FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

UNC Universidad Nacional de Córdoba

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE SOLVARIEDADES Y PRODUCTOS DE VARIEDADES SASAKIANAS

por Alejandro Tolcachier

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de *Doctor en Matemática* en la

Universidad Nacional de Córdoba

15 de diciembre, 2023

Director: Dr. Adrián Andrada

Tribunal Especial:

Dra. Romina M. Arroyo (UNC, titular)
Dr. Emilio Lauret (UNS, titular)
Dra. Cynthia Will (UNC, titular)
Dr. Mauro Subils (UNR, suplente)
Dr. Diego Sulca (UNC, suplente)

A quienes guiaron mi camino matemático: Nora, Inés y Adrián.

Resumen

Esta tesis doctoral tiene como objetivo estudiar ciertas propiedades geométricas de dos grandes familias de variedades. La primera familia que es nuestro objeto central de estudio son las solvariedades, es decir, variedades diferenciables compactas obtenidas como cocientes de grupos de Lie solubles simplemente conexos por subgrupos discretos. Estas variedades son importantes en geometría diferencial, ya que han sido en numerosas ocasiones una fuente de ejemplos (o contraejemplos) a preguntas importantes del área.

A modo de continuación del trabajo de licenciatura del autor, en esta tesis comenzamos estudiando la existencia de G_2-estructuras en solvariedades de dimensión 7 equipadas con una métrica plana invariante, las cuales pueden ser entendidas desde la teoría de variedades compactas planas. Primero, damos una clasificación de las solvariedades planas split de dimensión 7 usando la clasificación de subgrupos finitos de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ para $n = 5$ y $n = 6$. Luego estudiamos la existencia de G_2-estructuras cerradas, cocerradas y de divergencia nula, respectivamente, compatibles con la métrica plana. En particular, proveemos ejemplos explícitos de variedades compactas planas con una G_2-estructura libre de torsión cuya holonomía es cíclica finita y contenida en el grupo G_2, y ejemplos de variedades compactas planas que admiten una G_2-estructura libre de divergencia.

Por otro lado, estudiamos la geometría compleja de una familia especial de solvariedades que son cocientes de un grupo de Lie casi abeliano simplemente conexo. Un grupo de Lie casi abeliano es un grupo de Lie soluble con un subgrupo abeliano normal de codimensión 1, o equivalentemente, su álgebra de Lie posee un ideal abeliano de codimensión 1. Caracterizamos estructuras casi hermitianas en grupos de Lie casi abelianos donde la estructura casi compleja es armónica con respecto a la métrica hermitiana, es decir, es un punto crítico de la funcional de energía de Dirichlet. Además, adaptamos la clasificación de Gray-Hervella de las estructuras casi hermitianas a la familia de grupos de Lie casi abelianos, y mostramos diversos ejemplos de estructuras casi complejas armónicas en diferentes clases de Gray-Hervella en algunas solvariedades compactas casi abelianas asociadas.

En la búsqueda de ejemplos de variedades hermitianas no Kähler surge la segunda familia de variedades que serán nuestro segundo objeto central de estudio. Calabi y Eckmann mostraron que existen estructuras complejas en las variedades $\mathbb{S}^{2p+1} \times \mathbb{S}^{2q+1}$, con $p, q \geq 1$, pero que éstas no admiten ninguna métrica Kähler. Esta construcción de Calabi-Eckmann fue generalizada de manera independiente por Tsukada y Watson, quienes muestran que existe una familia de estructuras hermitianas $(J_{a,b}, g_{a,b})$ para $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, en el producto de dos variedades sasakianas que en el caso de las variedades de Calabi-Eckmann corresponden a las estructuras complejas en $\mathbb{S}^{2p+1} \times \mathbb{S}^{2q+1}$ recién mencionadas. Mostramos en esta tesis que la estructura compleja $J_{a,b}$ es armónica con respecto a $g_{a,b}$ y más aún, con el objetivo de generalizar propiedades geométricas de las variedades de Calabi-Eckmann, determinamos cuándo estas estructuras hermitianas son LCK, balanceadas, SKT, Gauduchon o k-Gauduchon ($k \geq 2$). Otro objeto geométrico importante que estudiamos en relación a las estructuras hermitianas $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es la conexión de Bismut asociada. Damos fórmulas para el tensor de Bismut-Ricci Ric^B y la forma de Bismut-Ricci ρ^B, y mostramos que estos tensores se anulan si y sólo si cada una de las variedades sasakianas es η-Einstein con constantes apropiadas. Exhibimos también ejemplos de variedades que satisfacen estas condiciones, lo que conlleva a nuevos ejemplos de variedades Calabi-Yau con torsión.

Finalmente, un invariante importante de una variedad compleja de dimensión compleja n es su fibrado canónico, que se define como la n-ésima potencia exterior de su fibrado cotangente holomorfo. En particular, resulta de interés el estudio de las variedades complejas con fibrado canónico holomórficamente trivial. Una gran familia de variedades de esta clase son las nilvariedades equipadas con una estructura compleja invariante. Nuestro objetivo es estudiar solvariedades $\Gamma\backslash G$ equipadas con estructuras complejas invariantes tales que su fibrado canónico es trivial. Mostramos que la sección trivializante de este fibrado puede ser invariante o no por la acción de G. Primero caracterizamos la existencia de secciones trivializantes invariantes en términos de una 1-forma ψ asociada canónicamente a $(\mathfrak{g}, J)$, donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G, y usamos esta caracterización para recuperar algunos resultados conocidos de la literatura, así como también para producir ejemplos nuevos de solvariedades complejas con fibrado canónico trivial. Luego consideramos el caso no invariante y proporcionamos una obstrucción algebraica, también en términos de ψ, para que una solvariedad compleja tenga fibrado canónico trivial (o más generalmente holomórficamente de torsión). Esta obstrucción además nos lleva a un modo de construir secciones no invariantes explícitas el cual ilustramos con ejemplos. Finalmente, aplicamos nuestros resultados al estudio de variedades hipercomplejas y damos una respuesta negativa a una pregunta formulada por M. Verbitsky.

Palabras clave: Geometría compleja, solvariedad, retículo, variedad sasakiana, grupo de Lie casi abeliano, estructura casi compleja armónica, fibrado canónico.

2020 Mathematics Subject Classification: 22E25, 22E40, 32M10, 53C15, 53C25, 53C55, 53D15.

Abstract

This doctoral thesis aims to study certain geometric properties of two large families of manifolds. Our first central object of study is the class of solvmanifolds, i.e., compact differentiable manifolds obtained as quotients of simply connected solvable Lie groups by discrete subgroups. These manifolds are important in differential geometry, as they have often served as a source of examples (or counterexamples) to important questions in the field.

As a continuation of the author's undergraduate work, in this thesis, we begin by studying the existence of G_2-structures on 7-dimensional solvmanifolds equipped with an invariant flat metric, which can be understood using the theory of compact flat manifolds. First, we classify splittable flat solvmanifolds of dimension 7 using the classification of finite subgroups of $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ for $n = 5$ and $n = 6$. Then, we study the existence of closed, coclosed, and divergence-free G_2-structures, respectively, compatible with the flat metric. In particular, we provide explicit examples of compact flat manifolds with a torsion-free G_2-structure whose holonomy is a finite cyclic group contained in G_2, and examples of compact flat manifolds that admit a divergence-free G_2-structure.

On the other hand, we study the complex geometry of a special family of solvmanifolds that are quotients of a simply connected almost abelian Lie group. An almost abelian Lie group is a solvable Lie group with a normal abelian subgroup of codimension 1, or equivalently, its Lie algebra has an abelian ideal of codimension 1. We characterize almost Hermitian structures on almost abelian Lie groups where the almost complex structure is harmonic with respect to the Hermitian metric, i.e., it is a critical point of the Dirichlet energy functional. Furthermore, we adapt the Gray-Hervella classification of almost Hermitian structures to the family of almost abelian Lie groups and provide various examples of harmonic almost complex structures in different Gray-Hervella classes on some associated compact almost abelian solvmanifolds.

In the search for examples of Hermitian non-Kähler manifolds emerges our second central object of study. Calabi and Eckmann showed the existence of complex structures on manifolds $\mathbb{S}^{2p+1} \times \mathbb{S}^{2q+1}$, with $p, q \geq 1$, but these do not admit any Kähler metric. This Calabi-Eckmann construction was independently generalized by Tsukada and Watson, who showed the existence of a family of Hermitian structures $(J_{a,b}, g_{a,b})$ for $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, on the product of two Sasakian manifolds, which in the case of Calabi-Eckmann manifolds correspond to the complex structures on $\mathbb{S}^{2p+1} \times \mathbb{S}^{2q+1}$ defined by Calabi and Eckmann. In this thesis, we show that the complex structure $J_{a,b}$ is harmonic with respect to $g_{a,b}$ and, furthermore, with the aim of generalizing geometric properties of Calabi-Eckmann manifolds, we determine when these Hermitian structures are LCK, balanced, SKT, Gauduchon, or k-Gauduchon ($k \geq 2$). Another important geometric object we study in relation to the Hermitian structures $(J_{a,b}, g_{a,b})$ is the associated Bismut connection. We provide formulas for the Bismut-Ricci tensor Ric^B and the Bismut-Ricci form ρ^B, and show that these tensors vanish if and only if each of the Sasakian manifolds is η-Einstein with appropriate constants. We also exhibit examples of manifolds that satisfy these conditions, leading to new examples of Calabi-Yau with torsion (CYT) manifolds.

Finally, an important invariant of a n-dimensional complex manifold is its canonical bundle, defined as the n-th exterior power of its holomorphic cotangent bundle. In particular, it is of interest to study complex manifolds with holomorphically trivial canonical bundle. A large family of manifolds of this kind are nilmanifolds equipped with an invariant complex structure. Our goal is to study solvmanifolds $\Gamma\backslash G$ equipped with invariant complex structures such that their canonical bundle is trivial. We show that the trivializing section of this bundle can be invariant or not under the action of G. First, we characterize the existence of invariant trivializing sections in terms of a 1-form ψ canonically associated with $(\mathfrak{g}, J)$, where $\mathfrak{g}$ is the Lie algebra of G, and use this characterization to recover some known results in the literature, as well as to produce new examples of complex solvmanifolds with trivial canonical bundle. Then we consider the non-invariant case and provide an algebraic obstruction, also in terms of ψ, for a complex solvmanifold to have trivial canonical bundle (or more generally, holomorphically torsion canonical bundle). This obstruction also leads us to a way to construct explicit non-invariant sections, which we illustrate with examples. Finally, we apply our results to the study of hypercomplex manifolds and provide a negative answer to a question posed by M. Verbitsky.

Key words: Complex geometry, solvmanifold, lattice, Sasakian manifold, almost abelian Lie group, harmonic almost complex structure, canonical bundle.

2020 Mathematics Subject Classification: 22E25, 22E40, 32M10, 53C15, 53C25, 53C55, 53D15.

Agradecimientos

Este es el primer escrito donde escribo agradecimientos, y considero que todo lo escrito en estas páginas quedará por siempre, por lo que me gustaría plasmar aquí de manera extensa mis profundos agradecimientos a muchas personas que han formado parte de mi vida, según como me siento en este momento de la misma. Quisiera agradecer a las siguientes personas o conjuntos de personas:

- ☺ A mi director: **Adrián Andrada**. Adrián es todo lo que espero ser como matemático y todo lo que uno espera (y más) de un director: es excelente matemático y excelente persona. Por ejemplo, nunca te dice las cosas en imperativo, siempre de manera cordial ("fijate si podés escribir esto" en vez de "escribí esto"). Si no te salen las cuentas, sin importar lo trivial que sean, baja a la tierra y te ayuda. Cuando necesitás motivación, ya sea porque no te dieron la beca CONICET, o te rechazaron un paper, o no quedaste seleccionado para un postdoc en Florencia, siempre está ahí, dispuesto a charlar. Su humor es genial, es fan de Friends, es posible un nivel de confianza en el cual se pueden mandar memes por Instagram, y sus chistes u ocurrencias son graciosos/as en la vida en general, por ejemplo: -No me gusta traducir smooth por suave. Bueno, Marcos S. usa mucho suave, Luis Miguel también. Por último, destaco su infinita pasión por la matemática, la que se ve reflejado en hechos como por ejemplo que hayamos estado ambos trabajando en overleaf después de las 12 am, que trabajemos en cualquier momento del año, que hayamos hecho cuentas en una estación de servicio en Brasil, ¡que el día que lo operaron!, se puso a leer cosas que escribí. En fin, si todos tuviéramos un director como Adrián no necesitaríamos el cielo, porque ya estaríamos en él[1].

- ☺ A mi profesora de matemática en los primeros años del secundario: **Nora Borke**†. Ella fue mi primera modelo matemática, la primera persona que me transmitió pasión por resolver problemas matemáticos. Nos introdujo a Lucas y a mí al mundo de las Olimpíadas Matemáticas y por lo tanto, marcó el camino matemático que ibamos a seguir, hasta el fin de los tiempos. Además de ser una excelente profesora, era también una excelente persona (querida por el 100 % de los alumnos), una modelo a seguir, de esas personas que mueven montañas. Sabía que cualquier problema que tuviera en la vida en aquel entonces, lo podía hablar con ella y me iba a ayudar. Era una segunda madre. Las curiosidades de la vida hacen que ella fallezca unos días antes de que yo pisara por primera vez un aula de FAMAF (el 5/8/2012) por lo que nunca pude contarle mi vida en FAMAF. Sin embargo, siempre la llevo conmigo, aparece en sueños a veces, y la recuerdo cada 19 de octubre, aniversario de su nacimiento. No sería un doctor en matemática de no ser por ella.

- ☺ A mi familia:

  - A mi mamá y mi papá: **Conny** y **Javier**, por estar siempre, apoyarme siempre, y permitirme vivir un sueño, que es vivir la vida en casa, con lo cual hay infinitas preocupaciones que no existieron y así pude disfrutar mucho más juntadas con amigos/as y dedicarme de lleno a

[1] Ver este video, minuto 2:04.

FAMAF y a la matemática. Un agradecimiento especial al hecho de que de chico me leían la guía de colectivos antes de dormir.

- A mi hermana: **Ana**, por estar siempre que la necesito, por traer a la gata, por compartir muchas cosas e ideas conmigo y por ser distinta a mí en muchos otros aspectos.
- A mi abuela y mi abuelo: **Tita** y **Rubén**†, quienes desde hace 63 años siempre se preocuparon por que a la familia nunca le falte nada, y creo que pueden estar satisfechos de que su sueño se cumplió.
- A mi familia mendocina: **Enrique**, **Vero**, **Sol y Gastón**, **Damián y Eli**, **Yuli**, **Nadia**, **Sebastián y Gabriela**, por siempre recibirnos en Mendoza con muchísimo cariño.
- Ich möchte meiner deutschen Familie: **Oma**†, **Matthias**, **Klaus**, **Peter, Lisa und Carsten**, für die trotz der Entfernung geteilten Momente danken. Es freut mich zu wissen, dass ich ein letztes Mal ein bisschen Deutsch mit meiner Großmutter sprechen konnte. Sicherlich komme ich bald wieder.

☺ A mi tribunal de tesis: **Cynthia**, **Emilio** y **Romi**, por leer detenidamente más de 72 hojas (¡Front and back![2], espero no a las 5:30 am) de la tesis con un montón de cuentas y de temas distintos, hacer comentarios muy útiles para mejorar la misma, y por los tan lindos reportes que me dieron, está bueno y es importante recibir comentarios positivos acerca de la matemática que uno hace. Un agradecimiento especial a **Mauro** por leer completa la tesis y haber muchos errores de tipeo o sugerencias, inclusive errores en fórmulas y cuentas, siendo que al ser suplente no era obligatorio que lea la tesis. Agradezco también a mi Comisión Asesora: **Yamile**, **Edison** y **Fernando**.

☺ A mi novia: **Agustina Coronado**, por haber aparecido en este último tiempo (¡Gracias al Seminario de Alumnes!) en mi vida, por ser quien sos, y por compartir todo lo que venimos compartiendo, tanto las ñoñadas relacionadas a FAMAF (como ganar un concurso disfrazado de asesino en serie) como momentos lindos afuera de la misma. Muy orgulloso de que se nos haya definido como una pareja de ñoños. Te adoro! Mi vida es más linda intersecada con vos.

☺ A mis amigos/as de FAMAF y de no-FAMAF:

- A **Nicolás Bosi**. Desde que teníamos 8 años e íbamos a la escuela de verano en Juniors y luego a la tarde nos juntábamos a jugar al Tomb Raider 4 en la computadora con la ¡Guía impresa!, hemos pasado por muchas historias, muchas personas en común, muchas viciadas, muchos problemas sentimentales por chicas, muchos partidos (y festejos en el Olmos por Qatar 2022) e infinidad de eventos canónicos y chistes. Gracias por la amistad tan longeva y humana. En este sentido también agradezco a la familia de Nico por todo el apoyo y los recuerdos y anécdotas, en especial a **Silvana**, **Vale** y **Fernando**.
- A **Lucas Villagra**. Desde 2007, cuando coincidimos por primera vez en un aula del colegio armenio en diciembre, con el propósito que más tarde se convertiría en una costumbre arraigada, el de prepararnos para las Olimpíadas Matemáticas con Nora, hemos compartido un montón de matemática: Del mismo colegio (Instituto Gral. Manuel Belgrano de la Colectividad Armenia de Córdoba). Compañeros de Olimpíadas. Compañeros de estudiar la misma carrera (Lic. en Matemática). Compañeros de materias (Funciones reales, Ecuaciones I). Compañeros de CIMA (siempre haciendo inducción). Compañeros de Doctorado. Compañeros de Congreso (EGEO 2016, UMA 2016, elENA IX 2019). Compañeros de habitación de Congreso (EGEO 2016). Compañeros de oficina (271, que es un número congruente). Compañeros de organización de seminario (Sem. de alumnes 2020 con Azul,

[2]Ver este video, minuto 2:50.

la repuntada cósmica del mismo). Compañeros docentes (Alg II 2° cuat. 2021 con Vale, la mejor comisión). Compañeros competidores por una beca PostDoc (Severo Ochoa 2023). Espero en esta lista algún día agregar coautores de un paper. Gracias además por ser una persona (como pocos/as) que equilibra el ser buen matemático y el ser apasionado por la matemática, y también por ser una de las personas más graciosas que conozco. Quiero acá también agradecer a **Perico** y a **Claudia** por las charlas y las anécdotas.

- A mis amigos/as más cercanos de FAMAF, con quienes compartí los 5 años de doctorado ($\pm\varepsilon$ ó $\pm M$), quienes siempre están ahí para apoyarme, para hablar sobre la vida, para discutir cuestiones polémicas de FAMAF o de la vida, para escuchar chismes de FAMAF o de la vida, para organizar planazos, para almorzar en la cocina, para contarte algo lindo o feo que les pasó, para contarles algo lindo o algo feo que me pasó. En fin, me hacen reír y pasarla bien infinito. Lo más lindo del doctorado definitivamente son los/as amigos/as que el doctorado te deja. Los/as quiero mucho! Quiero destacar a
    - **Vale Gutiérrez**, **Lu Morey**, **Lucas Villagra**, **Romi M. Arroyo** (integrantes de mi grupo principal "Lunch 23rd November"), con quienes hablo todos los días la mayoría del tiempo, quienes me enseñan día a día un montón de cosas sobre la vida cotidiana, sobre ser una mejor persona, una persona más sana, un mejor profesor, y un mejor matemático, por lo cual (y más) han sido parte importantísima de esta etapa. Por la cercanía con este grupo quiero nombrar también:
        - A **Joaco y Pipi**, **Cami Britch y Pelado**, y también a **Juampi**. Les agradezco siempre los planazos, las comidas, los festejos y las risas compartidas.
        - A **Marcos Bee**, **Agus Czenky**, **Flor Perachia**, **Abril Sahade**, **Estefi Santillán**, **Agus Rodriguez**, **Tadeo Liuzzi**, **Mayco**, y **Lior**, a quienes no les veo seguido pero siempre se les recuerda.
    - Escape room, otro grupo de amigos/as cercanos/as, al cual pertenecen:
        - **Ro Fonseca**: a quien conozco desde hace tiempo ya, más precisamente desde 2011. Gracias por el apoyo siempre y totalmente contento que hayas podido encontrar un trabajo que te haga feliz.
        - **Pau Chiapparoli**: la que siempre se ríe aunque haya un huracán el día de su recibida, gracias por ser siempre tan piola.
        - **Sara Vegetti**: ¿Alguien dijo Sara? Gracias por la buena onda siempre y por hacerme caer en cuenta de la existencia de otro tipo de matemática ahí afuera. *Bonne chance en France.*
        - **Nacho Bono**: Mr. chipá, experto en Escape Room y en juegos en general, aquel que siempre querés tener en tu equipo, y con quien sabés que es imposible no reírte en una conversación o en una corrección de exámenes.
        - **Vicky Torres**: a quien a pesar de conocer hace menos de un año, ya se siente como si hubieras estudiado toda tu vida acá. Gracias siempre por tu interés en las cosas de uno, y por tu gran energía para la vida. Espero ir a verte cantar pronto.
    - **Juan Guzmán** y **Felipe González**.
      Juan: el señor de los mil títulos (Postdoc Coord. Prof. Dr. Lic.), laburador infinito, la persona más buena del mundo, el mejor profesor que conozco.
      Felipe: El tipo más gracioso que conozco, innumerables viajes al aeropuerto, te consigue lo que necesitás (espero que hayas aprendido a integrar, a venderle cosas a la gente y a acompañar a las chicas a buscar su abrigo como el gran maestro Toti).
      Gracias a ambos por todas esas juntadas de lunes, los festejos de cumpleaños, recibidas, todas las latas de Guinness, el Cynar, todas las charlas y anécdotas.

- **Juan Hidalgo**. Desde esas tardes/noches de estudio de geometría superior en la sala de matemática hasta el día de hoy, siempre desde la humildad y la sinceridad, permitiéndome ser miembro de su oficina (la 333, la oficina del pueblo) aún siendo yo estudiante. Gracias chango por siempre estar ahí, todas las largas charlas de la vida, los asados, el fútbol, las charlas de matemática, los viajes en moto. Sin duda han sido todos eventos compartidos muy importantes para mí. Aprovecho para agradecer acá a un montón de gente piola que conocí gracias a Juan con la cual compartí innumerables comidas, charlas, risas, y que siempre han sido excelentes personas conmigo, incluyendo a mi gran compañero de estudio **Juan Sebastián**, **Noe Bortolussi**, **Lucía Benitez**, **Augusto y Yirana**, **Edward**, **Fer Abalos**, **Mati Bettera**, **Ivan Gómez**, **Nico Mayorga**, **Fran Ferraris**, **Fede Ribetto**, y **Taylor** (no Swift).
- **Nico Gandolfo**. Desde 2013, cuando las choripaneadas de FAMAF estallaban y estudiantes de 1° año luchaban con la noción de límite, hasta el día de hoy, en el que esos estudiantes ya son profesionales recibidos en FAMAF, tienen oficina, han sido compañeros docentes en el cursillo, le dedican tiempo de sus vidas a dar consulta desinteresadamente y forman parte de un gran cambio académico que se viene, forman parte de FAMAF. Gracias por toda la pasión por enseñar y por la vida misma que tenés, la cual se refleja en tus consejos, tus invitaciones (las que a veces acepto y luego cancelo), tus chistes super ocurrentes y creativos, y las historias de vida que compartís. Además sos uno de los mejores profesores que conozco. Hablando de excelentes profesores, agradezco al genio de **Nico Velasco** por lo compartido en este último tiempo.
- Las 3M: **Male**, **María** y **Mariela**, por todas las juntadas y las charlas desde aquella clase de consulta en el 2015 cuando estaban haciendo análisis 3 (war flashbacks). Es imposible recordar una juntada o una conversación con ustedes y no reírse, porque con ustedes siempre me reí infinito y me inculcaron mucha cultura musical. Qué lindo que nos podamos seguir juntando a pesar del tiempo y de vernos capaz una vez por año. Pronto estaremos quizás los/as 4 en países diferentes. Agradezco también a **Pablo**, **Nariman** y **Fede** por todo lo buenos que han sido conmigo y todo lo compartido.
- Doggenson: **Azul**, **Cin**, **Luis**, **Mariano**, **Mauri** y **Pablo Bähler**, el primer grupo de amigos/as de FAMAF, quienes me acompañaron en los primeros (unos cuantos en algunos casos) años de FAMAF. En especial gracias a:
  - **Cin**, por siempre mantener la (mejor) amistad desde OMA 2011 hasta hoy, hacerme reír infinito, por compartir tantas cosas y por siempre haber estado en mis momentos importantes, a pesar de que hace tiempo no está en FAMAF.
  - **Azul**, una genia del universo, que desde que la conocí nunca dejó de ser una excelente matemática, excelente docente, excelente oradora, excelente organizadora de eventos, y una apasionada por la matemática y por la vida misma, gracias por las miles de enseñanzas y los miles de momentos compartidos.
  - **Luis**, a quien aprendí a apreciar más bien hacia el fin de la carrera y que hoy en día creo firmemente que es el mejor matemático que conozco de mi edad (+1) y que además transmite pasión por la matemática, lo cual agradezco por la motivación que esto me produce. A la vez nunca uno puede no reírse con él, pues tiene una imaginación interminable para tirarte unos “¿qué preferís?” con resultados muy bizarros y para escribir acontecimientos.[3]
- A doctorandos/as de matemática que conocí en el último tiempo del doctorado, **Santi Montoya**, **Junior**, **Antonio**, **José Ignacio**, **José Luis**, **Omar**, **Rodrigo**, **Valeria**, **Coti**, **Mikhail** y **Giuli**. Les deseo muchos éxitos!

[3] Sí, mis acontecimientos los escribía él por si quien lee esto no lo sabía.

    - A **Paula Loza**, una genia de la vida, siempre con aportes interesantes, excelente gusto musical y sabiduría infinita. Gracias por el libro de Fermat, tus infinitos consejos y por todo lo que me escuchaste y me contaste, tengo un montón de recuerdos lindos.

  - A **Felipe Valdez** y **Piero Sánchez** por mantener las memorables juntadas (3-0 Cro-Arg, PUBG, asados, cumpleaños de Felipe, casamiento de Piero) en estos años a pesar de no vernos tan seguido. Un placer seguirme juntando con ustedes y gracias siempre por la buena onda, las invitaciones y las palabras de aliento.
  - A **Facu Godoy**, **Nacho Bono**, **David Hulett** y **Mateo**, por esas juntadas mantequilleras de hechiceras o nigromantes esos días de pandemia, esperando a que Facu vuelva de un partido, clonando runas, peleando a ver quien se queda con el verde, etcétera. Gracias a Mateo por su anfitrionismo en Leuven. Por cercanía al grupo quiero resaltar al estimado **Cabe**, matemático y prontamente físico, quien sabe infinito y siempre tiene algo ingenioso para decir, y con quien espero alguna vez sacar un paper (no de física por favor).
  - A amigos/as de filosofía que hice allá por el 2013-2014, y hoy a pesar de que hace muchos años que no nos vemos, los sigo recordando por esas juntadas con juegos como el Dixit, las juntadas de comida rica, las risas, y la cantidad de sabiduría que siempre percibí de ustedes. Destaco a **Eze Amaya**†, **Nacho Bisignano**, **Alfon Santolalla**, **Sofi Mondaca**, **Agustín Mauro**, **Fede Piantadosi**, **Mati Horvat**, **Cami Jimenez**. Por último, quiero mencionar a **Gasti Arce** a quien lo he visto más seguido este último tiempo y le agradezco por mantener el contacto y siempre tener charlas de alto interés.
  - A **Ana Gargantini** (π^2), gran amiga matemática, la mejor creadora de memes matemáticos que conozco, con quien nos venimos juntando casi que una vez por año desde que nos conocimos allá en el elENA del 2019 y con quien siempre disfruto de charlar de la vida matemática, la vida académica, y otras cosas como por ejemplo el fanatismo por ídolos/as matemáticos/as como Alicia Dickenstein, Marco Farinati, Eugenia Chang, etc.
  - A **Mariel Anachuri** por la amistad de tantos años a través de la pantalla y los, a pesar de pocos, memorables encuentros. Gracias por depositar tu confianza en mí y contarme muchas cosas, por escucharme en cuestiones sentimentales, por tus palabras, tu apoyo, tus flasheadas y por ser tan vos.
  - A **Pía Morra** por la amistad de muchos años a través de la pantalla, tu confianza en mí para contarme de todo (sobre todo los infinitos audios sobre anécdotas con extranjeros) y tu apoyo en cuestiones sentimentales.

☺ A los/las profes matemáticos/as de FAMAF, muchos/as de los/as cuales fueron mis docentes en las materias de licenciatura, y otros/as a quienes encuentro en pasillos, oficinas, seminarios, cafés, congresos, cenas en honor a la jubilación de alguien, festejo de los 40 años del CIEM o cumpleaños 60 (donde mayoritaria y orgullosamente soy el único estudiante de doctorado que asiste). Siempre tienen un consejo académico para darte cuando lo necesitás, una disponibilidad infinita para responder dudas matemáticas, y/o una anécdota graciosa e interesante para contarte. Realmente hacen que uno se sienta parte de la casa, como si fuera una segunda familia.

Quiero destacar a **Adrián Andrada**, **Laura Barberis**, **Jorge Lauret** y **Cynthia Will**, **Romina M. Arroyo**, **Marcos Origlia**, **Silvina Riveros** y **Gustavo Sibona** el matemago, **Roberto Miatello** e **Isabel Dotti**, **María Josefina "Kuky" Druetta**, **Juan Tirao**, **Jorge Vargas**, **Linda Saal**, **Paulo Tirao**, **Juan Pablo Rossetti**, **Leandro Cagliero**, **Fernando Fantino**, **Ivan Angiono**, **Nicolás Andruskiewitsch** y **Sonia Natale**, **Diego Sulca**, **Richar Podestá**, **Pablo Román**, **Pedro Sanchez Terraf**, **Fernando Levstein** y **Cristina Turner**, **Damián Fernández**, **Germán Torres**, **Damián Knopoff**, **Elvio Pilotta**, **Yamile Godoy**, **Edison Fernández Culma** y **Nadina Rojas**, **Edwin Rodriguez**, **Marcos Salvai**, **Carlos Olmos**,

Eduardo Hulett, **Élida Ferreyra**, **Raúl Vidal**, **Agustín García**, **Cristian Vay**, **Esther Galina**, **Inés Pacharoni**, **Jorge Adrover**, **Walter Dal Lago**, **Alejandro Tiraboschi**.

Gracias también a **Daniel Fridlender**, **Iris Dipierri**, **Enrique Coleoni**, **Cristina Esteley**, **Héctor Martínez**, **Gabriela Pozo López**.

Quiero agradecer y resaltar también a:

- Matemáticos/as que conocí en FAMAF como profes que hoy en día están en el exterior, con quienes siempre he tenido inspiradoras charlas: **Rocío Díaz**, **Emilio Lauret**, **Julia Plavnik**, **Ramiro Lafuente**.
- Matemáticos/as de Rosario que se han relacionado en mayor o menor medida con FAMAF en algún momento, con quienes también he tenido lindas charlas: **Gabriela Ovando**, **Viviana del Barco**, **Silvio Reggiani** e **Isolda Cardoso**, **Mauro Subils**, **Fran Vittone**.

☺ Al Grupo de geometría, al cual me uní en 2017 y del que me siento parte hasta hoy. Ha sido un inmenso honor y un gran placer organizar el **Seminario de Geometría** 2023 con **Marcos** (¡Y el Prode!). El grupo es casi que una familia académica para mí (**Adrián** padre, **Jorge**, **Emilio**, **Cynthia** y **Laura** tíos/as, **Roberto** e **Isabel** abuelo y abuela, **Agustín** y **Marcos** hermanos, **Romi**, **Vale**, **Mikhail**, etc, etc, etc. primos/as y así siguiendo).

Gracias especiales a **Jorge Lauret**, quien ha sido como un co-director para mí y siempre me brinda mucha sabiduría, en particular matemática (una pregunta suya se convirtió en un paper).

☺ A matemáticos/as de camadas anteriores que conocí en FAMAF (algunos/as haciendo doctorado mientras cursaba la licenciatura) con quienes compartí/comparto pocas, muchas o muchísimas cosas, pero más de un recuerdo me llevo de todos/as ustedes. Quiero destacar a: **Jose Barrionuevo**, **Brenda Barrionuevo**, **Dahy**, **Pocho**, **Emanuel Matar**, **Emi Campagnolo**, **Ivan Mandelman**, **Lean Milne**, **Aru Zapico**, **Edu Barseghian**, **Nico Jares**, **Mari Nicolini**, **Tefi Nievas**, **Rami Marchesini**, **Nico Rosales**, **Gon Zigarán**, **Lucas Vallejos**, **Kari Batistelli**, **Euge Bernaschini**, **Guille Flores**, **Johanna Frau**, **Andre Gallo**, **Gonzalo Gutiérrez**, **Ceci Herrera**, **Gon Ibañez**, **Martín Moroni**, **Mari de los Angeles Martínez**, **Héctor Peña Pollastri**, **Guille Sanmarco**, **Sonia Vera**, **Denis Videla**, **Ángel Villanueva**.

☺ A mis compañeros/as de los primeros años de la licenciatura con quienes también compartí lindos momentos (con algunos más que otros): **Joaquín Arcari**, **Felipe Valdez**, **Nico Gandolfo**, **Alan Kahan**, **Santiago Meneghini**, **Mauricio Burckwardt**, **Fede López Coria**, **Ruth Meilij**, **Dani Bauer**, **Clau Cerda**, **Marcos Bee**, **Luli Bonzi**, **Rafa Pignata**, **Laura Montes**, **Sofía Galeano**, **Gustavo Ruiz**, **María Clara**, **Nico Balmaceda**, **Franco Roldán**, **Mili Dupleich**, **Eve Schmithalter**, **Anto Anzil**, **Luz Zavala**.

☺ A personas de las camadas 2014/2015 que en momentos hemos sido (en algunos casos bastante) cercanos. Les llevo siempre en el recuerdo con las lindas anécdotas. A **Joni Claros**, **Agus Díaz**, **Coti Bencharski**, **Fran Cerino**, **Mili Colazo**, **Sofi Sandor**, **Vero Marchesini**, **Sharon Rivas**, **Ema Gianuzzi**, **Andrés Saravia**, **Nico Hörmann**, **Pau Romero**, **Pau Rodriguez**, **Jose Panadeiro**, **Johana Orona**.

En especial a **Paula Lovaiza**, por todo lo que hablamos a lo largo de casi 8 años, por enseñarme a quererme más a mí mismo y por siempre desear lo mejor para mí.

☺ Al Seminario de Alumnes, tanto al seminario como espacio que existe porque es uno de los mejores seminarios de FAMAF, como a mis excelentes co-organizadores por hacer que la tarea sea un gusto: **Azul** y **Lucas** en 2020, **Nacho** y **Vicky** en 2023, e infinitas, infinitas gracias a sus asistentes, especialmente a los/as alumnos/as de licenciatura, quienes han sido el público principal asistente en la mayoría de los seminarios.

- ☺ A alumnos/as avanzados/as de licenciatura, especialmente a: **Cami Aagaard**, **Agustina Cagliero**, **Gervasio Figueroa**, **Diego Flandín**, **Manu Iparraguirre**, **Javi Liendo**, **Bautista Prioletta**, **Agustina Ruiz**, **Gonzalo Giarda**, **Juan Lascano**, **Bruno Giordano**, **Vicente Schkolnik**, **Dania Vosahlo**, con quienes fue un gusto charlar, en mayor o menor medida, a lo largo de estos últimos tiempos y espero a ustedes les haya servido también charlar conmigo. Es un gusto presenciar tanto gusto por la matemática y tanta calidad en ustedes.

- ☺ A quienes han sido mis alumnos/as. A quienes ubico y a quienes no. A todos/as ustedes un agradecimiento especial, porque enseñar es una parte vital del quehacer matemático, así uno continúa creciendo y aprendiendo. Además es una contribución infinita al autoestima matemático, así como también da felicidad el poder dar buenos consejos y poder verlos/as crecer con tanto éxito. En muchos casos compartí más charlas y juntadas que solo las clases. Tengo al menos una anécdota o un recuerdo de cada uno/a de ustedes (y con varios/as muchos):

  - A gente a la cual disfruté mucho ayudar sin que hayan sido alumnos/as mías y de la cual tengo muchos recuerdos. Especialmente a **Manu Bordagaray**, **Christian Ledesma**, **José Sadukas**, **Julieta Moreno**, **Priscila Cejas**, **Anabella de Luca**, **Ailén Godoy**, **Marce Presotti**, **Mica Córdoba**, **Mica Gaibiso**, **Tamara Olmos**. A quienes ayudé en pandemia (y nunca vi en persona): **Agus Sandroni**, **Ro Fontana**, **Flor Willington**.
  - 2016, Análisis II 2° cuatrimestre, como ayudante alumno, **Ro Gilli**, **Amiel Gayol**, **Marti Tapia**, **Sara**, **Moisés**, **Jere**, **Fer Fushimi**, **Nico Legnazzi**, **Mateo Marengo**, **Stefi Domingo**, **Joel Kuperman**, **Fabiana Quevedo**, **Fati Insaurralde**.

    Gracias también a otras personas de esta camada que no estaban en mi comisión pero con las que compartí en menor o mayor medida: **Franco Golfieri**, **Cande Torres**, **Lucas Cardacci**, **Edu Castro**, **Jero Fotinós**, **Tomás Ulla**, **Cande Cerdosino**, **Javi Duarte**, **Mari Palacio**, **Lula Aguiar Cau**, **Cami Molina**, **Nati Grasselli**, **Sabri Tolaba**.
  - 2017, Análisis I y/o Análisis II, como ayudante alumno, **Fabri Molina**, **Pau Loza**, **Nano Arias**, **Euge Rodriguez**, **Julieta Ferrari**, **Nacho Dominguez**, **Mariel Anachuri**, **Dami Guzmán**, **Lucas Montoya**, **Franco Diosques**, **Mariana Nuñez**, **Day Alvarez**, **Ana Luz Alabi**, **Benja Alioni**, **Flor Molina**, **Pato Colazo**.
  - 2018, Curso de Nivelación, como ayudante alumno, **Eunice Barros** (quien me regaló la pulsera que sigo usando hoy), **Lara Guzmán**, **Antonella Santucho**, **Jeanette**.
  - 2021, Algebra II, como profesor (junto a **Lucas** y **Vale**, la mejor comisión ever), **Mati Conti**, **Facu Montedoro**, **Bruno Stassi**, **Martiniano Faure**, **Maia Letzen**, **Martín Bassola**, **Miguel Kalinowski**, **Meli Duboski**, **Vale Minelli**, **Shelby**, **Fran Calderón**, **Lucas Cámpoli**, **Nacho Coppa**, **Balta Salvatierra**, **Victor Sandez**, **Tadeo Macaroff**.
  - 2022, Análisis II y/o 2023, Análisis III, como profesor, **Baltazar Aguiar**, **Ignacio Arnold**, **Tomás Bequir**, **Lautaro Cabezas**, **Delfina Daruich**, **Juan Garay**, **Mariano Gonda**, **Christian González**, **Abril Guerra**, **Juliana Lazarte**, **María de los Angeles Lucca**, **Alejo Niemetz**, **Martín Palanza**, **Jazmín Sollender**, **Lucía Sorrentino**, **Ana Stumpf**, **Martina Tetzlaff**, **Luis Trejo**, **Florencia Urteaga**, **Camilo Zorrilla**.

- ☺ A la Olimpíada Matemática Argentina, organización que nos cambió la vida a montones de personas, así como también a la gente que conocí en OMA, por mostrarme que existía un mundo de personas que comparten el mismo gusto por la matemática, lo cual me condujo a FAMAF y a mi lugar en el mundo.

  En especial a: **Cin Molina**, **Anto Loiácono**, **Ro Fonseca**, **Emi Campagnolo**, **Bruno Bortolatto**, **Paula Rostagno**, **Mati Bonetto**, **Fer Paredes**, **Fede Dagotto**, **Mati Hünicken**,

Luciano Soria, **Aru Zapico**, **Angi Agüero**, **Ani Sosa**, **Manu Reyna**, **Mariano Bonifacio**, **Eri Solla**, **Magui Sella**, **Ailen Guevara**, **Brenda Pilo**, **Vicky Fornero**, **Tefi Nievas**, **Maca Díaz**, **Rami Marchesini**, **Gon Zigarán**, **Gon Rodríguez**, **Lau Montes**, **Igna Durán**, **Anny Mondino**, **Lautaro Ramírez Juncos**, **Franco Golfieri**, **Martín Jimenez**, **Ian Pasquevich**.

☺ A mis profesores/as de la secundaria, de quienes aprendí un montón, y a quienes les agradezco eternamente todo el apoyo que me brindaron y todo lo que fomentaron mi gusto por aprender y la excelencia. En especial a: **Nora Borke†**, **Inés Biga**, **Liliana Flores**, **Eli Melano**, **Cristina Boyallian**, **Poli Caradaghian**, **Valeria Lozano**, **Vivian Simonian**, **Lorena Sosa**, **Gastón Rizzi**, **Carlos Demdemian**, **Omar Ruiz**, **Marcela Valore**, **Roxana Prosdocimo†**.

☺ A mis compañeros/as de secundaria, quienes me enseñaron cosas de la vida que no venían en un libro, y quienes me hicieron disfrutar en muchos momentos la etapa de la secundaria, en especial a: **Martín Carogana**, **Giuli Prosdocimo**, **Gaspar Lazzuri**, **Dani Alvarez**, **Franco Mammana**, **Lucas Olivera**, **Niky Avakian**, **Aixa Pizarro**, **Anto Marengo**, **Ro Cagnani**, **Santi Gobbi**, **Santi Topalian**, **Ivan Ozsemerciyán**.

☺ A la universidad pública, gratuita y de calidad, en particular a la **Universidad Nacional de Córdoba** y a **FAMAF**, por brindarme el espacio para que continuara formándome como profesional, y como persona, de manera gratuita. A **CONICET** y **SECYT** por el apoyo económico otorgado durante todos estos años de doctorado.

☺ A los/las trabajadores no docentes de FAMAF, en especial a **Nancy Moyano**, **Ignacio Badano**, y **María José Mentesana**, por su buena voluntad, su predisposición constante y su infinita eficiencia para resolver problemas.

☺ Thanks to the MathStackExchange community for answering questions purely out of love for mathematics and helping me many times. One learns a lot of mathematics from these people. Special thanks to **Derek Holt**, **Ben Grossman** and **Luc Guyot**.

☺ Special thanks go to some international mathematicians whom I got to know throughout my Ph.D., and with whom I have had very useful conversations and discussions: **Andrés Moreno**, **Henrique Sá Earp**, **Andrei Moroianu**, **James Stanfield**, **Daniele Angella**, **Filippo Faggioli**, **Francesco Pediconi**, **Jonas Deré**, **Demian Goos**, **Kevin Piterman**.

☺ Un último agradecimiento a la serie Friends por hacernos reír infinito a la vez que nos hacen emocionar y hasta incluso llorar (¡en una serie de comedia!). A **Rachel** (Jennifer Aniston), **Monica** (Courteney Cox), **Phoebe** (Lisa Kudrow), **Joey** (Matt LeBlanc), **Chandler** (Mathew Perry†), **Ross** (David Schwimmer). Dejo a continuación los mejores episodios de cada temporada, de acuerdo con IMDb.

- Season 1: **The One with the Blackout** (1x07).
- Season 2: **The One with the Prom Video** (2x14).
- Season 3: **The One with the Morning After** (3x16).
- Season 4: **The One with the Embryos** (4x12).
- Season 5: **The One where Everybody Finds Out** (5x14).
- Season 6: **The One with the Proposal: Part 2** (6x25).
- Season 7: **The One with Monica and Chandler's Wedding: Part 2** (7x24).
- Season 8: **The One with the Rumor** (8x09).
- Season 9: **The One with Rachel's Other Sister** (9x08).
- Season 10: **The Last One** (10x17, 10x18).

Índice general

Introducción

Una solvariedad es una variedad diferenciable compacta que se define como un cociente compacto $\Gamma\backslash G$ de un grupo de Lie soluble simplemente conexo G por un subgrupo discreto Γ. En ciertos aspectos las solvariedades son objetos simples de tratar, ya que al considerar en ellas estructuras invariantes por el grupo de Lie soluble, podemos trabajar a nivel de álgebras de Lie y considerar los objetos lineales asociados. De esta manera, una cuestión geométrica se traduce en un problema algebraico.

Notemos que esta clase contiene a las nilvariedades, que se definen de manera análoga para G nilpotente. Las solvariedades constituyen una fuente fructífera e interesante de ejemplos y contraejemplos en geometría (casi) compleja, geometría simpléctica, geometría G_2, física teórica, entre otras áreas. Podemos citar varios ejemplos (más ejemplos en [52, 53, 96, 115, 149]):

- La variedad de Kodaira-Thurston, construida en [141], es el primer ejemplo de una variedad simpléctica que no admite estructuras de Kähler, y es una nilvariedad de dimensión 4.
- En [122] Oeljeklaus y Toma construyeron variedades complejas compactas no Kähler a partir de ciertos cuerpos de números que admiten s incrustaciones reales y $2t$ incrustaciones complejas, llamadas variedades OT de tipo (s,t), y mostraron que para $t=1$ estas variedades admiten métricas localmente conforme Kähler. Estas variedades han mostrado ser muy importantes en geometría compleja, en particular son un contraejemplo a una conjetura de Vaisman sobre los números de Betti de variedades LCK compactas. Además, Kasuya probó en [95] que las variedades OT pueden describirse como solvariedades y usando esta descripción probó que no admiten ninguna métrica Vaisman.
- La variedad completamente soluble de Nakamura, introducida en [119], es una variedad compleja compacta de dimensión que ha sido muy estudiada recientemente (ver por ejemplo [12]). En particular, es una solvariedad no Kähler que es cohomológicamente Kähler [51].
- En [50] se exhiben soluciones de las ecuaciones supersimétricas de tipo II A en solvariedades de dimensión 6 que admiten una estructura simpléctica invariante half-flat. En [124] se da un ejemplo de una solvariedad compleja de dimensión 6 que admite muchas soluciones invariantes al sistema de Strominger con respecto a cierta familia de conexiones hermitianas en la condición de cancelación de anomalías de Green-Schwarz. Más aún, algunas de estas soluciones satisfacen además las ecuaciones heteróticas de movimiento.

Muchas propiedades globales de las nilvariedades no pueden generalizarse a las solvariedades, razón por la cual estas variedades continúan siendo ampliamente estudiadas. Por ejemplo, un resultado probado por Nomizu dice básicamente que la cohomología de una nilvariedad puede ser calculada usando formas diferenciales invariantes, dado que es isomorfa a la cohomología de su álgebra de Lie [120]. Desafortunadamente esto no es cierto en general para una solvariedad, salvo en casos particulares, por ejemplo cuando el grupo de Lie es completamente soluble [86] o cuando se satisface la “condición de Mostow” [117]. Otra diferencia es que en general no es sencillo determinar si un grupo de Lie soluble unimodular admite un retículo, en contraste con la existencia de un criterio preciso para grupos de Lie nilpotentes probado por Malcev [109].

Como una primera pequeña ilustración del fenómeno de que las solvariedades pueden servir como fuente de ejemplos para estudiar distintas geometrías, en esta tesis estudiamos la existencia de ciertos tipos de G_2-estructuras en cierta familia de solvariedades de dimensión 7 equipadas con una métrica plana.

Dada una variedad diferenciable M de dimensión 7, una G_2-estructura en M es una 3-forma diferenciable φ en M que cumple cierta condición de positividad. Una tal 3-forma induce una métrica Riemanniana g_φ, un operador estrella de Hodge $\star_\varphi$, y una forma de volumen vol_φ en M.

Las G_2-estructuras pueden dividirse en clases caracterizadas de acuerdo a la anulación de ciertos tensores que involucran las derivadas exteriores $d\varphi$ y $d\star_\varphi\varphi$ [49]. Por ejemplo, una G_2-estructura se dice *cerrada* si $d\varphi = 0$ y se dice *cocerrada* si $d\star_\varphi\varphi = 0$. La torsión intrínseca de una G_2-estructura φ se puede identificar con la derivada covariante $\nabla^\varphi\varphi$, donde ∇^φ denota la conexión de Levi-Civita de g_φ. Por un teorema clásico de Fernández-Gray [49], $\nabla^\varphi\varphi$ se anula idénticamente si y sólo si $d\varphi = 0$ y $d\star_\varphi\varphi = 0$. En este caso la G_2-estructura φ en M se dice *libre de torsión*.

La importancia de las G_2-estructuras libres de torsión proviene tanto de su relevancia histórica como de sus buenas propiedades topológicas. En 1955, el teorema de clasificación de Berger [24] sugirió que G_2 podría ser el grupo de holonomía de cierta variedad riemanniana de dimensión 7. Sin embargo, hasta 1984 no se conoció ningún ejemplo de una tal variedad. Los primeros ejemplos de variedades no compactas de dimensión 7 con holonomía G_2 fueron construidos por Bryant [34]. Alrededor de 1994, Joyce encontró los primeros ejemplos compactos [93]. En relación a la topología de variedades equipadas con G_2-estructuras libres de torsión, se deduce del principio de holonomía que si φ es libre de torsión entonces $\mathrm{Hol}(g_\varphi) \subset G_2$, y en el caso compacto la igualdad se cumple si y sólo si $\pi_1(M)$ es finito [93]. Además, cuando la G_2-estructura es libre de torsión, la métrica inducida g_φ resulta Ricci-plana. Así, de acuerdo con [3], si g_φ es homogénea entonces g_φ es plana.

Un posible enfoque para encontrar G_2-estructuras libres de torsión es construir un flujo de G_2-estructuras el cual bajo ciertas condiciones converja a una estructura libre de torsión. Este fue el enfoque original de Bryant al introducir el flujo laplaciano de G_2-estructuras cerradas [35]. Luego, Karigiannis, McKay y Tsui introdujeron el coflujo laplaciano de G_2-estructuras cocerradas [94]. Estos dos flujos comparten la propiedad de que los puntos fijos son precisamente las G_2-estructuras libres de torsión. Esto resalta la importancia de encontrar G_2-estructuras cerradas y cocerradas para luego evolucionarlas. Otro tipo de flujos que han sido considerados recientemente son los flujos isométricos de G_2-estructuras, es decir, flujos que preservan la métrica pero que modifican la G_2-estructura (un resumen de progresos recientes puede encontrarse en [81]). Por ejemplo, uno puede considerar la evolución de la 3-forma φ mediante la ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \iota_{\operatorname{div} T_{\varphi(t)}}(\star_{\varphi(t)}\varphi(t)), \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases}$$

donde el campo vectorial $\operatorname{div} T_\varphi$ es la *divergencia* del tensor de torsión total T_φ (ver (2.1.3) abajo). Es claro que las G_2-estructuras con $\operatorname{div} T_\varphi = 0$ son puntos críticos de la ecuación anterior. Se sabe además que las G_2-estructuras cerradas satisfacen $\operatorname{div} T_\varphi = 0$ [81].

El otro interés que tenemos en gran parte de esta tesis es estudiar ciertos aspectos de geometría (casi) compleja. Recordemos que una estructura casi compleja en una variedad diferenciable M es un tensor $J \in \mathrm{End}(TM)$ que satisface $J_p^2 = -\mathrm{Id}_{T_pM}$ para todo $p \in M$. Si además M admite una métrica riemanniana g de modo que J es ortogonal respecto a g, entonces el par (J, g) se llama una estructura casi hermitiana y (M, J, g) una variedad casi hermitiana. Cuando J es integrable, i.e. J es la estructura casi compleja asociada a un atlas holomorfo en M que la hace una variedad compleja, entonces J se dice una estructura compleja y (J, g) se llama una estructura hermitiana. Debido al teorema de Newlander-Nirenberg, la integrabilidad de J es equivalente a que se anule el tensor de Nijenhuis asociado a J, esto es, el $(1,2)$-tensor N_J definido por

$$N_J(X,Y) = [X,Y] + J([JX,Y] + [X,JY]) - [JX,JY], \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Un campo de estudio muy activo en la geometría (casi) compleja es la búsqueda de métricas (casi) hermitianas que poseen propiedades especiales. Las variedades Kähler están definidas por $\nabla^{LC} J = 0$ donde ∇^{LC} denota la conexión de Levi-Civita asociada a g, o equivalentemente por $d\omega = 0$, donde $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ es la forma fundamental (o forma de Kähler) asociada a (J, g). Estas son las variedades hermitianas más estudiadas, puesto que yacen en la intersección de la geometría compleja, simpléctica, diferencial, y algebraica, y debido a esta interacción poseen muchas propiedades geométricas interesantes. Muchas variedades complejas importantes son Kähler. Sin embargo, la existencia de una métrica Kähler impone fuertes obstrucciones topológicas a la variedad cuando es compacta, por ejemplo sus números de Betti impares deben ser pares. En consecuencia, muchas variedades complejas compactas conocidas no admiten ninguna métrica Kähler; por ejemplo, las variedades de Hopf $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1}$ con $n \geq 1$. En la búsqueda de ejemplos simplemente conexos, Calabi y Eckmann mostraron que existen estructuras complejas en las variedades $\mathbb{S}^{2p+1} \times \mathbb{S}^{2q+1}$, con $p, q \geq 1$, pero que éstas no admiten ninguna métrica Kähler.

Para entender mejor la geometría hermitiana no Kähler se han adoptado diferentes enfoques.

Una manera es, dada una variedad riemanniana (M, g) de dimensión $2n$, tratar de detectar una estructura casi compleja óptima desde un punto de vista variacional. Asumiendo que existe al menos una estructura casi compleja compatible con la métrica, la idea es considerar funcionales definidos en el espacio de estructuras casi complejas ortogonales en M y luego buscar extremos de estos funcionales. Un funcional natural que ha sido analizado en [157, 158] es el *funcional de energía de Dirichlet* E, definido por

$$E(J) := \int_M \|\nabla^{LC} J\|^2 \operatorname{vol}_g,$$

cuando M es compacta[4]. El primer paso en la búsqueda de mínimos (locales) es calcular los puntos críticos del funcional E, llamados estructuras casi complejas *armónicas*. Fue probado en [157] (ver también [158]) que una estructura casi compleja ortogonal J es armónica si y sólo si

$$[J, \nabla^* \nabla J] = 0,$$

donde $\nabla^* \nabla J$ es el *Laplaciano de conexión* de J definido por $\nabla^* \nabla J = \operatorname{Tr} \nabla^2 J$.

