38)$$

3. La solución predicha se corrige usando el método modificado de Euler:

$$\mathbf{z}_1^{i+1} = \mathbf{z}_0 + \frac{\Delta t_s}{2} (\mathbf{F}_1^i + \mathbf{F}_0), \quad \mathbf{F}_1^i = \mathbf{F}[\mathbf{z}_1^i(t_1), t_1], \quad (6.39)$$

donde  $i$  es la variable de iteración. Este paso se repite hasta que el error de convergencia  $e_1$  resulte inferior a una tolerancia prefijada  $\epsilon$ . El error de convergencia se computa por:

$$e_1 = \|\mathbf{z}_1^{i+1} - \mathbf{z}_1^i\|_\infty, \quad (6.40)$$

donde  $\|\cdot\|_\infty$  denota la norma infinita.

4. En  $t_2$ , es decir  $t = 2\Delta t_s$ , se predice la solución  $\mathbf{z}_2^p$  usando el método predictor de dos pasos de Adams-Bashforth:

$$\mathbf{z}_2^p = \mathbf{z}_1 + \frac{\Delta t_s}{2} (3\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_0) \quad (6.41)$$

5. La solución predicha se corrige empleando el método de dos pasos de Adams-Moulton:

$$\mathbf{z}_2^{i+1} = \mathbf{z}_1 + \frac{\Delta t_s}{12} (5\mathbf{F}_2^i + 8\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_0), \quad \mathbf{F}_2^i = \mathbf{F}[\mathbf{z}_2^i(t_2), t_2] \quad (6.42)$$

Este paso se repite hasta que el error de convergencia  $e_2$  sea inferior a  $\epsilon$ . El error se obtiene mediante:

$$e_2 = \|\mathbf{z}_2^{i+1} - \mathbf{z}_2^i\|_\infty, \quad (6.43)$$

6. En  $t_3$ , es decir  $t = 3\Delta t_s$ , se predice la solución  $\mathbf{z}_3^p$  utilizando el método de tres pasos de Adams-Bashforth:

$$\mathbf{z}_3^p = \mathbf{z}_2 + \frac{\Delta t_s}{12} (23\mathbf{F}_2 - 16\mathbf{F}_1 + 5\mathbf{F}_0) \quad (6.44)$$

7. La solución predicha se corrige utilizando el método de tres pasos de Adams-Moulton:

$$\mathbf{z}_3^{i+1} = \mathbf{z}_2 + \frac{\Delta t_s}{24} (9\mathbf{F}_3^i + 19\mathbf{F}_2 - 5\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_0), \quad \mathbf{F}_3^i = \mathbf{F}[\mathbf{z}_3^i(t_3), t_3] \quad (6.45)$$

Este paso se repite hasta que el error de convergencia  $e_3$  resulte inferior a la tolerancia  $\epsilon$ . El error se obtiene por:

$$e_3 = \|\mathbf{z}_3^{i+1} - \mathbf{z}_3^i\|_\infty \quad (6.46)$$

Luego de alcanzar la convergencia se calcula por primera vez el error de truncamiento local  $\mathbf{e}_3$  como:

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{z}_3^{i+1} - \mathbf{z}_3^p \quad (6.47)$$

8. Para todo tiempo  $t > t_3$  la solución es computada por medio del método predictor-corrector de cuarto orden de Hamming. Para el paso de tiempo  $t_j$  la solución  $\mathbf{z}_j^p$  se predice por medio de:

$$\mathbf{z}_j^p = \mathbf{z}_{j-4} + \frac{4}{3}\Delta t_s (2\mathbf{F}_{j-1} - \mathbf{F}_{j-2} + 2\mathbf{F}_{j-3}) \quad (6.48)$$

9. La solución predicha es modificada por el error de truncamiento del paso anterior:

$$\mathbf{z}_j^1 = \mathbf{z}_j^p + \frac{112}{9}\mathbf{e}_{j-1} \quad (6.49)$$

10. La solución modificada se corrige utilizando la expresión:

$$\mathbf{z}_j^{i+1} = \frac{1}{8} \left[ 9\mathbf{z}_{j-1} - \mathbf{z}_{j-3} + 3\Delta t_s (\mathbf{F}_j^i + 2\mathbf{F}_{j-1} + \mathbf{F}_{j-2}) \right], \quad (6.50)$$

donde

$$\mathbf{F}_j^i = \mathbf{F} [\mathbf{z}_j^i(t_j), t_j], \quad \mathbf{F}_{j-1} = \mathbf{F} [\mathbf{z}_{j-1}(t_{j-1}), t_{j-1}], \quad \mathbf{F}_{j-2} = \mathbf{F} [\mathbf{z}_{j-2}(t_{j-2}), t_{j-2}] \quad (6.51)$$

Este paso es repetido hasta que el error de convergencia  $e_j$  sea inferior a la tolerancia  $\epsilon$ . El error se obtiene mediante:

$$e_j = \|\mathbf{z}_j^{i+1} - \mathbf{z}_j^i\|_\infty \quad (6.52)$$

11. Una vez alcanzada la convergencia se calcula el error de truncamiento  $\mathbf{e}_j$  para su uso en el paso actual y en el siguiente:

$$\mathbf{e}_j = \frac{9}{121} (\mathbf{z}_j^{i+1} - \mathbf{z}_j^p) \quad (6.53)$$

12. La solución final en el paso  $j$  se obtiene como:

$$\mathbf{z}_j = \mathbf{z}_j^{i+1} - \mathbf{e}_j \quad (6.54)$$

En lo que concierne al Simulador 2, el esquema numérico implementado en esta tesis es abordado con alto nivel de detalle por varios autores, motivo por el cual no será expuesto en este texto [64, 84, 96]. Un comentario adicional respecto al Simulador 2 es que en el instante inicial ( $t = 0$ ) se ignora la contribución del término inestacionario en el cálculo de cargas aerodinámicas. En general, no reviste importancia capturar esta contribución con alto grado de precisión en este paso de tiempo ya que la respuesta estructural se determina para una perturbación inicial arbitraria.

### 6.3.1.1 Determinación del paso de tiempo

Una correcta selección del paso de tiempo empleado en la división del tiempo total de la simulación es fundamental para que exista estabilidad numérica. En general, tanto el problema físico que se analiza como la discretización numérica empleada influyen en la elección de este parámetro. Como se expuso anteriormente, se admite el uso de pasos de tiempo distintos para el Simulador 1 y el Simulador 2. Por consiguiente, el paso de tiempo elegido para cada uno de los modelos involucrados debe cumplir una serie de requisitos que serán sintetizados a continuación.

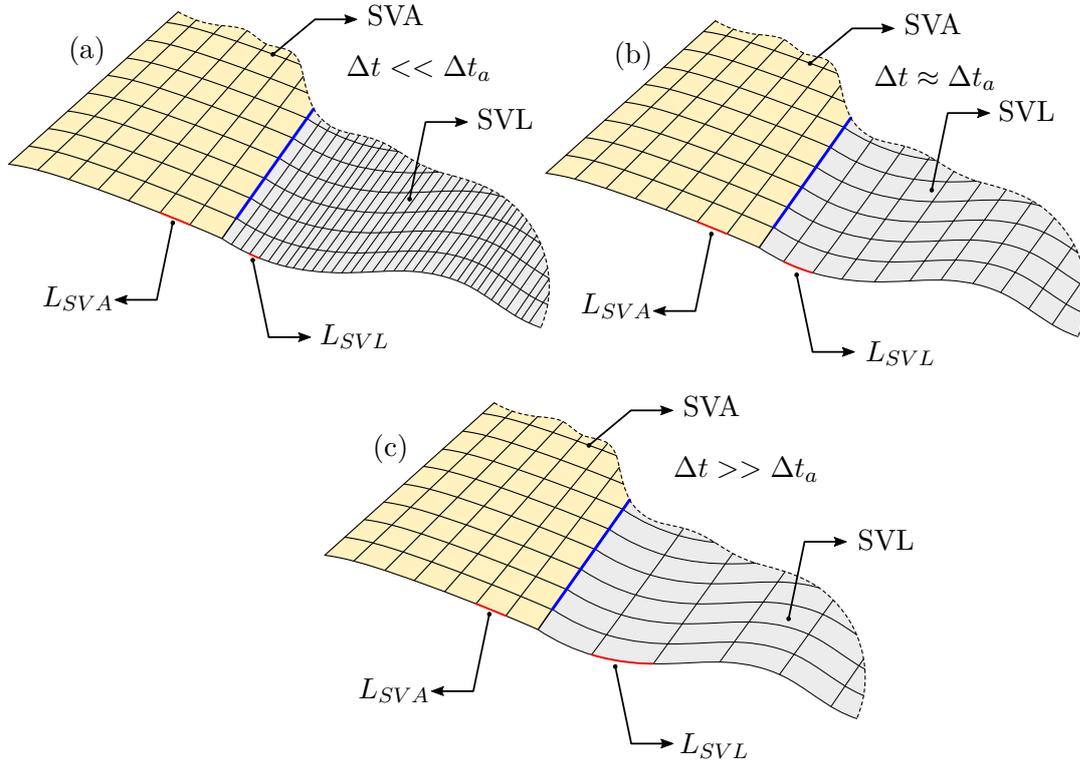
Con relación al modelo electroelástico lineal del Simulador 1, una regla práctica para computar el paso de tiempo se establece a partir de la frecuencia natural más elevada incluida en la expansión modal de la solución. En este sentido, si  $N_m$  es el número de modos elegidos y  $\omega_m$  es la frecuencia más alta, entonces el paso de tiempo debe ser lo suficientemente pequeño tal que dicha frecuencia pueda ser capturada en la respuesta estructural. Consecuentemente, se puede establecer que:

$$\Delta t_s < \frac{1}{\alpha} T_m = \frac{1}{\alpha} \frac{2\pi}{\omega_m} \quad (6.55)$$

donde  $T_m$  es el período natural que se corresponde con la frecuencia  $\omega_m$  y  $\alpha$  es un parámetro que indica la cantidad de puntos contenidos en un período completo. Aunque el valor de  $\alpha$  es variable y depende de las características del sistema analizado, Bathe propone como límite inferior a  $\alpha = \pi$ . A pesar de ello, este autor admite que, para problemas estructurales, elegir  $\alpha = 10$  ha dado buenos resultados [14].

En el modelo electroelástico no lineal del Simulador 1, el criterio dado por la ecuación (6.55) debe aplicarse considerando la frecuencia natural más elevada, la cual se computa en la configuración indeformada y depende fuertemente del número de grados de libertad del modelo electroelástico. Sin embargo, existe cierta incertidumbre en el cálculo del paso de tiempo como consecuencia de la constante evolución del sistema. Si se estima que las frecuencias naturales pueden experimentar grandes variaciones a lo largo de la simulación, esto debe ser contemplado en la determinación de este parámetro.

En ciertas oportunidades, el acoplamiento entre ecuaciones estructurales y eléctricas trae aparejado la necesidad de optar por un valor de  $\alpha > 10$  para que exista estabilidad numérica. Esto principalmente sucede cuando se realizan simulaciones usando el modelo electroelástico



**Figura 6.7:** Influencia del paso de tiempo aerodinámico en el tamaño de los paneles de la SVL: (a) Paso de tiempo menor al recomendado; (b) Paso de tiempo recomendado; (c) Paso de tiempo mayor al recomendado.

lineal para valores de resistencias eléctricas muy bajos. En estas situaciones, si el valor de  $\alpha$  no se modifica, el número de iteraciones hasta alcanzar la convergencia suele incrementarse notablemente o incluso no converger.

Por otro lado, en lo que respecta al modelo aerodinámico del Simulador 2, el paso de tiempo se determina teniendo en cuenta otras condiciones. Según se expuso en el Capítulo 5, en el UVLM existe un requisito de regularidad que brinda estabilidad y que mejora los resultados de las simulaciones. Al respecto, es recomendable que los paneles que se convectan desde los bordes filosos a la estela sean geoméricamente similares a aquellos que se encuentran sobre las SVAs. En consecuencia, poniendo en consideración a la Figura 6.7, los resultados de la simulación serán mejores en la medida que se satisfaga:

$$L_{SVA} \cong L_{SVL}, \quad (6.56)$$

donde  $L_{SVA}$  es la longitud del panel en la SVA y  $L_{SVL}$  es la longitud del panel en la SVL, ambos medidos en dirección característica del flujo. En esta descripción asume que esta dirección es coincidente con la dirección de la cuerda. Según lo detallado en la sección 5.5.3, la posición que ocupa un segmento vorticoso en la estela se determina a partir del desplazamiento de sus nodos

extremos. En este sentido, la posición de un nodo arbitrario en el instante  $t + \Delta t_a$  se calcula por,

$$\mathbf{x}_i(t + \Delta t_a) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(\mathbf{X}, t)\Delta t_a, \quad \mathbf{v}_i(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_i(\mathbf{X}, t) \quad (6.57)$$

donde  $\mathbf{v}_i(\mathbf{X}, t)$  es la velocidad local de una partícula que se sitúa sobre el nodo a desplazar. Esta velocidad resulta igual a la suma de la velocidad de la corriente libre  $\mathbf{V}_\infty$  y de la velocidad inducida  $\mathbf{V}_i(\mathbf{X}, t)$  por los segmentos vorticosos de las SVAs y SVLs. Luego, admitiendo que  $\mathbf{V}_\infty > \mathbf{V}_i(\mathbf{X}, t)$  se deduce que el paso de tiempo para el modelo aerodinámico se puede aproximar mediante:

$$L_{SVA} \cong L_{SVL} \cong \|\mathbf{x}_i(t + \Delta t_a) - \mathbf{x}_i(t)\| = \|\mathbf{v}_i(\mathbf{X}, t)\|\Delta t_a \cong \|\mathbf{V}_\infty\|\Delta t_a \quad (6.58)$$

De donde surge:

$$\Delta t_a = \frac{L_{SVA}}{\|\mathbf{V}_\infty\|} \quad (6.59)$$

La expresión anterior asume dos cosas, que  $L_{SVL} \cong \|\mathbf{x}_i(t + \Delta t) - \mathbf{x}_i(t)\|$  y que  $\|\mathbf{V}_i(\mathbf{X}, t)\| \cong \|\mathbf{V}_\infty\|$ .

Como se detalló al comienzo de la sección 6.3, la ecuación (6.36) impone una restricción adicional sobre los pasos de tiempo de ambos modelos. Esta restricción establece que el paso de tiempo aerodinámico debe ser un número entero de veces mayor al paso de tiempo estructural. Una manera de satisfacer esta condición consiste en modificar el parámetro  $\alpha$  de (6.55) tal que se reduzca el paso de tiempo estructural al valor más próximo que cumpla con (6.36).

## 6.4 Estimación de la velocidad de flutter

La respuesta electroaeroelástica de una estructura piezoeléctrica de vigas se obtiene efectuando simulaciones numéricas en el dominio del tiempo. El objetivo principal es predecir la velocidad de la corriente libre, denominada velocidad crítica o de *flutter*, a partir de la cual se manifiesta el fenómeno aeroelástico *flutter*. Una vez estimada dicha velocidad se puede evaluar el desempeño electroaeroelástico de la estructura para velocidades subcríticas y/o poscríticas.

La determinación de la velocidad de *flutter* se basa en un proceso manual de prueba y error que consiste en efectuar simulaciones numéricas para diferentes velocidades de la corriente libre y analizar en cada caso el comportamiento del sistema. El propósito es estimar la velocidad del aire para la cual la respuesta temporal de los grados de libertad del sistema deja de amortiguarse y se sostiene en el tiempo, describiendo un ciclo límite. La duración temporal de las simulaciones no puede ser estimada con facilidad, no obstante su duración debe permitir una caracterización de la respuesta del sistema. El proceso se inicia para velocidades bajas del aire, las cuales se van incrementando progresivamente en función de la respuesta observada. En cercanías de la

velocidad crítica suele ser necesario incrementar la velocidad del fluido en menor proporción ya que un pequeño cambio de velocidad puede modificar drásticamente la estabilidad del sistema.

Las simulaciones se sustentan en el hecho de que en todo instante  $t < 0$  la estructura se encuentra en reposo, mientras que en  $t = 0$  se la expone repentinamente ante una corriente de aire que provoca un arranque impulsivo. En general, se introduce una perturbación inicial sobre el sistema para desplazar a la estructura de su posición de equilibrio estable. La perturbación puede corresponderse a una condición inicial, desplazamiento y/o velocidad, aplicada sobre la estructura o bien a una componente adicional de velocidad del aire que se superpone a la velocidad de la corriente libre. Esta última se aplica durante una determinada cantidad de pasos de tiempo aerodinámicos y luego se elimina. Durante el resto de la simulación la velocidad del fluido permanece constante en dirección, sentido y módulo. Es importante destacar que no se aplica ninguna condición inicial sobre las variables eléctricas.

# Apéndices

## 6.A Rotación de matrices y vectores elementales

Para modelar una estructura compuesta por múltiples vigas con orientaciones arbitrarias se necesita expresar a las propiedades electroelásticas de cada una de ellas respecto a la misma referencia. En este sentido, considérese a la viga de eje recto de la Figura 2.2 como parte integral de una estructura. Teniendo en cuenta que las propiedades de la viga están representadas por las matrices y vectores elementales de los diferentes elementos finitos usados en su discretización, se deben rotar estas entidades desde su sistema de referencia local  $(X_1, X_2, X_3)$  hacia el sistema de referencia global  $(X_1^G, X_2^G, X_3^G)$ . Las bases ortonormales y dextrógiras asociadas a estos dos sistemas se relacionan entre sí a través del tensor de rotación constante  $\mathbf{\Lambda}_c \in SO(3)$ . Por lo tanto, este tensor es la herramienta a emplear para efectuar la transformación de coordenadas que se busca.

El vector de grados de libertad nodal  $\boldsymbol{\eta}_e(t)$  expresado en el sistema de referencia global se obtiene considerando la ecuación (4.69) y está dado por,

$$\boldsymbol{\eta}_G(t) = \check{\check{\mathbf{\Lambda}}}_c \boldsymbol{\eta}_e(t), \quad (6.A.1)$$

donde  $\check{\check{\mathbf{\Lambda}}}_c \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  es un tensor diagonal constante cuya versión explícita es:

$$\check{\check{\mathbf{\Lambda}}}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_c \end{bmatrix} \quad (6.A.2)$$

De la ecuación anterior se deduce que cada tensor ubicado sobre la diagonal principal se utiliza para transformar las tres componentes de los desplazamientos o las tres componentes de los giros de cada nodo del elemento. Por otra parte, la rotación de la matriz de masa se obtiene despejando a  $\boldsymbol{\eta}_e(t)$  de la ecuación (6.A.1) y sustituyendo la expresión resultante en la variación de la energía cinética. De ello se obtiene:

$$\delta T^e = \frac{d}{dt} \delta \boldsymbol{\eta}_G^T(t) \check{\check{\mathbf{\Lambda}}}_c \mathbf{M}_e \check{\check{\mathbf{\Lambda}}}_c^T \frac{d}{dt} \boldsymbol{\eta}_G(t) \quad (6.A.3)$$

Luego, comparando (6.A.3) con (4.96) se infiere que la matriz de masa global  $\mathbf{M}_G$  se determina de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}_G = \check{\mathbf{\Lambda}}_c \mathbf{M}_e \check{\mathbf{\Lambda}}_c^T \quad (6.A.4)$$

Un procedimiento análogo se puede repetir sobre la variación de la energía elástica de deformación y sobre el primer término de la variación de la energía electromecánica. De ello resulta,

$$\begin{aligned} \delta U_e^e &= \delta \boldsymbol{\eta}_G^T(t) \check{\mathbf{\Lambda}}_c \mathbf{K}_e^e \check{\mathbf{\Lambda}}_c^T \boldsymbol{\eta}_G(t) + \delta \boldsymbol{\eta}_G^T(t) \check{\mathbf{\Lambda}}_c \mathbf{K}_g^e(\boldsymbol{\eta}_e) \check{\mathbf{\Lambda}}_c^T \boldsymbol{\eta}_G(t) \\ \delta U_{em}^e &= \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\eta}_G^T(t) \check{\mathbf{\Lambda}}_c {}_i\mathbf{K}_l^e \check{\mathbf{\Lambda}}_c^T \boldsymbol{\eta}_G(t) + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\eta}_G^T(t) \check{\mathbf{\Lambda}}_c {}_i\mathbf{K}_{nl}^e(\boldsymbol{\eta}_e) \check{\mathbf{\Lambda}}_c^T \boldsymbol{\eta}_G(t) + \dots \end{aligned} \quad (6.A.5)$$

Por consiguiente, si se compara la expresión anterior con las ecuaciones (4.102) y (4.111) se deduce que la matriz de rigidez elástica global  $\mathbf{K}_e^G$ , la matriz de rigidez geométrica global  $\mathbf{K}_g^G(\boldsymbol{\eta}_e)$  y las matrices globales de rigidez inducida  ${}_i\mathbf{K}_k^G$  ( $k = l, nl$ ) se obtienen efectuando las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^G &= \check{\mathbf{\Lambda}}_c \mathbf{K}_e^e \check{\mathbf{\Lambda}}_c^T, \quad \mathbf{K}_g^G(\boldsymbol{\eta}_e) = \check{\mathbf{\Lambda}}_c \mathbf{K}_g^e(\boldsymbol{\eta}_e) \check{\mathbf{\Lambda}}_c^T, \quad {}_i\mathbf{K}_l^G = \check{\mathbf{\Lambda}}_c {}_i\mathbf{K}_l^e \check{\mathbf{\Lambda}}_c^T \\ {}_i\mathbf{K}_{nl}^G(\boldsymbol{\eta}_e) &= \check{\mathbf{\Lambda}}_c {}_i\mathbf{K}_{nl}^e(\boldsymbol{\eta}_e) \check{\mathbf{\Lambda}}_c^T \end{aligned} \quad (6.A.6)$$

Teniendo en cuenta que la matrices  $\mathbf{K}_g^e(\boldsymbol{\eta}_e)$  y  ${}_i\mathbf{K}_{nl}^e(\boldsymbol{\eta}_e)$  fueron derivadas en el sistema de referencia local y que son función de las variables nodales locales, éstas deben ser evaluadas previo a la rotación. Por otra parte, para rotar las matrices de acoplamiento electromecánico se opera sobre los términos restantes de la variación de la energía electromecánica efectuando un procedimiento similar al de los dos casos anteriores. En este sentido, se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta U_{em}^e &= \dots + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\eta}_G^T(t) \check{\mathbf{\Lambda}}_c {}_e\boldsymbol{\Theta}_l \boldsymbol{\varphi}_j(t) + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\eta}_G^T(t) \check{\mathbf{\Lambda}}_c {}_e\boldsymbol{\Theta}_{nl}(\boldsymbol{\eta}_e) \boldsymbol{\varphi}_j(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(t) {}_e\boldsymbol{\Theta}_l^T \check{\mathbf{\Lambda}}_c^T \boldsymbol{\eta}_G(t) + \frac{1}{4} \delta \boldsymbol{\varphi}_j^T(t) {}_e\boldsymbol{\Theta}_{nl}^T(\boldsymbol{\eta}_e) \check{\mathbf{\Lambda}}_c^T \boldsymbol{\eta}_G(t) \end{aligned} \quad (6.A.7)$$

En consecuencia, contrastando la expresión predecesora con la ecuación (4.110) se infiere que la matriz de acoplamiento lineal  ${}_g\boldsymbol{\Theta}_l$  y no lineal  ${}_g\boldsymbol{\Theta}_{nl}(\boldsymbol{\eta}_e)$  expresadas en el sistema de referencia global están dadas por:

$${}_g\boldsymbol{\Theta}_l = \check{\mathbf{\Lambda}}_c {}_e\boldsymbol{\Theta}_l, \quad {}_g\boldsymbol{\Theta}_{nl}(\boldsymbol{\eta}_e) = \check{\mathbf{\Lambda}}_c {}_e\boldsymbol{\Theta}_{nl}(\boldsymbol{\eta}_e) \quad (6.A.8)$$

En lo que respecta a la matriz de rigidez eléctrica inducida y a la matriz de acoplamiento inducido se opera sobre la ecuación (4.117) resultando:

$$\delta W_d^{*e} = \dots + \delta \boldsymbol{\eta}_G^T(t) \check{\mathbf{\Lambda}}_c {}_e\boldsymbol{\Theta}_i \boldsymbol{\varphi}_j(t) + \delta \boldsymbol{\eta}_G^T(t) \check{\mathbf{\Lambda}}_c {}_i\mathbf{K}_e^e \check{\mathbf{\Lambda}}_c^T \boldsymbol{\eta}_G(t) \quad (6.A.9)$$

Por consiguiente, comparando la expresión anterior con la ecuación (4.117) se deduce que la matriz global de acoplamiento inducido  ${}_g\boldsymbol{\Theta}_i$  y la matriz de rigidez eléctrica inducida global

${}_i\mathbf{K}_e^{\mathcal{G}}$  son:

$${}_{\mathcal{G}}\Theta_i = \check{\Lambda}_c {}_e\Theta_i, \quad {}_i\mathbf{K}_e^{\mathcal{G}} = \check{\Lambda}_c {}_i\mathbf{K}_e^e \check{\Lambda}_c^T \quad (6.A.10)$$

Nótese que, a pesar de tener estructura matricial, cada una de las matrices que representan al acoplamiento electromecánico se transforman como vectores. Además, como el acoplamiento no lineal es función de las variables nodales locales, éste debe ser evaluado antes de ser transformado. Por otra parte, es fundamental destacar que el vector de potenciales  $\varphi_j(t)$  no debe rotarse ya que no reviste carácter vectorial sino que fue construido a partir de variables de parámetro concentrado con la finalidad de obtener una notación mas compacta. De manera similar sucede con las matrices de capacitancia total  $\mathbf{C}_j^e$ , de inductancia  $\mathbf{L}_j^e$  y de resistencia  $\mathbf{R}_j^e$ . Finalmente, los vectores de carga en el sistema global,  $\mathbf{F}_{\mathcal{G}}(t)$  y  $\mathbf{M}_{\mathcal{G}}(t)$ , se rotan de forma similar al vector de grados de libertad nodal y resultan:

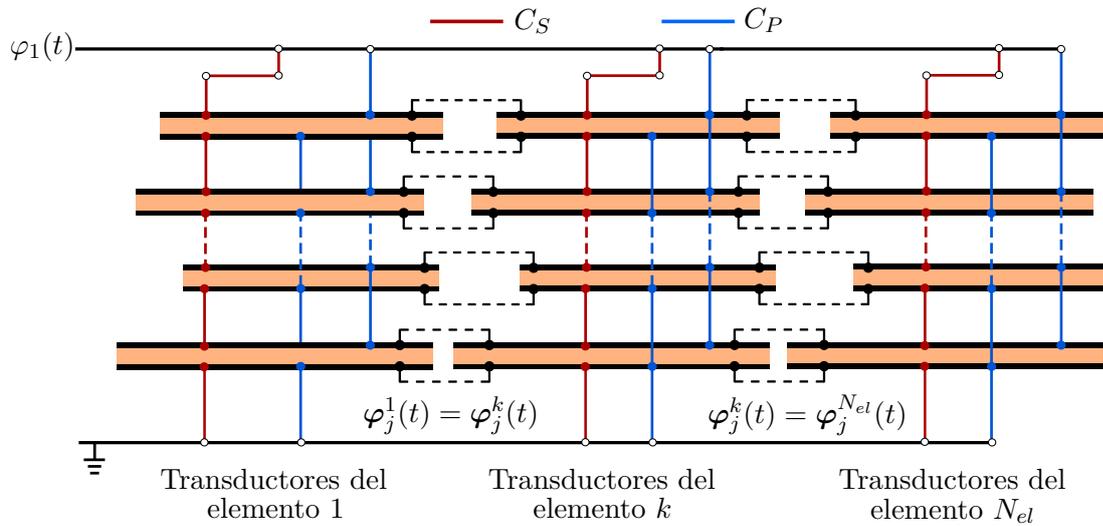
$$\mathbf{F}^{\mathcal{G}}(t) = \check{\Lambda}_c \mathbf{f}_e(t), \quad \mathbf{M}^{\mathcal{G}}(t) = \check{\Lambda}_c \mathbf{m}_e(t) \quad (6.A.11)$$

## 6.B Conexión eléctrica entre transductores

De acuerdo a lo expuesto en el Capítulo 4, cada elemento finito esta compuesto por una cantidad arbitraria de transductores y por un único circuito eléctrico, por lo tanto, si una viga se divide en  $N_{el}$  elementos finitos habrá  $N_{el}$  circuitos. En la mayoría de los casos prácticos, la longitud de las láminas piezoeléctricas utilizadas no coincide con la longitud de los elementos finitos, siendo superior a la de estos últimos en la mayoría de los casos. A pesar de ello, esta situación se encuentra supeditada a la cantidad de elementos empleados en la discretización. Para modelar tal circunstancia se necesita conectar, en términos de los potenciales eléctricos, a los transductores de todos los elementos cubiertos por las mismas láminas de tal manera de garantizar la continuidad eléctrica. En este sentido, se imponen las siguientes condiciones: *i*) todos los elementos a conectar deben tener la misma cantidad de transductores, *ii*) la conexión se efectúa entre transductores de idéntica numeración elemental y, *iii*) la conexión, serie o paralelo, entre transductores a nivel elemental debe ser la misma para todos los elementos a conectar.

Para ejemplificar lo comentado en el párrafo anterior se considera una viga discretizada por  $N_{el}$  elementos finitos, compuesta por  $n_t$  transductores embebidos que tienen una longitud idéntica a la de la viga. Inicialmente, la cantidad circuitos eléctricos es igual al número de elementos y son descritos por los vectores  $\varphi_j^k(t)$  (con  $k = 1, \dots, N_{el}$  y  $j = s$  o  $j = p$ ). Luego, la condición a imponer para garantizar la conexión entre todos los elementos se expresa de la siguiente manera,

$$\varphi_j^1(t) = \varphi_j^2(t) = \dots = \varphi_j^k(t) = \dots = \varphi_j^{N_{el}-1}(t) = \varphi_j^{N_{el}}(t) = \varphi_j(t), \quad (6.B.1)$$



**Figura 6.B.1:** Conexión eléctrica entre transductores de elementos diferentes.

donde el vector de potenciales  $\varphi_j(t)$  es el vector común a todos los elementos y es quien permite evaluar la respuesta eléctrica del único circuito que resulta de la conexión. Una interpretación gráfica de la conexión indicada en la ecuación (6.B.1) se expone en la Figura 6.B.1, la cual presenta a los transductores que integran las secciones transversales de tres elementos finitos de la viga. La conexión entre los transductores de estos elementos se indica mediante líneas discontinuas de color negro. Por otra parte, es importante destacar que la vinculación eléctrica entre transductores de diferentes elementos también modifica las matrices de acoplamiento electromecánico del modelo global. Esto simplemente se tiene en cuenta sustituyendo la ecuación (6.B.1) en el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna a la viga dado por (6.21).

Un comentario adicional merecen las matrices de capacitancia total, de inductancia y de resistencia. Según se observa en la ecuación (4.135), la primera de estas matrices se obtiene sumando la capacitancia inherente a los piezocerámicos y la capacitancia externa. Al efectuar la conexión eléctrica, sólo la capacitancia inherente se ve afectada por esta conexión. En tanto que, las matrices representativas de la capacitancia, de la resistencia y de la inductancia externas no se ven alteradas ya que deben construirse luego de efectuar la conexión. Es decir, deben ignorarse cuando se sustituye (6.B.1) en (6.21).

## Resultados numéricos

En este capítulo se presenta y se describe un conjunto de casos de estudio que tienen como finalidad exhibir la potencialidad de la herramienta numérica desarrollada en esta tesis. En este sentido, se definen dos secciones, en la primera de ellas se agrupan cuatro casos de estudio que se utilizan para validar y verificar el modelo electroaeroelástico. En la segunda sección se presentan dos casos de aplicación, uno de los cuales consiste de un cosechador de energía aeroelástico de pequeñas dimensiones y el restante involucra cosechadores de energía embebidos en la estructura de un ala multifuncional altamente flexible.

Cada uno de los casos analizados se estructura en tres partes: *i*) en la primera de ellas se efectúa una descripción conceptual del caso, incluyendo la información necesaria para reproducir los resultados; *ii*) en la segunda parte se detallan y se describen los resultados numéricos que se obtienen empleando la herramienta computacional; y, *iii*) en la tercera se discuten estos resultados y se exponen conclusiones al respecto.

En lo que sigue, se referirá mediante el acrónimo MD - No Lineal a la versión no lineal del modelo desarrollado en este trabajo. En tanto que, se utilizará el acrónimo MD - Lineal para referirse a la versión linealizada del mismo.

Todas las simulaciones se efectuaron usando una computadora de escritorio equipada con: procesador Intel Core I7 12700K, 16 GB de memoria Ram DDR4 a 3200 MHz, disco de estado sólido de 500 GB y placa madre MSI B660M Bazooka S1700.

## 7.1 Validación y verificación del modelo

### 7.1.1 Caso 1: Estructura de vigas en forma de L

#### Descripción

El presente caso de estudio tiene como propósito verificar el modelo estructural. Para ello, se pone en consideración una estructura tridimensional que conceptualmente se idealiza en la Figura 7.1a. Según se observa, está compuesta por dos vigas de aluminio 2024-T3 dispuestas en forma de L y contenidas en el plano formado por los ejes  $X_1^G$  y  $X_2^G$ . La sección transversal de ambas vigas es idéntica y se esquematiza en la Figura 7.1c, posee geometría cuadrada y se mantiene constante a lo largo del eje longitudinal (eje elástico) de cada una de ellas. Las vigas poseen dos nodos extremos, uno de los cuales se encuentra empotrado y el restante es compartido por ambas. En el nodo que tienen en común, denotado por A, actúa en la dirección de los ejes coordenados globales  $(X_1^G, X_2^G, X_3^G)$  un sistema de fuerzas que tiene el siguiente comportamiento temporal:

$$\mathbf{F}_1(t) = -F_1 \sin(\omega_1 t) \hat{\mathbf{g}}_1 ; \mathbf{F}_2(t) = F_1 \sin(\omega_1 t) \hat{\mathbf{g}}_2 ; \mathbf{F}_3(t) = F_2 \sin(\omega_2 t) \hat{\mathbf{g}}_3, \quad (7.1)$$

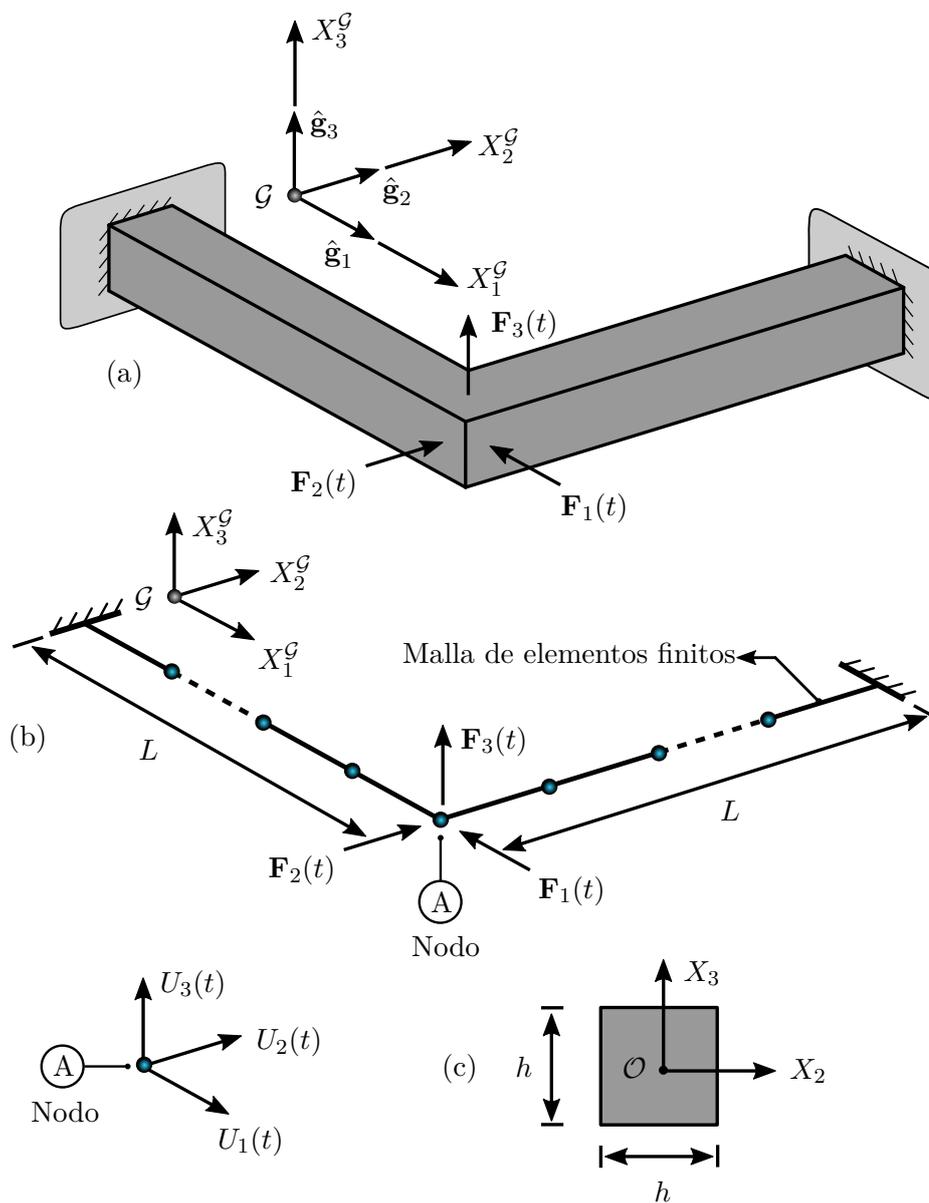
donde  $\{\hat{\mathbf{g}}_1, \hat{\mathbf{g}}_2, \hat{\mathbf{g}}_3\}$  es una base ortonormal dextrógira asociada al sistema global. Las dimensiones de la sección y de la estructura junto a la magnitud  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) y frecuencia  $\omega_i$  de las fuerzas se sintetizan en la Tabla 7.1, en tanto que las propiedades mecánicas del aluminio se detallan en la Tabla C.2 del Anexo C. Por otra parte, en la Figura 7.1b se presenta la discretización de la estructura tridimensional mediante elementos finitos, donde cada una de las vigas se divide utilizando 10 elementos de idéntica longitud. En virtud de la discretización adoptada, el modelo posee un total de 138 grados de libertad geométricos y no tiene amortiguamiento.

Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
$h$	0.1	m	$F_1$	150000	N
$L$	1	m	$F_2$	500000	N
			$\omega_1$	$20\pi$	rad/s
			$\omega_2$	$10\pi$	rad/s

**Tabla 7.1:** Propiedades geométricas de la estructura junto a la magnitud y frecuencia de las fuerzas.

MD - Lineal			MD - No Lineal		
Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
$\Delta t_s$ (20 Modos)	$1.0 \times 10^{-5}$	s	$\Delta t_s$	$7.0 \times 10^{-8}$	s

**Tabla 7.2:** Parámetros usados en las simulaciones numéricas.



**Figura 7.1:** Estructura formada por dos vigas dispuestas en forma de L: (a) modelo conceptual; (b) modelo computacional; (c) sección transversal.

El comportamiento temporal de la estructura se determina integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento. Esto se efectúa considerando tanto el MD - Lineal como el MD - No Lineal. Para tal fin, en la Tabla 7.2 se resumen los parámetros que caracterizan a las simulaciones. Puede advertirse que el paso de tiempo que se utiliza en cada modelo es diferente, lo cual se debe a que en el MD - Lineal las ecuaciones de gobierno se reducen empleando los primeros 20 modos de vibrar, mientras que en el MD - No Lineal no se aplica ninguna técnica de reducción de orden.

## Resultados

Los resultados que se exponen a continuación se componen de dos partes, por un lado se realiza un estudio de convergencia de malla a partir de las frecuencias naturales de vibrar y, por otro lado se presenta la respuesta temporal de la estructura cuando se la somete al sistema de fuerzas caracterizado por la ecuación (7.1). Los resultados computados con la herramienta numérica desarrollada son contrastados con aquellos que se obtienen utilizando la versión estudiantil del software Ansys® 2022 R1.

**Tabla 7.3:** Evolución de las frecuencias naturales con el número de elementos.

$N_{el}$	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]	$f_6$ [Hz]	$f_7$ [Hz]	$f_8$ [Hz]
2	99.04	468.09	498.58	889.59	778.16	1215.41	1580.77	1642.75
4	94.21	365.02	382.11	527.92	543.43	1065.45	1074.41	1184.68
6	93.37	351.03	366.78	493.15	518.82	1015.75	1038.70	1095.92
8	93.08	346.42	361.75	482.28	510.76	995.41	1023.54	1065.28
10	92.95	344.33	359.47	477.44	507.11	985.68	1016.05	1051.36
12	92.88	343.21	358.25	474.86	505.16	980.33	1011.87	1043.88
14	92.83	342.54	357.52	473.33	503.98	977.09	1009.30	1039.40
16	92.81	342.11	357.05	472.33	503.22	974.97	1007.62	1036.51
18	92.79	341.81	356.72	471.66	502.71	973.52	1006.46	1034.53
20	92.77	341.60	356.49	471.18	502.34	972.49	1005.63	1033.11
Ansys	92.74	340.89	355.75	469.57	501.14	968.94	1002.76	1028.38

En lo que respecta al análisis de convergencia, en la Tabla 7.3 se presenta la evolución de las primeras ocho frecuencias naturales  $f_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) de la estructura en función del número de elementos finitos  $N_{el}$  con que se discretiza a cada viga. Es importante destacar que tales frecuencias fueron determinadas usando el MD - Lineal y resolviendo un problema de autovalores entre la matriz de rigidez elástica global y la matriz de masa global de la estructura. En la última fila de la Tabla 7.3 se tienen las frecuencias calculadas utilizando Ansys a partir de una discretización de 20 elementos finitos lineales por viga. Por otro lado, en la Tabla 7.4 se expone la diferencia absoluta porcentual  $D_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) para cada una de las frecuencia. Esta diferencia se computa calculando la relación porcentual entre el valor que adopta cada frecuencia para determinada discretización y el que adopta en la discretización predecesora. Por

**Tabla 7.4:** Diferencia absoluta porcentual entre frecuencias considerando dos discretizaciones consecutivas.

$N_{el}$	$D_1$ [%]	$D_2$ [%]	$D_3$ [%]	$D_4$ [%]	$D_5$ [%]	$D_6$ [%]	$D_7$ [%]	$D_8$ [%]
2	-	-	-	-	-	-	-	-
4	4.87	22.02	23.36	40.66	30.16	12.34	32.03	27.88
6	0.89	3.83	4.01	6.59	4.53	4.67	3.32	7.49
8	0.31	1.31	1.37	2.21	1.55	2.00	1.46	2.80
10	0.14	0.60	0.63	1.00	0.71	0.98	0.73	1.31
12	0.08	0.33	0.34	0.54	0.39	0.54	0.41	0.71
14	0.05	0.20	0.20	0.32	0.23	0.33	0.25	0.43
16	0.03	0.13	0.13	0.21	0.15	0.22	0.17	0.28
18	0.02	0.09	0.09	0.14	0.10	0.15	0.12	0.19
20	0.01	0.06	0.06	0.10	0.07	0.11	0.08	0.14
Ansysis	0.03	0.21	0.21	0.34	0.24	0.37	0.29	0.46

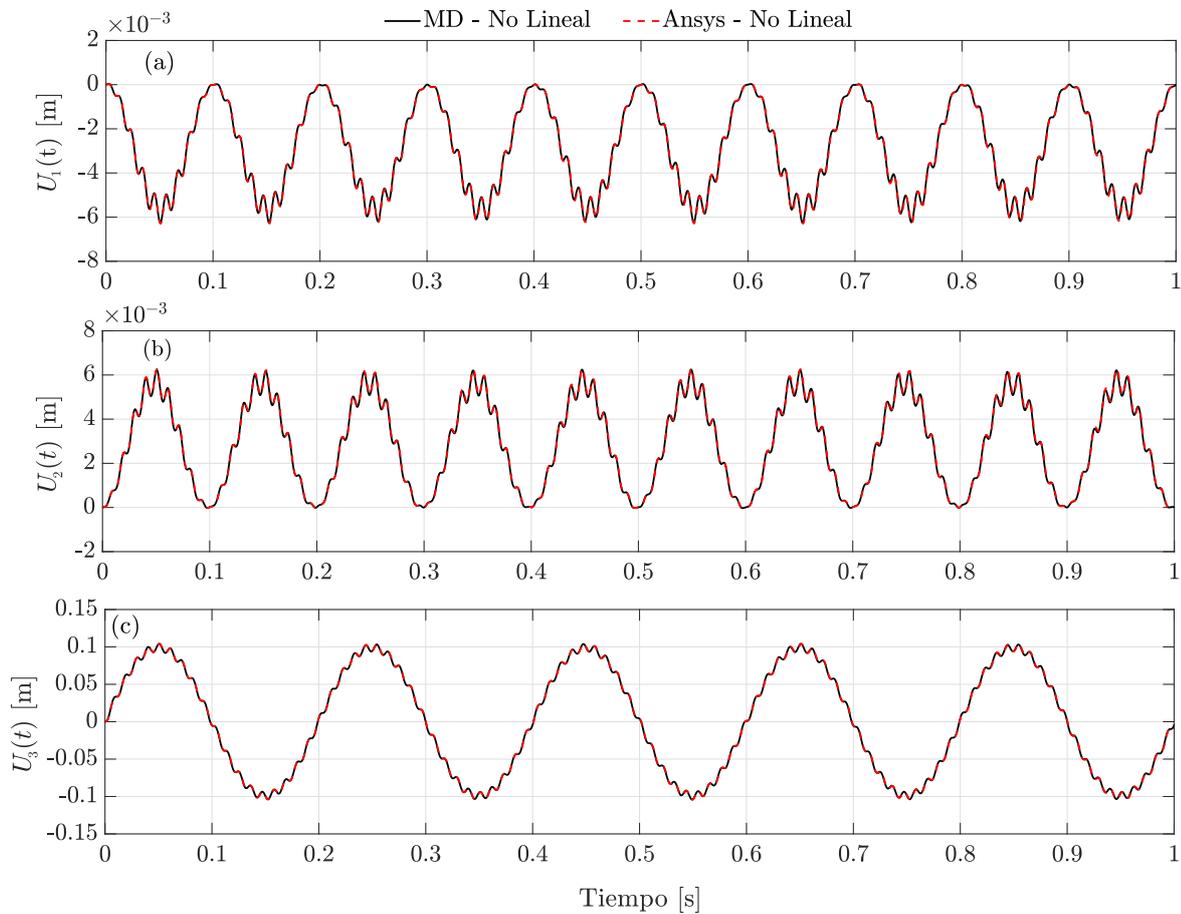
este motivo, la primera fila de la tabla no contiene ningún valor. A su vez, la última fila presenta la diferencia absoluta porcentual entre las frecuencias calculadas usando el MD - Lineal con 20 elementos por viga y las obtenidas con Ansys empleando la misma discretización.

En la Figura 7.2 se presenta la evolución temporal de las tres componentes  $U_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) del vector desplazamiento del nodo A. Tal como se observa, se grafica la respuesta obtenida utilizando el MD - No Lineal a la cual se le superpone el resultado obtenido a través de Ansys con la opción de grandes desplazamientos activada. Similarmente, en la Figura 7.3 se muestran las tres componentes del mismo vector en función del tiempo pero, en este caso, se exponen los resultados que surgen al emplear el MD - Lineal. Además, se los compara con aquellos obtenidos mediante Ansys manteniendo desactivada la opción de grandes desplazamientos y empleando una malla de 10 elementos por viga.

### Discusión de resultados y conclusiones

En términos generales, un análisis de las Tablas 7.3 y 7.4 permite inferir que a medida que se refina la malla de elementos finitos la magnitud de las frecuencias naturales tiende hacia un valor asintótico, es decir, muestran convergencia. Cuando la malla está compuesta por pocos elementos, los valores de las frecuencias cambian considerablemente con un pequeño cambio en la densidad de malla. En tal sentido, existe una diferencia del 40.7% cuando se compara el valor de  $f_4$  calculada con una malla de 2 y de 4 elementos por viga. Sin embargo, ésta se reduce considerablemente al densificar la malla, cayendo por debajo del 1% si se disponen más de 10 elementos por viga. A su vez, la diferencia entre las frecuencias obtenidas con Ansys y con el MD - Lineal para 20 elementos por viga se sitúa por debajo del 0.5%, lo cual es aceptable.