De la definición de E se sigue que las estructuras Kähler son armónicas; de hecho, son mínimos absolutos. En el contexto hermitiano más general, recordamos que las estructuras casi hermitianas fueron agrupadas en clases por Gray y Hervella en [80], en base a las propiedades del tensor asociado $\nabla^{LC}\omega$ (ver §3.2). Ya fue demostrado que las estructuras casi complejas en algunas de estas clases resultan siempre armónicas; por ejemplo, las variedades nearly Kähler en [158] (tales como $\mathbb{S}^6$ con la estructura casi compleja inducida por la multiplicación octoniónica), y las balanceadas o localmente conforme Kähler en [73], asumiendo que la dimensión de la variedad compleja es mayor que 2. Otros ejemplos de estructuras complejas armónicas aparecen en las variedades de Calabi-Eckmann [158]. Además, en [44, 45, 46] han sido estudiadas las estructuras casi complejas armónicas en variedades riemannianas de dimensión 4. Más recientemente, He y Li introdujeron en [87] el *flujo armónico del calor* para estructuras casi complejas compatibles con una métrica riemanniana fija, el cual es una versión tensorial del mapa armónico de la ecuación del calor primeramente estudiado por Eells-Sampson [48]. Más sobre estructuras casi complejas armónicas puede encontrarse en, por ejemplo, [29, 44, 45, 107, 108].

La ecuación $[J, \nabla^* \nabla J] = 0$ es difícil de verificar en una variedad casi hermitiana genérica, es por ello que en esta tesis nos enfocamos en estudiarla en primer lugar en una familia particular de solvariedades compactas. Notemos que al considerar solvariedades equipadas con estructuras casi hermitianas inducidas por una estructura casi hermitiana invariante a izquierda en el grupo de Lie G,

[4] En una variedad no compacta, uno puede tomar la ecuación de Euler-Lagrange $[J, \nabla^* \nabla J] = 0$ como la definición de armonicidad, o definir la energía en un subconjunto abierto de clausura compacta y considerar variaciones con soporte compacto incluidas en este subconjunto, y la ecuación resultante en el abierto es la misma que en el caso compacto.

basta con verificar la ecuación $[J, \nabla^* \nabla J] = 0$ en las correspondientes álgebras de Lie y así, la condición de armonicidad se transforma en una condición puramente algebraica. Este problema puede seguir resultando difícil de trabajar en general, por lo que nos restringimos a estudiar solvariedades casi abelianas equipadas con una estructura casi hermitiana invariante. Una solvariedad $\Gamma\backslash G$ se dice *casi abeliana* si G es un grupo de Lie casi abeliano, esto es, su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ posee un ideal abeliano de codimensión uno. Esta clase de solvariedades ha sido intensamente estudiada en la actualidad y algunos resultados acerca de su geometría (casi) hermitiana pueden encontrarse en [8, 15, 56, 55, 100]. La ventaja de trabajar en estas solvariedades es que cualquier álgebra de Lie casi abeliana de dimensión $2n$ está completamente determinada por una matriz real A de tamaño $(2n-1) \times (2n-1)$, lo cual nos permite por ejemplo interpretar la condición de armonicidad en términos de A. De esta manera proporcionamos varios ejemplos de estructuras casi complejas armónicas que yacen en diferentes clases de Gray-Hervella, tanto en dimensión 4 como en dimensión $2n \geq 6$.

Otro enfoque posible muy adoptado es debilitar la condición de Kähler $d\omega = 0$. Por ejemplo, las métricas *balanceadas* se definen por la condición $d\omega^{n-1} = 0$, donde n es la dimensión compleja de la variedad, mientras que las métricas *localmente conforme Kähler* (LCK) se definen por la condición $d\omega = \theta \wedge \omega$, donde θ es una 1-forma cerrada llamada la *forma de Lee*. Las métricas balanceadas corresponden a la clase $\mathcal{W}_3$ en la clasificación de Gray-Hervella [80], y su estudio comenzó con el trabajo de Michelsohn [112]. Por otro lado, las métricas LCK corresponden a la clase $\mathcal{W}_4$ en la clasificación de Gray-Hervella [80], y fueron ampliamente estudiadas a partir de un trabajo fundacional de Vaisman [150]. Otras condiciones que involucran a los operadores ∂ y $\bar{\partial}$ son: *strong Kähler with torsion (SKT)*, definidas por $\partial\bar{\partial}\omega = 0$; *astheno-Kähler*, definidas por $\partial\bar{\partial}\omega^{n-2} = 0$; *Gauduchon*, definidas por $\partial\bar{\partial}\omega^{n-1} = 0$, y su generalización *k-Gauduchon* definidas por $\partial\bar{\partial}\omega^k \wedge \omega^{n-k-1} = 0$, con $1 \leq k \leq n$.

Muchas de estas métricas hermitianas han sido estudiadas en las variedades de Calabi-Eckmann. Por ejemplo, Michelsohn probó que las variedades de Calabi-Eckmann $\mathbb{S}^{2p+1} \times \mathbb{S}^{2q+1}$, con $p + q \geq 1$, no admiten ninguna métrica balanceada debido a razones homológicas [112]. Por otra parte, Wood mostró en [158] que las variedades de Calabi-Eckmann $\mathbb{S}^{2p+1} \times \mathbb{S}^{2q+1}$ equipadas con la métrica producto de las métricas redondas son LCK si y sólo si $p = 0$ o $q = 0$. Más recientemente, Cavalcanti estableció en [38] que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ son las únicas variedades de Calabi-Eckmann que admiten métricas SKT no Kähler. Cabe resaltar que muchas de estas propiedades hermitianas de las variedades de Calabi-Eckmann fueron probadas usando fuertemente las propiedades geométricas de las esferas (por ejemplo, su (co)homología, el hecho de que las métricas redondas poseen curvatura seccional constante, la existencia de la fibración de Hopf $\mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$, etcétera).

Un tercer enfoque para entender mejor las variedades hermitianas no Kähler es considerar conexiones que preserven la estructura hermitiana, es decir, que tanto la métrica riemanniana como la estructura compleja sean paralelas con respecto a dicha conexión. Una tal conexión se dice hermitiana. Se sabe que la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica hermitiana es una conexión hermitiana si y sólo si la variedad es Kähler, por lo que en el contexto no Kähler debemos buscar otras conexiones. De hecho, en cualquier variedad hermitiana existen infinitas conexiones hermitianas, pero hay una única que satisface la condición extra de que su torsión, considerada como un tensor de tipo $(0,3)$ al contraer con la métrica, es una 3-forma [25]. Esta conexión, que denotaremos por ∇^B, es llamada la *conexión de Bismut*, aunque en la literatura física se le suele llamar *conexión Kähler con torsión* (o KT), y más recientemente también se le ha dado el nombre de *conexión de Strominger*. Dado que la estructura compleja y la métrica hermitiana son ambas ∇^B-paralelas tenemos que el grupo de holonomía asociado Hol^B está contenido en $\mathrm{U}(n)$, donde $2n$ es la dimensión real de la variedad. En particular, las variedades hermitianas de dimensión $2n$ cuya holonomía de Bismut (restringida) está contenida en $\mathrm{SU}(n)$ han despertado mucho interés (ver por ejemplo [10, 52, 75, 76, 90, 148]). Estas variedades se conocen como variedades *Calabi-Yau con torsión* (CYT para abreviar), y aparecen en teoría heterótica de cuerdas, relacionadas al sistema de Strominger en dimensión 6 [88, 137]. La condición de ser CYT es equivalente a que se anule la forma de Bismut-Ricci (ver (4.5.4) más abajo para su definición). Cabe notar que las variedades Bismut planas (i.e. cuando la curvatura de Bismut R^B es nula) han sido caracterizadas recientemente en [154]: si M es una variedad hermitiana compacta con conexión de Bismut plana, entonces su cubrimiento universal es un grupo de Lie G equipado con una métrica bi-invariante y una estructura compleja invariante a izquierda compatible con la métrica. En particular, G es el producto de un grupo de Lie semisimple compacto y un espacio vectorial real.

Las variedades de Calabi-Eckmann resultan ser un caso particular de una construcción desarrollada de manera independiente por Tsukada [145] y Watson [155], quienes establecieron la existencia de una familia de estructuras hermitianas $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en el producto de dos variedades sasakianas, para $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. En esta tesis adoptamos los tres enfoques antes mencionados para estudiar propiedades geométricas de la familia de estructuras hermitianas $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en el producto de dos variedades sasakianas, con la intención de generalizar propiedades de las variedades de Calabi-Eckmann.

Finalmente, estudiamos otro invariante importante de una variedad compleja: su fibrado canónico. Dada una variedad compleja (M, J) con $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, su fibrado canónico K_M se define como la n-ésima potencia exterior de su fibrado cotangente holomorfo, y es un fibrado de líneas holomorfo sobre M. Este fibrado de líneas es holomórficamente trivial cuando existe una $(n, 0)$-forma nunca nula que es holomorfa (o equivalentemente, cerrada). Las variedades complejas con fibrado canónico holomórficamente trivial son importantes en geometría diferencial y otras áreas. Por ejemplo, una variedad Kähler compacta M con holonomía riemanniana global contenida en $\mathrm{SU}(n)$ posee fibrado canónico holomórficamente trivial. Más generalmente, cualquier variedad de Calabi-Yau (i.e., una variedad Kähler compacta M con $c_1(M) = 0$ en $H^2(M, \mathbb{R})$) posee fibrado canónico holomórficamente de torsión, esto es, $K_M^{\otimes k}$ es trivial para algún $k \in \mathbb{N}$. En física teórica, las variedades complejas con fibrado canónico holomórficamente trivial aparecen en el estudio del sistema de Hull-Strominger. En efecto, en dimensión 6 las soluciones de este sistema ocurren en variedades complejas compactas M equipadas con una métrica hermitiana especial (no necesariamente Kähler) y con K_M trivial. De acuerdo a [144], las variedades compactas complejas con fibrado canónico holomórficamente de torsión tienen primera clase de Bott-Chern nula, $c_1^{BC} = 0$, y por lo tanto son ejemplos de *variedades no Kähler Calabi-Yau*.

Una gran familia de variedades compactas con fibrado canónico trivial está dada por las nilvariedades $\Gamma\backslash G$ equipadas con una estructura compleja invariante. En efecto, fue probado en [20] que todo grupo de Lie nilpotente simplemente conexo G admite una $(n, 0)$-forma holomorfa invariante a izquierda no nula σ (con $\dim_{\mathbb{R}} G = 2n$), usando una base especial de $(1, 0)$-formas invariantes a izquierda provista por Salamon en [131]. Como σ es invariante a izquierda, induce una sección trivializante de $K_{\Gamma\backslash G}$ para cualquier retículo $\Gamma \subset G$.

El paso natural siguiente es estudiar solvariedades $\Gamma\backslash G$ equipadas con estructuras complejas invariantes (o solvariedades complejas, para abreviar). En este caso, se sabe que pueden ocurrir diferentes fenómenos. Por ejemplo:

- Existen solvariedades complejas que admiten una sección trivializante invariante del fibrado canónico, igual que en el caso de las nilvariedades. Una clasificación de las álgebras de Lie asociadas a estas solvariedades en dimensión 6 puede encontrarse en [54].

- Hay solvariedades complejas de dimensión 4 que no poseen fibrado canónico trivial. En efecto, consideremos el grupo de Lie simplemente conexo G cuya álgebra de Lie tiene una base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ con corchetes de Lie

  $$[e_0, e_1] = e_1, \quad [e_0, e_2] = -\frac{1}{2}e_2 + be_3, \quad [e_0, e_3] = -be_2 - \frac{1}{2}e_3,$$

  para algún $b \in \mathbb{R}$. El grupo de Lie G admite una estructura compleja invariante a izquierda dada por $Je_0 = e_1, Je_2 = e_3$, y admite retículos para algunos valores de $b \neq 0$. Para cualquier retículo Γ en G, la solvariedad compleja correspondiente $\Gamma\backslash G$ es una superficie de Inoue de tipo S_0 (ver por ejemplo [84]) y es sabido que una tal superficie no posee fibrado canónico trivial. Esto se debe a que las únicas superficies complejas compactas que tienen fibrado canónico trivial son las superficies K3 y las superficies de Kodaira primarias.

En esta tesis exhibimos un fenómeno diferente en relación al fibrado canónico de las solvariedades complejas, que según nuestro conocimiento es novedoso. En efecto, en el Ejemplo 5.1.2 mostramos una solvariedad compleja con fibrado canónico trivial tal que la sección trivializante es *no invariante*. Este ejemplo es nuestra motivación principal, pues muestra que al estudiar la trivialidad del fibrado canónico de solvariedades complejas debemos afrontar el problema en dos etapas. Primero, debemos determinar si una solvariedad compleja admite una sección trivializante invariante o no, y si este no es el caso, debemos buscar (si existen) secciones trivializantes no invariantes.

Dado que una sección trivializante del fibrado canónico de $(\Gamma\backslash G, J)$ da origen, vía pullback, a una sección trivializante de (G, J), podemos trabajar a nivel del grupo de Lie. Asimismo, si (G, J) admite una sección trivializante de K_G invariante a izquierda, entonces para todo retículo $\Gamma \subset G$ la solvariedad compleja $(\Gamma\backslash G, J)$ posee fibrado canónico trivial dado que la sección trivializante pasa al cociente. Por otro lado, si (G, J) admite una sección trivializante no invariante, entonces debemos determinar si esta sección es invariante por la acción de Γ o no; si este es el caso entonces la sección induce una sección trivializante en el cociente por lo que $K_{\Gamma\backslash G}$ es trivial.

Es importante destacar que nuestro interés principal es estudiar solvariedades complejas pero cuando sea posible probamos resultados en general para cocientes compactos de grupos de Lie simplemente conexos (no necesariamente solubles) equipados con estructuras complejas invariantes a izquierda.

A continuación describimos más en detalle los contenidos de cada capítulo de esta tesis.

El Capítulo 1 es introductorio y tiene como finalidad presentar, de manera breve y lo más autocontenida posible, las nociones básicas de geometría (casi) compleja, estructuras casi complejas armónicas, y solvariedades, así como también aquellos resultados clásicos que nos resultarán de interés luego.

En el Capítulo 2 nuestro objetivo es estudiar la existencia de G_2-estructuras cerradas, cocerradas, libres de torsión y también de divergencia nula, en el contexto de las solvariedades planas, las cuales se enmarcan en la clase más amplia de variedades compactas planas. Estas están bien entendidas debido a tres teoremas clásicos de Bieberbach, y han sido útiles para estudiar diferentes fenómenos en geometría. Por ejemplo, preguntas acerca de isospectralidad (veáse [111] y sus referencias), métricas Kähler planas con holonomía en $\mathrm{SU}(n)$ [47], entre otras preguntas. La clase de las solvariedades planas yace en la intersección entre la teoría de solvariedades y la de variedades compactas planas, proveyendo así una buena interacción entre ellas. Además, esta clase es lo suficientemente rica como para producir una colección diversa de ejemplos. Nos centraremos en una clase particular de solvariedades planas, concretamente las de tipo *split*, las cuales poseen cierta estructura que permite clasificarlas. Comenzamos dando en §2.1 las definiciones y algunos resultados básicos de geometría G_2 y variedades compactas planas. En §2.2 seguiremos el enfoque considerado en [142, 143] para clasificar las solvariedades planas split de dimensión n, para $n \leq 6$. Imitamos estas ideas para realizar esta clasificación en dimensión 7 con el propósito de obtener ejemplos explícitos para estudiar la geometría G_2 en solvariedades planas. La clasificación se divide en dos casos, puesto que veremos que los grupos de Lie simplemente conexos de dimensión 7 que admiten una métrica invariante a izquierda plana son de la forma $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^6$ (casi abeliano) o $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^5$. En §2.3 nos dedicamos a estudiar la existencia de G_2-estructuras en $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^6$ y en $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^5$. En el primer caso encontramos ejemplos de variedades compactas planas equipadas con una G_2-estructura libre de torsión tal que el grupo de holonomía de la métrica subyacente es cíclico, finito y contenido en G_2. En el segundo caso probamos que no hay G_2-estructuras cerradas invariantes, y mostramos que todas las solvariedades planas split de dimensión 7 admiten G_2-estructuras cocerradas y de divergencia nula, respectivamente.

El objetivo del Capítulo 3 es estudiar la existencia de estructuras casi complejas armónicas en un subconjunto de solvariedades equipadas con métricas riemannianas invariantes. En efecto, nos restringiremos al caso de solvariedades casi abelianas. El capítulo se estructura de la siguiente manera: En §3.1 caracterizamos las álgebras de Lie casi abelianas equipadas con una estructura casi hermitiana cuya estructura casi compleja es armónica (Teorema 3.1.3). En §3.2 describimos de manera unificada las clases de Gray-Hervella en álgebras de Lie casi abelianas de modo que podamos entender mejor la relación entre la condición de armonicidad y la geometría casi hermitiana de tales álgebras de Lie. Este estudio es llevado a cabo en §3.3, sección que está completamente dedicada a dar ejemplos de diferentes fenómenos combinando la armonicidad y las propiedades de las distintas clases de Gray-Hervella. En particular, recuperamos la conocida estructura casi Kähler en la variedad de Kodaira-Thurston definida por Abbena en [1]. Esta variedad es un ejemplo de una nilvariedad casi abeliana equipada con una estructura casi hermitiana invariante, cuya estructura casi compleja es armónica debido a un resultado de [158]. Por último, analizamos también la relación entre la armonicidad y la geometría SKT, la cual no es una clase de Gray-Hervella pero como ya mencionamos, ha sido muy estudiada recientemente.

En el Capítulo 4 nos salimos del ámbito de las solvariedades con el objetivo de generalizar algunas de las propiedades geométricas de las variedades de Calabi-Eckmann mencionadas arriba al producto de dos variedades sasakianas arbitrarias, dado que es sabido que las esferas de dimensión impar poseen una estructura sasakiana canónica. Morimoto probó en [116] que el producto de dos variedades de casi contacto normales posee una estructura compleja natural. Esto fue después generalizado de manera independiente por Tsukada [145] y Watson [155], quienes establecieron la existencia de una familia de estructuras complejas $J_{a,b}$ para $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, que en el caso de las variedades de Calabi-Eckmann corresponden a las estructuras complejas en $\mathbb{S}^{2p+1} \times \mathbb{S}^{2q+1}$ definidas en [37]. Además, mostraron que existe una familia de métricas hermitianas compatibles $g_{a,b}$. En este trabajo consideramos el producto de dos variedades sasakianas y las estructuras hermitianas correspondientes $(J_{a,b}, g_{a,b})$ serán el objeto central de estudio durante el capítulo. Un segundo objetivo del capítulo es estudiar la conexión de Bismut asociada a la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$. Concretamente, estudiamos cuándo se anulan el tensor de Bismut-Ricci Ric^B y la forma de Bismut-Ricci ρ^B, respectivamente. Veremos que estas condiciones están estrechamente relacionadas con una clase particular de variedades sasakianas, llamadas *η-Einstein*. Una variedad sasakiana se dice η-Einstein si el tensor de Ricci de la métrica sasakiana satisface $\operatorname{Ric} = \lambda g + \nu \eta \otimes \eta$ para ciertas constantes $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$, donde η es la 1-forma dual al campo vectorial de Reeb. El capítulo se estructura de la siguiente manera. En §4.1 recordamos nociones básicas de variedades sasakianas y su geometría transversal, y presentamos algunos resultados preliminares. En §4.2 estudiamos la conexión de Levi-Civita de la métrica $g_{a,b}$ en el producto $S_1 \times S_2$, donde S_1 y S_2 son variedades sasakianas, y usamos esto en §4.3 para mostrar que $J_{a,b}$ es armónica en $(S_1 \times S_2, g_{a,b})$ (Teorema 4.3.1). Luego, en §4.4, estudiamos las condiciones balanceada, LCK, SKT y k-Gauduchon ($k \geq 2$) en $S_1 \times S_2$. Demostramos en el Teorema 4.4.8 que la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $S_1 \times S_2$ siempre es Gauduchon (i.e. $(n-1)$-Gauduchon) y que es k-Gauduchon ($2 \leq k \leq n-2$) si y sólo si es astheno-Kähler. Esto complementa el resultado de [61], donde se probó que $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es 1-Gauduchon si y sólo si es astheno-Kähler. La condición astheno-Kähler fue previamente caracterizada en [110]. Finalmente, en §4.5 proporcionamos una fórmula explícita para la conexión de Bismut asociada a $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en términos de las conexiones características en S_1 y S_2. Como una aplicación de tener esta fórmula explícita, damos fórmulas para el tensor de Bismut-Ricci Ric^B y la forma de Bismut-Ricci ρ^B, y determinamos cuándo se anulan (Teoremas 4.5.6 y 4.5.12, respectivamente). Más precisamente, mostramos que $\operatorname{Ric}^B = 0$ o $\rho^B = 0$ valen si y sólo si ambos factores sasakianos S_1 y S_2 son η-Einstein con ciertas constantes apropiadas (λ_1, ν_1) y (λ_2, ν_2); y exhibimos ejemplos de estructuras hermitianas $(J_{a,b}, g_{a,b})$ con $\operatorname{Ric}^B = 0$ o $\rho^B = 0$, lo cual conlleva a nuevos ejemplos de estructuras CYT.

En el Capítulo 5 estudiamos el fibrado canónico de una solvariedad compleja. En primer lugar, en §5.2, dado un grupo de Lie G munido de una estructura compleja invariante a izquierda J, tratamos el problema de decidir si existe o no una sección trivializante de K_G que sea invariante. Probamos en el Teorema 5.2.1 que la existencia de una tal forma es equivalente a que se anule idénticamente la 1-forma ψ en el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(G)$, definida de manera natural por $\psi(x) = \operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} x) - \operatorname{Tr} \operatorname{ad}(Jx)$, para $x \in \mathfrak{g}$. Esta caracterización algebraica nos permite recuperar algunos resultados conocidos en la literatura (por ejemplo, cuáles solvariedades complejas casi abelianas tienen fibrado canónico trivial [55]), así como también obtener nuevos resultados: la trivialidad del fibrado canónico de cualquier solvariedad compleja equipada con una estructura compleja abeliana (Corolario 5.2.7) y condiciones que aseguran que el fibrado canónico de una cierta familia de solvariedades complejas casi nilpotentes (consideradas en [57]) es trivial (Proposiciones 5.2.11 y 5.2.14). En relación al caso en que el fibrado canónico es holomórficamente de torsión, mostramos que si $(\Gamma\backslash G, J)$ admite una sección trivializante invariante de alguna potencia de $K_{\Gamma\backslash G}$ entonces el fibrado canónico $K_{\Gamma\backslash G}$ admite una sección trivializante invariante. Luego pasamos a considerar el caso en que la sección trivializante no es invariante. En §5.3 probamos que dos secciones trivializantes del fibrado canónico de un grupo de Lie G equipado con una estructura compleja invariante a izquierda difieren en una función holomorfa nunca nula en G (Lema 5.3.1). Esto implica que las secciones trivializantes del fibrado canónico de una variedad compleja compacta $\Gamma\backslash G$ son, o bien todas invariantes o bien todas no invariantes (Corolario 5.3.2). Nos restringimos entonces al caso soluble y mostramos que todo grupo de Lie soluble simplemente conexo equipado con una estructura compleja J invariante a izquierda posee fibrado canónico trivial, probablemente mediante una sección trivializante no invariante (Teorema 5.3.6). Sin embargo, si G admite un retículo Γ, esta sección trivializante puede no ser invariante por la acción de Γ, y es difícil en general determinar si existe otra invariante por Γ. En §5.4 nuestro objetivo es dar nuevos ejemplos de solvariedades complejas con fibrado canónico trivial, mediante secciones no invariantes. Con el fin de acotar esta búsqueda de ejemplos, primero proporcionamos una obstrucción algebraica en términos de la 1-forma ψ que vale para cualquier grupo de Lie G con una estructura compleja invariante a izquierda. En efecto, explotando la relación de ψ con la forma de Chern-Ricci de cualquier métrica hermitiana invariante, y usando el proceso de simetrización de Belgun, probamos en el Teorema 5.4.2 que si una variedad compleja compacta $\Gamma\backslash G$ tiene fibrado canónico trivial (o más generalmente holomórficamente de torsión) entonces ψ se anula en el conmutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ donde $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Como aplicación de esta obstrucción recuperamos el hecho conocido de que los grupos de Lie compactos semisimples equipados con una estructura compleja invariante a izquierda no poseen fibrado canónico holomórficamente de torsión (Proposición 5.4.8). Asimismo, esta obstrucción nos provee de una manera útil para encontrar una sección trivializante explícita del fibrado canónico de una solvariedad compleja en ciertos casos (Proposición 5.4.10). Aplicamos esta construcción para luego exhibir algunos ejemplos (uno de ellos en la variedad compleja paralelizable de Nakamura). En la última sección del capítulo consideramos un grupo de Lie G equipado con una estructura hipercompleja invariante a izquierda $\{J_1, J_2, J_3\}$ y estudiamos la trivialidad del fibrado canónico de las variedades complejas (G, J_α), $\alpha = 1, 2, 3$, o de sus correspondientes cocientes compactos por retículos. Recordemos que una estructura hipercompleja en una variedad M es una terna de estructuras complejas $\{J_1, J_2, J_3\}$ que satisfacen las reglas de multiplicación de los cuaterniones: $J_3 = J_1 J_2 = -J_2 J_1$; si M admite una tal estructura entonces la dimensión de M es un múltiplo de 4. Primero probamos en el Teorema 5.5.1 que si $\{J_1, J_2, J_3\}$ es una estructura hipercompleja invariante a izquierda en G y (G, J_α) admite una sección trivializante invariante a izquierda de su fibrado canónico para algún $\alpha = 1, 2, 3$, entonces el fibrado canónico de (G, J_β) es trivial vía una sección invariante a izquierda para todo $\beta = 1, 2, 3$, y lo mismo sucede para cualquier cociente compacto asociado $\Gamma\backslash G$ con la estructura hipercompleja inducida. A continuación mostramos que este resultado falla para solvariedades hipercomplejas si la sección trivializante de $(\Gamma\backslash G, J_\alpha)$ no es invariante. En efecto, en el Ejemplo 5.5.3 exhibimos solvariedades complejas $(\Gamma\backslash G, \{J_1, J_2, J_3\})$ de dimensión 8 tales que $(\Gamma\backslash G, J_1)$ tiene fibrado canónico trivial pero los fibrados canónicos de $(\Gamma\backslash G, J_2)$ y $(\Gamma\backslash G, J_3)$ son ambos no triviales. Este ejemplo además provee una respuesta negativa a una pregunta de M. Verbitsky en [151].

Resumen de resultados originales obtenidos

El **Capítulo 2** corresponde al siguiente artículo:

• A. Tolcachier, G_2-structures on flat solvmanifolds, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **92** (2022), 179–207.

Allí se obtienen los siguientes resultados:

- Clasificación de solvariedades planas casi abelianas de dimensión 7 (Teorema 2.2.2).
- Clasificación de solvariedades planas split no casi abelianas (i.e. asociadas a $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^5$) de dimensión 7 (Teorema 2.2.3).
- Existencia de G_2-estructuras cerradas y cocerradas (en particular libres de torsión) en solvariedades planas casi abelianas de dimensión 7 (Proposición 2.3.1, Teorema 2.3.3 y Proposición 2.3.4).
- Ejemplos de solvariedades casi abelianas planas con holonomía cíclica finita contenida en G_2 (Tabla 2.2).
- No existencia de G_2-estructuras cerradas invariantes en solvariedades planas split no casi abelianas (Proposición 2.3.6).
- Existencia de G_2-estructuras cocerradas y con divergencia nula, respectivamente, en todas las solvariedades planas split no casi abelianas de dimensión 7 (Proposición 2.3.7, Teorema 2.3.9, Tabla 2.1).

El **Capítulo 3** corresponde al siguiente artículo:

• A. Andrada, A. Tolcachier, Harmonic almost complex structures on almost abelian Lie groups and solvmanifolds, *Ann. Mat. Pura Appl.* (2023), DOI: https://doi.org/10.1007/s10231-023-01392-1.

Allí se obtienen los siguientes resultados:

- Caracterización de estructuras casi complejas ortogonales armónicas en álgebras de Lie casi abelianas (Teorema 3.1.3).
- Caracterización de las clases de Gray-Hervella de estructuras casi hermitianas $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ en álgebras de Lie casi abelianas (dimensión ≥ 6 en Teorema 3.2.2 y dimensión 4 en Corolario 3.2.3).
- Ejemplos de estructuras casi complejas ortogonales armónicas (y no armónicas) que yacen en cada clase de Gray-Hervella (excepto Kähler, balanceadas y LCK, en cuyo caso siempre son armónicas) (§3.3).
- Caracterización de estructuras casi complejas ortogonales armónicas SKT (Proposición 3.3.14).

El **Capítulo 4** corresponde al siguiente trabajo:

• A. Andrada, A. Tolcachier, Harmonic complex structures and special Hermitian metrics on products of Sasakian manifolds. Preprint (2023), arxiv:2301.09706.

Allí se obtienen los siguientes resultados:

- Armonicidad de la estructura compleja $J_{a,b}$ con respecto a la métrica hermitiana $g_{a,b}$ en el producto de dos variedades sasakianas (Teorema 4.3.1).
- La estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en un producto de dos variedades sasakianas de dimensión compleja ≥ 2 no es balanceada (Proposición 4.4.2).

- La estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en un producto de variedades sasakianas $S_1 \times S_2$ es LCK (no Kähler) si y sólo si $\dim S_1 = 1$ y $\dim S_2 \geq 3$ o $\dim S_2 = 1$ y $\dim S_1 \geq 3$. Más aún, la estructura LCK es Vaisman (Proposición 4.4.4).

- La estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $S_1 \times S_2$ es SKT (no Kähler) si y sólo si $\dim S_1 \times S_2 = 4$ o $\dim S_1 = \dim S_2 = 3$ y $a = 0$ (Proposición 4.4.5).

- Caracterización de las estructuras hermitianas $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $S_1 \times S_2$ que son k-Gauduchon, para $2 \leq k \leq n-2$. Son todas Gauduchon (Teorema 4.4.8 y Proposición 4.4.9).

- Fórmula para la conexión de Bismut ∇^B asociada a $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $S_1 \times S_2$ en términos de las conexiones características de las variedades sasakianas S_1 y S_2 (Proposición 4.5.1). Fórmulas para el tensor de Bismut-Ricci Ric^B y la forma de Bismut-Ricci ρ^B en términos de las curvaturas de Ricci, Ric^1 y Ric^2 (Teorema 4.5.6, Teorema 4.5.12).

- $\mathrm{Ric}^B = 0$ si y sólo si S_1 y S_2 son ambas η-Einstein con ciertas constantes (Teorema 4.5.6) y una reinterpretación de esta caracterización en términos de la existencia de métricas Sasaki-Einstein (Teorema 4.5.18).

- Si $(J_{a,b}, g_{a,b})$ satisface $\mathrm{Ric}^B = 0$ entonces $S_1 \times S_2$ (ambas de $\dim \geq 3$) no posee fibrado canónico holomórficamente trivial (Proposición 4.5.10).

- $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es Calabi-Yau con torsión si y sólo si S_1 y S_2 son η-Einstein con ciertas constantes (Teorema 4.5.12) y una reinterpretación de esta caracterización en términos de si las variedades sasakianas η-Einstein son positivas, nulas o negativas (Teorema 4.5.19).

- Caracterización de estructuras hermitianas $(J_{a,b}, g_{a,b})$ estáticas (Proposición 4.5.15).

- Nuevos ejemplos de variedades compactas con estructuras CYT de la forma $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en productos de cocientes de grupos de Lie (Ejemplo 4.5.23), en productos de variedades Sasaki-Einstein (Ejemplo 4.5.24) y en enlaces (Ejemplo 4.5.25).

Finalmente, el **Capítulo 5** corresponde al siguiente trabajo:

• A. Andrada, A. Tolcachier, On the canonical bundle of complex solvmanifolds and applications to hypercomplex geometry. Preprint (2023), arxiv:2307.16673.

Allí se obtienen los siguientes resultados:

- Existencia de solvariedades complejas con fibrado canónico trivial vía una sección trivializante no invariante (Ejemplo 5.1.2).

- Caracterización de la existencia de $(n,0)$-formas holomorfas no nulas en un álgebra de Lie de dimensión $2n$ equipada con una estructura compleja $(\mathfrak{g}, J)$ en términos de la 1-*forma canónica* $\psi(x) = \mathrm{Tr}(J \operatorname{ad} x) - \mathrm{Tr} \operatorname{ad}(Jx)$ (Teorema 5.2.1).

- Existen $(n,0)$-formas holomorfas no nulas en un álgebra de Lie unimodular de dimensión $2n$ equipada con una estructura compleja si y sólo si la subálgebra $\mathfrak{g}^{1,0}$ (o la subálgebra $\mathfrak{g}^{0,1}$) es unimodular (Proposición 5.2.4).

- Toda álgebra de Lie unimodular de dimensión $2n$ equipada con una estructura compleja abeliana admite una $(n,0)$-forma holomorfa no nula. En particular, toda solvariedad compleja equipada con una estructura compleja abeliana tiene fibrado canónico trivial (Corolario 5.2.7).

- Nuevos ejemplos de solvariedades equipadas con una estructura compleja abeliana en dimensión $4n+2$, $n \in \mathbb{N}$, que generalizan a la variedad compleja paralelizable de Nakamura de dimensión 6 (Ejemplo 5.2.8).

- Caracterización de la existencia de $(n,0)$-formas holomorfas no nulas en ciertas álgebras de Lie casi nilpotentes de dimensión $2n$ consideradas en [55] (Proposición 5.2.11 y Proposición 5.2.14).
- En un grupo de Lie equipado con una estructura compleja invariante a izquierda (G,J) (o en un cociente compacto equipado con una estructura compleja invariante) la existencia de una sección trivializante invariante de una potencia del fibrado canónico $K_G^{\otimes k}$ implica la existencia de una sección trivializante invariante del fibrado canónico K_G (Proposición 5.2.16).
- En (G,J), si σ es una $(n,0)$-forma invariante a izquierda no nula en G y $f_1 : G \to \mathbb{C}^\times$ es tal que $f_1\sigma$ es cerrada, se cumple para $f_2 : G \to \mathbb{C}^\times$ que $f_2\sigma$ es cerrada si y sólo si $\frac{f_2}{f_1}$ es holomorfa (Lema 5.3.1). En particular, si Γ es un retículo uniforme, las $(n,0)$-formas cerradas nunca nulas en $(\Gamma\backslash G,J)$ son, o bien todas invariantes o bien todas no invariantes (Corolario 5.3.2).
- Todo grupo de Lie soluble simplemente conexo G de dimensión $2n$ equipado con una estructura compleja invariante a izquierda J admite una $(n,0)$-forma cerrada no nula. En particular, el fibrado canónico de (G,J) es trivial (Lema 5.3.3, Lema 5.3.4, Teorema 5.3.6).
- Obstrucción algebraica en términos de ψ para que el fibrado canónico de un cociente compacto de un grupo de Lie equipado con una estructura compleja invariante sea trivial (o más generalmente, holomórficamente de torsión) (Teorema 5.4.2). Aplicaciones al caso casi abeliano y casi nilpotente (Corolario 5.4.6).
- Nuevo ejemplo de una solvariedad compleja de dimensión 6 cuyo fibrado canónico no es trivial pero sí holomórficamente de torsión (Ejemplo 5.4.5).
- Construcción de una $(n,0)$-forma nunca nula cerrada en un grupo de Lie unimodular soluble simplemente conexo de dimensión $2n$ equipado con una estructura compleja invariante a izquierda tal que $\psi([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \equiv 0$ (Proposición 5.4.10). Aplicaciones (Ejemplo 5.4.11, Ejemplo 5.4.12).
- Dado $\{G,J_1,J_2,J_3\}$ un grupo de Lie con una estructura hipercompleja invariante a izquierda, la existencia de una sección trivializante invariante a izquierda de $K_{(G,J_\alpha)}$, para $\alpha = 1,2,3$, implica la existencia de una sección trivializante invariante a izquierda de $K_{(G,J_\beta)}$ para todo β y en este caso cualquier solvariedad compleja asociada $(\Gamma\backslash G,J_\beta)$ tiene fibrado canónico trivial para todo β (Teorema 5.5.1, Corolario 5.5.2).
- Ejemplo de una solvariedad hipercompleja $(\Gamma\backslash G,\{J_\alpha\})$ tal que $K_{(\Gamma\backslash G,J_\alpha)}$ es trivial para algún α pero $K_{(\Gamma\backslash G,J_\beta)}$ no es trivial para algún $\beta \neq \alpha$. En particular, la solvariedad hipercompleja no es una $\mathrm{SL}(n,\mathbb{H})$-variedad (Ejemplo 5.5.3).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introductorio recordaremos nociones básicas y algunos resultados clásicos sobre geometría (casi) compleja por un lado, sobre estructuras casi complejas armónicas por otro, y por último sobre solvariedades. Gran parte del capítulo está basado en [89].

1.1. Variedades complejas

Las variedades complejas se definen análogamente al caso de las variedades diferenciables reales, en términos de la existencia de un atlas holomorfo. Más precisamente tenemos la siguiente definición:

Definición 1.1.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión real $2n$.

- Una *carta holomorfa* en M es un par (U, ψ) donde $U \subseteq M$ es abierto y $\psi : U \to \mathbb{C}^n$ es un difeomorfismo entre U y un conjunto abierto de $\mathbb{C}^n$.
- Un *atlas holomorfo* es un conjunto de cartas holomorfas $\{(U_i, \psi_i)\}_{i\in I}$ tales que $M = \cup_{i\in I} U_i$, y si $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, entonces el cambio de coordenadas $\psi_{ij} : \psi_i(U_i \cap U_j) \to \psi_j(U_i \cap U_j)$ dado por $\psi_{ij} := \psi_j \circ \psi_i^{-1}$ es biholomorfo.

Una *variedad compleja* M de *dimensión* n es una variedad diferenciable real de dimensión $2n$ equipada con un atlas holomorfo.

Observación 1.1.2. No toda variedad diferenciable de dimensión $2n$ resulta una variedad compleja. Por ejemplo, toda variedad compleja es orientable.

Definición 1.1.3. Sean M y N dos variedades complejas. Una función continua $f : M \to N$ se dice *holomorfa* si para cartas holomorfas arbitrarias (U, φ) de M y (V, ψ) de N se tiene que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \to \psi(V)$$

es holomorfa. Las variedades complejas M y N se dicen *biholomorfas* si existe un homeomorfismo holomorfo[1] $f : M \to N$.

Uno de los resultados más importantes que utilizaremos acerca de las funciones holomorfas entre variedades complejas es el siguiente, que además distingue notablemente la teoría de variedades complejas de la teoría de variedades diferenciables.

Proposición 1.1.4. *Sea M una variedad compleja compacta y conexa. Entonces, cualquier función $f : M \to \mathbb{C}$ holomorfa es constante.*

Este resultado es consecuencia del principio del módulo máximo para funciones holomorfas en varias variables.

[1] La inversa de un homeomorfismo holomorfo resulta holomorfa.

1.1.1. Fibrados vectoriales holomorfos

En el Capítulo 5 nos centraremos en el fibrado canónico de una variedad compleja, el cual es un fibrado de líneas holomorfo. Definimos a continuación un fibrado vectorial holomorfo así como también los fibrados vectoriales holomorfos naturales asociados a una variedad compleja: los fibrados tangente y cotangente holomorfos, el fibrado de p-formas holomorfas, y el fibrado canónico. Para ello, conviene recordar previamente la definición de fibrado vectorial.

Definición 1.1.5. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un *fibrado vectorial* (real o complejo) de rango r sobre M (llamada *base del fibrado*) es una variedad diferenciable E (llamada *espacio total*) junto con una función suryectiva $\pi : E \to M$ diferenciable tales que:

(1) Para cada $p \in M$, la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ posee estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión r.

(2) Existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de M y difeomorfismos $\theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ (llamados *trivializaciones locales*) que conmutan con la proyección $\mathrm{pr}_1 : U_\alpha \times \mathbb{K}^r \to U_\alpha$ y que además para cada $p \in U_\alpha$ la aplicación $E_p \xrightarrow{\theta_\alpha} \{p\} \times \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$ es un isomorfismo de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.

Un fibrado vectorial se dice *trivial* si existe una trivialización global $\theta : E \to M \times \mathbb{K}^r$. En este caso E es difeomorfa a $M \times \mathbb{K}^r$.

Notemos que si $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ podemos definir las llamadas *funciones de transición* $g_{\alpha\beta}(p) : \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$ dadas por $g_{\alpha\beta}(p)(v) = \mathrm{pr}_2(\theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}(p, v))$. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.1.6. *Las funciones $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ son diferenciables y satisfacen*

- $g_{\alpha\alpha}(p) = \mathrm{Id} \quad \forall p \in U_\alpha$,
- $g_{\alpha\beta}(p)g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p) \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Un fibrado vectorial (real o complejo) $\pi : E \to M$ de rango r está determinado por sus funciones de transición como muestra el siguiente teorema:

Teorema 1.1.7. *Sea M una variedad diferenciable y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un cubrimiento abierto. Supongamos que para cada $(\alpha, \beta) \in I \times I$ existen funciones diferenciables $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ que satisfacen las condiciones de la Proposición* 1.1.6. Entonces existe una variedad diferenciable E y una función diferenciable $\pi : E \to M$ que hacen a (E, π) un fibrado vectorial sobre $\mathbb{K}$ cuyas funciones de transición para $\{U_\alpha\}$ son las $\{g_{\alpha\beta}\}_{(\alpha,\beta)\in I\times I}$.

Un ejemplo básico e importante de fibrado vectorial (real) es el fibrado tangente el cual está dado por las funciones de transición $g_{\alpha\beta}(p) = \mathrm{Jac}(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_p$, donde $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ son las cartas coordenadas de la variedad diferenciable M.

Cuando M es una variedad compleja podemos también introducir la noción de fibrado vectorial holomorfo sobre M.

Definición 1.1.8. Sea M una variedad compleja con $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Un *fibrado vectorial holomorfo de rango* r sobre M es una variedad compleja E, llamada *espacio total*, junto con una función holomorfa suryectiva $\pi : E \to M$ tales que

(1) Para cada $p \in M$, la fibra $E(p) = \pi^{-1}(p)$ posee estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión r.

(2) Existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de M y biholomorfismos $\theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ que conmutan con la proyección $\mathrm{pr}_1 : U_\alpha \times \mathbb{C}^r \to U_\alpha$ y que además para cada $p \in U_\alpha$ la composición $E(p) \xrightarrow{\theta_\alpha} \{p\} \times \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.

Si $r = 1$ se denomina un *fibrado de líneas holomorfo*.

En este caso también podemos definir funciones de transición $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ definidas como antes, $g_{\alpha\beta}(p)(v) = \mathrm{pr}_2(\theta_\beta \circ \theta_\alpha^{-1}(p, v))$, que resultan holomorfas y satisfacen las condiciones de la Proposición 1.1.6.

Al igual que para fibrados vectoriales, un fibrado vectorial holomorfo de rango r está determinado por sus funciones de transición. Este hecho nos permite construir naturalmente fibrados a partir de otros dados. En particular, las construcciones que nos interesan aquí son dos:

- El *fibrado dual holomorfo* E^* de E, cuyas funciones de transición son $f_{\alpha\beta}(p) = (g_{\alpha\beta}(p)^t)^{-1}$ y cuya fibra en p es isomorfa a $E(p)^*$.

- El *k-fibrado exterior holomorfo* $\Lambda^k E$ de E, cuyas funciones de transición vienen dadas por $f_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \wedge \cdots \wedge g_{\alpha\beta}(p)$ (k-veces) y cuya fibra en p es isomorfa a $\Lambda^k(E(p))$. En particular $\Lambda^r E$ es un fibrado de líneas holomorfo con $f_{\alpha\beta}(p) = \det(g_{\alpha\beta}(p)) \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, llamado *fibrado determinante* de E.

Observación 1.1.9. Todo fibrado vectorial holomorfo es en particular un fibrado vectorial pero no debe confundirse con un fibrado vectorial complejo. El segundo es simplemente un fibrado vectorial cuyas fibras son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales y las funciones de transición son $\mathbb{C}$-lineales, mientras que un fibrado vectorial holomorfo requiere que las mismas sean holomorfas.

Dada una variedad compleja M con $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, definimos los siguientes fibrados vectoriales holomorfos naturales:

Definición 1.1.10.

- El *fibrado tangente holomorfo* de M es el fibrado vectorial holomorfo $\mathcal{T}_M$ de rango n que está generado por las funciones de transición holomorfas $g_{ij}(z) = \mathrm{Jac}_{\mathbb{C}}(\varphi_{ij}) \circ \varphi_j(z)$, donde $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ es un atlas holomorfo y $\mathrm{Jac}_{\mathbb{C}}(\varphi_{ij})(w) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ denota el Jacobiano (complejo) de la función φ_{ij} en $w \in \mathbb{C}^n$.

- El *fibrado cotangente holomorfo* $\mathcal{T}_M^*$ es el fibrado dual holomorfo de $\mathcal{T}_M$.

- El *fibrado de p-formas holomorfas* $\Lambda^p \mathcal{T}_M^*$, para $0 \le p \le n$, es el p-fibrado exterior holomorfo de $\mathcal{T}_M^*$.

- El *fibrado canónico* de M es el fibrado de líneas holomorfo $K_M := \det(\mathcal{T}_M^*) = \Lambda^n(\mathcal{T}_M^*)$.

La definición de $\mathcal{T}_M$ es independiente del atlas holomorfo inicial pues para diferentes elecciones del atlas se obtienen fibrados isomorfos[2]. Entonces $\mathcal{T}_M, \mathcal{T}_M^*$ y K_M son invariantes de M.

1.1.2. Estructuras casi complejas e integrabilidad

Veremos que la estructura de variedad compleja queda determinada por un cierto tensor definido en el espacio tangente de la variedad que satisface una condición de integrabilidad. Comenzamos dando la siguiente definición.

Definición 1.1.11. Un tensor $J \in \mathrm{End}(TM)$ diferenciable en una variedad diferenciable M que satisface $J^2 = -\mathrm{Id}$ es llamado una *estructura casi compleja*. El par (M, J) se llama una *variedad casi compleja*.

[2]Dos fibrados vectoriales holomorfos $\pi_E : E \to M$ y $\pi_F : F \to M$ se dicen isomorfos si existe una función $f : E \to F$ holomorfa tal que $\pi_F \circ f = \pi_E$ y además la función inducida $f(p) : E(p) \to F(p)$ resulta un isomorfismo lineal para todo $p \in M$.

Observación 1.1.12. No toda variedad diferenciable admite una estructura casi compleja. En efecto, la variedad debe ser de dimensión par y orientable. Además hay restricciones topológicas para la existencia de un tal tensor. Por ejemplo, es un hecho conocido que las únicas esferas que admiten estructuras casi complejas son $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^4$ y $\mathbb{S}^6$.

A continuación veremos que toda variedad compleja admite una estructura casi compleja natural. En efecto, el atlas holomorfo en M da origen a una estructura casi compleja $J \in \mathrm{End}(TM)$ de la siguiente manera. Sea $(U, (z_j = x_j + iy_j)_{j=1}^n)$ una carta holomorfa, consideramos ahora la carta real $(U, (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n))$ y la correspondiente base local de campos coordenados $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}_{j=1}^n \subset TU$. Podemos definir localmente $J \in \mathrm{End}(TU)$ por:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j},$$

para $j = 1, \dots, n$. Es fácil verificar que $J^2 = -\mathrm{Id}_{TU}$ y que la definición de J no depende de la carta holomorfa por lo que podemos extender J a toda la variedad obteniendo así una estructura casi compleja.

Es fácil verificar que una estructura casi compleja que proviene de un atlas holomorfo satisface $N_J(X,Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, donde

$$N_J(X,Y) = [X,Y] + J([JX,Y] + [X,JY]) - [JX,JY], \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.1.1}$$

es un tensor de tipo $(1,2)$, llamado el *tensor de Nijenhuis*.

Este hecho permite exhibir ejemplos de variedades diferenciables que admiten una estructura casi compleja que no pueden equiparse con un atlas holomorfo. Por ejemplo, $\mathbb{S}^6$ admite una estructura casi compleja natural proveniente de los octoniones que no viene inducida por un atlas holomorfo pues no satisface $N_J \equiv 0$.

Aquellas estructuras casi complejas que sí provienen de un atlas holomorfo son distinguidas.

Definición 1.1.13. Una estructura casi compleja J en una variedad diferenciable M se dice *integrable* si M es la variedad diferenciable subyacente a una variedad compleja cuya estructura casi compleja asociada es J. En este caso también se suele llamar a J simplemente una *estructura compleja.*

Con esta definición, parece verdaderamente complicado decidir si una estructura casi compleja es efectivamente compleja. El milagro es que si J satisface que el tensor N_J se anula idénticamente, entonces J es integrable, en virtud del famoso teorema de Newlander-Nirenberg:

Teorema 1.1.14 (Newlander-Nirenberg 1957)**.** *Sea J una estructura casi compleja en una variedad diferenciable M. Entonces J es integrable si y sólo si $N_J \equiv 0$.*

Utilizaremos la notación (M, J) para referirnos a la variedad compleja, o bien nos referiremos a M como variedad compleja dando por sobreentendida la estructura compleja.

Sea (M, J) una variedad casi compleja. Dado $p \in M$, sea $(T_pM)_{\mathbb{C}} := T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ la complexificación de T_pM. Podemos extender la estructura casi compleja J de manera $\mathbb{C}$-lineal a una estructura casi compleja $J^{\mathbb{C}} : (T_pM)_{\mathbb{C}} \to (T_pM)_{\mathbb{C}}$, mediante

$$J^{\mathbb{C}}(v + iw) = Jv + iJw.$$

El endomorfismo $J^{\mathbb{C}}$ es diagonalizable y sus autovalores son i y $-i$. Si denotamos los autoespacios asociados por $T_p^{1,0}M$ y $T_p^{0,1}M$ respectivamente, entonces tenemos que:

$$(T_pM)_{\mathbb{C}} = T_p^{1,0}M \oplus T_p^{0,1}M,$$

donde $T_p^{1,0}M := \{X - iJX \mid X \in T_pM\}$ y $T_p^{0,1}M := \{X + iJX \mid X \in T_pM\}$. Además, la conjugación compleja en $(T_pM)_{\mathbb{C}}$ induce un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal entre $T_p^{1,0}M$ y $T_p^{0,1}M$ (recordar que si V es un espacio vectorial real y $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ es su complexificación, entonces la conjugación compleja $V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ se define por $\overline{v + iw} := v - iw$ para todo $v, w \in V$).

Si $T_p^*M := (T_pM)^*$ es el espacio dual de T_pM, entonces T_p^*M admite de manera natural una estructura casi compleja J^* definida por

$$(J^*\lambda)v := \lambda(Jv), \quad \lambda \in T_p^*M, v \in T_pM.$$

Más aún, J^* induce la descomposición

$$(T_p^*M)_{\mathbb{C}} = (T_p^*M)^{1,0} \oplus (T_p^*M)^{0,1},$$

donde $(T_p^*M)^{1,0} = \{\lambda - iJ^*\lambda \mid \lambda \in T_p^*M\}$ y $(T_p^*M)^{0,1} = \{\lambda + iJ^*\lambda \mid \lambda \in T_p^*M\}$ son los autoespacios de J^* de autovalor i y $-i$, respectivamente. Los autoespacios $(T_p^*M)^{1,0}$ y $(T_p^*M)^{0,1}$ resultan ser los anuladores de $T_p^{0,1}M$ y $T_p^{1,0}M$, respectivamente.

Esta descomposición en cada espacio tangente y cotangente se refleja en una descomposición similar a nivel de fibrados vectoriales complejos, esto es

$$\begin{aligned} TM_{\mathbb{C}} &:= TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M, \\ T^*M_{\mathbb{C}} &:= T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = (T^*M)^{1,0} \oplus (T^*M)^{0,1}, \end{aligned}$$

donde $T^{1,0}M = \operatorname{Ker}(J - i\operatorname{Id})$ y $T^{0,1}M = \operatorname{Ker}(J + i\operatorname{Id})$.

Definición 1.1.15. Un *campo vectorial complejo* en una variedad casi compleja (M, J) es una asignación diferenciable $Z : M \to TM_{\mathbb{C}}$ tal que $Z_p \in (T_pM)_{\mathbb{C}}$. Decimos que Z es de *de tipo* $(1,0)$ (resp. *de tipo* $(0,1)$) si $Z_p \in T_p^{1,0}M$ (resp. $Z_p \in T_p^{0,1}M$).

No es difícil ver que un campo vectorial complejo Z es de tipo $(1,0)$ (resp. $(0,1)$) si y sólo si Z es de la forma $Z = X - iJX$ (resp. $Z = X + iJX$), para algún $X \in \mathfrak{X}(M)$. Denotamos al conjunto de campos de tipo $(1,0)$ (resp. $(0,1)$) por $\mathfrak{X}^{1,0}(M)$ (resp. $\mathfrak{X}^{0,1}(M)$).

Si (M, J) es una variedad casi compleja, se definen además los siguientes fibrados vectoriales complejos:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbb{C}}^k(M) &:= \Lambda^k(T^*M_{\mathbb{C}}), \\ \Lambda^{p,q}(M) &:= \Lambda^p(T^*M)^{1,0} \otimes \Lambda^q(T^*M)^{0,1}. \end{aligned}$$

Sus espacios de secciones se denotan $\Omega_{\mathbb{C}}^k(M)$ y $\Omega^{p,q}(M)$, respectivamente. Los elementos de $\Omega^{p,q}(M)$ se llaman (p,q)*-formas*. Como consecuencia de las correspondientes descomposiciones a nivel de espacios vectoriales, existen descomposiciones naturales en suma directa:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbb{C}}^k(M) &= \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}(M), \\ \Omega_{\mathbb{C}}^k(M) &= \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M). \end{aligned}$$

Una 1-forma compleja ω es de tipo $(1,0)$ (resp. $(0,1)$) si y sólo si $\omega(Z) = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{X}^{0,1}(M)$ (resp. $Z \in \mathfrak{X}^{1,0}(M)$). Si $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es una base local de $(T^*M)^{1,0}$ entonces $\{\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n\}$ es una base local de $(T^*M)^{0,1}$ y $\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} \wedge \bar{\omega}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{\omega}_{j_q} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n, \quad 1 \le j_1 < \cdots < j_q \le n\}$ es una base local de $\Omega^{p,q}(M)$.

Una k-forma compleja ω es (p,q) si y sólo si $\omega(Z_1, \dots, Z_{p+q}) = 0$ cada vez que hay más de p campos $(1,0)$ o hay más de q campos $(0,1)$.

La derivada exterior usual $\mathrm{d}\colon \Omega^k M \to \Omega^{k+1} M$ se extiende $\mathbb{C}$-linealmente a $\mathrm{d}\colon \Omega^k_{\mathbb{C}}(M) \to \Omega^{k+1}_{\mathbb{C}}(M)$ y satisface

$$\mathrm{d}(\Omega^{p,q}(M)) \subset \Omega^{p+2,q-1}(M) \oplus \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M) \oplus \Omega^{p-1,q+2}(M).$$

El siguiente resultado provee otras maneras equivalentes para determinar si una estructura casi compleja resulta integrable.

Proposición 1.1.16. *Sea (M,J) una variedad casi compleja. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *J es integrable.*

(2) *Si $Z, W \in \mathfrak{X}^{1,0}(M)$ entonces $[Z,W] \in \mathfrak{X}^{1,0}(M)$.*

(3) *Si $Z, W \in \mathfrak{X}^{0,1}(M)$ entonces $[Z,W] \in \mathfrak{X}^{0,1}(M)$.*

(4) $\mathrm{d}(\Omega^{1,0}(M)) \subset \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M)$.

(5) $\mathrm{d}(\Omega^{0,1}(M)) \subset \Omega^{1,1}(M) \oplus \Omega^{0,2}(M)$.

Como consecuencia se tiene que

Corolario 1.1.17. *Sea (M,J) una variedad casi compleja. Entonces J es integrable si y sólo si $\mathrm{d}(\Omega^{p,q}(M)) \subset \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M)$, para todo $p, q \in \mathbb{N}_0$.*

Denotamos por $\pi^{p,q} : \Omega_{\mathbb{C}}(M) \to \Omega^{p,q}(M)$ a la proyección canónica, donde $\Omega_{\mathbb{C}}(M) = \bigoplus_k \Omega^k_{\mathbb{C}}(M)$. Se definen los operadores de Dolbeault

$$\partial = \pi^{p+1,q} \circ \mathrm{d}\colon \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M),$$
$$\bar{\partial} = \pi^{p,q+1} \circ \mathrm{d}\colon \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M).$$

Corolario 1.1.18. *Sea (M,J) una variedad casi compleja. Entonces J es integrable si y sólo si $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$.*

Corolario 1.1.19. *Si J es una estructura casi compleja integrable, entonces $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ y $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$. Recíprocamente, si $\bar{\partial}^2 = 0$, J es integrable.*

Si M es una variedad compleja se le puede dar una estructura de variedad compleja al fibrado vectorial complejo $\pi : T^{1,0}M \to M$ de modo que resulte un fibrado vectorial holomorfo isomorfo al fibrado tangente holomorfo $\mathcal{T}_M$. Bajo esta identificación, podemos pensar a los *campos holomorfos*, es decir las secciones holomorfas de $\mathcal{T}_M$, como campos de tipo $(1,0)$. Más precisamente, se sabe que un campo $X - iJX \in T^{1,0}M$ es holomorfo si y sólo si el campo real $X \in \mathfrak{X}(M)$ satisface $[X, JY] = J[X,Y]$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Más aún, para las formas holomorfas, es decir secciones holomorfas de $\Lambda^p \mathcal{T}^*_M$, se tiene la siguiente correspondencia

$$\{\omega \mid \omega \text{ es una } p\text{-forma holomorfa en } (M,J)\} \simeq \{\omega \in \Omega^{p,0}(M) \mid \bar{\partial}\omega = 0\}.$$

1.1.3. Variedades hermitianas

Definición 1.1.20. Una métrica riemanniana g en una variedad (casi) compleja (M,J) se dice (*casi*) *hermitiana* si

$$g(JX, JY) = g(X,Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

es decir, si J es un endomorfismo ortogonal de TM. En este caso diremos que (M,J,g) es una *variedad (casi) hermitiana*.

Notar que la condición de ser J ortogonal es equivalente a ser J antisimétrica, debido a la condición $J^2 = -\mathrm{Id}$.

Observación 1.1.21. Toda variedad casi compleja admite una métrica hermitiana. Basta tomar una métrica riemanniana h y definir $g(X,Y) = h(X,Y) + h(JX,JY)$.

Definición 1.1.22. Dada una variedad casi hermitiana (M,J,g) se define la 2-*forma fundamental* o *forma de Kähler* por $\omega(X,Y) = g(JX,Y)$, para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Si consideramos la extensión de ω a una forma bilineal antisimétrica en el fibrado tangente complexificado $TM_{\mathbb{C}}$, entonces $\omega \in \Omega^2(M) \cap \Omega^{1,1}(M)$, es decir $\omega(JX,JY) = \omega(X,Y)$.

Definición 1.1.23. Sea (M,J,g) una variedad hermitiana. Entonces la métrica g se dice *de Kähler* si $\mathrm{d}\omega = 0$. En este caso diremos que (M,J,g) es una *variedad de Kähler*.

Existe una definición equivalente a la recién presentada en términos de conexiones afines. Dada una estructura casi compleja J en una variedad diferenciable M equipada con una conexión afín ∇, se define la derivada covariante del tensor J por:

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y, \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Lema 1.1.24. *Sea (M,J) una variedad casi compleja, y sea ∇ una conexión afín en M. Entonces*

$$(\nabla_X J)JY = -J(\nabla_X J)Y, \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Además, si (M,J,g) es casi hermitiana y ∇ es una conexión métrica (es decir $\nabla g = 0$), entonces $\nabla_X J$ es un tensor antisimétrico para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

El siguiente resultado da una definición equivalente para una variedad Kähler. Denotaremos por ∇^{LC} a la conexión de Levi-Civita asociada a (M,g).

Teorema 1.1.25. *Sea (M,J,g) una variedad casi hermitiana. Entonces $\nabla^{LC} J = 0$ si y sólo si $N_J = 0$ y $\mathrm{d}\omega = 0$.*

Corolario 1.1.26. *Sea (M,J,g) una variedad hermitiana. Entonces (M,J,g) es Kähler si y sólo si $\nabla^{LC} J = 0$.*

Una propiedad importante acerca de la topología de una variedad de Kähler compacta es que sus números de Betti impares son pares. Recordemos que el k-ésimo número de Betti de M se define por $\beta_k(M) = \dim_{\mathbb{R}}(H^k_{dR}(M,\mathbb{R}))$, donde $H^k_{dR}(M,\mathbb{R})$ es el k-ésimo grupo de cohomología de de Rham de la variedad diferenciable M definido por

$$H^k_{dR}(M,\mathbb{R}) = \frac{\ker(\mathrm{d}\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))}{\mathrm{Im}(\mathrm{d}\colon \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M))}.$$

Esto implica fuertes restricciones topológicas para la existencia de métricas de Kähler.

En la literatura fueron introducidas otras condiciones sobre la 2-forma fundamental que son más débiles que la condición de ser cerrada. Recordamos a continuación algunas de estas condiciones hermitianas no Kähler.

Si (M,J,g) es una variedad hermitiana con $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, entonces la métrica g se dice:

(1) *Balanceada* si su forma fundamental ω satisface $\mathrm{d}\omega^{n-1} = 0$, o equivalentemente $\delta\omega = 0$, donde δ es la codiferencial asociada a g.

(2) *Localmente conforme Kähler* (LCK) si existe un cubrimiento por abiertos $\{U_i\}_i$ de M y funciones suaves f_i en cada U_i tales que $e^{-f_i}g$ es Kähler. Esta definición resulta equivalente a la existencia de una 1-forma cerrada θ tal que $d\omega = \theta \wedge \omega$. La 1-forma θ coincide con la *forma de Lee* asociada a (J, g), la cual se define (en una variedad hermitiana arbitraria) por:

$$\theta = \frac{1}{n-1}(\delta\omega) \circ J. \tag{1.1.2}$$

Si la forma de Lee de una estructura LCK es paralela con respecto a la conexión de Levi-Civita de g, la métrica LCK se llama *Vaisman*.

Otras condiciones están relacionadas a cierto operador diferencial d^c definido como sigue. Sea (M, J, g) una variedad hermitiana con $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. La estructura compleja J se extiende de manera natural a formas diferenciales en M como sigue: dada una p-forma α, la p-forma $J\alpha$ se define por

$$\begin{aligned} J\alpha &= \alpha, \quad p = 0, \\ (J\alpha)(\cdot, \dots, \cdot) &= \alpha(J\cdot, \dots, J\cdot), \quad p > 0. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Así, podemos definir el operador diferencial real d^c por

$$d^c\alpha = -J^{-1}\, dJ\alpha = (-1)^p J\, dJ\alpha, \quad \alpha \in \Omega^p(M).$$

Es sabido que $dd^c = 2i\partial\bar{\partial}$.

Definición 1.1.27. Sea (M, J, g) una variedad hermitiana con $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. La métrica g se dice

(1) *Strong Kähler with torsion* (SKT), también llamada *pluricerrada*, si la 2-forma fundamental satisface $\partial\bar{\partial}\omega = 0$, o equivalentemente, $dd^c\omega = 0$. Las métricas SKT tienen muchas aplicaciones en física teórica, por ejemplo en teoría de cuerdas de tipo II y en σ-modelos supersimétricos de dimensión 2 [68, 90, 137]. Más aún, están relacionadas con geometría Kähler generalizada (ver por ejemplo [14, 82]).

(2) *Astheno*[3]*-Kähler* si la 2-forma fundamental satisface $dd^c\omega^{n-2} = 0$. Notar que esta noción tiene sentido para $n \geq 3$. Jost y Yau introdujeron estas métricas en [92] para estudiar mapas armónicos hermitianos y para extender el teorema de rigidez de Siu a variedades no Kähler.

(3) *Gauduchon* si la 2-forma fundamental satisface $dd^c\omega^{n-1} = 0$. Toda variedad hermitiana compacta admite una métrica Gauduchon en su clase conforme, y es única en esta clase salvo homotecias, debido a un resultado conocido de Gauduchon [69].

(4) *k-Gauduchon*, para $1 \leq k \leq n-1$, si la 2-forma fundamental satisface

$$dd^c\omega^k \wedge \omega^{n-k-1} = 0.$$

Estas métricas fueron introducidas en [65] y generalizan la noción de métrica Gauduchon, la cual se corresponde con $k = n-1$. Más aún, las métricas SKT y astheno-Kähler están contenidas en la clase de métricas 1-Gauduchon y $(n-2)$-Gauduchon, respectivamente.

Observación 1.1.28. Notar que cuando $n = 3$ una métrica hermitiana es SKT si y sólo si es astheno-Kähler, y en este caso resulta también 1-Gauduchon.

[3]Palabra griega para "débil".

1.1.4. Estructuras casi complejas armónicas

Sea (M, g) una variedad riemanniana compacta de dimensión $2n$. Una estructura casi compleja se dice *armónica* si es un punto crítico de la funcional de energía de Dirichlet

$$E(J) := \int_M \|\nabla^{LC} J\|^2 \operatorname{vol}_g,$$

definida en el espacio de todas las estructuras casi complejas J ortogonales con respecto a g.[4]

De acuerdo con [158], esto es equivalente a que J satisfaga la ecuación

$$[J, \nabla^* \nabla J] = 0, \tag{1.1.4}$$

donde $\nabla^* \nabla J$ es el llamado *Laplaciano de conexión* (en inglés *rough Laplacian*) de J definido por $\nabla^* \nabla J = \operatorname{Tr} \nabla^2 J$. Esto es, si $\{u_1, \dots, u_{2n}\}$ es un marco ortonormal local en M, entonces

$$(\nabla^* \nabla J)(W) = \sum_{i=1}^{2n} (\nabla^2_{u_i, u_i} J)(W), \quad W \in \mathfrak{X}(M),$$

donde la segunda derivada covariante de J está dada por

$$(\nabla^2_{U,V} J)(W) = (\nabla_U (\nabla_V J))(W) - (\nabla_{\nabla_U V} J)(W).$$

Es claro que $\nabla^* \nabla J$ es un tensor de tipo $(1, 1)$ en M. En el caso no compacto, se puede tomar a (1.1.4) como la definición de estructura casi compleja armónica.

La ecuación (1.1.4) puede escribirse de manera más explícita en un marco ortonormal local, como lo muestra el siguiente lema:

Lema 1.1.29. *Sea (M, J, g) una variedad casi hermitiana de dimensión $2n$ y sea $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ un marco ortonormal local en un conjunto abierto de M. Entonces*

$$[J, \nabla^* \nabla J](X) = 2 \sum_{i=1}^{2n} \left(\nabla_{e_i} J \nabla_{e_i} J X - J \nabla_{e_i} J \nabla_{e_i} X - J (\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} J) X \right). \tag{1.1.5}$$

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\begin{aligned}
(\nabla^* \nabla J)(X) &= \sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{e_i} (\nabla_{e_i} J))(X) - (\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} J)(X) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \nabla_{e_i} ((\nabla_{e_i} J)(X)) - (\nabla_{e_i} J)(\nabla_{e_i} X) - (\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} J)(X) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} J X - 2 \nabla_{e_i} J \nabla_{e_i} X + J \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} X - (\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} J)(X).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
[J, \nabla^* \nabla J](X) &= \sum_{i=1}^{2n} \{ J \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} J X - 2 J \nabla_{e_i} J \nabla_{e_i} X - \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} X - J (\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} J)(X) \\
&\qquad - (-\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} X - 2 \nabla_{e_i} J \nabla_{e_i} J X + J \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} J X - (\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} J)(J X)) \} \\
&= 2 \sum_{i=1}^{2n} \left(\nabla_{e_i} J \nabla_{e_i} J X - J \nabla_{e_i} J \nabla_{e_i} X - J (\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} J) X \right),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $J(\nabla_X J) = -(\nabla_X J) J$. □

[4] Denotaremos de ahora en más $\nabla := \nabla^{LC}$.

Sea (M^{2n}, J, g) una variedad casi hermitiana. De acuerdo con [158], la siguiente 2-forma ρ juega un rol especial en el momento de determinar si la estructura casi compleja J es armónica:

$$\rho = \mathcal{R}(\omega) \in \Omega^2(M),$$

donde ω es la 2-forma fundamental asociada a (J, g) y $\mathcal{R}$ es el operador de curvatura actuando en 2-formas. Esta 2-forma ρ es una generalización natural de la forma de Ricci de una variedad Kähler, aunque en general no es cerrada. Se puede ver que el tensor antisimétrico $P : TM \to TM$ que se obtiene al contraer ρ y g, i.e. $\rho(X, Y) = g(PX, Y)$, está dado por

$$P(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} R(e_i, Je_i)X, \quad X \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.1.6}$$

donde $\{e_i\}$ es cualquier marco ortonormal local de M. También, denotamos por $\delta J \in \mathfrak{X}(M)$ a la codiferencial de J, es decir, el único campo vectorial en M que satisface

$$g(\delta J, X) = \delta\omega(X) \qquad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M),$$

donde $\delta\omega$ es la codiferencial de ω. Como $\delta\omega$ está dada por

$$\delta\omega(X) = -\sum_{i=1}^{2n}(\nabla_{e_i}\omega)(e_i, X),$$

para cualquier marco ortonormal local $\{e_i\}$ de M, obtenemos la siguiente expresión[5] para δJ:

$$\delta J = \sum_{i=1}^{2n}(\nabla_{e_i}J)(e_i). \tag{1.1.7}$$

Con estos ingredientes podemos recordar el siguiente resultado debido a [158]. Por razones de completitud, damos a continuación una prueba elemental de este hecho.[6]

Proposición 1.1.30. [158, Theorem 2.8] *Sea J la estructura casi compleja de una variedad casi hermitiana (M, J, g) de dimensión $2n$. Si J es integrable entonces*

$$[J, \nabla^*\nabla J] = 2(\nabla_{\delta J}J - [J, P]).$$

En particular, J es armónica si y sólo si $[J, P] = \nabla_{\delta J}J$.

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ un marco ortonormal local que satisface $Je_{2i-1} = e_{2i}$ para $1 \le i \le n$. Utilizando este marco calculamos por definición ambos lados de la igualdad que queremos probar. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, usando que $J(\nabla_U J) = -(\nabla_U J)J$ para todo $U \in \mathfrak{X}(M)$, obtenemos

$$[J, \nabla^*\nabla J](X) = \sum_{i=1}^{2n} \underbrace{J(\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}J))(X)}_{①} - \underbrace{(\nabla_{e_i}(\nabla_{e_i}J))(JX)}_{②} - 2J(\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}J)(X).$$

De acuerdo con el Lema 1.1.24 la integrabilidad de J es equivalente a $\nabla_{JU}J = J(\nabla_U J)$ para todo $U \in \mathfrak{X}(M)$. De este hecho, escribiendo $(\nabla_{e_i}J) = -(\nabla_{J^2e_i}J)$, se deduce que

$$\begin{aligned} ① &= -J(\nabla_{e_i}J(\nabla_{Je_i}J))(X) \\ &= -J\nabla_{e_i}(J(\nabla_{Je_i}J)X) - (\nabla_{Je_i}J)(\nabla_{e_i}X) \\ &= -J\nabla_{e_i}J\nabla_{Je_i}JX - J\nabla_{e_i}\nabla_{Je_i}X - \nabla_{Je_i}J\nabla_{e_i}X + J\nabla_{Je_i}\nabla_{e_i}X \\ &= -J\nabla_{e_i}J\nabla_{Je_i}JX - \nabla_{Je_i}J\nabla_{e_i}X - JR(e_i, Je_i)X - J\nabla_{[e_i, Je_i]}X, \end{aligned}$$

[5] Para este cálculo usamos $\omega = g(\cdot, J\cdot)$, debido a que será la convención que adoptaremos en el Capítulo 4.

[6] El signo en la fórmula es diferente de [158] pues allí $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ y nosotros en el Capítulo 4 usaremos $\omega = g(\cdot, J\cdot)$.

$$
\begin{aligned}
② &= -(\nabla_{e_i} J(\nabla_{Je_i} J))(JX) \\
&= -\nabla_{e_i}(J(\nabla_{Je_i} J)(JX)) + J(\nabla_{Je_i} J)(\nabla_{e_i} JX) \\
&= \nabla_{e_i} J \nabla_{Je_i} X - \nabla_{e_i} \nabla_{Je_i} JX + J \nabla_{Je_i} J \nabla_{e_i} JX + \nabla_{Je_i} \nabla_{e_i} JX \\
&= \nabla_{e_i} J \nabla_{Je_i} X + J \nabla_{Je_i} J \nabla_{e_i} JX - R(e_i, Je_i) JX - \nabla_{[e_i, Je_i]} JX.
\end{aligned}
$$

De aquí,

$$
\begin{aligned}
[J, \nabla^* \nabla J](X) = -2[J,P](X) &+ \sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{[e_i, Je_i]} J) X - 2 \sum_{i=1}^{2n} J(\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} J)(X) \\
&- \sum_{i=1}^{2n} (J \nabla_{e_i} J \nabla_{Je_i} JX + \nabla_{Je_i} J \nabla_{e_i} X + \nabla_{e_i} J \nabla_{Je_i} X + J \nabla_{Je_i} J \nabla_{e_i} JX).
\end{aligned}
$$

Notar que en el marco J-adaptado elegido $\{e_i\}$ la última suma es igual a cero, puesto que al reemplazar e_i por Je_i da el mismo término pero con signo cambiado. Así,

$$
[J, \nabla^* \nabla J](X) = -2[J,P](X) + \sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{[e_i, Je_i]} J) X - 2 \sum_{i=1}^{2n} J(\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} J)(X). \tag{1.1.8}
$$

Ahora, usando (1.1.7) con nuestro marco J-adaptado tenemos

$$
\begin{aligned}
2(\nabla_{\delta J} J)(X) &= 2 \sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{(\nabla_{e_i} J) e_i} J)(X) \\
&= 2 \sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{\nabla_{e_i} Je_i} J)(X) - 2 \sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{J \nabla_{e_i} e_i} J)(X) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{\nabla_{e_i} Je_i} J + \nabla_{\nabla_{Je_i} e_i} J)(X) + \sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{[e_i, Je_i]} J)(X) - 2 \sum_{i=1}^{2n} J(\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} J)(X).
\end{aligned}
$$

Nuevamente reemplazando e_i por Je_i en la primera suma obtenemos el mismo término pero con signo cambiado, de manera que la suma es igual a cero. En conclusión,

$$
2(\nabla_{\delta J} J)(X) = \sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{[e_i, Je_i]} J)(X) - 2 \sum_{i=1}^{2n} J(\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} J)(X). \tag{1.1.9}
$$

Comparando (1.1.8) con (1.1.9) obtenemos $[J, \nabla^* \nabla J] = 2 \nabla_{\delta J} J - 2[J,P]$, como queríamos probar. □

1.2. Solvariedades y estructuras invariantes

Un subgrupo discreto Γ de un grupo de Lie G se dice un *retículo* si el cociente $\Gamma \backslash G$ posee volumen finito. De acuerdo con [113], si tal retículo existe entonces el grupo de Lie debe ser *unimodular*, esto es, admite una medida de Haar bi-invariante. Esto es equivalente, para G conexo, a que $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(G)$ (y también se dice que $\mathfrak{g}$ es *unimodular*). Si $\Gamma \backslash G$ es compacto el retículo Γ se dice *uniforme*. Se sabe que si G es soluble entonces cualquier retículo es uniforme [129, Theorem 3.1].

Definición 1.2.1. Sea G un grupo simplemente conexo y Γ un retículo uniforme en G. El cociente $\Gamma \backslash G$ es llamado una

- *solvariedad* si G es soluble y,
- *nilvariedad* si G es nilpotente.

Es claro que toda nilvariedad es una solvariedad. Con esta definición, toda solvariedad resulta compacta, orientable y paralelizable.

Una propiedad global importante de las solvariedades es que $\pi_1(\Gamma\backslash G) \cong \Gamma$ y son *asféricas*, es decir $\pi_n(\Gamma\backslash G) = 0$ para $n > 1$. Más aún, el grupo fundamental juega un rol destacado, ya que la clase de difeomorfismo de la solvariedad está determinada por la clase de isomorfismo del correspondiente retículo, como el siguiente resultado indica:

Teorema 1.2.2. [118] *Si Γ_1 y Γ_2 son retículos en los grupos de Lie solubles simplemente conexos G_1 y G_2, respectivamente, y Γ_1 es isomorfo a Γ_2, entonces $\Gamma_1\backslash G_1$ es difeomorfa a $\Gamma_2\backslash G_2$.*

Este resultado se puede fortalecer cuando ambos grupos de Lie solubles G_1 y G_2 son completamente solubles[7], en virtud del Teorema de rigidez de Saito:

Teorema 1.2.3. [130] *Sean G_1 y G_2 grupos de Lie completamente solubles simplemente conexos y $\Gamma_1 \subset G_1$, $\Gamma_2 \subset G_2$ retículos. Entonces, todo isomorfismo $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ se extiende de manera única a un isomorfismo de grupos de Lie $F : G_1 \to G_2$.*

Cabe destacar que en una dimensión fija hay una cantidad numerable de grupos de Lie simplemente conexos no isomorfos que admiten retículos, de acuerdo con [114] (para el caso soluble) y [156] (para el caso general).

En general no es sencillo determinar si un grupo de Lie soluble unimodular admite un retículo. En contraste, hay un criterio preciso para grupos de Lie nilpotentes. En efecto, Malcev probó en [109] que un grupo de Lie nilpotente admite un retículo si y sólo si su álgebra de Lie posee una forma racional, i.e. existe una base del álgebra de Lie tal que las correspondientes constantes de estructura son racionales. Más recientemente fue estudiada en [27] la existencia de retículos en la mayoría de los grupos de Lie solubles simplemente conexos hasta dimensión 6.

Sea G un grupo de Lie soluble simplemente conexo, y N el nilradical de G (i.e., el subgrupo de Lie conexo cerrado de G cuya álgebra de Lie es el nilradical $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$). Además, sea $[G,G]$ el subgrupo de Lie conexo cerrado con álgebra de Lie $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Como G es soluble, $[G,G] \subset N$ de modo que G/N es abeliano; y de la sucesión exacta larga de grupos de homotopía asociada a la fibración $N \to G \to G/N$ se sigue que G/N es simplemente conexo. Entonces $G/N \cong \mathbb{R}^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y G satisface la sucesión exacta corta

$$1 \to N \to G \to \mathbb{R}^k \to 1.$$

El grupo G se dice *split* si esta sucesión se parte, es decir, si existe un homomorfismo inverso a derecha de la proyección $G \to \mathbb{R}^k$. Esta condición es equivalente a que exista un homomorfismo $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathrm{Aut}(N)$ de manera que G es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{R}^k \ltimes_\phi N$.

Siguiendo a [159], diremos que un retículo Γ de un grupo de Lie soluble split $\mathbb{R}^k \ltimes_\phi N$ es *split* si se puede escribir como $\Gamma = \Gamma_1 \ltimes_\phi \Gamma_2$ donde $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^k$ y $\Gamma_2 \subset N$ son retículos de $\mathbb{R}^k$ y N respectivamente. En consecuencia $\Gamma\backslash G$ se llamará una *solvariedad split*.

Existen retículos no split en grupos solubles split, como el siguiente ejemplo[8] muestra.

Ejemplo 1.2.4. Sea $G = \mathbb{R}^2 \ltimes_\phi \mathbb{R}^4$, donde la acción de ϕ está dada por[9]

$$\phi(t,s) = \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \\ \sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \cos(\pi s) & -\sin(\pi s) \\ \sin(\pi s) & \cos(\pi s) \end{bmatrix}.$$

[7] Un grupo de Lie soluble G es *completamente soluble* si los operadores $\operatorname{ad} x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, con $x \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, sólo poseen autovalores reales. En particular, los grupos de Lie nilpotentes son completamente solubles.

[8] Este ejemplo se lo debemos al Prof. Jonas Deré.

[9] A lo largo de toda la tesis denotaremos por $A \oplus B$ a la matriz diagonal en bloque $\left[\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right]$. Esto se generaliza fácilmente a n matrices.

Consideremos en G el subconjunto

$$\Gamma = \left\{ (z_1, z_2, z_3 - \frac{z_2}{2}, z_4, z_5, z_6) \mid z_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Veamos que Γ es un subgrupo. En efecto, si $\gamma_1 = (m_1, \ldots, m_6)$, $\gamma_2 = (n_1, \ldots, n_6) \in \Gamma$, resulta

$$\begin{aligned}
\gamma_1\gamma_2 &= (m_1 + n_1, m_2 + n_2, m_3 \pm n_3 - \frac{m_2 \pm n_2}{2}, m_4 \pm n_4, m_5 \pm n_5, m_6 \pm n_6) \\
&= (m_1 + n_1, m_2 + n_2, (m_3 \pm n_3 + n_2 \frac{\mp 1 + 1}{2}) - \frac{m_2 + n_2}{2}, m_5 \pm n_5, m_6 \pm n_6) \in \Gamma, \\
\gamma_1^{-1} &= (-m_1, -m_2, \mp m_3 \pm \frac{m_2}{2}, \mp m_4, \mp m_5, \mp m_6) \\
&= (-m_1, -m_2, \mp m_3 + \frac{\pm m_2 - m_2}{2} + \frac{m_2}{2}, \mp m_4, \mp m_5, \mp m_6) \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Más aún, se verifica que Γ es discreto y cocompacto, por lo que Γ es un retículo de G.

Si Γ fuese isomorfo a un producto semidirecto de la forma $\mathbb{Z}^2 \ltimes \mathbb{Z}^4$, existirían elementos $\alpha, \beta \in \Gamma$ con $[\alpha, \beta] = e_G$ tales que sus proyecciones a $\mathbb{R}^2$ generan $\mathbb{Z}^2$. Dado que no pueden ser $\alpha_1\beta_2$ y $\alpha_2\beta_1$ ambos pares ni ambos impares (pues en ese caso no generarían $\mathbb{Z}^2$), podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\alpha_1\beta_2$ es impar y $\alpha_2\beta_1$ es par. Sin embargo, se puede verificar que esto contradice que $[\alpha, \beta] = e_G$. Por lo tanto, Γ no es un retículo split.

En [159] se da un criterio para determinar la existencia de retículos split en grupos solubles simplemente conexos split.

Teorema 1.2.5. [159] *Sea $G = \mathbb{R}^k \ltimes_\phi N$ un grupo de Lie soluble simplemente conexo split, donde N es el nilradical de G. Si existen una base racional $\mathcal{B} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ de $\mathfrak{n}$ y una base $\{t_1, \ldots, t_k\}$ de $\mathbb{R}^k$ tales que $[d(\phi(t_j))_{1_N}]_\mathcal{B}$ es una matriz entera unimodular para todo $1 \le j \le k$ entonces G posee un retículo split de la forma $\Gamma = span_\mathbb{Z}\{t_1, \ldots, t_k\} \ltimes_\phi \exp^N(span_\mathbb{Z}\{X_1, \ldots, X_n\})$.*

Cuando $k = 1$ el grupo de Lie soluble simplemente conexo de tipo split $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi N$ se dice *casi nilpotente*. En este caso, todo retículo es de tipo split de acuerdo con [27].

Si además N es abeliano, i.e. $N = \mathbb{R}^n$, entonces $G = \mathbb{R} \ltimes_\varphi \mathbb{R}^n$ se dice *casi abeliano*. En este caso diremos que el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ es *casi abeliana*, lo cual es equivalente a que $\mathfrak{g}$ posea un ideal abeliano de codimensión uno. Diremos además que una solvariedad $\Gamma\backslash G$ es *casi abeliana* si G es un grupo de Lie casi abeliano.

En los ejemplos de los capítulos que siguen, comenzaremos con un álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^k \ltimes_\varphi \mathfrak{n}$. Para poder aplicar el Teorema 1.2.5 necesitamos determinar el grupo de Lie simplemente conexo asociado G. Sea N el grupo de Lie nilpotente simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{n}$. Como $\exp : \mathfrak{n} \to N$ es un difeomorfismo, podemos asumir que la variedad subyacente a N es $\mathfrak{n}$ misma con la multiplicación de grupo dada por $x \cdot y = Z(x, y)$, donde $Z(x, y)$ es el mapa polinomial dado por la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff: $\exp(x)\exp(y) = \exp(Z(x, y))$. En consecuencia, bajo esta identificación, tenemos que $\exp : \mathfrak{n} \to N$ es simplemente la identidad en $\mathfrak{n}$ y más aún, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}) = \mathrm{Aut}(N)$.

Sea $\{t_1, \ldots, t_k\}$ una base de $\mathbb{R}^k$ y denotamos $B_j = \varphi(t_j) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$. Entonces, $\exp(B_j) \in \mathrm{Aut}(N)$ y usando [27, Theorem 4.2] obtenemos que $G = \mathbb{R}^k \ltimes_\phi N$, donde $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathrm{Aut}(N)$ es el homomorfismo de grupos de Lie definido por

$$\phi\left(\sum_{j=1}^k x_j t_j\right) = \exp(x_1 B_1 + \cdots + x_k B_k) = \exp(x_1 B_1)\exp(x_2 B_2)\cdots\exp(x_k B_k).$$

Aquí exp denota la exponencial matricial luego de identificar $\mathfrak{n} \cong \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{n}}$ eligiendo una base de $\mathfrak{n}$.

Notar que, en la notación del Teorema 1.2.5, tenemos que $d(\phi(t_j))_{1_N} = \exp(B_j) = \exp(\varphi(t_j))$. Por lo tanto, para encontrar retículos necesitamos una base $\{t_1, \ldots, t_k\}$ tal que $[\exp(\varphi(t_j))]_\mathcal{B}$ sea una matriz entera unimodular, para todo $1 \le j \le k$.

Observación 1.2.6. En el caso en que $G = \mathbb{R}^k \ltimes_\phi \mathbb{R}^m$, donde $\mathbb{R}^m$ es el nilradical de G y $\{t_1, \dots, t_k\}$ es una base como arriba, el retículo split está dado por $\Gamma = (\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}t_i) \ltimes_\phi P\mathbb{Z}^m$ donde $P \in \mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ satisface $P^{-1}\exp(\mathrm{ad}_{X_i})P \in \mathrm{SL}(m,\mathbb{Z})$.

Si denotamos $E_i = P^{-1}\exp(\mathrm{ad}_{X_i})P$, el retículo $\Gamma = (\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}X_i) \ltimes_\phi P\mathbb{Z}^m$ es isomorfo (como grupo abstracto) al grupo $\Sigma_{E_1,\dots,E_k} := \mathbb{Z}^k \ltimes_{E_1,\dots,E_k} \mathbb{Z}^m$, cuya multiplicación está dada por

$$(r,t)\cdot(r',t') = \left(r + r', t + E_1^{r_1}\cdots E_k^{r_k}t'\right),\ r = (r_1,\dots,r_k),\ r' \in \mathbb{Z}^k,\ t,t' \in \mathbb{Z}^m.$$

Notar que la multiplicación está bien definida puesto que $E_iE_j = E_jE_i$ para todo i,j. El inverso de un elemento (r,t) está dado por $(r,t)^{-1} = (-r, -E_1^{-r_1}\cdots E_k^{-r_k}t)$.

Finalizamos esta subsección notando que existen solvariedades $S = \Gamma'\backslash G'$ con G' un grupo que no es casi abeliano tales que S es difeomorfa a una solvariedad casi abeliana, es decir, Γ' es isomorfo a un retículo Γ en un grupo casi abeliano. Mostramos a continuación un ejemplo.

Ejemplo 1.2.7. Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^4$ donde

$$\mathrm{ad}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{bmatrix}.$$

No hay un ideal de codimensión uno en $\mathfrak{g}$ pues ad_{e_1} y ad_{e_2} son linealmente independientes. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ no es casi abeliana, de modo que G no es casi abeliano. Sin embargo, $A = \exp(\mathrm{ad}_{e_1})$ y $B = \exp(\mathrm{ad}_{e_2})$ son matrices enteras unimodulares por lo que G posee un retículo split Γ que es isomorfo a $\mathbb{Z}^2 \ltimes_{A,B} \mathbb{Z}^4$. Dado que $B = \mathrm{I}_4$, la identidad es un isomorfismo entre $\mathbb{Z}^2 \ltimes_{A,B} \mathbb{Z}^4$ y $\mathbb{Z} \ltimes_{(1)\oplus A} \mathbb{Z}^5$, siendo este último isomorfo a un retículo en un grupo de Lie casi abeliano. Esto implica, por el Teorema 1.2.2, que $\Gamma\backslash G$ es difeomorfa a una solvariedad casi abeliana.

1.2.1. Estructuras geométricas invariantes en solvariedades

Pasamos ahora a considerar estructuras geométricas invariantes en solvariedades.

Sea G un grupo de Lie conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Una estructura compleja J en G se dice *invariante a izquierda* si las traslaciones a izquierda por elementos de G son mapas holomorfos. En este caso J queda determinada por su valor en la identidad de G. Así, una estructura compleja invariante a izquierda en G equivale a una estructura compleja en su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, es decir, una transformación lineal J de $\mathfrak{g}$ que satisface $J^2 = -\mathrm{Id}$ y $N_J(x,y) = 0$ para todo x,y en $\mathfrak{g}$, con N_J definido como en (1.1.1). Asimismo, una métrica riemanniana g en G se dice invariante a izquierda si las traslaciones a izquierda son isometrías. Una tal métrica g queda determinada por su valor $g_e = \langle\cdot,\cdot\rangle$ en la identidad e de G, esto es, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en $T_eG = \mathfrak{g}$.

Una estructura hermitiana (J,g) en G se dice invariante a izquierda si J y g son ambas invariantes a izquierda. Dada una estructura hermitiana invariante a izquierda (J,g) en G, denotamos por J y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a las correspondientes estructura compleja y producto interno hermitiano en $\mathfrak{g}$. Decimos que $(J,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es una estructura hermitiana en $\mathfrak{g}$.

Observamos que las estructuras geométricas invariantes a izquierda definidas en G inducen las correspondientes estructuras geométricas en $\Gamma\backslash G$, con Γ un retículo (uniforme) en G, las cuales son llamadas *invariantes*. Por ejemplo, una estructura compleja (respectivamente, una métrica riemanniana) invariante a izquierda en G induce una única estructura compleja (respectivamente, una métrica riemanniana) en $\Gamma\backslash G$ tal que la proyección canónica $G \to \Gamma\backslash G$ es un biholomorfismo local (respectivamente, isometría local). Una solvariedad equipada con una estructura compleja invariante será llamada simplemente una *solvariedad compleja*.

La conexión de Levi-Civita de la métrica invariante a izquierda g, la cual denotaremos simplemente por ∇, satisface $\nabla_X Y \in \mathfrak{g}$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto, ∇ está unívocamente determinada por el mapa bilineal $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, definido por la fórmula de Koszul

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle.$$

En consecuencia, el Laplaciano de conexión $\nabla^*\nabla J$ asociado a la estructura casi hermitiana invariante a izquierda (J, g) en G es también un tensor invariante a izquierda, por lo que está determinado por su restricción a $\mathfrak{g}$ y de esa manera define un endomorfismo $\nabla^*\nabla J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Es claro que $[J, \nabla^*\nabla J] = 0$ en G si y sólo si $[J, \nabla^*\nabla J] = 0$ en $\mathfrak{g}$, dado que ambos J y $\nabla^*\nabla J$ son tensores invariantes a izquierda. Luego, para determinar si la estructura casi compleja J es armónica con respecto a g, basta verificar si $[J, \nabla^*\nabla J]$ se anula en campos invariantes a izquierda. Esto nos permite decir que una estructura casi compleja ortogonal J en $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es armónica si

$$[J, \nabla^*\nabla J] = 0 \quad \text{en } \mathfrak{g}.$$

Más aún si G admite un retículo Γ, es fácil verificar usando la definición que la estructura casi compleja invariante J es armónica en $(\Gamma\backslash G, g)$ si y sólo si J es armónica en $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

En resumen, al considerar un grupo de Lie equipado con una estructura casi hermitiana invariante a izquierda, o una solvariedad equipada con una estructura casi hermitiana invariante, la condición de armonicidad $[J, \nabla^*\nabla J] = 0$ se reduce a un problema algebraico en un álgebra de Lie.

Capítulo 2

G_2-estructuras en solvariedades planas

2.1. Preliminares sobre variedades compactas planas y geometría G_2

2.1.1. Solvariedades planas

En [113] Milnor caracterizó aquellos grupos de Lie que admiten una métrica invariante a izquierda plana y mostró que son solubles de una forma bastante restrictiva, al probar que su álgebra de Lie se descompone ortogonalmente como una subálgebra abeliana y un ideal abeliano, donde la acción de la subálgebra en el ideal es por endomorfismos antisimétricos. Un tal grupo de Lie equipado con una métrica invariante a izquierda plana $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se dirá un *grupo de Lie plano* y $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle_e)$ se dirá un *álgebra de Lie plana*.

Utilizando esta caracterización, en [18] se descompone aún más un álgebra de Lie plana de la siguiente manera.

Teorema 2.1.1. [18, Proposition 2.1] *Sea $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle_e)$ un álgebra de Lie plana. Entonces $\mathfrak{g}$ se descompone como una suma directa ortogonal,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$

donde $\mathfrak{b}$ es una subálgebra abeliana, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es abeliano y las siguientes condiciones se satisfacen:

(1) $\operatorname{ad} : \mathfrak{b} \to \mathfrak{so}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ *es inyectiva,*

(2) $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *es par, y*

(3) $\dim \mathfrak{b} \leq \frac{\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}{2}$.

En consecuencia, $\{\operatorname{ad}_X \mid X \in \mathfrak{b}\}$ es una subálgebra abeliana de $\mathfrak{so}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ y por lo tanto, está contenida en una subálgebra abeliana maximal. Como todas estas son conjugadas, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathfrak{b}^*$ tales que para $X \in \mathfrak{b}$ tenemos que

$$[\operatorname{ad}_X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0_s & & & & & \\ & 0 & -\lambda_1(X) & & & \\ & \lambda_1(X) & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & -\lambda_n(X) \\ & & & & \lambda_n(X) & 0 \end{bmatrix},$$

donde $n = \frac{\dim[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}{2}$ y $s = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Notar que un álgebra de Lie plana $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle_e)$ es 2-pasos soluble, dado que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es abeliano, y unimodular, pues ad_X es antisimétrico para todo $X \in \mathfrak{b}$. Además, el nilradical de $\mathfrak{g}$ es $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Estamos interesados en solvariedades $\Gamma\backslash G$ equipadas con la métrica plana inducida de la métrica plana en G, las cuales llamaremos simplemente *solvariedades planas*. En particular, una solvariedad plana es una variedad compacta plana.

Dado que una solvariedad plana $\Gamma\backslash G$ es una variedad compacta plana, su grupo fundamental es isomorfo a un subgrupo libre de torsión y cocompacto del subgrupo de isometrías de $\mathbb{R}^m$ con $m = \dim(\Gamma\backslash G)$. Estos subgrupos se llaman *grupos de Bieberbach* (m-dimensionales) y sus principales propiedades vienen descriptas por tres teoremas clásicos conocidos como "Teoremas de Bieberbach", los cuales enunciamos a continuación.

Teorema 2.1.2 (1° Teorema de Bieberbach)**.** *Sea Γ un grupo de Bieberbach de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^m) = \mathrm{O}(m) \ltimes \mathbb{R}^m$ y sea $\Lambda = \Gamma \cap \mathbb{R}^m$. Entonces Λ es un subgrupo normal abeliano libre de rango m y Γ/Λ es un grupo finito. Más aún, Λ es el único subgrupo abeliano normal maximal de Γ.*

En otras palabras, un grupo de Bieberbach Γ satisface una sucesión exacta

$$1 \to \Lambda \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} H \to 1,$$

donde $H = \Gamma/\Lambda$ es un grupo finito y $\operatorname{rango} \Lambda = m$. Es un resultado conocido que el grupo H puede identificarse con el grupo de holonomía riemanniana de la variedad compacta plana cuyo grupo fundamental es Γ (veáse por ejemplo [41]).

Teorema 2.1.3 (2° Teorema de Bieberbach)**.** *Sea $f : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ un isomorfismo entre dos grupos de Bieberbach de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^m)$. Entonces existe $\alpha \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^m$ tal que $f(\beta) = \alpha\beta\alpha^{-1}$ para todo $\beta \in \Gamma_1$.*

Teorema 2.1.4 (3° Teorema de Bieberbach)**.** *Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe sólo una cantidad finita de clases de isomorfismo de grupos de Bieberbach de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^m)$.*

En consecuencia, para cada $m \in \mathbb{N}$, hay una cantidad finita de clases de difeomorfismo de variedades compactas planas de dimensión m.

Una caracterización abstracta puramente algebraica de los grupos de Bieberbach fue dada por Zassenhaus [160].

Teorema 2.1.5. *Un grupo abstracto Γ es isomorfo a un grupo de Bieberbach de dimensión m si y sólo si Γ contiene un subgrupo abeliano libre normal Λ de índice finito y rango m, que también es abeliano maximal.*

Nos centraremos ahora en solvariedades planas split.

Un álgebra de Lie plana $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ se puede escribir como $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^k \ltimes_{\mathrm{ad}} \mathbb{R}^m$, donde $\mathfrak{b} \simeq \mathbb{R}^k$ y el nilradical está dado por $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \simeq \mathbb{R}^m$. El correspondiente grupo de Lie plano simplemente conexo puede escribirse entonces como $G = \mathbb{R}^k \ltimes_\phi \mathbb{R}^m$, donde $\phi(\sum_{i=1}^k s_i X_i) = \prod_{i=1}^k \exp(s_i \operatorname{ad}_{X_i})$, con $\{\operatorname{ad}_{X_i}\}_{i=1}^k$ dadas por

$$\operatorname{ad}_{X_1} = \begin{bmatrix} 0_s & & & & & \\ & 0 & -a_1^1 & & & \\ & a_1^1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & -a_n^1 \\ & & & & a_n^1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots \quad, \operatorname{ad}_{X_k} = \begin{bmatrix} 0_s & & & & & \\ & 0 & -a_1^k & & & \\ & a_1^k & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & -a_n^k \\ & & & & a_n^k & 0 \end{bmatrix},$$

con $a_i^j \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$. En particular, un grupo de Lie plano es un grupo de Lie split y $\exp(\operatorname{ad} X_i)$ tiene orden finito y determinante 1 para todo $1 \leq i \leq k$. Por la Observación 1.2.6 tenemos que un retículo split Γ de un grupo de Lie plano $G = \mathbb{R}^k \ltimes_\phi \mathbb{R}^m$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^k \ltimes_{E_1,\dots,E_k} \mathbb{Z}^m$, donde $\{E_1, \dots, E_k\}$ es un subconjunto de matrices de $\mathrm{SL}(m, \mathbb{Z})$ que conmutan entre sí y tienen orden finito.

Para clasificar las solvariedades planas split debemos clasificar los retículos split de los grupos de Lie planos (salvo isomorfismo, debido al Teorema 1.2.2).

El siguiente resultado, probado en [143], muestra una manera de identificar el grupo de holonomía de $\Gamma\backslash G$ con un subgrupo de $\mathrm{SL}(m,\mathbb{Z})$:

Proposición 2.1.6. *Sean $G = \mathbb{R}^k \ltimes_\phi \mathbb{R}^m$ un grupo de Lie plano y $\Gamma = (\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}X_i) \ltimes_\phi P\mathbb{Z}^m$ un retículo split. Entonces $\mathrm{Hol}(\Gamma\backslash G) \cong \langle E_1,\dots,E_k\rangle$, donde $E_i := P^{-1}\exp(\mathrm{ad}_{X_i})P$ es entera para $1 \le i \le k$.*

En particular, esto dice que el grupo de holonomía de una solvariedad plana casi abeliana es cíclico y finito (ver otra prueba en [142, Theorem 3.7]).

Podemos además calcular el primer grupo de homología entera $H_1(\Gamma\backslash G,\mathbb{Z})$. En efecto, por el teorema de Hurewicz tenemos que $H_1(\Gamma\backslash G,\mathbb{Z}) \cong \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$. Como $\Gamma \cong \mathbb{Z}^k \ltimes_{E_1,\dots,E_k} \mathbb{Z}^m$, basta con calcular la abelianización de este último grupo, la cual es fácil de calcular teniendo la siguiente caracterización de su conmutador.

Proposición 2.1.7. *Sea $\Sigma_{E_1,\dots,E_k} := \mathbb{Z}^k \ltimes_{E_1,\dots,E_k} \mathbb{Z}^m$. Entonces*

$$[\Sigma_{E_1,\dots,E_k},\Sigma_{E_1,\dots,E_k}] = \underbrace{0\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus 0\mathbb{Z}}_{k\ veces}\oplus(\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_1)+\cdots+\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_k)).$$

Demostración. Sean $(r,t),(r',t') \in \Sigma_{E_1,\dots,E_k}$, esto es $r=(r_1,\dots,r_k), r'=(r'_1,\dots,r'_k)$, $t=(t_1,\dots,t_m)$, $t'=(t'_1,\dots,t'_m)$. Entonces

$$\begin{aligned}
[(r,t),(r',t')] &= (r,t)(r',t')(-r,-E_1^{-r_1}\cdots E_k^{-r_k}t)(-r',-E_1^{-r'_1}\cdots E_k^{-r'_k}t')\\
&= (r+r',t+E_1^{r_1}\cdots E_k^{r_k}t')(-r-r',-E_1^{-r_1}\cdots E_k^{-r_k}t - E_1^{-r_1-r'_1}\cdots E_k^{-r_k-r'_k}t')\\
&= (0,t+E_1^{r_1}\cdots E_k^{r_k}t' - E_1^{r'_1}\cdots E_k^{r'_k}t - t')\\
&= (0,(\mathrm{I}-E_1^{r'_1}\cdots E_k^{r'_k})t - (\mathrm{I}-E_1^{r_1}\cdots E_k^{r_k})t').
\end{aligned}$$

Ahora, de $(\mathrm{I}-E_i^\ell) = (\mathrm{I}-E_i)(\mathrm{I}+E_i+\cdots+E_i^{\ell-1})$ se sigue que $\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_i^\ell) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_i)$ para todo $1\le i\le k$, $\ell \ge 1$. Además,

$$\mathrm{I}-E_iE_j = \mathrm{I}-E_iE_j - E_j + E_j = (\mathrm{I}-E_j) + (\mathrm{I}-E_i)E_j,$$

por lo que $\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_iE_j) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_i)+\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_j)$. Esto se generaliza de manera directa a un producto de k matrices. Juntando estos hechos resulta que

$$\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_1^{\ell_1}\cdots E_k^{\ell_k}) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_1)+\cdots+\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_k).$$

Por lo tanto $[\Sigma_{E_1,\dots,E_k},\Sigma_{E_1,\dots,E_k}] \subset 0\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus 0\mathbb{Z}\oplus(\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_1)+\cdots+\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_k))$.

Recíprocamente, tenemos que $(0,(\mathrm{I}-E_i)t) = [(0,t),(e_i,0)]$, donde $e_i \in \mathbb{Z}^k$ es el vector con un 1 en el lugar i y 0 en el resto. Así, $0\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus 0\mathbb{Z}\oplus(\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_1)+\cdots+\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_k)) \subset [\Sigma_{E_1,\dots,E_k},\Sigma_{E_1,\dots,E_k}]$. □

Observación 2.1.8. Esta proposición nos dice que si $\{E_1,\dots,E_k\}$ y $\{F_1,\dots,F_k\}$ son dos conjuntos de matrices que conmutan tales que $\langle E_1,\dots,E_k\rangle = \langle F_1,\dots,F_k\rangle$, entonces la abelianización de $\Sigma_{E_1,\dots,E_k}$ coincide con la de $\Sigma_{F_1,\dots,F_k}$. En efecto, $[\Sigma_{E_1,\dots,E_k},\Sigma_{E_1,\dots,E_k}] = [\Sigma_{F_1,\dots,F_k},\Sigma_{F_1,\dots,F_k}]$ pues del hecho que generan el mismo subgrupo obtenemos que $\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_1)+\cdots+\mathrm{Im}(\mathrm{I}-E_k) = \mathrm{Im}(\mathrm{I}-F_1)+\cdots+\mathrm{Im}(\mathrm{I}-F_k)$.

La siguiente proposición, probada en [143, Lemma 3.10, Proposition 3.14], muestra que hay una relación entre los retículos split de grupos de Lie planos $G=\mathbb{R}^k\ltimes\mathbb{R}^m$ y los subgrupos abelianos finitos de $\mathrm{SL}(m,\mathbb{Z})$.

Proposición 2.1.9.

(1) *Sean* $\{E_1,\dots,E_k\}$ *y* $\{F_1,\dots,F_k\}$ *subgrupos de matrices de orden finito en* $\mathrm{SL}(m,\mathbb{Z})$ *que conmutan entre sí. Si* $\langle E_1,\dots,E_k\rangle$ *es conjugado a* $\langle F_1,\dots,F_k\rangle$ *en* $\mathrm{SL}(m,\mathbb{Z})$ *entonces existe un isomorfismo* $\Sigma_{E_1,\dots,E_k}\cong\Sigma_{F'_1,\dots,F'_k}$ *para algún conjunto generador* $\{F'_i\}_{i=1}^k$ *de* $\langle F_1,\dots,F_k\rangle$.

(2) *Si el cardinal de un conjunto generador mínimo de* $\langle E_1,\dots,E_k\rangle$ *es* $\ell<k$ *entonces existe un isomorfismo entre* $\mathbb{Z}^k\ltimes_{E_1,\dots,E_k}\mathbb{Z}^m$ *y* $\mathbb{Z}^\ell\ltimes_{H'_1,\dots,H'_\ell}\mathbb{Z}^{m+k-\ell}$, *donde* $H'_i=\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{k-\ell} & \\ & H_i\end{bmatrix}$ *y* $\{H_i\}_{i=1}^\ell$ *es un conjunto generador de* $\langle E_1,\dots,E_k\rangle$.

Una herramienta importante para la demostración de esta proposición es el siguiente lema probado en [143, Lemma 3.11], que además nos servirá más adelante.

Lema 2.1.10. *Sean* $E_1,\dots,E_k\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{Z})$ *matrices de orden finito que conmutan. Entonces,*

(i) $\Sigma_{E_1,\dots,E_k}\cong\Sigma_{E_{\sigma(1)},\dots,E_{\sigma(k)}}$, *para toda permutación* $\sigma\in S_k$.

(ii) $\Sigma_{E_1,\dots,E_i,\dots,E_k}\cong\Sigma_{E_1,\dots,E_i^{-1},\dots,E_k}$ *para todo* $1\le i\le k$.

(iii) $\Sigma_{E_1,\dots,E_i,\dots,E_j,\dots,E_k}\cong\Sigma_{E_1,\dots,E_i,\dots,E_iE_j,\dots,E_k}$ *para todo* $1\le i,j\le k$.

La Proposición 2.1.9 nos dice que para buscar todas las clases de isomorfismo de retículos split, debemos buscar en las clases de conjugación de subgrupos abelianos finitos de $\mathrm{SL}(m,\mathbb{Z})$, pero no nos dice que dos conjuntos distintos de generadores del mismo subgrupo dan origen a grupos no isomorfos. De hecho, esto es falso como el siguiente ejemplo[1] lo indica:

Ejemplo 2.1.11. Sea $A\in\mathrm{SL}(36,\mathbb{Z})$ dada por

$$A=\left[\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & \begin{array}{c}0_{1\times 35}\\ \hline \mathrm{I}_{35}\\ \hline w\end{array}\end{array}\right],$$

donde

$$v_1=-(4,1,4,2,2,4,3,4,1,2,3,3,1,1,4,4,1,2,1,2,2,3,4,4,4,4,2,1,2,4,4,3,2,3,1,-15)^t,$$
$$v_2=(149,4,133,64,42,130,76,143,24,53,86,103,35,9,113,144,20,69,22,61,54,82,119,$$
$$120,116,132,68,26,45,118,124,100,47,110,7,120)^t,$$

y $w=-(1,1,\dots,1)\in\mathbb{R}^{35}$. La matriz A satisface que $A^{37}=\mathrm{I}$. Usando el comando del programa Magma `AreGLConjugate`, chequeamos que A^2 no es conjugada enteramente (es decir vía una matriz $P\in\mathrm{GL}(36,\mathbb{Z})$) a A o A^{-1}. De hecho, A no es conjugada enteramente a A^i para todo $2\le i\le 37$. Dado que 1 no es un autovalor de A ni de A^2, de acuerdo con el siguiente teorema resulta que $\Sigma_A=\mathbb{Z}\ltimes_A\mathbb{Z}^{36}$ no es isomorfo a Σ_{A^2}. Notar sin embargo que $\langle A\rangle=\langle A^2\rangle$.

Teorema 2.1.12. [39, Corollary 8.9] *Sean* $A,B\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ *sin puntos fijos no triviales (i.e. 1 no es autovalor). Entonces* $\mathbb{Z}\ltimes_A\mathbb{Z}^n\cong\mathbb{Z}\ltimes_B\mathbb{Z}^n$ *si y sólo si* B *es conjugada enteramente a* A *o* A^{-1}.

Más aún, no todo subgrupo finito abeliano de $\mathrm{SL}(m,\mathbb{Z})$ está generado por matrices $E_1,\dots,E_k$ que provienen de un retículo split de un grupo de Lie plano. En efecto, una condición necesaria para que $\{E_1,\dots,E_k\}$ de origen a un retículo split de un grupo de Lie plano es que el rango de la abelianización de $\Sigma_{E_1,\dots,E_k}$ tenga la misma paridad que la dimensión del grupo de Lie plano. Esto se debe al hecho de que toda solvariedad plana de dimensión par admite una métrica de Kähler ([18]) por lo que debe tener primer número de Betti par. Gracias a la Observación 2.1.8, basta chequear esta condición para un sólo conjunto de generadores del subgrupo en cuestión.