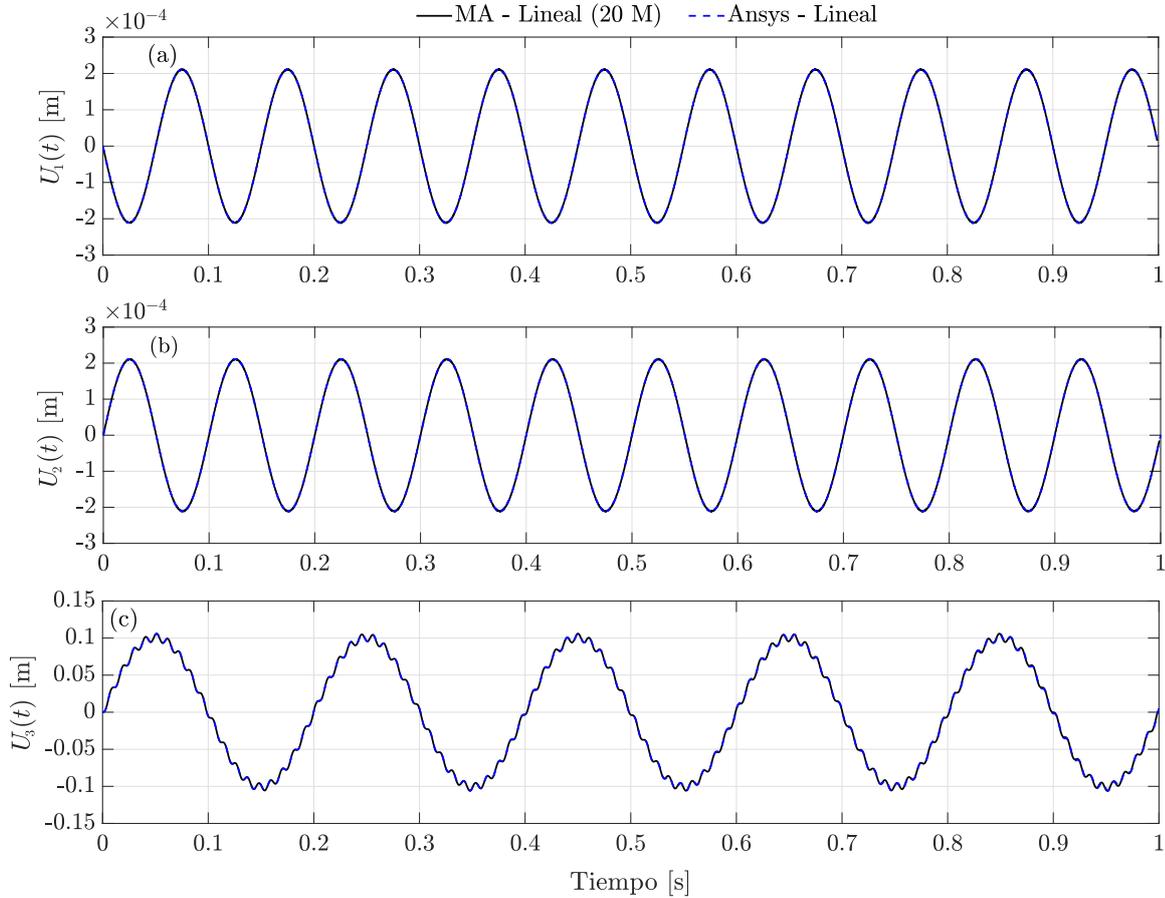
Con relación a la respuesta temporal de la estructura, las Figuras 7.2 y 7.3 permiten apreciar que existe un excelente acuerdo entre los resultados obtenidos con el MD y con Ansys,



**Figura 7.2:** Componentes del vector desplazamiento del nodo A en función del tiempo: (a) en dirección  $X_1^G$ ; (b) en dirección  $X_2^G$ ; (c) en dirección  $X_3^G$ .

tanto para el caso no lineal como para el lineal. Sin embargo, si se comparan visualmente las curvas que caracterizan a las componentes del vector desplazamiento  $U_1(t)$  y  $U_2(t)$  se puede notar que existen diferencias significativas entre lo predicho por el MD - No Lineal y por el MD - Lineal. Esta discrepancia se atribuye a que el MD - Lineal no tiene en cuenta el acoplamiento entre efectos axiales y flexionales que aparece al considerar las no linealidades de Von Kármán. Por otra parte, contrastando lo estimado con el MD - No Lineal y el Lineal para la componente transversal  $U_3(t)$  se puede advertir que no presentan diferencias considerables.

Como conclusión general del caso de estudio se puede afirmar que los resultados alcanzados son satisfactorios y fundamentales para la verificación estructural de la herramienta numérica desarrollada.



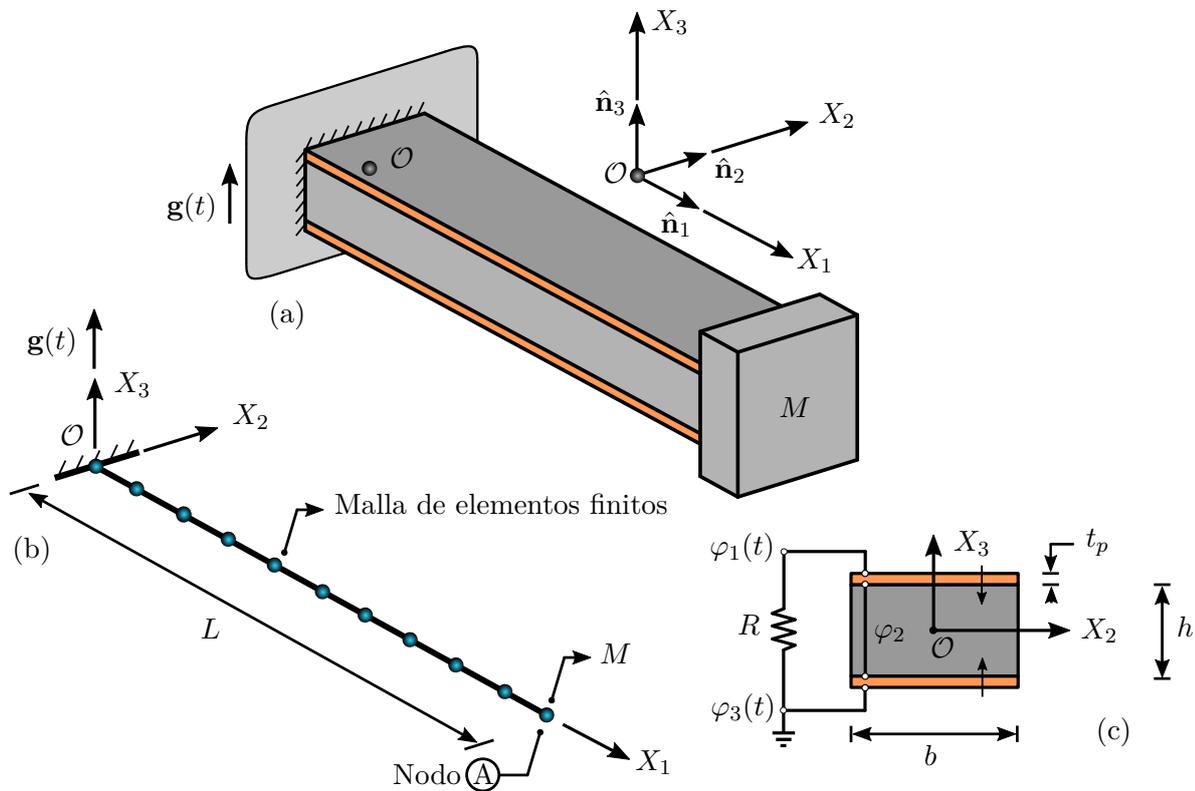
**Figura 7.3:** Componentes del vector desplazamiento del nodo A en función del tiempo: (a) en dirección  $X_1^G$ ; (b) en dirección  $X_2^G$ ; (c) en dirección  $X_3^G$ .

### 7.1.2 Caso 2: Cosechador piezoeléctrico en voladizo

#### Descripción

El objetivo del presente caso de estudio es validar y verificar el modelo electroelástico, tanto en su versión lineal como no lineal. En este sentido, se considera el cosechador piezoeléctrico de energía propuesto por Erturk en [42]. De acuerdo a la Figura 7.4a, éste se idealiza por medio de una viga en voladizo que está empotrada en uno de sus extremos y que presenta una masa puntual  $M$  en el restante. Para describir al modelo se introduce un sistema de coordenadas local fijo en el espacio  $(X_1, X_2, X_3)$  con origen en  $\mathcal{O}$  y una base ortonormal dextrógira asociada  $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$ . La excitación del sistema proviene de un desplazamiento armónico de base en la dirección  $\hat{\mathbf{n}}_3$  que se define de la siguiente manera,

$$\mathbf{g}(t) = G \sin(2\pi ft) \hat{\mathbf{n}}_3, \quad (7.2)$$



**Figura 7.4:** Cosechador de energía en voladizo: (a) modelo físico; (b) discretización por elementos finitos; (c) sección transversal.

donde  $G$  es la amplitud del desplazamiento y  $f$  su frecuencia. La viga se encuentra compuesta por un núcleo elástico de cobre y está recubierta en su totalidad por dos láminas idénticas de piezocerámica PZT-5A. La sección transversal se mantiene constante a lo largo del eje longitudinal  $X_1$  y su geometría se esquematiza en la Figura 7.4c. En ella, puede observarse que las dos láminas piezocerámicas se ubican de manera simétrica respecto de los ejes  $X_2$  y  $X_3$ . En lo que respecta al modelado de la conexión eléctrica entre transductores, fue necesario rotar a la lámina inferior alrededor del eje  $X_1$  con el fin de invertir el sentido del campo eléctrico de polarización. Luego, ambas se vincularon a través de una conexión en serie y se conectó un resistor de resistencia  $R$  entre los terminales del conjunto.

En la Tabla 7.5 se resumen las propiedades geométricas y másicas del cosechador, mientras que las propiedades mecánicas de los materiales involucrados se detallan en el Anexo C, en particular en las Tablas C.1 y C.3.

Por otra parte, en la Figura 7.4b se expone el modelo computacional del cosechador, esto es, su representación por medio de elementos finitos. En este sentido, la viga se discretiza mediante 10 elementos uniformemente distribuidos, lo que da lugar a un total de 60 grados de libertad geométricos y 2 grados de libertad eléctricos. La elección del número de elementos a emplear proviene de un análisis de convergencia que se efectuó a partir de las dos primeras

Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
$L$	50.8	mm	$t_p$	0.26	mm
$b$	31.8	mm	$M$	0.012	Kg
$h$	0.14	mm			

**Tabla 7.5:** Propiedades geométricas y másicas del cosechador.

MD - Lineal			MD - No Lineal		
Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
$\Delta t_s$ (10 Modos)	$1.0 \times 10^{-5}$	s	$\Delta t_s$	$7.0 \times 10^{-8}$	s
$\alpha$	11.31	1/s	$\alpha$	11.31	1/s
$\beta$	$5.0 \times 10^{-5}$	s	$\beta$	$5.0 \times 10^{-5}$	s

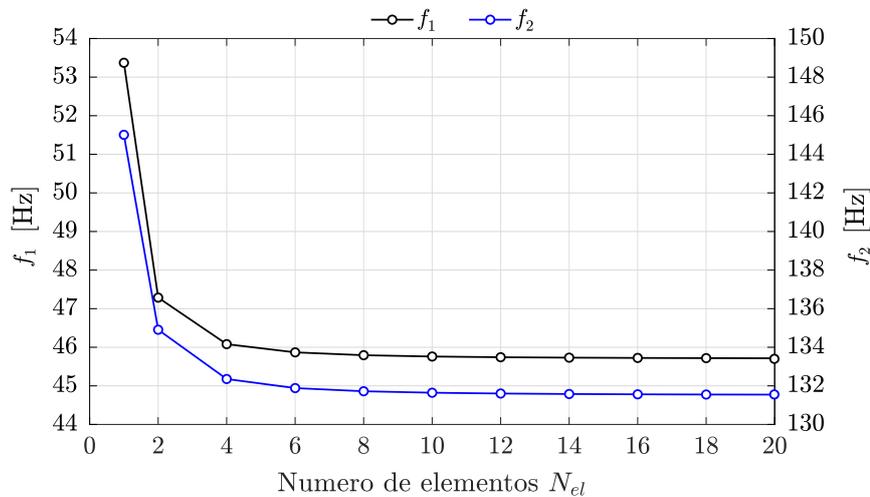
**Tabla 7.6:** Parámetros usados en las simulaciones numéricas.

frecuencias naturales de la viga, véase Figura 7.5. Teniendo presente que cada elemento es eléctricamente independiente, resulta imperioso imponer la condición dada por la ecuación (6.2) para garantizar la continuidad eléctrica.

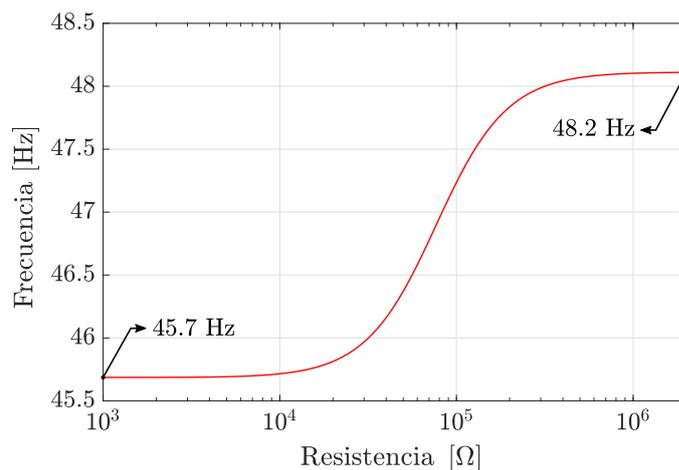
El comportamiento temporal del sistema resulta de integrar numéricamente sus ecuaciones rectoras. Al respecto, en la Tabla 7.6 se detallan los parámetros utilizados en las simulaciones, tanto para las efectuadas con el MD - Lineal como para aquellas realizadas con el MD - No Lineal. Puede notarse que existe una diferencia en el paso de tiempo  $\Delta t_s$  usado en cada modelo, lo cual obedece a que en el MD - Lineal se reduce el orden de las ecuaciones de movimiento adoptando los primeros 10 modos naturales de vibrar. Adicionalmente, se presentaron las dos constantes ( $\alpha$  y  $\beta$ ) que caracterizan el amortiguamiento proporcional que se introduce en el modelo. Estos valores fueron calculados a partir del factor de amortiguamiento del primer modo, el cual ha sido estimado en forma experimental y reportado por Erturk. Por último, las condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento se consideran nulas.

## Resultados

Los resultados que se presentan a continuación provienen de cuatro simulaciones, dos de ellas efectuadas con el MD - Lineal y dos con el MD - No Lineal. Para obtener resultados comparables con los publicados, las simulaciones se realizan considerando dos valores de resistencia diferentes, 1 [k $\Omega$ ] y 470 [k $\Omega$ ], y excitando al cosechador a su frecuencia fundamental. Tal como se expone en la literatura, la resistencia eléctrica modifica la rigidez estructural e incorpora amortiguamiento en el sistema [43]. Debido a esto, resulta esencial conocer cómo evoluciona la frecuencia fundamental con la resistencia y, en particular, obtener sus valores extremos. En este sentido, y siguiendo lo expuesto en [15], se grafica en la Figura 7.6 la variación de la primera frecuencia natural con la resistencia. A partir de ello se obtiene que la frecuencia fundamental del cosechador es de 45.7



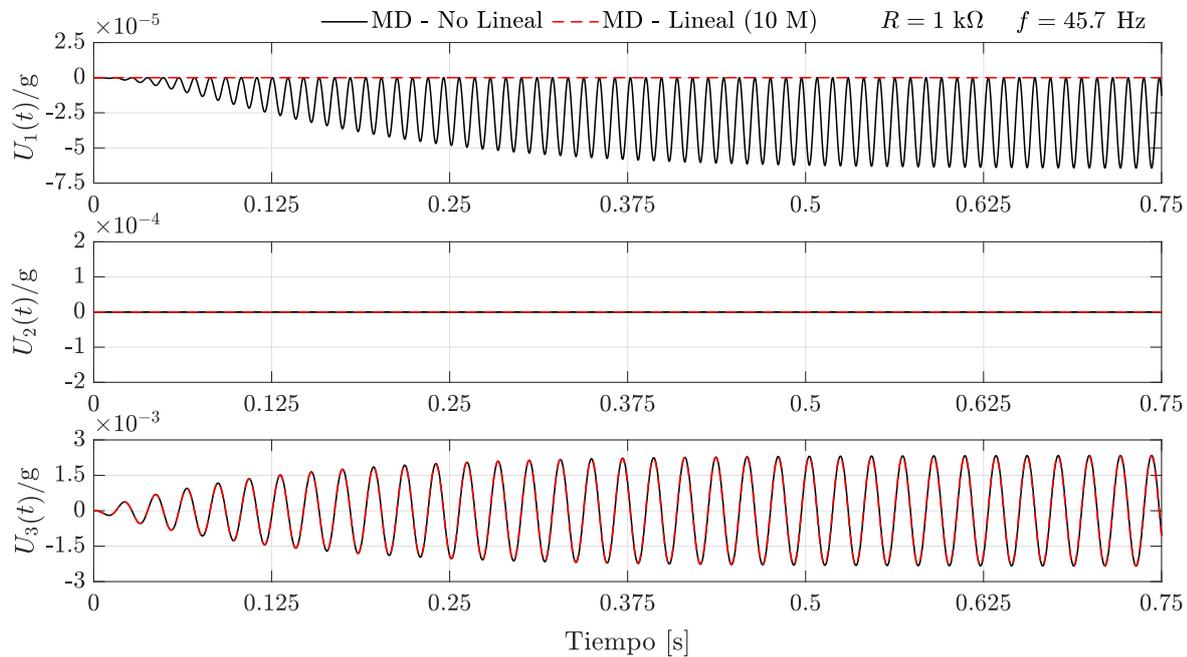
**Figura 7.5:** Evolución de las dos primeras frecuencias naturales de la viga sin considerar el circuito eléctrico en función del número de elementos.



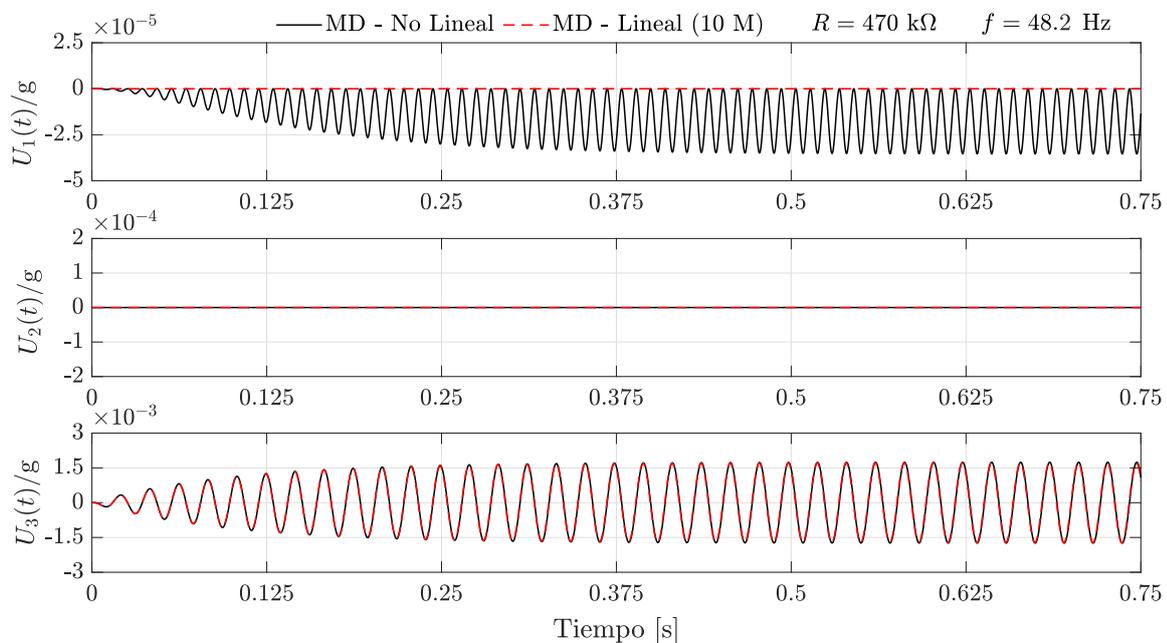
**Figura 7.6:** Frecuencia fundamental en función de la resistencia eléctrica.

[Hz] cuando se adopta una resistencia de 1 [kΩ] y de 48.1 [Hz] al emplear una resistencia de 470 [kΩ], situándose esta última muy próxima al valor extremo de 48.2 [Hz].

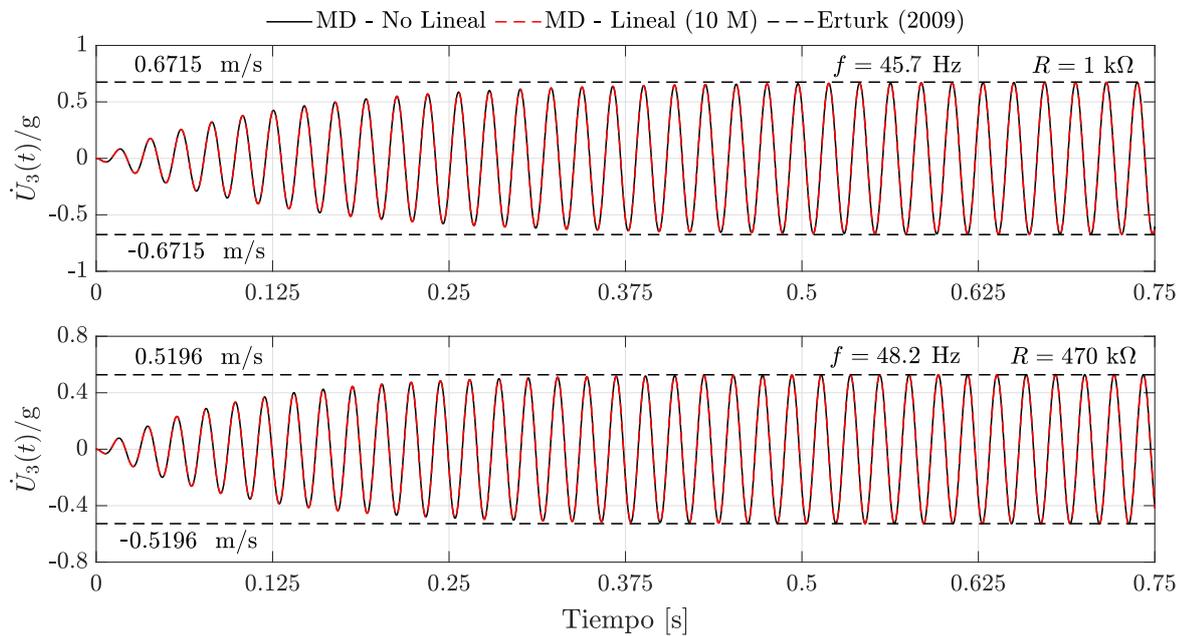
En la Figura 7.7 se expone la evolución en el tiempo de las tres componentes del vector desplazamiento  $U_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) del extremo libre de la viga (nodo A) en condición de resonancia para la resistencia de 1 [kΩ]. Tal como se indica en los gráficos, los resultados han sido obtenidos para una aceleración de base igual a  $1g$ , donde  $g$  es la aceleración gravitatoria. A su vez, debe advertirse que el subíndice  $i$  hace referencia al eje coordenado  $X_i$ . Similarmente, en la Figura 7.8 se presenta el comportamiento de las componentes  $U_i(t)$  en condición de resonancia pero adoptando la resistencia de 470 [kΩ]. Asimismo, en la Figura 7.9 se grafica el desempeño temporal de la componente del vector velocidad del nodo A cuya dirección es



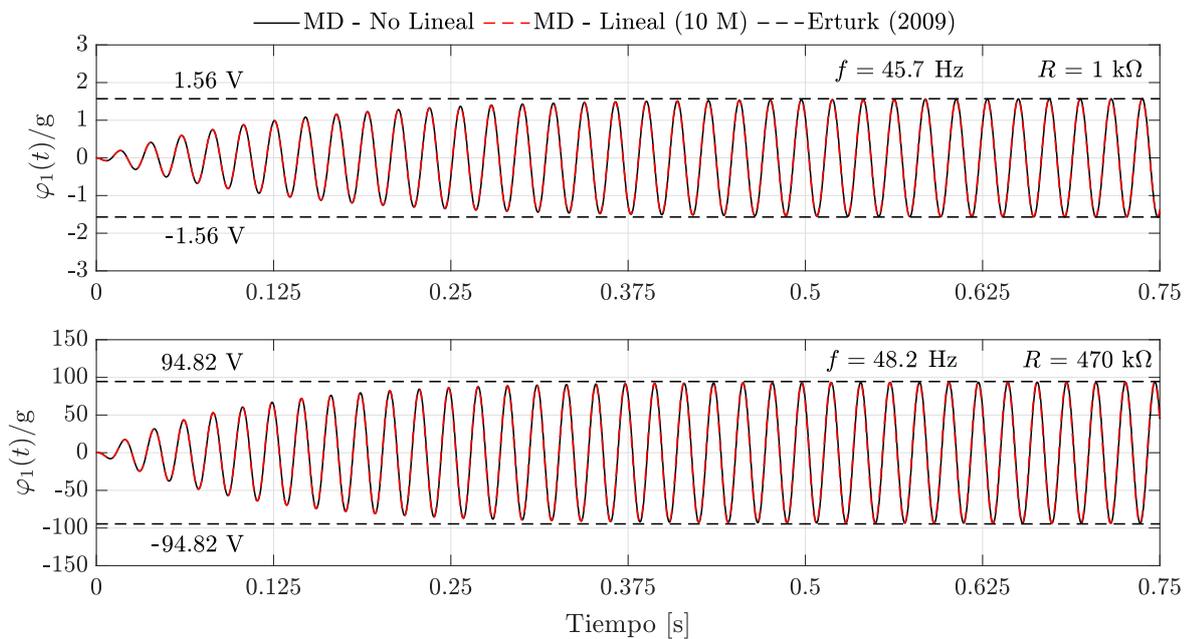
**Figura 7.7:** Componentes del vector desplazamiento del nodo A en función del tiempo para  $R = 1 \text{ [k}\Omega]$  y  $f = 45.7 \text{ [Hz]}$ .



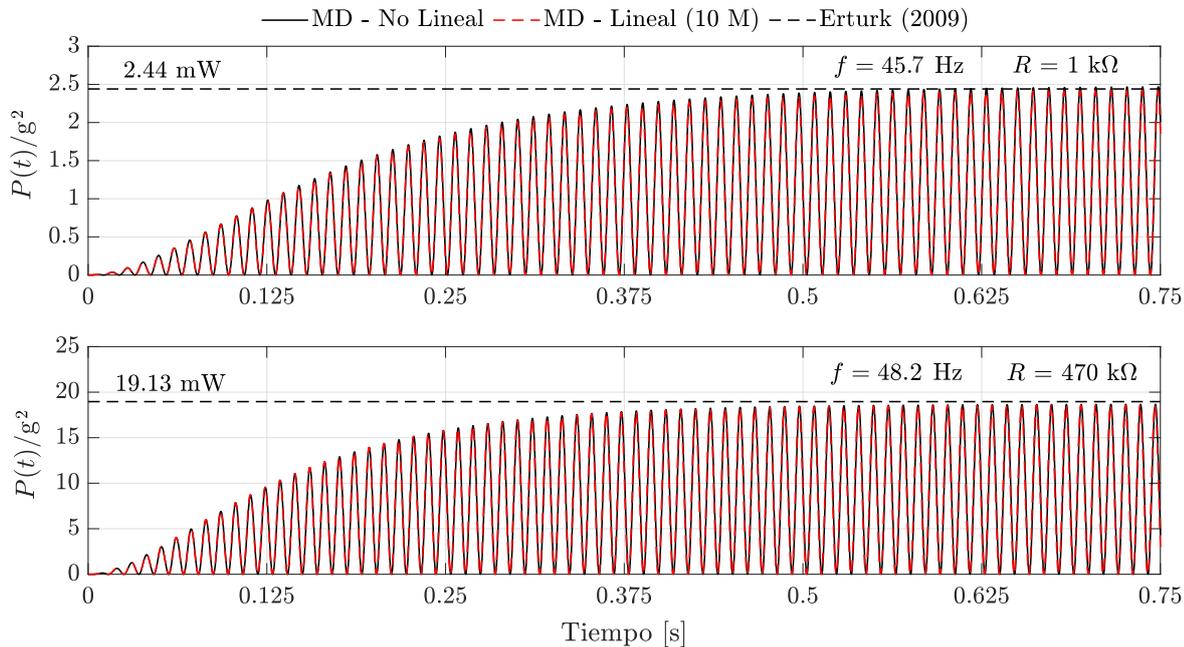
**Figura 7.8:** Componentes del vector desplazamiento del nodo A en función del tiempo para  $R = 470 \text{ [k}\Omega]$  y  $f = 48.2 \text{ [Hz]}$ .



**Figura 7.9:** Componente  $\dot{U}_3(t)$  del vector velocidad del nodo A en función del tiempo para  $R = 1 \text{ [k}\Omega]$  -  $f = 45.7 \text{ [Hz]}$  y para  $R = 470 \text{ [k}\Omega]$  -  $f = 48.2 \text{ [Hz]}$ .



**Figura 7.10:** Voltaje  $\varphi_1(t)$  en función del tiempo para  $R = 1 \text{ [k}\Omega]$  -  $f = 45.7 \text{ [Hz]}$  y para  $R = 470 \text{ [k}\Omega]$  -  $f = 48.2 \text{ [Hz]}$ .



**Figura 7.11:** Potencia  $P(t)$  en función del tiempo para  $R = 1 \text{ [k}\Omega\text{]}$  -  $f = 45.7 \text{ [Hz]}$  y para  $R = 470 \text{ [k}\Omega\text{]}$  -  $f = 48.2 \text{ [Hz]}$ .

coincidente con el eje  $X_3$  teniendo en cuenta ambos valores de resistencia. Por otro lado, en la Figura 7.10 se muestra la variación del voltaje entre los terminales del resistor en función del tiempo, incluyendo los dos valores de resistencia. Al mismo tiempo, en la Figura 7.11 se grafica el comportamiento temporal de la potencia eléctrica instantánea, la cual guarda una relación directa con el voltaje.

Claramente, los resultados que se detallan en el párrafo previo provienen de simulaciones numéricas ejecutadas en el dominio del tiempo. En contraste, Erturk evalúa el desempeño del cosechador en el dominio de la frecuencia, en forma numérica (modelo lineal) y experimental. Consecuentemente, los resultados que exhibe corresponden a las amplitudes que adoptan las variables de interés en estado estacionario. Con el propósito de contrastar lo reportado con lo exhibido en las Figuras 7.9 a 7.11, se grafica en ellas los valores analíticos de dichas amplitudes mediante líneas de trazo de color negro. Por cuestiones de espacio no se incluyeron los resultados experimentales.

### Discusión de resultados y conclusiones

En primer lugar, para reproducir los resultados publicados por Erturk se requiere conocer la variación de la frecuencia fundamental del cosechador con la resistencia. Al respecto, un análisis del gráfico presentado en la Figura 7.6 permite advertir que tal frecuencia está acotada por dos valores extremos que, en este caso, son 45.7 y 48.2 [Hz]. En la literatura, estos valores se refieren como frecuencia de cortocircuito y de circuito abierto, lo cual obedece a que se

corresponden con una resistencia muy baja y muy elevada, respectivamente. Al mismo tiempo, del gráfico se pueden extraer las frecuencias fundamentales para las dos resistencias puestas en consideración. Para la resistencia de 1 [k $\Omega$ ] esta frecuencia es idéntica a la de cortocircuito y para la resistencia de 470 [k $\Omega$ ] es igual a 48.1 [Hz], siendo esta última prácticamente igual a la de circuito abierto. Con relación a lo reportado por Erturk, se debe diferenciar entre las frecuencias extremas obtenidas analíticamente y de manera experimental. Las primeras de ellas son idénticas a las expuestas con anterioridad, en tanto que los valores reportados para las segundas son 45.6 y 48.4 [Hz]. Es decir, existe un excelente acuerdo entre lo publicado y lo obtenido con la herramienta numérica. A su vez, puede notarse que existe una diferencia inferior al 0.5 % entre lo estimado de manera analítica y experimental.

Para que los resultados sean comparables con los de Erturk, se excita al cosechador a 45.7 [Hz] para la resistencia de 1 [k $\Omega$ ] y a 48.2 [Hz] para la resistencia de 470 [k $\Omega$ ].

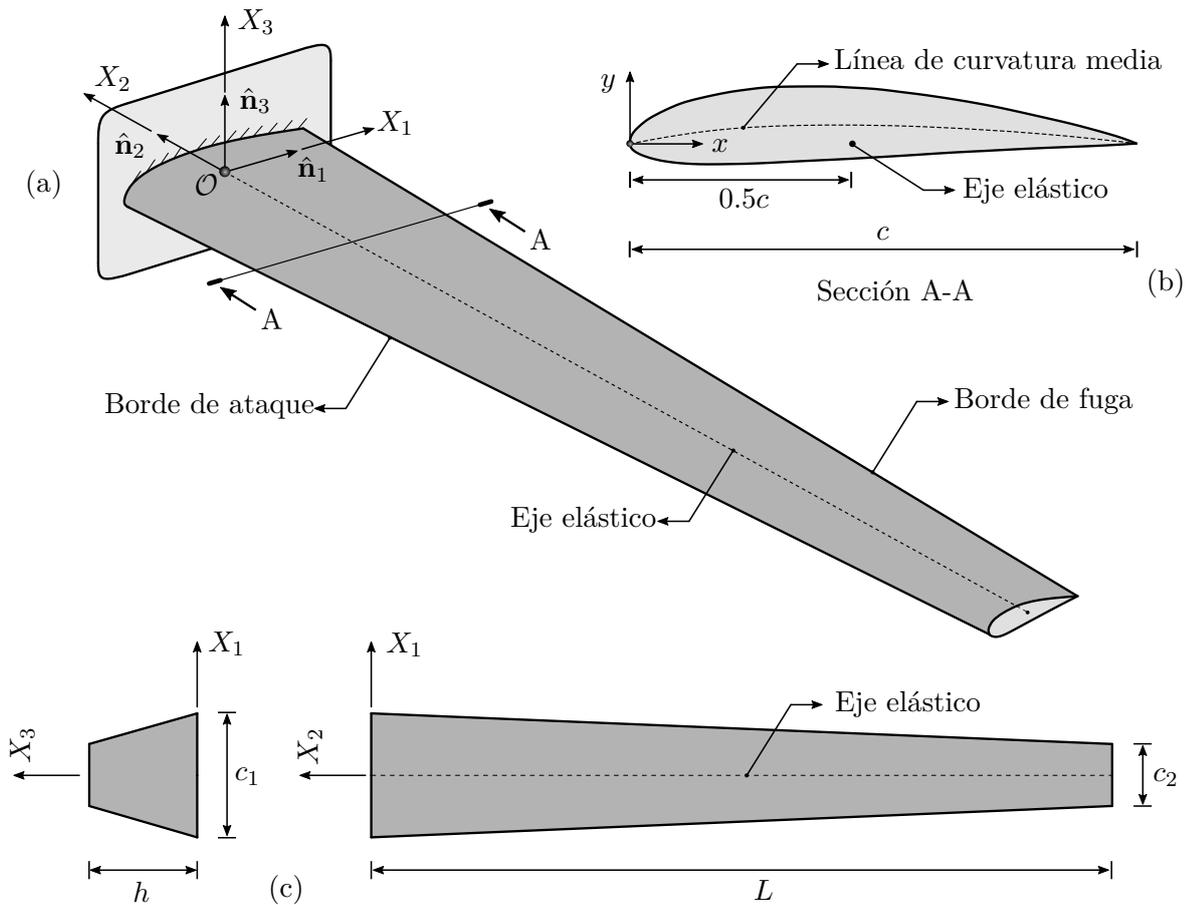
Con relación al desplazamiento del extremo libre de la viga expuesto en las Figuras 7.7 y 7.8 se pueden efectuar una serie de comentarios. En tal sentido, al analizar la evolución del desplazamiento axial  $U_1(t)$  se advierte que existen diferencias entre lo estimado con el MD - Lineal y con el No Lineal, hecho que se atribuye al acoplamiento entre efectos axiales y flexionales presentes en el MD - No Lineal. En concreto, el MD - Lineal no capta el acortamiento que sufre la viga como consecuencia de la flexión; en cambio, este efecto sí es captado por el MD - No Lineal. A su vez, debido a las características geométricas de la sección de la viga y a la dirección del desplazamiento de base, la componente transversal  $U_2(t)$  es nula para todo instante de tiempo, lo cual es predicho adecuadamente por ambos modelos. Además, al observar la variación en el tiempo del desplazamiento  $U_3(t)$  se infiere que no existen diferencias significativas entre lo estimado con el MD - Lineal y con el No Lineal. Por otro lado, es importante destacar que las amplitudes en estado estacionario de  $U_1(t)$  y de  $U_3(t)$  dependen del valor que posee la resistencia. En el caso de  $U_1(t)$ , la amplitud es igual a  $3.2 \times 10^{-5}$  [m] para 1 [k $\Omega$ ] e igual  $1.75 \times 10^{-5}$  [m] para 470 [k $\Omega$ ]. En tanto que, para  $U_3(t)$  la amplitud es igual a  $2.3 \times 10^{-3}$  [m] para 1 [k $\Omega$ ] e igual  $1.7 \times 10^{-3}$  [m] para 470 [k $\Omega$ ]. No se reportaron resultados de desplazamientos en [42].

En la Figura 7.9 se grafica la evolución temporal de la componente  $\dot{U}_3(t)$  del vector velocidad del nodo A. De manera similar a lo comentado en el párrafo previo, se observa que no existen diferencias sustanciales entre lo estimado con el MD - Lineal y con el No Lineal. La amplitud de  $\dot{U}_3(t)$  en estado de régimen es igual a 0.6738 [m/s] para una resistencia de 1 [k $\Omega$ ] y de 0.5285 [m/s] si se adopta una resistencia de 470 [k $\Omega$ ]. En este caso, es interesante comparar estos resultados contra los reportados por Erturk. Al respecto, con su modelo analítico estimó una amplitud de 0.6715 [m/s] para una resistencia de 1 [k $\Omega$ ] y de 0.5196 [m/s] para 470 [k $\Omega$ ]. Por otra parte, la amplitud medida en forma experimental es de 0.6959 [m/s] para una resistencia de 1 [k $\Omega$ ] y de 0.5418 [m/s] para la de 470 [k $\Omega$ ]. Si se comparan los resultados obtenidos con el MD contra los analíticos reportados por Erturk, se deduce que existe una diferencia del 0.3

% y del 1.7 % cuando se emplea una resistencia de 1 [k $\Omega$ ] y de 470 [k $\Omega$ ], respectivamente. Al mismo tiempo, al contrastar los resultados computados con el MD contra los experimentales reportados por Erturk, se obtiene una diferencia del 3.1 % y del 2.4 % al emplear una resistencia de 1 [k $\Omega$ ] y de 470 [k $\Omega$ ], respectivamente.

Con relación al voltaje y a la potencia eléctrica instantánea, se puede efectuar el mismo análisis que se realizó en el párrafo anterior. Poniendo en consideración a las Figuras 7.10 y 7.11 se advierte que los resultados simulados con el MD - Lineal y con el No Lineal muestran diferencias ínfimas. La amplitud del voltaje y la potencia instantánea máxima poseen valores del orden de 1.57 [V] y de 2.47 [mW] para la resistencia de 1 [k $\Omega$ ]. En tanto que, los valores que adoptan para la resistencia de 470 [k $\Omega$ ] se sitúan en el orden de 93.66 [V] y 18.66 [mW]. Nuevamente, es interesante comparar estos resultados contra los reportados por Erturk. En consecuencia, la amplitud del voltaje y la potencia instantánea máxima que estimó con su modelo analítico son de 1.56 [V] y 2.44 [mW] para la resistencia de 1 [k $\Omega$ ]. En tanto que, para la resistencia de 470 [k $\Omega$ ] estas magnitudes se ubican próximas a 94.82 [V] y 19.13 [mW]. Por otro lado, los resultados que provienen de los ensayos experimentales presentan valores de 1.57 [V] y 2.47 [mW] para la resistencia de 1 [k $\Omega$ ] y de 85.4 [V] y 15.5 [mW] para la resistencia de 470 [k $\Omega$ ]. Si se contrastan los resultados exhibidos para la resistencia de 1 [k $\Omega$ ], se puede advertir que no existen diferencias significativas entre aquellos obtenidos con el MD y los publicados por Erturk, tanto los analíticos como los experimentales. No obstante, si esta comparación se lleva a cabo para la resistencia de 470 [k $\Omega$ ] la diferencia toma cierta relevancia, en particular contra los experimentales, siendo del orden de 8.8 % para el voltaje y de 16.9 % para la potencia instantánea máxima.

Como conclusión del caso de estudio se puede aseverar que los resultados computados con la herramienta numérica muestran muy buena concordancia con aquellos reportados por Erturk. Al respecto, las comparaciones entre resultados que provienen de modelos numéricos no presentan diferencias significativas. Sin embargo, aparecen leves discrepancias al contrastar valores experimentales de voltaje y potencia instantánea contra valores numéricos cuando se considera la resistencia de 470 [k $\Omega$ ]. En este caso, la diferencia en el voltaje es de 8.8 % y, en virtud de que la potencia depende del cuadrado del voltaje, la diferencia aumenta al 16.9 % para esta última. Por último, para el cosechador estudiado, la utilización del MD - No Lineal no ofrece ninguna ventaja frente al MD - Lineal. Por el contrario, insume un tiempo de cómputo mayor debido a que el paso de tiempo asociado es menor. Por último, la diferencia que existe en la componente axial del desplazamiento no tiene ninguna incidencia en la generación de potencia ya que la deformación axial asociada es nula.



**Figura 7.12:** Representación esquemática de un ala altamente flexible: (a) Modelo conceptual tridimensional; (b) Sección transversal; (c) Vista en planta y lateral.

### 7.1.3 Caso 3: Ala - UAV

#### Descripción

El propósito de este caso de estudio consiste en validar la versión no lineal del modelo aeroelástico desarrollado. Para ello se determina la velocidad de *flutter* de una estructura aeronáutica y se la contrasta contra algún valor reportado en la literatura. A tal fin, se pone en consideración una estructura alar altamente flexible de material compuesto que forma parte de una aeronave. El

Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
$L$	29.3	m	$c_1$	4.5	m
$h$	1.54	m	$c_2$	2.2	m

**Tabla 7.7:** Propiedades geométricas del ala.

comportamiento aeroelástico de este avión ha sido estudiado extensamente por Su y por Cesnik

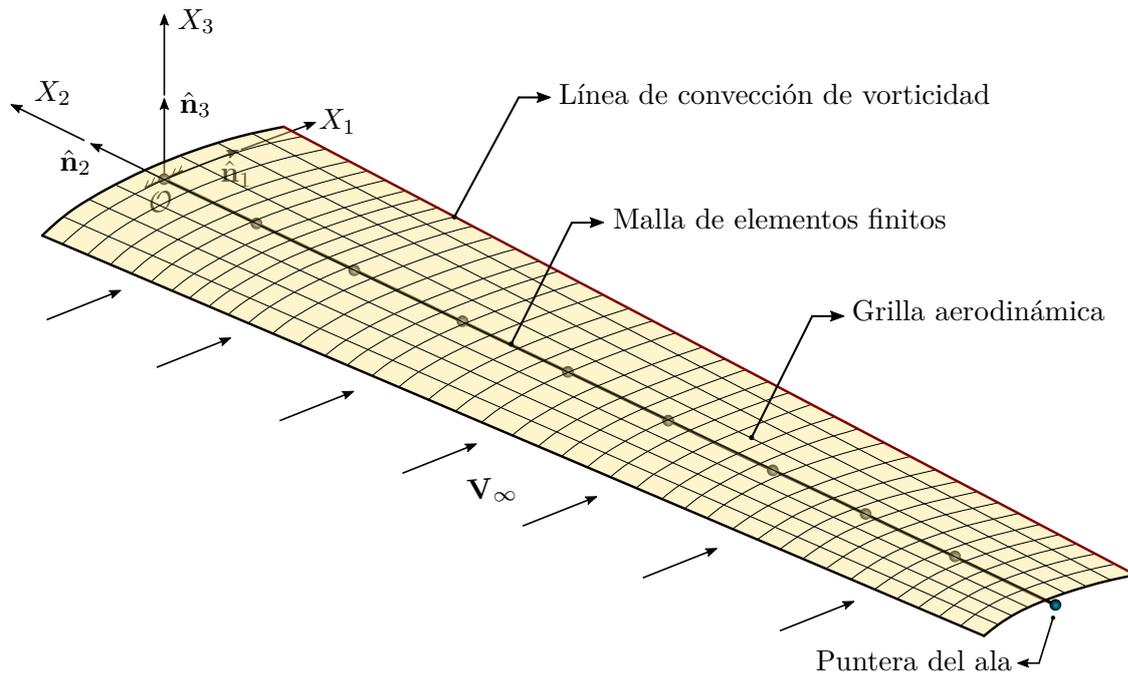
[26, 107] en diferentes condiciones de vuelo. En la Figura 7.12a se presenta una idealización tridimensional del ala, mientras que en las Figuras 7.12b y 7.12c se muestra un conjunto de parámetros que permiten caracterizar a su geometría. Los valores que adoptan estos parámetros se especifican en la Tabla 7.7. Para describir el comportamiento estructural, se introduce un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal  $(X_1, X_2, X_3)$  junto a una base ortonormal  $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$  asociada. El origen de este sistema se sitúa en el punto de intersección entre el eje elástico y la sección transversal de la raíz del ala. Sin embargo, debido al ángulo de diedro no nulo del ala el eje  $X_1$  no coincide con el eje elástico. Según se observa en la Figura 7.12b, para especificar la posición del eje elástico con relación a la sección transversal del ala se introduce un sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  con origen en el borde de ataque. El eje  $x$  atraviesa el borde de fuga del perfil y el eje  $y$  es perpendicular al primero. El perfil alar es un NACA 4415 y la cuerda  $c$  es variable en la dirección de la envergadura (ahusamiento).

Por otro lado, en la Figura 7.13 se expone el modelo numérico del ala. En este sentido, la estructura se representa mediante una viga empotrada-libre que se discretiza por medio de 9 elementos finitos de igual longitud. Las propiedades seccionales equivalentes de cada elemento están dadas en términos del sistema de referencia local elemental y se detallan en la Tabla 7.A.1 del Apéndice. La numeración de los elementos de la malla se inicia en la raíz del ala y se extiende en la dirección de la envergadura. Mayores detalles de las propiedades seccionales equivalentes se presentan en el Anexo B. En lo que respecta a la representación aerodinámica del ala, se discretiza a la superficie media de la misma colocando 8 paneles aerodinámicos en dirección de la cuerda y 40 en dirección de la envergadura, tal como se observa en la Figura 7.13. Esta superficie media se construye a partir de las líneas de curvatura media de cada sección transversal. Puede notarse que la malla de elementos finitos se sitúa por debajo de la grilla aerodinámica, lo cual está en concordancia con la posición del eje elástico en la Figura 7.11b. En virtud de lo expuesto, el modelo posee 54 grados de libertad geométricos y no se incorpora amortiguamiento estructural.

Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
$\Delta t_a$	0.0016	s	$\Delta t_s$	$4.44 \times 10^{-5}$	s
$\rho$ (Aire)	1.225	Kg/m <sup>3</sup>	$\ \mathbf{V}_\infty\ $	Variable	m/s
$\delta$ (Cutoff)	1 %	-			

**Tabla 7.8:** Parámetros usados en las simulaciones.

Para conocer la evolución temporal de los grados de libertad geométricos que caracterizan a la estructura se integran numéricamente las ecuaciones de gobierno. Al respecto, en la Tabla 7.8 se sintetizan los parámetros comunes a todas las simulaciones. En todos los casos, se considera que la estructura se encuentra en reposo en todo instante  $t < 0$  hasta que en  $t = 0$  se produce un arranque impulsivo, es decir, se expone repentinamente a la estructura frente a una corriente de fluido. Cada simulación se efectúa para una velocidad de corriente libre distinta, las cuales



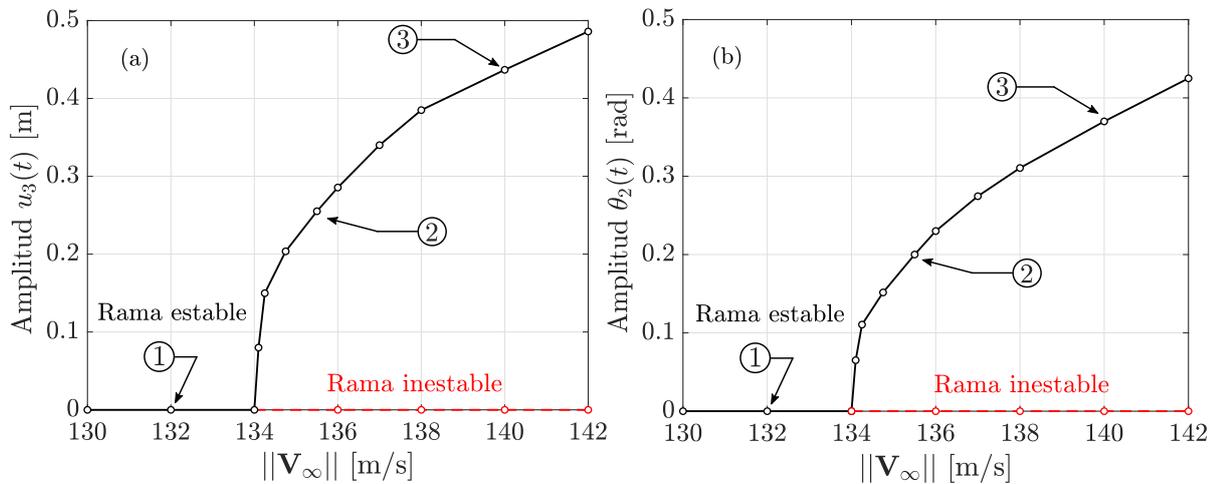
**Figura 7.13:** Modelo computacional del ala: grilla aerodinámica y malla de elementos finitos.