En conclusión, para determinar las clases de isomorfismo de retículos split debemos seguir varios pasos:

[1] Debemos este ejemplo al Prof. Derek Holt.

- Clasificar los subgrupos abelianos finitos de $\mathrm{SL}(m,\mathbb{Z})$.
- Decidir cuáles de estos subgrupos dan origen a retículos split de un grupo de Lie plano.
- Determinar, para cada subgrupo, si hay distintos conjuntos generadores del mismo que dan origen a retículos split no isomorfos.
- Determinar si los retículos split asociados a subgrupos no conjugados son isomorfos o no.

La clasificación de los subgrupos finitos de $\mathrm{GL}(m,\mathbb{Z})$ (en particular la de los subgrupos finitos y abelianos de $\mathrm{SL}(m,\mathbb{Z})$) fue obtenida sólo para $m \leq 6$ (para $m \in \{5,6\}$ se necesitó la ayuda del programa CARAT, ver [126]). Una lista de estos subgrupos puede encontrarse en https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/Algorithm/RatProbAlgTori/crystdat.html.

2.1.2. G_2-estructuras

Sea $\{u_1,\dots,u_7\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^7$ y $\{u^1,\dots,u^7\}$ su base dual. Sea $\varphi_0 \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$ definida por

$$\varphi_0 = u^{123} + u^{145} + u^{167} + u^{246} - u^{257} - u^{347} - u^{356}, \tag{2.1.1}$$

donde escribimos u^{ijk} para abreviar $u^i \wedge u^j \wedge u^k$. Es un resultado bien conocido que el grupo de isotropía $\{A \in \mathrm{GL}(7,\mathbb{R}) \mid A\cdot\varphi_0 = \varphi_0\}$ es isomorfo al grupo de Lie simple excepcional G_2 de dimensión 14, donde la acción $\cdot$ se define mediante

$$h\cdot\varphi_0(x,y,z) = \varphi_0(h^{-1}x, h^{-1}y, h^{-1}z), \quad x,y,z \in \mathbb{R}^7.$$

Sea ahora M una variedad diferenciable de dimensión 7. Una 3-forma diferenciable φ en M es una G_2-*estructura* si para todo $p \in M$, existe un isomorfismo $\iota_p : \mathbb{R}^7 \to T_pM$ de manera que $\iota_p^*\varphi_p = \varphi_0$ donde φ_0 es como en (2.1.1). Una tal 3-forma se dice *positiva* (o *definida*).

En consecuencia, para todo $p \in M$ existe una base $\{e_1,\dots,e_7\}$ de T_pM tal que $\varphi_p \in \Lambda^3(T_p^*M)$ se puede escribir como $\varphi_p = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356}$.

Observación 2.1.13. En la literatura otra 3-forma en $\mathbb{R}^7$ que suele ser usada como modelo para las G_2-estructuras es $\tilde{\varphi}_0 = u^{127} + u^{347} + u^{567} + u^{135} - u^{146} - u^{236} - u^{245}$. La condición de positividad no depende de la forma modelo usada dado que $\tilde{\varphi}_0 \in \mathrm{GL}(7,\mathbb{R})\cdot\varphi_0$.

La existencia de G_2-estructuras es una cuestión meramente topológica. Mientras que no toda variedad diferenciable de dimensión 7 admite una G_2-estructura, hay muchas que sí admiten y están caracterizadas por la siguiente proposición (probada en [102]).

Proposición 2.1.14. *Una variedad diferenciable M de dimensión 7 admite una G_2-estructura si y sólo si M es orientable y admite una estructura espín.*

Una G_2-estructura φ en una variedad diferenciable M da origen a una métrica riemanniana g_φ con forma de volumen vol_φ, definida mediante

$$g_\varphi(X,Y)\,\mathrm{vol}_\varphi = \frac{1}{6}\iota_X\varphi \wedge \iota_Y\varphi \wedge \varphi, \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

La existencia de una G_2-estructura φ en M también determina una descomposición del espacio de formas en M como suma de G_2-representaciones irreducibles. Se sabe que $\Omega^k := \Omega^k(M)$ es irreducible si $k = 0,1,6,7$. Además, los espacios de 2-formas y 3-formas se descomponen como

$$\Omega^2 = \Omega^2_7 \oplus \Omega^2_{14}, \quad \Omega^3 = \Omega^3_1 \oplus \Omega^3_7 \oplus \Omega^3_{27},$$

donde cada Ω^k_ℓ tiene dimensión (en cada punto) ℓ y la descomposición es ortogonal respecto de la métrica g_φ. Explícitamente,

$$\begin{aligned}
\Omega^2_7 &= \{\iota_X\varphi,\ X \in \mathfrak{X}(M)\} = \{\beta \in \Omega^2 \mid \star_\varphi(\varphi \wedge \beta) = -2\beta\}\},\\
\Omega^2_{14} &= \{\beta \in \Omega^2 \mid \beta \wedge \star_\varphi\varphi = 0\} = \{\beta \in \Omega^2 \mid \star_\varphi(\varphi \wedge \beta) = \beta\},\\
\Omega^3_1 &= \{f\varphi \mid f \in C^\infty(M)\},\\
\Omega^3_7 &= \{\iota_X(\star_\varphi\varphi) \mid X \in \mathfrak{X}(M)\},\\
\Omega^3_{27} &= \{\beta \in \Omega^3 \mid \beta \wedge \varphi = 0,\ \beta \wedge \star_\varphi\varphi = 0\}.
\end{aligned}$$

Las descomposiciones $\Omega^4 = \Omega^4_1 \oplus \Omega^4_7 \oplus \Omega^4_{27}$ y $\Omega^5 = \Omega^5_7 \oplus \Omega^5_{14}$ se obtienen al aplicar el operador estrella de Hodge a las descomposiciones de Ω^3 y Ω^2, respectivamente.

Aplicando la descomposición previamente mencionada a los operadores $\mathrm{d}\varphi$ y $\mathrm{d}\star_\varphi\varphi$ se obtiene la siguiente definición.

Definición 2.1.15. Sea φ una G_2-estructura en una variedad M de dimensión 7. Entonces existen únicas $\tau_0 \in \Omega^0, \tau_1 \in \Omega^1_7, \tau_2 \in \Omega^2_{14}$ y $\tau_3 \in \Omega^3_{27}$, llamadas *formas de torsión* de φ, tales que

$$\mathrm{d}\varphi = \tau_0 \star_\varphi \varphi + 3\tau_1 \wedge \varphi + \star_\varphi\tau_3, \quad \text{y} \quad \mathrm{d}\star_\varphi\varphi = 4\tau_1 \wedge \star_\varphi\varphi + \star_\varphi\tau_2.$$

Las formas de torsión se pueden calcular explícitamente a partir de φ y $\star_\varphi\varphi$ mediante las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \frac{1}{7} \star_\varphi (\mathrm{d}\varphi \wedge \varphi), & \tau_1 &= -\tfrac{1}{12} \star_\varphi (\star_\varphi \mathrm{d}\varphi \wedge \varphi),\\
\tau_2 &= \star_\varphi \mathrm{d}\star_\varphi\varphi - 4 \star_\varphi (\tau_1 \wedge \mathrm{d}\star_\varphi\varphi), & \tau_3 &= \star_\varphi \mathrm{d}\varphi - \tau_0\varphi - 3 \star_\varphi (\tau_1 \wedge \varphi).
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Además, las formas de torsión están codificadas en el *tensor de torsión total* T_φ, el cual es el tensor de tipo $(0,2)$ definido por

$$T_\varphi = \frac{\tau_0}{4} g_\varphi - \star_\varphi(\tau_1 \wedge \star_\varphi\varphi) - \frac{1}{2}\tau_2 - \frac{1}{4}\jmath(\tau_3), \tag{2.1.3}$$

donde $\jmath : \Omega^3_{27} \to \mathrm{Sym}^2_0(T^*M)$ está definido por

$$\jmath(\tau)(v,w) = \star_\varphi(\iota_v\varphi \wedge \iota_w\varphi \wedge \tau).$$

Contrayendo con la métrica, el tensor de torsión total T_φ puede ser visto como $T_\varphi \in \mathrm{End}(TM)$ y (2.1.3) se expresa en términos de la descomposición en G_2-irreducibles $\mathrm{End}(TM) = W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, donde $W_0 \simeq \Omega^0, W_1 \simeq \Omega^3_7, W_2 \simeq \Omega^2_{14}$ y $W_3 \simeq \Omega^3_{27}$ (veáse por ejemplo [49]). El endomorfismo $T_\varphi \in \mathrm{End}(TM)$ satisface $\nabla_X\varphi = \iota_{T_\varphi(X)} \star_\varphi \varphi$.

Dado que la torsión T_φ se descompone en cuatro componentes independientes, cada componente puede ser cero o no. Esto da 16 clases distintas de G_2-estructuras, llamadas *clases de Fernández-Gray*. Algunas clases relevantes junto con sus nombres están listadas en la siguiente tabla:

Nombre	Condiciones	Formas de torsión
Cerrada	$\mathrm{d}\varphi = 0$	$\tau_0 = \tau_1 = \tau_3 = 0$
Cocerrada	$\mathrm{d}\star_\varphi\varphi = 0$	$\tau_1 = \tau_2 = 0$
Cocerrada de tipo puro	$\mathrm{d}\star_\varphi\varphi = 0, \mathrm{d}\varphi \wedge \varphi = 0$	$\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 0$
Localmente conforme paralela	$\mathrm{d}\varphi = 3\tau_1 \wedge \varphi,\ \mathrm{d}\star_\varphi\varphi = 4\tau_1 \wedge \star_\varphi\varphi$	$\tau_0 = \tau_2 = \tau_3 = 0$
Casi paralela	$\mathrm{d}\varphi = \lambda \star_\varphi \varphi\ (\lambda \neq 0)$	$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$
Libre de torsión	$\mathrm{d}\varphi = 0$ y $\mathrm{d}\star_\varphi\varphi = 0$	$\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$

Todo grupo de Lie de dimensión 7 admite una G_2-estructura invariante a izquierda. En efecto, en un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ de dimensión 7 con base $\{e_i\}_{i=1}^7$ podemos definir una 3-forma $\varphi_0 \in \Lambda^3\mathfrak{g}^*$ según la ecuación (2.1.1) y luego mediante las traslaciones a izquierda en el grupo definir la G_2-estructura invariante a izquierda. Notar que si esta G_2-estructura invariante a izquierda es libre de torsión, entonces la métrica invariante a izquierda g_φ es plana puesto que es Ricci-plana [3].

Dada una G_2-estructura invariante a izquierda φ en un grupo de Lie soluble G que posee un retículo Γ, podemos definir de manera natural una G_2-estructura $\tilde{\varphi}$ en la solvariedad $\Gamma\backslash G$ como sigue:

$$\tilde{\varphi}_{\pi(p)}(u,v,w) = \varphi_p((d\pi)_p^{-1}u, (d\pi)_p^{-1}v, (d\pi)_p^{-1}v), \quad p \in G,\ u,v,w \in T_{\pi(p)}(\Gamma\backslash G).$$

La G_2-estructura $\tilde{\varphi}$ será llamada una G_2-estructura *invariante*. Dada una solvariedad $\Gamma\backslash G$ equipada con una G_2-estructura invariante $\tilde{\varphi}$, es fácil de chequear que las condiciones en la tabla de arriba se satisfacen para $\tilde{\varphi}$ si y sólo si se satisfacen para la 3-forma φ_0 definida a nivel del álgebra de Lie.

Como corolario de la Proposición 2.1.14 y el hecho de que existen G_2-estructuras invariantes en una solvariedad tenemos

Corolario 2.1.16. *Toda solvariedad de dimensión 7 admite una estructura espín.*

En particular, las solvariedades planas de dimensión 7 son ejemplos de variedades compactas planas que admiten una estructura espín, las cuales son interesantes de acuerdo con [138].

2.2. Clasificación de las solvariedades planas split de dimensión 7

El objetivo de esta sección es clasificar las solvariedades planas split de dimensión 7. Seguiremos el método descripto en §2.1.1.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie plana (no abeliana) de dimensión 7. De acuerdo con el Teorema 2.1.1 hay dos posibilidades para $\dim\mathfrak{b}$, a saber, $\dim\mathfrak{b} = 1$ o $\dim\mathfrak{b} = 2$. Si $\dim\mathfrak{b} = 1$ entonces $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^6$ es casi abeliana, y si $\dim\mathfrak{b} = 2$ entonces $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^5$ no es casi abeliana.

2.2.1. Caso casi abeliano

Un álgebra de Lie plana casi abeliana $\mathfrak{g}$ de dimensión 7 puede escribirse como $\mathfrak{g} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^6$ donde ad_x se escribe en cierta base $\mathcal{B}$ del nilradical $\mathbb{R}^6$ como la matriz en bloques

$$[\mathrm{ad}_x] = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

El correspondiente grupo de Lie simplemente conexo es $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^6$ con

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos(at) & -\sin(at) \\ \sin(at) & \cos(at) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \cos(ct) & -\sin(ct) \\ \sin(ct) & \cos(ct) \end{bmatrix}. \tag{2.2.1}$$

De la clasificación de subgrupos finitos de $\mathrm{GL}(6,\mathbb{Z})$ extraemos la lista de subgrupos finitos cíclicos de $\mathrm{SL}(6,\mathbb{Z})$, usando el programa GAP. Obtenemos 123 subgrupos, cada uno de los cuales da origen a un grupo $\mathbb{Z} \ltimes_E \mathbb{Z}^6$ que es (isomorfo a) un retículo de un grupo de Lie plano casi abeliano. En efecto, al conjugar $\phi(t_0)$ podemos obtener cada una de las matrices que generan estos 123 subgrupos, debido al siguiente resultado conocido.

Teorema 2.2.1. [97] *Una matriz $A \in \mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ tiene orden finito si y sólo si A es conjugada a*

$$\mathrm{I}_{k_1} \oplus (-\mathrm{I}_{k_2}) \oplus \begin{bmatrix} \cos t_1 & -\sin t_1 \\ \sin t_1 & \cos t_1 \end{bmatrix}^{d_1} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} \cos t_r & -\sin t_r \\ \sin t_r & \cos t_r \end{bmatrix}^{d_r},$$

donde $k_1, k_2, r \geq 0$, cada potencia $d_1, \ldots, d_r$ es mayor o igual que 1, cada t_i es un múltiplo racional de 2π con $0 < t_1 < \cdots < t_r < \pi$, y $k_1 + k_2 + 2(d_1 + \cdots + d_r) = k$.

Para cada uno de los 123 subgrupos, chequeamos con GAP que cualquier matriz que genera el subgrupo en cuestión es conjugada entera a la matriz que genera el grupo dada en la lista que extrajimos. Esto implica que los retículos correspondientes son isomorfos. Por último comprobamos que los 123 retículos split correspondientes son no isomorfos 2 a 2, pues calculamos con GAP el número de subgrupos de cierto índice y este invariante permite distinguirlos. Como las solvariedades correspondientes son no difeomorfas (de acuerdo al Teorema 1.2.2) obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Hay* 123 *solvariedades planas casi abelianas de dimensión* 7 *no difeomorfas* 2 *a* 2*.*

Los cálculos realizados en GAP, así como también una lista de las 123 matrices que dan origen a las 123 solvariedades, están disponibles (en inglés) en

https://github.com/atolcachier/7-dimensional-splittable-flat-solvmanifolds.

2.2.2. Caso no casi abeliano

Un álgebra de Lie plana $\mathfrak{g}$ de dimensión 7 que no es casi abeliana se escribe como $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2 \ltimes_{\mathrm{ad}} \mathbb{R}^5$, donde $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{x, y\}$ y en cierta base $\mathcal{B}$ del nilradical $\mathbb{R}^5$, resulta

$$\mathrm{ad}_x = (0) \oplus \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}_y = (0) \oplus \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{bmatrix},$$

donde $a^2 + c^2 \neq 0$, $b^2 + d^2 \neq 0$ y $ad - bc \neq 0$.

Por consiguiente, el grupo de Lie simplemente conexo asociado G se escribe como $G = \mathbb{R}^2 \ltimes_\phi \mathbb{R}^5$, donde $\phi(tx + sy) = \exp(t\,\mathrm{ad}_x)\exp(s\,\mathrm{ad}_y)$. De acuerdo al Teorema 1.2.5, para determinar los retículos split en G (de manera de obtener las solvariedades planas split) debemos hallar los valores de a, b, c, d de manera que $\exp(\mathrm{ad}_x)$ y $\exp(\mathrm{ad}_y)$ se conjuguen de manera simultánea a matrices $A, B \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$. Luego necesitamos distinguir los correspondientes retículos split $\Sigma_{A,B} = \mathbb{Z}^2 \ltimes_{A,B} \mathbb{Z}^5$ salvo isomorfismo.

Hay 6079 subgrupos finitos de $\mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$. Usando GAP, extraemos la lista de los subgrupos finitos abelianos de $\mathrm{SL}(5, \mathbb{Z})$ que están generados por 2 elementos.

Algunos de estos subgrupos no pueden dar origen a un grupo $\mathbb{Z}^2 \ltimes_{A,B} \mathbb{Z}^5$ isomorfo a un retículo de un grupo de Lie plano puesto que el rango de su abelianización es par. Esto contradice el hecho de la solvariedad plana Kähler de dimensión par obtenida al multiplicar por S^1 debe tener primer número de Betti par (y $b_1(M \times S^1) = b_1(M) + 1$). Descartando estos subgrupos, nos quedamos con 45 subgrupos. Cada uno de estos subgrupos da origen a un grupo $\mathbb{Z}^2 \ltimes_{A,B} \mathbb{Z}^5$ que es (isomorfo a) un retículo split de un grupo de Lie plano de la forma $\mathbb{R}^2 \ltimes_\phi \mathbb{R}^5$, como la siguiente tabla muestra.

A continuación comprobamos con GAP (y usando Lema 2.1.10), para cada uno de los 45 subgrupos, que dos conjuntos $\{A, B\}$ y $\{C, D\}$ de generadores del subgrupo en cuestión dan origen a grupos $\Sigma_{A,B}$ y $\Sigma_{C,D}$ que son isomorfos. Finalmente, distinguimos con GAP los retículos al calcular el número de subgrupos de cierto índice. Por lo tanto, obtenemos al siguiente teorema.

Teorema 2.2.3. *Hay* 45 *solvariedades planas split (no casi abelianas) de dimensión* 7 *que son no difeomorfas* 2 *a* 2*.*

Notar que todas estas solvariedades satisfacen la condición $c = -d$ (como muestra la tabla siguiente), lo que será importante en la siguiente sección.

Los cálculos realizados en GAP están disponibles (en inglés) en

https://github.com/atolcachier/7-dimensional-splittable-flat-solvmanifolds.

$(a,b),(c,d)$	Matriz que conjuga	Matrices que generan el subgrupo
$(\pi,2\pi),(\pi,-\pi)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathrm{I}_2$	$\mathrm{diag}(-1,-1,1,1,1), \mathrm{diag}(-1,-1,1,-1,-1)$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$	$\mathrm{diag}(1,-1,-1,1,1), (-1)\oplus(-\mathrm{I}_2)\oplus\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$(-1)\oplus\mathrm{I}_2\oplus\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{diag}(-1,1,-1,-1,-1)$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$(-1)\oplus(1)\oplus\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, -\mathrm{I}_2\oplus\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$(-1)\oplus(1)\oplus\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, -\mathrm{I}_2\oplus\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$(1)\oplus\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, -\mathrm{I}_2\oplus\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$(1)\oplus\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$(1)\oplus\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (1)\oplus -\mathrm{I}_4$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (-1)\oplus\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, -\mathrm{I}_2\oplus\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$(2\pi,\frac{\pi}{2}),(\pi,-\pi)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\oplus\mathrm{I}_3, -\mathrm{I}_2\oplus(1)\oplus-\mathrm{I}_2$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathrm{I}_2\oplus\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, -\mathrm{I}_2\oplus\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
	$(1)\oplus\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathrm{I}_2\oplus\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, (1)\oplus(-\mathrm{I}_4)$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\oplus\mathrm{I}_3, -\mathrm{I}_3\oplus\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$(1)\oplus\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (-1)\oplus\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, -\mathrm{I}_2\oplus\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(2\pi, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathrm{I}_2$	$\mathrm{I}_3 \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus (1) \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathrm{I}_3, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$(1) \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$	$(1) \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, (1) \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$(2\pi, \pi), (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathrm{I}_2$	$\mathrm{I}_3 \oplus (-\mathrm{I}_2), \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus (1) \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-\mathrm{I}_2 \oplus \mathrm{I}_3, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$(1) \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$(1) \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (1) \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
	$(1) \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$(1) \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (1) \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$(\frac{\pi}{3}, 2\pi), (\pi, -\pi)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathrm{I}_2$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \mathrm{I}_3, -\mathrm{I}_2 \oplus (1) \oplus (-\mathrm{I}_2)$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$(1) \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \oplus \mathrm{I}_2, -\mathrm{I}_3 \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}), (\pi, -\pi)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \oplus (1) \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, -\mathrm{I}_2 \oplus (1) \oplus (-\mathrm{I}_2)$
	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, -\mathrm{I}_2 \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}),(\pi,-\pi)$	$\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\2&-1&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&\sqrt{3}&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\oplus(1)\oplus\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}, -\mathrm{I}_2\oplus(1)\oplus(-\mathrm{I}_2)$
	$(1)\oplus\begin{bmatrix}0&\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\2&-1&-1&2\\2&-1&1&-2\\0&\sqrt{3}&-\sqrt{3}&0\end{bmatrix}$	$(1)\oplus\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&-1\\-1&1&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}, (1)\oplus(-\mathrm{I}_4)$
$(2\pi,\frac{\pi}{3}),(\frac{2\pi}{3},-\frac{2\pi}{3})$	$\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\2&1&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&\sqrt{3}&0\end{bmatrix}$	$\mathrm{I}_3\oplus\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}\oplus(1)\oplus\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix}0&0&1&1&-1\\0&0&-1&2&1\\0&0&\sqrt{3}&0&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&0&0&0&0\\-1&2&0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}\oplus\mathrm{I}_3, \begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{bmatrix}$
$(2\pi,\frac{2\pi}{3}),(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3})$	$\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\2&-1&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&\sqrt{3}\end{bmatrix}$	$\mathrm{I}_3\oplus\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\oplus(1)\oplus\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$
	$(1)\oplus\begin{bmatrix}2&-2&2&1\\0&0&0&\sqrt{3}\\-1&1&2&-2\\\sqrt{3}&\sqrt{3}&0&0\end{bmatrix}$	$(1)\oplus\begin{bmatrix}0&0&1&-1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}, (1)\oplus\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\\1&-1&1&1\end{bmatrix}$
$(2\pi,\frac{\pi}{3}),(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3})$	$\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\2&-1&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&\sqrt{3}&0\end{bmatrix}$	$\mathrm{I}_3\oplus\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\oplus(1)\oplus\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$
$(2\pi,\frac{2\pi}{3}),(\frac{2\pi}{3},-\frac{2\pi}{3})$	$\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\2&-1&0&0&0\\0&\sqrt{3}&0&0&0\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&\sqrt{3}&0\end{bmatrix}$	$\mathrm{I}_3\oplus\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\oplus(1)\oplus\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix}0&0&1&-1&-1\\0&0&2&1&1\\0&0&0&-\sqrt{3}&\sqrt{3}\\-1&2&0&0&0\\\sqrt{3}&0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}\oplus\mathrm{I}_3, \begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&1&1&-1\\0&0&\sqrt{3}&\sqrt{3}&\sqrt{3}\\0&2&-2&1&2\\0&0&0&-\sqrt{3}&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\0&1&0&1&1\\0&-1&1&-1&-1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&-1&-1\\0&0&0&0&-1\\0&1&-1&0&1\\0&0&1&0&-1\end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&-1\\0&2&1&0&-1\\0&0&\sqrt{3}&0&\sqrt{3}\\1&0&0&2&0\\\sqrt{3}&0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&-1&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&0&0&-1&0\\-1&0&-1&0&0\\1&0&0&0&-1\\1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\end{bmatrix}$
	$\begin{bmatrix}1&1&-1&-1&1\\2&-1&-2&1&-1\\0&\sqrt{3}&0&\sqrt{3}&\sqrt{3}\\2&2&1&1&-1\\0&0&-\sqrt{3}&-\sqrt{3}&-\sqrt{3}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&-1&-1&-1&0\\0&1&1&1&1\\-1&-1&0&-1&0\\0&0&0&1&0\\0&0&-1&-1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0&-1&0\\0&-1&-1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&-1&0&0&-1\\1&1&0&0&0\end{bmatrix}$

Tabla 2.1: Solvariedades planas split no casi abelianas de dimensión 7.

2.3. G_2-estructuras invariantes en solvariedades planas

El objetivo de esta última sección es estudiar la existencia de G_2-estructuras invariantes en las solvariedades planas split que clasificamos en la sección anterior. Más específicamente, buscamos G_2-estructuras cerradas, cocerradas, libres de torsión y de divergencia nula.

2.3.1. G_2-estructuras en solvariedades planas casi abelianas

Sea $\mathfrak{g}_{a,b,c} = \mathbb{R}x \ltimes_{\mathrm{ad}_x} \mathbb{R}^6$ un álgebra de Lie casi abeliana plana de dimensión 7 y $G_{a,b,c} = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^6$ el correspondiente grupo de Lie simplemente conexo, donde

$$\mathrm{ad}_x = \begin{bmatrix}0&-a\\a&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&-b\\b&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&-c\\c&0\end{bmatrix}, \quad a^2+b^2+c^2\neq 0,$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix}\cos(at)&-\sin(at)\\\sin(at)&\cos(at)\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\cos(bt)&-\sin(bt)\\\sin(bt)&\cos(bt)\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\cos(ct)&-\sin(ct)\\\sin(ct)&\cos(ct)\end{bmatrix}.$$

Los corchetes de Lie de $\mathfrak{g}_{a,b,c}$ están dados por

$$[e_1,e_2]=ae_3,\quad [e_1,e_4]=be_5,\quad [e_1,e_6]=ce_7,$$
$$[e_1,e_3]=-ae_2,\quad [e_1,e_5]=-be_4,\quad [e_1,e_7]=-ce_6.$$

Por lo tanto, la diferencial de Chevalley-Eilenberg $\mathrm{d}:\Lambda^1\mathfrak{g}^*_{a,b,c}\to\Lambda^2\mathfrak{g}^*_{a,b,c}$ está dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e^1=0,\quad \mathrm{d}e^2=ae^{13},\quad \mathrm{d}e^3=-ae^{12},\quad \mathrm{d}e^4=be^{15},\\ \mathrm{d}e^5=-be^{14},\quad \mathrm{d}e^6=ce^{17},\quad \mathrm{d}e^7=-ce^{16}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Sea $\varphi\in\Lambda^3\mathfrak{g}^*_{a,b,c}$ la 3-forma definida positiva por

$$\varphi=e^{123}+e^{145}+e^{167}+e^{246}-e^{257}-e^{347}-e^{356}. \tag{2.3.2}$$

Notar que $\{e_1,\dots,e_7\}$ es una base ortonormal para la métrica inducida g_φ.

Proposición 2.3.1. *La 3-forma φ como en (2.3.2) es cocerrada para cualquier elección de a,b,c, y es cerrada (por lo tanto libre de torsión) si y sólo si $a+b+c=0$.*

Demostración. Calculamos $\mathrm{d}\varphi$ usando (2.3.1):

$$\mathrm{d}\varphi=(a+b+c)(e^{1247}+e^{1256}+e^{1346}-e^{1357}).$$

Además,

$$\star_\varphi\varphi=-e^{1247}-e^{1256}-e^{1346}+e^{1357}+e^{2345}+e^{2367}+e^{4567}.$$

Nuevamente, usando (2.3.1) se obtiene fácilmente que $\mathrm{d}\star_\varphi\varphi=0$. □

Observación 2.3.2. Esta proposición coincide con [62, 63] donde se estudia la existencia de G_2-estructuras cerradas y cocerradas en un álgebra de Lie casi abeliana cualquiera. En efecto, ahí se establece que φ es cerrada si y sólo si $\mathrm{ad}_x\in\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ (i.e. $a+b+c=0$) y que φ es cocerrada si y sólo si $\mathrm{ad}_x\in\mathfrak{sp}(3,\mathbb{R})$ (lo cual siempre sucede en nuestro caso, pues ad_x es antisimétrica).

Buscamos a continuación explícitamente los valores de at_0,bt_0,ct_0 tales que $\phi(t_0)$ es conjugada a una matriz entera para quedarnos con aquellos en los que $at_0+bt_0+ct_0=0$. Notar que si cambiamos at_0 por $2\pi k\pm at_0$ (similarmente para b y c) obtenemos una matriz conjugada a $\phi(t_0)$ por lo que los retículos correspondientes serán isomorfos. Teniendo esto en cuenta, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.3. *Sea $G=\mathbb{R}\ltimes_\phi\mathbb{R}^6$ con $\phi(t)$ como en (2.2.1). Entonces $\phi(t_0)$ es conjugada a una matriz entera si y sólo si uno de los siguientes casos ocurre:*

Caso 1*:* $at_0,bt_0,ct_0\in\{2\pi,\pi,\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\}$.

Caso 2*:* $at_0\in\{2\pi,\pi,\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\}$, $(bt_0,ct_0)\in\{(\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5}),(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}),(\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{5}),(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})\}$.

Caso 3*:* $(at_0,bt_0,ct_0)\in\{(\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{6\pi}{7}),(\frac{2\pi}{9},\frac{4\pi}{9},\frac{8\pi}{9}),(\frac{2\pi}{14},\frac{6\pi}{14},\frac{10\pi}{14}),(\frac{2\pi}{18},\frac{10\pi}{18},\frac{14\pi}{18})\}$.

Demostración. ⇐) Para los casos (1) y (2) las matrices se pueden conjugar a una matriz entera mediante una matriz en bloques (ver [142, Lemma 5.5]). En el caso (3), los autovalores de $\phi(t_0)$ son todos distintos por lo que $\phi(t_0)$ es conjugada a la matriz compañera de su polinomio característico, el cual puede chequearse en cada caso que tiene coeficientes enteros.

⇒) Si alguno de los valores at_0,bt_0 o ct_0 es igual a π o 2π entonces los valores de los otros parámetros son los obtenidos para el caso $\mathbb{R}\ltimes\mathbb{R}^4$ en [142, Lemma 5.5], por lo que podemos asumir a continuación que $at_0,bt_0,ct_0\notin\{\pi,2\pi\}$. Luego, dado que los autovalores de $\phi(t)$ tienen módulo 1 y $\phi(t_0)$ es conjugada a una matriz entera, se sigue de un conocido teorema de Kronecker que $\phi(t_0)$ tiene orden finito. Por lo tanto, el polinomio característico $P_{\phi(t_0)}$ de $\phi(t_0)$ tiene grado 6, no tiene raíces reales y divide a $x^d - 1$ para algún $d \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, $P_{\phi(t_0)}$ es un producto de polinomios ciclotómicos de grado ≥ 2. Así, las posibilidades son: un producto de tres polinomios ciclotómicos de grado 2, el producto de dos de grados 2 y 4 respectivamente, o un polinomio ciclotómico de grado 6. De aquí se deducen las posibilidades para $\phi(t_0)$ y mirando los autovalores se deducen los valores para at_0, bt_0, ct_0 como muestra el enunciado. $\square$

Proposición 2.3.4. *Salvo isomorfismo de los retículos correspondientes, los valores de* (at_0, bt_0, ct_0) *tales que* $\phi(t_0)$ *es conjugada a una matriz entera y* $at_0 + bt_0 + ct_0 = 0$ *son los siguientes:*

$$\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, -\frac{6\pi}{7}\right), \left(\pi, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\right), \left(\pi, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right),$$
$$(2\pi, 2\pi, -4\pi), (2\pi, -\pi, -\pi), \left(2\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right), \left(2\pi, -\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}\right), \left(2\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right),$$
$$\left(\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right).$$

Demostración. El polinomio característico $P_{\phi(t_0)}$ está dado por

$$P_{\phi(t_0)} = (x^2 - 2x\cos(at_0) + 1)(x^2 - 2x\cos(bt_0) + 1)(x^2 - 2x\cos(ct_0) + 1).$$

Los valores de at_0, bt_0, ct_0 tales que $\phi(t_0)$ es conjugada a una matriz entera fueron obtenidos en el Teorema 2.3.3. Como mencionamos anteriormente, podemos cambiar los valores de at_0, bt_0, ct_0 por $\{\pm at_0\} + 2\pi\mathbb{Z}$, $\{\pm bt_0\} + 2\pi\mathbb{Z}$ y $\{\pm ct_0\} + 2\pi\mathbb{Z}$ y seguiremos obteniendo retículos isomorfos. Para conseguir aquellos valores tales que $at_0 + bt_0 + ct_0 = 0$, debemos comprobar para los valores obtenidos en el Teorema 2.3.3 que

$$0 \in (\{\pm at_0\} + 2\pi\mathbb{Z}) + (\{\pm bt_0\} + 2\pi\mathbb{Z}) + (\{\pm ct_0\} + 2\pi\mathbb{Z}).$$

Equivalentemente, debemos ver si alguno de los valores $\{\pm at_0\} + \{\pm bt_0\} + \{\pm ct_0\}$ es igual a $2\pi k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. De hecho, podemos solo chequear si $\{\pm at_0\} + \{\pm bt_0\} + ct_0 = 2\pi k$. Esto puede hacerse mediante un chequeo directo y se obtienen los valores del enunciado. $\square$

Con los valores de at_0, bt_0, ct_0 obtenidos, listamos en la siguiente tabla a cuáles matrices enteras (salvo conjugación entera) podemos conjugar $\phi(t_0)$. Para cada una de estas ternas de valores (at_0, bt_0, ct_0) obtenemos 30 retículos no isomorfos (como vimos antes) y por lo tanto, obtenemos así 30 solvariedades planas split con una G_2-estructura libre de torsión. Todos estos ejemplos poseen holonomía cíclica finita contenida en G_2, la cual se puede calcular usando la Proposición 2.1.6.

(at_0, bt_0, ct_0)	Conjugada a	$\mathrm{Hol}(\Gamma\backslash G_{a,b,c})$
$(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, -\frac{6\pi}{7})$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbb{Z}_7$
$(\pi, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6})$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \oplus (-\mathrm{I}_2)$	$\mathbb{Z}_{12}$
$(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6})$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\mathbb{Z}_{12}$
$(\pi, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4})$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus (-\mathrm{I}_2), \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\mathbb{Z}_8$

$(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4})$	$\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&0&-1&0&-1&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1\\0&-1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&-1\\1&0&1&1&1&0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0&0&1&1&0&0\\0&0&-1&0&0&-1\\0&-1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\end{bmatrix}$	$\mathbb{Z}_8$
$(2\pi,2\pi,-4\pi)$	I_6	$\{e\}$
$(2\pi,-\pi,-\pi)$	$-\mathrm{I}_4\oplus\mathrm{I}_2,\ (-\mathrm{I}_3)\oplus(1)\oplus\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix},\ -\mathrm{I}_2\oplus\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}$	$\mathbb{Z}_2$
$(2\pi,-\frac{\pi}{2},-\frac{3\pi}{2})$	$\begin{bmatrix}0&-1&0&-1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\oplus\mathrm{I}_2,\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix},$ $(1)\oplus\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0&1\\-1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{bmatrix}$	$\mathbb{Z}_4$
$(2\pi,-\frac{\pi}{3},-\frac{5\pi}{3})$	$\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}\oplus\mathrm{I}_2$	$\mathbb{Z}_6$
$(2\pi,-\frac{2\pi}{3},-\frac{4\pi}{3})$	$\begin{bmatrix}-1&1\\-1&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}-1&-1\\0&1\end{bmatrix}\oplus\mathrm{I}_2,\ (1)\oplus\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix}0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&-1\\-1&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{bmatrix}$	$\mathbb{Z}_3$
$(\pi,-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2})$	$\begin{bmatrix}0&1&0&1\\-1&0&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\oplus(-\mathrm{I}_2),\ (-1)\oplus\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&-1&0&0&0&-1\\1&0&0&0&1&0\\0&0&0&-1&-1&0\\0&0&1&0&0&-1\end{bmatrix}$	$\mathbb{Z}_4$
$(\pi,-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3})$	$\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}\oplus(-\mathrm{I}_2),\ (-\mathrm{I}_2)\oplus\begin{bmatrix}0&-1&1&0\\1&0&0&0\\1&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix},$ $(-1)\oplus\begin{bmatrix}-1&-1\\1&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ (-1)\oplus\begin{bmatrix}0&-1&0&0&-1\\1&-1&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$	$\mathbb{Z}_6$
$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},-\frac{2\pi}{3})$	$\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&-1\\1&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&-1&-1&0\end{bmatrix}$	$\mathbb{Z}_6$
$(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3},-\frac{4\pi}{3})$	$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&-1&0\\-1&0&0&0&0&-1\end{bmatrix}$	$\mathbb{Z}_3$

Tabla 2.2: Solvariedades casi abelianas planas con una G_2-estructura libre de torsión.

2.3.2. G_2-estructuras en solvariedades planas no casi abelianas

Sea $\mathfrak{g}_{a,b,c,d}=\mathbb{R}^2\ltimes_{\mathrm{ad}}\mathbb{R}^5$ un álgebra de Lie plana no casi abeliana de dimensión 7 y $G_{a,b,c,d}=\mathbb{R}^2\ltimes_{\phi}\mathbb{R}^5$ su correspondiente grupo de Lie simplemente conexo, donde $\mathbb{R}^2=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{x,y\}$,

$$\mathrm{ad}_x=(0)\oplus\begin{bmatrix}0&-a\\a&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&-b\\b&0\end{bmatrix},\quad \mathrm{ad}_y=(0)\oplus\begin{bmatrix}0&-c\\c&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&-d\\d&0\end{bmatrix},$$

y se cumple que $a^2+c^2\neq 0\neq b^2+d^2$, $ad-bc\neq 0$.

Los corchetes de Lie están dados por

$$[e_1,e_4]=ae_5,\quad [e_1,e_6]=be_7,\quad [e_2,e_4]=ce_5,\quad [e_2,e_6]=de_7,$$
$$[e_1,e_5]=-ae_4,\quad [e_1,e_7]=-be_6,\quad [e_2,e_5]=-ce_4,\quad [e_2,e_7]=-de_6.$$

Por lo tanto, la diferencial de Chevalley-Eilenberg $\mathrm{d}:\Lambda^1\mathfrak{g}_{a,b,c,d}\to\Lambda^2\mathfrak{g}_{a,b,c,d}$ está dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e^1 &= 0, \quad \mathrm{d}e^2 = 0, \quad \mathrm{d}e^3 = 0,\\ \mathrm{d}e^4 &= ae^{15}+ce^{25}, \quad \mathrm{d}e^5 = -ae^{14}-ce^{24},\\ \mathrm{d}e^6 &= be^{17}+de^{27}, \quad \mathrm{d}e^7 = -be^{16}-de^{26}. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Queremos estudiar la existencia de G_2-estructuras cerradas o cocerradas en $\mathfrak{g}_{a,b,c,d}$. Primero veremos que $\mathfrak{g}_{a,b,c,d}$ no admite ninguna G_2-estructura cerrada. El lema clave es el siguiente, probado en [59], donde se usa la siguiente notación. Dada un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ de dimensión 7, toda 3-forma $\phi\in\Lambda^3\mathfrak{g}^*$ en $\mathfrak{g}$ da origen a un mapa bilineal simétrico $b_\phi:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\Lambda^7\mathfrak{g}^*\simeq\mathbb{R}$, mediante

$$b_\phi(v,w)=\tfrac{1}{6}\iota_v\phi\wedge\iota_w\phi\wedge\phi.$$

Lema 2.3.5. [59] *Un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ orientada de dimensión 7 no admite ninguna G_2-estructura cerrada si para toda 3-forma cerrada $\phi\in\Lambda^3\mathfrak{g}^*$ una de las siguientes condiciones se satisface para el mapa $b_\phi:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\Lambda^7\mathfrak{g}^*\simeq\mathbb{R}$:*

(1) *Existe $v\in\mathfrak{g}\smallsetminus\{0\}$ tal que $b_\phi(v,v)=0$, o*

(2) *Existen $v,w\in\mathfrak{g}\smallsetminus\{0\}$ tales que $b_\phi(v,v)b_\phi(w,w)\le 0$.*

Proposición 2.3.6. *El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{a,b,c,d}$ no admite G_2-estructuras cerradas.*

Demostración. Sea $\phi=\sum_{i<j<k}a_{ijk}e^{ijk}$ una 3-forma genérica. Para que ϕ sea cerrada tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = &-(aa_{235}-ca_{135})e^{1234}+(aa_{234}-ca_{134})e^{1235}\\ &+(da_{137}-ba_{237})e^{1236}-(da_{136}-ba_{236})e^{1237}\\ &-(aa_{256}-da_{147}-ca_{156}+ba_{247})e^{1246}-(aa_{257}+da_{146}-ca_{157}-ba_{246})e^{1247}\\ &+(aa_{246}-ca_{146}+da_{157}-ba_{257})e^{1256}+(aa_{247}-ca_{147}-da_{156}+ba_{256})e^{1257}\\ &-(aa_{356}+ba_{347})e^{1346}-(aa_{357}-ba_{346})e^{1347}+(aa_{346}-ba_{357})e^{1356}+(aa_{347}+ba_{356})e^{1357}\\ &-ba_{457}e^{1456}+ba_{456}e^{1457}-aa_{567}e^{1467}+aa_{467}e^{1567}-(da_{347}+ca_{356})e^{2346}\\ &+(da_{346}-ca_{357})e^{2347}+(ca_{346}-da_{357})e^{2356}+(ca_{347}+da_{356})e^{2357}\\ &-da_{457}e^{2456}+da_{456}e^{2457}-ca_{567}e^{2467}+ca_{467}e^{2567}. \end{aligned}$$

Como $a^2+c^2\neq 0$ y $b^2+d^2\neq 0$, resulta $a_{467}=a_{567}=0$ y $a_{456}=a_{457}=0$ respectivamente. Mirando ahora los últimos 8 pares de términos deducimos que

$$\begin{cases} aa_{347}=-ba_{356}\\ aa_{356}=-ba_{347}\\ aa_{357}=ba_{346}\\ aa_{346}=ba_{357}\end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} da_{347}=-ca_{356}\\ da_{346}=ca_{357}\\ ca_{346}=da_{357}\\ ca_{347}=-da_{356}\end{cases}.$$

De aquí tenemos que

$$\begin{aligned} a^2a_{346}&=aba_{357}=b^2a_{346},\\ a^2a_{347}&=-aba_{356}=b^2a_{347},\\ c^2a_{346}&=cda_{357}=d^2a_{346},\\ c^2a_{347}&=-cda_{356}=d^2a_{347}. \end{aligned}$$

Si $a_{346} \neq 0$ o $a_{347} \neq 0$ entonces $a^2 = b^2$ y $c^2 = d^2$. Así, $b = \pm a$ y $c = \pm d$, ninguno de ellos igual a 0. La condición $ad - bc \neq 0$ descarta los casos $b = a, c = d$ y $b = -a, c = -d$. En los otros dos casos, mirando las ecuaciones previas resulta $a = b = c = d = 0$, lo que contradice $ad - bc \neq 0$. Por lo tanto, $a_{346} = a_{347} = a_{356} = a_{357} = 0$.

Más aún, de los términos que tienen 4 sumandos vemos que

$$a_{157} = \frac{(b^2 - a^2)a_{246} + (ac - bd)a_{146}}{ad - bc}, \quad a_{257} = \frac{(-ac + bd)a_{246} + (c^2 - d^2)a_{146}}{ad - bc},$$

$$a_{156} = \frac{(-ac + bd)a_{147} + (a^2 - b^2)a_{247}}{ad - bc}, \quad a_{256} = \frac{(ac - bd)a_{247} + (d^2 - c^2)a_{147}}{ad - bc}.$$

Reemplazando los valores que acabamos de encontrar en la expresión de φ calculamos ahora

$$\iota_{e_4}\phi \wedge \iota_{e_4}\phi \wedge \phi = -6(a_{146}a_{345}a_{247} - a_{147}a_{345}a_{246})e^{1\ldots7},$$

$$\iota_{e_5}\phi \wedge \iota_{e_5}\phi \wedge \phi = 6(a_{146}a_{247}a_{345} - a_{147}a_{246}a_{345})e^{1\ldots7}.$$

Usando (ii) del Lema 2.3.5 para $v = e_4$ y $w = e_5$, concluimos que $\mathfrak{g}_{a,b,c,d}$ no admite ninguna G_2-estructura cerrada, para cualquier elección de valores a, b, c, d. □

Aunque $\mathfrak{g}_{a,b,c,d}$ no admite G_2-estructuras cerradas, sí admite G_2-estructuras cocerradas para algunos valores de a, b, c, d.

Proposición 2.3.7. *Sea $\varphi \in \Lambda^3\mathfrak{g}^*_{a,b,c,d}$ dada como en (2.3.2). Entonces φ es cocerrada si y sólo si $c = -d$.*

Demostración. Usando (2.3.3) calculamos

$$d\star_\varphi\varphi = (d + c)e^{12347} + (d + c)e^{12356}.$$

Luego $d\star_\varphi\varphi = 0$ si y sólo si $c = -d$. □

Dado que las 45 solvariedades planas split no casi abelianas que aparecen en la Tabla 2.1 se obtienen a partir de matrices que satisfacen $d = -c$, todas estas solvariedades admiten una G_2-estructura cocerrada.

2.3.3. Ejemplos con divergencia nula

Finalmente, veremos que las 45 solvariedades planas no casi abelianas split que obtuvimos admiten una G_2-estructura con divergencia nula. Primero damos fórmulas para las formas de torsión $\tau_1, \ldots, \tau_4$ para el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{a,b,c,d}$.

Proposición 2.3.8. *Sea $\varphi \in \Lambda^3\mathfrak{g}^*_{a,b,c,d}$ definida por $\varphi = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356}$. Entonces, las formas de torsión de φ están dadas por*

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= -\frac{4}{7}(b + a), \quad \tau_1 = -\frac{1}{6}(d + c)e^3, \quad \tau_2 = (d + c)(e^{47} + e^{56}),\\
\tau_3 &= \frac{1}{7}(b + a)(3e^{257} - 3e^{246} + 3e^{347} + 3e^{356} + 4e^{123} + 4e^{145} + 4e^{167})\\
&\quad + \frac{1}{2}(d + c)(e^{146} - e^{157} + e^{245} + e^{267}).
\end{aligned}$$

Demostración. Calculamos $\tau_0, \dots, \tau_3$ usando las ecuaciones (2.1.2).

Dado que $\tau_0 = \frac{1}{7} \star_\varphi (\mathrm{d}\varphi \wedge \varphi)$, obtenemos que

$$\mathrm{d}\varphi = (b+a)(e^{1247} + e^{1256} + e^{1346} - e^{1357}) + (d+c)(e^{2346} - e^{2357}), \quad \mathrm{d}\varphi \wedge \varphi = -4(b+a)e^{1\dots 7}.$$

Por lo tanto,

$$\tau_0 = -\frac{4}{7}(b+a).$$

Ahora, para $\tau_1 = -\frac{1}{12} \star_\varphi (\star_\varphi \mathrm{d}\varphi \wedge \varphi)$, calculamos

$$\begin{aligned} \star_\varphi \mathrm{d}\varphi &= (b+a)(e^{257} - e^{246} + e^{347} + e^{356}) + (d+c)(e^{146} - e^{157}), \\ \star_\varphi \mathrm{d}\varphi \wedge \varphi &= 2(d+c)e^{124567}. \end{aligned}$$

Así,

$$\tau_1 = -\frac{1}{6}(d+c)e^3.$$

Sabemos que $\tau_2 = \star_\varphi \mathrm{d}\star_\varphi\varphi - 4\star_\varphi(\tau_1 \wedge \mathrm{d}\star_\varphi\varphi)$. Se sigue entonces de la Proposición 2.3.7 y la expresión de τ_1 que

$$\tau_1 \wedge \mathrm{d}\star_\varphi\varphi = 0.$$

De esta manera,

$$\tau_2 = \star_\varphi \mathrm{d}\star_\varphi\varphi = (d+c)(e^{47} + e^{56}).$$

Finalmente, para $\tau_3 = \star_\varphi \mathrm{d}\varphi - \tau_0\varphi - 3\star_\varphi(\tau_1 \wedge \varphi)$, calculamos

$$\tau_1 \wedge \varphi = \frac{1}{6}(d+c)(e^{1345} + e^{1367} + e^{2346} - e^{2357}), \quad \star_\varphi(\tau_1 \wedge \varphi) = \frac{1}{6}(d+c)(e^{146} - e^{157} - e^{245} - e^{267}).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \tau_3 &= (b+a)(e^{257} - e^{246} + e^{347} + e^{356}) + (d+c)(e^{146} - e^{157}) \\ &\quad + \frac{4}{7}(b+a)(e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(d+c)(e^{146} - e^{157} - e^{245} - e^{267}) \\ &= \frac{1}{7}(b+a)(3e^{257} - 3e^{246} + 3e^{347} + 3e^{356} + 4e^{123} + 4e^{145} + 4e^{167}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(d+c)(e^{146} - e^{157} + e^{245} + e^{267}). \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de la proposición. □

A continuación, recordamos la *divergencia* de T_φ. Se define como el campo vectorial $\operatorname{div} T_\varphi$ dado por

$$g_\varphi(\operatorname{div} T_\varphi, E_j) = \sum_{i=1}^{7} (\nabla_{E_i} T_\varphi)(E_i, E_j), \tag{2.3.4}$$

donde $\{E_i\}_{i=1}^7$ es un marco ortonormal local respecto de la métrica inducida g_φ.

En el caso del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{a,b,c,d}$, dado que la base $\{e_1, \dots, e_7\}$ de $\mathfrak{g}_{a,b,c,d}$ es una base ortonormal para $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$, la ecuación (2.3.4) toma la siguiente forma:

$$\langle \operatorname{div}(T_\varphi), e_j \rangle_\varphi = -\sum_{i=1}^{7} T_\varphi(\nabla_{e_i} e_i, e_j) - \sum_{i=1}^{7} T_\varphi(e_i, \nabla_{e_i} e_j). \tag{2.3.5}$$

Teorema 2.3.9. *Sea* $\varphi \in \Lambda^3 \mathfrak{g}^*_{a,b,c,d}$ *definida por* $\varphi = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356}$. *Entonces, para cualesquiera* (a,b,c,d) *tenemos que* $\operatorname{div} T_\varphi = 0$, *i.e.,* φ *tiene divergencia nula.*

Demostración. Calculamos $\nabla_{e_i} e_i$ y $\nabla_{e_i} e_j$ usando la fórmula de Koszul.

$$2\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k\rangle_\varphi = \langle [e_i,e_j], e_k\rangle_\varphi - \langle [e_j,e_k], e_i\rangle_\varphi + \langle [e_k,e_i], e_j\rangle_\varphi \quad \forall i,j,k.$$

Obtenemos $\nabla_{e_i} e_i = 0$ para todo $1 \le i \le 7$ y

$$\nabla_{e_1} e_4 = a e_5,\ \nabla_{e_1} e_5 = -a e_4,\ \nabla_{e_1} e_6 = b e_7,\ \nabla_{e_1} e_7 = -b e_7,$$
$$\nabla_{e_2} e_4 = c e_5,\ \nabla_{e_2} e_5 = -c e_4,\ \nabla_{e_2} e_6 = d e_7,\ \nabla_{e_2} e_7 = -d e_6.$$

Reemplazando $\nabla_{e_i} e_i = 0$ para todo $1 \le i \le 7$ en la ecuación (2.3.5) llegamos a

$$\langle \operatorname{div}(T_\varphi), e_j\rangle_\varphi = -\sum_{i=1}^{7} T_\varphi(e_i, \nabla_{e_i} e_j).$$

Para $1 \le j \le 3$, es claro que $\langle \operatorname{div}(T_\varphi), e_j\rangle_\varphi = 0$.

Calculemos ahora las otras componentes.

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{div}(T_\varphi), e_4\rangle_\varphi &= -T_\varphi(e_1, \nabla_{e_1} e_4) - T_\varphi(e_2, \nabla_{e_2} e_4) = -aT_\varphi(e_1,e_5) - cT_\varphi(e_2,e_5),\\
\langle \operatorname{div}(T_\varphi), e_5\rangle_\varphi &= -T_\varphi(e_1, \nabla_{e_1} e_5) - T_\varphi(e_2, \nabla_{e_2} e_5) = aT_\varphi(e_1,e_4) + cT_\varphi(e_2,e_4),\\
\langle \operatorname{div}(T_\varphi), e_6\rangle_\varphi &= -T_\varphi(e_1, \nabla_{e_1} e_6) - T_\varphi(e_2, \nabla_{e_2} e_6) = -bT_\varphi(e_1,e_7) - dT_\varphi(e_2,e_7),\\
\langle \operatorname{div}(T_\varphi), e_7\rangle_\varphi &= -T_\varphi(e_1, \nabla_{e_1} e_7) - T_\varphi(e_2, \nabla_{e_2} e_7) = bT_\varphi(e_1,e_6) + dT_\varphi(e_2,e_6).
\end{aligned}$$

Recordemos que

$$T_\varphi = \frac{\tau_0}{4}\langle\cdot,\cdot\rangle_\varphi - \star_\varphi(\tau_1 \wedge \star_\varphi \varphi) - \frac{1}{2}\tau_2 - \frac{1}{4}\jmath(\tau_3),$$

donde $\jmath(\tau_3)(e_i,e_j) = \star_\varphi(\iota_{e_i}\varphi \wedge \iota_{e_j}\varphi \wedge \tau_3)$. Puesto que $\{e_i\}_{i=1}^7$ es una base ortonormal, el primer término se anula automáticamente. Observamos además de la fórmula para τ_2 de la Proposición 2.3.8 que $\tau_2(e_1,e_j) = \tau_2(e_2,e_j) = 0$ para $4 \le j \le 7$.

Calculamos ahora $\star_\varphi(\tau_1 \wedge \star_\varphi \varphi)$ y $\jmath(\tau_3)$ (usando las fórmulas de la Proposición 2.3.8):

$$\begin{aligned}
\tau_1 \wedge \star_\varphi \varphi &= -\frac{1}{6}(d+c)e^3 \wedge (-e^{1247} - e^{1256} - e^{1346} + e^{1357} + e^{2345} + e^{2367} + e^{4567})\\
&= \frac{1}{6}(d+c)(e^{12347} + e^{12356} - e^{34567}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\star_\varphi(\tau_1 \wedge \star_\varphi \varphi) = \frac{1}{6}(d+c)(-e^{12} + e^{47} + e^{56}).$$

Notar que $\star_\varphi(\tau_1 \wedge \star_\varphi \varphi)(e_1,e_j) = \star_\varphi(\tau_1 \wedge \star_\varphi \varphi)(e_2,e_j) = 0$ para $4 \le j \le 7$.

Finalmente, los productos interiores $\iota_{e_j}\varphi$, $1 \le j \le 7$ están dados por

$$\begin{aligned}
&\iota_{e_1}\varphi = e^{23} + e^{45} + e^{67}, && \iota_{e_2}\varphi = -e^{13} + e^{46} - e^{57}, && \iota_{e_3}\varphi = e^{12} - e^{47} - e^{56},\\
&\iota_{e_4}\varphi = -e^{15} - e^{26} + e^{37}, && \iota_{e_5}\varphi = e^{14} + e^{27} + e^{36}, && \iota_{e_6}\varphi = -e^{17} + e^{24} - e^{35},\\
&\iota_{e_7}\varphi = e^{16} - e^{25} - e^{34}.
\end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned}
\iota_{e_1}\varphi \wedge \tau_3 &= \frac{8}{7}(b+a)(e^{12345} + e^{12367} + e^{14567}) + \frac{1}{2}(d+c)(e^{12346} - e^{12357} + 2e^{24567}),\\
\iota_{e_2}\varphi \wedge \tau_3 &= \frac{1}{2}(d+c)(e^{12345} + e^{12367} + 2e^{14567}) + \frac{1}{7}(b+a)(e^{12346} - e^{12357} - 6e^{24567}).
\end{aligned}$$

De esta ecuación deducimos que

$$\jmath(\tau_3)(e_1, e_j) = \jmath(\tau_3)(e_2, e_j) = 0, \quad \text{para } 4 \leq j \leq 7.$$

En conclusión, $T_\varphi(e_1, e_j) = T_\varphi(e_2, e_j) = 0$ para $4 \leq j \leq 7$. En consecuencia, $\operatorname{div} T_\varphi = 0$. □

Observación 2.3.10. Las 45 solvariedades planas de la Tabla 2.1 se pueden obtener eligiendo valores de (a, b, c, d) tales que $a \neq -b$ y $c \neq -d$. En efecto, en lugar de tomar A, B podemos tomar A y AB, lo que corresponde a los valores $(a, b), ((a + c), (b + d))$. Se puede ver, para los valores de la Tabla 2.1, que $a \neq -b$ y $a + c \neq -(b + d)$. Esta elección da origen a un retículo isomorfo al original pues $\langle A, B\rangle = \langle A, AB\rangle$ (Lema 2.1.10). De esta manera, la G_2-estructura invariante en las correspondientes 45 solvariedades planas tiene divergencia nula y es una G_2-estructura genérica respecto de las clases de Gray-Fernández, dado que ninguna de las componentes de la torsión se anula.

Capítulo 3

Armonicidad de estructuras casi complejas ortogonales en solvariedades casi abelianas

3.1. Estructuras casi complejas armónicas en álgebras de Lie casi abelianas

Recordemos que, por definición, un álgebra de Lie casi abeliana posee un ideal abeliano de codimensión 1 y por lo tanto puede ser escrita como un producto semidirecto $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_0 \ltimes \mathfrak{u}$, donde $\mathfrak{u}$ es un ideal abeliano de $\mathfrak{g}$. Eligiendo una base de $\mathfrak{u}$, podemos identificar $\mathfrak{u}$ con el álgebra de Lie abeliana $\mathbb{R}^{d-1}$ y podemos escribir $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_0 \ltimes_L \mathbb{R}^{d-1}$ para alguna $L \in \mathfrak{gl}(d-1,\mathbb{R})$.

En relación a las clases de isomorfismo de álgebras de Lie casi abelianas, existe el siguiente resultado ([63, Proposition 1]):

Lema 3.1.1. *Dos álgebras de Lie casi abelianas $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R} \ltimes_{L_1} \mathbb{R}^{d-1}$ y $\mathfrak{g}_2 = \mathbb{R} \ltimes_{L_2} \mathbb{R}^{d-1}$ son isomorfas si y sólo si existe $c \neq 0$ tales que cL_1 y L_2 son conjugadas en $\mathfrak{gl}(d-1,\mathbb{R})$.*

Sea G un grupo de Lie casi abeliano de dimensión $2n$ equipado con una estructura casi hermitiana invariante a izquierda (J,g), determinada por un endomorfismo $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ y un producto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle$ en $\mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g}$ denota el álgebra de Lie de G.

Si $\mathfrak{u}$ denota el[1] ideal de codimensión uno en $\mathfrak{g}$, elegimos $e_0 \in \mathfrak{g}$ unitario y ortogonal a $\mathfrak{u}$, con lo que podemos descomponer a $\mathfrak{g}$ en suma directa ortogonal como

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_0 \ltimes \mathfrak{u} = \mathbb{R}e_0 \ltimes_L \mathbb{R}^{2n-1},$$

para alguna matriz $L \in \mathfrak{gl}(2n-1,\mathbb{R})$. Denotamos por $\mathfrak{a}$ al subespacio J-invariante maximal de $\mathfrak{u}$, esto es, $\mathfrak{a} = \mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$. Es claro que $\dim \mathfrak{a} = 2n-2$. Sea $\{e_0, e_1, \dots, e_{2n-1}\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{g}$ compatible con J, i.e. $Je_{2i} = e_{2i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$. Notar que $\mathfrak{u} = \operatorname{span}\{e_1,\dots,e_{2n-1}\}$ y $\mathfrak{a} = \operatorname{span}\{e_2,\dots,e_{2n-1}\}$. Denotaremos $J' := J|_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$.

Descomponemos el endomorfismo $L : \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}$ de acuerdo con la descomposición ortogonal $\mathfrak{u} = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathfrak{a}$ de la siguiente manera:

$$L = \left[\begin{array}{c|c} \mu & w_0^t \\ \hline v_0 & D \end{array}\right], \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}, v_0, w_0 \in \mathfrak{a} \text{ y } D \in \mathfrak{gl}(2n-2,\mathbb{R}). \tag{3.1.1}$$

[1] Es único salvo cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}^s$, ver por ejemplo [8, Remark 2.2].

Observación 3.1.2. Si $w_0 = 0$ y $0 \neq v_0 \in \mathrm{Im}(D - \mu \mathrm{I})$ entonces podemos aplicar un cambio holomorfo de base (i.e. que preserva la matriz de J) tal que $v_0 = 0$. En efecto, si $v_0 = Dx - \mu x$ para algún $x \in \mathfrak{a}$, entonces al llamar $e_0' = e_0 + Jx$ y $e_1' = Je_0 = e_1 - x$ tenemos que

$$[e_0', e_1'] = \mu e_1 + v_0 - Dx = \mu e_1', \qquad \mathrm{ad}_{e_0'}|_{\mathfrak{a}} = D.$$

Notar que este cambio de base no preserva el producto interno, pues la nueva base $\{e_0', e_1', e_2, \dots, e_{2n-1}\}$ no es ortonormal.

En lo que sigue necesitaremos la descomposición de L en sus componentes simétrica y antisimétrica $L = S + A$, dadas por

$$S = \left[\begin{array}{c|c} \mu & \gamma^t \\ \hline \gamma & D_s \end{array}\right], \quad A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\rho^t \\ \hline \rho & D_a \end{array}\right], \tag{3.1.2}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{2}(v_0 + w_0), \quad \rho = \frac{1}{2}(v_0 - w_0),$$

y D_s, D_a son las componentes simétrica y antisimétrica de D, respectivamente. Como $L = \mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{u}}$, podemos establecer que $Le_0 = 0$, y esto implica $Se_0 = Ae_0 = 0$.

Usando el Lema 1.1.29, caracterizamos en el siguiente resultado las estructuras casi complejas ortogonales armónicas en un álgebra de Lie casi abeliana métrica.

Teorema 3.1.3. *Sea $(J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ una estructura casi hermitiana en un álgebra de Lie casi abeliana $\mathfrak{g}$. Entonces J es armónica con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$, es decir $[J, \nabla^*\nabla J] = 0$, si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen:*

(i) $\mu\gamma + D_s\gamma - (\mathrm{Tr}\, S)\rho - J'D_aJ'\rho = 0$,

(ii) $D_aJ'D_aJ' - J'D_aJ'D_a + (\mathrm{Tr}\, S)[D_a, J']J' = 0$,

usando la notación de (3.1.2).

Demostración. Utilizaremos la siguiente expresión de la conexión de Levi-Civita en $\mathfrak{g}$ asociada a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ determinada en [113]:

$$\nabla_{e_0}e_0 = 0, \quad \nabla_{e_0}u = Au, \quad \nabla_u e_0 = -Su, \quad \nabla_u v = \langle Su, v\rangle e_0, \tag{3.1.3}$$

donde $u, v \in \mathfrak{u}$. En primer lugar, el tercer término en el lado derecho de (1.1.5) es sencillo de calcular:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} J(\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}J)(x) = (\mathrm{Tr}\, S)J(\nabla_{e_0}J)(x) = (\mathrm{Tr}\, S)J[A, J]x, \qquad x \in \mathfrak{g}. \tag{3.1.4}$$

En lo que sigue, para abreviar denotamos $H := \frac{1}{2}[J, \nabla^*\nabla J]$. Si $x \in \mathfrak{a}$, usando (3.1.3) y (3.1.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
H(x) &= \sum_{i=0}^{2n-1} (\nabla_{e_i}J\nabla_{e_i}JX - J\nabla_{e_i}J\nabla_{e_i}X) - (\mathrm{Tr}\, S)J[A, J]x \\
&= \nabla_{e_0}JAJx - J\nabla_{e_0}JAx + \sum_{i=1}^{2n-1} (\nabla_{e_i}(\langle Se_i, Jx\rangle e_1) - J\nabla_{e_i}(\langle Se_i, x\rangle e_1)) - (\mathrm{Tr}\, S)J[A, J]x \\
&= (AJAJ - JAJA)x + \sum_{i=1}^{2n-1} (\langle Se_i, e_1\rangle\langle Se_i, Jx\rangle e_0 - \langle Se_i, e_1\rangle\langle Se_i, x\rangle e_1) - (\mathrm{Tr}\, S)J[A, J]x \\
&= (AJAJ - JAJA)x + \langle Se_1, SJx\rangle e_0 - \langle Se_1, Sx\rangle e_1 - (\mathrm{Tr}\, S)J[A, J]x.
\end{aligned}$$

A continuación, calculamos

$$\begin{aligned}\langle Hx, e_1\rangle &= \langle x, JAJAe_1\rangle - \langle S^2 e_1, x\rangle + (\operatorname{Tr} S)\langle x, [A, J]e_0\rangle \\ &= \langle x, JAJ\rho - S(\mu e_1 + \gamma) + (\operatorname{Tr} S)\rho\rangle \\ &= \langle x, JAJ\rho - \mu\gamma - S\gamma + (\operatorname{Tr} S)\rho\rangle \\ &= -\langle x, \mu\gamma + D_s\gamma - (\operatorname{Tr} S)\rho - J'D_aJ'\rho\rangle.\end{aligned}$$

Como H anticonmuta con J y $\mathfrak{a}$ es J-invariante, se obtiene que

$$\langle Hx, e_0\rangle = -\langle HJx, e_1\rangle = \langle J'x, \mu\gamma + D_s\gamma - (\operatorname{Tr} S)\rho - J'D_aJ'\rho\rangle.$$

Ahora, para todo $y \in \mathfrak{a}$,

$$\begin{aligned}\langle Hx, y\rangle &= \langle (AJAJ - JAJA - (\operatorname{Tr} S)J[A, J])x, y\rangle \\ &= \langle (D_aJ'D_aJ' - J'D_aJ'D_a + (\operatorname{Tr} S)[D_a, J']J')x, y\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Hx = 0$ para todo $x \in \mathfrak{a}$ si y sólo si

$$\mu\gamma + D_s\gamma - (\operatorname{Tr} S)\rho - J'D_aJ'\rho = 0, \quad D_aJ'D_aJ' - J'D_aJ'D_a + (\operatorname{Tr} S)[D_a, J']J' = 0,$$

las cuales son las condiciones en el enunciado.

Puesto que $\nabla^*\nabla J$ es antisimétrico (dado que $\nabla_V J$ es antisimétrico para cualquier V), tenemos que H también es antisimétrico. Esto implica que $\langle He_0, e_0\rangle = 0$ y, como además H anticonmuta con J, también resulta que $\langle He_0, e_1\rangle = 0$. De aquí y la igualdad $\langle He_0, x\rangle = -\langle e_0, Hx\rangle$ deducimos que $He_0 = 0$ si y sólo si la condición (i) se satisface. De manera similar con He_1. Esto completa la prueba. □

Como una consecuencia, obtenemos:

Corolario 3.1.4. *Con las mismas hipótesis que en el Teorema 3.1.3, si $\mathfrak{g}$ es unimodular entonces J es armónica si y sólo si*

(i) $\mu\gamma + D_s\gamma - J'D_aJ'\rho = 0$,

(ii) $D_aJ'D_aJ' = J'D_aJ'D_a$.

Demostración. Basta notar que $\operatorname{Tr} S = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_{e_0}) = 0$. □

En el siguiente corolario consideramos el caso en que la estructura casi compleja ortogonal es integrable. Fue mostrado en [100] (ver también [8]) que J es integrable si y sólo si $w_0 = 0$ y $[D, J'] = 0$, lo cual es equivalente a $[D_s, J'] = [D_a, J'] = 0$.

Corolario 3.1.5. *Con las mismas hipótesis que en el Teorema 3.1.3, si J es integrable entonces J es armónica si y sólo si*

$$Dv_0 = (\operatorname{Tr} D)v_0.$$

Demostración. Supongamos que J es integrable. Entonces, la condición $[D_a, J'] = 0$ implica automáticamente la condición (ii) en el Teorema 3.1.3. Como $w_0 = 0$, tenemos que $\gamma = \rho = \frac{1}{2}v_0$ y así la primera condición se convierte en

$$\mu v_0 + D_s v_0 - (\operatorname{Tr} S)v_0 + D_a v_0 = 0,$$

la cual es equivalente a $Dv_0 = (\operatorname{Tr} S - \mu)v_0 = (\operatorname{Tr} D)v_0$. □

Se sigue del Corolario 3.1.5 que si $\mathfrak{g}$ es unimodular (i.e. $\mu + \operatorname{Tr} D = 0$) y J es integrable, entonces J es armónica si y sólo si

$$Dv_0 = -\mu v_0. \tag{3.1.5}$$

Es fácil verificar que, en este caso, (3.1.5) es equivalente a $L^2 e_1 = \mu^2 e_1$, dado que $Lv_0 = Dv_0$.

3.2. Clases de Gray-Hervella en álgebras de Lie casi abelianas

A continuación, recordamos la clasificación de las estructuras casi hermitianas debida a Gray-Hervella [80]. Sea V un espacio vectorial real de dimensión $2n$ equipado con un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y una estructura casi compleja ortogonal J. El espacio $(V^*)^{\otimes 3}$ es naturalmente isomorfo al espacio de todos los tensores covariantes trilineales en V. Sea W el subespacio de $(V^*)^{\otimes 3}$ definido por

$$W = \{\alpha \in (V^*)^{\otimes 3} \mid \alpha(x,y,z) = -\alpha(x,z,y) = -\alpha(x,Jy,Jz), \quad \text{para todo } x,y,z \in V\}.$$

Existe un producto interno natural en W dado por $\langle\alpha,\beta\rangle = \sum_{i,j,k=1}^{2n} \alpha(e_i,e_j,e_k)\beta(e_i,e_j,e_k)$, donde $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$ es una base ortonormal de V. Dado $\alpha \in W$ se define $\bar{\alpha} \in V^*$ por $\bar{\alpha}(z) = \sum_{i=1}^{2n} \alpha(e_i,e_i,z)$. Además, se definen cuatro subespacios de W de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \{\alpha \in W \mid \alpha(x,x,z) = 0 \text{ para todo } x,z \in V\},\\
W_2 &= \{\alpha \in W \mid \alpha(x,y,z) + \alpha(z,x,y) + \alpha(y,z,x) = 0 \text{ para todo } x,y,z \in V\},\\
W_3 &= \{\alpha \in W \mid \alpha(x,y,z) - \alpha(Jx,Jy,z) = \bar{\alpha}(z) = 0 \text{ para todo } x,y,z \in V\},\\
W_4 &= \{\alpha \in W \mid \alpha(x,y,z) = -\frac{1}{2(n-1)}(\langle x,y\rangle\bar{\alpha}(z) - \langle x,z\rangle\bar{\alpha}(y)\\
&\qquad - \langle x,Jy\rangle\bar{\alpha}(Jz) + \langle x,Jz\rangle\bar{\alpha}(Jy)) \text{ para todo } x,y,z \in V\}.
\end{aligned}$$

La representación estándar de $\mathrm{U}(n)$ en V induce una representación de $\mathrm{U}(n)$ en W, de modo que su descomposición en irreducibles es la descomposición ortogonal $W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$. Tomando suma directa entre los cuatro subespacios se forman en total 16 subespacios (incluyendo a $\{0\}$ y W).

Sea ahora (M,J,g) una variedad casi hermitiana de dimensión $2n$ con conexión de Levi-Civita asociada ∇ y forma de Kähler ω dada por $\omega(X,Y) = g(JX,Y)$. Entonces, $\mathrm{U}(n)$ actúa en cada espacio tangente T_pM, con $p \in M$. Si $W_p = \{\alpha \in (T_p^*M)^{\otimes 3} \mid \alpha(x,y,z) = -\alpha(x,z,y) = -\alpha(x,Jy,Jz)\}$, entonces la representación inducida de $\mathrm{U}(n)$ en W_p se descompone en las cuatro componentes $W_{p,1}$, $W_{p,2}$, $W_{p,3}$ y $W_{p,4}$ como se describe en el párrafo anterior. Si S es uno de los 16 subespacios invariantes de W, se denota por S_p el correspondiente subespacio de W_p, y se denota por $\mathcal{S}$ la clase de todas las variedades casi hermitianas (M,J,g) tales que $(\nabla\omega)_p \in S_p$ para todo $p \in M$. Se verifica (ver [80]) que $(\nabla\omega)_p \in W_p$ para todo $p \in M$, lo cual hace que esta definición tenga sentido. La clase correspondiente a W_i se denota por $\mathcal{W}_i$, la que corresponde a $W_i \oplus W_j$ por $\mathcal{W}_i \oplus \mathcal{W}_j$, etc.

Cada una de estas 16 clases resulta definida por la anulación de ciertos tensores. Algunos de estos tensores son bien conocidos, por ejemplo $\mathrm{d}\omega$, $\delta\omega$ (donde δ es la codiferencial), el tensor de Nijenhuis N_J definido en (1.1.1), y la forma de Lee θ, la cual es la 1-forma definida por

$$\theta(X) = -\frac{1}{n-1}\delta\omega(JX), \quad X \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.2.1}$$

Otros tensores que caracterizan estas clases son $T^{\pm}$ y U, los cuales están definidos por

$$\begin{aligned}
T^{\pm}(X,Y,Z) &= (\nabla_X\omega)(Y,Z) \pm (\nabla_{JX}\omega)(JY,Z),\\
U(X,Y,Z) &= g(X,Y)\delta\omega(Z) - g(X,Z)\delta\omega(Y) - g(X,JY)\delta\omega(JZ) + g(X,JZ)\delta\omega(JY).
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

En dimensión 4 resulta $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_3 = \{0\}$ de modo que solo quedan 4 clases, las cuales se exhiben en la Tabla 3.1. Por otro lado, exhibimos las 16 clases de estructuras casi hermitianas en variedades de dimensión ≥ 6 en la Tabla 3.2. Allí, usamos la notación $\sum_{\mathrm{cyc}}$ para denotar la suma cíclica sobre las variables que aparecen.

Clase	Condiciones que la definen
$\{0\}$	$\nabla\omega = 0$
$\mathcal{W}_2$	$\mathrm{d}\omega = 0$
$\mathcal{W}_4$	$N_J = 0$
$\mathcal{W}$	Sin condiciones

Tabla 3.1: Variedades casi hermitianas de dimensión 4.

Clase	Condiciones que la definen
$\{0\}$	$\nabla\omega = 0$
$\mathcal{W}_1$	$3\nabla\omega = \mathrm{d}\omega$
$\mathcal{W}_2$	$\mathrm{d}\omega = 0$
$\mathcal{W}_3$	$\delta\omega = 0,\ N_J = 0$
$\mathcal{W}_4$	$(\nabla_X\omega)(Y,Z) = -\frac{1}{2(n-1)}U(X,Y,Z)$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$	$T^+ = 0$
$\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$N_J = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$	$T^-(X,X,Y) = 0,\ \delta\omega = 0$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$\mathrm{d}\omega = \theta \wedge \omega$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$	$(\nabla_X\omega)(X,Y) = -\frac{1}{2(n-1)}U(X,X,Y)$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$	$\sum_{cyc} T^-(X,Y,Z) = 0,\ \delta\omega = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$	$\delta\omega = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$T^+(X,Y,Z) = -\frac{1}{n-1}U(X,Y,Z)$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$\langle N_J(X,Y), X\rangle = 0$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$\sum_{cyc} T^-(X,Y,Z) = 0$
$\mathcal{W}$	Sin condiciones

Tabla 3.2: Variedades casi hermitianas de dimensión ≥ 6.

Observación 3.2.1.

(1) Las variedades que pertenecen a algunas clases tienen nombres especiales, por ejemplo: las variedades en la clase $\{0\}$ son las variedades Kähler; en $\mathcal{W}_1$, nearly Kähler; en $\mathcal{W}_2$, casi Kähler; en $\mathcal{W}_3$, balanceadas; en $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$, cuasi-Kähler y en $\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$, hermitianas. En [80], las clases $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ y $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ se denotan $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$, respectivamente.

(2) Las variedades localmente conforme Kähler (LCK), que son aquellas variedades hermitianas que satisfacen $\mathrm{d}\omega = \theta \wedge \omega$ y $\mathrm{d}\theta = 0$, pertenecen a la clase $\mathcal{W}_4$. Más aún, cuando $\dim M \geq 6$ la clase $\mathcal{W}_4$ coincide precisamente con la clase de variedades LCK. En efecto, si $(M, J, g) \in \mathcal{W}_4$, de la identidad $\mathrm{d}\omega(X,Y,Z) = (\nabla_X\omega)(Y,Z) + (\nabla_Y\omega)(Z,X) + (\nabla_Z\omega)(X,Y)$ para todo X, Y, Z, se deduce que

$$\mathrm{d}\omega(X,Y,Z) = -\frac{1}{2(n-1)}[U(X,Y,Z) + U(Y,Z,X) + U(Z,X,Y)].$$

Ahora, la suma cíclica $U(X,Y,Z)+U(Y,Z,X)+U(Z,X,Y)$ es igual a

$$\begin{aligned}&g(X,Y)\delta\omega(Z)-g(X,Z)\delta\omega(Y)-g(X,JY)\delta\omega(JZ)+g(X,JZ)\delta\omega(JY)\\&+g(Y,Z)\delta\omega(X)-g(Y,X)\delta\omega(Z)-g(Y,JZ)\delta\omega(JX)+g(Y,JX)\delta\omega(JZ)\\&+g(Z,X)\delta\omega(Y)-g(Z,Y)\delta\omega(X)-g(Z,JX)\delta\omega(JY)+g(Z,JY)\delta\omega(JX),\end{aligned}$$

y esto es igual a

$$2[\omega(X,Y)\delta\omega(JZ)+\omega(Y,Z)\delta\omega(JX)+\omega(Z,X)\delta\omega(JY)].$$

Por lo tanto, usando (3.2.1) obtenemos que

$$\mathrm{d}\omega=\theta\wedge\omega.$$

Por otra parte, $\mathrm{d}\omega=\theta\wedge\omega$ en dimensión ≥ 6 implica que $\mathrm{d}\theta=0$, por lo que (J,g) es LCK. Otra consecuencia de esta última implicación (en dim ≥ 6) es que la 2-forma fundamental ω de una variedad en la clase $\mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_4$ es localmente conforme simpléctica [150].

En el contexto de álgebras de Lie casi abelianas, varias clases de Gray-Hervella han sido caracterizadas. A saber, la clase $\{0\}$ en [56], $\mathcal{W}_2$ en [101], $\mathcal{W}_3$ en [55], $\mathcal{W}_4$ y $\mathcal{W}_2\oplus\mathcal{W}_4$ en [8], $\mathcal{W}_3\oplus\mathcal{W}_4$ en [100], y se puede deducir de un resultado en [36] (ver también [6]) que $\mathcal{W}_1$ colapsa a la clase $\{0\}$ en este caso.

Nuestro objetivo en esta sección es caracterizar las 16 clases de Gray-Hervella en álgebras de Lie casi abelianas de manera uniforme. En la próxima sección analizaremos la condición de armonicidad en cada una de estas clases.

Para empezar, debemos describir los tensores que aparecen en la Tabla 3.2 en términos de L.

Calculamos primero el tensor de Nijenhuis de J. Notar que $N_J(x,x)=N_J(x,Jx)=0$ para todo $x\in\mathfrak{g}$. Además, $N_J(Jx,y)=-JN_J(x,y)$. Teniendo en cuenta estas simetrías, y dado que los únicos corchetes no nulos involucran a e_0, el tensor N_J está determinado simplemente por calcular $N_J(e_0,x)$, para $x\in\mathfrak{a}$:

$$\begin{aligned}N_J(e_0,x)=(L+JLJ)x&=\langle(L+JLJ)x,e_1\rangle e_1+(D+J'DJ')x\\&=\langle(L^t+JL^tJ)e_1,x\rangle e_1+(D+J'DJ')x\\&=\langle w_0,x\rangle e_1+(D+J'DJ')x.\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

Proseguimos con el cálculo de $\mathrm{d}\omega$. En este contexto invariante, $\mathrm{d}\omega$ puede ser calculada usando la fórmula

$$\mathrm{d}\omega(x,y,z)=-\omega([x,y],z)-\omega([y,z],x)-\omega([z,x],y).$$

Nuevamente como los únicos corchetes no nulos involucran a e_0, tenemos, para $x,y\in\mathfrak{a}$, $z\in\mathfrak{u}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(e_0,e_1,x)&=-\langle JLe_1,x\rangle+\langle JLx,e_1\rangle=\langle Le_1,Jx\rangle=\langle v_0,Jx\rangle,\\\mathrm{d}\omega(e_0,x,y)&=-\langle JLx,y\rangle+\langle JLy,x\rangle=\langle x,(D^tJ'+J'D)y\rangle,\\\mathrm{d}\omega(z,x,y)&=0.\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

Con respecto a la codiferencial $\delta\omega$, su expresión en un álgebra de Lie casi hermitiana fue obtenida por ejemplo en [10]:

$$\delta\omega(x)=-\operatorname{Tr}\operatorname{ad}_{Jx}+\frac{1}{2}\langle\sum_{i=0}^{2n-1}[Je_i,e_i],x\rangle,$$

donde $\{e_0,\dots,e_{2n-1}\}$ es cualquier base ortonormal de $\mathfrak{g}$. En el contexto casi abeliano, esta ecuación se reduce a

$$\delta\omega(x)=-\operatorname{Tr}\operatorname{ad}_{Jx}-\langle Le_1,x\rangle.$$

Así,

$$\delta\omega(e_0) = 0, \quad \delta\omega(e_1) = \operatorname{Tr} S - \mu = \operatorname{Tr} D, \qquad \delta\omega(x) = -\langle v_0, x\rangle,\ x \in \mathfrak{a}. \tag{3.2.5}$$

En resumen,

$$\delta\omega = 0 \iff \operatorname{Tr} D = 0 \quad \text{y} \quad v_0 = 0. \tag{3.2.6}$$

Sigue de (3.2.5) que la forma de Lee $\theta = -\frac{1}{n-1}(\delta\omega \circ J)$ está dada por:

$$\theta(e_0) = -\frac{1}{n-1}\operatorname{Tr} D, \quad \theta(x) = \frac{1}{n-1}\langle v_0, Jx\rangle, \qquad x \in \mathfrak{u}.$$

Ahora calculamos $\nabla\omega$, usando la fórmula

$$(\nabla_x\omega)(y,z) = -\omega(\nabla_x y, z) - \omega(y, \nabla_x z).$$

Como ∇_x es antisimétrica, se obtiene

$$(\nabla_x\omega)(Jy,z) = (\nabla_x\omega)(y,Jz). \tag{3.2.7}$$

En particular, $(\nabla_x\omega)(y,Jy) = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Luego, $\nabla\omega$ está dada por

$$\begin{aligned}
(\nabla_{e_0}\omega)(e_0,x) &= \langle \rho, x\rangle,\\
(\nabla_{e_0}\omega)(x,y) &= \langle [A,J]x, y\rangle,\\
(\nabla_{e_1}\omega)(e_1,x) &= \langle \gamma, x\rangle,\\
(\nabla_z\omega)(x,y) &= 0,\\
(\nabla_x\omega)(e_1,y) &= \langle Sx, y\rangle,
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

donde $x, y \in \mathfrak{a}$, $z \in \mathfrak{u}$. Los otros casos se siguen usando (3.2.7).

Por último, calculamos los tensores $T^{\pm}$ y U previamente mencionados. De (3.2.7) se deduce que

$$\begin{aligned}
T^{\pm}(x,Jy,z) &= T^{\pm}(x,y,Jz),\\
T^{\pm}(x,y,z) &= -T^{\pm}(x,z,y).
\end{aligned}$$

Más aún, se cumple que $T^{\pm}(Jx,y,z) = \mp T^{\pm}(x,Jy,z)$. Entonces, $T^{\pm}$ está dado por

$$\begin{aligned}
T^{\pm}(e_0,e_0,x) &= \langle \rho \pm \gamma, x\rangle,\\
T^{\pm}(e_0,x,y) &= \langle [A,J]x, y\rangle,\\
T^{\pm}(z,x,y) &= 0,\\
T^{\pm}(x,e_1,y) &= \langle (S \mp JSJ)x, y\rangle,
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

donde $x, y, z \in \mathfrak{a}$. Las otras posibilidades son consecuencia de las simetrías que acabamos de describir.

Por otro lado, usando (3.2.2) es fácil verificar que se cumplen las simetrías $U(x,z,y) = -U(x,y,z)$, $U(x,Jy,z) = U(x,y,Jz)$ y $U(Jx,Jy,z) = U(x,y,z)$. Así, el tensor U está determinado por

$$\begin{aligned}
U(e_0,e_0,x) &= -\langle v_0, x\rangle,\\
U(e_0,x,y) &= 0,\\
U(x,e_1,y) &= -\langle x,y\rangle \operatorname{Tr} D,\\
U(z,x,y) &= -\langle z,x\rangle\langle v_0,y\rangle + \langle z,y\rangle\langle v_0,x\rangle + \langle z,Jx\rangle\langle v_0,Jy\rangle - \langle z,Jy\rangle\langle v_0,Jx\rangle,
\end{aligned}$$

donde $x, y, z \in \mathfrak{a}$.

Aplicaremos todas estas expresiones que acabamos de hallar en la prueba del siguiente teorema, el cual es el resultado principal de esta sección. En el enunciado del teorema se usarán las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}(n-1,\mathbb{C}) &\cong \{X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) \mid [X,J'] = 0\} = \{X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) \mid [X_a,J'] = [X_s,J'] = 0\},\\
\mathfrak{u}(n-1) &\cong \{X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) \mid [X,J'] = 0, X^t = -X\} = \{X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) \mid X_s = 0, [X_a,J'] = 0\},\\
\mathfrak{sp}(n-1,\mathbb{R}) &\cong \{X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) \mid X^tJ' + J'X = 0\} = \{X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) \mid [X_a,J'] = 0, X_sJ' + J'X_s = 0\},\\
\mathrm{Sym}(2n-2) &\cong \{X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) \mid X = X_s\}.
\end{aligned}$$

donde $X_a = \frac{1}{2}(X - X^t)$ y $X_s = \frac{1}{2}(X + X^t)$ denotan la parte antisimétrica y simétrica de X, respectivamente.

De ahora en más usaremos la notación "$J \in$" para denotar que la estructura casi hermitiana pertenece a cierta clase. Por ejemplo, $J \in \mathcal{W}_1$ significa que la variedad casi hermitiana es nearly Kähler.

Teorema 3.2.2. *Sea $(J,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ una estructura casi hermitiana en un álgebra de Lie casi abeliana de dimensión $2n$ dada por $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_L \mathbb{R}^{2n-1}$, con L como en (3.1.1) y $n \geq 3$. Entonces, las clases de Gray-Hervella están caracterizadas por:*

- $\mathcal{W}_1 = \{0\}$,
- $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_i = \mathcal{W}_i$, $2 \leq i \leq 4$,
- $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$,
- $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$.

Más aún, las condiciones que definen a cada clase están dadas en la siguiente tabla:

Clase	*Condiciones*
$\{0\}$	$v_0 = w_0 = 0,\ D \in \mathfrak{u}(n-1)$
$\mathcal{W}_2$	$v_0 = 0,\ D \in \mathfrak{sp}(n-1,\mathbb{R})$
$\mathcal{W}_3$	$\operatorname{Tr} D = 0,\ v_0 = w_0 = 0,\ D \in \mathfrak{gl}(n-1,\mathbb{C})$
$\mathcal{W}_4$	$v_0 = w_0 = 0,\ D - \left(\frac{\operatorname{Tr} D}{2(n-1)}\right)\mathrm{I} \in \mathfrak{u}(n-1)$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$	$\operatorname{Tr} D = 0, v_0 = 0, D \in \mathrm{Sym}(2n-2) \oplus \mathfrak{u}(n-1)$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$	$\operatorname{Tr} D = 0,\ v_0 = 0$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$v_0 = 0,\ D - \left(\frac{\operatorname{Tr} D}{2(n-1)}\right)\mathrm{I} \in \mathfrak{sp}(n-1,\mathbb{R})$
$\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$w_0 = 0,\ D \in \mathfrak{gl}(n-1,\mathbb{C})$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$D \in \mathrm{Sym}(2n-2) \oplus \mathfrak{u}(n-1)$
$\mathcal{W}$	*Sin condiciones*

Demostración. Comenzaremos analizando la clase $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ ya que esto nos ayudará luego a caracterizar algunas otras clases.

• Clase $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$: La condición es $\sum_{cyc} T^-(x,y,z) = 0$. Notar que esta condición es invariante bajo permutaciones de x,y,z. Además, si $y = x$ o $y = Jx$ entonces usando las simetrías de T^- la condición se satisface automáticamente.

Por último, sigue de (3.2.9) que $T^-(z,x,y) = 0$ para todo $x,y,z \in \mathfrak{a}$. Por lo tanto, sólo debemos verificar la condición para (e_0,x,y), con $x,y \in \mathfrak{a}$:

$$\begin{aligned} 0 &= T^-(e_0,x,y) + T^-(x,y,e_0) + T^-(y,e_0,x) \\ &= \langle [A,J]x,y\rangle + T^-(x,e_1,Jy) - T^-(Jy,e_1,x) \\ &= \langle [A,J]x,y\rangle + \langle (S+JSJ)x,Jy\rangle - \langle (S+JSJ)Jy,x\rangle \\ &= \langle [A,J]x,y\rangle \quad (\text{pues } (S+JSJ)^t = S+JSJ) \\ &= \langle [D_a,J']x,y\rangle. \end{aligned}$$

En conclusión, $J \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ si y sólo si $[D_a,J'] = 0$, o equivalentemente $D_a \in \mathfrak{u}(n-1)$.

• Clase $\{0\}$: Dado que $\nabla\omega = 0$, usando (3.2.8) resulta $\rho = \gamma = 0$, lo que implica $v_0 = w_0 = 0$. Además se tiene $[J',D_a] = 0$ y $D_s = 0$, lo cual es equivalente a $D \in \mathfrak{u}(n-1)$. Esto coincide con [56, Lemma 3.6].

• Clase $\mathcal{W}_1$: Calculamos $3\nabla\omega = \mathrm{d}\omega$ en (x,e_1,y), con $x,y \in \mathfrak{a}$. Usando (3.2.8) y (3.2.4) se obtiene $3\langle Sx,y\rangle = 0$. Por lo tanto $D_s = 0$ y entonces, evaluando la condición $3\nabla\omega = \mathrm{d}\omega$ en (x,e_0,y) vemos que $3\langle [D_a,J']x,y\rangle = \langle x,(-D_aJ' + J'D_a)y\rangle$, lo que es equivalente a $[D_a,J'] = 0$. Esto implica que $J \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_1^\perp = \{0\}$, por lo que es Kähler. Esto también se sigue de [6, Theorem 6.2].

• Clase $\mathcal{W}_2$: De (3.2.4) y la fórmula $\mathrm{d}\omega = 0$ resulta $v_0 = 0$ y $D^tJ' + J'D = 0$. Esta caracterización fue obtenida previamente en [101, Proposition 4.1].

• Clase $\mathcal{W}_3$: Usando (3.2.5) y (1.1.1) junto con las condiciones $\delta\omega = 0$ y $N_J = 0$, se deduce fácilmente que $\operatorname{Tr} D_s = 0$, $v_0 = w_0 = 0$ y $D + J'DJ' = 0$. Esta última condición es equivalente a $[D,J'] = 0$, lo que significa $D \in \mathfrak{gl}(n-1,\mathbb{C})$. Este resultado ya apareció en [55, Theorem 3.1].

• Clase $\mathcal{W}_4$: La condición es $(\nabla_x\omega)(y,z) = -\frac{1}{2(n-1)}U(x,y,z)$ para todo $x,y,z \in \mathfrak{g}$.

En primer lugar, notar que ambos tensores son antisimétricos en las últimas dos variables y, más aún, si los evaluamos en (x,Jy,z) es lo mismo que evaluarlos en (x,y,Jz). Por ende basta chequear la condición para (e_0,e_0,x), (e_0,x,y), (e_1,e_1,x), (z,x,y), (x,e_1,y), donde $x,y \in \mathfrak{a}$, $z \in \mathfrak{u}$.

Al usar (3.2.8) y (3.2.2) tenemos que, evaluando en $(e_0,e_0,x), x \in \mathfrak{a}$,

$$\langle \rho,x\rangle = \frac{1}{2(n-1)}\langle v_0,x\rangle.$$

Para $(e_1,e_1,x), x \in \mathfrak{a}$, tenemos que

$$\langle \gamma,x\rangle = \frac{1}{2(n-1)}\langle v_0,x\rangle.$$

Ambas ecuaciones son equivalentes a $\rho = \gamma = \frac{1}{2(n-1)}v_0$, y como $n \geq 3$ esto es equivalente a $v_0 = w_0 = 0$. Dado que $v_0 = 0$, ambos tensores se anulan al evaluarlos en (z,x,y) con $z \in \mathfrak{u}, x,y \in \mathfrak{a}$.

A continuación, si chequeamos la condición para (e_0,x,y) con $x,y \in \mathfrak{a}$ resulta $[D_a,J'] = 0$. Finalmente, para (x,e_1,y) con $x,y \in \mathfrak{a}$, la condición se transforma en

$$\langle Sx,y\rangle = \frac{1}{2(n-1)}\langle (\operatorname{Tr} D_s)x,y\rangle,$$

lo que es equivalente a $D_s = \frac{\operatorname{Tr} D_s}{2(n-1)}\mathrm{I} = \frac{\operatorname{Tr} D}{2(n-1)}\mathrm{I}$.

Es inmediato verificar que las condiciones $[D_a,J'] = 0$ y $D_s = \frac{\operatorname{Tr} D}{2(n-1)}\mathrm{I}$ se satisfacen si y sólo si $D - \left(\frac{\operatorname{Tr} D}{2(n-1)}\right)\mathrm{I} \in \mathfrak{u}(n-1)$. Esto coincide con lo obtenido en [8, Theorem 3.3].

• Clase $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$: De la condición $T^+ \equiv 0$ y (3.2.9) tenemos que, para cualesquiera elementos $x,y \in \mathfrak{a}$, $0 = T^+(e_0,x,y) = \langle [D_a,J']x,y\rangle$. Por lo tanto $[D_a,J'] = 0$ y así $J \in \mathcal{W}_1^\perp$. Como además $J \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ resulta $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_2$.

• Clase $\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$: Sigue de (3.2.3) que $N_J \equiv 0$ es equivalente a $w_0 = 0$ y $[D, J'] = 0$, lo cual coincide con [100], como mencionamos previamente.

• Clase $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$: Notar primero que la condición $T^-(x,x,z) = 0$ para todo $x, z \in \mathfrak{g}$ es equivalente a $T^-(x,y,z) = -T^-(y,x,z)$ para todo $x,y,z \in \mathfrak{g}$. Si evaluamos en (x, e_1, y) con $x, y \in \mathfrak{a}$ resulta

$$\langle (D_s + J'D_sJ')x, y\rangle = -\langle (D_s + J'D_sJ')y, x\rangle.$$

Como $D_s + J'D_sJ'$ es simétrico, obtenemos que $D_s + J'D_sJ' = 0$. Ahora, usando esto, concluimos que $T^-(e_1, x, y) = -T^-(y, x, e_1) = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{a}$. De esta manera

$$\langle [D_a, J']J'x, y\rangle = T^-(e_0, J'x, y) = T^-(e_1, x, y) = 0.$$

Esto implica $[D_a, J'] = 0$, por lo que $J \in \mathcal{W}_1^\perp$. En consecuencia, $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_3$.

• Clase $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$: La condición es $d\omega = \theta \wedge \omega$. Calculamos primero $\theta \wedge \omega$:

$$\theta \wedge \omega(x,y,z) = \theta(x)\omega(y,z) + \theta(y)\omega(z,x) + \theta(z)\omega(x,y).$$

Para $x, y \in \mathfrak{a}$, $z \in \mathfrak{u}$, se tiene

$$\begin{aligned} \theta \wedge \omega(e_0, e_1, x) &= \frac{1}{n-1}\langle v_0, Jx\rangle, \\ \theta \wedge \omega(e_0, x, y) &= \frac{1}{n-1}\langle x, Jy\rangle \operatorname{Tr} D_s, \\ \theta \wedge \omega(z, x, y) &= \frac{1}{n-1}\left(\langle Jz, x\rangle\langle v_0, Jy\rangle + \langle Jy, z\rangle\langle v_0, Jx\rangle + \langle Jx, y\rangle\langle v_0, Jz\rangle\right). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

De la ecuación $d\omega(e_0, e_1, x) = \theta \wedge \omega(e_0, e_1, x)$, $x \in \mathfrak{a}$, se desprende, usando (3.2.4) y (3.2.10), que $v_0 = \frac{1}{n-1}v_0$, y como $n \geq 3$ llegamos a $v_0 = 0$. Esto automáticamente implica que $\omega \wedge \theta(x,y,z) = 0$ y $d\omega(x,y,z) = 0$, para $x,y,z \in \mathfrak{a}$.

Ahora, si evaluamos $d\omega = \theta \wedge \omega$ en (e_0, x, y) con $x, y \in \mathfrak{a}$ obtenemos $D^tJ' + J'D = \frac{1}{n-1}(\operatorname{Tr} D_s)J'$, o equivalentemente $D - \frac{\operatorname{Tr} D}{2(n-1)}\mathrm{I} \in \mathfrak{sp}(n-1, \mathbb{R})$. Esto coincide con [8, Theorem 4.1].

• Clase $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$: La condición es $(\nabla_x\omega)(x,z) + \frac{1}{2(n-1)}U(x,x,z) = 0$ para todo $x, z \in \mathfrak{g}$, la cual es equivalente a

$$(\nabla_y\omega)(x,z) + \frac{1}{2(n-1)}U(y,x,z) = -((\nabla_x\omega)(y,z) + \frac{1}{2(n-1)}U(x,y,z)).$$

Evaluando ambos lados de la expresión en (x, e_0, z) con $x, z \in \mathfrak{a}$ obtenemos

$$\langle [A, J]x, z\rangle = -\langle Sx, Jz\rangle + \frac{\operatorname{Tr} D_s}{2(n-1)}\langle x, Jz\rangle,$$

que es equivalente a $J'[D_a, J'] = -D_s + \frac{\operatorname{Tr} D_s}{2(n-1)}\mathrm{I}$. Como el lado izquierdo de la ecuación es antisimétrico y el lado derecho es simétrico, ambos deben ser cero. En particular, $[D_a, J'] = 0$, por lo que $J \in \mathcal{W}_1^\perp$ y así $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_4$.

• Clase $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$: Como previamente notamos en (3.2.6), $\delta\omega = 0$ es equivalente a

$$\operatorname{Tr} D = 0, \quad v_0 = 0.$$

• Clase $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$: Las condiciones son $\delta\omega = 0$ y $\sum_{cyc} T^-(x,y,z) = 0$, que son por separado las condiciones de $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ y $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$. Por lo tanto, $J \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ si y sólo si

$$\operatorname{Tr} D = 0, \quad v_0 = 0, \quad \text{y} \quad [D_a, J'] = 0.$$

• Clase $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$: La condición es $T^+ = -\frac{1}{n-1}U$. Evaluamos en (e_0, x, y), $x, y \in \mathfrak{a}$, y utilizamos (3.2.9) y (3.2.2), para obtener $[D_a, J'] = 0$. Por lo tanto $J \in \mathcal{W}_1^{\perp}$ y así $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$.

• Clase $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$: La condición es $\langle N_J(x,y), x\rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, la cual es equivalente a $\langle N_J(x,y), z\rangle = -\langle N_J(z,y), x\rangle$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Puesto que $N_J(x,y) = 0$ para $x, y \in \mathfrak{a}$, deducimos que $\langle N_J(e_0, x), y\rangle = -\langle N_J(y,x), e_0\rangle = 0$.

Luego, usando (3.2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle N_J(e_0, x), y\rangle \\ &= \langle (D + J'DJ')x, y\rangle \\ &= \langle (D_a + J'D_aJ' + D_s + J'D_sJ')x, y\rangle. \end{aligned}$$

Debido a que $D_a + J'D_aJ'$ es antisimétrico y $D_s + J'D_sJ'$ es simétrico esta condición significa que $[D_a, J'] = 0$ y $[D_s, J'] = 0$. En particular, $J \in \mathcal{W}_1^{\perp}$ por lo que $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$. □

Las clases de Gray-Hervella de estructuras casi hermitianas en álgebras de Lie casi abelianas de dimensión 4 se obtiene fácilmente siguiendo las líneas de la demostración del Teorema 3.2.2 y usando las condiciones exhibidas en la Tabla 3.1.

Corolario 3.2.3. *Sea $(J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ una estructura casi hermitiana en un álgebra de Lie casi abeliana 4-dimensional $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_L \mathbb{R}^3$, con $L = \left[\begin{array}{c|cc} \mu & r & s \\ p & a & b \\ q & c & d \end{array}\right]$. Las condiciones que definen a cada clase de Gray-Hervella están dadas en la siguiente tabla:*

Clase	*Condiciones*
$\{0\}$	$p = q = r = s = 0,\ a = d = 0,\ b = -c$
$\mathcal{W}_2$	$p = q = 0,\ a + d = 0$
$\mathcal{W}_4$	$r = s = 0,\ a - d = 0,\ b + c = 0$
$\mathcal{W}$	*Sin condiciones*

Observación 3.2.4. Fue probado en [73] que las estructuras casi hermitianas que pertenecen a la clase $\mathcal{W}_3$ (balanceadas) o a la clase $\mathcal{W}_4$ (LCK) son armónicas en dimensión arbitraria. Este hecho también se desprende, para álgebras de Lie casi abelianas, de nuestra clasificación.

3.3. Ejemplos

En esta sección, proveemos muchos ejemplos de estructuras casi complejas armónicas y no armónicas en grupos de Lie casi abelianos y solvariedades compactas asociadas. A lo largo de la sección todas las álgebras de Lie se asumirán unimodulares.

3.3.1. Dimensión 4

Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_L \mathbb{R}^3$ un álgebra de Lie casi abeliana métrica con base ortonormal $\{e_i\}_{i=0}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, y estructura casi compleja ortogonal J definida por $Je_0 = e_1$ y $Je_2 = e_3$. En esta base la matriz L puede escribirse como $L = \left[\begin{array}{c|cc} \mu & r & s \\ p & a & b \\ q & c & d \end{array}\right]$. Para analizar la armonicidad de J expresamos las condiciones del Corolario 3.1.4 en términos de L.

Teniendo en cuenta que cualquier matriz antisimétrica 2×2 conmuta con la restricción de la J a $\mathfrak{u}\cap J\mathfrak{u} = \{e_2, e_3\}$, es claro que la condición (ii) del Corolario 3.1.4 automáticamente se satisface en dimensión 4. Asimismo, la condición (i) es equivalente a

$$bq + cs - d(p+r) = 0, \quad cp + br - a(q+s) = 0. \tag{3.3.1}$$

Por lo tanto, J es armónica si y sólo si (3.3.1) se satisface.

Ejemplo 3.3.1. (Armónica no integrable) Tomamos $L_0 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, entonces la estructura casi compleja J en $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\ltimes_{L_0}\mathbb{R}^3$ no es integrable dado que $w_0^t = (1,0) \neq 0$. De hecho, J pertenece a la clase general $\mathcal{W}$. Por otro lado, sigue de (3.3.1) que J es armónica.

Veremos a continuación que el grupo de Lie simplemente conexo asociado G admite una cantidad numerable de retículos no isomorfos. En efecto, para todo $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 3$, sea $t_m = \log(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2})$. Entonces, la matriz $\exp(t_m L_0) = \begin{bmatrix} \cosh t_m & \sinh t_m & 0 \\ \sinh t_m & \cosh t_m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es conjugada a la matriz $C_m = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, la cual posee coeficientes enteros y determinante 1. Usando el Teorema 1.2.5 obtenemos que para cualquier m existe un retículo Γ_m en G. De acuerdo con la Observación 1.2.6, Γ_m es isomorfo a $\tilde{\Gamma}_m = \mathbb{Z}\ltimes_{C_m}\mathbb{Z}^3$ y como $\tilde{\Gamma}_m/[\tilde{\Gamma}_m, \tilde{\Gamma}_m] \cong \mathbb{Z}^2\oplus\mathbb{Z}_{m-2}$, concluimos que Γ_m es isomorfo a Γ_n si y sólo si $m = n$.

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathbb{R}\times\mathfrak{e}(1,1)$, donde $\mathfrak{e}(1,1)$ es el álgebra de Lie del grupo de transformaciones rígidas $E(1,1)$ del espacio de Minkowski, y G es isomorfo al producto de $\mathbb{R}$ con la componente de la identidad $E_0(1,1)$ de $E(1,1)$, la cual es simplemente conexa.

Ejemplo 3.3.2. (Armónica de clase $\mathcal{W}_2$ - casi Kähler) De acuerdo con (3.3.1) y el Corolario 3.2.3 una estructura casi Kähler es armónica si y sólo si

$$cs + ar = 0, \quad br - as = 0. \tag{3.3.2}$$

Por lo tanto, podemos producir ejemplos armónicos y no armónicos.

Por ejemplo, para $L_1 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline & 1 & \\ & & -1 \end{array}\right]$ la estructura casi compleja J es casi Kähler y armónica, mientras que para $L_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$ la estructura casi Kähler J no es armónica. Cabe destacar que las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}\ltimes_{L_1}\mathbb{R}^3$ y $\mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}\ltimes_{L_2}\mathbb{R}^3$ son ambas isomorfas al álgebra $\mathbb{R}\times\mathfrak{e}(1,1)$ del Ejemplo 3.3.1, pues L_0, L_1 y L_2 poseen la misma forma de Jordan (Lema 3.1.1).

En consecuencia, toda solvariedad asociada a $\mathbb{R}\times E_0(1,1)$ admite al menos tres estructuras casi hermitianas (J_i, g_i) para $i = 0,1,2$, tales que J_0 y J_1 son armónicas respecto a g_0 y g_1, respectivamente, $J_0\in\mathcal{W}$, J_1 es casi Kähler, y J_2 es casi Kähler pero no armónica respecto a g_2. Más aún, se puede verificar que g_0 y g_1 son isométricas.

Ejemplo 3.3.3. (Armónica integrable) Dada un álgebra de Lie casi abeliana métrica de dimensión 4 con una estructura casi compleja ortogonal integrable J, tenemos que J es armónica si y sólo si $(J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es LCK. En efecto, la condición de integrabilidad ($a = d$, $c = -b$, $r = s = 0$) junto con la condición de armonicidad (3.3.1) implican que $bq - ap = 0$ y $bp + aq = 0$. Esto quiere decir que, o $(a,b) = (0,0)$, o $(a,b)\neq(0,0)$ y $(p,q) = (0,0)$. En cualquier caso, $(J,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es LCK por la caracterización de [8]. Recíprocamente, recordemos que toda estructura LCK es armónica por [73]. En [8], fueron construidos retículos en álgebras casi abelianas LCK de dimensión 4. Las correspondientes superficies compactas complejas son superficies de Kodaira primarias o superficies de Inoue de tipo S^0.

Ejemplo 3.3.4. (Integrable no armónica) Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_L \mathbb{R}^3$, con $L = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Entonces, la estructura casi compleja J es integrable (3.2.3) pero no es armónica pues no satisface (3.3.1).

Notemos que la métrica invariante a izquierda asociada g en el correspondiente grupo de Lie simplemente conexo G no es plana, pues L no es antisimétrica. Sin embargo, de acuerdo con la Observación 3.1.2, si consideramos la base $\mathcal{B}' = \{e_0' = e_0 + e_2, e_1' = e_1 + e_3, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{g}$, entonces la matriz L toma la forma $L' = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ y J sigue satisfaciendo $Je_0' = e_1'$ y $Je_2 = e_3$. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ el producto interno en $\mathfrak{g}$ que hace a la base $\mathcal{B}'$ ortonormal. Entonces, la correspondiente métrica invariante a izquierda g' en G es plana y más aún $(\mathfrak{g}, J, g')$ es Kähler. En particular, J es g'-armónica. Se sabe que este grupo de Lie G admite retículos [84]. Luego, para cualquier retículo Γ en G la solvariedad compleja $(\Gamma\backslash G, J)$ admite dos métricas hermitianas invariantes g y g' tales que J no es armónica con respecto a g, pero sí es armónica con respecto a g' (más aún, (J, g') es Kähler).

Analizamos a continuación las solvariedades que se obtienen de G. Es sabido que los únicos valores de t tales que la matriz $\exp(tL)$ (o $\exp(tL')$) es conjugada a una matriz entera son $t \in \{2\pi, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\}$ (ver por ejemplo [142, Proposition 5.1]). Para $t = 2\pi$, el retículo correspondiente es abeliano, isomorfo a $\mathbb{Z}^4$, por lo que la solvariedad asociada es difeomorfa al toro $\mathbb{T}^4$ (debido al Teorema 1.2.2). Para los otros valores posibles de t, la solvariedad asociada es una superficie hiperelíptica (ver [84]).

Ejemplo 3.3.5 (Armónica no integrable en una nilvariedad)**.**

(1) Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_L \mathbb{R}^3$ con $L = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Entonces, sigue del Corolario 3.2.3 y (3.3.2) que J es armónica y casi Kähler. Además, $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie del grupo de Lie $H_3 \times \mathbb{R}$, donde H_3 es el grupo de Heisenberg de dimensión 3. Una nilvariedad asociada a $H_3 \times \mathbb{R}$ es la famosa variedad de Kodaira-Thurston, y la métrica invariante casi Kähler inducida por $\mathfrak{g}$ se corresponde con la métrica de Abbena [1] (la cual ya se probó que es armónica en [158]).