Frecuencia	Forma modal	Magnitud	Unidad
1	Flexión FW	0.8027	Hz
2	Flexión FW	3.3045	Hz
3	Flexión EW	3.6176	Hz
4	Flexión FW	8.2622	Hz
5	Torsión	9.7074	Hz
6	Flexión EW	14.3970	Hz
7	Flexión FW	15.9492	Hz
8	Torsión	19.5696	Hz
9	Flexión FW	26.9365	Hz
10	Torsión	31.2707	Hz

**Tabla 7.9:** Frecuencias naturales de la estructura alar.

se diferencian en su intensidad pero tienen la misma dirección y sentido ( $X_1$ ). Con relación al modelado aerodinámico, se debe destacar que se utiliza un recorte de la sábana vorticosa libre con una longitud de 80 paneles. Esto proviene de un análisis de convergencia realizado para el caso en cuestión como una solución de compromiso entre precisión de resultados y costo computacional. Todos los resultados se obtuvieron con el MD - No Lineal.

Para finalizar la descripción, en la Tabla 7.9 se exponen las primeras diez frecuencias naturales de la estructura, las cuales fueron computadas en la configuración indeformada. La segunda columna de la tabla indica la forma modal asociada, donde las iniciales FW refieren al



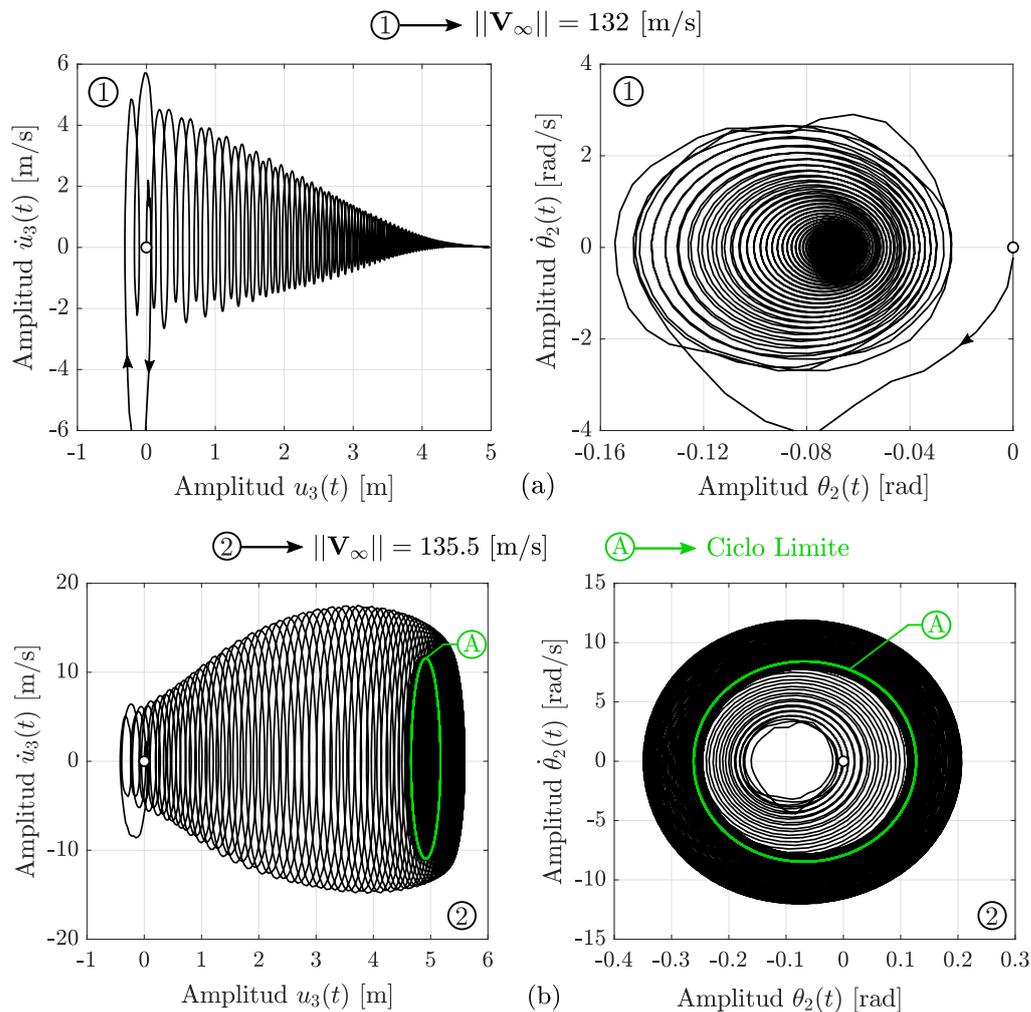
**Figura 7.14:** Diagramas de bifurcación para las variables cinemáticas  $u_3(t)$  y  $\theta_2(t)$ .

término *flapwise* y EW al término *edgewise*.

## Resultados

Los resultados que se exponen seguidamente surgen de un conjunto de simulaciones numéricas realizadas en el dominio del tiempo. Para evaluar la respuesta aeroelástica del ala se pone en consideración el comportamiento de dos grados de libertad geométricos, los cuales corresponden a la componente  $u_3(t)$  del vector desplazamiento de la puntera del ala y a la componente  $\theta_2(t)$  del vector de rotaciones infinitesimales del mismo punto. Ambas variables se expresan en el sistema de coordenadas cartesianas que se introdujo en la Figura 7.13. Si bien el eje  $X_2$  (Figura 7.13) no coincide con el eje elástico del ala, ya que el ángulo de diedro es no nulo, el giro  $\theta_2(t)$  permite estimar la torsión de la puntera del ala. En este caso, todas las simulaciones fueron efectuadas introduciendo una perturbación inicial en el campo de fluido, la cual consiste en una componente vertical ( $X_3$ ) de 5 [m/s] que se superpone a la corriente libre ( $X_1$ ) durante los dos primeros pasos de tiempo aerodinámicos.

En las Figuras 7.14a y 7.14b se presentan los diagramas de bifurcación para las variables de referencia  $u_3(t)$  y  $\theta_2(t)$ . Como es habitual, se construyeron graficando en el eje vertical a las amplitudes de vibración en estado de régimen y a la velocidad del aire en el eje horizontal. Estos diagramas brindan información sobre el comportamiento dinámico no lineal del sistema. En este caso, la no linealidad proviene del modelo estructural y de la interacción de éste con el modelo aerodinámico. Al mismo tiempo, en las Figuras 7.15 y 7.16 se expone la evolución de los grados de libertad  $u_3(t)$  y  $\theta_2(t)$  en el plano de fase. Esto se presenta para tres velocidades del aire, las cuales se identifican mediante marcadores circulares en la Figura 7.14 y adoptan valores de 132, 135.5 y 140 [m/s]. En los diagramas de fase el tiempo aparece en forma implícita y la condición inicial se representa mediante un círculo. Asimismo, se resalta en color verde al ciclo límite (LCO). Para complementar, en la Figura 7.A.1 del Apéndice se grafica a las señales



**Figura 7.15:** Diagramas de fase de las variables cinemáticas  $u_3(t)$  y  $\theta_2(t)$  para dos velocidades de corriente libre: (a) 132 [m/s] y (b) 135.5 [m/s].

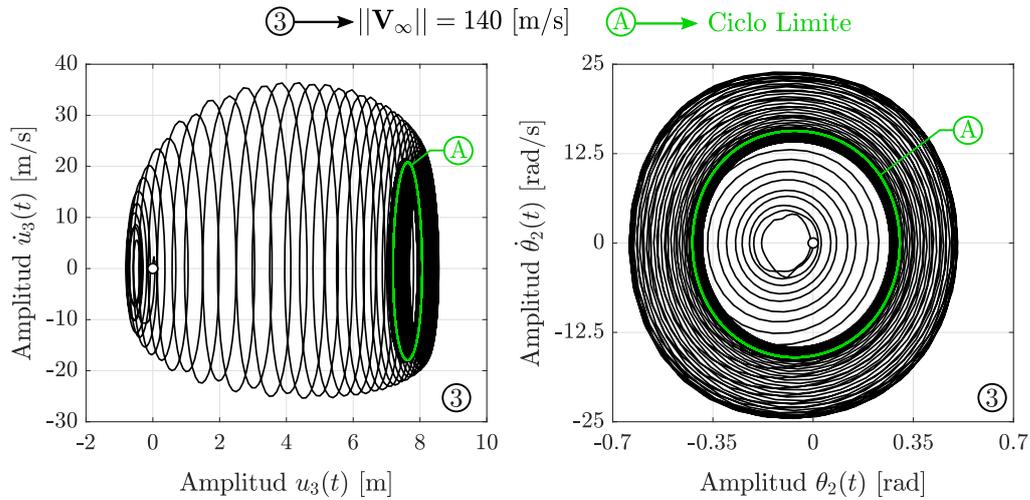
$u_3(t)$  y  $\theta_2(t)$  en función del tiempo para las tres velocidades consideradas.

Por otro lado, en la Figura 7.17 se muestra la disposición geométrica que adopta la grilla aerodinámica y la malla de elementos finitos para el instante de tiempo  $t = 30.5$  [s]. Esto se expone para las tres velocidades del aire. Además, se puede observar la configuración que adquiere la sábana vorticosa libre.

### Discusión de resultados y conclusiones

De los resultados expuestos, y en particular de los diagramas de la Figura 7.14, se deduce que el sistema presenta una velocidad crítica o de *flutter* de magnitud igual a  $\|\mathbf{V}_f\| = 134$  [m/s]. Asimismo, se aprecia que los grados de libertad de referencia muestran una bifurcación supercrítica de *Hopf* que se inicia para la misma velocidad.

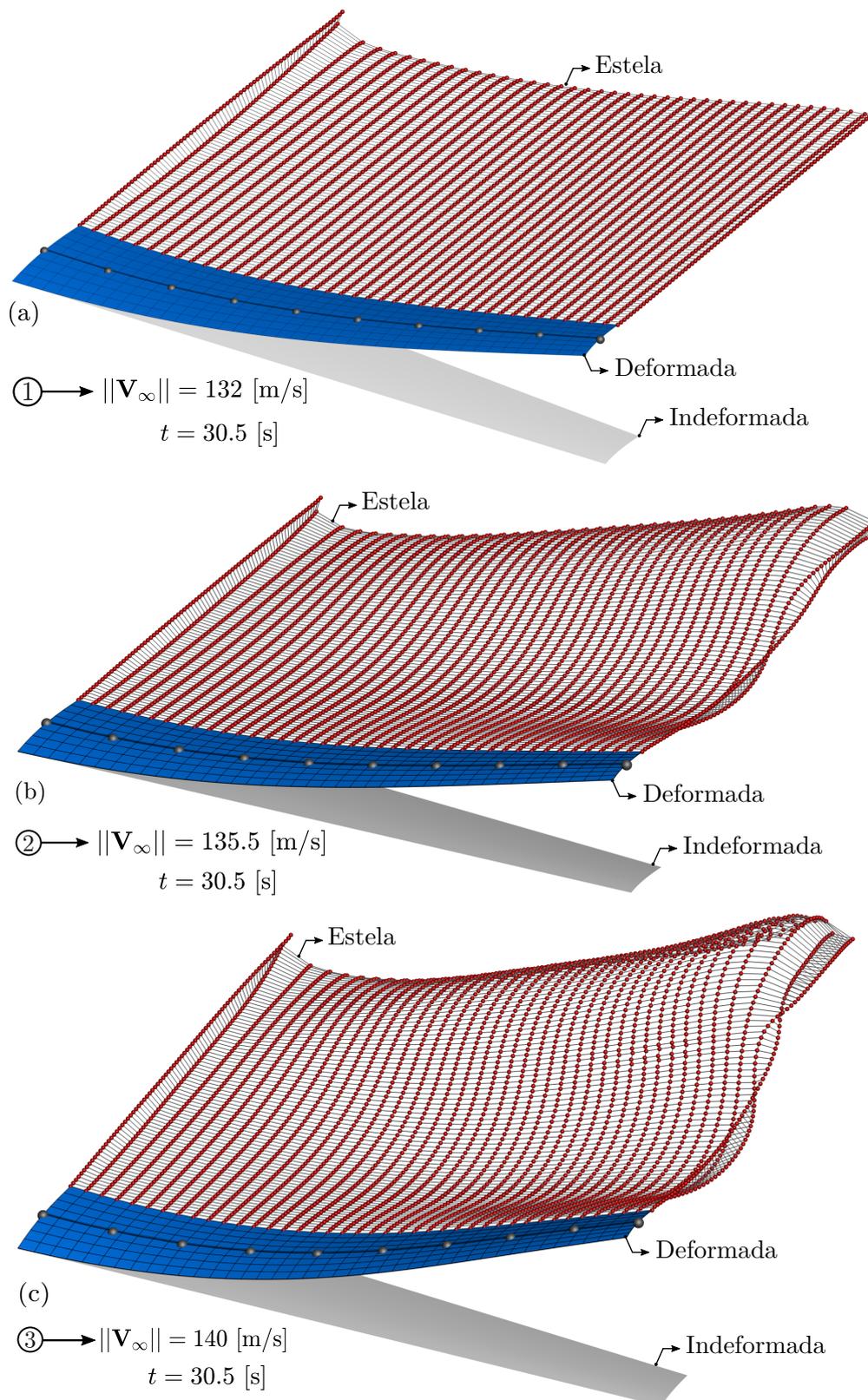
Los diagramas de fase contribuyen a caracterizar el comportamiento del sistema. En este



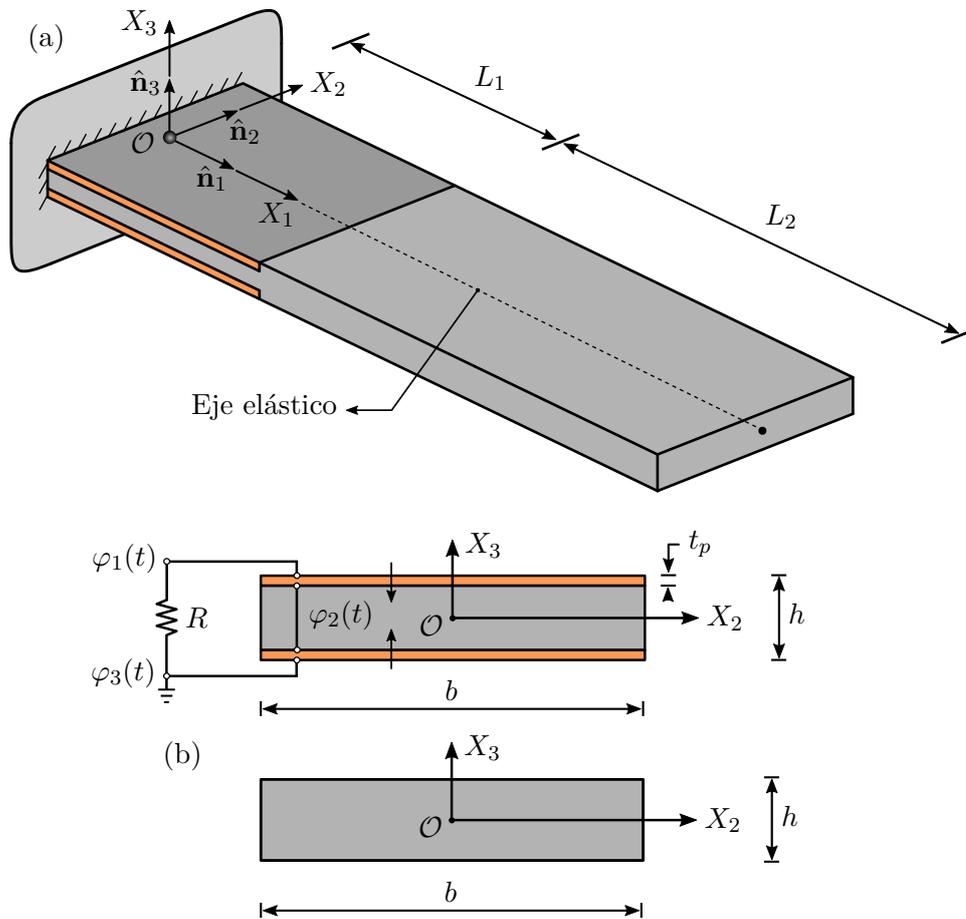
**Figura 7.16:** Diagramas de fase de las variables cinemáticas  $u_3(t)$  y  $\theta_2(t)$  para una velocidad de corriente libre igual a 140 [m/s].

sentido, se puede apreciar que si se expone el ala ante una corriente subcrítica,  $\|\mathbf{V}_\infty\| < \|\mathbf{V}_f\|$ , las oscilaciones de los grados de libertad de referencia se atenúan a medida que transcurre el tiempo. De esta manera, el ala alcanza una posición de equilibrio estable luego de un cierto intervalo de tiempo. Si se ponen en consideración los resultados obtenidos para la velocidad de 132 [m/s] se deduce que pasado los 30 [s] de simulación (Figura 7.A.1a) las oscilaciones se amortiguan y la estructura alcanza la disposición geométrica que se observa en la Figura 7.17a. En este caso, el sistema muestra una estabilidad asintótica. En contraposición, para velocidades poscríticas,  $\|\mathbf{V}_\infty\| > \|\mathbf{V}_f\|$ , los grados de libertad oscilan de modo sostenido en el tiempo. Tal como se desprende de los diagramas de bifurcación, la amplitud de tales oscilaciones son función de la velocidad del aire, más precisamente crecen con ella. Si se tienen en cuenta los resultados obtenidos para la velocidad de 135.5 [m/s] o de 140 [m/s] (Figuras 7.A.1b y 7.A.1c) se observa que luego de un transitorio inicial las amplitudes de vibración se mantienen constante a medida que transcurre el tiempo, dando lugar a oscilaciones de ciclo límite (LCO). Estas LCO se aprecian en los diagramas de fase correspondientes. Otro aspecto a tener en cuenta es la dependencia de la componente media de  $u_3(t)$  con la velocidad del fluido. A medida que la velocidad del aire aumenta por encima de la crítica, las oscilaciones se desarrollan alrededor de una componente media de mayor magnitud. Este efecto también aparece en el giro  $\theta_2(t)$  pero en menor medida.

Por último, la velocidad de *flutter* reportada por Su [107] es de  $\|\mathbf{V}_f^S\| = 129$  [m/s] y es un 3.7 % inferior a la estimada con el MD - No Lineal. Si bien lo obtenido es suficientemente aceptable, esta discrepancia puede atribuirse a varios de factores, entre los que se destacan los modelos estructural y aerodinámico utilizados y el procedimiento adoptado para el cálculo de la velocidad crítica. A pesar de que este caso de estudio no incorpore cosechadores de energía, es sumamente útil ya que permite validar los modelos estructural y aerodinámico y el método



**Figura 7.17:** Configuración deformada del ala para tres velocidades de corriente libre: (a) 132 [m/s]; (b) 135.5 [m/s] y (c) 140 [m/s].



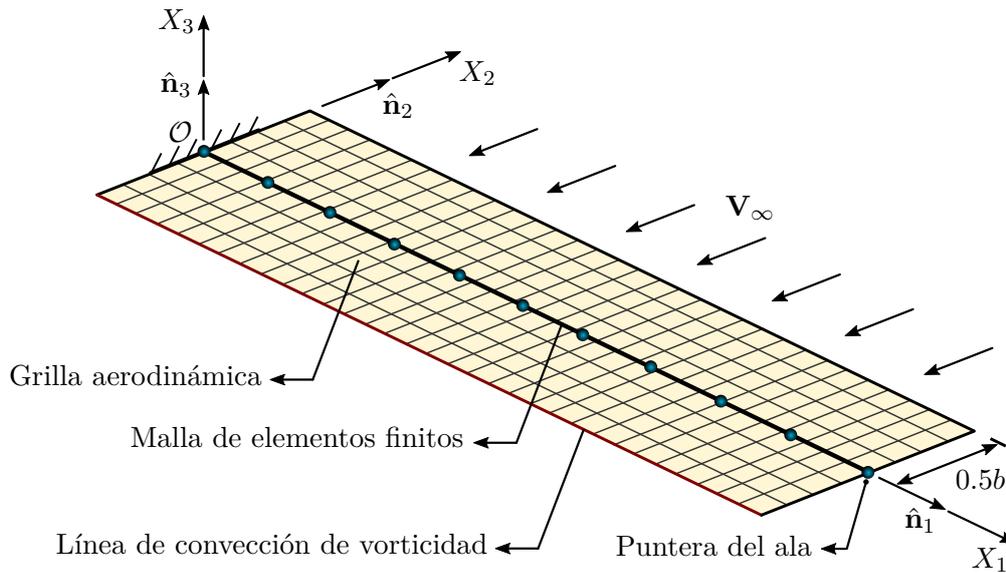
**Figura 7.18:** Cosechador piezoeléctrico embebido en una estructura alar: (a) visualización tridimensional; (b) Sección transversal.

de interacción utilizado.

#### 7.1.4 Caso 4: Cosechador piezoaeroelástico

##### Descripción

En este caso de estudio se valida la versión lineal del modelo electroaeroelástico desarrollado. A tal fin, se considera la estructura alar propuesta y estudiada por De Marqui [32, 33] que también fue evaluada por José María [56]. El objetivo es predecir su velocidad y frecuencia de *flutter* como también evaluar la respuesta del cosechador de energía que tiene embebido en su interior. En la Figura 7.18a se presenta una idealización del ala, la cual consiste en una placa plana con uno de sus extremos empotrados. Para describir su configuración, se introduce un sistema de coordenadas cartesianas  $(X_1, X_2, X_3)$  fijo en el espacio junto a una base ortonormal  $\{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$  asociada. Este sistema tiene su origen  $\mathcal{O}$  en la raíz del ala y el eje  $X_1$  es coincidente con el eje elástico. La placa está formada por un núcleo elástico de aluminio estándar y posee



**Figura 7.19:** Modelo computacional de la estructura alar: malla de elementos finitos y grilla aerodinámica.

dos láminas idénticas de piezocerámico PZT-5A embebidas en el primer tercio de su longitud. Tal como se aprecia en la Figura 7.18b, la sección transversal es rectangular y se mantiene constante en la dirección de la envergadura. A su vez, los transductores piezocerámicos se ubican simétricamente con respecto a los ejes  $X_2$  y  $X_3$ . Con relación a la conexión eléctrica entre ellos, fue necesario rotar a la lámina inferior alrededor del eje  $X_1$  para invertir el sentido del campo eléctrico de polarización. Luego, ambas se vincularon por medio de una conexión en serie y se incorporó un resistor de resistencia  $R$  entre los terminales del conjunto. En la Tabla 7.10 se detallan los parámetros geométricos de la estructura alar, mientras que las propiedades mecánicas de los materiales involucrados se detallan en el Anexo C, en particular en las Tablas C.1 y C.2.

Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
$L_1$	400	mm	$L_2$	800	mm
$h$	3	mm	$t_p$	0.5	mm
$b$	240	mm			

**Tabla 7.10:** Parámetros geométricos del ala.

Por otro lado, en la Figura 7.19 se expone el modelo computacional del ala. En este sentido, la estructura se representa por medio de una viga empotrada-libre que se discretiza empleando 10 elementos finitos distribuidos de manera uniforme, donde los tres primeros contienen a los transductores piezocerámicos. Desde el punto de vista aerodinámico el ala se modela a través de la superficie media de la placa, la cual se discretiza utilizando 8 paneles aerodinámicos en la

Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
$\Delta t_s = \Delta t_a$	$7.5 \times 10^{-4}$	s	$N_m$	5	-
$\rho$ (Aire)	1.225	Kg/m <sup>3</sup>	$\ \mathbf{V}_\infty\ $	Variable	m/s
$\delta$ (Cutoff)	1 %	-	$R$	Variable	k $\Omega$
$\alpha$	0.1635	1/s	$\beta$	$4.1711 \times 10^{-4}$	s

**Tabla 7.11:** Parámetros usados en las simulaciones.

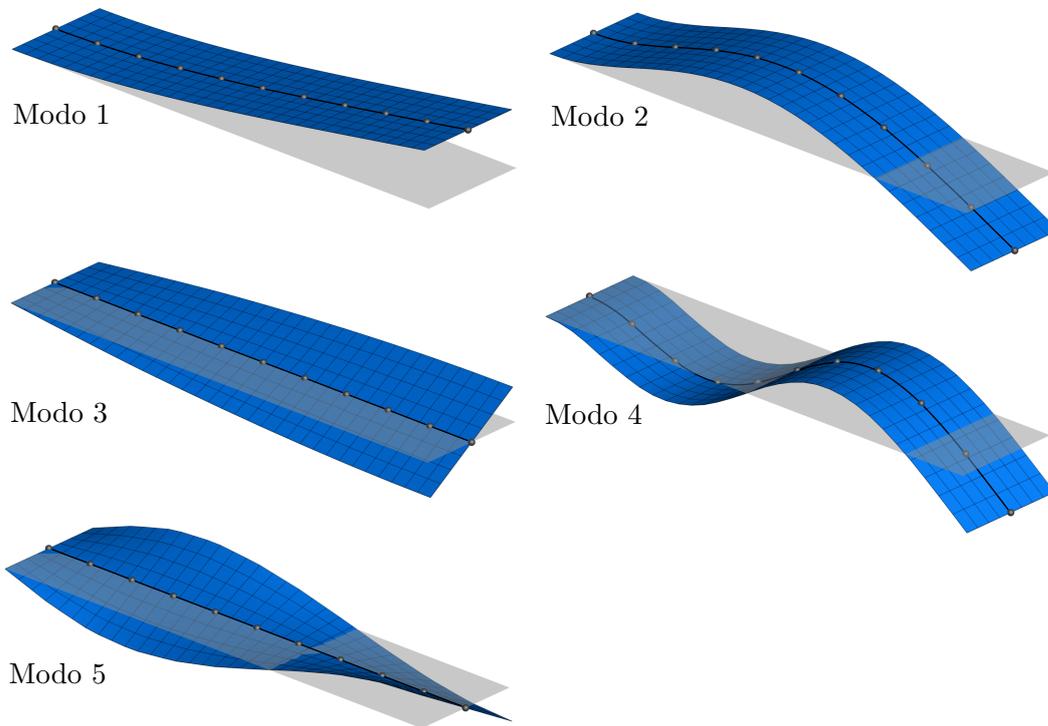
dirección de la cuerda y 32 en la dirección de la envergadura. Su disposición se detalla en la Figura 7.19. Se observa que la malla estructural está contenida en la grilla aerodinámica y que se ubica sobre la semicuerda. En virtud de lo expuesto, el modelo posee 60 grados de libertad geométricos y 2 grados de libertad eléctricos.

Frecuencia	Magnitud	De Marqui [33]	Error %	Forma modal	Unidad
1	1.6368	1.68	2.571	Flexión FW	Hz
2	10.361	10.46	0.946	Flexión FW	Hz
3	16.846	16.66	-1.118	Torsión	Hz
4	28.021	27.74	-1.013	Flexión FW	Hz
5	48.071	48.65	1.189	Torsión	Hz

**Tabla 7.12:** Comparación entre las primeras cinco frecuencias naturales determinadas con la herramienta numérica contra las reportadas en [33].

Para determinar la respuesta electroaeroelástica del ala se integran numéricamente sus ecuaciones rectoras usando el MD - Lineal. Con relación a ello, en la Tabla 7.11 se detallan los parámetros comunes a todas las simulaciones numéricas realizadas. En todos los casos, se supone que la estructura se encuentra en reposo en todo tiempo  $t < 0$  y que en  $t = 0$  se expone de manera repentina a una corriente de fluido experimentando un arranque impulsivo. Por otra parte, se debe destacar que se implementó un recorte en la sábana vorticiosa libre con una longitud de 80 paneles de extensión. Esto surge de un estudio previo de convergencia efectuado para el presente caso como una solución de compromiso entre precisión de resultados y costo computacional. El modelo incluye amortiguamiento estructural de tipo proporcional ( $\alpha$  y  $\beta$ ). Al emplear el MD - Lineal, el orden de las ecuaciones de movimiento se reduce empleando los primeros  $N_m$  modos naturales de vibrar.

Para finalizar, en la Tabla 7.12 se tabulan las primeras cinco frecuencias naturales, tanto las obtenidas con la herramienta numérica como las reportadas por De Marqui. Con el propósito de compararlas, se especifica la diferencia porcentual que existe entre ellas. A su vez, también se indica la forma modal asociada a cada frecuencia, donde las iniciales FW refieren al término *flapwise*. Por su parte, en la Figura 7.20 se grafican los primeros cinco modos superpuestos al ala en su configuración indeformada.



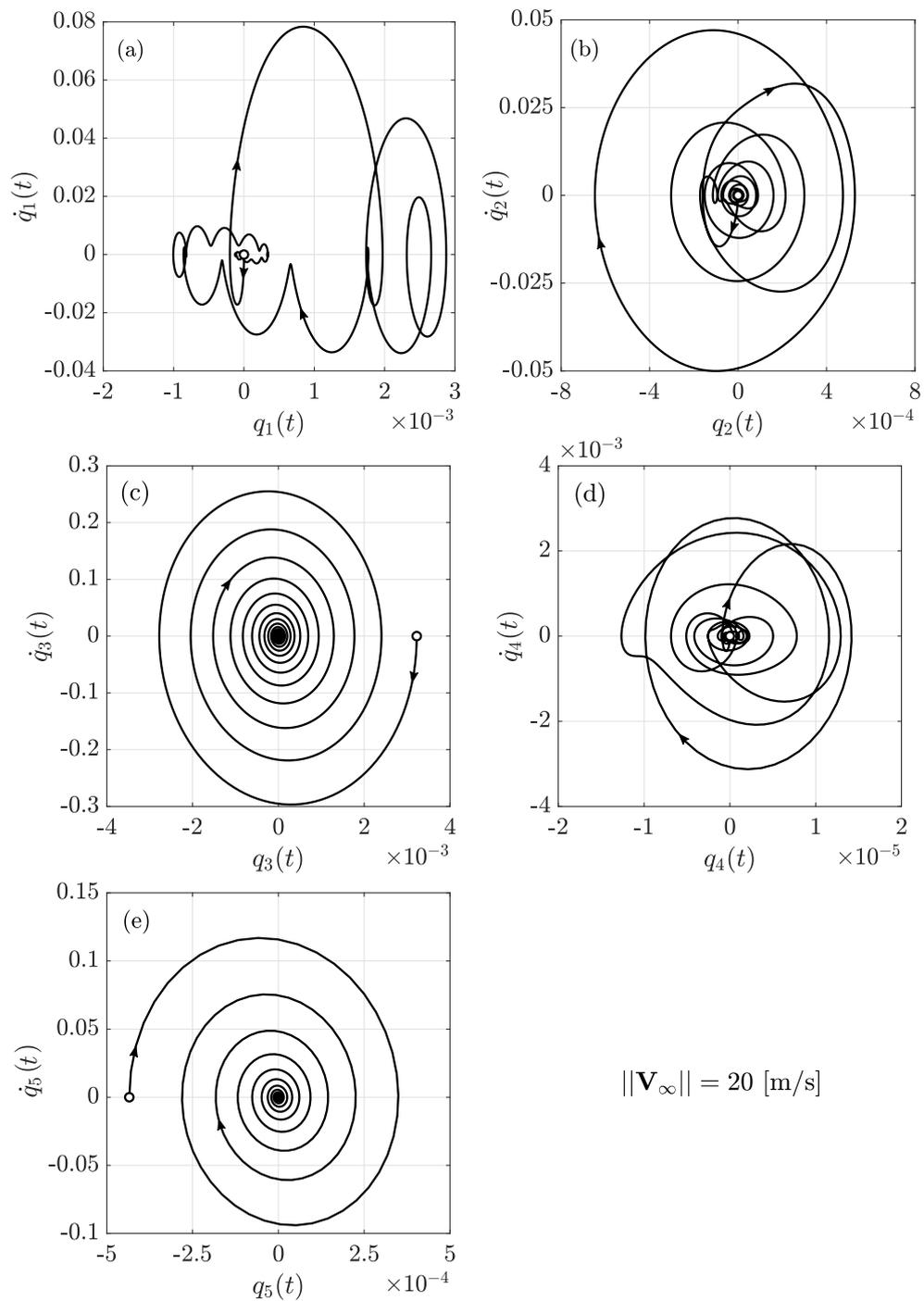
**Figura 7.20:** Primeras cinco formas modales de la estructura alar.

## Resultados

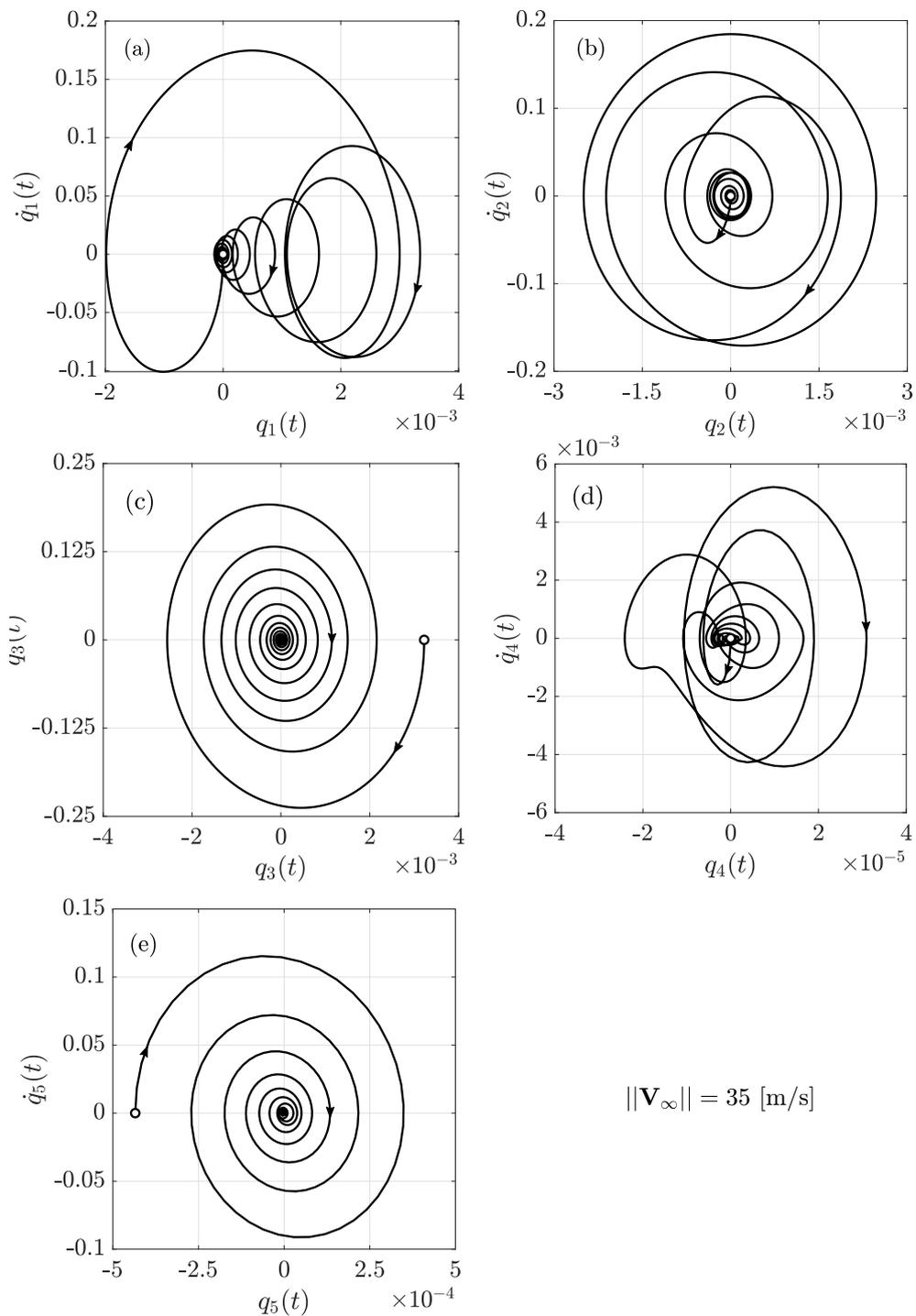
En primer lugar, se realizaron un conjunto de simulaciones numéricas con el propósito de estimar la velocidad de *flutter* de cortocircuito. Esto implica considerar a la estructura sin cosechador de energía ( $R \rightarrow 0$ ) pero teniendo en cuenta el aporte estructural de los piezoeléctricos. A tal fin, el ala se quita del reposo aplicando una condición inicial de torsión (modo 3) que produce un giro de 3 grados en la puntera. En virtud del número de formas modales  $N_m$  empleadas en la reducción de orden, la respuesta aeroelástica se analiza a partir de la evolución en el tiempo de las cinco coordenadas modales  $q_i(t)$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) del modelo.

En las Figuras 7.21 a 7.23 se muestran los diagramas de fase para las coordenadas  $q_i(t)$ . En ellos, la condición inicial se representa mediante un círculo y el sentido de avance en el tiempo se indica mediante flechas dibujadas sobre las curvas. Por otra parte, en las Figuras 7.24 a 7.26 se grafica el resultado de aplicar la Transformada Rápida de Fourier (FFT) sobre cada una de las coordenadas modales. Las curvas resultantes están normalizadas con respecto a su amplitud máxima. A su vez, en dichas figuras se indica por medio de líneas verticales los valores que adoptan las frecuencias naturales del ala.

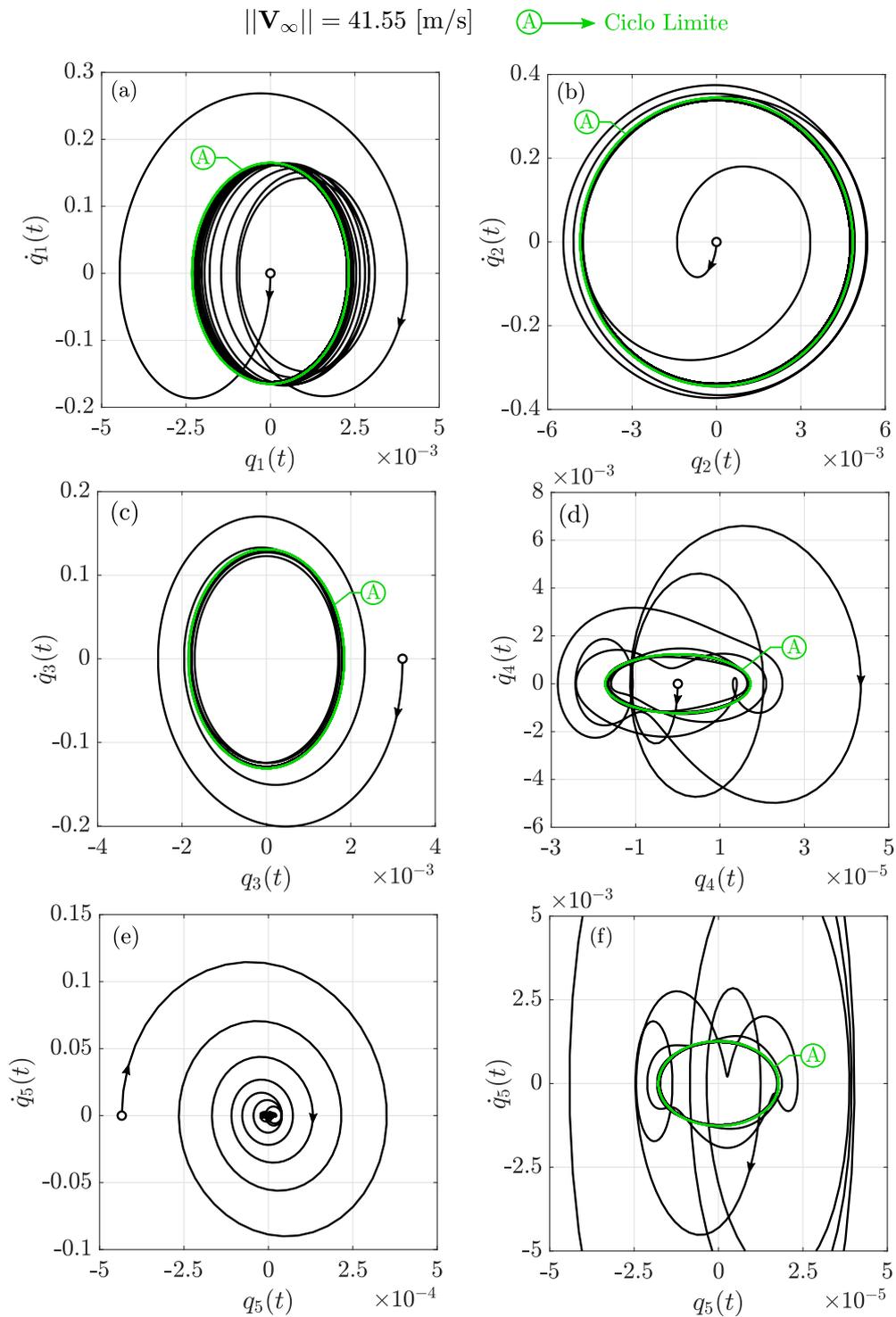
Por otro lado, para estudiar el comportamiento del cosechador se llevaron a cabo varias simulaciones para distintas velocidades de la corriente libre. En este caso la perturbación inicial



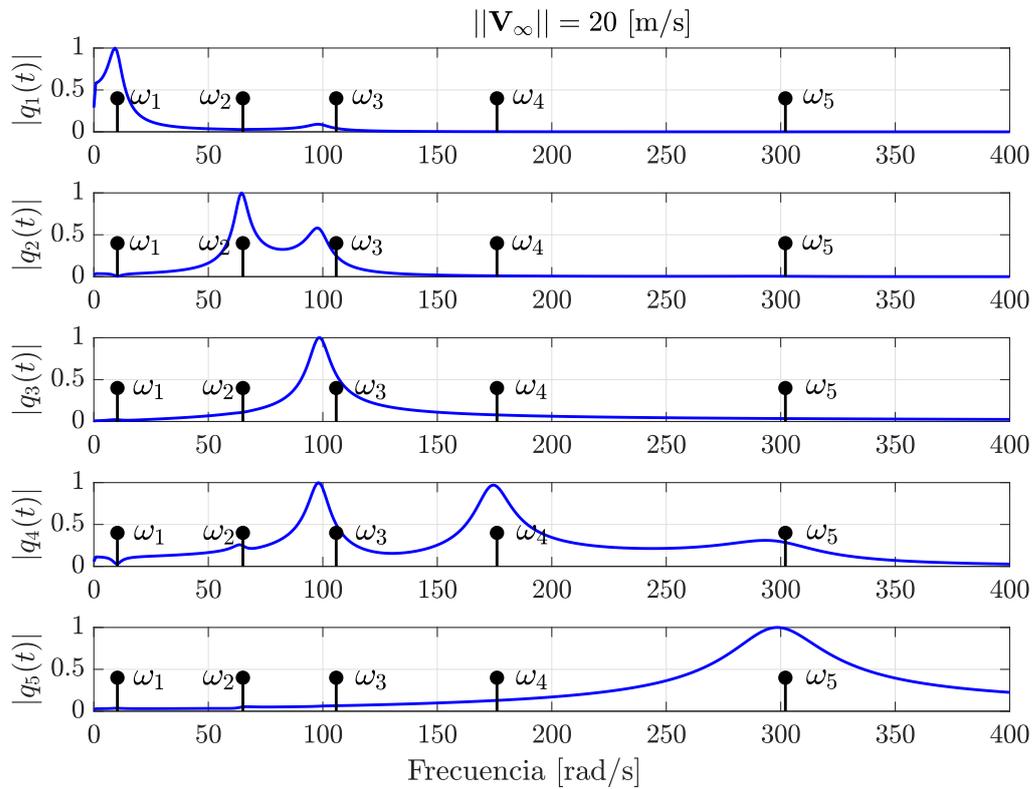
**Figura 7.21:** Diagramas de fase para una velocidad  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 20 \text{ [m/s]}$ : (a) coordenada modal  $q_1(t)$ ; (b) coordenada modal  $q_2(t)$ ; (c) coordenada modal  $q_3(t)$ ; (d) coordenada modal  $q_4(t)$ ; (e) coordenada modal  $q_5(t)$ .



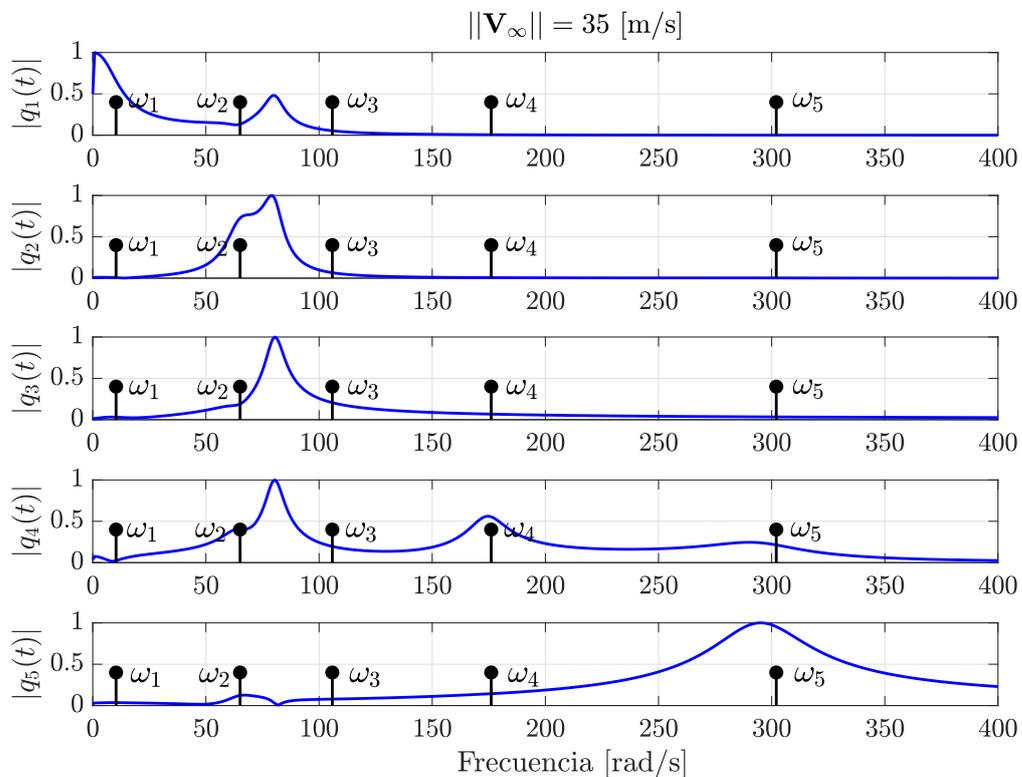
**Figura 7.22:** Diagramas de fase para una velocidad  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 35 \text{ [m/s]}$ : (a) coordenada modal  $q_1(t)$ ; (b) coordenada modal  $q_2(t)$ ; (c) coordenada modal  $q_3(t)$ ; (d) coordenada modal  $q_4(t)$ ; (e) coordenada modal  $q_5(t)$ ; (f) ampliación ciclo límite asociado a  $q_5(t)$ .



**Figura 7.23:** Diagramas de fase para una velocidad  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 41.55 \text{ [m/s]}$ : (a) coordenada modal  $q_1(t)$ ; (b) coordenada modal  $q_2(t)$ ; (c) coordenada modal  $q_3(t)$ ; (d) coordenada modal  $q_4(t)$ ; (e) coordenada modal  $q_5(t)$ .



**Figura 7.24:** FFT de las coordenadas modales normalizadas para  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 20$  [m/s].



**Figura 7.25:** FFT de las coordenadas modales normalizadas para  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 35$  [m/s].

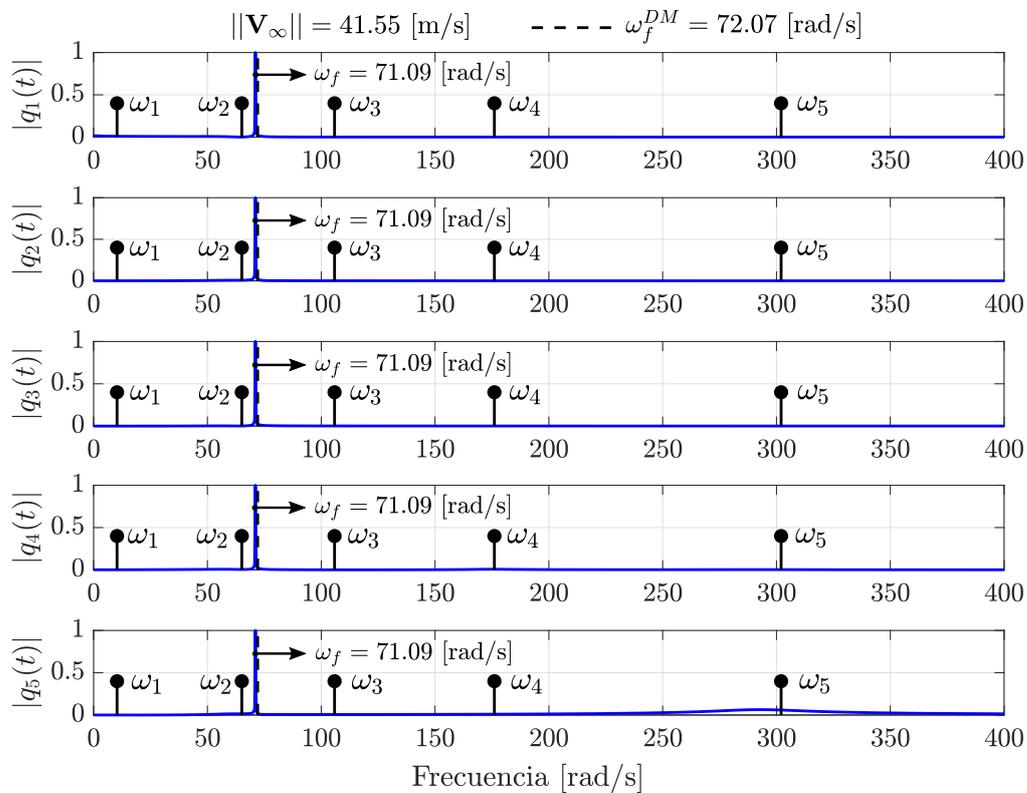


Figura 7.26: FFT de las coordenadas modales normalizadas para  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 41.55$  [m/s].