(2) Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_L \mathbb{R}^3$ con $L = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$. De acuerdo con (3.3.1), la estructura casi compleja J es armónica y es claramente no integrable; de hecho pertenece a la clase general $\mathcal{W}$ (Corolario 3.2.3). Puesto que $L^3 = 0$ pero $L^2 \neq 0$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es 3-pasos nilpotente, y como las constantes de estructura son racionales, el grupo de Lie simplemente conexo asociado G admite retículos ([109]). Se sabe que $\mathfrak{g}$ no admite estructuras complejas (ver por ejemplo [74]). Más aún, usando resultados de la teoría de superficies complejas compactas se tiene un resultado más fuerte, a saber, que ninguna nilvariedad asociada admite estructuras complejas, ya sean invariantes o no ([21, Proposition 3.1]).

Podemos encontrar estructuras casi Kähler en $\mathfrak{g}$ aunque ninguna armónica, debido al hecho de que si L como en el Corolario 3.2.3 satisface $L^3 = 0$ y (3.3.2) entonces $L^2 = 0$.

3.3.2. Dimensión ≥ 6

En lo que sigue mostraremos ejemplos de estructuras casi complejas armónicas de dimensión $2n$ ($n \geq 3$) en álgebras de Lie casi abelianas $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_L \mathbb{R}^{2n-1}$, en las clases $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$, $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$, $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$, $\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$, $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ y $\mathcal{W}$, respectivamente. Destacamos que las clases de los siguientes ejemplos de estructuras casi complejas J son genuinas, en el sentido en que J no pertenece a ninguna subclase contenida en la clase en cuestión. En todos estos ejemplos consideraremos una base ortonormal $\{e_0, e_1, \dots, e_{2n-1}\}$ de manera que $\mathfrak{u} = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{2n-1}\}$, la estructura casi compleja ortogonal J estará dada por $Je_{2i} = e_{2i+1}$, para todo $0 \leq i \leq n-1$, y todas las matrices serán expresadas en esta base. La condición de unimodularidad es

$$\mu + \operatorname{Tr} D = 0, \tag{3.3.3}$$

con la notación de (3.1.1). Mostraremos la existencia de retículos usando el Teorema 1.2.5.

Ejemplo 3.3.6. (Armónica $\mathcal{W}_2$ - casi Kähler) Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_L \mathbb{R}^{2n-1}$ equipada con una estructura casi Kähler $(J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, es decir, $J \in \mathcal{W}_2$. De acuerdo con el Teorema 3.2.2 tenemos que $D \in \mathfrak{sp}(n-1,\mathbb{R})$, por lo que la condición (ii) en el Corolario 3.1.4 se satisface. Además $\operatorname{Tr} D = 0$, por lo que resulta de (3.3.3) que $\mu = 0$. Esto junto con la condición (i) en el Corolario 3.1.4 implican que J es armónica si y sólo si

$$D^t w_0 = 0.$$

Elegimos $D = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]^{\oplus(n-1)} \in \mathfrak{sp}(n-1,\mathbb{R})$, $\mu = 0$ y $v_0 = w_0 = 0$. Se deduce entonces que J es armónica y $J \in \mathcal{W}_2$. Ahora, dado cualquier $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, sea $t_m = \log(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2})$. Luego la matriz $\exp(t_m L) = (1) \oplus \left[\begin{smallmatrix} \cosh t_m & \sinh t_m \\ \sinh t_m & \cosh t_m \end{smallmatrix}\right]^{\oplus(n-1)}$ es conjugada por bloques a $C_m = (1) \oplus \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & m \end{smallmatrix}\right]^{\oplus(n-1)}$. Aplicando el Teorema 1.2.5 obtenemos que para cada m hay un retículo Γ_m y son no isomorfos de a pares pues $\Gamma_m/[\Gamma_m,\Gamma_m] \cong \mathbb{Z}^2 \oplus (\mathbb{Z}_{m-2})^{n-1}$.

Ejemplo 3.3.7. (Armónica de clase $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$) Recordemos del Teorema 3.2.2 que $J \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ si y sólo si $\mu = \operatorname{Tr} D = 0$ (en virtud de (3.3.3)), $v_0 = 0$ y $D_a J' = J' D_a$. Entonces, la condición (ii) del Corolario (3.1.4) se satisface y la condición (i) se simplifica a

$$D^t w_0 = 0.$$

Sea $L = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} a_m & 0 \\ 0 & -a_m \end{smallmatrix}\right]^{\oplus(n-3)}$, donde $a_m = \log(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2})$, para $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$. Claramente J es armónica y $J \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$. Además, es fácil verificar que $J \notin \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_3$. El correspondiente grupo de Lie simplemente conexo admite retículos gracias al Teorema 1.2.5 dado que

$$\exp(L) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{a_m}, \mathrm{e}^{-a_m}, 1) \oplus \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{a_m} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-a_m} \end{bmatrix}^{\oplus(n-3)}$$

es conjugada por bloques a una matriz entera unimodular. Por lo tanto, obtenemos solvariedades equipadas con una estructura casi compleja armónica que pertenece genuinamente a la clase $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$.

Ejemplo 3.3.8. (Armónica de clase $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$) Sea $J \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$, esto es, $\mu = \operatorname{Tr} D$ y $v_0 = 0$. Como el álgebra de Lie es unimodular, la ecuación (3.3.3) implica que $\mu = \operatorname{Tr} D = 0$. Por lo tanto, las condiciones de armonicidad del Corolario 3.1.4 se transforman en

$$D_a J' D_a J' = J' D_a J' D_a, \quad D_s w_0 + J' D_a J' w_0 = 0.$$

Dado $m \in \mathbb{N}, m \geq 3$, sea $a_m = \log(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2})$. Un ejemplo armónico se obtiene por ejemplo al tomar $\mu = 0$, $v_0 = w_0 = 0$ y $D = \left[\begin{smallmatrix} a_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_m \end{smallmatrix}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} a_m & 0 \\ 0 & -a_m \end{smallmatrix}\right]^{\oplus(n-3)}$, para algún $b \in \mathbb{R}$. Eligiendo $b \in \{2\pi, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\}$ obtenemos que $\exp(L)$ es conjugada por bloques a una matriz entera unimodular. Así, usando el Teorema 1.2.5 obtenemos retículos y consecuentemente solvariedades con una estructura casi compleja armónica J en $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$ que no pertenece a ninguna subclase (pues $[D_a, J'] \neq 0$).

Ejemplo 3.3.9. (Armónica de clase $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$) Sea $J \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$, es decir $v_0 = 0$ y $D = \lambda \mathrm{I} + B$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathfrak{sp}(n-1,\mathbb{R})$. Como $\mathfrak{g}$ es unimodular, debe ser $\lambda = -\frac{\mu}{2n-2}$. Tenemos que $[D_a, J'] = [B_a, J'] = 0$, por lo que la condición (ii) en el Corolario 3.1.4 se cumple, y debido a $v_0 = 0$ la condición (i) se convierte en

$$D^t w_0 = -\mu w_0.$$

En [8] se dieron ejemplos de álgebras de Lie casi abelianas de dimensión $2n$ tales que $J \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$. Explícitamente,

$$L = (1) \oplus \operatorname{diag}\left(0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-2}{n}, -\frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, \dots, -\frac{n-2}{n}, -1\right).$$

J es armónica pues $w_0 = 0$. También se exhibieron en [8] valores de $t \neq 0$ tales que $\exp(tL)$ es conjugada a una matriz entera unimodular, y se obtuvo una familia $\{M_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de solvariedades no homeomorfas de a pares. Por lo tanto, estas solvariedades admiten una estructura casi compleja armónica en la clase $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$. Notar que $J \notin \mathcal{W}_2$ dado que $\mu \neq 0$ y $J \notin \mathcal{W}_4$ pues J no es integrable.

Ejemplo 3.3.10. (Armónica integrable) Sea $L_0 = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right]^{\oplus(n-3)}$, para algunos valores de $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, la estructura casi compleja J en el álgebra de Lie casi abeliana $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R} \ltimes_{L_0} \mathbb{R}^{2n-1}$ es integrable debido al Teorema 3.2.2. Más aún, J es armónica puesto que $Dv_0 = 0 = \mu v_0$ (ver (3.1.5)). Como $v_0 \neq 0$, J no es ni balanceada ni LCK, por lo que $J \in \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ pero $J \notin \mathcal{W}_3 \cup \mathcal{W}_4$. Además, L_0 tiene la misma forma de Jordan que

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}^{\oplus(n-3)}.$$

Por lo tanto, en virtud del Lema 3.1.1, $\mathfrak{g}_0$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R} \ltimes_{L_1} \mathbb{R}^{2n-1}$. Escogiendo $a, b \in \{2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$, la matriz $\exp(L_1)$ es conjugada por bloques a una matriz entera unimodular. En consecuencia el grupo de Lie simplemente conexo asociado admite retículos por el Teorema 1.2.5, por lo que las correspondientes solvariedades admiten una estructura casi compleja integrable armónica.

Ejemplo 3.3.11. (Armónica de clase $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$) Esta clase se caracteriza por $[D_a, J'] = 0$. Luego la condición (ii) del Corolario 3.1.4 se cumple automáticamente y la condición (i) se transforma en

$$\mu\gamma + D_s\gamma + D_a\rho = 0.$$

Dado $m \in \mathbb{N}, m \geq 3$, sea $a_m = \log(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2})$. Si $L = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} a_m & 0 \\ 0 & -a_m \end{smallmatrix}\right]^{\oplus(n-2)}$, entonces $\mu = 0$, $D_a = 0$, $D_s = D$ y $\gamma = (1, 1, 0, \dots, 0)^t$. Consecuentemente, $\mu\gamma + D_s\gamma + D_a\rho = 0$ de modo que J es armónica y claramente $J \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$. Como $v_0 \neq 0$ y $w_0 \neq 0$, J no pertenece a ninguna subclase de $\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$. Además,

$$\exp(L) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} e^{a_m} & 0 \\ 0 & e^{-a_m} \end{bmatrix}^{\oplus(n-2)}$$

se conjuga por bloques a una matriz entera unimodular por lo que usando el Teorema 1.2.5 obtenemos solvariedades que admiten una estructura casi compleja armónica en la clase $J \in \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$.

Ejemplo 3.3.12. (Armónica de clase $\mathcal{W}$) Sea $L = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right]^{\oplus(n-3)}$, para algunos $a, b \in \mathbb{R}$. Luego $\mu = 0$, $\gamma = (1, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$, $\rho = (1, 0, 0, -1, 0, \dots, 0)^t$, $D_s = 0$ y $D_a = D$. Notar que $[D_a, J'] \neq 0$ pero $D_aJ'D_aJ' = J'D_aJ'D_a$ por lo que la condición (ii) en el Corolario 3.1.4 se satisface. Dado que $\mu\gamma + D_s\gamma + J'D_aJ'\rho = 0$, la condición (i) también se satisface por lo que J es armónica. Debido a que $v_0 \neq 0$, $w_0 \neq 0$ y $[D_a, J'] \neq 0$, tenemos que $J \in \mathcal{W}$ pero que no pertenece a ninguna subclase.

La matriz L posee la misma forma de Jordan que $L_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{smallmatrix}\right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right]^{\oplus(n-3)}$, por lo que el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_L \mathbb{R}^{2n-1}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R} \ltimes_{L_1} \mathbb{R}^{2n-1}$ debido al Lema 3.1.1. Para $a, b \in \{2\pi, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\}$ tenemos que

$$\exp(L_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}^{\oplus(n-3)}$$

es conjugada por bloques a una matriz entera unimodular. De acuerdo con el Teorema 1.2.5 obtenemos solvariedades que admiten una estructura casi compleja armónica genérica.

3.3.3. Estructuras SKT y la condición de armonicidad

Otra clase interesante de variedades hermitianas, que no es una de las clases de Gray-Hervella, está dada por las variedades SKT. Recordemos que una variedad hermitiana (M, J, g) se dice SKT si $\partial\bar{\partial}\omega = 0$, donde $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ denota la 2-forma fundamental, como es usual. Estas variedades también se pueden definir por la condición equivalente $\mathrm{d}c = 0$, donde $c(X, Y, Z) := g(T(X, Y), Z)$ es la 3-forma de torsión de la conexión de Bismut en M asociada a la estructura hermitiana (J, g).

Estructuras SKT invariantes a izquierda en grupos de Lie casi abelianos han sido estudiadas en [15], donde es demostrado el siguiente resultado[2]:

Teorema 3.3.13. [15, Theorem 4.6] *Sea $(J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ una estructura hermitiana en un álgebra de Lie casi abeliana de dimensión $2n$ dada por $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_0 \ltimes_L \mathbb{R}^{2n-1}$, donde L es como en (3.1.1). Entonces la estructura hermitiana $(J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es SKT si y sólo si $w_0 = 0$, $[D, J'] = 0$, $[D, D^t] = 0$ y todo autovalor de D tiene parte real igual a 0 o $-\frac{\mu}{2}$.*

Usando esta caracterización, podemos determinar cuando la estructura compleja de una estructura hermitiana SKT es armónica. Como fue mencionado anteriormente, la condición $[D, J'] = 0$ es equivalente a $[D_s, J'] = 0$ y $[D_a, J'] = 0$, donde D_s (respectivamente, D_a) denota la parte simétrica (respectivamente, antisimétrica) de D. Por el otro lado, la condición de normalidad $[D, D^t] = 0$ es equivalente a $[D_s, D_a] = 0$. Por lo tanto, $\{J', D_s, D_a\}$ es una familia conmutativa de operadores normales en $\mathfrak{a}$. En consecuencia, son operadores unitariamente diagonalizables sobre $\mathbb{C}$ de manera simultánea, por lo que existe una base ortonormal $\{e_2, \dots, e_{2n-1}\}$ de $\mathfrak{a}$ en la que J' y D tienen la siguiente forma:

$$J' = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]^{\oplus(n-1)}, \quad D = \left[\begin{smallmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{smallmatrix}\right] \oplus \cdots \oplus \left[\begin{smallmatrix} a_{n-1} & -b_{n-1} \\ b_{n-1} & a_{n-1} \end{smallmatrix}\right], \tag{3.3.4}$$

con $a_i = 0$ o $a_i = -\dfrac{\mu}{2}$ y $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n-1$, de acuerdo al Teorema 3.3.13.

Proposición 3.3.14. *Con la notación de arriba, si $(J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es SKT entonces J es armónica si y sólo si una de las siguientes condiciones mutuamente excluyentes valen:*

(i) *$v_0 = 0$, o*

(ii) *$v_0 \neq 0$ y $a_i = 0$ para todo i, esto es, $D \in \mathfrak{u}(n-1)$. Más aún, D es no invertible y $v_0 \in \operatorname{Ker} D$.*

Además, si el álgebra de Lie casi abeliana $\mathfrak{g}$ es unimodular entonces:

- *En el caso* (i)*, o bien $\mu = 0$ y $D \in \mathfrak{u}(n-1)$, o bien $\mu \neq 0$ y existe exactamente un $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $a_i = -\frac{\mu}{2}$;*
- *En el caso* (ii)*, $\mu = 0$.*

[2] En [15] se usa una convención diferente de signos: Allí, $Je_0 = -e_1$, pero esto no afecta el signo de μ.

Demostración. Como J es integrable, del Corolario 3.1.5 deducimos que J es armónica si y sólo si $Dv_0 = (\operatorname{Tr} D)v_0$.

Claramente, si $v_0 = 0$ entonces J es armónica. Asumamos ahora que J es armónica y $v_0 \neq 0$. Esto implica que $\operatorname{Tr} D$ es un autovalor real de D. Gracias al Teorema 3.3.13, tenemos que $\operatorname{Tr} D = 0$ o $\operatorname{Tr} D = -\dfrac{\mu}{2}$.

Ahora, se sigue de (3.3.4) que $\operatorname{Tr} D = -k\mu$, donde $k = |\{i \in \{1,\dots,n-1\} \mid a_i = -\frac{\mu}{2}\}|$. Comparando con los posibles valores de $\operatorname{Tr} D$ (es decir, 0 o $-\frac{\mu}{2}$) obtenemos que, o bien $\mu = 0$ o bien $\mu \neq 0$ y $k = 0$. En cualquier caso resulta $a_i = 0$ para todo i, de modo que $D \in \mathfrak{u}(n-1)$. Más aún, $Dv_0 = -k\mu v_0 = 0$.

Por último, asumamos ahora que $\mathfrak{g}$ es unimodular, esto es, $\operatorname{Tr} L = 0$. En el caso (i) se tiene $0 = \operatorname{Tr} L = \mu + \operatorname{Tr} D = (1-k)\mu$, con k como antes. Por lo tanto, o bien $\mu = 0$ y $D \in \mathfrak{u}(n-1)$, o bien $\mu \neq 0$ y $k = 1$. En el caso (ii) tenemos que $0 = \operatorname{Tr} L = \mu + \operatorname{Tr} D = \mu$ dado que $D \in \mathfrak{u}(n-1)$. □

Observación 3.3.15.

(1) Cabe remarcar que en el caso (i) de la Proposición 3.3.14, con $\mathfrak{g}$ unimodular y $\mu = 0$, la estructura hermitiana es de hecho Kähler, en virtud del Teorema 3.2.2. Más aún, la métrica es plana, debido a [113, Theorem 1.5].

(2) Las estructuras SKT en álgebras de Lie casi abelianas, así como también su relación con otras estructuras geométricas, también han sido estudiadas en [56]. En particular, se obtiene una clasificación salvo isomorfismo, de las álgebras de Lie casi abelianas de dimensión 6 que admiten estructuras SKT.

Corolario 3.3.16. *Para todo $n \geq 2$, existen solvariedades de dimensión $2n$ que admiten una estructura hermitiana SKT (J,g) tal que J es armónica.*

Demostración. Consideremos el álgebra de Lie casi abeliana $2n$-dimensional $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_L \mathbb{R}^{2n-1}$ con la estructura hermitiana usual $(J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, con $L \in \mathfrak{gl}(2n-1,\mathbb{R})$ dada por

$$L = \left[\begin{array}{c|cc} \mu & & \\ \hline & -\frac{\mu}{2} & -a \\ & a & -\frac{\mu}{2} \end{array}\right] \oplus \begin{bmatrix} 0 & -b_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} 0 & -b_{n-2} \\ b_{n-2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu \neq 0. \tag{3.3.5}$$

Si $M(\mu,a)$ denota la matriz 3×3 de (3.3.5), fue probado en [8] que para ciertos valores de μ y $a \neq 0$, la matriz $\exp(M(\mu,a))$ es conjugada a una matriz entera unimodular. Por lo tanto, si elegimos $b_i \in \{2\pi, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\}$, tenemos que $\exp(L)$ se conjuga por bloques a una matriz entera unimodular. De acuerdo con el Teorema 1.2.5, el correspondiente grupo de Lie casi abeliano simplemente conexo admite retículos y por lo tanto las solvariedades asociadas admiten una estructura SKT invariante con estructura compleja armónica. □

Capítulo 4

Métricas hermitianas especiales en productos de variedades sasakianas

4.1. Preliminares sobre variedades sasakianas

Una *estructura de casi contacto* en una variedad diferenciable de dimensión impar M^{2n+1} es una terna (φ, ξ, η), donde φ es un campo tensorial de tipo (1,1), ξ es un campo vectorial, y η una 1-forma que además satisfacen las ecuaciones

$$\varphi^2 = -\operatorname{Id} + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1.$$

Esto implica que $\varphi(\xi) = 0$ y $\eta \circ \varphi = 0$ (ver [26]). Se dice que (M, φ, ξ, η) es una *variedad de casi contacto* y ξ es llamado el *campo vectorial de Reeb*. El fibrado tangente de M se descompone en suma directa como $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{L}$, donde $\mathcal{D} = \operatorname{Ker} \eta = \operatorname{Im} \varphi$ y $\mathcal{L}$ es el fibrado de líneas generado por ξ.

En la variedad producto $M \times \mathbb{R}$ existe una estructura casi compleja J natural, que está definida por

$$J\left(X + f\frac{d}{dt}\right) = \varphi X - f\xi + \eta(X)\frac{d}{dt}, \tag{4.1.1}$$

donde $X \in \mathfrak{X}(M)$, t es la coordenada en $\mathbb{R}$ y f es una función diferenciable en $M \times \mathbb{R}$. Si J es integrable, la estructura de casi contacto se dice *normal*. Esto es equivalente a que se anule el tensor

$$N_\varphi := [\varphi, \varphi] + d\eta \otimes \xi,$$

donde $[\varphi, \varphi]$ es la torsión de Nijenhuis de φ definida por

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y].$$

Notar que si la estructura de casi contacto es normal entonces

$$\varphi[\xi, X] = [\xi, \varphi X], \qquad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M). \tag{4.1.2}$$

En particular,

$$[\xi, X] \in \Gamma(\mathcal{D}), \qquad \text{para todo } X \in \Gamma(\mathcal{D}). \tag{4.1.3}$$

Una *estructura de casi contacto métrica* en M es una 4-upla (φ, ξ, η, g), donde (φ, ξ, η) es una estructura de casi contacto y g es una métrica riemanniana en M que satisface

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{4.1.4}$$

Esta ecuación implica que

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \qquad \text{y} \qquad g(\xi, X) = \eta(X),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Esto quiere decir que φ es antisimétrica y el campo de Reeb ξ es g-dual a la 1-forma η. En analogía con el contexto casi hermitiano, la 2-forma fundamental Φ se define por[1]

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y).$$

Una variedad de casi contacto normal S se dice *sasakiana* si $\mathrm{d}\eta = 2\Phi$. En particular, Φ es exacta y η es una forma de contacto en S, es decir, $\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n$ es una forma de volumen. Las variedades sasakianas forman la clase más importante de variedades de casi contacto, debido a su estrecha relación con las variedades Kähler. En efecto, el cono riemanniano de una variedad de casi contacto métrica equipado con la estructura casi compleja dada por (4.1.1) es Kähler si y sólo si la estructura de casi contacto es sasakiana.

Algunas propiedades de las variedades sasakianas que necesitaremos en las próximas secciones se indican en el siguiente lema.

Lema 4.1.1. *Si $(S, \varphi, \xi, \eta, g)$ es una variedad sasakiana con 2-forma fundamental $\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ y $\mathrm{d}\eta = 2\Phi$, entonces:*

(i) *ξ es un campo de Killing unitario en S,*

(ii) *$\nabla_X \xi = -\varphi X$ para todo $X \in \mathfrak{X}(S)$; en particular, $\nabla_\xi \xi = 0$,*

(iii) *$\nabla_\xi X = [\xi, X] - \varphi X$ para todo $X \in \mathfrak{X}(S)$,*

(iv) *$(\nabla_X \varphi) Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y) X$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$.*

La prueba del Lema 4.1.1 es estándar y puede encontrarse en [26].

4.1.1. Geometría transversal de las variedades sasakianas

Sea $(S, \varphi, \eta, \xi, g)$ una variedad sasakiana de dimensión $2n+1$. Recordemos que $\mathcal{D} = \operatorname{Ker} \eta = \operatorname{Im} \varphi$ es un subfibrado de TS de rango $2n$. La estructura sasakiana induce en $\mathcal{D}$ una conexión natural ∇^T llamada la conexión de Levi-Civita transversal, la cual está definida, para todo $U \in \Gamma(\mathcal{D})$, por

$$\nabla^T_\xi U = [\xi, U], \qquad \nabla^T_X U = (\nabla_X U)^{\mathcal{D}}, \quad X \in \Gamma(\mathcal{D}), \tag{4.1.5}$$

donde $(\cdot)^{\mathcal{D}}$ denota la proyección sobre $\mathcal{D}$. Esta es la única conexión en $\mathcal{D}$ que satisface

$$\nabla^T_X (\varphi|_{\mathcal{D}}) = 0, \qquad \nabla^T_X (g|_{\mathcal{D}}) = 0, \qquad \nabla^T_U V - \nabla^T_V U = [U, V]^{\mathcal{D}}, \tag{4.1.6}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(S)$ y $U, V \in \Gamma(\mathcal{D})$. Notar que

$$\nabla_U V = -\Phi(U, V)\xi + \nabla^T_U V, \quad U, V \in \Gamma(\mathcal{D}), \tag{4.1.7}$$

lo cual implica

$$[U, V] = -2\Phi(U, V)\xi + [U, V]^{\mathcal{D}}, \quad U, V \in \Gamma(\mathcal{D}). \tag{4.1.8}$$

Usando (4.1.5)–(4.1.8) obtenemos el siguiente resultado.

[1] Notar que definimos Φ ubicando el tensor φ en la segunda coordenada siguiendo la convención usual en geometría de contacto, por lo cual más adelante en este capítulo definiremos a la forma fundamental de la estructura hermitiana como $\omega = g(\cdot, J\cdot)$ a diferencia de lo usado en capítulos anteriores.

Lema 4.1.2. *Para todo $U, V, W \in \Gamma(\mathcal{D})$ valen las siguientes identidades:*

(i) $\nabla^T_{[U,V]^{\mathcal{D}}} W = \nabla^T_{[U,V]} W + 2\Phi(U,V)[\xi, W]$,

(ii) $\nabla_{[U,V]} W = 2\Phi(U,V)\varphi W - \Phi([U,V]^{\mathcal{D}}, W)\xi + \nabla^T_{[U,V]} W$,

(iii) $R(U,V)W = R^T(U,V)W + \Phi(V,W)\varphi U - \Phi(U,W)\varphi V - 2\Phi(U,V)\varphi W$,

(iv) $R(U,V)\xi = 0$.

Demostración. De (4.1.8) y (4.1.5) se deduce (i) pues:

$$\begin{aligned}\nabla^T_{[U,V]} W &= \nabla^T_{(-2\Phi(U,V)\xi + [U,V]^{\mathcal{D}})} W \\ &= -2\Phi(U,V)[\xi, W] + \nabla^T_{[U,V]^{\mathcal{D}}} W.\end{aligned}$$

Para (ii), usando (4.1.8) y (4.1.7) calculamos

$$\begin{aligned}\nabla_{[U,V]} W &= \nabla_{(-2\Phi(U,V)\xi + [U,V]^{\mathcal{D}})} W \\ &= -2\Phi(U,V)([\xi, W] - \varphi W) + \nabla_{[U,V]^{\mathcal{D}}} W \\ &= -2\Phi(U,V)([\xi, W] - \varphi W) - \Phi([U,V]^{\mathcal{D}}, W)\xi + \nabla^T_{[U,V]^{\mathcal{D}}} W \\ &= -2\Phi(U,V)([\xi, W] - \varphi W) - \Phi([U,V]^{\mathcal{D}}, W)\xi + \nabla^T_{[U,V]} W \\ &\quad + 2\Phi(U,V)[\xi, W] \\ &= 2\Phi(U,V)\varphi W - \Phi([U,V]^{\mathcal{D}}, W)\xi + \nabla^T_{[U,V]} W,\end{aligned}$$

donde hemos usado (i) en la cuarta igualdad.

Para (iii), partiendo de la definición $R(U,V)W = \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U,V]} W$ y usando (4.1.5), (4.1.8), Lema 4.1.1 y (ii) obtenemos

$$\begin{aligned}R(U,V)W = &-U(\Phi(V,W))\xi + \Phi(V,W)\varphi U - \Phi(U, \nabla^T_V W)\xi + \nabla^T_U \nabla^T_V W \\ &+ V(\Phi(U,W))\xi - \Phi(U,W)\varphi V + \Phi(V, \nabla^T_U W)\xi - \nabla^T_V \nabla^T_U W \\ &- (2\Phi(U,V)\varphi W - \Phi([U,V]^{\mathcal{D}}, W)\xi + \nabla^T_{[U,V]} W).\end{aligned}$$

Ahora, usando (i), la definición de Φ y (4.1.6) llegamos a

$$\begin{aligned}R(U,V)W = &-g(\nabla^T_U V, \varphi W)\xi - g(V, \varphi \nabla^T_U W)\xi + \Phi(V,W)\varphi U - g(U, \varphi \nabla^T_V W)\xi \\ &+ g(\nabla^T_V U, \varphi W)\xi + g(U, \varphi \nabla^T_V W)\xi - \Phi(U,W)\varphi V + g(V, \varphi \nabla^T_U W)\xi \\ &- 2\Phi(U,V)\varphi W + \Phi([U,V]^{\mathcal{D}}, W)\xi + R^T(U,V)W \\ = &\; R^T(U,V)W + \Phi(V,W)\varphi U - \Phi(U,W)\varphi V - 2\Phi(U,V)\varphi W,\end{aligned}$$

lo cual prueba (iii).

Para (iv), calculamos

$$\begin{aligned}R(U,V)\xi &= \nabla_U \nabla_V \xi - \nabla_V \nabla_U \xi - \nabla_{[U,V]} \xi \\ &= -\nabla_U \varphi V + \nabla_V \varphi U + \varphi[U,V] \\ &= \Phi(U, \varphi V)\xi - \nabla^T_U \varphi V - \Phi(V, \varphi U)\xi + \nabla^T_V \varphi U + \varphi[U,V]^{\mathcal{D}} \\ &= -g(U,V)\xi - \varphi \nabla^T_U V + g(V,U)\xi + \varphi \nabla^T_V U + \varphi[U,V]^{\mathcal{D}},\end{aligned}$$

de acuerdo al Lema 4.1.1(ii). Se sigue de (4.1.6) que esta última expresión se anula. Por lo tanto, $R(U,V)\xi = 0$, y la prueba queda completa. □

Corolario 4.1.3. *Para todo $U, V \in \Gamma(\mathcal{D})$, el endomorfismo de curvatura $R(U,V)$ preserva $\mathcal{D}$. Más aún, para $V = \varphi U$ tenemos que $R(U, \varphi U)|_{\mathcal{D}}$ conmuta con $\varphi|_{\mathcal{D}}$.*

4.2. Estructuras hermitianas en productos de variedades sasakianas

Recordamos a continuación la siguiente construcción desarrollada independientemente por Tsukada [145] y Watson [155], ambas basadas en una construcción previa debida a Morimoto [116], usando ideas de [37]. Con esta construcción, uno puede definir una estructura hermitiana en el producto de dos variedades equipadas con estructuras de casi contacto normales métricas. Nos enfocaremos luego en el producto de variedades sasakianas.

Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables de dimensión $2n_1+1$ y $2n_2+1$, y sean $(\varphi_1,\xi_1,\eta_1,g_1)$ y $(\varphi_2,\xi_2,\eta_2,g_2)$ estructuras de casi contacto métricas en M_1 y M_2, respectivamente.

Para $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$, se puede construir una estructura casi hermitiana $(J_{a,b},g_{a,b})$ en la variedad producto $M := M_1\times M_2$ como sigue: para $X_1\in\mathfrak{X}(M_1)$ y $X_2\in\mathfrak{X}(M_2)$, se define una estructura casi compleja $J_{a,b}$ en M por

$$\begin{aligned} J_{a,b}(X_1+X_2) = \varphi_1 X_1 - \left(\frac{a}{b}\eta_1(X_1) + \frac{a^2+b^2}{b}\eta_2(X_2)\right)\xi_1 \\ + \varphi_2 X_2 + \left(\frac{1}{b}\eta_1(X_1) + \frac{a}{b}\eta_2(X_2)\right)\xi_2. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

A continuación, se define la métrica riemanniana $g_{a,b}$ en M por

$$\begin{aligned} g_{a,b}(X_1+X_2,Y_1+Y_2) = g_1(X_1,Y_1) + a[\eta_1(X_1)\eta_2(Y_2)+\eta_1(Y_1)\eta_2(X_2)] \\ + g_2(X_2,Y_2) + (a^2+b^2-1)\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2). \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Es un ejercicio sencillo sobre formas cuadráticas verificar que $g_{a,b}$ es definida positiva y $J_{a,b}$ es hermitiana con respecto a $g_{a,b}$.

Pensando a $\mathfrak{X}(M_1)$ y $\mathfrak{X}(M_2)$ como subálgebras de $\mathfrak{X}(M)$ de la manera natural, (4.2.1) y (4.2.2) se pueden reescribir del siguiente modo, donde $U_i\in\Gamma(\mathcal{D}_i)$:

$$\begin{aligned} J_{a,b}\xi_1 &= -\frac{a}{b}\xi_1 + \frac{1}{b}\xi_2, \\ J_{a,b}U_1 &= \varphi_1 U_1, \\ J_{a,b}\xi_2 &= -\frac{a^2+b^2}{b}\xi_1 + \frac{a}{b}\xi_2, \\ J_{a,b}U_2 &= \varphi_2 U_2, \end{aligned}$$

y, para $X_i,Y_i\in\mathfrak{X}(M_i)$:

$$\begin{aligned} g_{a,b}(X_1,Y_1) &= g_1(X_1,Y_1), \\ g_{a,b}(X_1,X_2) &= a\eta_1(X_1)\eta_2(X_2), \\ g_{a,b}(X_2,Y_2) &= g_2(X_2,Y_2) + (a^2+b^2-1)\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2). \end{aligned}$$

Notemos que $g_{a,b}$ coincide con g_1 en M_1 y con g_2 en $\mathcal{D}_2$, pero modifica la longitud de ξ_2 por un factor de a^2+b^2; además, ξ_1 y ξ_2 no son más ortogonales si $a\neq 0$. Más aún, $g_{a,b}$ es la métrica producto $g_1\times g_2$ si y sólo si $a=0, b=\pm 1$.

La construcción original de Morimoto se corresponde con $a=0$, $b=1$, quien además probó el siguiente resultado.

Proposición 4.2.1. [116, Proposition 3] *Sean (φ_1,ξ_1,η_1) y (φ_2,ξ_2,η_2) estructuras de casi contacto en M_1 y M_2, respectivamente. Entonces la estructura casi compleja $J_{0,1}$ en $M=M_1\times M_2$ es integrable si y sólo si ambas estructuras de casi contacto son normales.*

Más generalmente, se puede probar de manera análoga el siguiente resultado.

Proposición 4.2.2. *Sean $(\varphi_1, \xi_1, \eta_1)$ y $(\varphi_2, \xi_2, \eta_2)$ estructuras de casi contacto en M_1 y M_2, respectivamente. Si ambas estructuras de casi contacto son normales entonces la estructura casi compleja $J_{a,b}$ es integrable para $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.*

De ahora en adelante, trataremos solamente el caso en que $(S_1, \varphi_1, \xi_1, \eta_1, g_1)$ y $(S_2, \varphi_2, \xi_2, \eta_2, g_2)$ son variedades sasakianas. Denotaremos por $M_{a,b}$ a la variedad producto $S_1 \times S_2$ equipada con la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$. Más aún, por simplicidad denotaremos $J \coloneqq J_{a,b}$, $g \coloneqq g_{a,b}$ puesto que no habrá riesgo de confusión. A lo largo de este capítulo usaremos $\omega \coloneqq \omega_{a,b} = g_{a,b}(\cdot, J_{a,b}\cdot)$, a diferencia de la convención utilizada en el Capítulo 3, por cuestiones de compatibilidad con resultados conocidos.

En las siguientes secciones necesitaremos fórmulas explícitas para la conexión de Levi-Civita ∇ en $M_{a,b}$ asociada a g en términos de las conexiones de Levi-Civita ∇^1 y ∇^2 en (S_1, g_1) y (S_2, g_2), respectivamente. Utilizaremos las siguientes expresiones que aparecen por ejemplo en [103].

Dados $X_i, Y_i, Z_i \in \mathfrak{X}(S_i)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
&g(\nabla_{X_1} Y_1, Z_1) = g_1(\nabla^1_{X_1} Y_1, Z_1), \quad g(\nabla_{X_1} Y_1, Z_2) = a\eta_1(\nabla^1_{X_1} Y_1)\eta_2(Z_2),\\
&g(\nabla_{X_2} Y_2, Z_1) = a\eta_2(\nabla^2_{X_2} Y_2)\eta_1(Z_1),\\
&g(\nabla_{X_2} Y_2, Z_2) = g_2(\nabla^2_{X_2} Y_2, Z_2) + (a^2 + b^2 - 1)[\eta_2(\nabla^2_{X_2} Y_2)\eta_2(Z_2)\\
&\qquad\qquad - \eta_2(X_2)g_2(\varphi_2 Y_2, Z_2) - \eta_2(Y_2)g_2(\varphi_2 X_2, Z_2)],\\
&g(\nabla_{X_1} Y_2, Z_1) = -a\eta_2(Y_2)g_1(\varphi_1 X_1, Z_1), \quad g(\nabla_{X_1} Y_2, Z_2) = -a\eta_1(X_1)g_2(\varphi_2 Y_2, Z_2),\\
&g(\nabla_{X_2} Y_1, Z_1) = -a\eta_2(X_2)g_1(\varphi_1 Y_1, Z_1), \quad g(\nabla_{X_2} Y_1, Z_2) = -a\eta_1(Y_1)g_2(\varphi_2 X_2, Z_2).
\end{aligned}
\tag{4.2.3}
$$

Del conjunto de ecuaciones (4.2.3) se desprende el siguiente resultado, cuya demostración es inmediata.

Corolario 4.2.3. *Con la notación de arriba,*

(i) $\nabla_{X_1} Y_1 = \nabla^1_{X_1} Y_1 \in \mathfrak{X}(S_1)$,

(ii) $\nabla_{X_2} Y_2 = \nabla^2_{X_2} Y_2 - (a^2 + b^2 - 1)[\eta_2(X_2)\varphi_2 Y_2 + \eta_2(Y_2)\varphi_2 X_2] \in \mathfrak{X}(S_2)$,

(iii) $\nabla_{X_1} Y_2 = -a[\eta_2(Y_2)\varphi_1 X_1 + \eta_1(X_1)\varphi_2 Y_2] \in \mathfrak{X}(S_1) \oplus \mathfrak{X}(S_2)$,

(iv) $\nabla_{X_2} Y_1 = -a[\eta_2(X_2)\varphi_1 Y_1 + \eta_1(Y_1)\varphi_2 X_2] \in \mathfrak{X}(S_1) \oplus \mathfrak{X}(S_2)$.

En particular, $\nabla_{\xi_1}\xi_1 = \nabla_{\xi_2}\xi_2 = \nabla_{\xi_1}\xi_2 = \nabla_{\xi_2}\xi_1 = 0$.

Usando este corolario calculamos ∇J, el cual necesitaremos en la prueba del Lema 4.3.2 más abajo.

Lema 4.2.4. *Para todo $X_i, Y_i \in \mathfrak{X}(S_i)$, $i = 1, 2$,*

(i) $(\nabla_{X_1} J)Y_1 = g_1(X_1, Y_1)\xi_1 - \eta_1(Y_1)X_1 - \frac{a}{b}\Phi_1(X_1, Y_1)\xi_1 + \frac{1}{b}\Phi_1(X_1, Y_1)\xi_2$,

(ii) $$(\nabla_{X_2} J)Y_2 = [g_2(X_2, Y_2) + (a^2 + b^2 - 1)\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2)]\xi_2 - (a^2 + b^2)\eta_2(Y_2)X_2 - \frac{a^2 + b^2}{b}\Phi_2(X_2, Y_2)\xi_1 + \frac{a}{b}\Phi_2(X_2, Y_2)\xi_2,$$

(iii) $(\nabla_{X_1} J)Y_2 = a\eta_2(Y_2)\eta_1(X_1)\xi_1 - a\eta_2(Y_2)X_1 + b\eta_2(Y_2)\varphi_1 X_1$,

(iv) $(\nabla_{X_2} J)Y_1 = a[\eta_1(Y_1)\eta_2(X_2)\xi_2 - \eta_1(Y_1)X_2] - b\eta_1(Y_1)\varphi_2 X_2$.

En particular, $\nabla_{\xi_1} J = 0$ *y* $\nabla_{\xi_2} J = 0$.

Demostración. Calculamos ∇J usando el Corolario 4.2.3 y la definición de J.

Para (i),

$$(\nabla_{X_1} J)Y_1 = \nabla_{X_1} JY_1 - J\nabla^1_{X_1} Y_1.$$

Vamos a expandir cada término en detalle. Por un lado,

$$\begin{aligned}\nabla_{X_1} JY_1 &= \nabla_{X_1}(\varphi_1 Y_1 - \frac{a}{b}\eta_1(Y_1)\xi_1 + \frac{1}{b}\eta_1(Y_1)\xi_2) \\ &= \nabla^1_{X_1}\varphi_1 Y_1 - \frac{a}{b}(X_1(\eta_1(Y_1))\xi_1 - \eta_1(Y_1)\varphi_1 X_1) \\ &\quad + \frac{1}{b}(X_1(\eta_1(Y_1))\xi_2 - a\eta_1(Y_1)\varphi_1 X_1).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$-J\nabla^1_{X_1} Y_1 = -\varphi_1\nabla^1_{X_1} Y_1 + \frac{a}{b}\eta_1(\nabla^1_{X_1} Y_1)\xi_1 - \frac{1}{b}\eta_1(\nabla^1_{X_1} Y_1)\xi_2.$$

Juntando estas dos expresiones llegamos a

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_1} J)Y_1 &= (\nabla^1_{X_1}\varphi_1)Y_1 - \frac{a}{b} g_1(\nabla^1_{X_1}\xi_1, Y_1)\xi_1 + \frac{1}{b} g_1(\nabla^1_{X_1}\xi_1, Y_1)\xi_2 \\ &= g_1(X_1, Y_1)\xi_1 - \eta_1(Y_1)X_1 - \frac{a}{b}\Phi_1(X_1, Y_1)\xi_1 + \frac{1}{b}\Phi_1(X_1, Y_1)\xi_2,\end{aligned}$$

donde hemos usado el Lema 4.1.1(iv).

Ahora, para (ii),

$$(\nabla_{X_2} J)Y_2 = \nabla_{X_2} JY_2 - J(\nabla^2_{X_2} Y_2 - (a^2+b^2-1)[\eta_2(X_2)\varphi_2 Y_2 + \eta_2(Y_2)\varphi_2 X_2]).$$

El primer término es igual a

$$\begin{aligned}\nabla_{X_2} JY_2 &= \nabla_{X_2}(\varphi_2 Y_2 - \frac{a^2+b^2}{b}\eta_2(Y_2)\xi_1 + \frac{a}{b}\eta_2(Y_2)\xi_2) \\ &= \nabla^2_{X_2}\varphi_2 Y_2 - (a^2+b^2-1)\eta_2(X_2)\varphi_2^2 Y_2 - \frac{a^2+b^2}{b}(X_2(\eta_2(Y_2))\xi_1 - a\eta_2(Y_2)\varphi_2 X_2) \\ &\quad + \frac{a}{b}(X_2(\eta_2(Y_2))\xi_2 - (a^2+b^2)\eta_2(X_2)\varphi_2 X_2),\end{aligned}$$

y el segundo término es igual a

$$\begin{aligned}&-\varphi_2(\nabla^2_{X_2} Y_2 - (a^2+b^2-1)[\eta_2(X_2)\varphi_2 Y_2 + \eta_2(Y_2)\varphi_2 X_2]) \\ &\quad + \frac{a^2+b^2}{b}\eta_2(\nabla^2_{X_2} Y_2)\xi_1 - \frac{a}{b}\eta_2(\nabla^2_{X_2} Y_2)\xi_2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_2} J)Y_2 &= (\nabla^2_{X_2}\varphi_2)Y_2 + (a^2+b^2-1)\eta_2(Y_2)\varphi_2^2 X_2 - \frac{a^2+b^2}{b}\Phi_2(X_2, Y_2)\xi_1 + \frac{a}{b}\Phi_2(X_2, Y_2)\xi_2 \\ &= (g_2(X_2, Y_2) + (a^2+b^2-1)\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2))\xi_2 - (a^2+b^2)\eta_2(Y_2)X_2 \\ &\quad - \frac{a^2+b^2}{b}\Phi_2(X_2, Y_2)\xi_1 + \frac{a}{b}\Phi_2(X_2, Y_2)\xi_2,\end{aligned}$$

usando nuevamente el Lema 4.1.1(iv).

Finalmente, para (iii) y (iv) calculamos

$$\begin{aligned}
(\nabla_{X_1} J)Y_2 &= \nabla_{X_1}(\varphi_2 Y_2 - \frac{a^2+b^2}{b}\eta_2(Y_2)\xi_1 + \frac{a}{b}\eta_2(Y_2)\xi_2) + aJ(\eta_2(Y_2)\varphi_1 X_1 + \eta_1(X_1)\varphi_2 Y_2) \\
&= -a\eta_1(X_1)\varphi_2^2 Y_2 + b\eta_2(Y_2)\varphi_1 X_1 + a(\eta_2(Y_2)\varphi_1^2 X_1 + \eta_1(X_1)\varphi_2^2 Y_2) \\
&= a\eta_2(Y_2)\varphi_1^2 X_1 + b\eta_2(Y_2)\varphi_1 X_1 \\
&= a\eta_2(Y_2)\eta_1(X_1)\xi_1 - a\eta_2(Y_2)X_1 + b\eta_2(Y_2)\varphi_1 X_1, \\
(\nabla_{X_2} J)Y_1 &= \nabla_{X_2}(\varphi_1 Y_1 - \frac{a}{b}\eta_1(Y_1)\xi_1 + \frac{1}{b}\eta_1(Y_1)\xi_2) + aJ(\eta_2(X_2)\varphi_1 Y_1 + \eta_1(Y_1)\varphi_2 X_2) \\
&= -a\eta_2(X_2)\varphi_1^2 Y_1 - \frac{a}{b}\eta_1(Y_1)(-a\varphi_2 X_2) - \frac{a^2+b^2}{b}\eta_1(Y_1)\varphi_2 X_2 \\
&\quad + a(\eta_2(X_2)\varphi_1^2 Y_1 + \eta_1(Y_1)\varphi_2^2 X_2) \\
&= a[\eta_1(Y_1)\eta_2(X_2)\xi_2 - \eta_1(Y_1)X_2] - b\eta_1(Y_1)\varphi_2 X_2.
\end{aligned}$$

La última afirmación sigue de los cálculos previos. □

En el siguiente resultado R denota el tensor de curvatura de ∇, mientras que R^i denota el tensor de curvatura de ∇^i, $i = 1,2$. Calcularemos únicamente aquellos tensores de curvatura que necesitaremos en la prueba del Teorema 4.3.1. Denotamos $\lambda_{a,b} := a^2 + b^2 - 1$ para abreviar.

Lema 4.2.5. *Con la notación como arriba, para $U_i, V_i \in \Gamma(\mathcal{D}_i), Z_i \in \mathfrak{X}(S_i)$,*

(i) $R(\xi_1, \xi_2) = 0$,

(ii) $R(U_1,V_1)Z_1 = R^1(U_1,V_1)Z_1$ *y* $R(U_1,V_1)Z_2 = -2a\Phi_1(U_1,V_1)\varphi_2 Z_2$,

(iii) $R(U_2,V_2)Z_1 = -2a\Phi_2(U_2,V_2)\varphi_1 Z_1$, *y*
$R(U_2,V_2)Z_2 = R^2(U_2,V_2)Z_2 + \lambda_{a,b}[\Phi_2(V_2,Z_2)\varphi_2 U_2 - \Phi_2(U_2,Z_2)\varphi_2 V_2 - 2\Phi_2(U_2,V_2)\varphi_2 Z_2]$.

En particular, $R(U_i,V_i)\xi_1 = R(U_i,V_i)\xi_2 = 0$.

Demostración. Para (i), calculamos $R(\xi_1,\xi_2)Z_i$ para $Z_i \in \mathfrak{X}(S_i)$, $i = 1,2$, usando el Corolario 4.2.3 y propiedades de las variedades sasakianas como el Lema 4.1.1 y (4.1.2). Para Z_1 tenemos que

$$\begin{aligned}
R(\xi_1,\xi_2)Z_1 &= \nabla_{\xi_1}\nabla_{\xi_2} Z_1 - \nabla_{\xi_2}\nabla_{\xi_1} Z_1 \\
&= \nabla_{\xi_1}(-a\varphi_1 Z_1) - \nabla_{\xi_2}([\xi_1, Z_1] - \varphi_1 Z_1) \\
&= -a([\xi_1, \varphi_1 Z_1] - \varphi_1^2 Z_1) + a\varphi_1([\xi_1, Z_1] - \varphi_1 Z_1) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

y para Z_2,

$$\begin{aligned}
R(\xi_1,\xi_2)Z_2 &= \nabla_{\xi_1}\nabla_{\xi_2} Z_2 - \nabla_{\xi_2}\nabla_{\xi_1} Z_2 \\
&= \nabla_{\xi_1}([\xi_2, Z_2] - \varphi_2 Z_2 - (a^2+b^2-1)\varphi_2 Z_2) - \nabla_{\xi_2}(-a\varphi_2 Z_2) \\
&= -a(\varphi_2[\xi_2, Z_2] - (a^2+b^2)\varphi_2^2 Z_2) + a([\xi_2, \varphi_2 Z_2] - \varphi_2^2 Z_2 - (a^2+b^2-1)\varphi_2^2 Z_2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

de donde (i) queda probado.

Para (ii), primero notemos que $R(U_1,V_1)Z_1 = R^1(U_1,V_1)Z_1$ sigue de $\nabla_{X_1}Y_1 = \nabla^1_{X_1}Y_1$, donde $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(S_1)$. Para Z_2, hacemos el cálculo usando el Corolario 4.2.3.

$$\begin{aligned}
R(U_1,V_1)Z_2 &= \nabla_{U_1}\nabla_{V_1}Z_2 - \nabla_{V_1}\nabla_{U_1}Z_2 - \nabla_{[U_1,V_1]}Z_2 \\
&= \nabla_{U_1}(-a\eta_2(Z_2)\varphi_1 V_1) - \nabla_{V_1}(-a\eta_2(Z_2)\varphi_1 U_1) + a[\eta_2(Z_2)\varphi_1[U_1,V_1] + \eta_1([U_1,V_1])\varphi_2 Z_2] \\
&= a\eta_2(Z_2)(-\nabla_{U_1}\varphi_1 V_1 + \nabla_{V_1}\varphi_1 U_1 + \varphi_1[U_1,V_1]) + a\eta_1([U_1,V_1])\varphi_2 Z_2 \\
&= -a\eta_2(Z_2)(\Phi_1(U_1,\varphi_1 V_1)\xi_1 - \nabla^{1,T}_{U_1}\varphi_1 V_1 - \Phi(V_1,\varphi_1 U_1)\xi_1 \\
&\quad + \nabla^{1,T}_{V_1}\varphi_1 U_1 + \varphi_1(\nabla^{1,T}_{U_1}V_1 - \nabla^{1,T}_{V_1}U_1)) - 2a\Phi_1(U_1,V_1)\varphi_2 Z_2 \\
&= -2a\Phi_1(U_1,V_1)\varphi_2 Z_2,
\end{aligned}$$

debido a (4.1.6), donde $\nabla^{1,T}$ denota la conexión transversal de la variedad sasakiana S_1.

Para (iii), el cálculo de $R(U_2,V_2)Z_1$ es completamente análogo al cálculo de $R(U_1,V_1)Z_2$ en (ii) por lo que lo omitimos. Finalmente, calculamos

$$\begin{aligned}
R(U_2,V_2)Z_2 &= \nabla_{U_2}\nabla_{V_2}Z_2 - \nabla_{V_2}\nabla_{U_2}Z_2 - \nabla_{[U_2,V_2]}Z_2 \\
&= \nabla_{U_2}(\nabla^2_{V_2}Z_2 - \lambda_{a,b}\eta_2(Z_2)\varphi_2 V_2) - \nabla_{V_2}(\nabla^2_{U_2}Z_2 - \lambda_{a,b}\eta_2(Z_2)\varphi_2 U_2) \\
&\quad - \nabla^2_{[U_2,V_2]}Z_2 + \lambda_{a,b}[\eta_2(Z_2)\varphi_2[U_2,V_2] + \eta_2([U_2,V_2])\varphi_2 Z_2] \\
&= \nabla^2_{U_2}\nabla^2_{V_2}Z_2 - \lambda_{a,b}\eta_2(\nabla^2_{V_2}Z_2)\varphi_2 U_2 \\
&\quad - \lambda_{a,b}\,(U_2(\eta_2(Z_2))\varphi_2 V_2 + \eta_2(Z_2)\nabla_{U_2}\varphi_2 V_2) \\
&\quad - \nabla^2_{V_2}\nabla^2_{U_2}Z_2 + \lambda_{a,b}\eta_2(\nabla^2_{U_2}Z_2)\varphi_2 V_2 \\
&\quad + \lambda_{a,b}\,(V_2(\eta_2(Z_2))\varphi_2 U_2 + \eta_2(Z_2)\nabla_{V_2}\varphi_2 U_2) \\
&\quad - \nabla^2_{[U_2,V_2]}Z_2 + \lambda_{a,b}[\eta_2(Z_2)\varphi_2[U_2,V_2] - 2\Phi_2(U_2,V_2)\varphi_2 Z_2] \\
&= R^2(U_2,V_2)Z_2 - \lambda_{a,b}\,(g_2(\varphi_2 V_2,Z_2)\varphi_2 U_2 - g_2(\varphi_2 U_2,Z_2)\varphi_2 V_2) \\
&\quad - \lambda_{a,b}\eta_2(Z_2)\Big(-\Phi_2(U_2,\varphi_2 V_2)\xi_2 + \nabla^{2,T}_{U_2}\varphi_2 V_2 \\
&\quad +\Phi_2(V_2,\varphi_2 U_2)\xi_2 - \nabla^{2,T}_{V_2}\varphi_2 U_2 - \varphi_2(\nabla^{2,T}_{U_2}V_2 - \nabla^{2,T}_{V_2}U_2)\Big) \\
&\quad - 2\lambda_{a,b}\Phi_2(U_2,V_2)\varphi_2 Z_2 \\
&= R^2(U_2,V_2)Z_2 \\
&\quad + \lambda_{a,b}(\Phi_2(V_2,Z_2)\varphi_2 U_2 - \Phi_2(U_2,Z_2)\varphi_2 V_2 - 2\Phi_2(U_2,V_2)\varphi_2 Z_2).
\end{aligned}$$

La última afirmación se sigue fácilmente de (ii), (iii) y el Lema 4.1.2 (iv). □

4.3. Armonicidad de la estructura compleja $J_{a,b}$ con respecto a $g_{a,b}$

El resultado principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 4.3.1. *Sean $(S_1^{2n_1+1},\varphi_1,\xi_1,\eta_1,g_1)$ y $(S_2^{2n_2+1},\varphi_2,\xi_2,\eta_2,g_2)$ dos variedades sasakianas. Si $(J,g) := (J_{a,b},g_{a,b})$ denota la estructura compleja en $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ dada en (4.2.1) y (4.2.2) entonces J es armónica con respecto a g, para todo $a,b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.*

Para demostrar este teorema utilizaremos la Proposición 1.1.30 del Capítulo 1. Primero probamos un resultado auxiliar, que generaliza [145, Lemma 5.4], donde es considerado el caso de las variedades de Calabi-Eckmann.