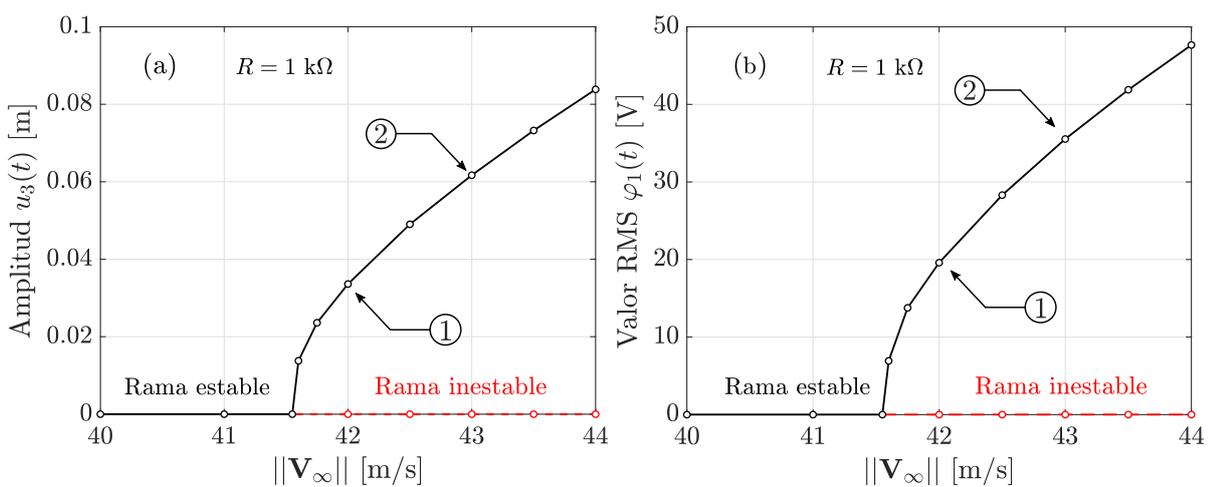
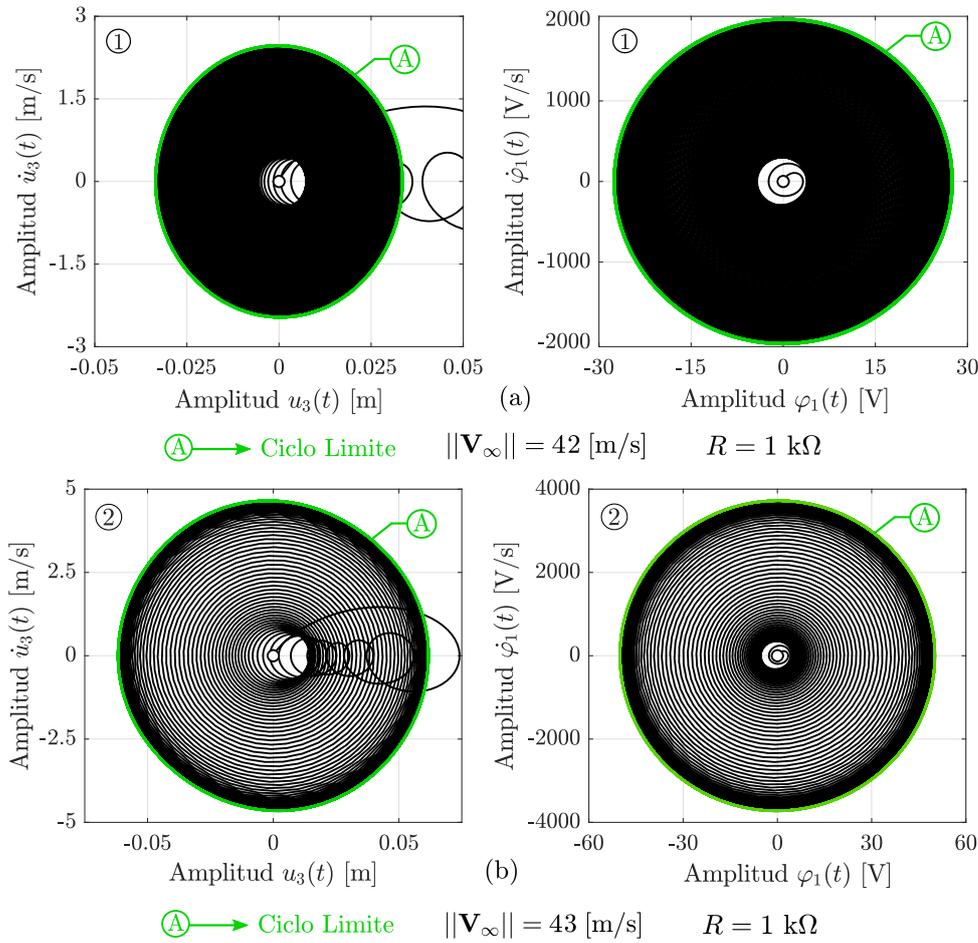


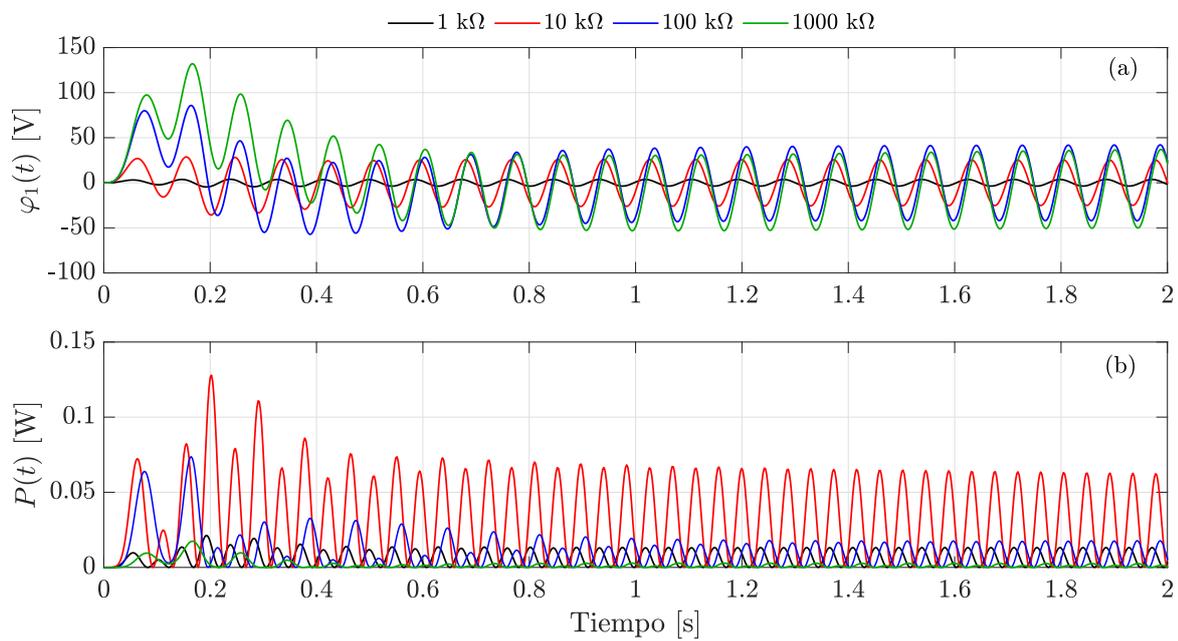
Figura 7.27: Diagrama de bifurcación para: (a) la componente  $u_3(t)$  del desplazamiento de la puntera y (b) el potencial  $\varphi_1(t)$ .



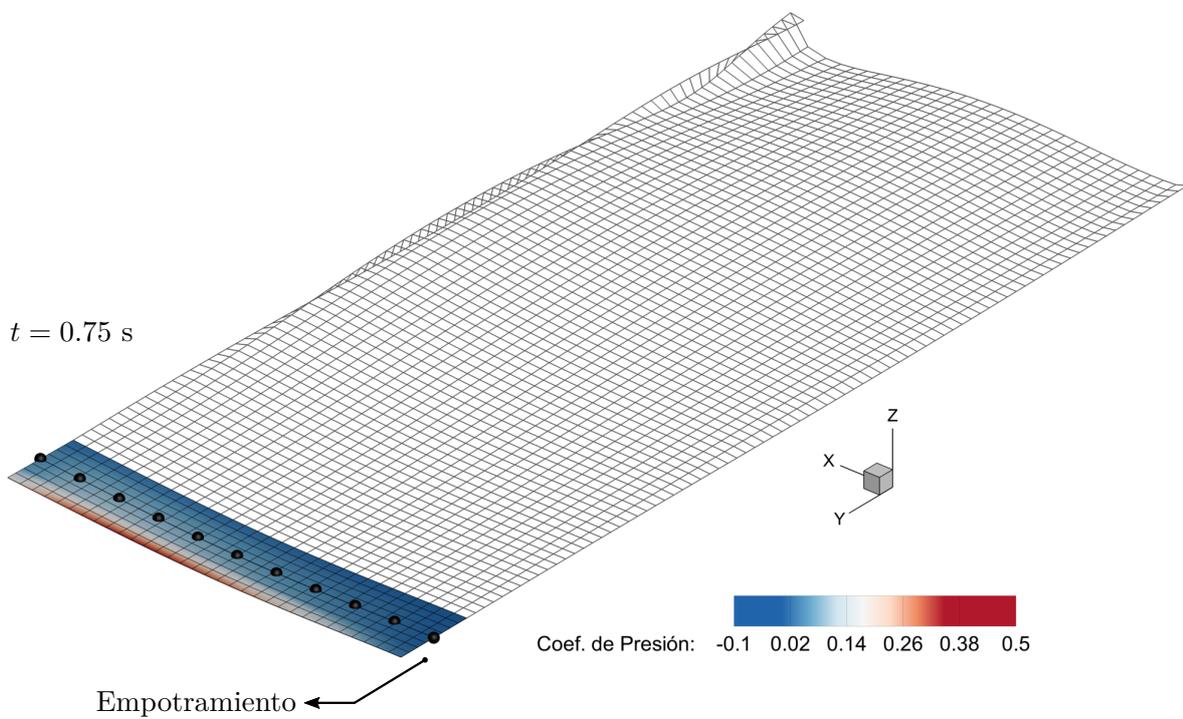
**Figura 7.28:** Diagramas de fase de las variables  $u_3(t)$  y  $\varphi_1(t)$  para : (a)  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 42 \text{ [m/s]}$  y (b)  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 43 \text{ [m/s]}$  considerando en ambos casos  $R = 1 \text{ [k}\Omega]$ .

proviene de una ráfaga vertical ( $X_3$ ) de la forma  $1 - \cos$  cuyas características detallan en [56]. Con los resultados obtenidos, se construyó el diagrama de bifurcación para el potencial  $\varphi_1(t)$  graficando el valor RMS del voltaje en condición de régimen en función de la velocidad del aire, tal como se aprecia en la Figura 7.27a. Todas las simulaciones se efectuaron considerando una resistencia de  $1 \text{ [k}\Omega]$ . Complementariamente, en la Figura 7.27b se muestra el diagrama de bifurcación para la variable cinemática  $u_3(t)$  que consiste en la componente vertical ( $X_3$ ) del desplazamiento de la puntera del ala. En este caso, el diagrama se construye a partir de la amplitud de vibración aeroelástica en condición de régimen. Adicionalmente, en la Figura 7.27 se exponen los diagramas de fase para  $u_3(t)$  y  $\varphi_1(t)$  contemplando dos velocidades, 42 y 43  $[\text{m/s}]$ . En color verde se identifican los ciclos límites.

Por último, en la Figura 7.29 se muestra la evolución temporal del potencial  $\varphi_1(t)$  y de la potencia eléctrica instantánea  $P(t)$  para cuatro valores de resistencia cuando se expone el ala a una velocidad del aire igual a  $41.55 \text{ [m/s]}$  (velocidad de *flutter* de cortocircuito). Asimismo, en la Figura 7.30 se presenta la distribución del coeficiente de presión sobre el ala para el instante



**Figura 7.29:** Evolución temporal del (a) voltaje  $\varphi_1(t)$  y (b) de la potencia eléctrica instantánea  $P(t)$  para cuatro valores de resistencia eléctrica cuando  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 41.55$  [m/s].



**Figura 7.30:** Distribución del coeficiente de presión sobre el ala cuando  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 44$  [m/s] y  $R = 1$  [k $\Omega$ ].

$t = 0.75$  [s] cuando la velocidad del flujo es de 44 [m/s].

### Discusión de resultados y conclusiones

De los diagramas de fase de las coordenadas  $q_i(t)$  se infiere que el comportamiento del sistema cambia cuando la velocidad de la corriente libre alcanza los 41.55 [m/s]. Por debajo de dicha velocidad, las coordenadas modales exhiben un comportamiento oscilatorio cuya amplitud disminuye con el tiempo hasta alcanzar el reposo. En estos casos, el sistema exhibe estabilidad asintótica. Sin embargo, cuando la velocidad del fluido es igual o superior a los 41.55 [m/s] la respuesta muestra un comportamiento periódico. Esto implica que las amplitudes de vibración persisten en el tiempo originando oscilaciones de ciclo límite (LCO). Por lo tanto, se puede afirmar que la velocidad crítica o de *flutter* en situación de cortocircuito ( $R \rightarrow 0$ ) es de  $\|\mathbf{V}_f\| = 41.55$  [m/s] y que en estas condiciones el sistema presenta estabilidad marginal.

Al mismo tiempo, de los espectros de las Figuras 7.24 a 7.26 se observa que para velocidades subcríticas ( $\|\mathbf{V}_\infty\| < \|\mathbf{V}_f\|$ ) el contenido en frecuencias de cada coordenada modal es diferente. En general, cada una de ellas tiene como frecuencia dominante a la natural asociada o a un valor muy próximo a ella y, en algunos casos, aparecen componentes secundarias. No obstante, a medida que la velocidad de la corriente se aproxima a la crítica, las frecuencias de todos los grados de libertad tienden hacia un valor único. Más precisamente cuando la velocidad del fluido es de 41.55 [m/s] todas las coordenadas oscilan a la misma frecuencia, la cual recibe el nombre de frecuencia de *flutter* de cortocircuito ( $R \rightarrow 0$ ) y adopta una magnitud igual a  $\omega_f = 71.09$  [rad/s]. Puede advertirse que esta frecuencia se ubica entre la segunda y la tercera frecuencia natural, mostrando un acoplamiento flexo-torsional entre el segundo y el tercer modo. Con relación a lo expuesto en la literatura, De Marqui reportó una velocidad y una frecuencia de *flutter* en condición de cortocircuito de  $\|\mathbf{V}_f^{DM}\| = 40$  [m/s] y de  $\omega_f^{DM} = 72.07$  [rad/s] respectivamente. La diferencia entre estos valores y los expuestos con anterioridad son del 3.7 % para la velocidad y del 1.3 % para la frecuencia, lo cual muestra un excelente acuerdo. A pesar de ello, es importante destacar que el modelo electroelástico empleado por De Marqui es un modelo de elementos finitos de placas.

Por otro lado, los diagramas de la Figura 7.27 muestran una bifurcación supercrítica de *Hopf* que inicia para una velocidad del aire prácticamente idéntica a la velocidad crítica de cortocircuito. Adicionalmente, los diagramas de bifurcación permiten notar que para velocidades poscríticas los grados de libertad  $u_3(t)$  y  $\varphi_1(t)$  exhiben un comportamiento periódico. Sus amplitudes de vibración crecen a medida que aumenta la velocidad del fluido. A su vez, en los diagramas de fase exhibidos en la Figura 7.28 se observa la presencia de un centro alrededor del origen. Este tipo de comportamiento es característico de una respuesta periódica con una única componente de frecuencia. Asimismo, se percibe que la LCO se alcanza con mayor rapidez cuanto más elevada sea la velocidad del aire.

Finalmente, de la Figura 7.29 se deduce que, de las cuatro resistencias consideradas, la

que muestra mejor desempeño es la de  $10 \text{ [k}\Omega\text{]}$  en virtud de que permite maximizar la potencia instantánea  $P(t)$ . Para este valor de resistencia también se observa un decaimiento en el valor pico de la potencia a medida que avanza el tiempo. Esto se debe al aumento que experimenta la velocidad de *flutter* del ala como consecuencia de la energía disipada en el resistor del circuito. Como la velocidad crítica para la resistencia de  $10 \text{ [k}\Omega\text{]}$  es superior a la de cortocircuito, entonces el sistema es asintóticamente estable cuando la velocidad del aire es de  $41.55 \text{ [m/s]}$ . Lo expuesto muestra que la dinámica del sistema puede ser modificada variando los parámetros eléctricos. Para las resistencias evaluadas, a medida que aumenta o disminuye  $R$  por encima o por debajo de los  $10 \text{ [k}\Omega\text{]}$  la potencia cosechada se reduce notoriamente, siendo muy baja tanto para  $1 \text{ [k}\Omega\text{]}$  como para  $1000 \text{ [k}\Omega\text{]}$ . Si bien José María [56] evaluó el cosechador para las mismas condiciones, no es posible hacer una comparación cuantitativa debido a que gran parte de la respuesta es transitoria. No obstante, cualitativamente sus resultados son coincidentes con los expuestos.

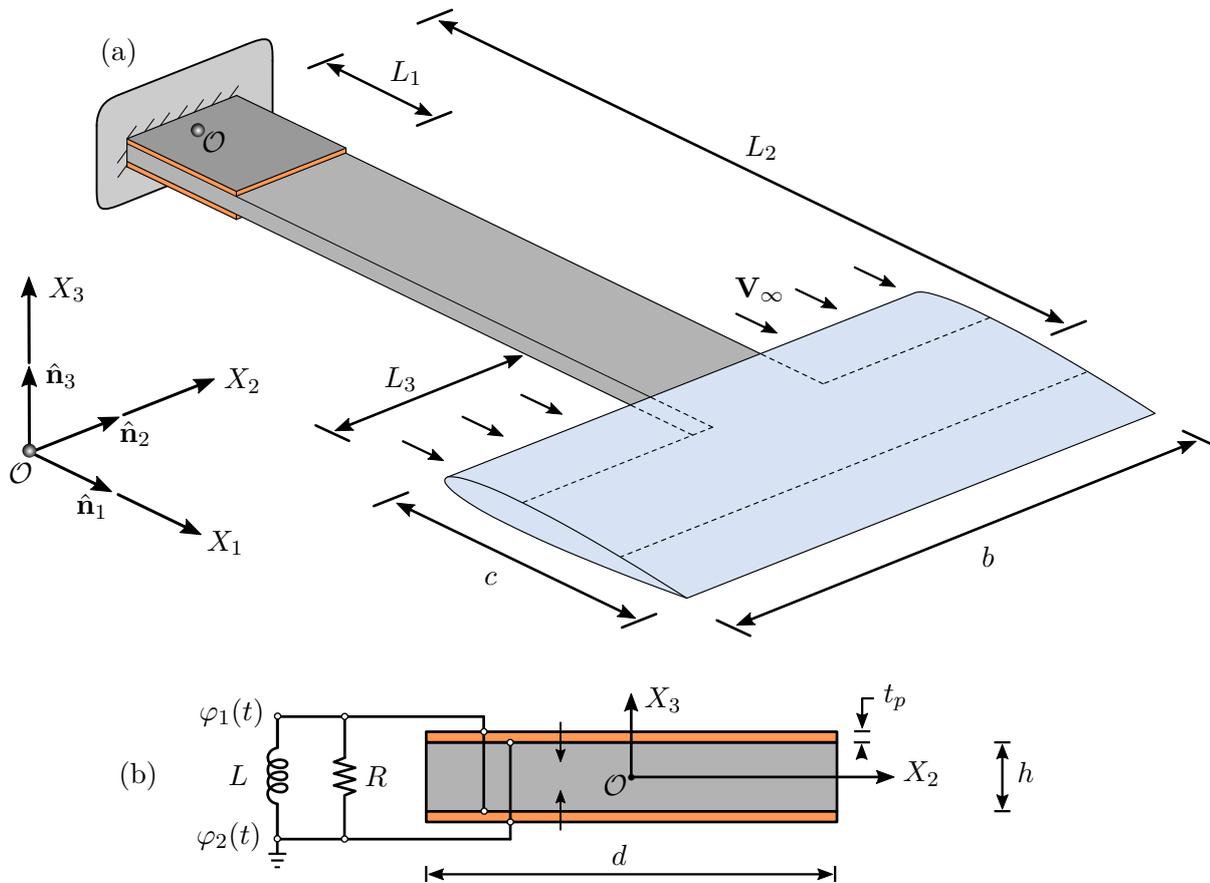
## 7.2 Casos de aplicación

### 7.2.1 Caso 5: Cosechador piezoaeroelástico de pequeña escala

#### Descripción

En el presente caso de aplicación se estudia con profundidad el comportamiento de un cosechador piezoaeroelástico de energía de pequeña escala. En este sentido, en la Figura 7.31a se representa esquemáticamente el cosechador propuesto. Según se observa, está formado por dos placas de polietileno dispuestas en forma de T y un perfil alar simétrico montado sobre una de ellas. Para formalizar la descripción se introduce un sistema de coordenadas cartesianas  $(X_1, X_2, X_3)$  junto a una base ortonormal  $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$  asociada con origen en  $\mathcal{O}$ . Las dos placas presentan idéntica sección transversal, quien se mantiene constante en la dirección de los ejes longitudinales respectivos. En la zona del empotramiento, se dispone de dos láminas piezocerámicas PZT-5A que recubren la región superior e inferior de la placa y se extienden una longitud  $L_1$  desde el extremo empotrado. Por cuestiones simplificadoras, se considera que la rigidez del perfil se representa por una de las placas y su aporte másico es despreciado. Puede notarse que la superficie media del perfil está contenida en el plano  $X_1 - X_2$ . Por otra parte, los transductores piezocerámicos se ubican simétricamente con respecto a los ejes coordenados  $X_2$  y  $X_3$ . Con relación al modelado eléctrico, el transductor inferior se rotó alrededor del eje  $X_1$  para poder invertir el sentido del campo eléctrico de polarización. Además, ambas láminas se vincularon mediante una conexión en paralelo y entre sus terminales extremos se conectó un resistor de resistencia  $R$  y un inductor de inductancia  $L$ . Esta última conexión también es en paralelo.

En la Tabla 7.13 se detallan los valores numéricos de los parámetros geométricos que caracterizan la configuración del cosechador. Por su parte, las propiedades electromecánicas de los materiales involucrados se sintetizan en el Anexo C, en particular en la Tabla C.1 y C.4.

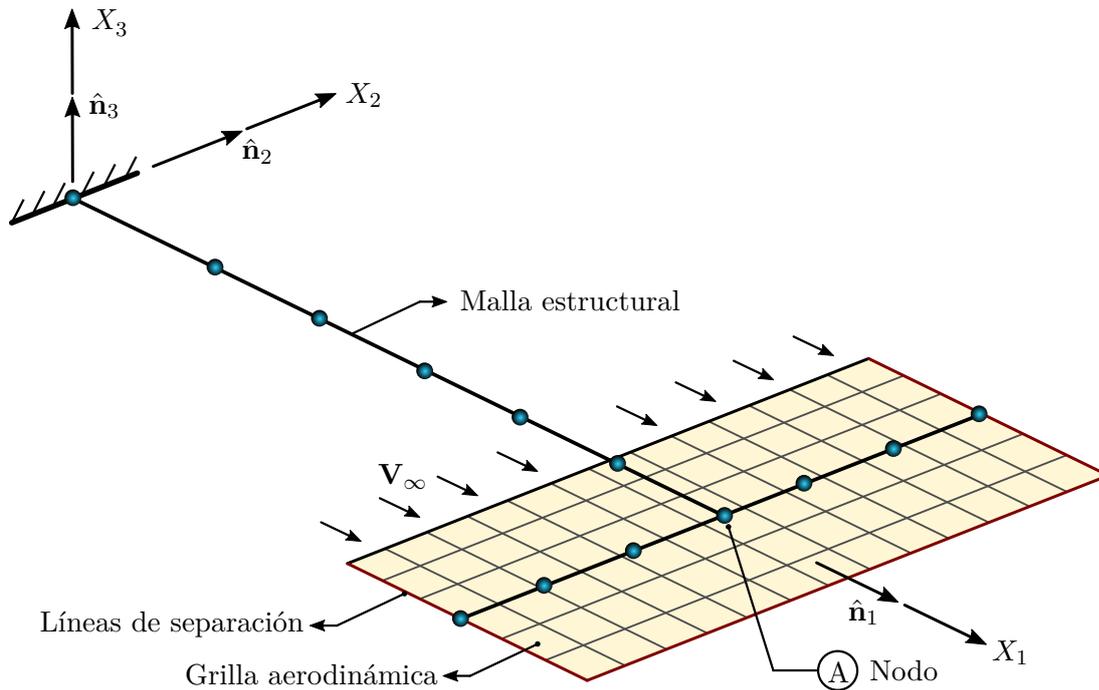


**Figura 7.31:** Cosechador piezoaeroelástico de energía: (a) idealización tridimensional; (b) Sección transversal.

Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
$L_1$	70	mm	$L_2$	300	mm
$L_3$	60	mm	$b$	150	mm
$c$	60	mm	$d$	30	mm
$h$	2	mm	$t_p$	0.2	mm

**Tabla 7.13:** Parámetros geométricos del cosechador piezoaeroelástico.

Por otro lado, el modelo computacional del cosechador se esquematiza en la Figura 7.32. Al respecto, los miembros estructurales se representan mediante dos vigas dispuestas en forma de T que se discretizan a través de 6 elementos finitos cada una de ellas. Puede advertirse que el primer elemento de la viga empotrada posee una longitud ligeramente mayor que los demás. Esto se debe a que dicho elemento es el que tiene en cuenta la presencia de los transductores piezocerámicos, el resto de ellos tiene idéntica longitud. Desde un punto de vista aerodinámico, el perfil alar se modela a través de la superficie media, la cual se discretiza a través de 6 paneles aerodinámicos en la cuerda y de 13 en dirección de la envergadura del perfil. Su disposición se



**Figura 7.32:** Modelo computacional del cosechador: malla de elementos finitos y grilla aerodinámica.

muestra en la Figura 7.32. Debido al bajo alargamiento del perfil, se considera que la vorticidad se desprende no sólo de la línea representativa del borde de fuga sino también de las punteras. A los fines de implementación, la grilla aerodinámica se asocia únicamente con la viga cuyo eje posee dirección  $X_2$ . En base a lo expuesto, el modelo posee 72 grados de libertad geométricos y 1 grado de libertad eléctrico. Además, no incluye amortiguamiento estructural.

Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
$\Delta t_a$	$4.0 \times 10^{-4}$	s	$\Delta t_s$	$8.658 \times 10^{-7}$	s
$\rho$ (Aire)	1.225	Kg/m <sup>3</sup>	$\ \mathbf{V}_\infty\ $	Variable	m/s
$\delta$ (Cutoff)	1 %	-	$R$	Variable	k $\Omega$
$L$	Variable	H			

**Tabla 7.14:** Parámetros usados en las simulaciones.

La respuesta electroaeroelástica del cosechador se obtiene integrando numéricamente sus ecuaciones de movimiento (6.21). Con relación a esto, en la Tabla 7.14 se exponen los parámetros comunes a todas las simulaciones realizadas. Para todos los casos, se supone que la estructura se encuentra en reposo en todo instante  $t < 0$  y que en  $t = 0$  se la expone a una corriente de fluido generando un arranque impulsivo. Por otra parte, se debe destacar que se implementó un recorte en la estela vorticiosa con una longitud de 80 paneles de extensión, lo que equivale aproximadamente a 13 cuerdas. Esto surge de un estudio previo de convergencia

Frecuencia	Forma modal	Magnitud	Unidad
1	Flexión FW	3.3893	Hz
2	Torsión	13.7774	Hz
3	Flexión FW	30.3442	Hz
4	Flexión EW	47.3926	Hz
5	Flexión FW	84.3025	Hz
6	Flexión FW	100.5489	Hz
7	Flexión FW	169.6774	Hz
8	Flexión FW - Torsión	169.8995	Hz
9	Flexión FW - Torsión	250.0351	Hz
10	Flexión EW	268.6326	Hz

**Tabla 7.15:** Frecuencias naturales de la estructura alar.

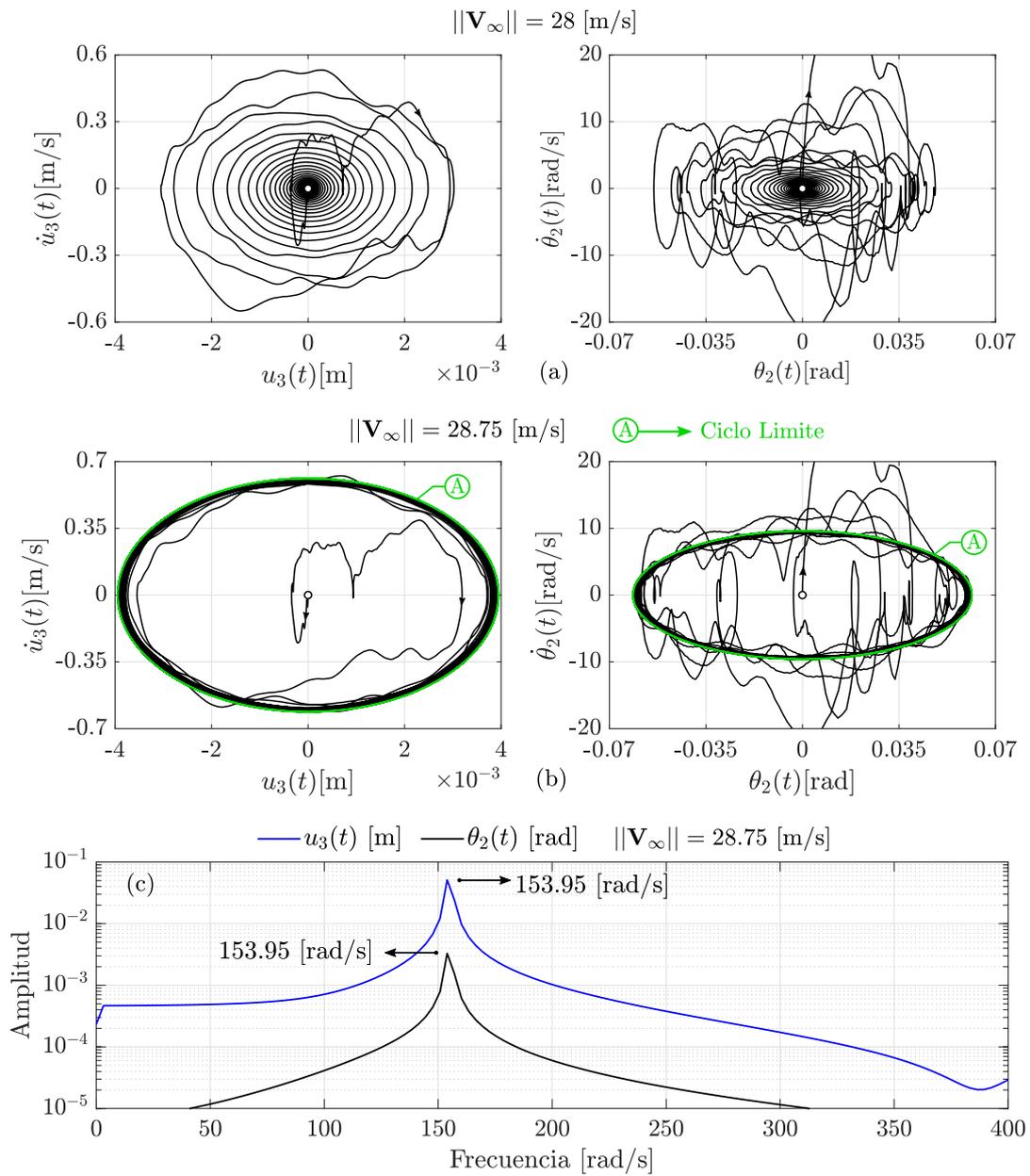
efectuado para este caso como una solución de compromiso entre precisión de resultados y costo computacional. Para finalizar la descripción, en la Tabla 7.15 se presentan las primeras diez frecuencias naturales de la estructura junto a la identificación de la forma modal asociada. Las iniciales FW refieren al término *flapwise*, en tanto que las iniciales EW al término *edgewise*.

## Resultados

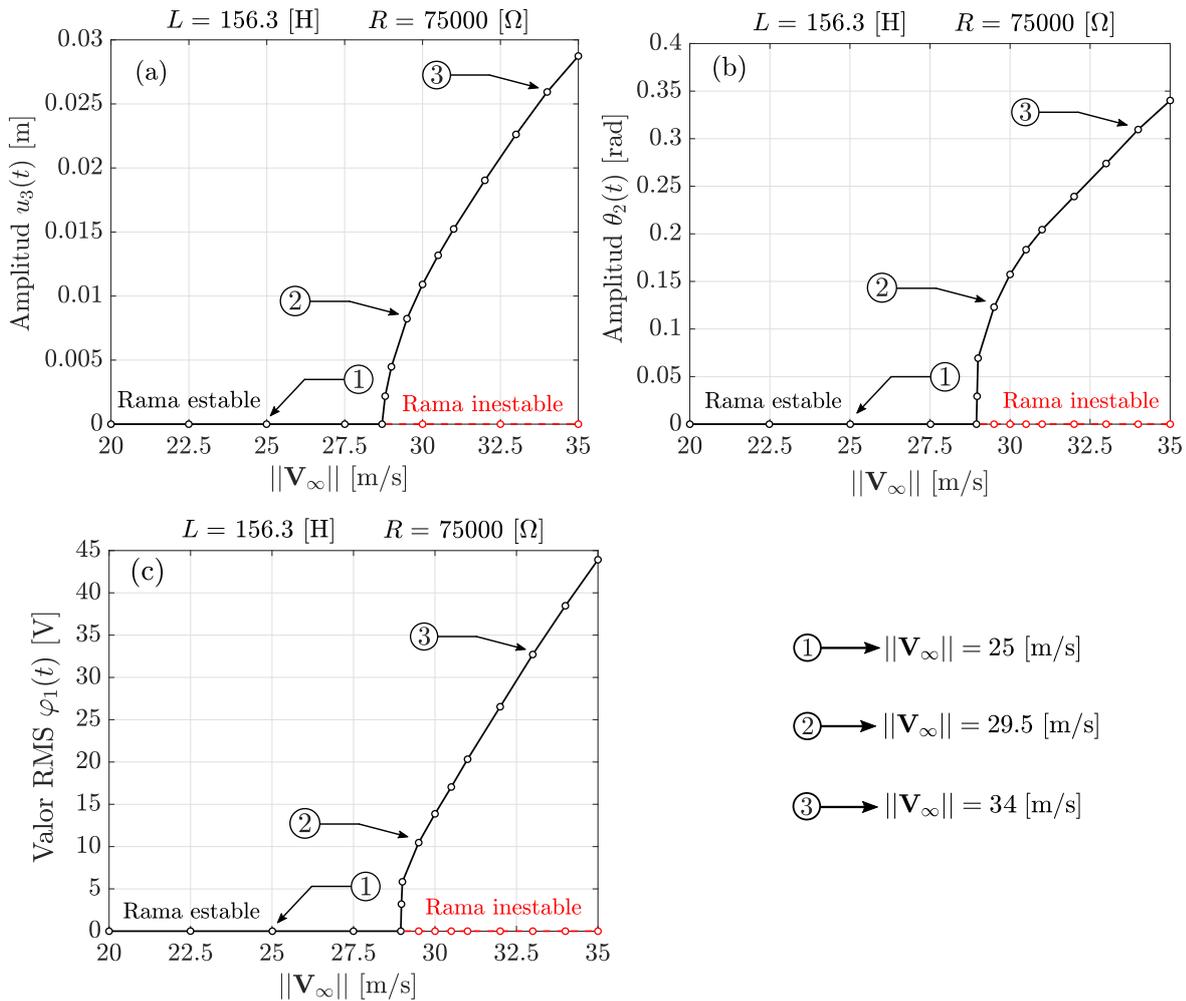
Los resultados que se exponen a continuación provienen de simulaciones numéricas realizadas en el dominio del tiempo. La respuesta electroaeroelástica del cosechador se evalúa poniendo en consideración el desempeño de tres grados de libertad, dos geométricos y uno eléctrico. Los dos primeros corresponden a la componente  $u_3(t)$  del vector desplazamiento y a la componente  $\theta_2(t)$  del vector de rotaciones infinitesimales del nodo identificado por A en la Figura 7.32. Los subíndices de estas variables se asocian a los ejes coordenados introducidos en la citada figura. Por su parte, el grado de libertad eléctrico corresponde al potencial o voltaje  $\varphi_1(t)$  que se desarrolla entre los componentes eléctricos pasivos. En todos los casos, para desplazar a la estructura del reposo se introdujo una perturbación que se modela mediante una corriente vertical ( $X_3$ ) de magnitud igual a 5 [m/s] aplicada durante los dos primeros pasos aerodinámicos.

En primera instancia, se estimó la velocidad de la corriente libre a partir de la cual ocurre el fenómeno aeroelástico *flutter*. Esto se efectuó sin considerar el cosechador de energía ( $R \rightarrow 0$  y  $L \rightarrow 0$ ) pero contemplando el aporte estructural de los transductores. Al respecto, en la Figuras 7.33a y 7.33b se presenta la evolución de las variables  $u_3(t)$  y  $\theta_2(t)$  en el plano de fase para dos velocidades del fluido, 28 [m/s] y 28.75 [m/s]. El instante inicial se representa mediante un círculo, en tanto que el sentido de avance en el tiempo se indica por medio de flechas dibujadas sobre las curvas. Al mismo tiempo, en la Figura 7.33c se exhibe el resultado de aplicar la Transformada Rápida de Fourier sobre las señales  $u_3(t)$  y  $\theta_2(t)$ .

Con el propósito de conocer la dinámica del sistema, en la Figuras 7.34a a 7.34c se exponen los diagramas de bifurcación para los tres grados de libertad de referencia. Ellos se



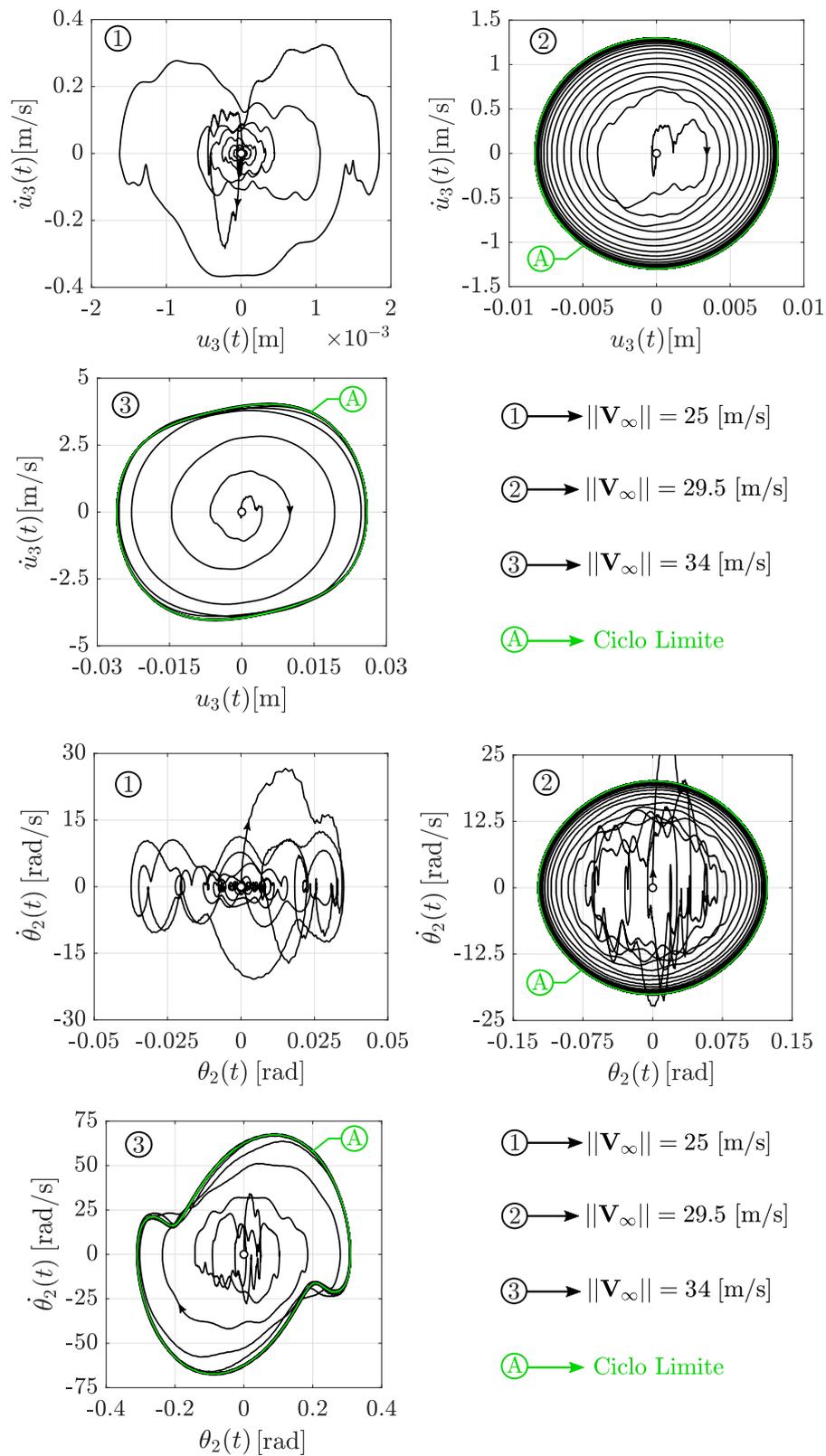
**Figura 7.33:** (a) Diagrama de fase para  $u_3(t)$  y  $\theta_2(t)$  cuando  $||\mathbf{V}_\infty|| = 28$  [m/s]; (b) Diagrama de fase para  $u_3(t)$  y  $\theta_2(t)$  cuando  $||\mathbf{V}_\infty|| = 28.75$  [m/s]; (c) FFT aplicada sobre  $u_3(t)$  y  $\theta_2(t)$  para  $||\mathbf{V}_\infty|| = 28.75$  [m/s].



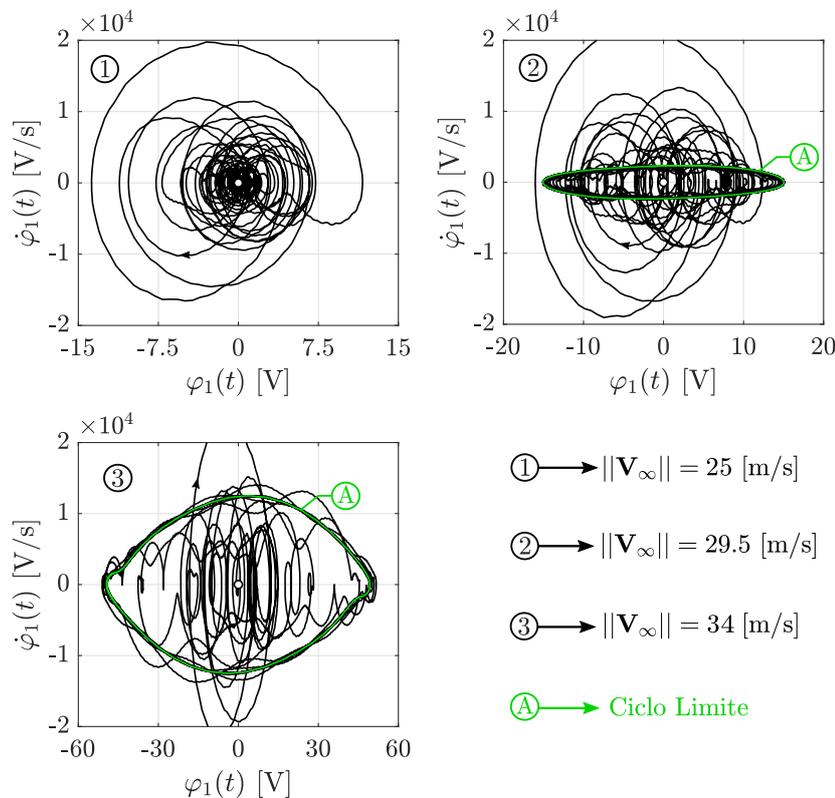
**Figura 7.34:** Diagrama de bifurcación para las variables: (a) desplazamiento  $u_3(t)$ ; giro  $\theta_2(t)$  y (c) potencial eléctrico  $\varphi_1(t)$ .

construyeron graficando a la velocidad de la corriente libre en el eje horizontal y a la amplitud de vibración o al valor RMS en el eje vertical según corresponda. En este caso, estos resultados han sido obtenidos considerando el cosechador, los valores de resistencia e inductancia usados se indican en la Figura 7.34. Con el objetivo de profundizar en el entendimiento del sistema, en las Figuras 7.35 a 7.36 se muestran los diagramas de fase para estas tres variables, los cuales se corresponden con los valores de velocidad señalados mediante marcadores circulares en la Figura 7.34. En ellos se identifica mediante color verde a los ciclos límites.

Por otro lado, en la Figura 7.37 se exhibe la evolución del valor RMS del potencial y del valor medio de la potencia eléctrica en función de la resistencia. Al respecto, los gráficos que se presentan en las Figuras 7.37a y 7.37b se obtuvieron para velocidades del fluido de 32 y 33 [m/s] respectivamente y una inductancia de  $L = 156.3$  [H]. El valor de  $L$  no se eligió arbitrariamente sino que se computó tal que la frecuencia de resonancia del circuito  $RLC$



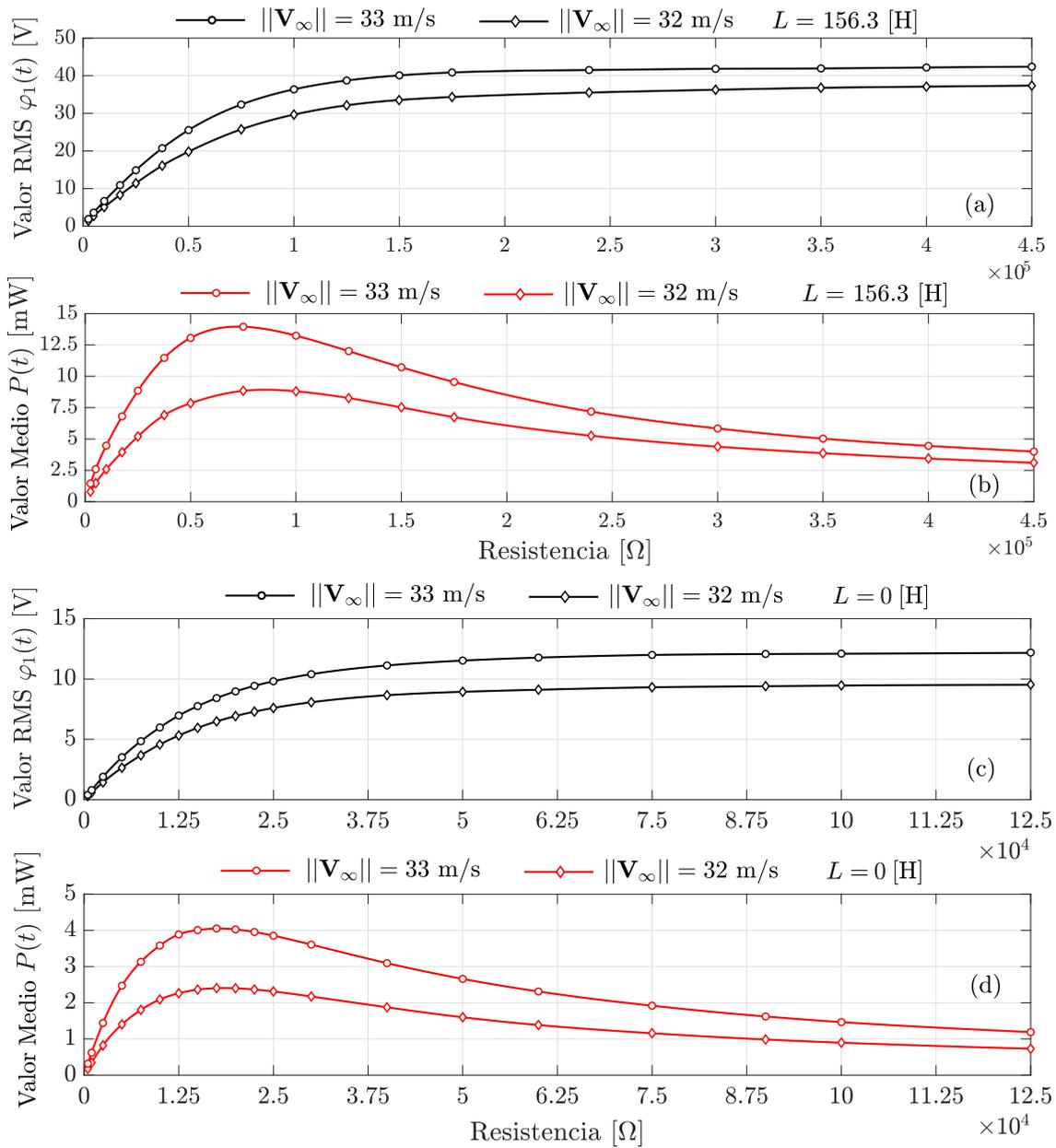
**Figura 7.35:** Diagrama de fase para el desplazamiento  $u_3(t)$  y el giro  $\theta_2(t)$  considerando tres velocidades del aire diferentes.



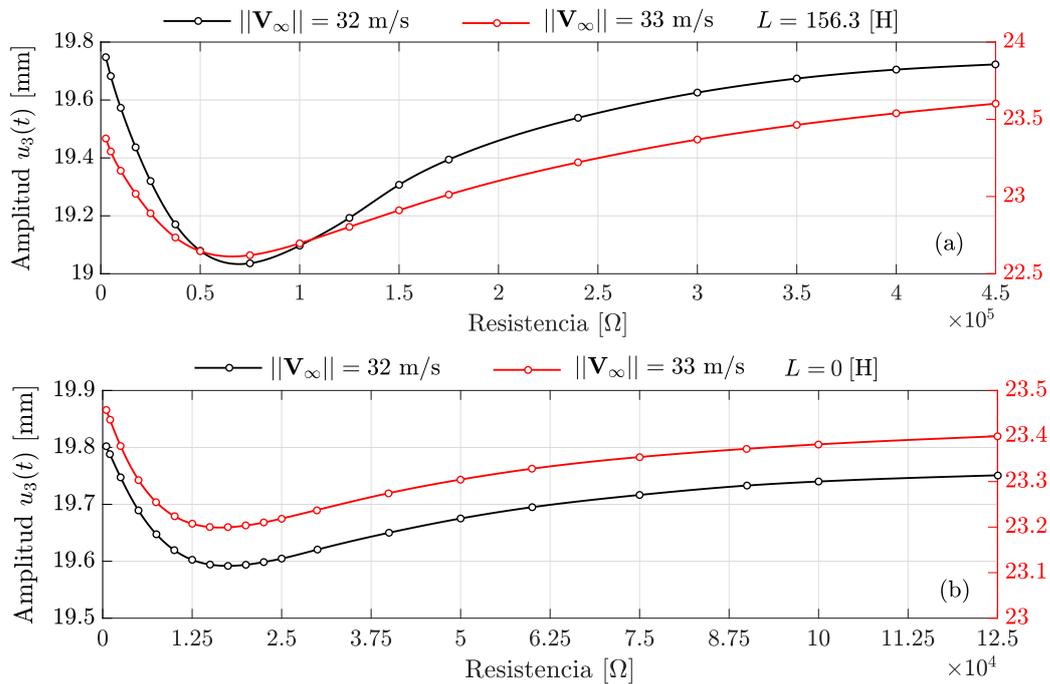
**Figura 7.36:** Diagrama de fase para el potencial  $\varphi_1(t)$  considerando tres velocidades del aire diferentes.

coincida con la frecuencia dominante de la estructura a 32 [m/s]. Como se puede advertir, este valor de inductancia es sumamente elevado. No obstante, tal como expone De Marqui dichos valores pueden ser alcanzados mediante inductancias sintéticas o circuitos eléctricos específicos [33]. Por su parte, en las Figuras 7.37c y 7.37d se grafican las mismas variables para las mismas velocidades, 32 y 33 [m/s], pero en ambos casos la inductancia es nula. Adicionalmente, en la Figura 7.38 se expone el comportamiento de la amplitud de  $u_3(t)$  con la resistencia para los mismos valores de velocidad e inductancia que los adoptados en la Figura 7.37. En la Figura 7.39a se presenta el resultado de aplicar la Transformada Rápida de Fourier (FFT) sobre tres respuestas temporales de  $u_3(t)$  asociadas a tres configuraciones eléctricas diferentes. Estas respuestas han sido obtenidas para una velocidad del fluido igual a 32 [m/s]. Y por último, en la Figura 7.39b se muestra la evolución temporal de  $u_3(t)$  entre dos instantes de tiempo que pertenecen al estado de régimen de la solución.

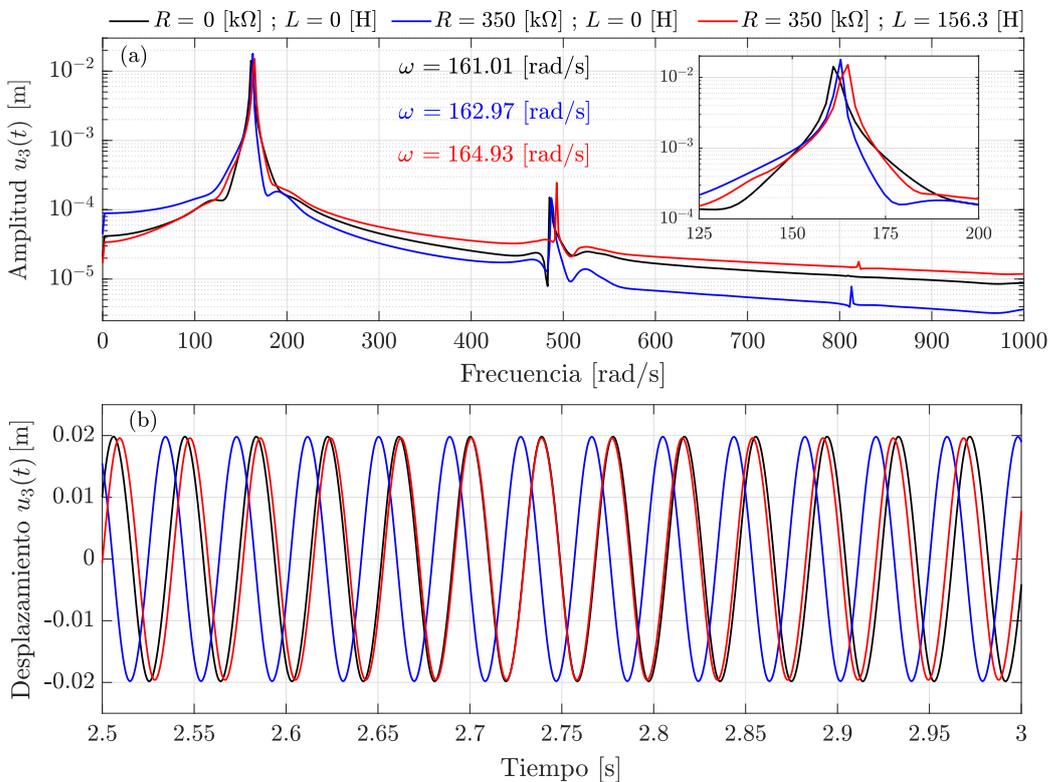
Finalmente, en la Figura 7.40 se exhibe la configuración que adopta la estructura y la sábana vorticiosa libre junto a la distribución del coeficiente de presión sobre la grilla aerodinámica. Esto corresponde a un instante de tiempo fijo para una velocidad del aire de 29.5 [m/s].



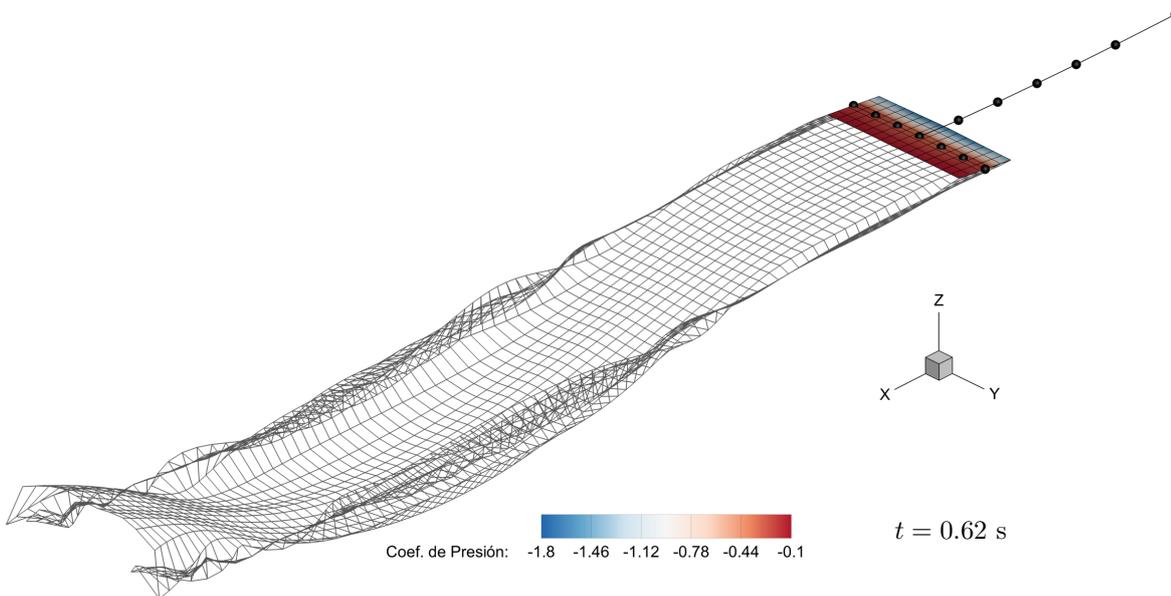
**Figura 7.37:** Voltaje RMS y potencia media en función de la resistencia para: (a) y (b)  $L = 156.3$  [H],  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 32$  [m/s] y  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 33$  [m/s]; (c) y (d)  $L = 0$  [H],  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 32$  [m/s] y  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 33$  [m/s].



**Figura 7.38:** Amplitud del desplazamiento  $u_3(t)$  para: (a)  $L = 156.3$  [H],  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 32$  [m/s] y  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 33$  [m/s]; (b)  $L = 0$  [H],  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 32$  [m/s] y  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 33$  [m/s].



**Figura 7.39:** (a) FFT aplicada sobre  $u_3(t)$  y (b) respuesta en régimen de  $u_3(t)$  para diferentes valores de los parámetros eléctricos.



**Figura 7.40:** Distribución del coeficiente de presión sobre el perfil alar para  $\|\mathbf{V}_\infty\| = 29.5$  [m/s].

### Discusión de resultados y conclusiones

De los diagramas de fase de la Figura 7.33 se percibe que la estabilidad del sistema cambia a partir de los 28.75 [m/s]. Por debajo de esta velocidad, los grados de libertad geométricos de referencia alcanzan oscilatoriamente el reposo luego de un cierto tiempo. Una vez alcanzada o superada dicha velocidad, las amplitudes de vibración se mantienen constantes en el tiempo, describiendo oscilaciones de ciclo límite (LCO). En los gráficos (c) y (d) de la Figura 7.33 se presentan dos centros que caracterizan a las LCO a 28.75 [m/s]. Estos centros representan una solución periódica con una única frecuencia de oscilación. En base a lo mencionado, la velocidad de *flutter* en condición de cortocircuito ( $R \rightarrow 0$  y  $L \rightarrow 0$ ) es de  $\|\mathbf{V}_f\| = 28.75$  [m/s]. Por su parte, del espectro de la Figura 7.33e se infiere que la frecuencia de *flutter* para la misma condición es de  $\omega_f = 153.95$  [rad/s].

Los diagramas de la Figura 7.34 permiten caracterizar la dinámica del cosechador para  $R = 75$  [k $\Omega$ ] y  $L = 156.3$  [H]. En ellos se observa que los tres grados de libertad de referencia muestran una bifurcación supercrítica de *Hopf* a partir de los 28.95 [m/s]. Se advierte que esta velocidad es 0.2 [m/s] más alta que  $\|\mathbf{V}_f\|$ , lo cual está estrictamente vinculado a la presencia del circuito eléctrico y, en particular, a los valores que adoptan  $R$  y  $L$ . Si bien sólo se exhibieron los diagramas para valores específicos de los parámetros eléctricos, cualitativamente no se observan diferencias significativas al variar estos parámetros. No obstante, para un análisis más profundo es necesario efectuar un mayor número de simulaciones, lo cual está fuera del alcance de este estudio.

Por otra parte, los planos de fase de las Figuras 7.35 y 7.36 exponen ciertas particularidades.

Al respecto, cuando la velocidad del aire es subcrítica los tres grados de libertad regresan a su posición de equilibrio luego de un período de tiempo. A pesar de ello, durante este transitorio es posible extraer energía del fluido y convertirla en energía eléctrica a través los transductores (Figura 7.B.1). En contraposición, para estados poscríticos y, en particular a medida que crece la velocidad, se observa un cambio en la apariencia de los ciclos límites. En este sentido, para 29.5 [m/s] los tres grados de libertad describen un centro alrededor del origen. Sin embargo, cuando la velocidad aumenta a 34 [m/s] los centros se distorsionan. Esto puede atribuirse a la presencia de otros puntos críticos atractores. Aunque no se exponga aquí, los espectros en frecuencias de las tres variables para 34 [m/s] muestran frecuencias secundarias iguales al triple de la frecuencia dominante. Si bien es necesario contar con más simulaciones, estas frecuencias podrían corresponderse con soluciones periódicas alrededor de estos puntos críticos. Este fenómeno se detecta en las tres variables aunque es más notorio en el giro  $\theta_2(t)$ .

El desempeño del cosechador de energía se puede evaluar a partir de lo expuesto en la Figura 7.37. En particular, para una velocidad del aire poscrítica de 32 [m/s] y una inductancia de 156.3 [H] se observa que el valor RMS del potencial crece a medida que aumenta la resistencia hasta alcanzar un valor asintótico. Este valor recibe el nombre de voltaje de circuito abierto y su magnitud se sitúa próxima a 37.4 [V]. Al mismo tiempo, la potencia media aumenta con la resistencia hasta alcanzar un valor máximo igual a 8.85 [mW] para  $R = 75$  [k $\Omega$ ]. Luego de este máximo, la potencia empieza a decrecer a un ritmo prácticamente hiperbólico. Esto se debe a que el voltaje comienza a estabilizarse y a que la potencia media es inversamente proporcional a la resistencia. Para una velocidad de 33 [m/s], el voltaje de circuito abierto es próximo a 42.4 [V] y la potencia media máxima ocurre para la misma resistencia que el caso previo y es igual a 13.95 [mW]. Similarmente, el desempeño del cosechador sin inductancia se expone para dos velocidades poscríticas, 32 y 33 [m/s]. En general, el comportamiento observado para ambas velocidades es idéntico al detallado con anterioridad. En este sentido, el voltaje de circuito abierto para 32 [m/s] es de 9.5 [V] y de 12.2 [V] para 33 [m/s]. Asimismo, el valor máximo para la potencia media es de 2.41 [mW] para 32 [m/s] y de 4.05 [mW] para 33 [m/s] cuando  $R = 17.5$  [k $\Omega$ ]. De estos resultados se desprende que, para igual velocidad del aire, la potencia media máxima es 3.4  $\sim$  3.7 veces más alta si se añade el inductor de 156.3 [H].

El penúltimo análisis se sustenta en lo expuesto en la Figura 7.38. De las curvas que se presentan se observa que la amplitud del desplazamiento  $u_3(t)$  es una función de la resistencia cuando la inductancia y la velocidad del aire son constantes. Se puede apreciar que esta amplitud disminuye hasta alcanzar un mínimo, luego comienza a crecer lentamente con tendencia hacia un valor asintótico. Uno puede notar que, cualitativamente, el comportamiento de estas curvas es opuesto al que muestra la potencia media. Pese a ello, la amplitud mínima no necesariamente ocurre para el mismo valor de resistencia que maximiza la potencia media. Esto se debe a que las funciones a minimizar y a maximizar son diferentes aunque el parámetro de ajuste sea el mismo. De la Figura 7.38a se infiere que, para las resistencias evaluadas, el desplazamiento

mínimo para 32 [m/s] es de 19.03 [mm] y de 22.62 [mm] para 33 [m/s], ambos se dan para  $R = 75$  [k $\Omega$ ]. Mientras que los valores mínimos para las curvas de la Figura 7.38b son 19.6 [mm] para 32 [m/s] y 23.2 [mm] para 33 [m/s], ambos para  $R = 17.5$  [k $\Omega$ ].

Finalmente, con el propósito de analizar la influencia que tienen los parámetros eléctricos en la frecuencia dominante de oscilación se consideran los tres casos expuestos en la Figura 7.37, los cuales se asocian a una velocidad del aire de 32 [m/s] y a la siguiente combinación de parámetros:  $R = 0$  [k $\Omega$ ] y  $L = 0$  [H],  $R = 350$  [k $\Omega$ ] y  $L = 0$  [H],  $R = 350$  [k $\Omega$ ] y  $L = 156.3$  [H]. Es importante apreciar que se optó por una resistencia de 350 [k $\Omega$ ] ya que, según lo expuesto en las Figuras 7.37a y 7.37c, garantiza una condición de circuito abierto. Asimismo, se eligió una inductancia de idénticas características a la empleada en los casos previos. En base a lo observado, tanto la presencia de un circuito  $RC$  como la de un circuito  $RLC$  conducen a un aumento en la frecuencia dominante con respecto al caso sin cosechador. El aumento es de 1.61 [rad/s] para el primero de ellos y de 3.91 [rad/s] para el segundo. Este tipo de comportamiento se debe a la modificación que experimenta la rigidez del sistema debido a la presencia de los parámetros eléctricos.

### 7.2.2 Caso 6: Cosechadores de energía embebidos en una estructura alar

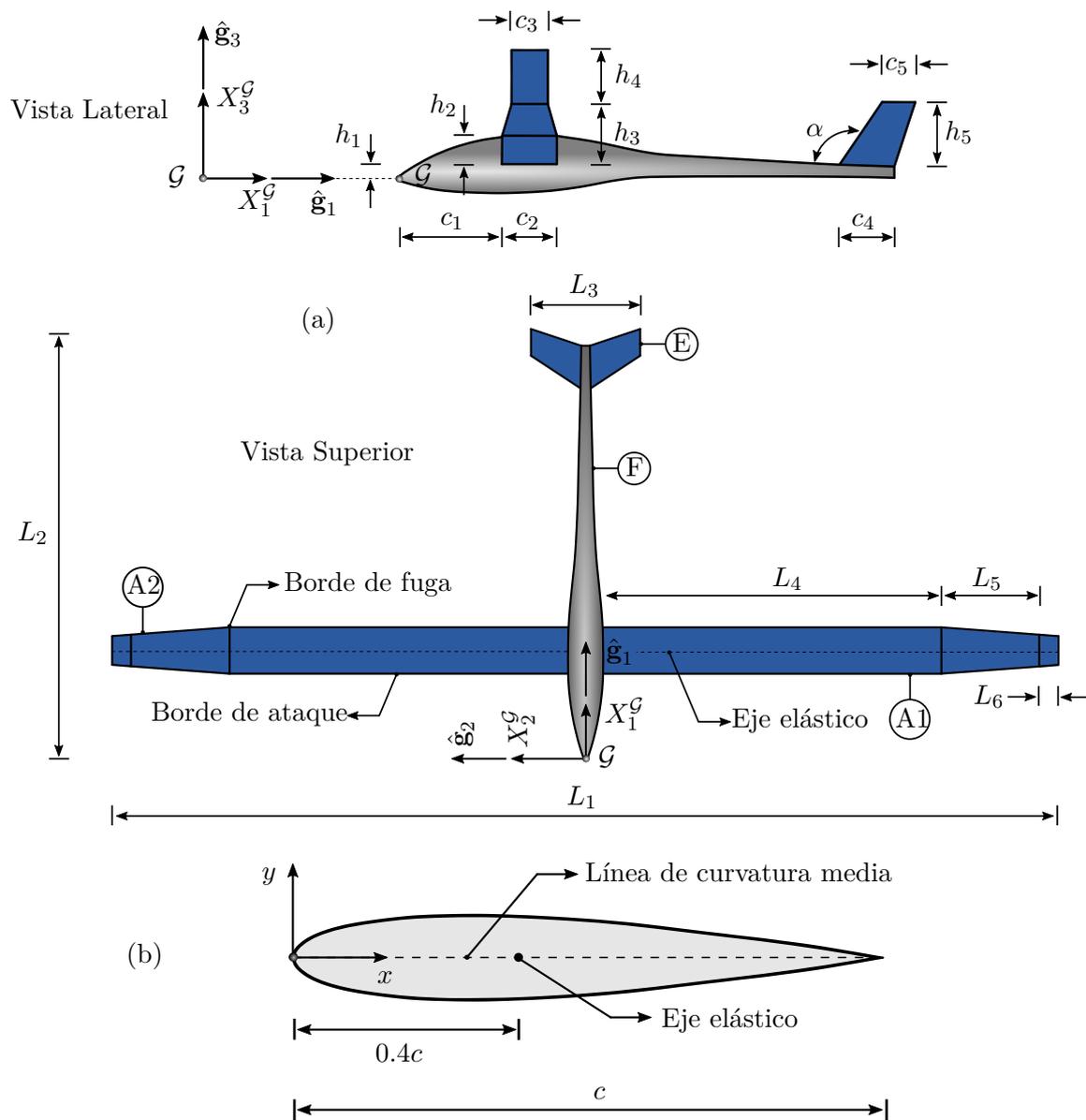
#### Descripción

En este caso de estudio se analiza el comportamiento electroaeroelástico del ala de una aeronave tipo planeador, el cual consiste meramente en un modelo matemático. Para este fin, en la Figura 7.41a se expone una representación de la aeronave junto a un conjunto de parámetros geométricos que describen su configuración y que se detallan en la Tabla 7.16. El sistema

Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
$c_1$	1.8	m	$c_2$	1	m
$c_3$	0.66	m	$c_4$	1	m
$c_5$	0.6	m	$\alpha$	113	°
$h_1$	0.25	m	$h_2$	0.5	m
$h_3$	1.05	m	$h_4$	0.95	m
$h_5$	1.15	m	$L_1$	20.8	m
$L_2$	9.5	m	$L_3$	2.4	m
$L_4$	7.2	m	$L_5$	2.5	m
$L_6$	0.3	m			

**Tabla 7.16:** Parámetros geométricos de la aeronave.

está compuesto por un fuselaje (F) y un empenaje vertical (E), considerados como grillas de contorno, y dos alas flexibles, una izquierda (A1) y una derecha (A2). En virtud de reducir el tamaño del problema y efectuar una estimación inicial, los resultados se obtendrán considerando sólo el ala izquierda de la aeronave, la cual está fabricada de material compuesto y posee cinco



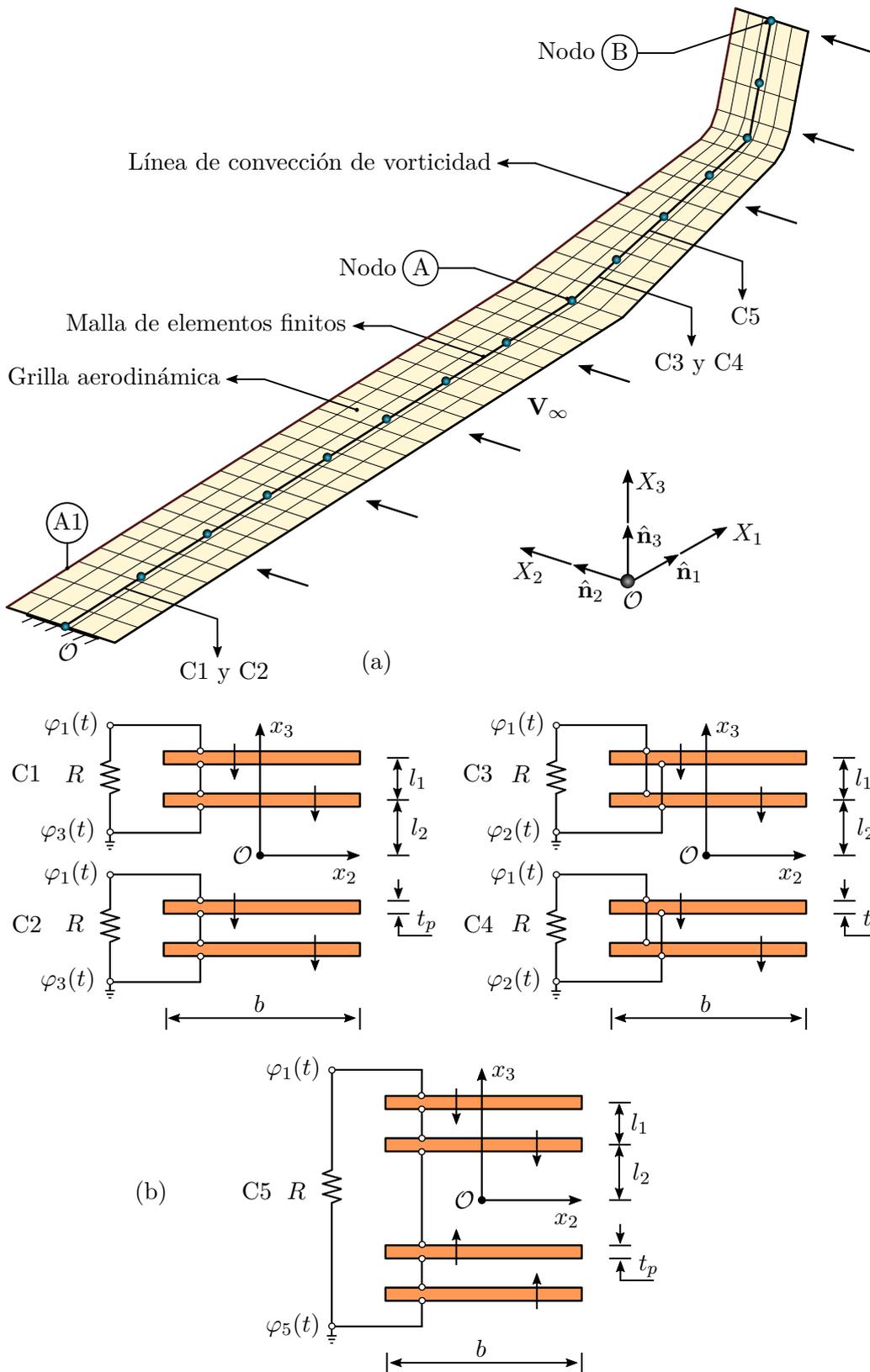
**Figura 7.41:** Aeronave tipo planeador: (a) Vista superior y vista lateral; (b) características del perfil alar considerado.

cosechadores  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) piezoeléctricos embebidos en su estructura. Según se observa en la Figura 7.41b, para especificar la posición del eje elástico con relación al perfil alar simétrico se considera un sistema de coordenadas  $(x, y)$  con origen en el borde de ataque. El eje  $x$  atraviesa el borde de fuga mientras que el eje  $y$  es perpendicular al primero.

En la Figura 7.42 se presenta el modelo numérico del ala izquierda. En ella se introduce un sistema de coordenadas cartesianas  $(X_1, X_2, X_3)$  junto a una base ortonormal  $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$  asociada con origen en el punto  $\mathcal{O}$ . Dicho origen se sitúa en la raíz del ala, en la intersección entre el eje elástico y la sección transversal. El plano  $X_2 - X_3$  es paralelo al plano de simetría de la aeronave.

En lo que respecta al modelo estructural, el ala se representa mediante tres vigas dispuestas consecutivamente con un extremo empotrado. Las vigas se discretizan empleando un total de 14 elementos finitos que se distribuyen uniformemente según lo mostrado en la Figura 7.42. Las propiedades seccionales equivalentes se indican en la Tabla 7.C.1 del Apéndice y están dadas en función de la numeración elemental, la cual comienza en la raíz del ala y se extiende de manera creciente en la dirección de la envergadura. Estas propiedades han sido extraídas del trabajo de Su [107] y se corresponden con una estructura alar de características similares a la propuesta. Con relación al modelo aerodinámico, la superficie media del ala es plana y se divide con 5 paneles en la dirección de la cuerda y en 39 paneles en dirección de la envergadura, según lo indicado en la Figura 7.42a. Por su parte, en la Figura 7.42b se presenta la distribución de los cosechadores de energía en la sección transversal de los elementos que los contienen. La configuración de los transductores ha sido propuesta *ad-hoc* ya que, al trabajar con propiedades equivalentes, no se conoce la geometría de la sección transversal. En este sentido, de las Figuras 7.42a y 7.42b se desprende que el C1 y el C2 se sitúan en el elemento 1, el C3 y el C4 se ubican en el elemento 9, y el C5 está embebido en el elemento 10. A su vez, el sistema de referencia  $(x_1, x_2, x_3)$  que se identifica en la Figura 7.42b corresponde al sistema de coordenadas elemental. En este caso, el eje  $x_1$  coincide con el eje elástico y el eje  $x_2$  se extiende en dirección de la cuerda. Cada cosechador está formado por dos o cuatro transductores laminares conectados en serie o en paralelo según corresponda. Su disposición geométrica en la sección se obtiene a partir de la Figura 7.42b y de la Tabla 7.17. En todos los casos las láminas piezocerámicas se ubican simétricamente con respecto a los ejes  $x_2$  y  $x_3$ , su material es PZT-5A y sus propiedades electromecánicas se exponen en la Tabla C.1 del Anexo C. A su vez, se coloca un resistor de resistencia  $R$  entre los terminales del conjunto de transductores cuya magnitud es la misma en todos los circuitos. En base a lo expuesto, el modelo posee 84 grados de libertad geométricos y 10 grados de libertad eléctricos. Además, no se incluye amortiguamiento estructural.

En la Tabla 7.18 se presentan los parámetros comunes a todas las simulaciones, las cuales se realizan empleando el MD - No Lineal. En todas ellas, se considera que la estructura está en reposo en todo instante  $t < 0$  y que en  $t = 0$  se la expone a un arranque impulsivo. Por otro lado, se implementó un recorte de estela vorticiosa con una longitud de 80 paneles de extensión,



**Figura 7.42:** (a) Modelo numérico del ala izquierda (A1): malla estructural y grilla aerodinámica. (b) Configuración geométrica de los cinco cosechadores de energía.

Cosechador	Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
C1 y C2	$l_1$	3	mm	$l_2$	67.25	mm
	$b$	225	mm	$t$	0.5	mm
C3 y C4	$l_1$	3	mm	$l_2$	36.45	mm
	$b$	120	mm	$t$	0.5	mm
C5	$l_1$	3	mm	$l_2$	32.4	mm
	$b$	120	mm	$t_p$	0.5	mm

**Tabla 7.17:** Parámetros geométricos que definen la posición de los transductores (PZT-5A) en la sección transversal.

Parámetro	Magnitud	Unidad	Parámetro	Magnitud	Unidad
$\Delta t_a$	$1.2 \times 10^{-3}$	s	$\Delta t_s$	$1.8181 \times 10^{-5}$	s
$\rho$ (Aire)	1.225	Kg/m <sup>3</sup>	$\ V_\infty\ $	Variable	m/s
$\delta$ (Cutoff)	1 %	-	$R$	Variable	k $\Omega$

**Tabla 7.18:** Parámetros usados en las simulaciones.

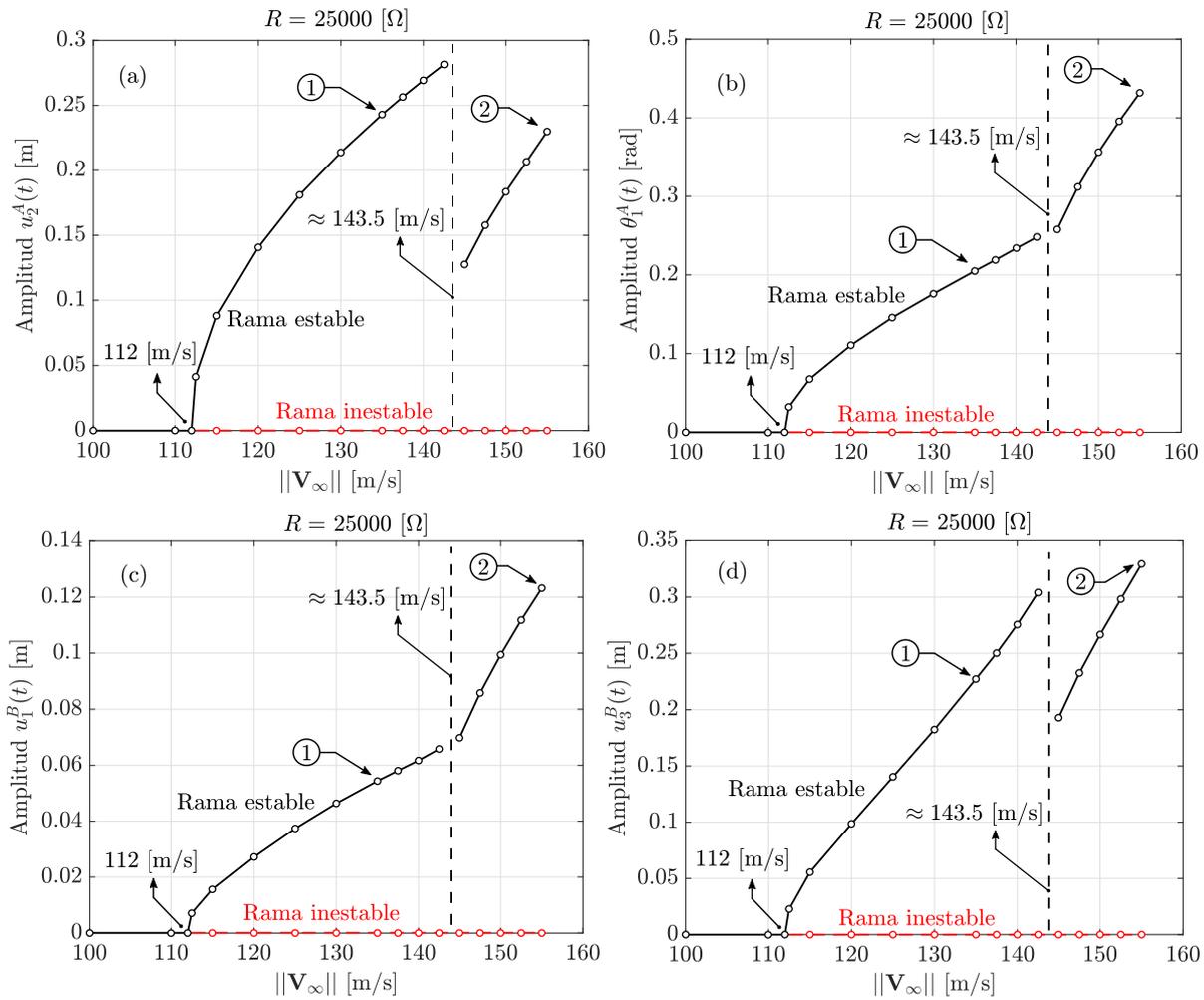
Frecuencia	Forma modal	Magnitud	Unidad
1	Flexión FW	3.5299	Hz
2	Flexión FW	13.5599	Hz
3	Torsión - Flexión EW	14.3874	Hz
4	Torsión	22.0105	Hz
5	Flexión FW	31.8326	Hz
6	Torsión	43.3054	Hz
7	Torsión - Flexión EW	61.0805	Hz
8	Flexión FW	65.6423	Hz
9	Torsión	70.0263	Hz
10	Flexión FW	102.5794	Hz

**Tabla 7.19:** Frecuencias naturales de la estructura alar.

lo que equivale a 16 cuerdas. Para finalizar la descripción, en la Tabla 7.19 se listan las primeras diez frecuencias naturales de la estructura, donde las iniciales FW refieren al término *flapwise*, en tanto que las iniciales EW al término *edgewise*.

## Resultados

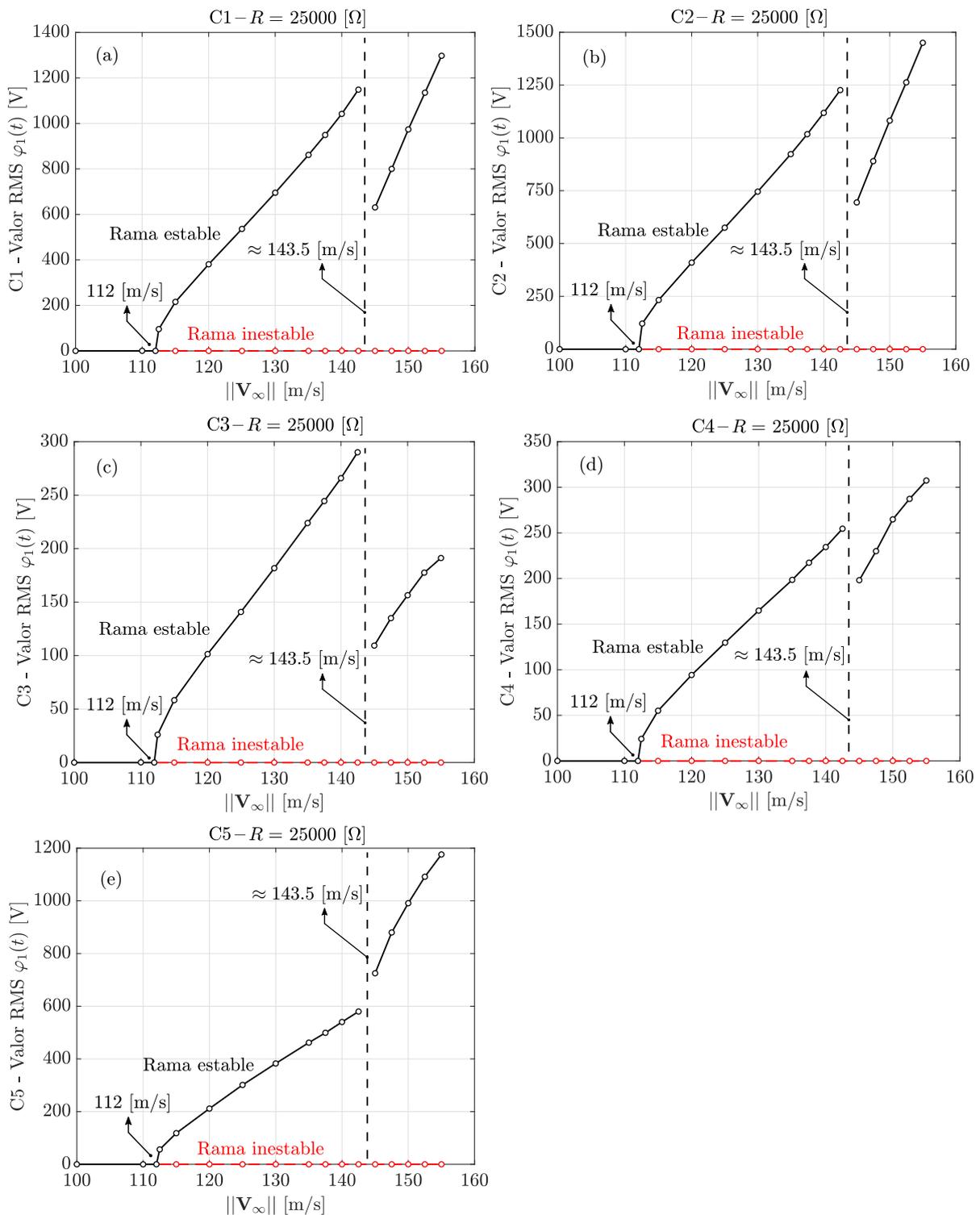
Los resultados que se exponen seguidamente se basan en el desempeño temporal de los grados de libertad cinemáticos y eléctricos. Con respecto a los primeros, se eligió a los desplazamientos  $u_i^A(t)$  y  $u_i^B(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) y a los giros  $\theta_1^A(t)$  y  $\theta_3^B(t)$  de los nodos A y B de la Figura 7.42a. Los subíndices de estas variables se asocian a los ejes coordenados introducidos en dicha figura. Con relación a los segundos, se adoptaron a los potenciales eléctricos  $\varphi_1(t)$  de cada uno de los



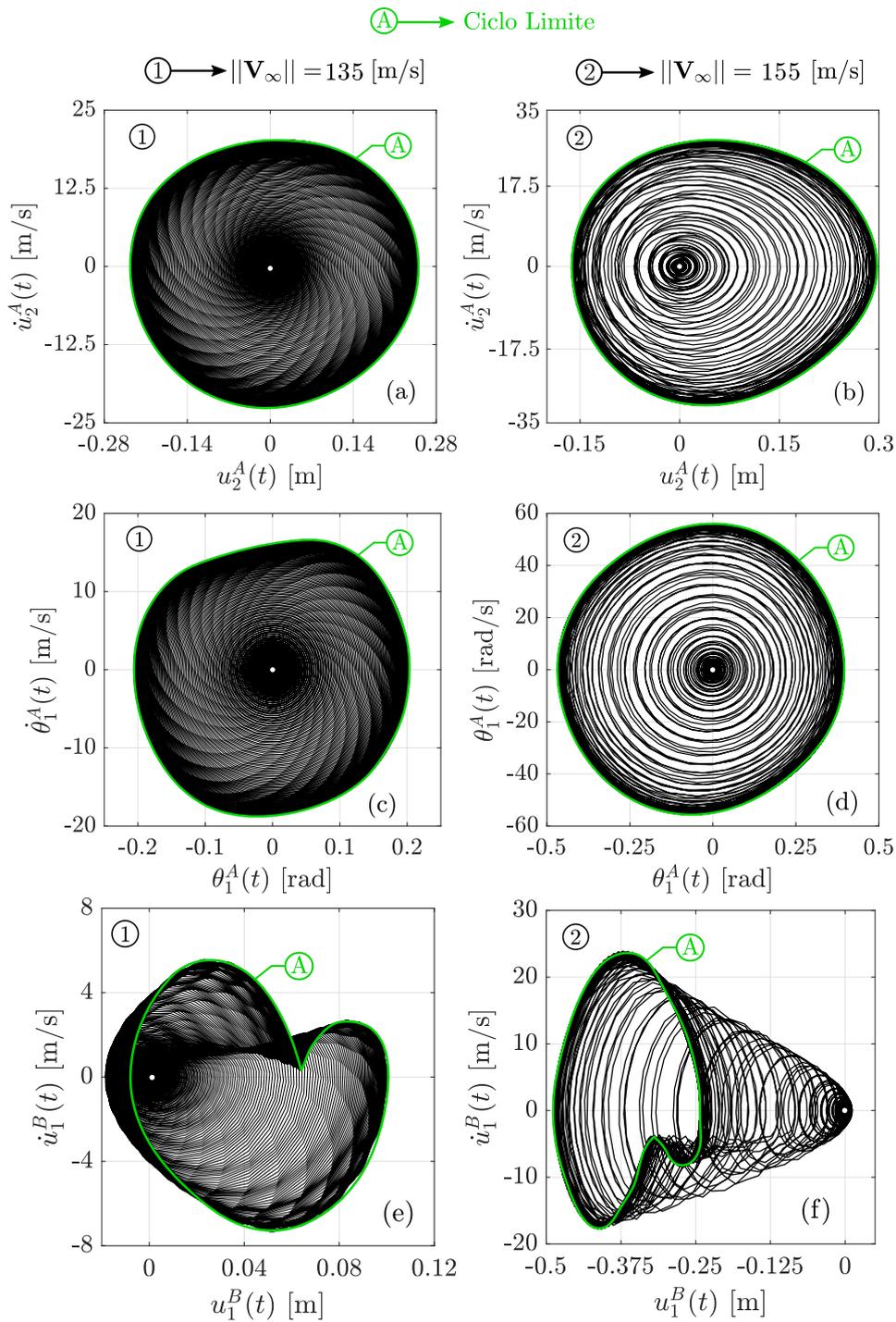
**Figura 7.43:** Diagramas de bifurcación para: (a) el desplazamiento  $u_2^A(t)$ ; (b) el giro  $\theta_1^A(t)$ ; (c) el desplazamiento  $u_1^B(t)$  y (d) el desplazamiento  $u_3^B(t)$ .

cosechadores, los cuales indican el voltaje aplicado entre los terminales del resistor.

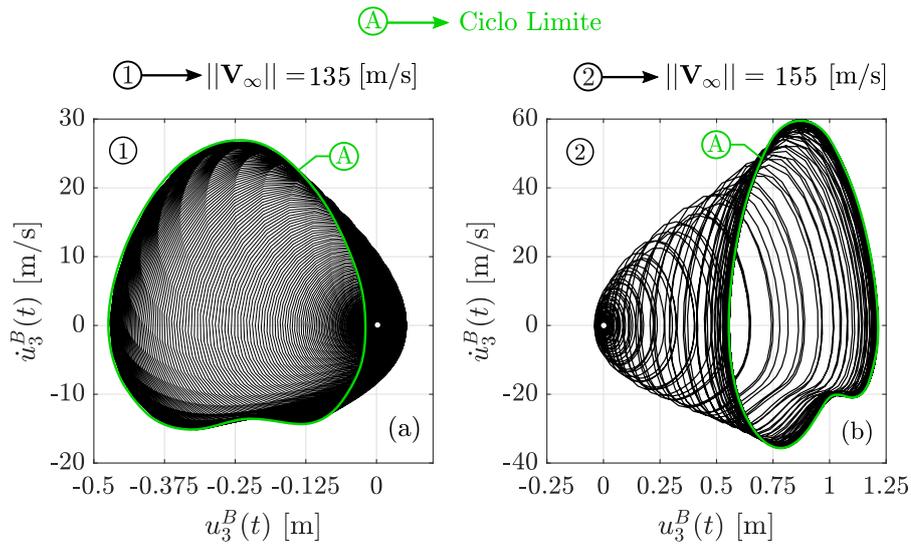
En primer lugar, y con el propósito de caracterizar la dinámica del sistema, se realizaron una serie de simulaciones numéricas para diferentes velocidades de la corriente. Al respecto, para desplazar a la estructura de su posición de equilibrio se introdujo una perturbación en el campo de velocidad que se caracteriza por un flujo vertical ( $X_3$ ) de intensidad igual a  $5 \text{ [m/s]}$  que se superpone a la corriente libre ( $X_2$ ). Esta perturbación se mantuvo sólo durante los dos primeros pasos de tiempo aerodinámicos. A su vez, en esta ocasión se adoptó de manera arbitraria una resistencia de  $25 \text{ [k}\Omega\text{]}$  para todos los cosechadores. Como resultado de ello, en la Figura 7.43 se presentan los diagramas de bifurcación para cuatro de los ocho grados de libertad cinemáticos de referencia. Tales diagramas se construyeron graficando en el eje vertical a las amplitudes de vibración en estado de régimen y en el eje horizontal a la velocidad del fluido. Por su parte, en la Figura 7.44 se exponen los diagramas correspondientes a los cinco grados de libertad eléctricos, los cuales han sido creados graficando los valores RMS de los potenciales en



**Figura 7.44:** Diagramas de bifurcación para: (a) el potencial  $\varphi_1(t)$  - C1; (b) el potencial  $\varphi_1(t)$  - C2; (c) el potencial  $\varphi_1(t)$  - C3; (d) el potencial  $\varphi_1(t)$  - C4 y (e) el potencial  $\varphi_1(t)$  - C5.



**Figura 7.45:** Diagramas de fase para: (a) y (b) el desplazamiento  $u_2^A(t)$  a 135 y 155 [m/s]; (c) y (d) el giro  $\theta_1^A(t)$  a 135 y 155 [m/s]; (e) y (f) desplazamiento  $u_1^B(t)$  a 135 y 155 [m/s].