Lema 4.3.2. *Con la notación del Teorema 4.3.1, la codiferencial δJ de la estructura compleja J en $M_{a,b}$ está dada por:*

$$\delta J = 2n_1\xi_1 + 2n_2\xi_2.$$

Más aún, $\nabla_{\delta J} J = 0$.

Demostración. Calcularemos δJ usando (1.1.7). Consideremos un marco ortonormal local en $M_{a,b}$ como sigue:

$$\left\{\xi_1, J\xi_1 = -\frac{a}{b}\xi_1 + \frac{1}{b}\xi_2, e_1, \dots, e_{2n_1}, f_1, \dots, f_{2n_2}\right\},$$

donde cada e_j es una sección local de $\mathcal{D}_1$ y cada f_k es una sección local de $\mathcal{D}_2$. En este marco, (1.1.7) se convierte en

$$\delta J = (\nabla_{\xi_1} J)\xi_1 + (\nabla_{J\xi_1} J)J\xi_1 + \sum_{j=1}^{2n_1}(\nabla_{e_j} J)e_j + \sum_{k=1}^{2n_2}(\nabla_{f_k} J)f_k.$$

Dado que J es integrable, se sigue de [79, Corollary 2.2] que $(\nabla_{J\xi_1} J)J\xi_1 = (\nabla_{\xi_1} J)\xi_1$. Por lo tanto, sigue del Lema 4.2.4 que $(\nabla_{\xi_1} J)\xi_1 = (\nabla_{J\xi_1} J)J\xi_1 = 0$, $(\nabla_{e_j} J)e_j = \xi_1$ y $(\nabla_{f_k} J)f_k = \xi_2$, de modo que

$$\delta J = \sum_{j=1}^{2n_1}\xi_1 + \sum_{k=1}^{2n_2}\xi_2 = 2n_1\xi_1 + 2n_2\xi_2,$$

como queríamos probar.

Finalmente, la última afirmación sigue del Lema 4.2.4. □

Demostración del Teorema 4.3.1. Como en el Lema 4.3.2, consideramos un marco ortonormal local en $M_{a,b}$ como sigue:

$$\left\{\xi_1, J\xi_1 = -\frac{a}{b}\xi_1 + \frac{1}{b}\xi_2, e_1, \dots, e_{2n_1}, f_1, \dots, f_{2n_2}\right\}, \tag{4.3.1}$$

donde cada e_j es una sección local de $\mathcal{D}_1$ y cada f_k es una sección local de $\mathcal{D}_2$.

Como J es integrable, sigue de la Proposición 1.1.30 y del Lema 4.3.2 que J es armónica si y sólo si $[J, P] = 0$, con P definida como en (1.1.6) para el marco local (4.3.1). Mostramos a continuación que J y P conmutan. Empezamos por calcular P:

$$\begin{aligned} -2P &= 2R(\xi_1, J\xi_1) + \sum_j R(e_j, \varphi_1 e_j) + \sum_k R(f_k, \varphi_2 f_k) \\ &= \sum_j R(e_j, \varphi_1 e_j) + \sum_k R(f_k, \varphi_2 f_k), \end{aligned}$$

debido al Lema 4.2.5.

Veamos que $[J, R(e_j, \varphi_1 e_j)] = [J, R(f_k, \varphi_2 f_k)] = 0$. Dado que $R(e_j, \varphi_1 e_j)\xi_i = R(f_k, \varphi_1 f_k)\xi_i = 0$ para $i = 1, 2$, es suficiente mostrar que $[J, R(e_j, \varphi_1 e_j)]$ y $[J, R(f_k, \varphi_2 f_k)]$ se anulan al evaluar en secciones de $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$. Para todos los cálculos que siguen usamos el Lema 4.2.5. Primero, si $U_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_1)$, calculamos

$$[J, R(e_j, \varphi_1 e_j)](U_1) = J(R^1(e_j, \varphi_1 e_j)U_1) - R^1(e_j, \varphi_1 e_j)\varphi_1 U_1 = 0,$$

gracias al Corolario 4.1.3. Luego, para $U_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$,

$$\begin{aligned} [J, R(e_j, \varphi_1 e_j)](U_2) &= 2a\Phi_1(e_j, \varphi_1 e_j)U_2 - R(e_j, \varphi_1 e_j)\varphi_2 U_2 \\ &= 2a\Phi_1(e_j, \varphi_1 e_j)U_2 - 2a\Phi_1(e_j, \varphi_1 e_j)U_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$[J, R(f_k, \varphi_2 f_k)](U_1) = 2a\Phi_2(f_k, \varphi_2 f_k)U_1 - 2a\Phi_2(f_k, \varphi_2 f_k)U_1 = 0.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}[J, R(f_k, \varphi_2 f_k)](U_2) &= J(R(f_k, \varphi_2 f_k)U_2) - R(f_k, \varphi_2 f_k)\varphi_2 U_2 \\ &= J(R^2(f_k, \varphi_2 f_k)U_2) - R^2(f_k, \varphi_2 f_k)\varphi_2 U_2 \\ &\quad + \lambda_{a,b}(-\Phi_2(\varphi_2 f_k, U_2)f_k + \Phi_2(f_k, U_2)\varphi_2 f_k \\ &\qquad + 2\Phi_2(f_k, \varphi_2 f_k)U_2) \\ &\quad - \lambda_{a,b}(\Phi_2(\varphi_2 f_k, \varphi_2 U_2)\varphi_2 f_k + \Phi_2(f_k, \varphi_2 U_2)f_k \\ &\qquad + 2\Phi_2(f_k, \varphi_2 f_k)U_2) \\ &= 0,\end{aligned}$$

pues $J(R^2(f_k, \varphi_2 f_k)U_2) = \varphi_2(R^2(f_k, \varphi_2 f_k)U_2)$ debido al Corolario 4.1.3. Se sigue que $[J, P] = 0$ y así la estructura compleja $J = J_{a,b}$ es armónica con respecto a la métrica $g = g_{a,b}$. □

Observación 4.3.3. Como mencionamos antes, Wood probó que las variedades de Calabi-Eckmann equipadas con el producto de las métricas redondas son armónicas. Más aún, mostró que, con la posible excepción de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ y $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, las variedades de Calabi-Eckmann son *inestables* (ver [158, §7]), esto es, no son un mínimo local del problema variacional (o equivalentemente, la segunda variación de la energía es positiva, ver [157]). Sin embargo, su prueba depende fuertemente de propiedades geométricas de la métrica redonda en la esfera. Esto podría indicar que el estudio de la estabilidad en general en un producto de variedades sasakianas es más complicado.

4.4. Otras propiedades geométricas de las estructuras hermitianas $(J_{a,b}, g_{a,b})$

En esta sección nos centraremos en los productos de variedades sasakianas que admiten estructuras hermitianas especiales.

Como en secciones previas, S_1 y S_2 denotarán variedades sasakianas con $\dim S_i = 2n_i + 1$, $n_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, 2$, y la variedad producto $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ estará equipada con la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ definida en (4.2.1) y (4.2.2).

La 2-forma fundamental $\omega_{a,b} = g_{a,b}(\cdot, J_{a,b}\cdot)$ asociada a $(J_{a,b}, g_{a,b})$ está dada por

$$\omega_{a,b} = \Phi_1 + \Phi_2 - b\eta_1 \wedge \eta_2, \tag{4.4.1}$$

donde Φ_i y η_i han sido extendidas al producto de manera natural. Dado que ambas variedades son sasakianas, la derivada exterior de $\omega_{a,b}$ está dada por

$$\mathrm{d}\omega_{a,b} = -2b(\Phi_1 \wedge \eta_2 - \eta_1 \wedge \Phi_2). \tag{4.4.2}$$

Como $b \neq 0$, es claro que $\mathrm{d}\omega_{a,b} = 0$ si y sólo si $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$, lo cual ocurre únicamente cuando $n_1 = n_2 = 0$, esto es, $\dim S_1 = \dim S_2 = 1$, por tanto $\dim M_{a,b} = 2$. Como nos interesa el contexto no Kähler, de ahora en más asumiremos que $n_1 + n_2 \geq 1$, de manera que $\dim M_{a,b} \geq 4$.

En relación a las estructuras hermitianas $(J_{a,b}, g_{a,b})$, Matsuo probó en [110] que una tal estructura hermitiana es astheno-Kähler si y sólo si se cumple la siguiente condición:

$$n_1(n_1 - 1) + 2an_1n_2 + n_2(n_2 - 1)(a^2 + b^2) = 0, \tag{4.4.3}$$

asumiendo que $n_1+n_2 \geq 2$, es decir, $\dim_{\mathbb{C}}(S_1\times S_2)\geq 3$. Luego, en [61], Fino y Ugarte estudiaron cuándo la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es 1-Gauduchon y obtuvieron que esto sucede si y sólo si (4.4.3) se cumple, esto es, si y sólo si es astheno-Kähler.

Observación 4.4.1. Para cualesquiera n_1 y n_2 tales que $n_1+n_2\geq 2$ y $n_2 \geq 1$ hay valores de a y b tales que $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es astheno-Kähler. En efecto, si $n_2 = n_1 = 1$ entonces $a = 0$, y si $n_2 = 1$, $n_1 \geq 2$, entonces $a = -\frac{n_1-1}{2}$; en ambos casos b es arbitrario. Finalmente, si $n_2 \geq 2$ los posibles valores de a, b satisfacen

$$a \in \left(-\frac{n_1}{n_2-1} - \frac{\sqrt{n_1n_2(n_1+n_2-1)}}{n_2(n_2-1)}, -\frac{n_1}{n_2-1} + \frac{\sqrt{n_1n_2(n_1+n_2-1)}}{n_2(n_2-1)}\right),$$

y

$$b^2 = -a^2 - \frac{2n_1n_2a + n_1(n_1-1)}{n_2(n_2-1)} > 0.$$

Cabe resaltar que si la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es astheno-Kähler entonces $a \leq 0$, y más aún, $a = 0$ si y sólo si $n_1 = n_2 = 1$. En consecuencia, la estructura de Morimoto $(J_{0,1}, g_{0,1})$ satisface (4.4.3) si y sólo si $n_1 = n_2 = 1$.

En los siguientes resultados estudiamos cuándo $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ pertenece a una de las clases especiales de estructuras hermitianas que mencionamos previamente, a saber: balanceadas, LCK, SKT, y k-Gauduchon $(2 \leq k \leq n-1)$.

Proposición 4.4.2. *La estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $M_{a,b} = S_1 \times S_2$, con $n_1 + n_2 \geq 1$, no es balanceada.*

Demostración. La estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es balanceada si y sólo si $\delta\omega_{a,b} = 0$, donde $\omega_{a,b}$ es la 2-forma fundamental asociada y δ es la codiferencial. De manera equivalente, $\delta J_{a,b} = 0$, donde $\delta J_{a,b}$ es el campo vectorial en $M_{a,b}$ dual a $\delta\omega_{a,b}$. Sin embargo, sigue del Lema 4.3.2 que $\delta J_{a,b} = 2n_1\xi_1 + 2n_2\xi_2 \neq 0$ dado que $n_1 + n_2 \geq 1$. □

Observación 4.4.3. Algunos productos $S_1 \times S_2$ de variedades sasakianas admiten estructuras hermitianas balanceadas, que no son de la forma $(J_{a,b}, g_{a,b})$. Por ejemplo, si H_3 denota el grupo de Heisenberg de dimensión 3, es un hecho conocido que H_3 admite una estructura sasakiana invariante a izquierda natural (ver Tabla 4.1 en §4.5.1 abajo). Por otro lado, en [58, 147] se probó que $G := H_3 \times H_3$ admite una estructura hermitiana balanceada invariante a izquierda. Si Γ_1 y Γ_2 son retículos de H_3 entonces $\Gamma := \Gamma_1 \times \Gamma_2$ es un retículo de G y por lo tanto la nilvariedad $\Gamma\backslash G \cong (\Gamma_1\backslash H_3) \times (\Gamma_2\backslash H_3)$ es un producto de variedades sasakianas que admite una estructura hermitiana balanceada.

Proposición 4.4.4. *La estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ es LCK no Kähler si y sólo si* $\dim S_1 = 1$ *y* $\dim S_2 \geq 3$ *o* $\dim S_2 = 1$ *y* $\dim S_1 \geq 3$. *Más aún, la estructura LCK es Vaisman.*

Demostración. Según (1.1.2), la forma de Lee θ asociada a $(J_{a,b}, g_{a,b})$ está dada por

$$\theta = \frac{1}{n_1+n_2}\delta\omega_{a,b} \circ J_{a,b}.$$

Como consecuencia del Lema 4.3.2, junto con (4.2.1) y (4.2.2), se llega de manera sencilla a la siguiente expresión para θ:

$$\theta = \frac{2b}{n_1+n_2}(n_2\eta_1 - n_1\eta_2). \tag{4.4.4}$$

Reemplazando (4.4.1), (4.4.2) y (4.4.4) en la condición LCK $d\omega = \theta \wedge \omega$, obtenemos que

$$-n_2\Phi_1 \wedge \eta_2 + n_1\eta_1 \wedge \Phi_2 = n_2\eta_1 \wedge \Phi_1 - n_1\eta_2 \wedge \Phi_2.$$

Al comparar las componentes en S_1 y S_2 de cada término de esta ecuación, observamos que todos los términos deben anularse, por lo que

$$n_2\Phi_1 \wedge \eta_2 = n_1\eta_1 \wedge \Phi_2 = n_2\eta_1 \wedge \Phi_1 = n_1\eta_2 \wedge \Phi_2 = 0.$$

Si $n_2 \neq 0$ entonces $\Phi_1 \wedge \eta_2 = \eta_1 \wedge \Phi_1 = 0$ y esto sucede si y sólo si $\Phi_1 = 0$, o equivalentemente $\dim S_1 = 1$. De manera similar, si $n_1 \neq 0$ entonces $\dim S_2 = 1$.

El hecho de que la estructura LCK resulta Vaisman, es decir, $\nabla\theta = 0$, sigue inmediatamente del Corolario 4.2.3. □

Ahora analizaremos las condiciones hermitianas que involucran al operador d^c. En primer lugar, se probó en [110] que $J_{a,b}\Phi_1 = \Phi_1$ y $J_{a,b}\Phi_2 = \Phi_2$ (donde $J_{a,b}$ actúa en formas como en (1.1.3)). Por otra parte, es fácil verificar que

$$J_{a,b}\eta_1 = \frac{a}{b}\eta_1 + \frac{a^2+b^2}{b}\eta_2, \quad J_{a,b}\eta_2 = -\frac{1}{b}\eta_1 - \frac{a}{b}\eta_2.$$

Usando esto, junto con (4.4.2) y la definición de d^c, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^c\omega_{a,b} &= 2[\Phi_1 \wedge (\eta_1 + a\eta_2) + \Phi_2 \wedge (a\eta_1 + (a^2+b^2)\eta_2)], \\ \mathrm{dd}^c\omega_{a,b} &= 4[\Phi_1^2 + 2a\Phi_1 \wedge \Phi_2 + (a^2+b^2)\Phi_2^2], \\ \mathrm{d}\omega_{a,b} \wedge \mathrm{d}^c\omega_{a,b} &= 4b[\Phi_1^2 + 2a\Phi_1 \wedge \Phi_2 + (a^2+b^2)\Phi_2^2] \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 \\ &= b\,\mathrm{dd}^c\omega_{a,b} \wedge \eta_1 \wedge \eta_2. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Proposición 4.4.5. *La estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ es SKT no Kähler si y sólo si:*

(*a*) $\dim M_{a,b} = 4$, *o*

(*b*) $\dim S_1 = \dim S_2 = 3$ *y* $a = 0$.

Demostración. La estructura hermitiana es SKT si y sólo si $\mathrm{dd}^c\omega_{a,b} = 0$. De las ecuaciones (4.4.5) se desprende que esto sucede si y sólo si

$$\Phi_1^2 + 2a\Phi_1 \wedge \Phi_2 + (a^2+b^2)\Phi_2^2 = 0.$$

Nuevamente comparando las componentes en S_1 y S_2 de cada término en esta ecuación, deducimos que la condición SKT es equivalente a

$$\Phi_1^2 = 0, \quad \Phi_2^2 = 0 \quad \text{y} \quad a\Phi_1 \wedge \Phi_2 = 0. \tag{4.4.6}$$

Si (4.4.6) se cumple, de las dos primeras igualdades obtenemos que $\dim S_i \leq 3$ para $i = 1, 2$. Como la métrica es no Kähler, $\dim S_i = 3$ para $i = 1$ o $i = 2$. Si $\dim S_1 = \dim S_2 = 3$, se sigue de $a\Phi_1 \wedge \Phi_2 = 0$ que $a = 0$.

Recíprocamente, si las condiciones en el enunciado valen entonces es claro que las ecuaciones (4.4.6) se satisfacen. □

Observación 4.4.6. Se deduce de la Proposición 4.4.5 que si $S_1 \times S_2$ admite una estructura SKT no Kähler entonces al menos uno de los factores tiene dimensión 3. De acuerdo con [70], toda variedad compacta sasakiana de dimensión 3 es difeomorfa a una de las siguientes variedades:

$$\mathbb{S}^3/\Gamma, \qquad H_3/\Gamma, \qquad \widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})/\Gamma,$$

donde Γ es un subgrupo discreto del grupo de isometrías de la correspondiente métrica sasakiana canónica.

Observación 4.4.7. Cabe resaltar que, en virtud de la Proposición 4.4.4 y la Proposición 4.4.5, las estructuras hermitianas $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en las superficies complejas $S_1 \times S_2$ con $\dim S_1 = 1$ y $\dim S_2 = 3$ son a la vez Vaisman y SKT. Esto no es una sorpresa puesto que fue probado en [60, Theorem A] que una métrica hermitiana en una superficie compleja es Vaisman si y sólo si la métrica es SKT y la conexión de Bismut satisface la primera identidad de Bianchi. El hecho de que esta segunda condición se cumpla sigue de [60, Theorem 3.2] y [23, Proposition 3.2].

En el siguiente teorema caracterizamos cuándo la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es k-Gauduchon para $\dim_{\mathbb{C}} M_{a,b} \geq 4$. Como el caso $k = 1$ ya fue resuelto en [61], nos restringiremos al caso $2 \leq k \leq n-1$. Como veremos a continuación, resulta que la métrica $g_{a,b}$ siempre es Gauduchon y, además, es k-Gauduchon con $2 \leq k \leq n-1$ si y sólo si es astheno-Kähler, así como en el caso $k = 1$.

Teorema 4.4.8. *Sea $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ un producto de variedades sasakianas con $n := n_1 + n_2 + 1 \geq 4$. Entonces la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $M_{a,b}$ es k-Gauduchon, con $2 \leq k \leq n-1$, si y sólo si las constantes a y b satisfacen*

$$(n-1-k)[n_1(n_1-1) + 2an_1n_2 + n_2(n_2-1)(a^2+b^2)] = 0. \tag{4.4.7}$$

En particular, $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es Gauduchon y es k-Gauduchon con $2 \leq k \leq n-2$ si y sólo si es astheno-Kähler.

Demostración. Para abreviar la notación vamos a denotar $J = J_{a,b}$ y $\omega = \omega_{a,b}$. Seguiremos las ideas de la prueba de [110, Theorem 4.1]. Usaremos las ecuaciones (4.4.5) y el hecho de que $J\omega^k = \omega^k$ para todo k debido a que ω es una $(1,1)$-forma en M. Para $2 \leq k \leq n-1$, calculamos

$$\begin{aligned}
\mathrm{dd}^c\omega^k \wedge \omega^{n-k-1} &= \mathrm{d}(J\,\mathrm{d}J\omega^k) \wedge \omega^{n-k-1} \\
&= k\ \mathrm{d}(J(\omega^{k-1} \wedge \mathrm{d}\omega)) \wedge \omega^{n-k-1} \\
&= k\ \mathrm{d}(\omega^{k-1} \wedge \mathrm{d}^c\omega) \wedge \omega^{n-k-1} \\
&= k[(k-1)\omega^{k-2} \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}^c\omega + \omega^{k-1} \wedge \mathrm{dd}^c\omega] \wedge \omega^{n-k-1} \\
&= k[(k-1)\,\mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}^c\omega + \omega \wedge \mathrm{dd}^c\omega] \wedge \omega^{n-3} \\
&= k\ \mathrm{dd}^c\omega \wedge [b(k-2)\eta_1 \wedge \eta_2 + \Phi_1 + \Phi_2] \wedge \omega^{n-3}.
\end{aligned}$$

Puesto que $(\eta_1 \wedge \eta_2)^2 = 0$, se deduce del teorema del binomio que

$$\begin{aligned}
\omega^{n-3} &= (\Phi_1 + \Phi_2 - b\,\eta_1 \wedge \eta_2)^{n-3} \\
&= (\Phi_1 + \Phi_2)^{n-3} - (n-3)(\Phi_1 + \Phi_2)^{n-4} \wedge (b\,\eta_1 \wedge \eta_2),
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{dd}^c\omega^k \wedge \omega^{n-k-1} &= k\ \mathrm{dd}^c\omega \wedge [b(k-n+1)(\Phi_1 + \Phi_2)^{n-3} \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 + (\Phi_1 + \Phi_2)^{n-2}] \\
&= k\ \mathrm{dd}^c\omega \wedge [b(k-n+1)\eta_1 \wedge \eta_2 + (\Phi_1 + \Phi_2)] \wedge (\Phi_1 + \Phi_2)^{n-3}.
\end{aligned}$$

Dado que $\Phi_1^p = 0$ cuando $p > n_1$ y que $\Phi_2^p = 0$ cuando $p > n_2$, un índice j satisface $j \leq n_1$ y $n-3-j \leq n_2$ sólo cuando $n_1 - 2 \leq j \leq n_1$. Por ello,

$$(\Phi_1 + \Phi_2)^{n-3} = \binom{n-3}{n_1-2}\Phi_1^{n_1-2} \wedge \Phi_2^{n_2} + \binom{n-3}{n_1-1}\Phi_1^{n_1-1} \wedge \Phi_2^{n_2-1} + \binom{n-3}{n_1}\Phi_1^{n_1} \wedge \Phi_2^{n_2-2}.$$

Por consiguiente, usando la expresión para $\mathrm{dd}^c\omega$ dada en (4.4.5), obtenemos que

$$\mathrm{dd}^c\omega^k \wedge \omega^{n-k-1} = 4bk(k-n+1)C(n,n_1)\Phi_1^{n_1} \wedge \Phi_2^{n_2} \wedge \eta_1 \wedge \eta_2,$$

donde $C(n,n_1) = \binom{n-3}{n_1-2} + 2a\binom{n-3}{n_1-1} + (a^2+b^2)\binom{n-3}{n_1}$.

Como $4bk \neq 0$ y $\Phi_1^{n_1} \wedge \Phi_2^{n_2} \wedge \eta_1 \wedge \eta_2$ es una forma de volumen en $M_{a,b}$, tenemos que $\mathrm{dd}^c\omega^k \wedge \omega^{n-k-1} = 0$ si y sólo si $(k-n+1)C(n,n_1) = 0$, y esto es equivalente a (4.4.7). $\square$

Analizamos ahora la condición k-Gauduchon en el caso $\dim_{\mathbb{C}} M_{a,b} = 3$. En [61] se estableció que la métrica $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es 1-Gauduchon si y sólo si es SKT si y sólo si $a = 0$. Tratamos entonces con el único caso no considerado que es $k = 2$, el cual corresponde a una métrica Gauduchon.

Proposición 4.4.9. *Sea $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ un producto de variedades sasakianas con $\dim_{\mathbb{C}} M_{a,b} = 3$. Entonces la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es Gauduchon.*

Demostración. De los cálculos en la prueba del Teorema 4.4.8 deducimos que

$$\begin{aligned} dd^c\omega^2 &= 2\, dd^c\omega \wedge (\Phi_1 + \Phi_2) \\ &= 8[\Phi_1^3 + (2a+1)\Phi_1^2 \wedge \Phi_2 + (a^2+b^2+2a)\Phi_1 \wedge \Phi_2^2 + (a^2+b^2)\Phi_2^3], \end{aligned}$$

usando (4.4.5). Debemos analizar 2 casos: (i) $\dim S_1 = \dim S_2 = 3$ y (ii) $\dim S_1 = 1$ y $\dim S_2 = 5$. Para (i), notar que $\Phi_i^2 = 0$ para $i = 1, 2$, por lo que $dd^c\omega^2 = 0$. Para (ii), tenemos que $\Phi_1 = 0$ y $\Phi_2^3 = 0$ por lo que nuevamente $dd^c\omega^2 = 0$. □

4.5. La conexión de Bismut en $S_1 \times S_2$

En esta sección damos una fórmula explícita para la conexión de Bismut ∇^B en $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ asociada a la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$, en términos de las conexiones características de las variedades sasakianas S_1 y S_2. A modo de aplicación estudiamos la curvatura de Ricci Ric^B y la forma de Ricci ρ^B asociadas a ∇^B. En particular, caracterizamos las estructuras hermitianas tales que $\mathrm{Ric}^B = 0$ y aquellas estructuras conocidas como Calabi-Yau con torsión, i.e. $\rho^B = 0$, en términos de variedades sasakianas η-Einstein. Usamos esta caracterización para proporcionar ejemplos de tales variedades.

Recordamos a continuación algunos hechos básicos sobre conexiones métricas con torsión totalmente antisimétrica. Para más detalles referimos a [2].

Se dice que una conexión métrica D con torsión T en una variedad riemanniana (M, g) tiene *torsión totalmente antisimétrica*, o *torsión antisimétrica* para abreviar, si el $(0,3)$-tensor T dado por

$$T(X,Y,Z) = g(T(X,Y), Z)$$

es una 3-forma.

La relación entre D y la conexión de Levi-Civita ∇ está dada por

$$D_X Y = \nabla_X Y + \tfrac{1}{2} T(X,Y). \tag{4.5.1}$$

En variedades hermitianas y también en variedades sasakianas existe una conexión métrica distinguida con torsión antisimétrica:

(1) En toda variedad hermitiana (M, J, g) existe una única conexión métrica ∇^B con torsión antisimétrica tal que $\nabla^B J = 0$ (ver [25]). Esta conexión se conoce como la conexión de *Bismut* (o de *Strominger*) y su torsión está dada por la 3-forma

$$T^B(X,Y,Z) = d^c\omega(X,Y,Z) = -d\omega(JX, JY, JZ),$$

donde $\omega = g(\cdot, J\cdot)$ es la 2-forma fundamental.

(2) Dada una variedad sasakiana $(S, \varphi, \xi, \eta, g)$ existe una única conexión métrica ∇^C con torsión antisimétrica tal que $\nabla^C \varphi = \nabla^C \eta = \nabla^C \xi = 0$ (ver [64]). Se conoce como la conexión *característica*[2]

[2] De hecho, en [64] se prueba que la conexión característica existe para una clase más amplia de variedades de casi contacto métricas, a saber, aquellas que satisfacen que N_φ es totalmente antisimétrico y ξ es un campo de Killing.

y su torsión está dada por $T^C = \eta \wedge d\eta$. Si consideramos T^C como el tensor $(1,2)$ usual dado por $T^C(X,Y) = \nabla^C_X Y - \nabla^C_Y X - [X,Y]$, obtenemos la siguiente fórmula para T^C:

$$T^C(X,Y) = 2(-\eta(X)\varphi Y + \eta(Y)\varphi X + \Phi(X,Y)\xi). \tag{4.5.2}$$

Calculamos a continuación la conexión de Bismut en $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ asociada a $(J_{a,b}, g_{a,b})$.

Proposición 4.5.1. *La conexión de Bismut ∇^B asociada a la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en el producto $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ de dos variedades sasakianas está dada por:*

(i) $\nabla^B_{X_1} Y_1 = \nabla^{1,C}_{X_1} Y_1 \in \mathfrak{X}(S_1)$,

(ii) $\nabla^B_{X_2} Y_2 = \nabla^{2,C}_{X_2} Y_2 - 2(a^2 + b^2 - 1)\eta_2(X_2)\varphi_2 Y_2 \in \mathfrak{X}(S_2)$,

(iii) $\nabla^B_{X_1} Y_2 = -2a\eta_1(X_1)\varphi_2 Y_2 \in \mathfrak{X}(S_2)$,

(iv) $\nabla^B_{X_2} Y_1 = -2a\eta_2(X_2)\varphi_1 Y_1 \in \mathfrak{X}(S_1)$,

donde $\nabla^{i,C}$ es la conexión característica en la variedad sasakiana S_i, $i = 1, 2$.

En particular, $\nabla^B \xi_1 = \nabla^B \xi_2 = 0$. Más aún, la forma de Lee θ asociada a $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es ∇^B-paralela, es decir $\nabla^B \theta = 0$.

Demostración. De la ecuación (4.4.2) se desprende la siguiente fórmula para T^B:

$$T^B = 2[\Phi_1 \wedge (\eta_1 + a\eta_2) + \Phi_2 \wedge (a\eta_1 + (a^2 + b^2)\eta_2)]. \tag{4.5.3}$$

Reemplazando T^B en (4.5.1) y usando las expresiones para la conexión de Levi-Civita obtenidas en el Corolario 4.2.3 obtenemos (i)-(iv).

De (i)-(iv) es inmediato verificar que ξ_1 y ξ_2 son ambos ∇^B-paralelos. De aquí, junto con el hecho de que η es ∇^C-paralela en una variedad sasakiana, se deduce que $\nabla^B \eta_1 = \nabla^B \eta_2 = 0$. Finalmente, sigue de (4.4.4) que $\nabla^B \theta = 0$. □

Corolario 4.5.2. *En la variedad producto $M_{0,1} = S_1 \times S_2$ equipada con la estructura de Morimoto $(J_{0,1}, g_{0,1})$, la conexión de Bismut asociada satisface*

$$\nabla^B_{X_1 + X_2}(Y_1 + Y_2) = \nabla^{1,C}_{X_1} Y_1 + \nabla^{2,C}_{X_2} Y_2.$$

En lo que sigue estudiaremos la anulación de las curvaturas de Ricci asociadas a ∇^B. Recordemos primero que en una variedad hermitiana (M^{2n}, J, g) el tensor de Ricci Ric^B y la forma de Ricci ρ^B de la conexión de Bismut ∇^B se definen del siguiente modo:

$$\mathrm{Ric}^B(X,Y) = \sum_{i=1}^{2n} g(R^B(u_i, X)Y, u_i), \quad \rho^B(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} g(R^B(X,Y)u_i, Ju_i), \tag{4.5.4}$$

donde $\{u_1, \ldots, u_{2n}\}$ es un marco ortonormal local de M. Calcularemos Ric^B y ρ^B usando fórmulas que aparecen en [90], y como consecuencia no habrá necesidad de calcular explícitamente el tensor de curvatura de Bismut R^B.

Usaremos la siguiente convención, siguiendo a [75, 76]. Diremos que una estructura hermitiana (J, g) en M es *Calabi-Yau con torsión* (CYT, para abreviar) si la forma de Ricci ρ^B asociada a ∇^B se anula idénticamente, o equivalentemente, el grupo de holonomía (restringido) de la conexión de Bismut está contenido en $\mathrm{SU}(n)$.

Resumiendo nuestro estudio de la conexión de Bismut en el producto de variedades sasakianas, recordamos el siguiente resultado probado en [23], el que también puede ser verificado usando la Proposición 4.5.1.

Proposición 4.5.3. [23, Proposition 3.2] *La conexión de Bismut ∇^B asociada a la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en la variedad producto $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ tiene torsión paralela, es decir, $\nabla^B T^B = 0$.*

En consecuencia, sigue de [40] que la curvatura de Bismut R^B asociada a $(J_{a,b}, g_{a,b})$ satisface

$$g(R^B(X,Y)Z,W) = g(R^B(Z,W)X,Y),$$

y de esta ecuación se puede ver inmediatamente que el tensor de Bismut-Ricci Ric^B es simétrico. De acuerdo con [90], esto es equivalente a que

$$\delta T^B = 0, \tag{4.5.5}$$

donde δ es la codiferencial y T^B es la 3-forma de torsión.

Observación 4.5.4. La Proposición 4.5.3 nos permite determinar cuáles de las estructuras hermitianas $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $M_{a,b}$ son *Kähler-like*, i.e. satisfacen, para cualesquiera campos vectoriales X, Y, Z, W,

- (Primera identidad de Bianchi) $R^B(X,Y,Z) + R^B(Y,Z,X) + R^B(Z,X,Y) = 0$,
- $R^B(X,Y,Z,W) = R^B(JX,JY,Z,W)$.

De hecho, la Proposición 4.5.3 implica la segunda condición debido a [11, Lemma 3.13]. Más aún, de [60, Theorem 3.2] sigue que la conexión de Bismut asociada a $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $M_{a,b}$ satisface la primera identidad de Bianchi si y sólo si $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es SKT. Por lo tanto, $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es Kähler-like si y sólo si es SKT.

Procedemos ahora a estudiar cuándo la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ satisface $\mathrm{Ric}^B = 0$ o $\rho^B = 0$. Veremos que estas estructuras están estrechamente relacionadas con una familia particular de variedades sasakianas, a saber, las η-Einstein.

Una variedad sasakiana $(S, \varphi, \xi, \eta, g)$ de dimensión $(2n+1)$ se dice *η-Einstein* si el tensor de curvatura de Ricci de la métrica g satisface la ecuación

$$\mathrm{Ric} = \lambda g + \nu \eta \otimes \eta, \tag{4.5.6}$$

para algunas constantes $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$.

Es sabido que en cualquier variedad sasakiana S el tensor de curvatura riemanniano R satisface

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$. Se deduce fácilmente de esta ecuación que $\mathrm{Ric}(\xi, X) = 2n\eta(X)$ para todo campo vectorial X en S; y usando este hecho obtenemos:

- $\lambda + \nu = 2n$,
- La condición de ser η-Einstein (4.5.6) con constantes $(\lambda, 2n-\lambda)$ es equivalente a

$$\mathrm{Ric}(U,V) = \lambda g(U,V), \qquad U, V \in \Gamma(\mathcal{D}). \tag{4.5.7}$$

Otra consecuencia inmediata de la definición es que toda variedad sasakiana η-Einstein es necesariamente de curvatura escalar constante $s = 2n(\lambda + 1)$.

En los siguientes resultados caracterizamos aquellas estructuras hermitianas $(J_{a,b}, g_{a,b})$ tales que $\mathrm{Ric}^B = 0$. Para ello necesitaremos una expresión explícita para el $(1,2)$-tensor T^B, la cual enunciamos en el siguiente lema y cuya prueba sigue de la Proposición 4.5.1 y (4.5.2).

Lema 4.5.5. *Sean* $X_i \in \mathfrak{X}(S_i)$ *y* $\{\xi_1, J\xi_1, e_1, \dots, e_{2n_1}, f_1, \dots, f_{2n_2}\}$ *un marco ortonormal local en la variedad producto* $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ *como en* (4.3.1)*. Entonces,*

$$\begin{aligned}
&T^B(X_1, \xi_1) = 2\varphi_1 X_1, \quad T^B(X_1, J\xi_1) = 0,\\
&T^B(X_1, e_j) = -2(\eta_1(X_1)\varphi_1 e_j + \Phi_1(e_j, X_1)\xi_1), \quad T^B(X_1, f_k) = -2a\eta_1(X_1)\varphi_2 f_k,\\
&T^B(X_2, \xi_1) = 2a\varphi_2 X_2, \quad T^B(X_2, J\xi_1) = 2b\varphi_2 X_2,\\
&T^B(X_2, e_j) = -2a\eta_2(X_2)\varphi_1 e_j, \quad T^B(X_2, f_k) = -2(a^2+b^2)\eta_2(X_2)\varphi_2 f_k + 2\Phi_2(X_2, f_k)\xi_2.
\end{aligned}$$

En particular, para $X_i, Y_i \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$ *tenemos que* $T^B(X_i, Y_i) = 2\Phi_i(X_i, Y_i)\xi_i$*, y* $T^B(X_1, Y_2) = 0$.

En el siguiente teorema, Ric^i denota la curvatura de Ricci asociada a la conexión de Levi-Civita ∇^i en S_i, $i = 1, 2$.

Teorema 4.5.6. *El tensor de Bismut-Ricci* Ric^B *asociado a la estructura hermitiana* $(J_{a,b}, g_{a,b})$ *está dado por:*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}^B(X_1, Y_1) = \mathrm{Ric}^1(X_1, Y_1) - 2g_1(X_1, Y_1) - (2n_1 - 2)\eta_1(X_1)\eta_1(Y_1),\\
&\mathrm{Ric}^B(X_1, Y_2) = 0,\\
&\mathrm{Ric}^B(X_2, Y_2) = \mathrm{Ric}^2(X_2, Y_2) - 2(2a^2 + 2b^2 - 1)g_2(X_2, Y_2) + [2(2a^2 + 2b^2 - 1) - 2n_2)]\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2).
\end{aligned}$$

En particular, $\mathrm{Ric}^B = 0$ *si y sólo si* S_1 *y* S_2 *son ambas* η*-Einstein con constantes*

$$\begin{aligned}
(\lambda_1, \nu_1) &= (2, 2n_1 - 2),\\
(\lambda_2, \nu_2) &= (2(2a^2 + 2b^2 - 1), 2n_2 - 2(2a^2 + 2b^2 - 1)),
\end{aligned}$$

respectivamente.

Demostración. Para calcular el tensor de Bismut-Ricci Ric^B asociado a $(J_{a,b}, g_{a,b})$ utilizaremos la fórmula para Ric^B en una variedad hermitiana general (M^{2n}, g) obtenida en [90, Proposition 3.1]:

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Ric}^B(X, Y) + \frac{1}{2}\delta T^B(X, Y) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2n} g(T^B(X, u_i), T^B(Y, u_i)),$$

donde Ric denota el tensor de Ricci de g y $\{u_i\}_{i=1}^{2n}$ es un marco ortonormal local.

Usando que $\delta T^B = 0$ para la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $M_{a,b} = S_1 \times S_2$, en el marco ortonormal local (4.3.1) la expresión de Ric^B se reduce a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^B(X, Y) = \mathrm{Ric}(X, Y) - \frac{1}{4}\big[&g(T^B(X, \xi_1), T^B(Y, \xi_1)) + g(T^B(X, J\xi_1), T^B(Y, J\xi_1))\\
&+ \sum_{j=1}^{2n_1} g(T^B(X, e_j), T^B(Y, e_j)) + \sum_{k=1}^{2n_2} g(T^B(X, f_k), T^B(Y, f_k))\big],
\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M_{a,b})$. En [103] la curvatura de Ricci de la métrica $g_{a,b}$ en $M_{a,b}$ fue calculada:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}(X_1, Y_1) = \mathrm{Ric}^1(X_1, Y_1) + 2a^2 n_2 \eta_1(X_1)\eta_1(Y_1),\\
&\mathrm{Ric}(X_1, Y_2) = 2a(n_1 + n_2(a^2 + b^2))\eta_1(X_1)\eta_2(Y_2),\\
&\mathrm{Ric}(X_2, Y_2) = \mathrm{Ric}^2(X_2, Y_2) - 2\lambda_{a,b} g_2(X_2, Y_2) + 2[n_1 a^2 + \lambda_{a,b} + n_2(a^2 + b^2)^2 - n_2]\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2),
\end{aligned}$$

donde $\lambda_{a,b} = a^2 + b^2 - 1$.

Ahora calculamos Ric^B usando (4.5.8), las fórmulas para Ric obtenidas arriba, y el Lema 4.5.5. Dados $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(S_1)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^B(X_1,Y_1) &= \mathrm{Ric}^1(X_1,Y_1) + 2a^2 n_2 \eta_1(X_1)\eta_1(Y_1) - \frac{1}{4}\big[4g_1(\varphi_1 X_1, \varphi_1 Y_1) \\
&\quad + 4\sum_{j=1}^{2n_1} g_1(\eta_1(X_1)\varphi_1 e_j + \Phi_1(e_j,X_1)\xi_1, \eta_1(Y_1)\varphi_1 e_j + \Phi_1(e_j,Y_1)\xi_1) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2n_2} g_2(-2a\eta_1(X_1)\varphi_2 f_k, -2a\eta_1(Y_1)\varphi_2 f_k)\big] \\
&= \mathrm{Ric}^1(X_1,Y_1) + 2a^2 n_2 \eta_1(X_1)\eta_1(Y_1) - \frac{1}{4}\big[4g_1(\varphi_1 X_1, \varphi_1 Y_1) + 8n_1\eta_1(X_1)\eta_1(Y_1) \\
&\quad + 4\sum_{j=1}^{2n_1} g_1(e_j, \varphi_1 X_1) g_1(e_j, \varphi_1 Y_1) + 8n_2 a^2 \eta_1(X_1)\eta_1(Y_1)\big] \\
&= \mathrm{Ric}^1(X_1,Y_1) - g_1(\varphi_1 X_1, \varphi_1 Y_1) - 2n_1\eta_1(X_1)\eta_1(Y_1) - g_1(\varphi_1 X_1, \varphi_1 Y_1) \\
&= \mathrm{Ric}^1(X_1,Y_1) - 2g_1(X_1,Y_1) - (2n_1 - 2)\eta_1(X_1)\eta_1(Y_1),
\end{aligned}$$

donde hemos usado (4.1.4) en la tercera igualdad.

Para $X_1 \in \mathfrak{X}(S_1), Y_2 \in \mathfrak{X}(S_2)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^B(X_1,Y_2) &= 2a[n_1 + n_2(a^2+b^2)]\eta_1(X_1)\eta_2(Y_2) - \frac{1}{4}\big[\underbrace{g(2\varphi_1 X_1, 2a\varphi_2 Y_2)}_{=0} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2n_1} g_1(-2(\eta_1(X_1)\varphi_1 e_j + \Phi_1(e_j,X_1)\xi_1, -2a\eta_2(Y_2)\varphi_1 e_j) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2n_2} g_2(-2a\eta_1(X_1)\varphi_2 f_k, -2(a^2+b^2)\eta_2(Y_2)\varphi_2 f_k + 2\Phi_2(Y_2,f_k)\xi_2)\big] \\
&= 2a[n_1 + n_2(a^2+b^2)]\eta_1(X_1)\eta_2(Y_2) - \frac{1}{4}\big[8an_1\eta_1(X_1)\eta_2(Y_2) + 8n_2 a(a^2+b^2)\eta_1(X_1)\eta_2(Y_2)\big] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, para $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(S_2)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^B(X_2,Y_2) &= \mathrm{Ric}^2(X_2,Y_2) - 2\lambda_{a,b} g_2(X_2,Y_2) + 2[n_1 a^2 + \lambda_{a,b} + n_2(a^2+b^2)^2 - n_2]\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2) \\
&\quad - \frac{1}{4}\big[4(a^2+b^2)g_2(\varphi_2 X_2, \varphi_2 Y_2) + \sum_{j=1}^{2n_1} g_1(-2a\eta_2(X_2)\varphi_1 e_j, -2a\eta_2(Y_2)\varphi_1 e_j) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2n_2} \big(g(-2(a^2+b^2)\eta_2(X_2)\varphi_2 f_k, -2(a^2+b^2)\eta_2(Y_2)\varphi_2 f_k) + g(2\Phi_2(X_2,f_k)\xi_2, 2\Phi_2(Y_2,f_k)\xi_2)\big)\big] \\
&= \mathrm{Ric}^2(X_2,Y_2) - 2\lambda_{a,b} g_2(X_2,Y_2) + 2[n_1 a^2 + \lambda_{a,b} + n_2(a^2+b^2)^2 - n_2]\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2) \\
&\quad - \frac{1}{4}\big[4(a^2+b^2)g_2(\varphi_2 X_2, \varphi_2 Y_2) + 8n_1 a^2 \eta_2(X_2)\eta_2(Y_2) \\
&\quad + 8n_2(a^2+b^2)^2\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2) + 4\sum_{k=1}^{2n_2}(a^2+b^2) g_2(f_k, \varphi_2 X_2) g_2(f_k, \varphi_2 Y_2)\big] \\
&= \mathrm{Ric}^2(X_2,Y_2) - 2\lambda_{a,b} g_2(X_2,Y_2) + 2[n_1 a^2 + \lambda_{a,b} + n_2(a^2+b^2)^2 - n_2]\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2) \\
&\quad - 2(a^2+b^2) g_2(\varphi_2 X_2, \varphi_2 Y_2) - 2n_1 a^2 \eta_2(X_2)\eta_2(Y_2) - 2n_2(a^2+b^2)^2\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2) \\
&= \mathrm{Ric}^2(X_2,Y_2) - 2(2a^2+2b^2-1) g_2(X_2,Y_2) + [2(2a^2+2b^2-1) - 2n_2)]\eta_2(X_2)\eta_2(Y_2),
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $g(\xi_2,\xi_2)=a^2+b^2$ en la segunda igualdad y (4.1.4) en la última.

La última afirmación en relación a $\mathrm{Ric}^B=0$ es clara. □

Corolario 4.5.7. *En la variedad producto $M_{0,1}=S_1\times S_2$ equipada con la estructura de Morimoto $(J_{0,1},g_{0,1})$, el tensor de Bismut-Ricci Ric^B se anula si y sólo si S_1 y S_2 son η-Einstein con constantes*

$$(\lambda_1,\nu_1)=(2,2n_1-2),$$
$$(\lambda_2,\nu_2)=(2,2n_2-2),$$

respectivamente.

Observación 4.5.8. Sigue de las expresiones para Ric^B obtenidas en el Teorema 4.5.6 que

$$\mathrm{Ric}^B(\xi_1,X)=\mathrm{Ric}^B(\xi_2,X)=0,$$

para todo $X\in\mathfrak{X}(M_{a,b})$.

Observación 4.5.9. Cabe resaltar que el nombre Bismut-Ricci plana ha sido usado recientemente para denotar a una conexión métrica con torsión antisimétrica tal que la 3-forma de torsión es cerrada y el tensor de Ricci asociado se anula (ver por ejemplo [66, 127, 128]). En nuestro contexto, este concepto se reduce a estructuras hermitianas $(J_{a,b},g_{a,b})$ que son SKT (dado que $\mathrm{d}T^B=\mathrm{dd}^c\omega=0$) y satisfacen $\mathrm{Ric}^B=0$. De la Proposición 4.4.5 se deduce que, en el caso SKT, $\dim(S_1\times S_2)\leq 6$ y que, en dimensión 6, las únicas estructuras Bismut-Ricci planas de la forma $(J_{a,b},g_{a,b})$ ocurren en productos $S_1\times S_2$ con $\dim S_1=\dim S_2=3$ y $a=0$. Veremos en §4.5.1 como consecuencia del Teorema 4.5.6 que S_1 y S_2 resultan ser cocientes de la forma $\mathbb{S}^3/\Gamma$ con Γ un subgrupo finito de $\mathrm{SU}(2)$, el cual se identifica con $\mathbb{S}^3$.

Como una aplicación del Teorema 4.5.6 y usando un resultado de [52], podemos obtener información acerca del fibrado canónico de la variedad compleja compacta $(M_{a,b},J_{a,b})$ cuando $\mathrm{Ric}^B=0$.

Proposición 4.5.10. *El producto $M_{a,b}=S_1\times S_2$ de dos variedades sasakianas compactas equipado con una estructura hermitiana $(J_{a,b},g_{a,b})$ tal que $\mathrm{Ric}^B=0$ no posee fibrado canónico holomórficamente trivial, bajo la hipótesis de que $n_1\geq 1$ y $n_2\geq 1$.*

Demostración. En virtud de [52, Theorem 4.1], si $(M_{a,b},J_{a,b})$ admitiese una $(n_1+n_2,0)$-forma holomorfa nunca nula entonces el hecho de que $\mathrm{Ric}^B=0$ implicaría que $(M_{a,b},J_{a,b},g_{a,b})$ es conformemente balanceada. Esto diría que $\mathrm{d}\theta_{a,b}=0$, no obstante, se sigue de (4.4.4) que

$$\mathrm{d}\theta_{a,b}=\tfrac{4b}{n_1+n_2}(n_2\Phi_1-n_1\Phi_2),$$

que es no nulo dado que $n_1\geq 1$ y $n_2\geq 1$. Luego el fibrado canónico de $(M_{a,b},J_{a,b})$ es no trivial. □

Corolario 4.5.11. *Sea S una variedad sasakiana η-Einstein de dimensión ≥ 3 con constantes (λ,ν), $\lambda>-2$. Entonces, $(\mathbb{S}^3\times S,J_{a,b})$ no posee fibrado canónico trivial, para a,b tales que $a^2+b^2=\frac{\lambda+2}{4}$.*

Ejemplos de variedades sasakianas η-Einstein con $\lambda>-2$ aparecerán en §4.5.1.

Analizamos ahora en el siguiente resultado la condición CYT en $M_{a,b}=S_1\times S_2$, a saber, $\rho^B=0$.

Teorema 4.5.12. *Asumiendo que $n_1\geq 1$ y $n_2\geq 1$, la forma de Bismut-Ricci ρ^B asociada a la estructura hermitiana $(J_{a,b},g_{a,b})$ en $M_{a,b}=S_1\times S_2$ está dada por:*

$$\rho^B(X_1,Y_1)=\mathrm{Ric}^1(X_1,\varphi_1Y_1)-2(2n_1+2an_2-1)\Phi_1(X_1,Y_1),$$
$$\rho^B(X_1,Y_2)=0,$$
$$\rho^B(X_2,Y_2)=\mathrm{Ric}^2(X_2,\varphi_2Y_2)-2[2an_1+2(a^2+b^2)n_2-1]\Phi_2(X_2,Y_2).$$

En particular, $(J_{a,b},g_{a,b})$ es CYT si y sólo si S_1 y S_2 son η-Einstein con constantes (λ_1,ν_1) y (λ_2,ν_2) respectivamente, donde

$$\lambda_1=4(n_1+an_2)-2,\quad y\quad \lambda_2=4(an_1+(a^2+b^2)n_2)-2. \tag{4.5.9}$$

Demostración. Empezamos recordando una fórmula para ρ^B en una variedad hermitiana de dimensión $2n$ equipada con la conexión de Bismut, debida a [90]:

$$\rho^B(X,Y) = \mathrm{Ric}^B(X,JY) + (\nabla^B_X\theta)JY + \frac{1}{4}\lambda^\omega(X,Y),$$

donde θ denota la forma de Lee y la 2-forma λ^ω está definida por

$$\lambda^\omega(X,Y) = \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{d}T^B(X,Y,u_i,Ju_i),$$

en un marco ortonormal local $\{u_i\}_{i=1}^{2n}$.

En nuestro caso de un producto sasakiano $M_{a,b} = S_1 \times S_2$, utilizaremos el marco ortonormal local (4.3.1). Notar que, de acuerdo a la Proposición 4.5.1, tenemos que $\nabla^B\theta = 0$.

Calculamos primero λ^ω (estos cálculos sólo tienen sentido para $n_i \geq 1$, $i = 1,2$). De (4.5.3) obtenemos

$$\mathrm{d}T^B = 4[\Phi_1^2 + 2a\Phi_1 \wedge \Phi_2 + (a^2+b^2)\Phi_2^2].$$

Esto implica que $\mathrm{d}T^B(X,Y,Z,W) = 0$ cuando alguno de X,Y,Z,W es ξ_1 o ξ_2. Así,

$$\iota_{\xi_1}\lambda^\omega = \iota_{\xi_2}\lambda^\omega = 0, \tag{4.5.10}$$

y para $X,Y \in \mathfrak{X}(M_{a,b})$,

$$\lambda^\omega(X,Y) = \sum_{j=1}^{2n_1} \mathrm{d}T^B(X,Y,e_j,\varphi_1 e_j) + \sum_{k=1}^{2n_2} \mathrm{d}T^B(X,Y,f_k,\varphi_2 f_k).$$

Para calcular estos términos usaremos una fórmula para $\mathrm{d}T^B$ en términos de T^B que aparece en la prueba de [90, Proposition 3.1]. Dado que $\nabla^B T^B = 0$, esta fórmula se simplifica y resulta

$$\mathrm{d}T^B(X,Y,Z,W) = \underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}}\, 2g(T^B(X,Y),T^B(Z,W)),$$

donde $\underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}}$ denota la suma cíclica de X,Y,Z. Luego, se sigue del Lema 4.5.5 que, para $X_1,Y_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_1)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}T^B(X_1,Y_1,e_j,\varphi_1 e_j) &= 2\underset{X_1,Y_1,e_j}{\mathfrak{S}} g(T^B(X_1,Y_1),T^B(e_j,\varphi_1 e_j))\\
&= 8\underset{X_1,Y_1,e_j}{\mathfrak{S}} g(\Phi_1(X_1,Y_1)\xi_1,\Phi_1(e_j,\varphi_1 e_j)\xi_1)\\
&= 8[\Phi_1(X_1,Y_1)\Phi_1(e_j,\varphi_1 e_j) + \Phi_1(Y_1,e_j)\Phi_1(X_1,\varphi_1 e_j)\\
&\quad + \Phi_1(e_j,X_1)\Phi_1(Y_1,\varphi_1 e_j)]\\
&= 8[-\Phi_1(X_1,Y_1) + g_1(e_j,\varphi_1 Y_1)g_1(e_j,X_1) - g_1(e_j,\varphi_1 X_1)g_1(e_j,Y_1)],
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}T^B(X_1,Y_1,f_k,\varphi_2 f_k) = 2[&g(T^B(X_1,Y_1),T^B(f_k,\varphi_2 f_k)) + g(T^B(Y_1,f_k),T^B(Y_1,\varphi_2 f_k))\\
&+ g(T^B(f_k,X_1),T^B(Y_1,\varphi_2 f_k))].
\end{aligned}$$

Sigue del Lema 4.5.5 que $T^B(U_1,U_2) = 0$ para $U_i \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$, por lo que llegamos a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}T^B(X_1,Y_1,f_k,\varphi_2 f_k) &= 8g(\Phi_1(X_1,Y_1)\xi_1,\Phi_2(f_k,\varphi_2 f_k)\xi_2)\\
&= -8a\Phi_1(X_1,Y_1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\lambda^\omega(X_1,Y_1) &= \sum_{j=1}^{2n_1} \mathrm{d}T^B(X_1,Y_1,e_j,\varphi_1 e_j) + \sum_{k=1}^{2n_2} \mathrm{d}T^B(X_1,Y_1,f_k,\varphi_2 f_k)\\ &= 8[-2n_1\Phi_1(X_1,Y_1) + 2\Phi_1(X_1,Y_1)] - 16an_2\Phi_1(X_1,Y_1)\\ &= -16(n_1+an_2-1)\Phi_1(X_1,Y_1).\end{aligned}$$

Para $X_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_1), Y_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$, se deduce de $T^B(U_1,U_2)=0$ que, si $U_i \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$,

$$\lambda^\omega(X_1,Y_2) = 0.$$

Finalmente, para $X_2, Y_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}T^B(X_2,Y_2,e_j,\varphi_1 e_j) &= 8g(\Phi_2(X_2,Y_2)\xi_2, \Phi_1(e_j,\varphi_1 e_j)\xi_1)\\ &= 8a\Phi_2(X_2,Y_2)\Phi_1(e_j,\varphi_1 e_j)\\ &= -8a\Phi_2(X_2,Y_2),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{d}T^B(X_2,Y_2,f_k,\varphi_2 f_k) &= 2 \underset{X_2,Y_2,f_k}{\mathfrak{S}} g(\Phi_2(X_2,Y_2)\xi_2, \Phi_2(f_k,\varphi_2 f_k)\xi_2)\\ &= 8(a^2+b^2)[\Phi_2(X_2,Y_2)\Phi_2(f_k,\varphi_2 f_k) + \Phi_2(Y_2,f_k)\Phi_2(X_2,\varphi_2 f_k)\\ &\quad + \Phi_2(f_k,X_2)\Phi_2(Y_2,\varphi_2 f_k)]\\ &= 8(a^2+b^2)[-\Phi_2(X_2,Y_2) + g_2(f_k,\varphi_2 Y_2)g_2(f_k,X_2)\\ &\quad - g_2(f_k,\varphi_2 X_2)g_2(f_k,Y_2)].\end{aligned}$$

De aquí,

$$\begin{aligned}\lambda^\omega(X_2,Y_2) &= \sum_{j=1}^{2n_1} \mathrm{d}T^B(X_2,Y_2,e_j,\varphi_1 e_j) + \sum_{k=1}^{2n_2} \mathrm{d}T^B(X_2,Y_2,f_k,\varphi_2 f_k)\\ &= -16an_1\Phi_2(X_2,Y_2) + 8(a^2+b^2)[-2n_2\Phi_2(X_2,Y_2) + 2\Phi_2(X_2,Y_2)]\\ &= -16[an_1 + (a^2+b^2)(n_2-1)]\Phi_2(X_2,Y_2).\end{aligned}$$

Ahora procedemos a calcular ρ^B. En primer lugar, notar que $\rho^B(X_1,Y_2)=0$ si $X_1 \in \mathfrak{X}(S_1)$ y $Y_2 \in \mathfrak{X}(S_2)$ pues $\mathrm{Ric}^B(X_1,Y_2) = \lambda^\omega(X_1,Y_2) = 0$. Más aún, se ve fácilmente de la Observación 4.5.8 y (4.5.10) que

$$\rho^B(\xi_i, X) = 0, \quad X \in \mathfrak{X}(M_{a,b}). \tag{4.5.11}$$

Por consiguiente, basta calcular $\rho^B(X_i,Y_i)$, $i=1,2$, para $X_i, Y_i \in \Gamma(\mathcal{D}_i)$.