**Figura 7.46:** Diagramas de fase: (a) y (b) desplazamiento  $u_3^B(t)$  a 135 y 155 [m/s].

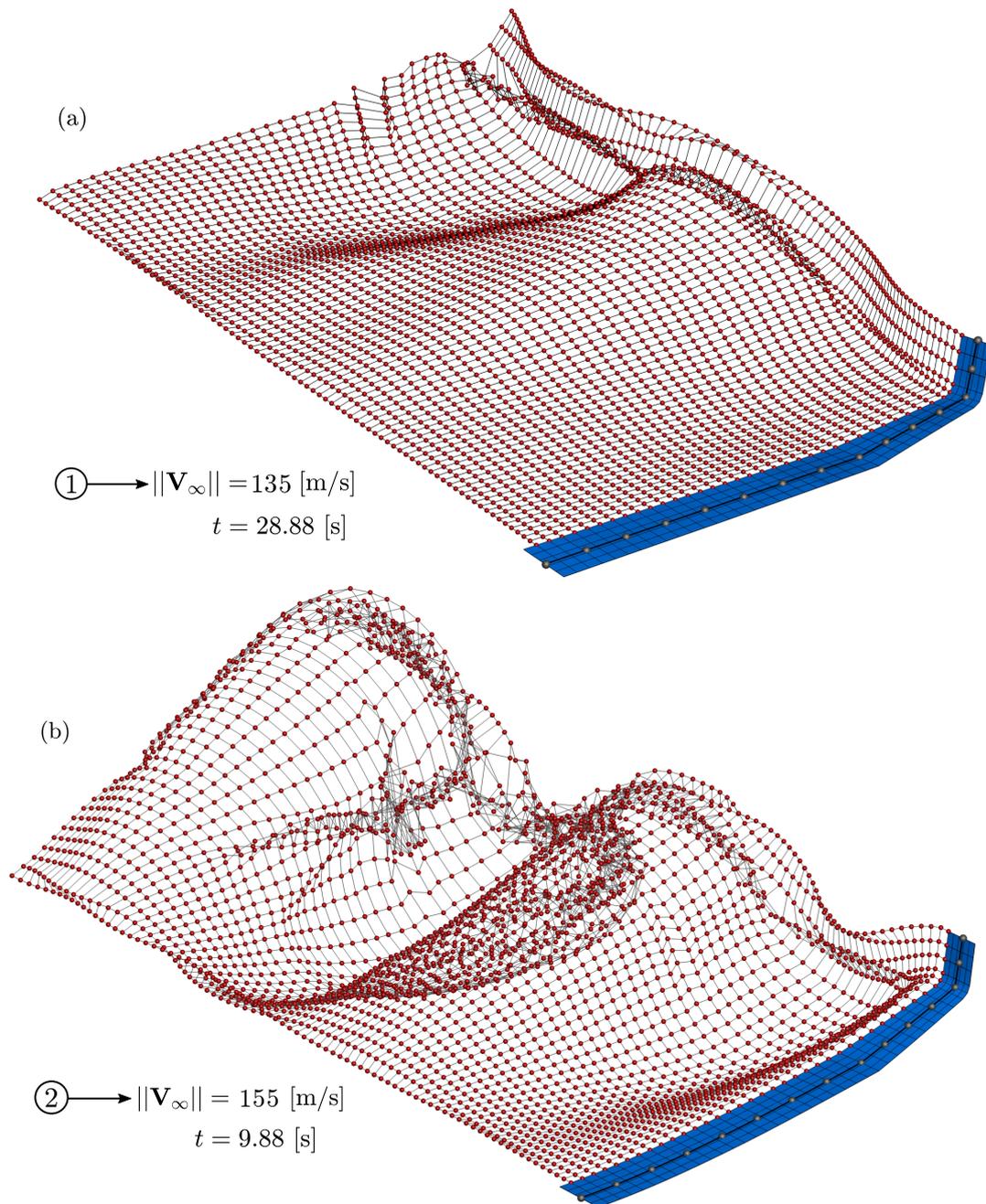
función de la velocidad del aire. Por cuestiones de espacio, en la Figura 7.C.3 del Apéndice de este capítulo se muestran los diagramas de bifurcación para los cuatro grados de libertad cinemáticos restantes.

Para profundizar en el entendimiento dinámico del sistema, en la Figuras 7.45 y 7.46 se exponen los diagramas de fase de las cuatro variables cinemáticas de la Figura 7.43 considerando dos velocidades del aire distintas, 135 [m/s] y 155 [m/s]. En ellos, la condición inicial se indica mediante un círculo, mientras que el ciclo límite correspondiente se identifica en color verde. Adicionalmente, en la Figura 7.47 se presenta la configuración geométrica del ala para un cierto instante de tiempo contemplando las dos velocidades del aire anteriores. A su vez, en la Figura 7.C.1 del Apéndice se muestra la evolución temporal de  $u_2^A(t)$ ,  $\theta_1^A(t)$  y  $u_i^B(t)$  ( $i = 1, 3$ ) para 135 [m/s] y 155 [m/s].

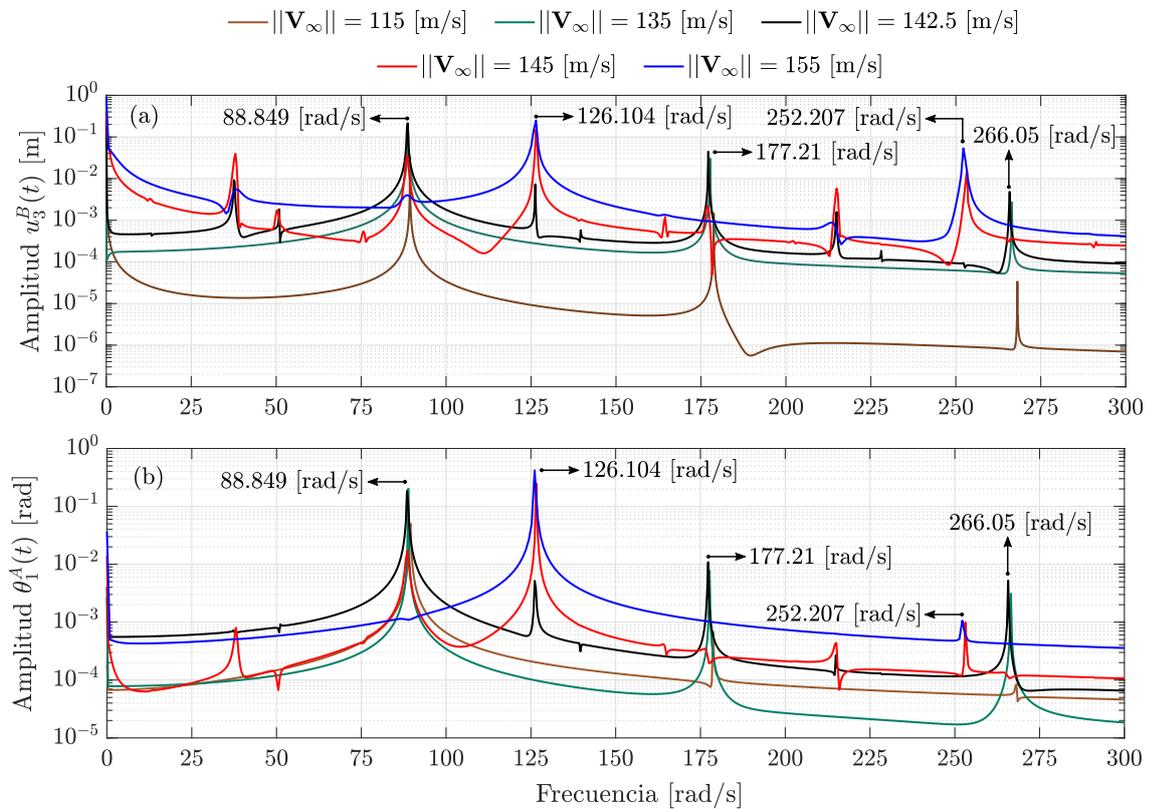
Por otro lado, en la Figura 7.48 se grafica el resultado de aplicar la Transformada Rápida de Fourier (FFT) sobre las señales temporales  $u_3^B(t)$  y  $\theta_1^A(t)$  para cinco velocidades del fluido diferentes.

Con el objetivo de evaluar el desempeño de los cosechadores se efectuaron simulaciones para una velocidad fija (arbitraria) de la corriente con ángulo de ataque de 3 grados, lo cual produce que el vector velocidad tenga componentes en dirección  $X_2$  y  $X_3$ . Al respecto, en las Figuras 7.49 y 7.50 se grafica la evolución del valor RMS del voltaje y de la potencia media en función de la resistencia eléctrica. Esto se presenta para los cinco cosechadores y se asocia a una velocidad del fluido de módulo igual a 135 [m/s]. Para complementar, en la Figura 7.C.2 del Apéndice de este capítulo se muestra la evolución temporal del voltaje y de la potencia instantánea en estado de régimen. Esto se presenta para una velocidad del flujo de 135 [m/s] y considerando las resistencias que producen la máxima cosecha de energía para cada cosechador.

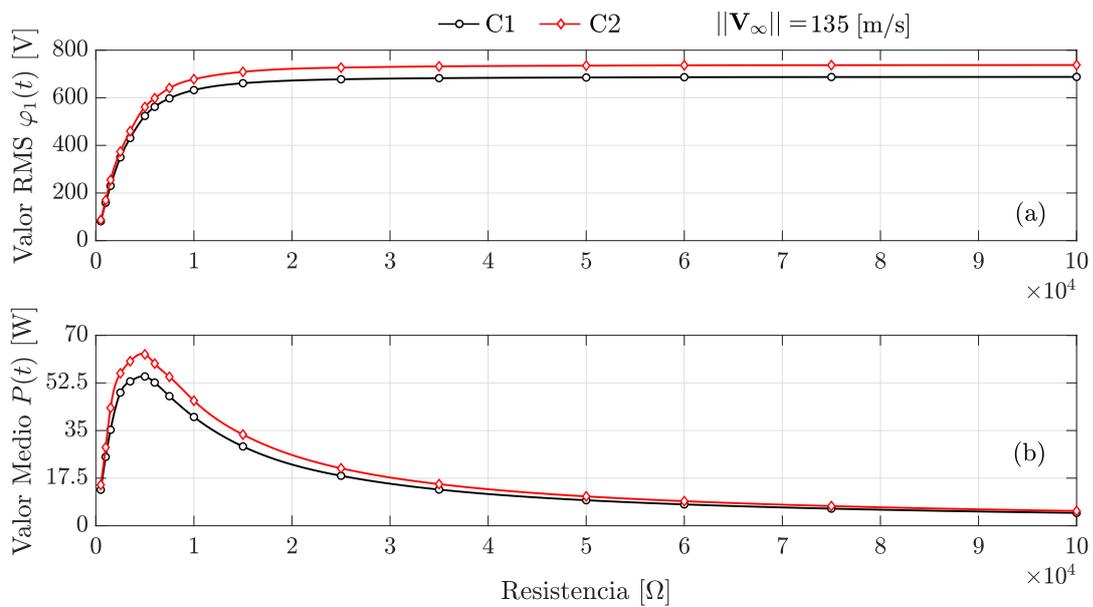
Por último, con el propósito de mostrar que también se puede extraer energía del fluido en



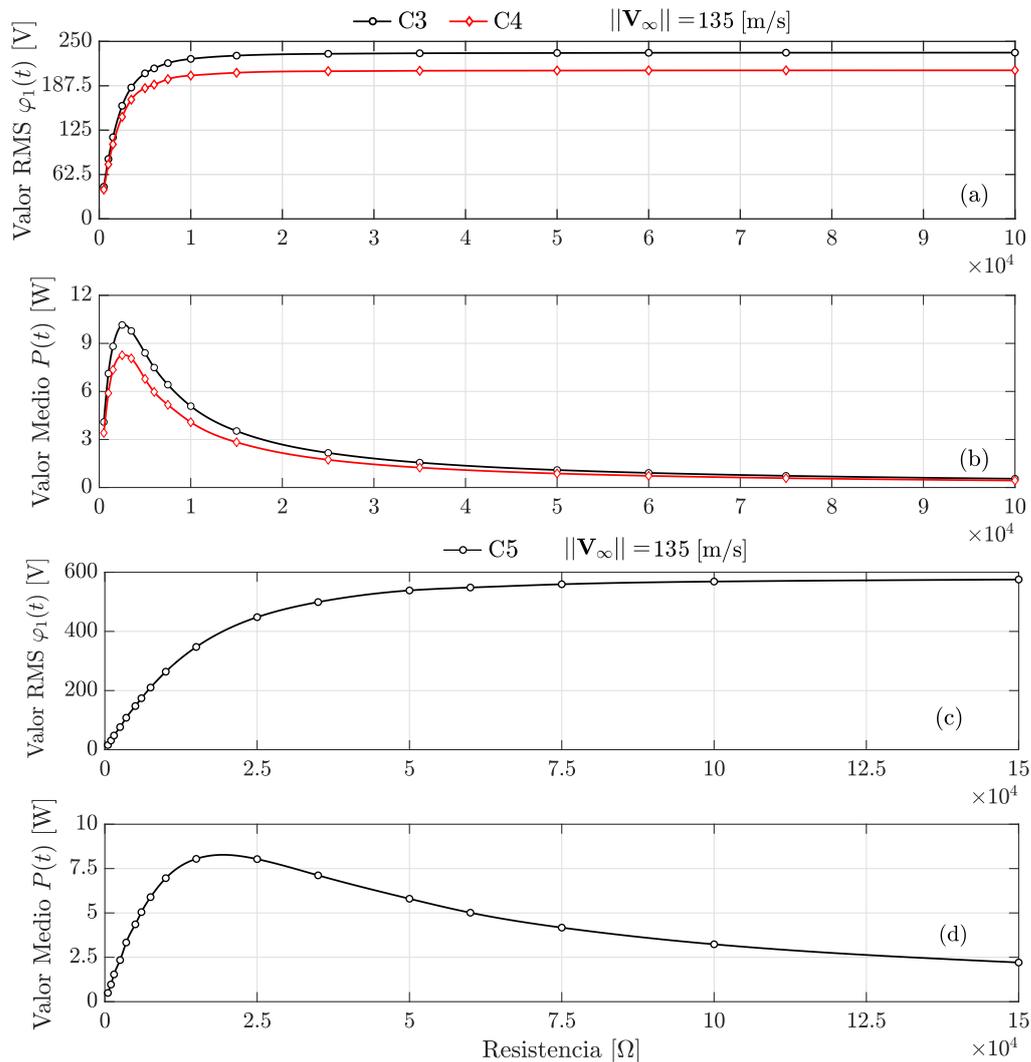
**Figura 7.47:** Configuración deformada del ala para dos velocidades de la corriente libre: (a) 135 [m/s] y (b) 155 [m/s].



**Figura 7.48:** FFT aplicada sobre: (a) desplazamiento  $u_3^B(t)$  y (b) giro  $\theta_1^A(t)$  para diferentes velocidades del aire.



**Figura 7.49:** Evolución del voltaje y de la potencia eléctrica en función de la resistencia para el cosechador C1.

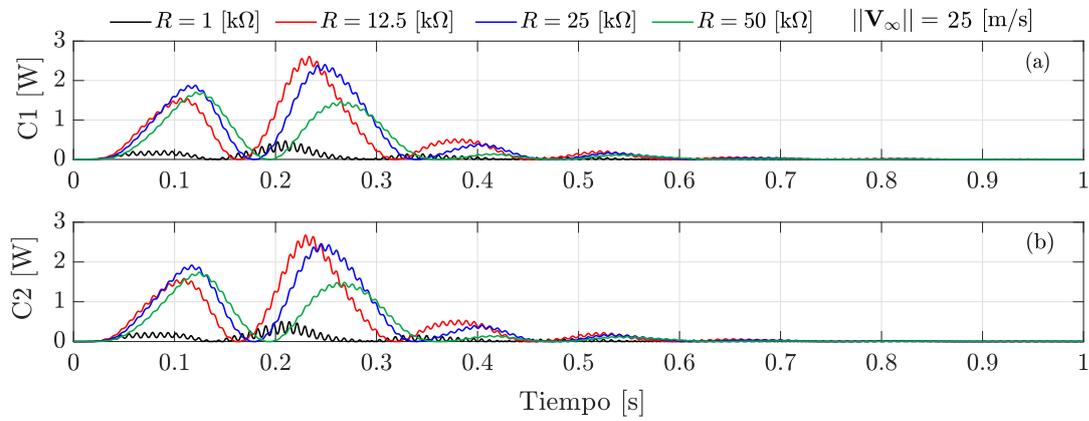


**Figura 7.50:** Evolución del voltaje y de la potencia eléctrica en función de la resistencia para los cosechadores C2 a C5.

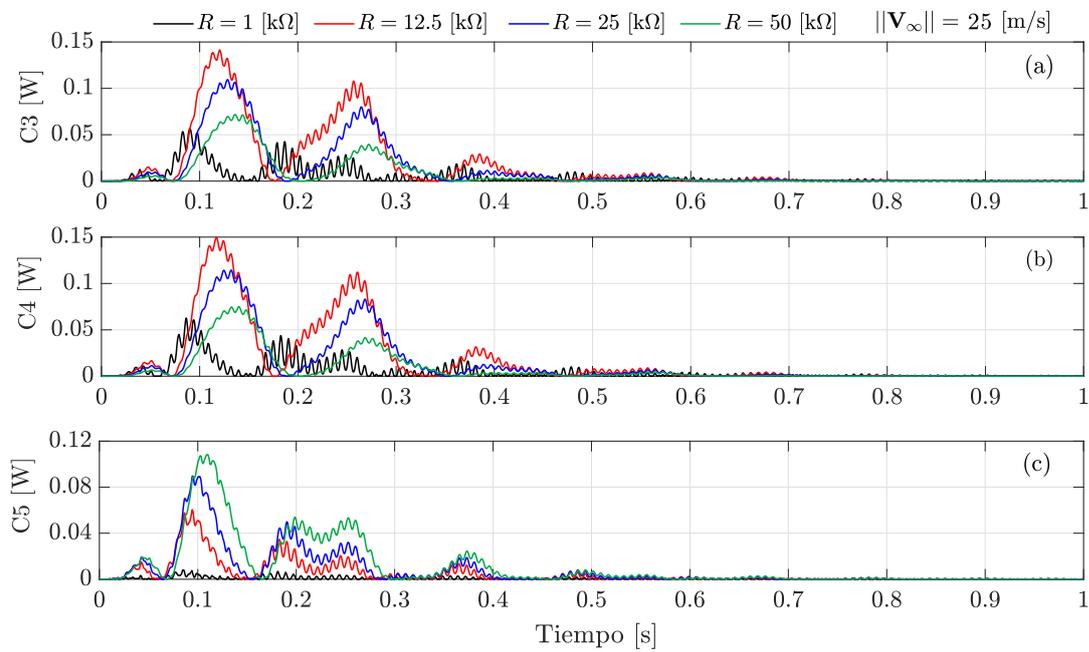
condición subcrítica, se presenta en las Figuras 7.51 y 7.52 la evolución temporal de la potencia instantánea para cuatro valores de resistencias considerando una velocidad del fluido igual a 25 [m/s]. En esta oportunidad, la estructura se desplaza del reposo por medio una ráfaga vertical ( $X_3$ ) que se adiciona a la corriente libre. La misma posee un comportamiento de la forma  $1 - \cos$ , su amplitud máxima es de 3.75 [m/s] y el semiciclo se alcanza en los primeros veinte pasos aerodinámicos.

### Discusión de resultados y conclusiones

A partir de los resultados expuestos previamente se pueden efectuar una serie de comentarios. Los diagramas de las Figuras 7.43 y 7.44 muestran una bifurcación supercrítica de *Hopf* para una velocidad del fluido próxima a 112 [m/s] quien se corresponde con la velocidad de *flutter*



**Figura 7.51:** Potencia instantánea en función del tiempo para (a) cosechador C1 y (b) cosechador C2.



**Figura 7.52:** Potencia instantánea en función del tiempo para (a) cosechador C3, (b) cosechador C4 y (c) cosechador C5.

de la estructura alar. Como es sabido, el sistema es asintóticamente estable para velocidades subcríticas, lo que implica que regresa a su configuración de referencia luego de un transitorio. A pesar de esta característica es posible generar energía eléctrica a través de los transductores durante este intervalo de tiempo. En condición poscrítica, las oscilaciones de todos los grados de libertad considerados se sostienen a medida que transcurre el tiempo, dando origen a oscilaciones de ciclo límite. Se advierte que la amplitud de las LCO depende fuertemente de la velocidad del flujo, incrementándose con ella para velocidades del aire situadas entre 112 y 143.5 [m/s]. A su vez, de los diagramas de fase expuestos en las Figuras 7.45 y 7.46 se observan con claridad las LCO, tanto para 135 [m/s] como para 155 [m/s]. De ellos se aprecia que, a pesar de existir soluciones periódicas, las LCO no son estrictamente un centro. Estas distorsiones podrían atribuirse a la presencia de otros puntos críticos.

Una particularidad ocurre cuando la velocidad del fluido se encuentra próxima a los 143.5 [m/s]. A partir de esta velocidad la dinámica del sistema cambia de manera repentina, lo cual se evidencia en los diagramas de bifurcación a través de discontinuidades. Según el grado de libertad analizado se observan dos tipos de comportamiento: por un lado, las amplitudes de los LCO caen repentinamente a los 143.5 [m/s] para luego volver a aumentar con la velocidad; y por otro lado, las amplitudes de los LCO crecen más rápidamente a partir de los 143.5 [m/s]. Aunque el segundo efecto observado tiene la apariencia de una nueva bifurcación, el primero de ellos no la tiene. En consecuencia, se requieren evaluaciones adicionales para entender en profundidad el cambio de comportamiento que experimenta el sistema.

El espectro en frecuencia de las señales  $u_3^B(t)$  y  $\theta_1^A(t)$  expuestas en la Figura 7.48 también brinda información relevante. En primer lugar, se observa que la frecuencia dominante para velocidades del fluido situadas entre 112 [m/s] y 142.5 [m/s] es de 88.849 [rad/s]. A medida que aumenta la velocidad del aire desde los 112 [m/s] la presencia de frecuencias secundarias es cada vez más evidente, las cuales son exactamente el doble (177.21 [rad/s]) y el triple (266.05 [rad/s]) de la dominante. En segundo lugar, cuando la velocidad del fluido supera los 143.5 [m/s] la frecuencia dominante se modifica y adopta un valor de 126.104 [rad/s]. Este cambio ocurre para la misma velocidad para la cual cambia la dinámica del sistema, tal como se describió en el párrafo previo. En virtud de la escala horizontal adoptada, en este caso sólo se aprecia una frecuencia secundaria, la cual posee una magnitud igual al doble (252.207 [rad/s]) de la dominante. Además, se puede notar que los espectros que se corresponden con velocidades próximas a 143.5 [m/s] exhiben la presencia de ambas frecuencias dominantes.

Por otro lado, las curvas que se muestran en las Figuras 7.49 y 7.50 exponen el desempeño de cada uno de los cosechadores en función de la resistencia para una velocidad poscrítica de 135 [m/s], la cual ha sido elegida de manera arbitraria. Cada uno de ellos se analiza en términos del voltaje entre los terminales del resistor y de la potencia media disipada. Como las simulaciones numéricas han sido efectuadas para un número finito de resistencias, las curvas graficadas se construyeron interpolando los resultados obtenidos para tales resistencias. En

general, para todos los cosechadores se observa que el voltaje aumenta con valores crecientes de la resistencia hasta alcanzar un valor asintótico. A su vez, la resistencia para la cual se consigue tal estabilidad depende de cada cosechador. Por su parte, se advierte que la potencia media aumenta rápidamente con la resistencia hasta alcanzar un valor máximo y luego disminuye con incrementos sucesivos de ella. Lógicamente, como la potencia depende del cuadrado del voltaje, si este último se mantiene prácticamente constante la potencia media se reduce hiperbólicamente. Para el C1 y el C2 la potencia media adopta un valor máximo de 54.9 [W] y de 63 [W] cuando se emplea una resistencia de 5 [k $\Omega$ ] respectivamente. En tanto que la potencia media toma valores máximos iguales a 10.1 [W] y 8.3 [W] en los C3 y C4 cuando la resistencia es de 2.5 [k $\Omega$ ] respectivamente. Por último, en el C5 la potencia media máxima es de 8 [W] para una resistencia de 15 [k $\Omega$ ]. Si bien para conocer cómo se comportan los cosechadores para otra velocidad del fluido deben efectuarse las correspondientes simulaciones, lo obtenido brinda una estimación razonable en términos de la resistencia óptima para velocidades comprendidas entre 112 y 143.5 [m/s]. Esto se debe a que la frecuencia dominante de los grados de libertad del sistema no varía sustancialmente en ese rango de velocidades.

Finalmente, de las curvas que se muestran en las Figuras 7.51 y 7.52 se puede deducir que cualquier perturbación que se introduzca sobre el ala en condición subcrítica favorece la recolección de energía. En este caso, las oscilaciones son transitorias y luego de un cierto período de tiempo la estructura regresa a su configuración de referencia. Sin embargo, debido a que este tipo de perturbación puede ocurrir un sinnúmero de veces durante el vuelo de la aeronave, constituye una fuente de energía de interés para los cosechadores. Tal como se observa en las mencionadas figuras, sólo se consideraron cuatro resistencias de 1, 12.5, 25 y 50 [k $\Omega$ ]. Para los cosechadores C1 a C4, la potencia instantánea máxima se obtiene con la resistencia de 12.5 [k $\Omega$ ], en tanto que, para el cosechador C5 se consigue con la resistencia de 50 [k $\Omega$ ]. Si bien, es primordial evaluar un mayor número de cargas resistivas, los valores máximos no necesariamente se alcanzan con las resistencias óptimas determinadas para la condición poscrítica (Figuras 7.49 y 7.50). Esto se debe a que el contenido de frecuencias de la respuesta para una velocidad subcrítica es diferente del contenido presente en una condición poscrítica.

# Apéndices

## 7.A Caso 2: Ala - UAV

### 7.A.1 Propiedades elementales

En la Tabla 7.A.1 se listan las propiedades seccionales equivalentes de cada uno de los elementos finitos.

Prop.	Unidad	Elemento				
		1	2	3	4	5
$\rho A$	Kg	136.276	110.589	90.4316	76.7155	64.0898
$\rho I_p$	Kgm	227.513	163.981	118.210	87.6576	63.3950
$\rho I_{22}$	Kgm	8.2846	5.9712	4.3045	3.1920	2.3084
$\rho I_{33}$	Kgm	227.5139	163.9819	118.21	87.6577	63.395
$\rho I_{23}$	Kgm	-1.7968	-1.2950	-0.9335	-0.6922	-0.5006
$\rho S_2$	Kg	0	0	0	0	0
$\rho S_3$	Kg	0	0	0	0	0
$EA$	N	$1.59 \times 10^9$	$1.07 \times 10^9$	$0.87 \times 10^9$	$0.74 \times 10^9$	$0.62 \times 10^9$
$EI_2$	Nm <sup>2</sup>	$9.41 \times 10^7$	$6.43 \times 10^7$	$4.62 \times 10^7$	$3.41 \times 10^7$	$2.45 \times 10^7$
$EI_3$	Nm <sup>2</sup>	$2.49 \times 10^9$	$1.25 \times 10^9$	$0.90 \times 10^9$	$0.66 \times 10^9$	$0.48 \times 10^9$
$EI_{23}$	Nm <sup>2</sup>	$-2.04 \times 10^7$	$-1.47 \times 10^7$	$-1.05 \times 10^7$	$-0.78 \times 10^7$	$-0.56 \times 10^7$
$ES_2$	Nm	$-1.65 \times 10^6$	$-1.26 \times 10^6$	$-0.96 \times 10^6$	$-0.76 \times 10^6$	$-0.59 \times 10^6$
$ES_3$	Nm	$5.10 \times 10^6$	$3.89 \times 10^6$	$2.98 \times 10^6$	$2.36 \times 10^6$	$1.83 \times 10^6$
$GJ$	Nm <sup>2</sup>	$1.13 \times 10^8$	$0.71 \times 10^8$	$0.51 \times 10^8$	$0.37 \times 10^8$	$0.27 \times 10^8$
$GA_2$	N	$7.98 \times 10^8$	$5.37 \times 10^8$	$4.39 \times 10^8$	$3.72 \times 10^8$	$3.10 \times 10^8$
$GA_3$	N	$7.98 \times 10^8$	$5.37 \times 10^8$	$4.39 \times 10^8$	$3.72 \times 10^8$	$3.10 \times 10^8$
$GS_2$	Nm	$-8.23 \times 10^5$	$-6.28 \times 10^5$	$-4.82 \times 10^5$	$-3.81 \times 10^5$	$-2.95 \times 10^5$
$GS_3$	Nm	$2.55 \times 10^6$	$1.95 \times 10^6$	$1.49 \times 10^6$	$1.18 \times 10^6$	$9.15 \times 10^5$
$\rho A$	Kg	153.2282	45.8250	38.9669	32.6541	
$\rho I_p$	Kgm	45.0715	32.7847	23.1924	15.8701	

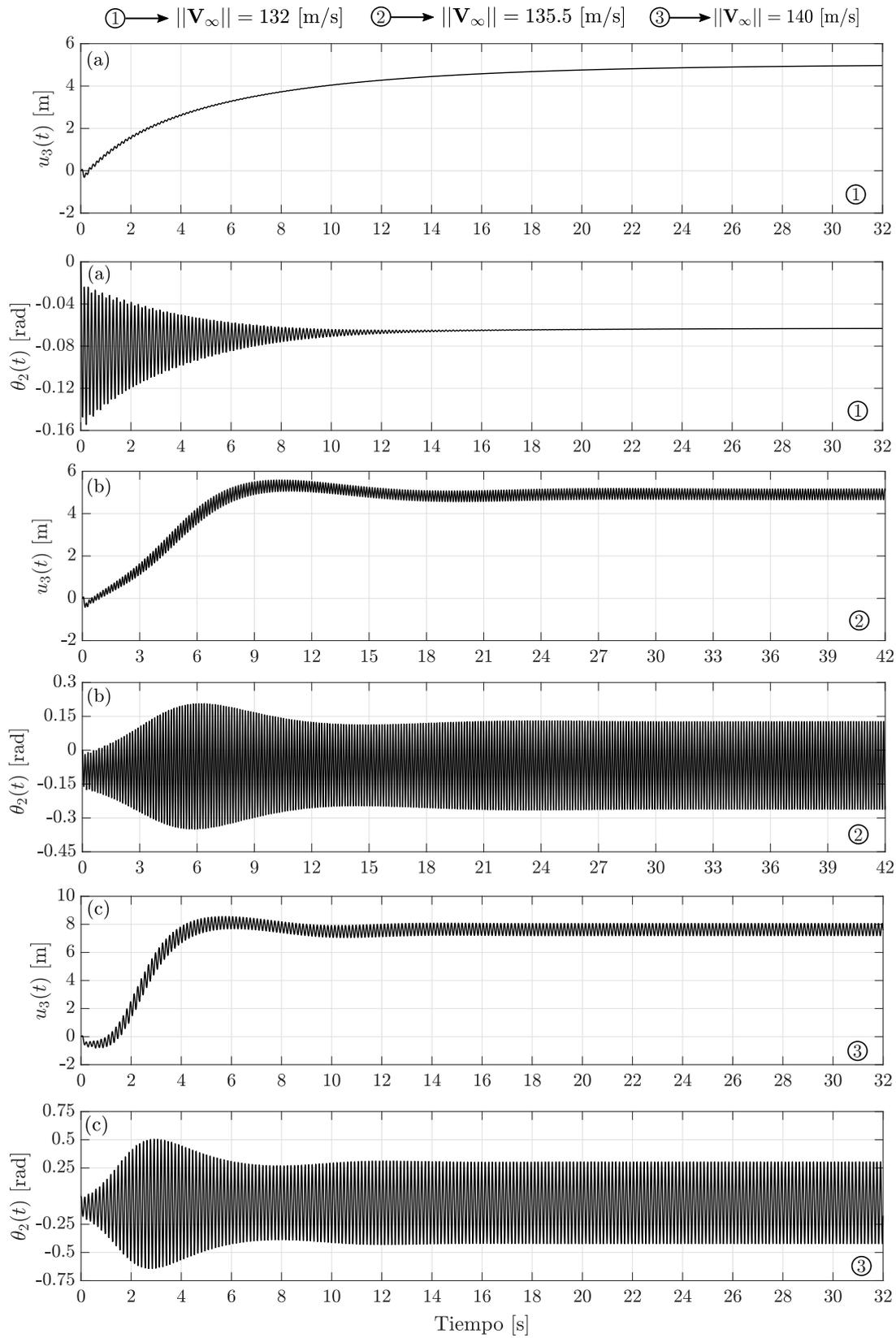
(Siguen en la página siguiente)

Prop.	Unidad	Elemento			
		6	7	8	9
$\rho I_{22}$	Kgm	1.6412	1.1938	0.8445	0.5779
$\rho I_{33}$	Kgm	45.0715	32.7847	23.1924	15.8701
$\rho I_{23}$	Kgm	-0.3559	-0.2589	-0.1831	-0.1253
$\rho S_2$	Kg	0	0	0	0
$\rho S_3$	Kg	0	0	0	0
$EA$	N	$0.51 \times 10^9$	$0.44 \times 10^9$	$0.37 \times 10^9$	$0.31 \times 10^9$
$EI_2$	Nm <sup>2</sup>	$1.74 \times 10^7$	$1.26 \times 10^7$	$0.88 \times 10^7$	$0.6 \times 10^7$
$EI_3$	Nm <sup>2</sup>	$0.34 \times 10^9$	$0.24 \times 10^9$	$0.17 \times 10^9$	$0.12 \times 10^9$
$EI_{23}$	Nm <sup>2</sup>	$-0.39 \times 10^7$	$-0.29 \times 10^7$	$-0.20 \times 10^7$	$-0.14 \times 10^7$
$ES_2$	Nm	$-0.45 \times 10^6$	$-0.36 \times 10^6$	$-0.27 \times 10^6$	$-0.21 \times 10^6$
$ES_3$	Nm	$1.40 \times 10^6$	$1.11 \times 10^6$	$0.85 \times 10^6$	$0.64 \times 10^6$
$GJ$	Nm <sup>2</sup>	$0.19 \times 10^8$	$0.14 \times 10^8$	$0.097 \times 10^8$	$0.066 \times 10^8$
$GA_2$	Nm	$2.57 \times 10^8$	$2.21 \times 10^8$	$1.88 \times 10^8$	$1.57 \times 10^8$
$GA_3$	Nm	$2.57 \times 10^8$	$2.21 \times 10^8$	$1.88 \times 10^8$	$1.57 \times 10^8$
$GS_2$	Nm	$-2.26 \times 10^5$	$-1.78 \times 10^5$	$-1.38 \times 10^5$	$-1.04 \times 10^5$
$GS_3$	Nm	$7.01 \times 10^5$	$5.53 \times 10^5$	$4.27 \times 10^5$	$3.21 \times 10^5$

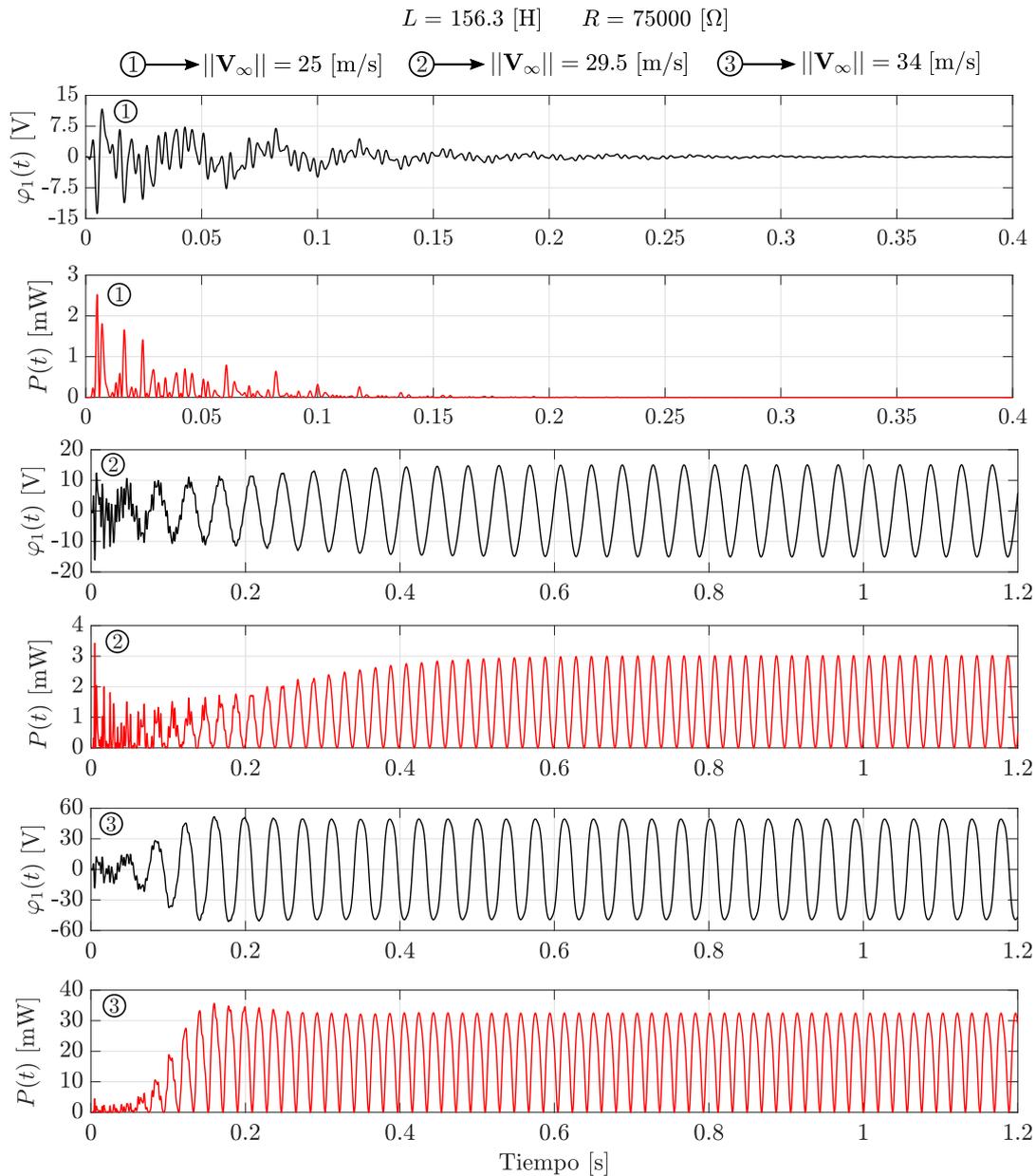
**Tabla 7.A.1:** Propiedades mecánicas referidas al sistema de referencia elemental.

### 7.A.2 Resultados adicionales

En la Figura 7.A.1 se muestra la evolución temporal de los grados de libertad  $u_3(t)$  y  $\theta_3(t)$  para tres velocidades del fluido: 132, 135.5 y 140 [m/s].



**Figura 7.A.1:** Evolución temporal de las variables cinemáticas  $u_3(t)$  y  $\theta_2(t)$  para dos velocidades de corriente libre: (a) 132 [m/s]; (b) 135.5 [m/s] y (c) 140 [m/s].



**Figura 7.B.1:** Evolución temporal del voltaje (curvas negras) y de la potencia eléctrica instantánea (curvas rojas) para una resistencia de  $75000 \text{ [\Omega]}$  y una inductancia de  $156.3 \text{ [H]}$ .

## 7.B Caso 5: Cosechador piezoaeroelástico de pequeña escala

### 7.B.1 Resultados adicionales

En la Figura 7.B.1 se presenta el voltaje y la potencia eléctrica instantánea para tres velocidades, una subcrítica ( $25 \text{ [m/s]}$ ) y dos poscríticas ( $29.5 \text{ [m/s]}$  y  $34 \text{ [m/s]}$ ).

## 7.C Caso 6: Cosechadores de energía embebidos en una estructura alar

### 7.C.1 Propiedades elementales

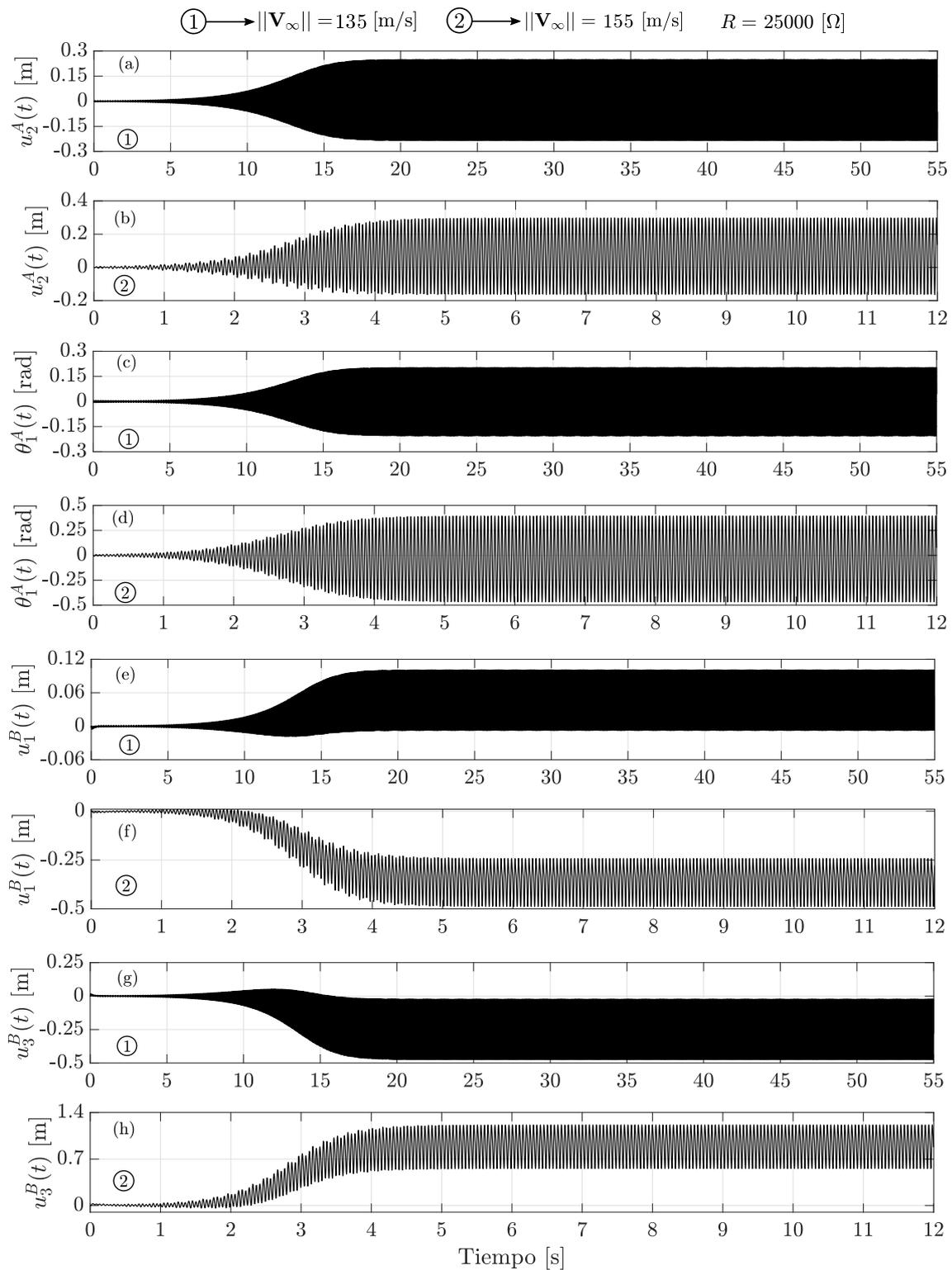
En la Tabla 7.C.1 se listan las propiedades seccionales equivalentes de cada uno de los elementos finitos.

Propiedad	Unidad	Elementos		
		1 a 4	5 a 8	9 a 14
$\rho A$	Kg	15.5169	9.64325	2.98065
$\rho I_p$	Kgm	4.47605	2.41765	0.64265
$\rho I_{22}$	Kgm	0.1630	0.0880	0.0234
$\rho I_{33}$	Kgm	4.31305	2.32960	0.61920
$\rho I_{23}$	Kgm	-0.03535	-0.01910	-0.00510
$\rho S_2$	Kg	0.0	0.0	0.0
$\rho S_3$	Kg	0.0	0.0	0.0
$EA$	N	$2.1177 \times 10^8$	$1.3144 \times 10^8$	$0.4888 \times 10^8$
$EI_2$	Nm <sup>2</sup>	$0.2421 \times 10^7$	$0.1303 \times 10^7$	$0.0363 \times 10^7$
$EI_3$	Nm <sup>2</sup>	$0.4629 \times 10^8$	$0.2491 \times 10^8$	$0.0942 \times 10^8$
$EI_{23}$	Nm <sup>2</sup>	$-0.5541 \times 10^6$	$-0.2981 \times 10^6$	$-0.0789 \times 10^6$
$ES_2$	Nm	$0.8064 \times 10^5$	$0.466 \times 10^5$	$0.1332 \times 10^5$
$ES_3$	Nm	$-0.2669 \times 10^6$	$-0.1543 \times 10^6$	$-0.0441 \times 10^6$
$GJ$	Nm <sup>2</sup>	$0.1911 \times 10^7$	$0.1028 \times 10^7$	$0.0313 \times 10^7$
$GA_2$	N	$1.05885 \times 10^8$	$0.6572 \times 10^8$	$0.2444 \times 10^8$
$GA_3$	N	$1.05885 \times 10^8$	$0.6572 \times 10^8$	$0.2444 \times 10^8$
$GS_2$	Nm	$0.4032 \times 10^5$	$0.233 \times 10^5$	$0.0666 \times 10^5$
$GS_3$	Nm	$-0.13345 \times 10^6$	$-0.07715 \times 10^6$	$-0.02205 \times 10^6$

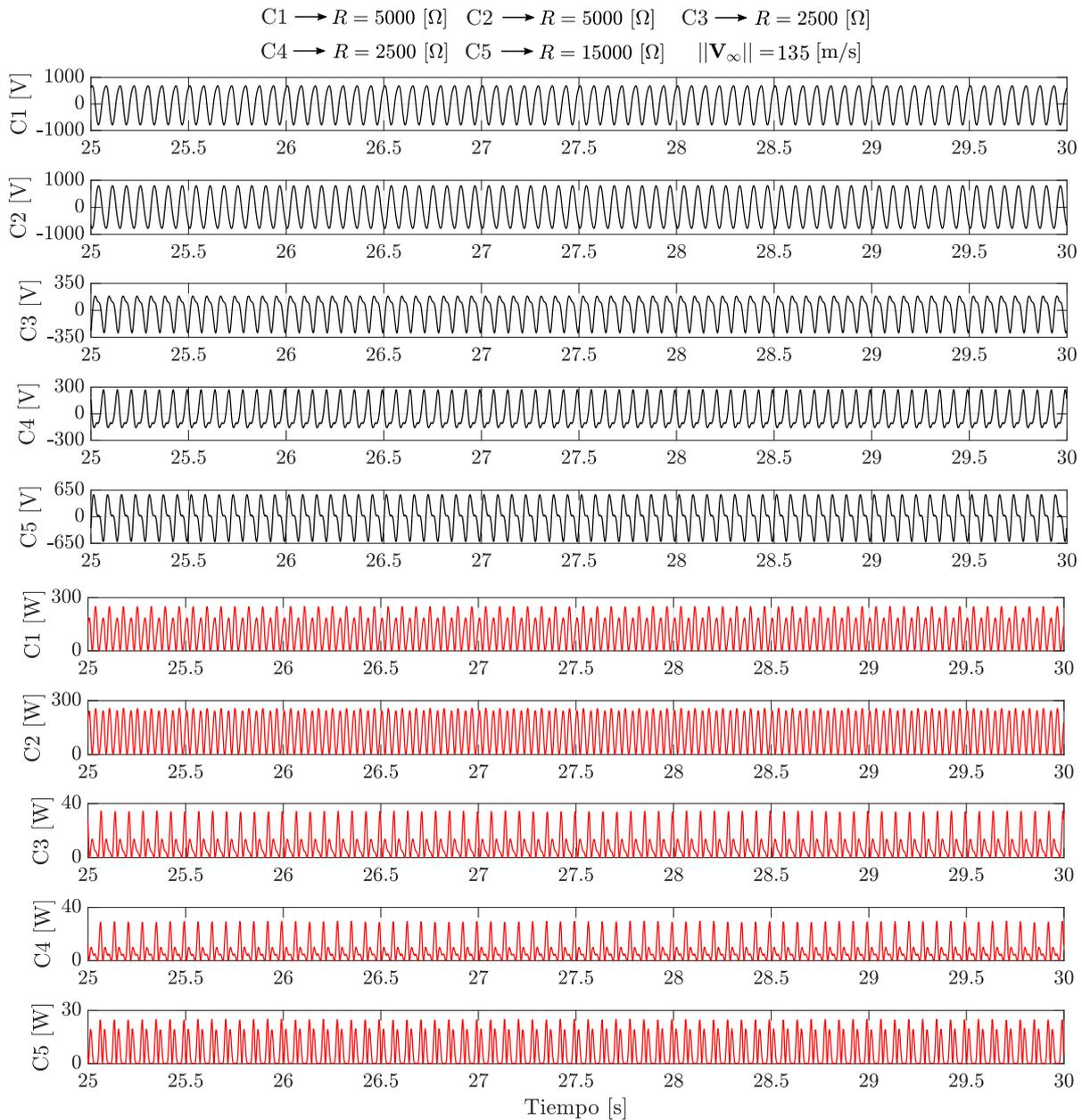
**Tabla 7.C.1:** Propiedades mecánicas referidas al sistema de referencia elemental  $(x_1, x_2, x_3)$ .

### 7.C.2 Resultados adicionales

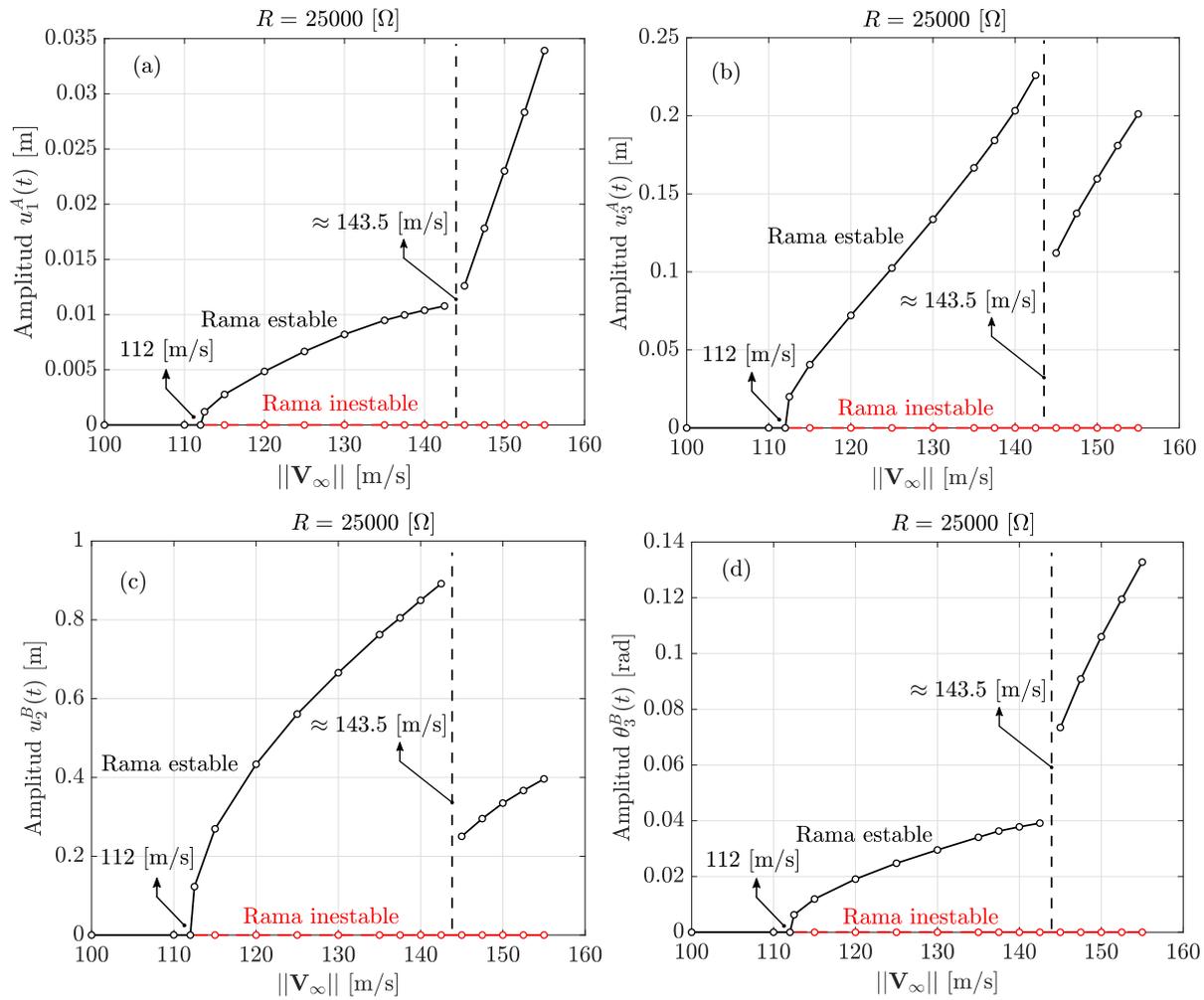
En la Figura 7.C.1 se muestra la evolución temporal de las variables cinemáticas  $u_2^A(t)$ ,  $\theta_1^A(t)$  y  $u_i^B(t)$  ( $i = 1, 3$ ) para dos velocidades del aire, 135 [m/s] y 155 [m/s]. Mientras tanto, en la Figura 7.C.3 se presentan los diagramas de bifurcación para los cuatro grados de libertad cinemáticos restantes  $u_i^A(t)$  ( $i = 1, 3$ ),  $u_2^B(t)$  y  $\theta_3^B(t)$ . Por último, en la Figura 7.C.2 se expone la evolución en el tiempo de los potenciales eléctricos y de la potencia eléctrica instantánea de los cinco cosechadores (C1 a C5) para la resistencia que maximiza la potencia media.



**Figura 7.C.1:** Evolución temporal: (a) y (b) desplazamiento  $u_2^A(t)$ ; (c) y (d) giro  $\theta_1^A(t)$ ; (e) y (f) desplazamiento  $u_1^B(t)$ ; (g) y (h) desplazamiento  $u_3^B(t)$  para 135 [m/s] y 155 [m/s].



**Figura 7.C.2:** Evolución temporal de los potenciales eléctricos (curvas negras) y de la potencia eléctrica instantánea (curvas rojas) para la resistencia que maximiza la potencia media.



**Figura 7.C.3:** Diagramas de bifurcación para: (a) el desplazamiento  $u_1^A(t)$ ; (b) el giro  $u_3^A(t)$ ; (c) el desplazamiento  $u_2^B(t)$  y (d) el desplazamiento  $\theta_3^B(t)$ .

## Aspectos finales

En el último capítulo de esta tesis se sintetizan las particularidades más relevantes del trabajo, se exponen las conclusiones que surgen de los desarrollos presentados y se sugieren ciertos aspectos a tener en cuenta en posibles trabajos futuros.

### 8.1 Resumen de desarrollos

El resultado último del presente trabajo de tesis es la *creación y utilización de una herramienta computacional confiable y robusta* que está destinada al estudio de sistemas que involucren cosechadores piezoeléctricos de energía alimentados por medio de vibraciones mecánicas de origen aeroelástico. El software se desarrolló en lenguaje Fortran siguiendo el paradigma de programación orientado a objetos y aplicando técnicas de computación de alto desempeño con el propósito de reducir los tiempos de cómputo. La herramienta se diseñó adoptando un enfoque modular para simplificar la incorporación de nuevos módulos o la sustitución de los existentes. A su vez, fue empleada para analizar diversos casos de estudio con la intención de validarla y verificarla como así también mostrar su potencialidad y versatilidad.

Dada la naturaleza multifísica del problema abordado, el desarrollo de este software se sustenta en una estrategia de co-simulación, lo que implica la participación de al menos tres subsistemas: un modelo aerodinámico para calcular las cargas actuantes sobre las superficies sustentadoras, un modelo electroelástico para determinar la respuesta electromecánica bajo tales cargas y, un método de comunicación entre los modelos anteriores para transferir la solución computada por cada subsistema.

El modelo aerodinámico adoptado se sustenta en el método de la red de vórtices no lineal (UVLM), el cual considera que el flujo está dominado por la vorticidad. Se trata de un método de elementos de contorno en los que las capas límites y las estelas convectadas desde los bordes filosos de superficies sustentadoras se modelan como sábanas vorticosas que se

discretizan por medio de redes de segmentos vorticosos. Fuera de las capas límites y las estelas, el método supone flujo incompresible, no viscoso e inestacionario. Los cuerpos sustentadores se representan a partir de la superficie media y sobre ella se computan los saltos del coeficiente de presión que da lugar a la distribución de cargas aerodinámicas. El método es capaz de captar adecuadamente las características tridimensionales del flujo tales como vórtices de arranque y de puntera, como así también la interacción aerodinámica entre diferentes superficies sustentadoras y entre las estelas que se desprenden de ellas. Sin embargo, es incapaz de predecir ciertos fenómenos asociados a la capa límite, tales como la predicción de la pérdida aerodinámica o la resistencia parásita. En particular, en este trabajo se utilizó una versión de este método que ha sido implementado computacionalmente por Pérez Segura [80, 85].

El modelo electroelástico está basado en una formulación tridimensional de un modelo de viga piezoeléctrica que se sustenta en las hipótesis de la teoría clásica de Timoshenko y que incorpora de manera consistente las no linealidades geométricas de Von Kármán, las cuales contemplan deformaciones moderadas en la componente axial del tensor de deformaciones de Green-Lagrange. También se tiene en cuenta los efectos del alabeo por torsión de acuerdo a la teoría de Saint-Venant. La viga admite una cantidad arbitraria de transductores piezoeléctricos embebidos en su interior que pueden conectarse en serie o en paralelo. A los fines de recolectar energía, un circuito eléctrico resistivo-inductivo se conecta entre los terminales del conjunto de transductores. En virtud de sus características, el modelo contempla la generación de energía a partir de los efectos axial (lineal y no lineal) y flexional. Asimismo, tiene en cuenta efectos inducidos en el potencial eléctrico. La discretización del dominio continuo de la viga produce un elemento finito de dos nodos con seis grados de libertad en cada uno de ellos, libre de bloqueo por corte y bloqueo membranar. Además, el elemento posee una cantidad de grados de libertad eléctricos que depende del número de transductores considerados y del tipo de conexión eléctrica. Este modelo ha sido desarrollado íntegramente a lo largo del presente trabajo, detallando la cinemática de la viga, describiendo las particularidades eléctricas y obteniendo la formulación de elementos finitos. En efecto, junto a su implementación computacional constituyen el punto fuerte de este trabajo.

El método de interacción acopla a los dos modelos y se encarga tanto de la transferencia de las cargas aerodinámicas desde las superficies sustentadoras hacia los nodos estructurales como, en sentido inverso, de la transferencia de las variables cinemáticas hacia la malla aerodinámica, contemplando las diferencias topológicas existentes entre ambas discretizaciones. En este caso, se desarrolla e implementa un método que se tipifica como fuerte. Esto obedece a que si bien los dos modelos avanzan en el tiempo con un paso de integración propio, el intercambio de información entre ellos se lleva a cabo en cada uno de estos pasos. Esta cualidad le otorga una gran estabilidad al sistema electroaeroelástico, propiedad de la que están desprovistos los métodos de interacción débiles.

En lo que respecta a resultados, se consideraron dos grupos de casos de estudio. El primer

grupo tuvo como propósito verificar y/o validar tanto el componente electroelástico del software desarrollado como el electroaeroelástico. En este sentido, se analizaron cuatro casos de estudio donde, en el primero de ellos se evaluó la respuesta estructural en función del tiempo y se la comparó contra lo estimado usando un software comercial. En el segundo se predijo la respuesta electroelástica de un cosechador piezoeléctrico sujeto a un movimiento de base. En el tercer caso de estudio se determinó la velocidad de *flutter* de una estructura alar. Y, en el cuarto caso se predijo la velocidad de *flutter* y el desempeño eléctrico de un ala plana con un cosechador piezoeléctrico embebido en su interior. Salvo el primer caso de estudio, para el resto de ellos se contrastaron los resultados obtenidos con lo reportado en la literatura, mostrando un excelente acuerdo.

El segundo grupo de resultados está compuesto por dos casos de aplicación que tienen como objetivo mostrar la potencialidad y la versatilidad de la herramienta numérica presentada. El primero de ellos consiste en un cosechador piezoaeroelástico de pequeña escala. Se estimó su velocidad de *flutter* y se efectuaron diversos análisis en estado poscrítico, aprovechando las oscilaciones de ciclo límite como fuente de alimentación del cosechador. El segundo caso de aplicación se centró en la respuesta electroaeroelástica de un conjunto de cosechadores embebidos en la estructura alar de una aeronave tipo planeador. También se computó su velocidad de *flutter* y se llevaron a cabo una serie de simulaciones que muestran la complejidad de la dinámica de este caso.

## 8.2 Conclusiones

Las conclusiones más relevantes que pueden extraerse de este trabajo de tesis se resumen en los siguientes puntos.

- La utilización de una herramienta computacional con un abordaje de co-simulación permite analizar adecuadamente problemas multifísicos como lo es la cosecha piezoaeroelástica de energía.
- El modelo electroelástico desarrollado puede caracterizarse como de complejidad media en virtud de que se sitúa entre los modelos lineales tradicionales y aquellos geoméricamente exactos. Como el grado de complejidad del modelo es intermedio, los costos de cómputo son inferiores a los asociados a modelos geoméricamente exactos.
- La no linealidad que se introdujo en la componente axial del tensor de deformación tiene implicancias tanto en el dominio eléctrico como en el mecánico. Al respecto, produce un acoplamiento electromecánico de índole no lineal (efecto axial no lineal), lo cual le otorga características no lineales a la fuente del circuito eléctrico que permite cuantificar la energía cosechada. A su vez, propicia el análisis de fenómenos no lineales tales como el pandeo dinámico y/o aerodinámico de una estructura (rigidez geométrica).

- El método de interacción adoptado le otorga estabilidad a la simulación electroaeroelástica. No obstante, para que la simulación sea exitosa se deben satisfacer ciertas condiciones respecto a la elección de los pasos de tiempo aerodinámico y estructural. En ocasiones la relación entre ambos es excesiva, esto implica que por cada paso aerodinámico se computa un gran número de pasos estructurales. La limitación asociada al paso estructural está dada por el período natural más pequeño de la estructura, lo cual está íntimamente ligado a la discretización estructural.
- El modelo aerodinámico utilizado demostró ser adecuado para estudiar el comportamiento de cosechadores piezoeléctricos de energía que se valen de las vibraciones mecánicas que son generadas por el flujo de aire.
- Las limitaciones de los modelos electroelástico y aerodinámico están dadas por las propias hipótesis adoptadas en las formulaciones correspondientes. Un conocimiento de ellas es fundamental para comprender hasta cuándo los resultados son confiables.
- La determinación de las propiedades equivalentes en los modelos de vigas se torna una tarea difícil, que se complica aún más si la sección transversal es compleja y/o si existe una distribución no uniforme de materiales con propiedades másicas y de rigidez diferentes. Esto pone de manifiesto la necesidad de contar con modelos más detallados. A pesar de ello, el comportamiento electroaeroelástico puede predecirse con una exactitud adecuada.
- Las simulaciones realizadas permiten concluir que los fenómenos no lineales asociados al *flutter* constituyen una alternativa viable para ser utilizados como fuentes de generación de energía eléctrica en sistemas de baja potencia. Para explorar la recolección de energía a partir de oscilaciones de ciclo límite se requiere indefectiblemente contar con modelos no lineales.
- Los resultados obtenidos y, en particular, los que provienen del primer caso de aplicación muestran sin lugar a dudas que existe una interacción mutua entre el dominio mecánico y eléctrico. Los parámetros eléctricos, tales como resistencia e inductancia, no sólo inciden en la cantidad de energía cosechada sino que también modifican la velocidad de *flutter* y la amplitud y frecuencia de oscilación. Por supuesto, estos efectos son más notorios en estructuras de pequeñas dimensiones.
- Los fenómenos asociados al *flutter* en condiciones poscríticas pueden tornarse complejos, lo cual puede complejizarse aún más a medida que aumenta el grado de sofisticación de la estructura. Esto puede incluir bifurcaciones secundarias, la aparición de diferentes puntos críticos atractores, entre otros. Un ejemplo de lo mencionado se advierte en el segundo caso de aplicación.

- En términos generales, los objetivos planteados al comienzo de esta tesis, tanto el principal como los particulares, han sido cumplidos en su gran mayoría de manera exitosa.

### 8.3 Trabajos futuros

Aunque los modelos involucrados constituyen un excelente punto de partida para alcanzar un entendimiento cabal de fenómenos electroaeroelásticos, en un futuro puede resultar necesario incrementar su complejidad. En este sentido, se propone considerar lo que se sintetiza en los siguientes puntos.

- Incrementar el nivel de complejidad de la formulación de viga piezoeléctrica para tener en cuenta grandes desplazamientos y rotaciones. Esto se puede lograr implementando una formulación de viga geoméricamente exacta o bien incorporando un esquema co-rotacional en conjunto con el modelo de viga desarrollado.
- Modificar la formulación para posibilitar orientaciones arbitrarias de los transductores piezoeléctricos en la sección de la viga.
- Incorporar alguna técnica de reducción de orden que se adecue a el modelo no lineal con el propósito de reducir los tiempos de cómputo.
- Modificar las relaciones constitutivas tal que se pueda trabajar con núcleos elásticos con características anisótropas y/o no homogéneas.
- Contemplar no linealidades materiales en las ecuaciones constitutivas de los materiales piezoeléctricos [46, 66].
- Incorporar mejoras en los circuitos eléctricos (por ejemplo usando la técnica SSH, en inglés *synchronous switch harvesting*) para aumentar la eficiencia del cosechador en términos de la energía extraída. Esto introducirá no linealidades a nivel del circuito eléctrico.
- Evaluar la utilización de modelos aerodinámicos alternativos tales como el uso de estelas de partículas vorticosas. Ellos permiten modelar el flujo alrededor de cuerpos sumergidos e incorporar modelos de difusión viscosa [75, 122].
- Incorporar algún modelo de separación del flujo desde el borde de ataque para aumentar el rango de ángulos de ataque que puedan ser representados.

En lo que respecta a resultados adicionales que pueden ser abordados a través del uso de esta herramienta se pueden mencionar los que se detallan a continuación.

- Optimizar la posición de los transductores piezoeléctricos dentro de una estructura con el objetivo de maximizar la energía cosechada.

- Estudiar la respuesta electroaeroelástica de arreglos de cosechadores de energía dispuestos en diversas configuraciones.
- Evaluar la influencia de la componente inducida del campo eléctrico de los transductores a medida que aumenta su espesor sobre la recolección de energía.
- Proponer y evaluar diferentes diseños de cosechadores piezoeléctricos basados en *flutter*, enfocándose en aquellos parámetros que tienen mayor incidencia en el desempeño del cosechador.

## 8.4 Publicaciones

A continuación se listan las publicaciones del autor relacionadas con el tema de tesis.

### Publicaciones en revistas internacionales

- **Emmanuel Beltramo**, Sergio Preidikman, Balakumar Balachandran, *Three-dimensional Formulation of a Strain-based Geometrically Nonlinear Piezoelectric Beam for Energy Harvesting*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2021, vol. 32, no 18-19, p. 2153-2173. DOI: doi.org/10.1177/1045389X20988792
- Martín E. Pérez Segura, **Emmanuel Beltramo**, Bruno A. Roccia, Marcelo F. Valdez, Marcos L. Verstraete, Luis R. Ceballos y Sergio Preidikman, *Un Concepto No Convencional Basado en Flutter para Cosechar Energía*, Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil, 2020, vol. 19 - 20, no 1, p. 257-274, ISSN: 1936 – 1483.
- **Emmanuel Beltramo**, Martín E. Pérez Segura, Bruno A. Roccia, Marcelo F. Valdez, Marcos L. Verstraete y Sergio Preidikman, *Constructive Aerodynamic Interference in a Network of Weakly Coupled Flutter-Based Energy Harvesters*, Aerospace, 2020, vol. 7, no 12, p. 167. DOI: doi.org/10.3390/aerospace7120167

### Capítulos de libros

- **Emmanuel Beltramo**, Bruno A. Roccia, Martín E. Pérez Segura y Sergio Preidikman, *A Three-Dimensional Piezoelectric Timoshenko Beam Model Including Torsion Warping*, Multibody Mechatronic Systems - MuSMe 2021, 2021, vol. 110, p. 143-150. DOI: 10.1007/978-3-030-88751-3

### Publicaciones en revistas nacionales y congresos

- **Emmanuel Beltramo**, Martín E. Pérez Segura, Santiago Ribero, Agustina C. Aichino, Bruno A. Roccia y Sergio Preidikman, *Cosecha Piezoaeroelástica de Energía: Una*

*Herramienta de Co-Simulación - Parte 2*, Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, ISSN: 2314 – 3282, EN REVISIÓN.

- **Emmanuel Beltramo**, Martín E. Pérez Segura, Agostina C. Aichino, Santiago Ribero, Bruno A. Roccia y Sergio Preidikman, *Cosecha Piezoaeroelástica de Energía: Una Herramienta de Co-Simulación - Parte 1*, Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, ISSN: 2314 – 3282, EN REVISIÓN.
- **Emmanuel Beltramo**, Martín E. Pérez Segura, Bruno A. Roccia y Sergio Preidikman, *Estudio Comparativo de Metodologías para Analizar Estructuras de Vigas que Incluyen las No Linealidades de Von Kármán*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 2022, vol. XXXIX, no 17, p. 221-230, ISSN: 2591 – 3522.
- Martín E. Pérez Segura, **Emmanuel Beltramo**, Bruno A. Roccia y Sergio Preidikman, *Análisis de la Influencia de la Reducción de Orden en la Determinación del Pandeo Dinámico de una Estructura de Vigas*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 2022, vol. XXXIX, no 8, p. 613-622, ISSN: 2591 – 3522.
- Marcos L. Verstraete, Bruno A. Roccia, Luis R. Ceballos, **Emmanuel Beltramo** y Sergio Preidikman, *Análisis Inestacionario No Lineal de un Arreglo de Cosechadores de Energía Basado en Flutter*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 2022, vol. XXXIX, no 25, p. 931-941, ISSN: 2591 – 3522.
- **Emmanuel Beltramo**, Bruno A. Roccia, Martín E. Pérez Segura y Sergio Preidikman, *Formulación de un Modelo de Viga Piezoeléctrica de Timoshenko Incluyendo Alabeo por Torsión*, Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, 2021, vol. VIII, p. 557-560, ISSN: 2314 – 3282.
- Martín E. Pérez Segura, **Emmanuel Beltramo**, Bruno A. Roccia, Marcelo F. Valdez, Marcos L. Verstraete, Luis R. Ceballos y Sergio Preidikman, *Un Concepto No Convencional Basado en Flutter Para Cosechar Energía. Parte 1: Esquema de Simulación Numérica*, Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, 2021, vol. VIII, p. 569-572, ISSN: 2314 – 3282.
- **Emmanuel Beltramo**, Martín E. Pérez Segura, Alejandro T. Brewer y Sergio Preidikman, *Análisis Numérico del Control de Vibraciones Aeroelásticas mediante Transductores Piezoeléctricos*, CATE 2021 - XI Congreso Argentino de Tecnología Espacial, Conferencia Virtual, Mendoza, Argentina.
- **Emmanuel Beltramo**, José E. Stuardi y Sergio Preidikman, *Desarrollo de un Elemento Finito de Viga con Material Piezoeléctrico Para Cosecha de Energía*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 2019, vol. XXXVII, no 43, p. 1723-1732, ISSN: 2591 – 3522.

- **Emmanuel Beltramo**, José E. Stuardi y Sergio Preidikman, *Modelado de una Estructura Multifuncional Mediante Elementos Finitos de Viga*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 2019, vol. XXXVII, no 43, p. 695-704, ISSN: 2591 – 3522.
- **Emmanuel Beltramo**, José E. Stuardi y Sergio Preidikman, *Análisis Paramétrico de un Cosechador Aeroelástico de Energía: Aspectos Estructurales*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 2018, vol. XXXVI, no 42, p. 1879–1888, ISSN: 2591 – 3522.
- Martín E. Pérez Segura, Sergio Preidikman y **Emmanuel Beltramo**, *Análisis de las Características Aerodinámicas de Aeronaves con Configuración de Alas Unidas en Función de sus Parámetros Topológicos*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 2018, vol. XXXVI, no 42, p. 1949-1958, ISSN: 2591 – 3522.
- **Emmanuel Beltramo**, Santiago Ribero, Juan M. Hümöller y Sergio Preidikman, *Modelo Electromecánico de un Cosechador Aeroelástico de Energía*, Revista de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 2018, vol. V, no 2, p. 53-61, ISSN: 2362 – 2539.
- Santiago Ribero, Juan M. Hümöller, **Emmanuel Beltramo**, José E. Stuardi y Sergio Preidikman, *Cosecha de Energía a Partir de la Inestabilidad Aeroelástica Flutter*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, 2017, vol. XXXV, no 26, p. 1455–1470, ISSN: 2591 – 3522.

# Representación vectorial y matricial de tensores simétricos

La descripción matemática de fenómenos físicos involucra comúnmente el uso de tensores de diversos órdenes. En mecánica de medios continuos la simetría de estas entidades favorece su representación mediante vectores o matrices, lo cual ofrece cierta ventaja en la implementación computacional de las ecuaciones que gobiernan al problema bajo estudio. El objetivo de este anexo consiste en exponer de manera breve las bases conceptuales que permiten expresar a tensores de segundo orden como vectores, y a tensores de tercer y cuarto orden como matrices. La representación que se expone a continuación posee carácter tensorial y recibe el nombre de notación de Mandel-Kelvin.

## A.1 Tensor de segundo orden en notación vectorial

Sea  $\mathbf{S}'$  un tensor de segundo orden perteneciente al espacio de tensores simétricos de segundo orden en  $\mathbb{R}^3$  definido por:

$$\mathcal{L} := \left\{ \mathbf{S}' \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{S}' = \mathbf{S}'^T \iff S'_{ij} = S'_{ji} \right\} \quad (\text{A.1})$$

Por conveniencia y simplicidad los desarrollos que se exponen en esta subsección y las siguientes se restringen a bases vectoriales y tensoriales ortonormalizadas. A pesar de ello, el lector puede dirigirse a la publicación Helnwein [50] donde podrá observar una mayor profundidad del tema y una generalización para bases no ortonormales. Dicho esto, el tensor  $\mathbf{S}$  expresado en la base  $\{\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3\}$  está dado por:

$$\mathbf{S}' = S'_{ij} \hat{\mathbf{b}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_j \quad (\text{A.2})$$

Donde  $S'_{ij}$  son las componentes cartesianas del tensor. Es importante destacar que al adoptar una base ortonormalizada las componentes covariantes y contravariantes del tensor son idénticas. Por ello, desde aquí en adelante no se hará ninguna distinción al respecto. A continuación, se introduce el siguiente vector:

$$\bar{\mathbf{S}}' = \{\bar{S}_a\} = [\bar{S}_1 \ \bar{S}_2 \ \bar{S}_3 \ \bar{S}_4 \ \bar{S}_5 \ \bar{S}_6]^T \quad (\text{A.3})$$

cuyas componentes son objetos del siguiente espacio vectorial:

$$\mathcal{L}^* := \{\bar{\mathbf{S}}' \in \mathbb{R}^6 \mid \bar{S}_a \hat{\mathbf{B}}_a = \mathbf{S}' \in \mathcal{L}\} \quad (\text{A.4})$$

La ecuación anterior define el mapa  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^*$  que asocia a cada tensor de segundo orden  $\mathbf{S}' \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  con un tensor de primer orden  $\bar{\mathbf{S}}' \in \mathcal{L}^* \subset \mathbb{R}^6$ . La sexta-upla de tensores ortonormales simétricos  $\{\hat{\mathbf{B}}_1, \hat{\mathbf{B}}_2, \hat{\mathbf{B}}_3, \hat{\mathbf{B}}_4, \hat{\mathbf{B}}_5, \hat{\mathbf{B}}_6\}$  conforman la base del espacio vectorial  $\mathcal{L}^*$  construida a partir de la base vectorial  $\hat{\mathbf{b}}_i$ . El propósito consiste en expresar a las componentes  $\bar{S}_a$  en función de las coordenadas cartesianas  $S'_{ij}$ . A tal efecto, se puede mostrar que tales componentes se obtienen mediante [50]:

$$\bar{S}_a = \mathbf{S}' : \hat{\mathbf{B}}_a \quad (\text{A.5})$$

Donde  $:$  denota una doble contracción tensorial. La base tensorial ortonormal del espacio  $\mathcal{L}^*$  se construye de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}_1 &= \hat{\mathbf{b}}_1 \otimes \hat{\mathbf{b}}_1, & \hat{\mathbf{B}}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{b}}_1 \otimes \hat{\mathbf{b}}_2 + \hat{\mathbf{b}}_2 \otimes \hat{\mathbf{b}}_1) \\ \hat{\mathbf{B}}_2 &= \hat{\mathbf{b}}_2 \otimes \hat{\mathbf{b}}_2, & \hat{\mathbf{B}}_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{b}}_2 \otimes \hat{\mathbf{b}}_3 + \hat{\mathbf{b}}_3 \otimes \hat{\mathbf{b}}_2) \\ \hat{\mathbf{B}}_3 &= \hat{\mathbf{b}}_3 \otimes \hat{\mathbf{b}}_3, & \hat{\mathbf{B}}_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{b}}_3 \otimes \hat{\mathbf{b}}_1 + \hat{\mathbf{b}}_1 \otimes \hat{\mathbf{b}}_3) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Considerando las ecuaciones (A.1) y (A.6), y reemplazando ambas expresiones en la ecuación (A.5) se obtiene la representación vectorial del tensor simétrico de segundo orden:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= S'_{11}, & \bar{S}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (S'_{12} + S'_{21}) = \sqrt{2} S'_{12} \\ \bar{S}_2 &= S'_{22}, & \bar{S}_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (S'_{23} + S'_{32}) = \sqrt{2} S'_{23} \\ \bar{S}_3 &= S'_{33}, & \bar{S}_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (S'_{31} + S'_{13}) = \sqrt{2} S'_{13} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Esta representación expresa a un tensor de segundo orden por medio de un tensor de primer orden. Reordenando la expresión anterior resulta:

$$\bar{\mathbf{S}}' = [S'_{11} \ S'_{22} \ S'_{33} \ \sqrt{2} S'_{12} \ \sqrt{2} S'_{23} \ \sqrt{2} S'_{13}]^T \quad (\text{A.8})$$

En la práctica, las propiedades definidas por tensores de primer orden se expresan a través de sistemas de referencias que raramente coinciden con el sistema de referencia global. Debido a esto, es común que se necesite transformar las propiedades de una base a otra. En virtud de ello, se introduce una nueva base vectorial ortonormal  $\{\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_3\}$  y a partir de ella se construye la base tensorial homónima asociada:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}_1 &= \hat{\mathbf{a}}_1 \otimes \hat{\mathbf{a}}_1, & \hat{\mathbf{A}}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{a}}_1 \otimes \hat{\mathbf{a}}_2 + \hat{\mathbf{a}}_2 \otimes \hat{\mathbf{a}}_1) \\ \hat{\mathbf{A}}_2 &= \hat{\mathbf{a}}_2 \otimes \hat{\mathbf{a}}_2, & \hat{\mathbf{A}}_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{a}}_2 \otimes \hat{\mathbf{a}}_3 + \hat{\mathbf{a}}_3 \otimes \hat{\mathbf{a}}_2) \\ \hat{\mathbf{A}}_3 &= \hat{\mathbf{a}}_3 \otimes \hat{\mathbf{a}}_3, & \hat{\mathbf{A}}_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{a}}_3 \otimes \hat{\mathbf{a}}_1 + \hat{\mathbf{a}}_1 \otimes \hat{\mathbf{a}}_3)\end{aligned}\tag{A.9}$$

Como se pretende expresar al tensor  $\bar{\mathbf{S}}'$  en la base tensorial  $\hat{\mathbf{A}}_a$  se considera un tensor de rotación  $\bar{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$  cuyas componentes se obtienen a través de la doble contracción tensorial entre los tensores que integran las bases  $\hat{\mathbf{A}}_a$  y  $\hat{\mathbf{B}}_a$ . Consecuentemente, la versión explícita del tensor de rotación está dada por [74]:

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 : \hat{\mathbf{B}}_1 & \hat{\mathbf{A}}_1 : \hat{\mathbf{B}}_2 & \hat{\mathbf{A}}_1 : \hat{\mathbf{B}}_3 & \hat{\mathbf{A}}_1 : \hat{\mathbf{B}}_4 & \hat{\mathbf{A}}_1 : \hat{\mathbf{B}}_5 & \hat{\mathbf{A}}_1 : \hat{\mathbf{B}}_6 \\ \hat{\mathbf{A}}_2 : \hat{\mathbf{B}}_1 & \hat{\mathbf{A}}_2 : \hat{\mathbf{B}}_2 & \hat{\mathbf{A}}_2 : \hat{\mathbf{B}}_3 & \hat{\mathbf{A}}_2 : \hat{\mathbf{B}}_4 & \hat{\mathbf{A}}_2 : \hat{\mathbf{B}}_5 & \hat{\mathbf{A}}_2 : \hat{\mathbf{B}}_6 \\ \hat{\mathbf{A}}_3 : \hat{\mathbf{B}}_1 & \hat{\mathbf{A}}_3 : \hat{\mathbf{B}}_2 & \hat{\mathbf{A}}_3 : \hat{\mathbf{B}}_3 & \hat{\mathbf{A}}_3 : \hat{\mathbf{B}}_4 & \hat{\mathbf{A}}_3 : \hat{\mathbf{B}}_5 & \hat{\mathbf{A}}_3 : \hat{\mathbf{B}}_6 \\ \hat{\mathbf{A}}_4 : \hat{\mathbf{B}}_1 & \hat{\mathbf{A}}_4 : \hat{\mathbf{B}}_2 & \hat{\mathbf{A}}_4 : \hat{\mathbf{B}}_3 & \hat{\mathbf{A}}_4 : \hat{\mathbf{B}}_4 & \hat{\mathbf{A}}_4 : \hat{\mathbf{B}}_5 & \hat{\mathbf{A}}_4 : \hat{\mathbf{B}}_6 \\ \hat{\mathbf{A}}_5 : \hat{\mathbf{B}}_1 & \hat{\mathbf{A}}_5 : \hat{\mathbf{B}}_2 & \hat{\mathbf{A}}_5 : \hat{\mathbf{B}}_3 & \hat{\mathbf{A}}_5 : \hat{\mathbf{B}}_4 & \hat{\mathbf{A}}_5 : \hat{\mathbf{B}}_5 & \hat{\mathbf{A}}_5 : \hat{\mathbf{B}}_6 \\ \hat{\mathbf{A}}_6 : \hat{\mathbf{B}}_1 & \hat{\mathbf{A}}_6 : \hat{\mathbf{B}}_2 & \hat{\mathbf{A}}_6 : \hat{\mathbf{B}}_3 & \hat{\mathbf{A}}_6 : \hat{\mathbf{B}}_4 & \hat{\mathbf{A}}_6 : \hat{\mathbf{B}}_5 & \hat{\mathbf{A}}_6 : \hat{\mathbf{B}}_6 \end{bmatrix}\tag{A.10}$$

Es importante mencionar que este tensor posee la propiedad de ortogonalidad, es decir satisface la siguiente condición:

$$\bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}^T = \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{I}\tag{A.11}$$

Finalmente, la ley de transformación o cambio de base del tensor de primer orden  $\bar{\mathbf{S}}'$  en el tensor de primer orden  $\bar{\mathbf{S}}$  se define a través de la siguiente operación:

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{S}}'\tag{A.12}$$

## A.2 Tensor de tercer orden en notación matricial

Sea  $\mathbf{T}'$  un tensor de tercer orden que pertenece al espacio vectorial de tensores simétricos de tercer orden en  $\mathbb{R}^3$  definido por:

$$\mathcal{M} := \left\{ \mathbf{T}' \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid T'_{ijk} = T'_{ikj} \right\}\tag{A.13}$$

Se observa que el espacio vectorial está compuesto por los tensores que poseen simetría respecto de sus dos últimos índices. Además, para expresar al tensor en función de sus componentes cartesianas se adopta una base vectorial ortonormal de idénticas características a la expuesta en la subsección anterior. Por consiguiente, se puede escribir al tensor de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}' = T'_{ijk} \hat{\mathbf{b}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_j \otimes \hat{\mathbf{b}}_k \quad (\text{A.14})$$

Donde  $T'_{ijk}$  refiere a las componentes cartesianas. Con el propósito de escribir a  $\mathbf{T}'$  en formato matricial se propone la siguiente matriz:

$$\bar{\mathbf{T}}' = \begin{bmatrix} \bar{T}'_{11} & \bar{T}'_{12} & \bar{T}'_{13} & \bar{T}'_{14} & \bar{T}'_{15} & \bar{T}'_{16} \\ \bar{T}'_{21} & \bar{T}'_{22} & \bar{T}'_{23} & \bar{T}'_{24} & \bar{T}'_{25} & \bar{T}'_{26} \\ \bar{T}'_{31} & \bar{T}'_{32} & \bar{T}'_{33} & \bar{T}'_{34} & \bar{T}'_{35} & \bar{T}'_{36} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Donde las componentes  $\bar{T}'_{ka}$  de  $\bar{\mathbf{T}}'$  son objetos del espacio vectorial  $\mathcal{M}^*$  que se define por:

$$\mathcal{M}^* := \left\{ \bar{\mathbf{T}}' \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6 \mid \bar{T}'_{ka} \hat{\mathbf{b}}_k \otimes \hat{\mathbf{B}}_a = \mathbf{T}' \in \mathcal{M} \right\} \quad (\text{A.16})$$

La expresión anterior especifica un mapa  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^*$  que asocia a cada tensor de tercer orden  $\mathbf{T}' \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  con una matriz rectangular  $\bar{\mathbf{T}}' \in \mathcal{M}^* \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6$ . Asimismo, se observa que la representación matricial se especifica en términos de la base vectorial ortonormal  $\hat{\mathbf{b}}_k$  y de la base tensorial ortonormal asociada  $\hat{\mathbf{B}}_a$ . En este caso, el índice  $k$  adopta valores de 1 a 3 y el índice  $a$  valores de 1 a 6. Nuevamente, interesa vincular las componentes de la matriz  $\bar{\mathbf{T}}'$  con las componentes cartesianas  $T'_{ijk}$  del tensor  $\mathbf{T}'$ . En relación a eso, se puede mostrar que tales componentes se determinan mediante:

$$\hat{\mathbf{b}}_k \cdot \mathbf{T}' : \hat{\mathbf{B}}_a = \bar{T}'_{ka} \quad (\text{A.17})$$

A partir de la definición anterior y de las ecuaciones (A.14) y (A.6) resulta:

$$\bar{\mathbf{T}}' = \begin{bmatrix} T'_{111} & T'_{122} & T'_{133} & \sqrt{2}T'_{112} & \sqrt{2}T'_{123} & \sqrt{2}T'_{113} \\ T'_{211} & T'_{222} & T'_{233} & \sqrt{2}T'_{212} & \sqrt{2}T'_{223} & \sqrt{2}T'_{213} \\ T'_{311} & T'_{322} & T'_{333} & \sqrt{2}T'_{312} & \sqrt{2}T'_{323} & \sqrt{2}T'_{313} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Considerando la ecuación (A.18) se infiere que la transformación de las propiedades descritas por tensores de tercer orden en notación matricial de una base a otra exige la utilización de dos tensores de rotación que se denotan por  $\bar{\mathbf{R}}$  y  $\mathbf{R}$ . El primero de ellos se definió en la subsección anterior y pertenece al espacio de tensores ortogonales en  $\mathbb{R}^6$ , mientras que el segundo de ellos pertenece al espacio de tensores ortogonales en  $\mathbb{R}^3$ . Las componentes de  $\mathbf{R}$  se calculan a través del producto escalar  $\cdot$  entre los vectores de las bases vectoriales  $\hat{\mathbf{a}}_k$  y  $\hat{\mathbf{b}}_k$ . Por consiguiente, la

versión explícita de  $\mathbf{R}$  es la siguiente:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 \cdot \hat{\mathbf{b}}_1 & \hat{\mathbf{a}}_1 \cdot \hat{\mathbf{b}}_2 & \hat{\mathbf{a}}_1 \cdot \hat{\mathbf{b}}_3 \\ \hat{\mathbf{a}}_2 \cdot \hat{\mathbf{b}}_1 & \hat{\mathbf{a}}_2 \cdot \hat{\mathbf{b}}_2 & \hat{\mathbf{a}}_2 \cdot \hat{\mathbf{b}}_3 \\ \hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \hat{\mathbf{b}}_1 & \hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \hat{\mathbf{b}}_2 & \hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \hat{\mathbf{b}}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Finalmente, la ley de transformación o cambio de base de  $\bar{\mathbf{T}}'$  en  $\bar{\mathbf{T}}$  se define por [76]:

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{R} \bar{\mathbf{T}}' \bar{\mathbf{R}}^T \quad (\text{A.20})$$

### A.3 Tensor de cuarto orden en notación matricial

Sea  $\mathbf{U}'$  un tensor de cuarto orden perteneciente al espacio vectorial de tensores simétricos de cuarto orden en  $\mathbb{R}^3$  definido por:

$$\mathcal{N} := \left\{ \mathbf{U}' \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid U'_{ijkl} = U'_{jikl} = U'_{jilk} = U'_{ijlk} \right\} \quad (\text{A.21})$$

Se observa que la simetría está asociada a los dos primeros y a los dos últimos índices. Este tipo de simetría se conoce como simetría menor. Por las mismas razones expuestas con anterioridad se considera una base vectorial ortonormal y se expresa al tensor  $\mathbf{U}'$  como:

$$\mathbf{U}' = U'_{ijkl} \hat{\mathbf{b}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_j \otimes \hat{\mathbf{b}}_k \otimes \hat{\mathbf{b}}_l \quad (\text{A.22})$$

Donde  $U'_{ijkl}$  denotan sus componentes cartesianas. Consecuentemente, con el objetivo de obtener una representación alternativa de  $\mathbf{U}'$  se propone la siguiente matriz:

$$\bar{\mathbf{U}}' = \begin{bmatrix} \bar{U}_{11} & \bar{U}_{12} & \bar{U}_{13} & \bar{U}_{14} & \bar{U}_{15} & \bar{U}_{16} \\ \bar{U}_{21} & \bar{U}_{22} & \bar{U}_{23} & \bar{U}_{24} & \bar{U}_{25} & \bar{U}_{26} \\ \bar{U}_{31} & \bar{U}_{32} & \bar{U}_{33} & \bar{U}_{34} & \bar{U}_{35} & \bar{U}_{36} \\ \bar{U}_{41} & \bar{U}_{42} & \bar{U}_{43} & \bar{U}_{44} & \bar{U}_{45} & \bar{U}_{46} \\ \bar{U}_{51} & \bar{U}_{52} & \bar{U}_{53} & \bar{U}_{54} & \bar{U}_{55} & \bar{U}_{56} \\ \bar{U}_{61} & \bar{U}_{62} & \bar{U}_{63} & \bar{U}_{64} & \bar{U}_{65} & \bar{U}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Las componentes de  $\bar{\mathbf{U}}'$  son objetos del espacio vectorial  $\mathcal{N}^*$  definido por:

$$\mathcal{N}^* := \left\{ \bar{\mathbf{U}}' \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \mid \bar{U}_{ab} \hat{\mathbf{B}}_a \otimes \hat{\mathbf{B}}_b = \mathbf{U}' \in \mathcal{N} \right\} \quad (\text{A.24})$$

La expresión anterior constituye un mapa  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}^*$  que asocia a cada tensor de cuarto orden  $\mathbf{U}' \in \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  con un tensor de segundo orden  $\bar{\mathbf{U}}' \in \mathcal{N}^* \subset \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$ . Mientras que  $\hat{\mathbf{B}}_a$  y  $\hat{\mathbf{B}}_b$  son componentes de la base tensorial simétrica del espacio  $\mathcal{L}^*$  con  $a, b = 1, \dots, 6$ .

Se puede mostrar que las componentes de  $\bar{\mathbf{U}}'$  se calculan a través de la siguiente expresión [50]:

$$\hat{\mathbf{B}}_a : \mathbf{U}' : \hat{\mathbf{B}}_b = \bar{U}_{ab} \quad (\text{A.25})$$

Adicionalmente, si el tensor  $\mathbf{U}'$  posee simetría mayor o simetría extendida  $U'_{ijkl} = U'_{klij}$  la representación matricial es simétrica  $\bar{\mathbf{U}}' = \bar{\mathbf{U}}'^T$ . Para expresar las componentes  $\bar{U}_{ab}$  en función de las componentes cartesianas  $U'_{ijkl}$  se emplea la ecuación (A.22) junto a la base tensorial ortonormal y ambas se reemplazan en la ecuación (A.25). De ello, se obtiene:

$$\bar{\mathbf{U}}' = \begin{bmatrix} U'_{1111} & U'_{1122} & U'_{1133} & \sqrt{2}U'_{1112} & \sqrt{2}U'_{1123} & \sqrt{2}U'_{1131} \\ U'_{2211} & U'_{2222} & U'_{2233} & \sqrt{2}U'_{2212} & \sqrt{2}U'_{2223} & \sqrt{2}U'_{2231} \\ U'_{3311} & U'_{3322} & U'_{3333} & \sqrt{2}U'_{3312} & \sqrt{2}U'_{3323} & \sqrt{2}U'_{3331} \\ \sqrt{2}U'_{1211} & \sqrt{2}U'_{1222} & \sqrt{2}U'_{1233} & 2U'_{1212} & 2U'_{1223} & 2U'_{1231} \\ \sqrt{2}U'_{2311} & \sqrt{2}U'_{2322} & \sqrt{2}U'_{2333} & 2U'_{2312} & 2U'_{2323} & 2U'_{2331} \\ \sqrt{2}U'_{3111} & \sqrt{2}U'_{3122} & \sqrt{2}U'_{3133} & 2U'_{3112} & 2U'_{3123} & 2U'_{3131} \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Para transformar las propiedades descritas por tensores de cuarto orden en formato matricial de una base a otra se utiliza el tensor de rotación  $\bar{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6$  presentado en la subsección A.1. En este caso, la ley de transformación se especifica por la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}}' \bar{\mathbf{R}}^T \quad (\text{A.27})$$

Donde  $\bar{\mathbf{U}}$  es el tensor de segundo orden expresado en la base tensorial  $\hat{\mathbf{A}}_a$ .

## Matrices y vectores elementales

En el presente Anexo se detalla la versión explícita de las matrices y vectores elementales que integran las ecuaciones de movimiento de un elemento finito. Por cuestiones de espacio, toda ecuación que explicate a una submatriz no será numerada. A su vez, en la última subsección del Anexo se presenta una tabla que detalla la nomenclatura presente en cada matriz y vector.

### B.1 Matriz de masa

La matriz de masa  $\mathbf{M}_e$  asociada al elemento genérico  $I_e^{h_e}$  se obtiene calculando las integrales de la ecuación (4.95) y se la expresa por medio de cuatro submatrices:

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La primera de estas submatrices se denota por  $\mathbf{M}_{11} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y se compone de los términos:

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{\rho A h_e}{3} & 0 & 0 & -\frac{\rho S_\omega}{2} & \frac{\rho S_2 h_e}{3} & -\frac{\rho S_3 h_e}{3} \\ 0 & \frac{\rho A h_e}{3} & 0 & -\frac{\rho S_2 h_e}{3} & 0 & \frac{\rho A h_e^2}{24} \\ 0 & 0 & \frac{\rho A h_e}{3} & \frac{\rho S_3 h_e}{3} & -\frac{\rho A h_e^2}{24} & 0 \\ -\frac{\rho S_\omega}{2} & -\frac{\rho S_2 h_e}{3} & \frac{\rho S_3 h_e}{3} & \frac{\rho I_{\omega\omega}}{h_e} + \frac{\rho I_p h_e}{3} & -\frac{\rho S_3 h_e^2}{24} - \frac{\rho I_{2\omega}}{2} & \frac{\rho I_{3\omega}}{2} - \frac{\rho S_2 h_e^2}{24} \\ \frac{\rho S_2 h_e}{3} & 0 & -\frac{\rho A h_e^2}{24} & -\frac{\rho S_3 h_e^2}{24} - \frac{\rho I_{2\omega}}{2} & \frac{\rho I_{22} h_e}{3} + \frac{\rho A h_e^3}{120} & -\frac{\rho I_{23} h_e}{3} \\ -\frac{\rho S_2 h_e}{3} & \frac{\rho A h_e^2}{24} & 0 & \frac{\rho I_{3\omega}}{2} - \frac{\rho S_2 h_e^2}{24} & -\frac{\rho I_{23} h_e}{3} & \frac{\rho I_{33} h_e}{3} + \frac{\rho A h_e^3}{120} \end{bmatrix}$$

La segunda submatriz se identifica mediante  $\mathbf{M}_{12} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y está dada por:

$$\mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\rho A h_e}{6} & 0 & 0 & \frac{\rho S_\omega}{2} & \frac{\rho S_2 h_e}{6} & -\frac{\rho S_3 h_e}{6} \\ 0 & \frac{\rho A h_e}{6} & 0 & -\frac{\rho S_2 h_e}{6} & 0 & -\frac{\rho A h_e^2}{24} \\ 0 & 0 & \frac{\rho A h_e}{6} & \frac{\rho S_3 h_e}{6} & \frac{\rho A h_e^2}{24} & 0 \\ \frac{\rho S_\omega}{2} & -\frac{\rho S_2 h_e}{6} & \frac{\rho S_3 h_e}{6} & \frac{\rho I_{\omega\omega}}{h_e} + \frac{\rho I_p h_e}{3} & \frac{\rho S_3 h_e^2}{24} - \frac{\rho I_{3\omega}}{2} & \frac{\rho S_2 h_e^2}{24} + \frac{\rho I_{2\omega}}{2} \\ \frac{\rho S_2 h_e}{6} & 0 & \frac{\rho A h_e^2}{24} & \frac{\rho S_3 h_e^2}{24} - \frac{\rho I_{3\omega}}{2} & \frac{\rho I_{22} h_e}{6} - \frac{\rho A h_e^3}{120} & -\frac{\rho I_{23} h_e}{6} \\ -\frac{\rho S_3 h_e}{6} & -\frac{\rho A h_e^2}{24} & 0 & \frac{\rho S_2 h_e^2}{24} + \frac{\rho I_{2\omega}}{2} & -\frac{\rho I_{23} h_e}{6} & \frac{\rho I_{33} h_e}{6} - \frac{\rho A h_e^3}{120} \end{bmatrix}$$

La tercera submatriz se denota por  $\mathbf{M}_{21} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y es igual a la transpuesta de  $\mathbf{M}_{12}$ , mientras que la última submatriz se identifica mediante  $\mathbf{M}_{22} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y está integrada por:

$$\mathbf{M}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{\rho A h_e}{3} & 0 & 0 & \frac{\rho S_\omega}{2} & \frac{\rho S_2 h_e}{3} & -\frac{\rho S_3 h_e}{3} \\ 0 & \frac{\rho A h_e}{3} & 0 & -\frac{\rho S_2 h_e}{3} & 0 & -\frac{\rho A h_e^2}{24} \\ 0 & 0 & \frac{\rho A h_e}{3} & \frac{\rho S_3 h_e}{3} & \frac{\rho A h_e^2}{24} & 0 \\ \frac{\rho S_\omega}{2} & -\frac{\rho S_2 h_e}{3} & \frac{\rho S_3 h_e}{3} & \frac{\rho I_{\omega\omega}}{h_e} + \frac{\rho I_p h_e}{3} & \frac{\rho S_3 h_e^2}{24} + \frac{\rho I_{2\omega}}{2} & \frac{\rho S_2 h_e^2}{24} - \frac{\rho I_{3\omega}}{2} \\ \frac{\rho S_2 h_e}{3} & 0 & \frac{\rho A h_e^2}{24} & \frac{\rho S_3 h_e^2}{24} + \frac{\rho I_{2\omega}}{2} & \frac{\rho I_{22} h_e}{3} + \frac{\rho A h_e^3}{120} & -\frac{\rho I_{23} h_e}{3} \\ -\frac{\rho S_3 h_e}{3} & -\frac{\rho A h_e^2}{24} & 0 & \frac{\rho S_2 h_e^2}{24} - \frac{\rho I_{3\omega}}{2} & -\frac{\rho I_{23} h_e}{3} & \frac{\rho I_{33} h_e}{3} + \frac{\rho A h_e^3}{120} \end{bmatrix}$$

Los términos presentes en las submatrices anteriores surgen de computar las siguientes integrales de superficie definidas sobre la sección de la viga:

$$\begin{aligned} \rho A &= \int_{\mathcal{A}_0} \rho(X_\alpha) d\mathcal{A}_0, & \rho S_2 &= \int_{\mathcal{A}_0} \rho(X_\alpha) X_3 d\mathcal{A}_0, \\ \rho S_3 &= \int_{\mathcal{A}_0} \rho(X_\alpha) X_2 d\mathcal{A}_0, & \rho I_p &= \int_{\mathcal{A}_0} \rho(X_\alpha) (X_2^2 + X_3^2) d\mathcal{A}_0, \\ \rho I_{22} &= \int_{\mathcal{A}_0} \rho(X_\alpha) X_2^2 d\mathcal{A}_0, & \rho I_{33} &= \int_{\mathcal{A}_0} \rho(X_\alpha) X_3^2 d\mathcal{A}_0, \\ \rho I_{23} &= \int_{\mathcal{A}_0} \rho(X_\alpha) X_2 X_3 d\mathcal{A}_0, & \rho S_\omega &= \int_{\mathcal{A}_0} \rho(X_\alpha) \omega(X_\alpha) d\mathcal{A}_0, \\ \rho I_{\omega\omega} &= \int_{\mathcal{A}_0} \rho(X_\alpha) \omega^2(X_\alpha) d\mathcal{A}_0, & \rho I_{2\omega} &= \int_{\mathcal{A}_0} \rho(X_\alpha) X_2 \omega(X_\alpha) d\mathcal{A}_0, \end{aligned}$$

$$\rho I_{3\omega} = \int_{\mathcal{A}_0} \rho(X_\alpha) X_2 \omega(X_\alpha) d\mathcal{A}_0 \quad (\text{B.2})$$

## B.2 Matriz de rigidez elástica

La matriz de rigidez elástica  $\mathbf{K}_e^e$  correspondiente al elemento genérico  $I_e^{h_e}$  se obtiene calculando las integrales de la ecuación (4.100) y se la representa a partir de cuatro submatrices:

$$\mathbf{K}_e^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

La primera submatriz se identifica mediante  $\mathbf{K}_{11} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y está compuesta por:

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{h_e} & 0 & 0 & 0 & \frac{ES_2}{h_e} & -\frac{ES_3}{h_e} \\ 0 & \frac{GA_2}{h_e} & 0 & \frac{GR_2}{h_e} & 0 & \frac{GA_2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{GA_3}{h_e} & \frac{GR_3}{h_e} & -\frac{GA_3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{GR_2}{h_e} & \frac{GR_3}{h_e} & \frac{GJ}{h_e} & -\frac{GR_3}{2} & \frac{GR_2}{2} \\ \frac{ES_2}{h_e} & 0 & -\frac{GA_3}{2} & -\frac{GR_3}{2} & \frac{EI_{22}}{h_e} + \frac{GA_3 h_e}{4} & -\frac{EI_{23}}{h_e} \\ -\frac{ES_3}{h_e} & \frac{GA_2}{2} & 0 & \frac{GR_2}{2} & -\frac{EI_{23}}{h_e} & \frac{EI_{33}}{h_e} + \frac{GA_2 h_e}{4} \end{bmatrix}$$

La segunda submatriz se denota por  $\mathbf{K}_{12} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y se compone de los términos:

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{h_e} & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES_2}{h_e} & \frac{ES_3}{h_e} \\ 0 & -\frac{GA_2}{h_e} & 0 & -\frac{GR_2}{h_e} & 0 & \frac{GA_2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{GA_3}{h_e} & -\frac{GR_3}{h_e} & -\frac{GA_3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{GR_2}{h_e} & -\frac{GR_3}{h_e} & -\frac{GJ}{h_e} & -\frac{GR_3}{2} & \frac{GR_2}{2} \\ -\frac{ES_2}{h_e} & 0 & \frac{GA_3}{2} & \frac{GR_3}{2} & \frac{GA_3 h_e}{4} - \frac{EI_{22}}{h_e} & \frac{EI_{23}}{h_e} \\ \frac{ES_3}{h_e} & -\frac{GA_2}{2} & 0 & -\frac{GR_2}{2} & \frac{EI_{23}}{h_e} & \frac{GA_2 h_e}{4} - \frac{EI_{33}}{h_e} \end{bmatrix}$$

La tercera submatriz se denota por  $\mathbf{K}_{21} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y es igual la transpuesta de  $\mathbf{K}_{12} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ , mientras que la última submatriz se identifica por medio de  $\mathbf{K}_{22} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  y está dada por:

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{h_e} & 0 & 0 & 0 & \frac{ES_2}{h_e} & -\frac{ES_3}{h_e} \\ 0 & \frac{GA_2}{h_e} & 0 & \frac{GR_2}{h_e} & 0 & -\frac{GA_2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{GA_3}{h_e} & \frac{GR_3}{h_e} & \frac{GA_3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{GR_2}{h_e} & \frac{GR_3}{h_e} & \frac{GJ}{h_e} & \frac{GR_3}{2} & -\frac{GR_2}{2} \\ \frac{ES_2}{h_e} & 0 & \frac{GA_3}{2} & \frac{GR_3}{2} & \frac{GA_3 h_e}{4} + \frac{EI_{22}}{h_e} & -\frac{EI_{23}}{h_e} \\ -\frac{ES_3}{h_e} & -\frac{GA_2}{2} & 0 & -\frac{GR_2}{2} & -\frac{EI_{23}}{h_e} & \frac{GA_2 h_e}{4} + \frac{EI_{33}}{h_e} \end{bmatrix}$$

Los términos que integran a las submatrices anteriores resultan de efectuar el cómputo de las siguientes integrales de superficie definidas sobre la sección transversal de la viga:

$$\begin{aligned} EA &= \int_{\mathcal{A}_0} E(X_\alpha) d\mathcal{A}_0, & GA_2 &= \int_{\mathcal{A}_0} G_2(X_\alpha) \alpha_2 d\mathcal{A}_0, \\ GA_3 &= \int_{\mathcal{A}_0} G_3(X_\alpha) \alpha_3 d\mathcal{A}_0, & GR_2 &= \int_{\mathcal{A}_0} G_2(X_\alpha) [\partial_2 \omega(X_\alpha) - X_3] d\mathcal{A}_0, \\ GR_3 &= \int_{\mathcal{A}_0} G_3(X_\alpha) [\partial_3 \omega(X_\alpha) + X_2] d\mathcal{A}_0, & ES_2 &= \int_{\mathcal{A}_0} E(X_\alpha) X_3 d\mathcal{A}_0, \\ ES_3 &= \int_{\mathcal{A}_0} E(X_\alpha) X_2 d\mathcal{A}_0, & EI_{22} &= \int_{\mathcal{A}_0} E(X_\alpha) X_3^2 d\mathcal{A}_0, \\ EI_{33} &= \int_{\mathcal{A}_0} E(X_\alpha) X_2^2 d\mathcal{A}_0, & EI_{23} &= \int_{\mathcal{A}_0} E(X_\alpha) X_2 X_3 d\mathcal{A}_0, \\ GJ &= \int_{\mathcal{A}_0} \left\{ G_2(X_\alpha) [\partial_2 \omega(X_\alpha) - X_3]^2 + G_3(X_\alpha) [\partial_3 \omega(X_\alpha) + X_2]^2 \right\} d\mathcal{A}_0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

En el ámbito estructural, es bien conocido que la teoría de Timoshenko considera una variación constante en la sección transversal de la deformación de corte debida al corte, lo cual no concuerda con la distribución real que, al menos, presenta un comportamiento cuadrático. Esta suposición produce una sobreestimación de la rigidez al corte que se compensa mediante la introducción de los factores de reducción o *coeficientes de corte*  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ . Estos coeficientes dependen de la geometría de la sección y se pueden determinar siguiendo el procedimiento numérico propuesto por Pilkey [83] o por Oñate [79].

### B.3 Matriz de rigidez geométrica

La matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_g^e$  asociada al elemento genérico  $I_e^{h_e}$  se obtiene resolviendo las integrales dadas en la ecuación (4.101). Se la expresa por medio de la suma de dos matrices,

cada una de ellas compuestas por cuatro submatrices:

$$\mathbf{K}_g^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_g^1 & -\mathbf{K}_g^1 \\ -\mathbf{K}_g^1 & \mathbf{K}_g^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_g^2 & -\mathbf{K}_g^2 \\ -\mathbf{K}_g^2 & \mathbf{K}_g^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

La submatriz  $\mathbf{K}_g^1 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  contiene todos aquellos términos lineales en las variables nodales y su expresión es:

$$\mathbf{K}_g^1 = \frac{1}{h_e^2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{EA}{2} \Delta u_2(t) & \frac{EA}{2} \Delta u_3(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA \Delta u_1(t) + ES_2 \Delta \theta_2(t) - ES_3 \Delta \theta_3(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA \Delta u_1(t) + ES_2 \Delta \theta_2(t) - ES_3 \Delta \theta_3(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ES_2}{2} \Delta u_2(t) & \frac{ES_2}{2} \Delta u_3(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{ES_3}{2} \Delta u_2(t) & -\frac{ES_3}{2} \Delta u_3(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por su parte, la submatriz  $\mathbf{K}_g^2 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  contiene las componentes cuadráticas en términos de las variables nodales y su versión explícita es:

$$\mathbf{K}_g^2 = \frac{1}{2h_e^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EA [\Delta u_2^2(t) + \Delta u_3^2(t)] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA [\Delta u_2^2(t) + \Delta u_3^2(t)] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A su vez, los términos  $\Delta u_1(t)$ ,  $\Delta u_2(t)$ ,  $\Delta u_3(t)$ ,  $\Delta \theta_2(t)$ , y  $\Delta \theta_3(t)$  son función de los grados de libertad nodales y se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Delta u_1(t) &= u_{j_1}^e(t) - u_{i_1}^e(t), \quad \Delta u_2(t) = u_{i_2}^e(t) - u_{j_2}^e(t), \quad \Delta u_3(t) = u_{i_3}^e(t) - u_{j_3}^e(t), \\ \Delta \theta_2(t) &= \theta_{j_2}^e(t) - \theta_{i_2}^e(t), \quad \Delta \theta_3(t) = \theta_{j_3}^e(t) - \theta_{i_3}^e(t) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

## B.4 Matriz de rigidez inducida lineal

La matriz de rigidez inducida  ${}^e_i \mathbf{K}_l^k$  para el  $k$ -ésimo transductor está dada por las siguientes cuatro submatrices:

$${}^e_i \mathbf{K}_l^k = \begin{bmatrix} {}_i \mathbf{K}_l^1 & -{}_i \mathbf{K}_l^1 \\ -{}_i \mathbf{K}_l^1 & {}_i \mathbf{K}_l^1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Su versión explícita se obtiene resolviendo las integrales de la ecuación (4.109). La submatriz identificada por  ${}_i\mathbf{K}_l^1 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  se compone de los siguientes términos:

$${}_i\mathbf{K}_l^1 = \frac{e_{311}^2}{\epsilon_{33}^E h_e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & S_2^k - A^k \tilde{X}_3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_2^k - A^k \tilde{X}_3^k & 0 & 0 & 0 & 2I_{22}^k - 2S_2^k \tilde{X}_3^k & S_3^k \tilde{X}_3^k - I_{23}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_3^k \tilde{X}_3^k - I_{23}^k & 0 \end{bmatrix}$$

Las propiedades geométricas presentes en la submatriz anterior se definen de la siguiente manera:

$$A^k = \int_{\mathcal{A}_0^k} d\mathcal{A}_0^k, \quad S_2^k = \int_{\mathcal{A}_0^k} X_3 d\mathcal{A}_0^k, \quad I_{22}^k = \int_{\mathcal{A}_0^k} X_3^2 d\mathcal{A}_0^k, \quad I_{23}^k = \int_{\mathcal{A}_0^k} X_2 X_3 d\mathcal{A}_0^k \quad (\text{B.8})$$

$\tilde{X}_3^k$  es la coordenada del plano medio del transductor y está dada por la media aritmética entre las coordenadas  ${}^2_k X_3$  y  ${}^1_k X_3$ , véase Figura 3.2. En este caso, la diferencia  $A^k \tilde{X}_3^k - S_2^k$  es nula ya que el primer momento de área del transductor respecto al eje  $X_2$  es igual al producto entre el área transversal y la coordenada media  $\tilde{X}_3^k$ .

## B.5 Matriz de rigidez inducida no lineal

La matriz de rigidez inducida para el  $k$ -ésimo transductor se denota por  ${}^e_i\mathbf{K}_{nl}^k$  y se expresa por medio de cuatro submatrices:

$${}^e_i\mathbf{K}_{nl}^k = \begin{bmatrix} {}_i\mathbf{K}_{nl}^1 & -{}_i\mathbf{K}_{nl}^1 \\ -{}_i\mathbf{K}_{nl}^1 & {}_i\mathbf{K}_{nl}^1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

La versión explícita de esta matriz se obtiene calculando las integrales de la ecuación (4.110).

La submatriz denotada por  ${}_i\mathbf{K}_{nl}^1 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  está compuesta por los siguientes términos:

$${}_i\mathbf{K}_{nl}^1 = \frac{e_{311}^2}{2\epsilon_{33}^E h_e^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \left( A^k \tilde{X}_3^k - S_2^k \right) \Delta u_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \left( A^k \tilde{X}_3^k - S_2^k \right) \Delta u_3(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left( A^k \tilde{X}_3^k - S_2^k \right) \Delta u_2(t) & \left( A^k \tilde{X}_3^k - S_2^k \right) \Delta u_3(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nuevamente, la diferencia  $A^k \tilde{X}_3^k - S_2^k$  es nula ya que el primer momento de área del transductor respecto al eje  $X_2$  es igual al producto entre el área transversal y la coordenada media  $\tilde{X}_3^k$ . Por lo tanto, la matriz elemental  ${}^e_i\mathbf{K}_{nl}^k$  tiene todas sus componentes iguales a cero.

## B.6 Matriz de rigidez eléctrica inducida

La matriz de rigidez eléctrica inducida  ${}^e_i\mathbf{K}_e^k$  para el  $k$ -ésimo transductor se compone de cuatro submatrices y está dada por:

$${}^e_i\mathbf{K}_e^k = \begin{bmatrix} {}_i\mathbf{K}_e^1 & -{}_i\mathbf{K}_e^1 \\ -{}_i\mathbf{K}_e^1 & {}_i\mathbf{K}_e^1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

La versión explícita de esta matriz se obtiene computando las integrales de la ecuación (4.116). La submatriz denotada por  ${}_i\mathbf{K}_e^1 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  está compuesta por los siguientes términos:

$${}_i\mathbf{K}_e^1 = \frac{e_{311}^2}{\epsilon_{33}^E h_e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{22}^k - 2S_2^k \tilde{X}_3^k + A^k \tilde{X}_3^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los términos involucrados en la expresión anterior están definidos en (B.8).

## B.7 Matriz de acoplamiento electromecánico lineal

La matriz de acoplamiento electromecánico lineal  ${}^e\Theta_l^k$  asociada al  $k$ -ésimo transductor se obtiene calculando las integrales de la ecuación (4.106) y su versión explícita está dada por:

$${}^e\Theta_l^k = e_{311} \frac{1}{t_k} \begin{bmatrix} A^k & 0 & 0 & 0 & S_2^k & -S_3^k & -A^k & 0 & 0 & 0 & -S_2^k & S_3^k \end{bmatrix}^T \mathbf{B}_j^k, \quad (\text{B.11})$$

donde  $A^k$  y  $S_\alpha^k$  se computan según la ecuación (B.8).

## B.8 Matriz de acoplamiento electromecánico no lineal

La matriz de acoplamiento electromecánico no lineal  ${}^e\Theta_{nl}^k(\boldsymbol{\eta}_e)$  del  $k$ -ésimo transductor resulta de calcular las integrales de la ecuación (4.109) y está dada por:

$${}^e\Theta_{nl}^k = e_{311} \frac{A^k}{t_k h_e} \begin{bmatrix} 0 & \Delta u_2(t) & \Delta u_3(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta u_2(t) & -\Delta u_3(t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \mathbf{B}_j^k, \quad (\text{B.12})$$

donde  $A^k$  está dado por (B.8) y  $\Delta u_\alpha(t)$  por (B.6).

## B.9 Matriz de acoplamiento electromecánico inducido

La matriz de acoplamiento electromecánico inducida  ${}_e\Theta_i^k$  asociada al  $k$ -ésimo transductor se obtiene de la ecuación (4.115) y su expresión es:

$${}_e\Theta_i^k = e_{311} \frac{1}{t_k} \left( A^k \tilde{X}_3^k - S_2^k \right) \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \right]^T \mathbf{B}_j^k, \quad (\text{B.13})$$

donde  $\tilde{X}_3^k$  es la coordenada del plano medio del transductor. De manera similar a  ${}_i\mathbf{K}_{nl}^k$ , la matriz de acoplamiento inducido posee todas sus componentes iguales a cero ya que se verifica que  $A^k \tilde{X}_3^k - S_2^k = 0$ .

## B.10 Vector de cargas

El vector de cargas se obtiene de la ecuación (4.122) y se compone de dos términos vectoriales,  $\mathbf{f}_e(t)$  y  $\mathbf{m}_e(t)$ , los cuales surgen de considerar las fuerzas y los momentos por unidad de longitud que actúan sobre el eje elemental. La versión explícita del primero de ellos es:

$$\mathbf{f}_e(t) = \frac{h_e}{2} \left[ \mathbf{f}_1(t) \ \mathbf{f}_2(t) \right]^T \quad (\text{B.14})$$

Donde los vectores  $\mathbf{f}_1(t), \mathbf{f}_2(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$  están dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1(t) &= \int_{-1}^1 \left[ f_1(\xi, t) \ f_2(\xi, t) \ f_3(\xi, t) \ 0 \ -f_3(\xi, t) \frac{h_e}{6} \ f_2(\xi, t) \frac{h_e}{6} \right] d\xi \\ \mathbf{f}_2(t) &= \int_{-1}^1 \left[ f_1(\xi, t) \ f_2(\xi, t) \ f_3(\xi, t) \ 0 \ f_3(\xi, t) \frac{h_e}{6} \ -f_2(\xi, t) \frac{h_e}{6} \right] d\xi \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

La versión explícita del segundo vector es:

$$\mathbf{m}_e(t) = \frac{h_e}{2} \left[ \mathbf{m}_1(t) \ \mathbf{m}_2(t) \right]^T \quad (\text{B.16})$$

Donde los vectores  $\mathbf{m}_1(t), \mathbf{m}_2(t) \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$  están dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_1(t) &= \int_{-1}^1 \left[ 0 \ 0 \ 0 \ m_1(\xi, t) \ m_2(\xi, t) \ m_3(\xi, t) \right] d\xi \\ \mathbf{m}_2(t) &= \int_{-1}^1 \left[ 0 \ 0 \ 0 \ m_1(\xi, t) \ m_2(\xi, t) \ m_3(\xi, t) \right] d\xi \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Nótese que  $f_i(\xi, t)$  y  $m_i(\xi, t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son las componentes cartesianas de los vectores  $\mathbf{f}[X_1^e(\xi), t]$  y  $\mathbf{m}[X_1^e(\xi), t]$  definidos por las ecuaciones (4.46) y (4.49).

## B.11 Nomenclatura

En la Tabla B.1 se especifica la nomenclatura usada para describir a las propiedades de inercia y de rigidez asociadas a la sección transversal del elemento, como así también propiedades geométricas vinculadas a los transductores piezoeléctricos.

Propiedad	Descripción	Unidad
$\rho A$	Masa por unidad de longitud	Kg/m
$\rho S_2$	Momento estático másico respecto al eje $X_2$	Kg
$\rho S_3$	Momento estático másico respecto al eje $X_3$	Kg
$\rho I_p$	Momento de inercia másico polar	Kgm
$\rho I_2$	Momento de inercia másico respecto al eje $X_2$	Kgm
$\rho I_3$	Momento de inercia másico respecto al eje $X_3$	Kgm
$\rho I_{23}$	Momento de inercia másico cruzado respecto a los ejes $X_2$ y $X_3$	Kgm
$\rho S_w$	Momento estático másico asociado al <i>warping</i>	Kgm
$\rho I_{ww}$	Momento de inercia másico asociado al <i>warping</i>	Kgm <sup>3</sup>
$\rho I_{2w}$	Momento de inercia másico cruzado respecto al eje $X_2$ y al <i>warping</i>	Kgm <sup>2</sup>
$\rho I_{3w}$	Momento de inercia másico cruzado respecto al eje $X_3$ y al <i>warping</i>	Kgm <sup>2</sup>
$EA$	Rigidez axial	N
$GA_2$	Rigidez al corte en dirección $X_2$	N
$GA_3$	Rigidez al corte en dirección $X_3$	N
$GR_2$	Rigidez asociada al <i>warping</i> y a flexión respecto al eje $X_2$	Nm
$GR_3$	Rigidez asociada al <i>warping</i> y a flexión respecto al eje $X_3$	Nm
$ES_2$	Rigidez acoplada axial-flexión respecto al eje $X_2$	Nm
$ES_3$	Rigidez acoplada axial-flexión respecto al eje $X_3$	Nm
$EI_{22}$	Rigidez flexional respecto al eje $X_2$	Nm <sup>2</sup>
$EI_{33}$	Rigidez flexional respecto al eje $X_3$	Nm <sup>2</sup>
$EI_{23}$	Rigidez flexional cruzada respecto a los ejes $X_2$ y $X_3$	Nm <sup>2</sup>
$GJ$	Rigidez torsional	Nm <sup>2</sup>
$A^k$	Área transversal del $k$ -ésimo transductor	m <sup>2</sup>
$S_2^k$	Momento estático del $k$ -ésimo transductor respecto al eje $X_2$	m <sup>3</sup>
$S_3^k$	Momento estático del $k$ -ésimo transductor respecto al eje $X_3$	m <sup>3</sup>
$I_{22}^k$	Momento de inercia del $k$ -ésimo transductor respecto al eje $X_2$	m <sup>4</sup>
$I_{23}^k$	Momento de inercia cruzado del $k$ -ésimo transductor	m <sup>4</sup>
$\tilde{X}_3^k$	Coordenada del plano medio del $k$ -ésimo transductor	m

**Tabla B.1:** Nomenclatura asociada a cada componente de las matrices y vectores elementales.

# Propiedades mecánicas y eléctricas de los materiales utilizados

En este anexo se presentan las propiedades electromecánicas de los piezocerámicos utilizados en los diversos casos de estudio. También, se detallan las propiedades mecánicas de aquellos materiales empleados en el sustrato de la viga.

## C.1 Piezocerámicos PZT-5A y PZT-5H

Los piezocerámicos PZT-5A y PZT-5H son usados en la mayoría de las aplicaciones dentro del campo de la ingeniería. Las propiedades electromecánicas de un transductor tridimensional de idénticas características al de la Figura 2.4a se detallan en la Tabla C.1 [43].

**Tabla C.1:** Propiedades tridimensionales para un piezocerámico polarizado en dirección  $X_3^k$ .

Parámetro	Unidad	PZT-5A	PZT-5H
$E_1$	MPa	60975.61	60606.06
$E_3$	MPa	53191.49	48309.18
$\nu_{12}$	-	0.35	0.2897
$\nu_{31}$	-	0.384	0.4082
$d_{311}$	m/V	$-1.71 \times 10^{-10}$	$-2.74 \times 10^{-10}$
$d_{113}$	m/V	$5.84 \times 10^{-10}$	$7.41 \times 10^{-10}$
$d_{333}$	m/V	$3.74 \times 10^{-10}$	$5.93 \times 10^{-10}$
$\epsilon_{11}^S$	F/m	$1.5317 \times 10^{-8}$	$2.7713 \times 10^{-8}$
$\epsilon_{33}^S$	F/m	$1.5052 \times 10^{-8}$	$3.0104 \times 10^{-8}$
$\rho$	Kg/m <sup>3</sup>	7750	7500

## C.2 Aluminio

Las propiedades mecánicas de diferentes aleaciones de aluminio se resumen en la Tabla C.2.

Parámetro	Unidad	2024-T3	Estándar
$E$	MPa	73700	70000
$\nu$	-	0.3367	0.33
$\rho$	Kg/m <sup>3</sup>	2768	2750

**Tabla C.2:** Propiedades mecánicas de diferentes aleaciones de aluminio.

## C.3 Cobre

Las propiedades mecánicas del cobre se resumen en la Tabla C.3.

Parámetro	Unidad	Cobre
$E$	MPa	105000
$\nu$	-	0.36
$\rho$	Kg/m <sup>3</sup>	9000

**Tabla C.3:** Propiedades mecánicas del cobre.

## C.4 Polietileno

Las propiedades mecánicas del polietileno se resumen en la Tabla C.4.

Parámetro	Unidad	Polietileno
$E$	MPa	1100
$\nu$	-	0.42
$\rho$	Kg/m <sup>3</sup>	950

**Tabla C.4:** Propiedades mecánicas del polietileno.

# Bibliografía

- [1] A. ABDELKEFI, M. GHOMMEM, A. O. NUHAIT, AND M. HAJJ, *Nonlinear analysis and enhancement of wing-based piezoaeroelastic energy harvesters*, Journal of Sound and Vibration, 333 (2014), pp. 166–177.
- [2] A. ABDELKEFI, A. NAYFEH, AND M. HAJJ, *Design of piezoaeroelastic energy harvesters*, Nonlinear Dynamics, 68 (2012), pp. 519–530.
- [3] A. ABDELKEFI, A. NAYFEH, AND M. HAJJ, *Enhancement of power harvesting from piezoaeroelastic systems*, Nonlinear Dynamics, 68 (2012), pp. 531–541.
- [4] A. ABDELKEFI, A. H. NAYFEH, AND M. HAJJ, *Modeling and analysis of piezoaeroelastic energy harvesters*, Nonlinear Dynamics, 67 (2012), pp. 925–939.
- [5] A. ABDELKEFI AND A. O. NUHAIT, *Modeling and performance analysis of cambered wing-based piezoaeroelastic energy harvesters*, Smart Materials and Structures, 22 (2013), p. 095029.
- [6] B. AKINREMI, B. AKINTEWE, K. FAMUAGUN, AND U. IDIONG, *On the application of fubini's theorem in the integration of functions of two variables in a measure space*, International Journal of Advanced Mathematical Sciences, 1 (2013), pp. 78–86.
- [7] M. AMIN KARAMI AND D. J. INMAN, *Powering pacemakers from heartbeat vibrations using linear and nonlinear energy harvesters*, Applied Physics Letters, 100 (2012), p. 042901.
- [8] L. ANDERSEN AND S. R. NIELSEN, *Elastic beams in three dimensions*, Aalborg University, (2008).
- [9] S. R. ANTON, A. ERTURK, AND D. J. INMAN, *Multifunctional unmanned aerial vehicle wing spar for low-power generation and storage*, Journal of Aircraft, 49 (2012), pp. 292–301.
- [10] S. R. ANTON AND H. A. SODANO, *A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006)*, Smart materials and Structures, 16 (2007), p. R1.

- 
- [11] F. AURICCHIO, P. CAROTENUTO, AND A. REALI, *On the geometrically exact beam model: A consistent, effective and simple derivation from three-dimensional finite-elasticity*, International Journal of Solids and Structures, 45 (2008), pp. 4766–4781.
- [12] C. BAO, Y. DAI, P. WANG, AND G. TANG, *A piezoelectric energy harvesting scheme based on stall flutter of airfoil section*, European Journal of Mechanics-B/Fluids, 75 (2019), pp. 119–132.
- [13] H. BARUH, *Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, Boston, 1999.
- [14] K. J. BATHE, *Finite element procedures*, Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- [15] E. BELTRAMO, B. BALACHANDRAN, AND S. PREIDIKMAN, *Three-dimensional formulation of a strain-based geometrically nonlinear piezoelectric beam for energy harvesting*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 32 (2021), pp. 2153–2173.
- [16] E. BELTRAMO, M. E. PÉREZ SEGURA, B. A. ROCCIA, M. F. VALDEZ, M. L. VERSTRAETE, AND S. PREIDIKMAN, *Constructive aerodynamic interference in a network of weakly coupled flutter-based energy harvesters*, Aerospace, 7 (2020), p. 167.
- [17] D. A. BERLINCOURT, D. R. CURRAN, H. JAFFE, ET AL., *Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers*, Physical Acoustics: Principles and Methods, 1 (1964), pp. 202–204.
- [18] G. BORINO AND G. MUSCOLINO, *Mode-superposition methods in dynamic analysis of classically and non-classically damped linear systems*, Earthquake engineering & structural dynamics, 14 (1986), pp. 705–717.
- [19] M. BRISSAUD, *Characterization of piezoceramics*, IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, 38 (1991), pp. 603–617.
- [20] M. BRYANT AND E. GARCIA, *Development of an aeroelastic vibration power harvester*, in Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems 2009, vol. 7288, SPIE, 2009, pp. 409–418.
- [21] M. BRYANT AND E. GARCIA, *Energy harvesting: a key to wireless sensor nodes*, in Second International Conference on Smart Materials and Nanotechnology in Engineering, vol. 7493, SPIE, 2009, pp. 523–530.
- [22] M. BRYANT AND E. GARCIA, *Modeling and testing of a novel aeroelastic flutter energy harvester*, Journal of vibration and acoustics, 133 (2011).
- [23] M. BRYANT, R. L. MAHTANI, AND E. GARCIA, *Synergistic wake interactions in aeroelastic flutter vibration energy harvester arrays*, in Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems, vol. 54723, 2011, pp. 271–277.

- 
- [24] M. BRYANT, E. WOLFF, AND E. GARCIA, *Aeroelastic flutter energy harvester design: the sensitivity of the driving instability to system parameters*, Smart Materials and Structures, 20 (2011), p. 125017.
- [25] L. R. CEBALLOS, *Aeroelasticidad No-Lineal de Vehículos Aéreos No-Tripulados con una Configuración No-Convencional de Alas Unidas*, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Córdoba, 2017.
- [26] C. CESNIK AND W. SU, *Nonlinear aeroelastic modeling and analysis of fully flexible aircraft*, in 46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 2005, p. 2169.
- [27] E. W. CHAVES, *Notes on continuum mechanics*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [28] I. CHOPRA AND J. SIROHI, *Smart Structures Theory*, vol. 35, Cambridge University Press, 2013.
- [29] A. CONSTANTINESCU AND A. M. KORSUNSKY, *Elasticity with Mathematica*, Cambridge University Press, 2007.
- [30] H. DAI, A. ABDELKEFI, AND L. WANG, *Modeling and nonlinear dynamics of fluid-conveying risers under hybrid excitations*, International Journal of Engineering Science, 81 (2014), pp. 1–14.
- [31] H. DAI, A. ABDELKEFI, L. WANG, AND W. LIU, *Control of cross-flow-induced vibrations of square cylinders using linear and nonlinear delayed feedbacks*, Nonlinear Dynamics, 78 (2014), pp. 907–919.
- [32] C. DE MARQUI JR, A. ERTURK, AND D. J. INMAN, *Piezoaeroelastic modeling and analysis of a generator wing with continuous and segmented electrodes*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 21 (2010), pp. 983–993.
- [33] C. DE MARQUI JR, W. G. VIEIRA, A. ERTURK, AND D. J. INMAN, *Modeling and analysis of piezoelectric energy harvesting from aeroelastic vibrations using the doublet-lattice method*, Journal of Vibration and Acoustics, 133 (2011).
- [34] G. DIMITRIADIS, *Introduction to nonlinear aeroelasticity*, John Wiley & Sons, 2017.
- [35] P. DINEVA, D. GROSS, R. MÜLLER, AND T. RANGELOV, *Piezoelectric materials*, in Dynamic fracture of piezoelectric materials, Springer, 2014, pp. 7–32.
- [36] E. H. DOWELL AND D. TANG, *Nonlinear aeroelasticity and unsteady aerodynamics*, AIAA journal, 40 (2002), pp. 1697–1707.

- 
- [37] J. DUCARNE, *Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d'amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés*, PhD thesis, Paris, CNAM, 2009.
- [38] H. ELAHI, M. EUGENI, F. FUNE, L. LAMPANI, F. MASTRODDI, G. PAOLO ROMANO, AND P. GAUDENZI, *Performance evaluation of a piezoelectric energy harvester based on flag-flutter*, *Micromachines*, 11 (2020), p. 933.
- [39] H. ELAHI, M. EUGENI, AND P. GAUDENZI, *Design and performance evaluation of a piezoelectric aeroelastic energy harvester based on the limit cycle oscillation phenomenon*, *Acta Astronautica*, 157 (2019), pp. 233–240.
- [40] A. ERTURK, *Assumed-modes modeling of piezoelectric energy harvesters: Euler-Bernoulli, Rayleigh, and Timoshenko models with axial deformations*, *Computers & Structures*, 106 (2012), pp. 214–227.
- [41] A. ERTURK AND D. J. INMAN, *On mechanical modeling of cantilevered piezoelectric vibration energy harvesters*, *Journal of intelligent material systems and structures*, 19 (2008), pp. 1311–1325.
- [42] A. ERTURK AND D. J. INMAN, *An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations*, *Smart materials and structures*, 18 (2009), p. 025009.
- [43] A. ERTURK AND D. J. INMAN, *Piezoelectric Energy Harvesting*, John Wiley & Sons, 2011.
- [44] A. ERTURK, W. G. R. VIEIRA, C. DE MARQUI JR, AND D. J. INMAN, *On the energy harvesting potential of piezoaeroelastic systems*, *Applied physics letters*, 96 (2010), p. 184103.
- [45] M. EUGENI, H. ELAHI, F. FUNE, L. LAMPANI, F. MASTRODDI, G. P. ROMANO, AND P. GAUDENZI, *Numerical and experimental investigation of piezoelectric energy harvester based on flag-flutter*, *Aerospace Science and Technology*, 97 (2020), p. 105634.
- [46] C. GATTI, J. RAMIREZ, S. MACHADO, AND M. FEBBO, *Influence of nonlinear constitutive relations in unimorphs piezoelectric harvesters*, in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 773, IOP Publishing, 2016, p. 012093.
- [47] H. C. GILLIATT, T. W. STRGANAC, AND A. J. KURDILA, *An investigation of internal resonance in aeroelastic systems*, *Nonlinear Dynamics*, 31 (2003), pp. 1–22.
- [48] C. GOMES, C. THULE, D. BROMAN, P. G. LARSEN, AND H. VANGHELUWE, *Co-simulation: a survey*, *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 51 (2018), pp. 1–33.

- 
- [49] S. HASSANPOUR AND G. HEPPLER, *Approximation of infinitesimal rotations in calculus of variations*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 39 (2016), pp. 705–712.
- [50] P. HELNWEIN, *Some remarks on the compressed matrix representation of symmetric second-order and fourth-order tensors*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190 (2001), pp. 2753–2770.
- [51] D. H. HODGES AND G. A. PIERCE, *Introduction to structural dynamics and aeroelasticity*, vol. 15, cambridge university press, 2011.
- [52] T. J. HUGHES, *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*, Courier Corporation, 2012.
- [53] IEEE, *An american national standard: Ieee standard on piezoelectricity*, 1988.
- [54] D. J. INMAN AND B. L. GRISSO, *Towards autonomous sensing*, in Smart Structures and Materials 2006: Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems, vol. 6174, SPIE, 2006, pp. 248–254.
- [55] J. JÖNSSON, *Continuum mechanics of beam and plate flexure*, (1995).
- [56] M. JOSÉ MARÍA, *Modelagem e análise de uma asa piezoaeroelástica para geração de energia*, Master's thesis, Universidade de São Paulo, 2010.
- [57] C. D. M. JUNIOR, A. ERTURK, AND D. J. INMAN, *An electromechanical finite element model for piezoelectric energy harvester plates*, Journal of Sound and Vibration, 327 (2009), pp. 9–25.
- [58] M.-G. KANG, W.-S. JUNG, C.-Y. KANG, AND S.-J. YOON, *Recent progress on pzt based piezoelectric energy harvesting technologies*, 5 (2016), p. 5.
- [59] K. KARAMCHETI, *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*, Krieger Pub Co, 1980.
- [60] M. KAREL AND M. JIRÁSEK, *Free warping analysis and numerical implementation*, Applied Mechanics and Materials, 825 (2016), pp. 141–148.
- [61] D. C. KARNOPP, E. F. KURTZ, AND D. C. PRIDMORE-BROWN, *Dynamics of mechanical and electromechanical systems*, McGraw-Hill, 1968.
- [62] J. KATZ AND A. PLOTKIN, *Low-speed aerodynamics*, vol. 13, Cambridge university press, 2001.
- [63] E. H. KLEPPENES, *Development of advanced tools in computational nonlinear aeroelasticity*, Master's thesis, The University of Bergen, 2023.

- 
- [64] P. KONSTADINOPOULOS, D. MOOK, AND A. NAYFEH, *A numerical method for general, unsteady aerodynamics*, in 7th Atmospheric Flight Mechanics Conference, 1981, p. 1877.
- [65] P. KONSTADINOPOULOS, D. THRASHER, D. MOOK, A. NAYFEH, AND L. WATSON, *A vortex-lattice method for general, unsteady aerodynamics*, *Journal of aircraft*, 22 (1985), pp. 43–49.
- [66] S. LEADENHAM AND A. ERTURK, *Unified nonlinear electroelastic dynamics of a bimorph piezoelectric cantilever for energy harvesting, sensing, and actuation*, *Nonlinear dynamics*, 79 (2015), pp. 1727–1743.
- [67] J. G. LEISHMAN AND T. BEDDOES, *A semi-empirical model for dynamic stall*, *Journal of the American Helicopter society*, 34 (1989), pp. 3–17.
- [68] G. A. LESIEUTRE AND C. L. DAVIS, *Can a coupling coefficient of a piezoelectric device be higher than those of its active material?*, *Journal of intelligent material systems and structures*, 8 (1997), pp. 859–867.
- [69] D. LI, Y. WU, A. DA RONCH, AND J. XIANG, *Energy harvesting by means of flow-induced vibrations on aerospace vehicles*, *Progress in Aerospace Sciences*, 86 (2016), pp. 28–62.
- [70] Y. LUO, *An efficient 3d Timoshenko beam element with consistent shape functions*, *Adv. Theor. Appl. Mech*, 1 (2008), pp. 95–106.
- [71] M. S. MAZA, *Desarrollo de herramientas numéricas para la simulación de la interacción de estructuras con un fluido a elevado número de reynolds*, Tesis de Master, Universidad Nacional de Rio Cuarto, 2013.
- [72] M. S. MAZA, *Un algoritmo para cosimulación de fenómenos aeroelásticos con ventajosa relación generalidad/costo*, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Córdoba, 2019.
- [73] J. MCCARTHY, S. WATKINS, A. DEIVASIGAMANI, AND S. JOHN, *Fluttering energy harvesters in the wind: A review*, *Journal of Sound and Vibration*, 361 (2016), pp. 355–377.
- [74] M. M. MEHRABADI AND S. C. COWIN, *Eigentensors of linear anisotropic elastic materials*, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 43 (1990), pp. 15–41.
- [75] C. MIMEAU AND I. MORTAZAVI, *A review of vortex methods and their applications: From creation to recent advances*, *Fluids*, 6 (2021), p. 68.
- [76] J. A. MITCHELL AND T. J. FULLER, *Nonlinear kinematics for piezoelectricity in alegra-emma*, tech. rep., Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States), 2013.

- 
- [77] A. K. MOOR, *Recent advances and applications of reduction methods*, Applied Mechanics Reviews, 47 (1994), pp. 125–141.
- [78] A. O. NUHAIT AND D. T. MOOK, *Aeroelastic behavior of flat plates moving near the ground*, Journal of Aircraft, 47 (2010), pp. 464–474.
- [79] E. OÑATE, *Structural analysis with the finite element method. Linear statics: Volume 2: beams, plates and shells*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [80] M. E. PÉREZ SEGURA, D. T. MOOK, AND S. PREIDIKMAN, *General-purpose object-oriented framework for vorticity-dominated flow simulation*, Journal of Aerospace Information Systems, 17 (2020), pp. 562–580.
- [81] D. A. PETERS AND M. J. JOHNSON, *Finite-state airloads for deformable airfoils on fixed and rotating wings*, ASME-Publications-AD, 44 (1994), pp. 1–1.
- [82] D. A. PETERS, S. KARUNAMOORTHY, AND W.-M. CAO, *Finite state induced flow models. i-two-dimensional thin airfoil*, Journal of aircraft, 32 (1995), pp. 313–322.
- [83] W. D. PILKEY, *Analysis and design of elastic beams: Computational methods*, John Wiley & Sons, 2002.
- [84] S. PREIDIKMAN, *Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems*, PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998.
- [85] M. E. PÉREZ SEGURA, *Implementación computacional del método de red de vórtices inestacionario: Una versión basada en los paradigmas de programación orientada a objetos y co-simulación*, Tesis de Master, Universidad Nacional de Córdoba, 2018.
- [86] M. E. PÉREZ SEGURA, *Una Herramienta de Co-simulación para el Estudio de Inestabilidades Aeroelásticas No Lineales en Aeronaves con Alas Unidas*, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Córdoba, 2023.
- [87] S. S. RAO, *Vibration of continuous systems*, John Wiley & Sons, 2019.
- [88] E. RATHAKRISHNAN, *Theoretical aerodynamics*, John Wiley & Sons, 2013.
- [89] J. N. REDDY, *On locking-free shear deformable beam finite elements*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 149 (1997), pp. 113–132.
- [90] J. N. REDDY, *On the dynamic behaviour of the Timoshenko beam finite elements*, Sadhana, 24 (1999), pp. 175–198.
- [91] J. N. REDDY, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, 2007.

- 
- [92] J. N. REDDY, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis Second Edition: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*, Oxford, 2014.
- [93] J. N. REDDY, *Energy principles and variational methods in applied mechanics*, John Wiley & Sons, 2017.
- [94] J. N. REDDY, *Introduction to the finite element method*, McGraw-Hill Education, 2019.
- [95] J. N. REDDY AND P. MAHAFFEY, *Generalized beam theories accounting for von kármán nonlinear strains with application to buckling*, Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics, 1 (2013), pp. 120–134.
- [96] B. A. ROCCIA, *Desarrollo de simulaciones numéricas para el estudio del vuelo de micro vehículos aéreos de alas batientes inspirados en la biología*, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Córdoba, 2013.
- [97] B. A. ROCCIA, F. MAZZONE, AND S. PREIDIKMAN, *On the theoretical aspects of the homogeneous torsion problem*, Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, 00 (2021), pp. 00–00.
- [98] B. A. ROCCIA, S. PREIDIKMAN, AND B. BALACHANDRAN, *Computational dynamics of flapping wings in hover flight: a co-simulation strategy*, AIAA Journal, 55 (2017), pp. 1806–1822.
- [99] B. A. ROCCIA, M. L. VERSTRAETE, L. R. CEBALLOS, B. BALACHANDRAN, AND S. PREIDIKMAN, *Computational study on aerodynamically coupled piezoelectric harvesters*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 31 (2020), pp. 1578–1593.
- [100] A. SABANOVIC AND K. OHNISHI, *Motion control systems*, John Wiley & Sons, 2011.
- [101] M. SAFAEI, H. A. SODANO, AND S. R. ANTON, *A review of energy harvesting using piezoelectric materials: state-of-the-art a decade later (2008–2018)*, Smart Materials and Structures, 28 (2019), p. 113001.
- [102] R. A. SERWAY AND J. W. JEWETT, *Física: electricidad y magnetismo*, Cengage Learning, 2016.
- [103] N. SEZER AND M. KOÇ, *A comprehensive review on the state-of-the-art of piezoelectric energy harvesting*, Nano Energy, 80 (2021), p. 105567.
- [104] A. A. SHABANA, *Computational Dynamics*, John Wiley & Sons, 2009.
- [105] I. H. SHAMES AND C. L. DYM, *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics: SI units edition*, Routledge, 2017.

- [106] V. C. D. SOUSA, M. DE M ANICÉZIO, C. DE MARQUI JR, AND A. ERTURK, *Enhanced aeroelastic energy harvesting by exploiting combined nonlinearities: theory and experiment*, Smart Materials and structures, 20 (2011), p. 094007.
- [107] W. SU, *Coupled nonlinear aeroelasticity and flight dynamics of fully flexible aircraft*, PhD thesis, University of Michigan, 2008.
- [108] L. SULBHEWAR AND P. RAVEENDRANATH, *An accurate novel coupled field Timoshenko piezoelectric beam finite element with induced potential effects*, Latin American Journal of Solids and Structures, 11 (2014), pp. 1628–1650.
- [109] D. TANG AND E. DOWELL, *Aeroelastic response and energy harvesting from a cantilevered piezoelectric laminated plate*, Journal of Fluids and Structures, 76 (2018), pp. 14–36.
- [110] T. THEODORSEN, *General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter*, tech. rep., 1949.
- [111] O. THOMAS, J.-F. DEÜ, AND J. DUCARNE, *Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients*, International journal for numerical methods in engineering, 80 (2009), pp. 235–268.
- [112] P. L. TIETJENS O., KARL G., *Applied hydro-and aeromechanics: based on lectures of L. Prandtl*, vol. 2, Courier Corporation, 1957.
- [113] T. O. TOUZÉ C., VIZZACCARO A., *Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures: a review of nonlinear techniques*, Journal of Nonlinear Dynamics, 105 (2021), pp. 1141–1190.
- [114] C. TRAN AND D. PETOT, *Semi-empirical model for the dynamic stall of airfoils in view of the application to the calculation of responses of a helicopter blade in forward flight*, Vertica, 5 (1980), pp. 35–53.
- [115] N. TSUSHIMA AND W. SU, *Modeling of highly flexible multifunctional wings for energy harvesting*, Journal of Aircraft, 53 (2016), pp. 1033–1044.
- [116] K. UCHINO, *Advanced piezoelectric materials: Science and technology*, Woodhead Publishing, 2017.
- [117] S. VADLAMANI AND C. ARUN, *Construction of beam elements considering von kármán nonlinear strains using b-spline wavelet on the interval*, Applied Mathematical Modelling, 68 (2019), pp. 675–695.
- [118] A. VAN GARREL, *Development of a wind turbine aerodynamics simulation module*, (2003).

- 
- [119] M. L. VERSTRAETE ET AL., *Análisis inestacionario no lineal de un arreglo de cosechadores de energía basado en flutter*, *Mecánica Computacional*, XXXIX (2022), pp. 931–941.
- [120] J. WANG, L. GENG, L. DING, H. ZHU, AND D. YURCHENKO, *The state-of-the-art review on energy harvesting from flow-induced vibrations*, *Applied Energy*, 267 (2020), p. 114902.
- [121] C. WILLIAMS AND R. B. YATES, *Analysis of a micro-electric generator for microsystems*, *sensors and actuators A: Physical*, 52 (1996), pp. 8–11.
- [122] G. WINCKELMANS AND A. LEONARD, *Contributions to vortex particle methods for the computation of three-dimensional incompressible unsteady flows*, *Journal of Computational Physics*, 109 (1993), pp. 247–273.
- [123] P. WRIGGERS, *Nonlinear finite element methods*, Springer Science & Business Media, 2008.
- [124] W. WUNDERLICH AND W. D. PILKEY, *Mechanics of structures: variational and computational methods*, CRC press, 2002.
- [125] L. YUNHUA, *Explanation and elimination of shear locking and membrane locking with field consistence approach*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162 (1998), pp. 249–269.
- [126] H. ZHU, Y. CAI, J. PAIK, AND S. ATLURI, *Locking-free thick-thin rod/beam element based on a von karman type nonlinear theory in rotated reference frames for large deformation analyses of space-frame structures*, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 57 (2010), p. 175.