De los cálculos previos obtenemos que, para $X_1, Y_1 \in \Gamma(\mathcal{D}_1)$,

$$\begin{aligned}\rho^B(X_1,Y_1) &= \mathrm{Ric}^B(X_1,\varphi_1 Y_1) + \tfrac{1}{4}\lambda^\omega(X_1,Y_1)\\ &= \mathrm{Ric}^1(X_1,\varphi_1 Y_1) - 2\Phi_1(X_1,Y_1) - 4(n_1+an_2-1)\Phi_1(X_1,Y_1)\\ &= \mathrm{Ric}^1(X_1,\varphi_1 Y_1) - 2(2n_1+2an_2-1)\Phi_1(X_1,Y_1),\end{aligned}$$

donde hemos usado el Teorema 4.5.6 en la segunda igualdad.

Para $X_2, Y_2 \in \Gamma(\mathcal{D}_2)$,

$$\begin{aligned}\rho^B(X_2,Y_2) &= \mathrm{Ric}^B(X_2,\varphi_2 Y_2) - 4(an_1 + (a^2+b^2)(n_2-1))\Phi_2(X_2,Y_2)\\ &= \mathrm{Ric}^2(X_2,\varphi_2 Y_2) - 2(2a^2+2b^2-1)\Phi_2(X_2,Y_2)\\ &\quad - 4(an_1 + (a^2+b^2)(n_2-1))\Phi_2(X_2,Y_2)\\ &= \mathrm{Ric}^2(X_2,\varphi_2 Y_2) - 2[2an_1 + 2(a^2+b^2)n_2 - 1]\Phi_2(X_2,Y_2),\end{aligned}$$

donde nuevamente hemos usado el Teorema 4.5.6 en la segunda igualdad.

En conclusión, de acuerdo con (4.5.7) y usando que φ_i es un isomorfismo en $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2$, se llega a

$$\rho^B \equiv 0 \iff \begin{cases} \mathrm{Ric}^1 = \lambda_1 g_1 + (2n_1 - \lambda_1)\eta_1 \otimes \eta_1, \\ \mathrm{Ric}^2 = \lambda_2 g_2 + (2n_2 - \lambda_2)\eta_2 \otimes \eta_2, \end{cases}$$

donde $\lambda_1 = 4(n_1 + an_2) - 2$ y $\lambda_2 = 4(an_1 + (a^2 + b^2)n_2) - 2$, y esto concluye la prueba. □

Corolario 4.5.13. *Asumiendo que $n_1 \geq 1, n_2 \geq 1$, la variedad producto $M_{0,1} = S_1 \times S_2$ con la estructura de Morimoto $(J_{0,1}, g_{0,1})$ es CYT si y sólo si S_1 y S_2 son η-Einstein con constantes (λ_1, ν_1) y (λ_2, ν_2) respectivamente, donde*

$$\lambda_1 = 4n_1 - 2, \quad y \quad \lambda_2 = 4n_2 - 2.$$

Observación 4.5.14. Analizamos ahora los casos faltantes $n_1 = 0$ o $n_2 = 0$ (con $n_1 + n_2 \geq 1$). Siguiendo las líneas de la prueba del Teorema 4.5.12 obtenemos:

- Cuando $n_2 = 0$, la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es CYT si y sólo si S_1 es η-Einstein con constantes (λ_1, ν_1), $\lambda_1 = 4n_1 - 2$.
- Cuando $n_1 = 0$, la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es CYT si y sólo si S_2 es η-Einstein con constantes (λ_2, ν_2), $\lambda_2 = 4(a^2 + b^2)n_2 - 2$.

Usando la expresión para la forma de Bismut-Ricci ρ^B obtenida en el Teorema 4.5.12 podemos determinar cuándo la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en un producto sasakiano $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ es *estática*. Esta noción fue introducida por Streets y Tian en [135, 136]: una métrica hermitiana SKT g en una variedad compleja (M^{2n}, J) se dice *estática* si su forma de Bismut-Ricci satisface

$$(\rho^B)^{1,1} = \alpha\omega, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4.5.12}$$

donde $(\rho^B)^{1,1}$ denota la componente $(1,1)$ de ρ^B dada por $(\rho^B)^{1,1}(\cdot,\cdot) = \frac{1}{2}(\rho^B(\cdot,\cdot) + \rho^B(J\cdot, J\cdot))$. Las métricas estáticas están estrechamente relacionadas con el *flujo pluricerrado*, introducido en [135], el cual es el flujo parabólico para métricas SKT definido por

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega = -(\rho^B)^{1,1}, \quad \omega(0) = \omega_0.$$

Así, las métricas estáticas son al flujo pluricerrado lo que las métricas de Einstein son al flujo de Ricci. Además, cuando $\alpha = 0$ estas métricas son puntos fijos del flujo pluricerrado.

La siguiente relación entre $\rho^B(JX, JY)$ y $\rho^B(X, Y)$ fue probada en [90, Corollary 3.2]:

$$\rho^B(JX, JY) - \rho(X, Y) = \delta T^B(JX, Y) - (\nabla^B_{JX}\theta)Y + (\nabla^B_Y\theta)JX. \tag{4.5.13}$$

Usando (4.5.5), (4.5.13) y $\nabla^B\theta = 0$ (Proposición 4.5.1) obtenemos que $\rho^B(JX, JY) = \rho^B(X, Y)$ y como consecuencia,

$$(\rho^B)^{1,1} = \rho^B, \tag{4.5.14}$$

esto es, ρ^B es J-invariante. Debido a (4.5.14) y teniendo en cuenta (4.4.1), la condición (4.5.12) se convierte en

$$\rho^B = \alpha\,\omega_{a,b} = \alpha(\Phi_1 + \Phi_2 - b\eta_1 \wedge \eta_2).$$

Dado que $\rho^B(\xi_1, \xi_2) = 0$ (debido a (4.5.11)) y $\omega_{a,b}(\xi_1, \xi_2) = -b \neq 0$, resulta que $\rho^B(\xi_1, \xi_2) = \alpha\,\omega_{a,b}(\xi_1, \xi_2)$ si y sólo si $\alpha = 0$. Por lo tanto, la condición (4.5.12) se reduce a la condición CYT. En síntesis, la estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en un producto de variedades sasakianas $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ satisface (4.5.12) si y sólo si $\alpha = 0$ y $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es CYT.

Recordemos que $(J_{a,b}, g_{a,b})$ es SKT solamente en dimensiones 4 y 6: cualquiera de estas estructuras es SKT en dimensión 4, y para dimensión 6, debe valer $\dim S_1 = \dim S_2 = 3$ y $a = 0$ (Proposición 4.4.5). En dimensión 4, veremos en §4.5.1 que la Observación 4.5.14 implica que un factor tiene dimensión uno y que el otro es un cociente de la forma $\mathbb{S}^3/\Gamma$ con Γ un subgrupo finito de $\mathrm{SU}(2) \simeq \mathbb{S}^3$. En dimensión 6, veremos en §4.5.1 que el Teorema 4.5.12 implica que S_1 y S_2 son ambos cocientes de esta forma.

En resumen tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.5.15. *La estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ en $M_{a,b} = S_1 \times S_2$ es estática si y sólo si*

(a) $\dim M_{a,b} = 4$, *uno de los factores sasakianos tiene dimensión* 1 *y el otro es un cociente de $\mathbb{S}^3$ por un subgrupo finito, o*

(b) $\dim S_1 = \dim S_2 = 3$, $a = 0$, *y S_1 y S_2 son ambos cocientes de $\mathbb{S}^3$ por subgrupos finitos.*

Más aún, estas métricas son puntos fijos del flujo pluricerrado.

Observación 4.5.16. Ya es conocido que $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ admite una estructura CYT (ver [75]).

4.5.1. Ejemplos

Para poder dar ejemplos de variedades sasakianas η-Einstein que satisfacen las condiciones de los Teoremas 4.5.6 y 4.5.12, precisaremos la noción de las *deformaciones $\mathcal{D}$-homotéticas* (o simplemente $\mathcal{D}$-homotecias), introducida por Tanno en [139].

Dada una variedad sasakiana $(S, \varphi, \xi, \eta, g)$, consideramos la transformación

$$\varphi' = \varphi, \quad \xi' = s^{-1}\xi, \quad \eta' = s\eta, \quad g' = sg + s(s-1)\eta \otimes \eta,$$

para cualquier constante real $s > 0$. Entonces $(\varphi', \xi', \eta', g')$ resulta de nuevo una estructura sasakiana en S. Asimismo, en el caso de variedades sasakianas η-Einstein, existe el siguiente resultado:

Proposición 4.5.17. [33, Proposition 18] *Sea $(S, \varphi, \xi, \eta, g)$ una variedad sasakiana η-Einstein de dimensión $2n+1$ con constantes (λ, ν), y consideremos una estructura $\mathcal{D}$-homotética $(\varphi', \xi', \eta', g')$ como arriba. Entonces, $(S, \varphi', \xi', \eta', g')$ es η-Einstein con constantes*

$$\lambda' = \frac{\lambda + 2 - 2s}{s}, \qquad \nu' = 2n - \frac{\lambda + 2 - 2s}{s}.$$

Usaremos la siguiente terminología[3]: diremos que una variedad sasakiana η-Einstein S es *positiva* si $\lambda > -2$, *nula* si $\lambda = -2$ y *negativa* si $\lambda < -2$. Se sigue de la Proposición 4.5.17 que las $\mathcal{D}$-homotecias preservan la propiedad de ser η-Einstein positiva, nula o negativa, respectivamente. Las variedades η-Einstein positivas incluyen a la familia bien conocida de variedades Sasaki-Einstein[4], que es precisamente el caso en que $\lambda = \dim S - 1$ y $\nu = 0$. Por ejemplo, las esferas de dimensión impar con la estructura sasakiana estándar son Einstein (de hecho, fue recientemente probado en [106] que existen familias infinitas de métricas Sasaki-Einstein en toda esfera estándar de dimensión impar al menos 5). El teorema de Bonnet-Myers implica que una variedad que admite una estructura η-Einstein positiva es compacta y tiene grupo fundamental finito.

Podemos volver a escribir los Teoremas 4.5.6 y 4.5.12 en términos de si S_1 y S_2 son η-Einstein positivas, nulas o negativas, respectivamente. Para el caso en que $\mathrm{Ric}^B = 0$, dado que $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2(2a^2 + 2b^2) - 2 > -2$, obtenemos el siguiente teorema.

[3]Las nociones de positiva, negativa y nula se definen en [33] para variedades sasakianas en general en términos de la primera clase básica de Chern, y se reducen a las desigualdades establecidas para λ en el caso de las variedades η-Einstein.

[4]La literatura sobre métricas Sasaki-Einstein es amplia, por ejemplo el Capítulo 11 de [31] está dedicado a las métricas Sasaki-Einstein (ver también [134]).

Teorema 4.5.18. *Sea $M = S_1 \times S_2$ el producto de dos variedades sasakianas. Entonces, tras posiblemente aplicar una $\mathcal{D}$-homotecia a cada estructura sasakiana, M admite una estructura hermitiana de la forma $(J_{a,b}, g_{a,b})$, para algunos $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, tal que $\mathrm{Ric}^B = 0$ si y sólo si S_1 y S_2 admiten métricas Sasaki-Einstein.*

Para reescribir el Teorema 4.5.12 debemos analizar primero cuándo

$$\lambda_1 = 4(n_1 + an_2) - 2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 4(an_1 + (a^2 + b^2)n_2) - 2$$

son $< -2, = -2$ o > -2, respectivamente. Notar que

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq -2 \iff n_1 + an_2 \geq 0, \quad \text{y} \\ \lambda_2 \geq -2 \iff an_1 + (a^2 + b^2)n_2 \geq 0. \end{cases}$$

Asumiendo $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$ analizamos las posibles combinaciones de λ_1 y λ_2.

Caso (i): Cuando $\lambda_1 = -2$ obtenemos que $a = -\frac{n_1}{n_2}$ y así $\lambda_2 = 4b^2 n_2 - 2$. Puesto que $b \neq 0$, es claro que $\lambda_2 > -2$, y en este caso cualquier $b \neq 0$ funciona.

Caso (ii): Cuando $\lambda_1 > -2$, λ_2 puede ser < -2, $= -2$ o > -2. En efecto, aplicando una $\mathcal{D}$-homotecia a S_1 de ser necesario, podemos asumir que $\lambda_1 = 2n_1 - 2$, de manera que $a = -\frac{n_1}{2n_2}$ y así $\lambda_2 = \frac{4b^2n_2^2 - n_1^2}{n_2} - 2$. Si $\lambda_2 = -2$, podemos elegir $b = \frac{n_1}{2n_2}$. Si $\lambda_2 > -2$, aplicando una $\mathcal{D}$-homotecia a S_2 de ser necesario podemos asumir que $\lambda_2 = \frac{3n_1^2}{n_2} - 2$ y elegir $b = \frac{n_1}{n_2}$. De manera análoga, si $\lambda_2 < -2$, podemos asumir que $\lambda_2 = -\frac{3n_1^2}{4n_2} - 2$ y elegir $b = \frac{n_1}{4n_2}$.

Caso (iii): Cuando $\lambda_1 < -2$, tenemos que $a < -\frac{n_1}{n_2}$. Ahora debemos determinar el signo de

$$P(a) := an_1 + (a^2 + b^2)n_2 = n_2 \left[\left(a + \frac{n_1}{2n_2} \right)^2 + b^2 - \frac{n_1^2}{4n_2^2} \right].$$

Si $b^2 - \frac{n_1^2}{4n_2^2} \geq 0$ entonces $P(a) > 0$ siempre que $a \neq -\frac{n_1}{2n_2}$. En particular $P(a) > 0$ para $a < -\frac{n_1}{n_2}$.

Si $b^2 - \frac{n_1^2}{4n_2^2} < 0$, entonces $P(a) \leq 0$ si y sólo si $\frac{-n_1 - \sqrt{n_1^2 - 4b^2n_2^2}}{2n_2} \leq a \leq \frac{-n_1 + \sqrt{n_1^2 - 4b^2n_2^2}}{2n_2}$. Dado que $-\frac{n_1}{n_2} < \frac{-n_1 - \sqrt{n_1^2 - 4b^2n_2^2}}{2n_2}$, llegamos a $P(a) > 0$ para $a < -\frac{n_1}{n_2}$. En resumen, $\lambda_1 < -2$ implica $\lambda_2 > -2$. En este caso, luego de aplicar una $\mathcal{D}$-homotecia a S_1 y S_2 de ser necesario podemos asumir que $\lambda_1 = -n_1 - 2$ y $\lambda_2 = \frac{3n_1^2}{2n_2} - 2$. De aquí, se verifica fácilmente que $a = -\frac{5n_1}{4n_2}$ y $b = \frac{n_1}{4n_2}$ funcionan.

Ahora podemos reescribir el Teorema 4.5.12 como sigue.

Teorema 4.5.19. *Sea $M = S_1 \times S_2$ el producto de dos variedades sasakianas y asumamos que $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$. Entonces, tras posiblemente aplicar una $\mathcal{D}$-homotecia a cada estructura sasakiana, M admite una estructura hermitiana CYT de la forma $(J_{a,b}, g_{a,b})$, para algunos $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, si y sólo si S_1 y S_2 son η-Einstein y una de las siguientes condiciones se satisface:*

(i) *S_1 es positiva y S_2 es arbitraria,*

(ii) *S_1 es negativa o nula, y S_2 es positiva.*

Observación 4.5.20. De acuerdo con la Observación 4.5.14, cuando uno de los factores sasakianos tiene dimensión 1, la condición CYT se reduce a que el otro factor η-Einstein sea positivo.

Observación 4.5.21. Dado que las esferas de dimensión impar con su estructura sasakiana usual son Sasaki-Einstein, el Teorema 4.5.19 muestra la existencia de estructuras hermitianas CYT en las variedades de Calabi-Eckmann. Esto ya fue probado en [16, Corollary 4.8] donde de manera más general se probó la existencia de estructuras CYT en fibrados principales sobre variedades hermitianas con toros complejos como fibras.

Cabe destacar que si empezamos con dos variedades Sasaki-Einstein no hay necesidad de aplicar ninguna $\mathcal{D}$-homotecia a los factores para obtener una estructura CYT en el producto. En efecto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.5.22. *Sean S_1 y S_2 variedades Sasaki-Einstein con $\dim S_i = 2n_i + 1$, $n_i \geq 1$, para $i = 1, 2$. Entonces $S_1 \times S_2$ admite una estructura CYT de la forma $(J_{a,b}, g_{a,b})$ con*

$$a = -\frac{n_1 - 1}{2n_2}, \quad b^2 = \frac{(n_1 - 1)(n_1 + 1) + 2n_2(n_2 + 1)}{4n_2^2}.$$

Demostración. La prueba consiste solamente en resolver en términos de a y b la ecuación (4.5.9), con $\lambda_1 = 2n_1$ y $\lambda_2 = 2n_2$. □

Ejemplo 4.5.23 (Estructuras η-Einstein invariantes a izquierda en grupos de Lie)**.** Como ya hemos mencionado, de acuerdo con [70], una variedad compacta sasakiana de dimensión 3 es difeomorfa a $\mathbb{S}^3/\Gamma$, H_3/Γ o $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})/\Gamma$, donde en cada caso Γ es un retículo uniforme (i.e., un subgrupo discreto cocompacto). Se sabe que estos 3 modelos geométricos se corresponden precisamente con las estructuras sasakianas η-Einstein positivas, nulas o negativas. En la tabla siguiente mostramos una estructura η-Einstein explícita en las correspondientes álgebras de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{h}_3$ y $\mathfrak{su}(2)$, todas ellas escritas en la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Algebra de Lie	Corchetes	Estructura sasakiana	λ
$\mathfrak{su}(2)$	$[e_1,e_2] = 2e_3, [e_2,e_3] = 2e_1, [e_3,e_1] = 2e_2$	$\xi = e_3, \eta = e^3, \varphi e_1 = e_2$	2
$\mathfrak{h}_3$	$[e_1,e_2] = 2e_3$	$\xi = e_3, \eta = e^3, \varphi e_1 = e_2$	-2
$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	$[e_1,e_2] = 2e_3, [e_2,e_3] = -e_1, [e_3,e_1] = -e_2$	$\xi = e_3,\ \eta = e^3,\ \varphi e_1 = e_2$	-4

Tabla 4.1: Algebras de Lie sasakianas de dimensión 3.

Usando los Teoremas 4.5.6 y 4.5.12 podemos recuperar la estructura hermitiana $(J_{0,1}, g_{0,1})$ en $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$, la cual tiene la particularidad de que $\nabla^B \equiv 0$ en campos vectoriales invariantes a izquierda, por lo que es Bismut plana y en consecuencia $\mathrm{Ric}^B = 0$ y $\rho^B = 0$. Asimismo, obtenemos las siguientes estructuras hermitianas CYT de la forma $(J_{a,b}, g_{a,b})$:

- en $\mathfrak{h}_3 \times \mathfrak{su}(2)$, con $(a,b) = (-1, 1)$,
- en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{su}(2)$, con $(a,b) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$,
- en $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{h}_3$ (aplicando una $\mathcal{D}$-homotecia a $\mathfrak{su}(2)$ de manera que $\lambda_1 = 0$), con $(a,b) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,
- en $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ (luego de aplicar una $\mathcal{D}$-homotecia a $\mathfrak{su}(2)$ y a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ de manera que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{11}{4}$), con $(a,b) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

Las variedades sasakianas obtenidas como cocientes de $\mathrm{SU}(2)$, $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ y H_3 por un retículo uniforme poseen estructuras η-Einstein inducidas con la misma constante λ, de manera que sus productos admiten una estructura hermitiana inducida tal que $\mathrm{Ric}^B = 0$ (en el caso de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$) y estructuras CYT (en todos los casos mencionados arriba).

En dimensiones más altas, una familia de álgebras de Lie η-Einstein nulas está dada por las álgebras de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_{2n+1}$ de dimensión $2n+1$, con $n \in \mathbb{N}$. De hecho, se puede ver de la misma manera que para $\mathfrak{h}_3$ que $\mathfrak{h}_{2n+1}$, en la base $\{X_1, \ldots, X_{2n}, \xi\}$ con corchetes $[X_{2i-1}, X_{2i}] = 2\xi$ para todo $1 \leq i \leq n$, es un ejemplo de un álgebra de Lie sasakiana η-Einstein nula con $\lambda = -2$. En consecuencia, $\mathfrak{h}_{2n+1} \times \mathfrak{su}(2)$ admite una estructura CYT dada por $(J_{a,b}, g_{a,b})$ con $(a,b) = (-n, 1)$, mientras que $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{h}_{2n+1}$ admite una estructura CYT dada por $(a,b) = (-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$ (luego de aplicar una $\mathcal{D}$-homotecia a $\mathfrak{su}(2)$ para que $\lambda_1 = 0$). Los grupos de Lie simplemente conexos asociados $H_{2n+1} \times \mathrm{SU}(2)$ y $\mathrm{SU}(2) \times H_{2n+1}$, admiten retículos uniformes, de manera que podemos obtener variedades CYT compactas.

En contraste, hay una sola álgebra de Lie η-Einstein positiva, la cual es $\mathfrak{su}(2)$. En efecto, un grupo de Lie que admite una estructura η-Einstein positiva invariante a izquierda (equivalentemente, una estructura Sasaki-Einstein invariante a izquierda) es compacto y tiene grupo fundamental finito, por lo que G es semisimple. En virtud de un resultado en [28], las únicas álgebras de Lie semisimples que admiten una forma de contacto son $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$; por lo que el álgebra de Lie de G debe ser $\mathfrak{su}(2)$.

Respecto a estructuras η-Einstein negativas, no conocemos aún otros ejemplos, además de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$, de estructuras η-Einstein negativas invariantes a izquierda en grupos de Lie que admitan retículos.

Notamos que debido a un resultado en [7], la única álgebra de Lie sasakiana η-Einstein de dimensión 5 cuyo grupo de Lie simplemente conexo asociado admite retículos es $\mathfrak{h}_5$ (y es nula).

Ejemplo 4.5.24 (Estructuras η-Einstein positivas)**.** Tanno fue el primero en observar que al aplicar una $\mathcal{D}$-homotecia adecuada a una estructura η-Einstein positiva se puede obtener una estructura Sasaki-Einstein, y usó este hecho para probar que el fibrado tangente unitario de $\mathbb{S}^n$ admite una estructura Sasaki-Einstein homogénea [140]. En particular, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ posee una estructura Sasaki-Einstein. A lo largo de las últimas décadas se ha demostrado que existen infinitas estructuras Sasaki-Einstein en sumas conexas de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ y también en variedades de dimensión 5 que no son de este tipo, incluyendo infinitas esferas de homología racional de dimensión 5. Resultados similares valen también en dimensiones más altas (ver [134] y las referencias allí).

Una clase especial de variedades Sasaki-Einstein está dada por las variedades 3-*sasakianas*, que son aquellas variedades riemannianas cuyo cono riemanniano es hiperKähler. En particular, una variedad 3-sasakiana posee dimensión $4n+3$, con $n \geq 0$, y admite 3 estructuras sasakianas compatibles diferentes. Fueron introducidas por C. Udrişte [146] y Y. Kuo [99] en 1969 y 1970, respectivamente. Del Teorema 4.5.18 se sigue que el producto de dos de estas variedades puede ser equipado con una estructura hermitiana $(J_{a,b}, g_{a,b})$ que satisface $\mathrm{Ric}^B = 0$ o $\rho^B = 0$, eligiendo adecuadamente los valores de a y $b \neq 0$, quizás teniendo que aplicar una $\mathcal{D}$-homotecia.

Para finalizar este capítulo, mencionamos brevemente otra construcción que proporciona numerosos ejemplos de métricas η-Einstein, especialmente negativas y nulas. Según [33] muchos ejemplos sasakianos interesantes pueden ser hallados en links (o enlaces) de singularidades de hipersuperficies aisladas. Más aún, algunos de ellos portan estructuras η-Einstein. Para más detalles sobre esta construcción veáse por ejemplo [31, Chapter 9], [33, Section 6] y [134, Section 3.4].

Ejemplo 4.5.25 (Estructuras η-Einstein en links)**.** Consideramos el espacio afín $\mathbb{C}^{n+1}$ junto con una acción de $\mathbb{C}^\star$ dada por

$$(z_0, \dots, z_n) \mapsto (\lambda^{w_0} z_0, \dots, \lambda^{w_n} z_n),$$

donde los pesos w_j son enteros positivos tales que $\mathrm{mcd}(w_0, \dots, w_n) = 1$. Un polinomio homogéneo pesado con pesos $w = (w_0, \dots, w_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ de grado d es un polinomio $f \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ tal que

$$f(\lambda^{w_0} z_0, \dots, \lambda^{w_n} z_n) = \lambda^d f(z_0, \dots, z_n).$$

Asumiendo que el origen es una singularidad aislada de $\{f = 0\}$, se define el *link* de f por

$$L_f = \{f = 0\} \cap \mathbb{S}^{2n+1},$$

el cual resulta una variedad diferenciable de dimensión $2n-1$ El link L_f admite una estructura sasakiana natural $S_{w,f} = S_w|_{L_f}$, heredada como subvariedad sasakiana de $\mathbb{S}^{2n+1}$ con su estructura sasakiana pesada $(\Phi_w, \xi_w, \eta_w, g_w)$, la cual en coordenadas complejas usuales en $\mathbb{C}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{2n+2}$ está dada por

$$\eta_w = \frac{\sum_{i=0}^n (x_i dy_i - y_i dx_i)}{\sum_{i=0}^n w_i(x_i^2 + y_i^2)}, \quad \xi_w = \sum_{i=0}^n w_i(x_i \partial y_i - y_i \partial x_i).$$

Con respecto a la existencia de estructuras η-Einstein en estos links, tenemos el sigueinte resultado en [32] que establece la existencia de estructuras η-Einstein nulas o negativas.

Teorema 4.5.26. [32] *Sea f un polinomio homogéneo pesado no degenerado de grado d y vector peso w, y sea $|w| = w_0 + \cdots + w_n$. Consideramos la estructura sasakiana inducida $S_{w,f}$ en el link L_f.*

(1) *Si $|w| = d$, entonces existe una estructura η-Einstein nula en L_f,*

(2) *Si $|w| < d$, entonces existe una estructura η-Einstein negativa en L_f.*

Las estructuras η-Einstein se obtienen al deformar de manera adecuada la estructura sasakiana inducida $S_{w,f}$.

Observación 4.5.27. En el caso $|w| > d$, hay obstrucciones para la existencia de estructuras η-Einstein positivas en L_f.

Un ejemplo que es muy conocido es el *link de Brieskorn-Pham* $L(a_0, \dots, a_n)$ asociado al polinomio $f(z) = z_0^{a_0} + \cdots + z_n^{a_n}$. Se puede ver que el grado pesado de f es $d = \mathrm{mcm}(a_0, \dots, a_n)$ y los pesos son $w_j = \frac{d}{a_j}$. Luego, por el Teorema 4.5.26,

- cuando $\sum_i \frac{1}{a_i} = 1$ hay una estructura η-Einstein nula en $L(a_0, \dots, a_n)$,
- cuando $\sum_i \frac{1}{a_i} < 1$ hay una estructura η-Einstein negativa en $L(a_0, \dots, a_n)$.

De acuerdo con el Teorema 4.5.19, el producto $\mathbb{S}^{2m+1} \times L(a_0, \dots, a_n)$ admite estructuras CYT de la forma $(J_{a,b}, g_{a,b})$ siempre que $\sum_i \frac{1}{a_i} \leq 1$, posiblemente tras aplicar una $\mathcal{D}$-homotecia.

Capítulo 5

Solvariedades complejas con fibrado canónico holomórficamente trivial y aplicaciones a la geometría hipercompleja

5.1. Fibrado canónico de variedades complejas

Dada (M, J) una variedad compleja con $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, su fibrado canónico se define como

$$K_M = \Lambda^n \mathcal{T}_M^*,$$

donde $\mathcal{T}_M^*$ es el fibrado cotangente holomorfo de M. Este es un fibrado de líneas holomorfo en M, y es holomórficamente[1] trivial si y sólo si existe una $(n, 0)$-forma holomorfa nunca nula definida en M.

Notar que si σ es una $(n, 0)$-forma en M entonces σ es holomorfa si y sólo si es cerrada, dado que $d\sigma = \partial\sigma + \overline{\partial}\sigma$ y $\partial\sigma$ es una $(n+1, 0)$-forma, por lo que $\partial\sigma = 0$.

Observamos primero que la existencia de una sección trivializante del fibrado canónico tiene consecuencias topológicas en una variedad compleja compacta.

Proposición 5.1.1. *Sea (M, J) una variedad compleja compacta de $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$ con fibrado canónico trivial. Entonces el n-ésimo número de Betti $b_n(M)$ satisface $b_n(M) \geq 2$.*

Demostración. Seguimos las líneas de la demostración de [54, Proposition 2.5]. Sea τ una $(n, 0)$-forma holomorfa nunca nula en M, por lo que $\tau \wedge \bar{\tau}$ es un múltiplo no nulo de una forma de volumen real en M. Descomponemos $\tau = \tau_1 + i\tau_2$. Como τ es cerrada, resulta $d\tau_1 = 0 = d\tau_2$. En consecuencia, τ_1 y τ_2 definen clases de cohomología de de Rham $[\tau_1], [\tau_2] \in H^n_{dR}(M, \mathbb{R})$. Afirmamos que estas dos clases resultan ser linealmente independientes. En efecto, asumamos por el contrario que existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 \neq 0$ tales que $a\tau_1 + b\tau_2 = d\eta$ para alguna $(n-1)$-forma η.

Dividimos el análisis en dos casos, de acuerdo a la paridad de n.

(i) Caso n impar: en este caso tenemos que

$$0 \neq \tau \wedge \bar{\tau} = (\tau_1 \wedge \tau_1 + \tau_2 \wedge \tau_2) + i(-\tau_1 \wedge \tau_2 + \tau_2 \wedge \tau_1) = -2i(\tau_1 \wedge \tau_2).$$

Calculamos ahora

$$d(\eta \wedge (-b\tau_1 + a\tau_2)) = (a\tau_1 + b\tau_2) \wedge (-b\tau_1 + a\tau_2) = (a^2 + b^2)(\tau_1 \wedge \tau_2).$$

[1] Para abreviar, diremos simplemente que el fibrado canónico es trivial en vez de holomórficamente trivial.

Integrando sobre M obtenemos, como consecuencia del teorema de Stokes, que $0 = (a^2+b^2)\int_M \tau_1 \wedge \tau_2$, lo cual es una contradicción.

(ii) Caso n par: en este caso resulta

$$0 \neq \tau \wedge \bar{\tau} = (\tau_1 \wedge \tau_1 + \tau_2 \wedge \tau_2) + i(-\tau_1 \wedge \tau_2 + \tau_2 \wedge \tau_1) = \tau_1 \wedge \tau_1 + \tau_2 \wedge \tau_2.$$

Se sigue de $0 = \tau \wedge \tau$ que $\tau_1 \wedge \tau_1 = \tau_2 \wedge \tau_2$ y $\tau_1 \wedge \tau_2 = 0$. En particular, $0 \neq \tau \wedge \bar{\tau} = 2\tau_1 \wedge \tau_1$. Calculamos ahora

$$\mathrm{d}(\eta \wedge (a\tau_1 + b\tau_2)) = (a\tau_1 + b\tau_2) \wedge (a\tau_1 + b\tau_2) = (a^2+b^2)\tau_1 \wedge \tau_1.$$

Nuevamente, integrando sobre M se obtiene una contradicción.

En conclusión obtenemos $b_n(M) \geq 2$. □

Otros fibrados de líneas holomorfos sobre la variedad compleja (M, J) están dados por los productos tensoriales del fibrado canónico consigo mismo:

$$K_M^{\otimes k} = K_M \otimes \cdots \otimes K_M \quad (k \text{ veces}).$$

Siguiendo a [144], diremos que una variedad compleja (M, J) es *holomórficamente de torsión* si $K_M^{\otimes k}$ es holomórficamente trivial para algún $k \geq 1$. La trivialidad de este fibrado holomorfo puede ser entendida como sigue.

Dada una variedad compleja M, el operador de Dolbeault $\bar{\partial}$ puede ser extendido a un operador diferencial $\bar{\partial}_k : \Gamma(K_M^{\otimes k}) \to \Gamma((T^*M)^{0,1} \otimes K_M^{\otimes k})$, donde $\Gamma(\cdot)$ denota el espacio de las secciones suaves. En efecto, dado que $\Lambda^{n,1}(M) \cong (T^*M)^{0,1} \otimes K_M$, definimos de manera recursiva : $\bar{\partial}_1 = \bar{\partial}$ y para $k \geq 2$,

$$\bar{\partial}_k(\sigma \otimes s) = \bar{\partial}\sigma \otimes s + \sigma \otimes \bar{\partial}_{k-1}s, \quad \sigma \in \Gamma(K_M),\ s \in \Gamma(K_M^{\otimes k-1}).$$

Este operador diferencial satisface la regla de Leibniz $\bar{\partial}_k(fs) = \bar{\partial}f \otimes s + f\bar{\partial}_k s$ para todo $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ y $s \in \Gamma(K_M^{\otimes k})$.

El fibrado holomorfo $K_M^{\otimes k}$ es trivial si y sólo si existe una sección nunca nula $s \in \Gamma(K_M^{\otimes k})$ tal que $\bar{\partial}_k s = 0$.

5.1.1. Un ejemplo motivador

A continuación exhibimos un ejemplo de un fenómeno en relación al fibrado canónico de las solvariedades complejas, que de acuerdo a nuestro conocimiento es nuevo. En efecto, mostraremos que existen solvariedades complejas con fibrado canónico trivial de manera que la sección trivializante es *no invariante* (comparar con [54, Proposition 2.1]).

Ejemplo 5.1.2. Sea H_3 el grupo de Heisenberg de dimensión 3, el cual se puede considerar como $\mathbb{R}^3$ con el producto

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - yx')).$$

Consideremos ahora el producto semidirecto $G = \mathbb{R} \ltimes_\varphi H_3$, donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(H_3) \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ está dada por

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada a G tiene una base $\{e_0, \ldots, e_3\}$ de campos vectoriales invariantes a izquierda tales que

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_0, e_1] = e_2, \quad [e_0, e_2] = -e_1.$$

Equivalentemente, la base dual de 1-formas $\{e^0,\dots,e^3\}$ satisface

$$\mathrm{d}e^0 = 0, \quad \mathrm{d}e^1 = e^0\wedge e^2, \quad \mathrm{d}e^2 = -e^0\wedge e^1, \quad \mathrm{d}e^3 = -e^1\wedge e^2.$$

Definimos una estructura compleja invariante a izquierda J en G por $Je_0 = e_3, Je_1 = e_2$. Una sección diferenciable invariante a izquierda del fibrado canónico de (G,J) es la $(2,0)$-forma σ definida por $\sigma = (e^0+ie^3)\wedge(e^1+ie^2)$. Luego, usando la notación $e^{jk\cdots} = e^j\wedge e^k\wedge\dots$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma &= -ie^{12}\wedge(e^1+ie^2) - (e^0+ie^3)\wedge(e^{02}-ie^{01})\\ &= -ie^{023} - e^{013} \neq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, σ no es cerrada, por lo que no es holomorfa. Sin embargo, si t denota la coordenada del factor $\mathbb{R}$ resulta $\mathrm{d}t = e^0$ y entonces la $(2,0)$-forma $\tau := \mathrm{e}^{it}\sigma$ es holomorfa, pues

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau &= i\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t\wedge\sigma + \mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}\sigma\\ &= \mathrm{e}^{it}[ie^0\wedge(e^{01}+e^{23}+i(e^{02}-e^{13})) - (e^{013}+ie^{023})]\\ &= \mathrm{e}^{it}(ie^{023}+e^{013}-(e^{013}+ie^{023}))\\ &= 0.\end{aligned}$$

El grupo de Lie G admite el retículo $\Gamma = \{(2\pi k, m, n, \frac{p}{2}) \mid k,m,n,p\in\mathbb{Z}\}$; notar que τ es Γ-invariante dado que $\mathrm{e}^{i(t+2\pi k)} = \mathrm{e}^{it}$. En consecuencia τ induce una $(2,0)$-forma cerrada nunca nula $\tilde\tau$ en la solvariedad $(\Gamma\backslash G, J)$ y así esta solvariedad posee fibrado canónico trivial. Cabe remarcar que $(\Gamma\backslash G,J)$ es una superficie de Kodaira primaria pues se puede ver que es biholomorfa a $(\tilde\Gamma\backslash(\mathbb{R}\times H_3),\tilde J)$, donde $\tilde J$ es inducida por una estructura compleja invariante a izquierda en $\mathbb{R}\times H_3$.

5.2. Solvariedades complejas con fibrado canónico invariantemente trivial

En esta sección abordamos la existencia de $(n,0)$-formas cerradas nunca nulas invariantes a izquierda en grupos de Lie de dimensión $2n$ equipados con una estructura compleja invariante a izquierda, equivalentemente estudiamos la existencia de $(n,0)$-formas cerradas no nulas en las correspondientes álgebras de Lie. Primero caracterizamos la existencia de una tal forma en términos algebraicos. Luego usamos esta caracterización para recuperar resultados conocidos en la literatura y para producir también ejemplos nuevos.

Comenzamos por demostrar el resultado principal de esta sección en la que caracterizamos las álgebras de Lie de dimensión $2n$ equipadas con estructuras complejas que admiten $(n,0)$-formas cerradas no nulas. Para ello, introducimos[2] una 1-forma $\psi\in\mathfrak{g}^*$ (comparar con θ^1 en [152, Proposition 4.1]) que llamaremos *1-forma canónica* y que jugará un rol crucial a lo largo del capítulo:

$$\psi(x) = \operatorname{Tr}(J\operatorname{ad}x) - \operatorname{Tr}\operatorname{ad}(Jx), \quad x\in\mathfrak{g}.$$

Teorema 5.2.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de dimensión $2n$ equipada con una estructura casi compleja J. Sea $\sigma\in\bigwedge^{n,0}\mathfrak{g}^*$ una $(n,0)$-forma no nula en $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathrm{d}\sigma = 0$ si y sólo si J es integrable y $\psi\equiv 0$.*

Demostración. Sea $\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n\}$ una base J-adaptada de $\mathfrak{g}$, es decir, $Ju_j = v_j$ para todo j. Dado que $\dim_{\mathbb{C}}\bigwedge^{n,0}\mathfrak{g}^* = 1$, podemos asumir que $\sigma = (u^1+iv^1)\wedge\cdots\wedge(u^n+iv^n)$.

[2] Una 1-forma definida de manera similar apareció en [98] (ver también [76]) al estudiar estructuras complejas homogéneas invariantes en espacios homogéneos G/H.

Los corchetes de Lie de $\mathfrak{g}$ se pueden escribir en términos de la base anterior mediante

$$[u_j,u_k]=\sum_{\ell=1}^n a_{jk}^\ell u_\ell+\sum_{\ell=1}^n b_{jk}^\ell v_\ell,\quad [u_j,v_k]=\sum_{\ell=1}^n c_{jk}^\ell u_\ell+\sum_{\ell=1}^n d_{jk}^\ell v_\ell,\quad [v_j,v_k]=\sum_{\ell=1}^n e_{jk}^\ell u_\ell+\sum_{\ell=1}^n f_{jk}^\ell v_\ell,$$

con $a_{kj}^\ell=-a_{jk}^\ell$, $b_{kj}^\ell=-b_{jk}^\ell$, $e_{kj}^\ell=-e_{jk}^\ell$ y $f_{kj}^\ell=-f_{jk}^\ell$.

En consecuencia, para $1\le\ell\le n$ tenemos que

$$\mathrm{d}u^\ell=-\sum_{j,k=1}^n\left(\frac12 a_{jk}^\ell\,u^{jk}+c_{jk}^\ell\,u^j\wedge v^k+\frac12 e_{jk}^\ell\,v^{jk}\right),\quad \mathrm{d}v^\ell=-\sum_{j,k=1}^n\left(\frac12 b_{jk}^\ell\,u^{jk}+d_{jk}^\ell\,u^j\wedge v^k+\frac12 f_{jk}^\ell\,v^{jk}\right).$$

Denotemos $\gamma_j:=u^j+iv^j$ para todo j, de manera que $\sigma=\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_n$. A continuación calculamos $\mathrm{d}\gamma_\ell$ en términos de γ_j y $\bar\gamma_j$. En primer lugar, observamos que $2u^j=(\gamma_j+\bar\gamma_j)$ y $2v^j=-i(\gamma_j-\bar\gamma_j)$ implican que

$$\begin{aligned}4u^{jk}&=(\gamma_j+\bar\gamma_j)\wedge(\gamma_k+\bar\gamma_k)=\gamma_{jk}+\gamma_{\bar jk}+\gamma_{j\bar k}+\gamma_{\bar j\,\bar k},\\ 4u^j\wedge v^k&=-i(\gamma_j+\bar\gamma_j)\wedge(\gamma_k-\bar\gamma_k)=-i(\gamma_{jk}+\gamma_{\bar jk}-\gamma_{j\bar k}-\gamma_{\bar j\,\bar k}),\\ 4v^{jk}&=-(\gamma_j-\bar\gamma_j)\wedge(\gamma_k-\bar\gamma_k)=-(\gamma_{jk}-\gamma_{\bar jk}-\gamma_{j\bar k}+\gamma_{\bar j\,\bar k}).\end{aligned}$$

De estas identidades se deduce que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\gamma_\ell&=-\sum_{j,k=1}^n\frac12(a_{jk}^\ell+ib_{jk}^\ell)u^{jk}+(c_{jk}^\ell+id_{jk}^\ell)u^j\wedge v^k+\frac12(e_{jk}^\ell+if_{jk}^\ell)v^{jk}\qquad(5.2.1)\\ &=-\frac14\sum_{j,k=1}^n\Bigg(\left(\frac12a_{jk}^\ell+d_{jk}^\ell-\frac12e_{jk}^\ell+i\left(\frac12b_{jk}^\ell-c_{jk}^\ell-\frac12f_{jk}^\ell\right)\right)\gamma_{jk}\\ &\quad+\left(\frac12a_{jk}^\ell+d_{jk}^\ell+\frac12e_{jk}^\ell+i\left(\frac12b_{jk}^\ell-c_{jk}^\ell+\frac12f_{jk}^\ell\right)\right)\gamma_{\bar jk}\\ &\quad+\left(\frac12a_{jk}^\ell-d_{jk}^\ell+\frac12e_{jk}^\ell+i\left(\frac12b_{jk}^\ell+c_{jk}^\ell+\frac12f_{jk}^\ell\right)\right)\gamma_{j\bar k}\\ &\quad+\left(\frac12a_{jk}^\ell-d_{jk}^\ell-\frac12e_{jk}^\ell+i\left(\frac12b_{jk}^\ell+c_{jk}^\ell-\frac12f_{jk}^\ell\right)\right)\gamma_{\bar j\,\bar k}\Bigg).\end{aligned}$$

Usamos la expresión anterior para calcular $\mathrm{d}\sigma$, donde usamos la notación no convencional pero más corta $\dfrac{\sigma}{\gamma_l}=\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_{\ell-1}\wedge\gamma_{\ell+1}\wedge\cdots\wedge\gamma_n$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma&=\sum_{\ell=1}^n(-1)^{\ell+1}\gamma_1\wedge\cdots\wedge\gamma_{\ell-1}\wedge\mathrm{d}\gamma_\ell\wedge\gamma_{\ell+1}\wedge\cdots\wedge\gamma_n\\ &=-\frac14\sum_{j,\ell}\left(\frac12a_{j\ell}^\ell+d_{j\ell}^\ell+\frac12e_{j\ell}^\ell+i\left(\frac12b_{j\ell}^\ell-c_{j\ell}^\ell+\frac12f_{j\ell}^\ell\right)\right)\bar\gamma_j\wedge\sigma\\ &\quad+\frac14\sum_{k,\ell}\left(\frac12a_{\ell k}^\ell-d_{\ell k}^\ell+\frac12e_{\ell k}^\ell+i\left(\frac12b_{\ell k}^\ell+c_{\ell k}^\ell+\frac12f_{\ell k}^\ell\right)\right)\bar\gamma_k\wedge\sigma\\ &\quad+\frac14\sum_{j,k,\ell=1}^n(-1)^\ell\left(\frac12a_{jk}^\ell-d_{jk}^\ell-\frac12e_{jk}^\ell+i\left(\frac12b_{jk}^\ell+c_{jk}^\ell-\frac12f_{jk}^\ell\right)\right)\bar\gamma_j\wedge\bar\gamma_k\wedge\frac{\sigma}{\gamma_\ell}\\ &=\frac14\sum_{j,\ell}(a_{\ell j}^\ell-(d_{j\ell}^\ell+d_{\ell j}^\ell)+e_{\ell j}^\ell)+i(b_{\ell j}^\ell+(c_{\ell j}^\ell+c_{j\ell}^\ell)+f_{\ell j}^\ell))\bar\gamma_j\wedge\sigma\\ &+\frac14\sum_{j<k}\sum_\ell((a_{jk}^\ell+(-d_{jk}^\ell+d_{kj}^\ell)-e_{jk}^\ell)+i(b_{jk}^\ell+(c_{jk}^\ell-c_{kj}^\ell)-f_{jk}^\ell))\bar\gamma_j\wedge\bar\gamma_k\wedge\frac{\sigma}{\gamma_\ell}.\end{aligned}$$

Puesto que $\{\bar{\gamma}_j \wedge \sigma \mid 1 \le j \le n\} \cup \{\bar{\gamma}_j \wedge \bar{\gamma}_k \wedge \frac{\sigma}{\gamma_\ell} \mid j < k, 1 \le \ell \le n\}$ es linealmente independiente, resulta que $\mathrm{d}\sigma = 0$ si y sólo si

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}^{\ell} - d_{j\ell}^{\ell} - d_{\ell j}^{\ell} + e_{\ell j}^{\ell} = 0, \quad \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell j}^{\ell} + c_{\ell j}^{\ell} + c_{j\ell}^{\ell} + f_{\ell j}^{\ell} = 0, \quad 1 \le j \le n, \tag{5.2.2}$$

$$e_{jk}^{\ell} = a_{jk}^{\ell} - d_{jk}^{\ell} + d_{kj}^{\ell}, \quad f_{jk}^{\ell} = b_{jk}^{\ell} + c_{jk}^{\ell} - c_{kj}^{\ell}, \qquad j < k,\ 1 \le \ell \le n. \tag{5.2.3}$$

Por otro lado, se deduce de la Proposición 1.1.16 que la integrabilidad de J es equivalente a

$$\mathrm{d}(\textstyle\bigwedge^{1,0}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{*}) \subseteq \textstyle\bigwedge^{2,0}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{*} \oplus \textstyle\bigwedge^{1,1}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{*},$$

donde $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ denota la complexificación de $\mathfrak{g}$ y los bigrados son inducidos por J.

Por lo tanto, J es integrable si y sólo si el coeficiente de $\bar{\gamma}_j \wedge \bar{\gamma}_k$ en $\mathrm{d}\gamma_\ell$ se anula para todo j, k, ℓ. Sigue de (5.2.1) que esto sucede si y sólo si

$$e_{jk}^{\ell} = a_{jk}^{\ell} - d_{jk}^{\ell} + d_{kj}^{\ell}, \quad f_{jk}^{\ell} = b_{jk}^{\ell} + c_{jk}^{\ell} - c_{kj}^{\ell}, \quad j < k,\ 1 \le \ell \le n,$$

que son exactamente las condiciones (5.2.3).

Usando el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathfrak{g}$ que hace ortonormal a la base $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} u_j) &= \sum_{\ell=1}^{n} (b_{\ell j}^{\ell} + c_{j\ell}^{\ell}), \quad \operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} v_j) = \sum_{\ell=1}^{n} (d_{\ell j}^{\ell} - e_{\ell j}^{\ell}), \\ -\operatorname{Tr} \operatorname{ad} v_j &= \sum_{\ell=1}^{n} (c_{\ell j}^{\ell} + f_{\ell j}^{\ell}), \quad \operatorname{Tr} \operatorname{ad} u_j = \sum_{\ell=1}^{n} (a_{j\ell}^{\ell} + d_{j\ell}^{\ell}). \end{aligned}$$

Por consiguiente, (5.2.2) puede escribirse como

$$\begin{aligned} -\operatorname{Tr} \operatorname{ad} u_j - \operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} v_j) &= 0 \quad 1 \le j \le n, \\ -\operatorname{Tr} \operatorname{ad} v_j + \operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} u_j) &= 0 \quad 1 \le j \le n. \end{aligned}$$

Entonces (5.2.2) es equivalente a $\psi(u_j) = \psi(v_j) = 0$. Así, $\mathrm{d}\sigma = 0$ si y sólo si J es integrable y $\psi \equiv 0$. □

En el caso unimodular obtenemos la siguiente caracterización.

Corolario 5.2.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie unimodular de dimensión $2n$ equipada con una estructura compleja J. Entonces existe una $(n,0)$-forma cerrada no nula si y sólo si $\operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Observación 5.2.3. De la prueba del Teorema 5.2.1 se deduce que si J es integrable entonces[3]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{4} \sum_{j,\ell} (a_{\ell j}^{\ell} - d_{j\ell}^{\ell} - d_{\ell j}^{\ell} + e_{\ell j}^{\ell}) + i(b_{\ell j}^{\ell} + c_{\ell j}^{\ell} + c_{j\ell}^{\ell} + f_{\ell j}^{\ell})\ \bar{\gamma}_j \wedge \sigma \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j} (-\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} u_j) - \operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} v_j)) + i(\operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} u_j) - \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} v_j)))\ \bar{\gamma}_j \wedge \sigma \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j} (-\psi(v_j) + i\psi(u_j))\ \bar{\gamma}_j \wedge \sigma. \end{aligned}$$

[3] Comparar con [83, Lemma 3].

Cuando $\mathfrak{g}$ es unimodular y J es integrable, el hecho de que la 1-forma ψ se anule idénticamente también puede entenderse en términos de la complexificación $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}$ como muestra la siguiente proposición. Recordemos que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$, donde $\mathfrak{g}^{1,0}$ (respectivamente, $\mathfrak{g}^{0,1}$) es el autoespacio de autovalor i ($-i$ respectivamente) de la extensión $\mathbb{C}$-lineal $J^{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, y vienen dados por

$$\mathfrak{g}^{1,0} = \{x - iJx \mid x \in \mathfrak{g}\}, \quad \mathfrak{g}^{0,1} = \{x + iJx \mid x \in \mathfrak{g}\}.$$

Tanto $\mathfrak{g}^{1,0}$ como $\mathfrak{g}^{0,1}$ son subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ debido a la integrabilidad de J (Proposición 1.1.16).

Proposición 5.2.4. *Sea $(\mathfrak{g}, J)$ un álgebra de Lie unimodular de dimensión $2n$ equipada con una estructura compleja. Entonces $(\mathfrak{g}, J)$ posee una $(n,0)$-forma cerrada no nula si y sólo si*

(1) $\mathfrak{g}^{1,0}$ *es unimodular, o*

(2) $\mathfrak{g}^{0,1}$ *es unimodular.*

Demostración. Mostraremos la equivalencia sólo para $\mathfrak{g}^{1,0}$. Los cálculos para $\mathfrak{g}^{0,1}$ son completamente análogos. Dado un producto interno hermitiano $\langle \cdot , \cdot \rangle$ en $\mathfrak{g}$, este puede extenderse a un producto interno complejo en $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ que satisface $\langle a + ib, c + id\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, d\rangle - i(\langle a, d\rangle - \langle b, c\rangle)$. Así, si $\{e_j\}_{j=1}^{2n}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{g}$ tal que $Je_{2j-1} = e_{2j}$ entonces $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2j-1} - ie_{2j})\right\}_{j=1}^{n}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{g}^{1,0}$.

Ahora, consideremos $x - iJx \in \mathfrak{g}^{1,0}$. Podemos descomponer $\operatorname{ad}(x - iJx)$ con respecto a la descomposición $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$ como sigue:

$$\operatorname{ad}(x - iJx) = \left|\begin{array}{c|c} A_x & * \\ \hline 0 & B_x \end{array}\right|.$$

A continuación calculamos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} A_x &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\langle [x - iJx, e_{2j-1} - ie_{2j}], e_{2j-1} - ie_{2j}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\langle [x, e_{2j-1}] - [Jx, e_{2j}] - i([x, e_{2j}] + [Jx, e_{2j-1}]), e_{2j-1} - ie_{2j}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr}\operatorname{ad} x - i\operatorname{Tr}\operatorname{ad}(Jx) - \operatorname{Tr}(J\operatorname{ad}(Jx)) - i\operatorname{Tr}(J\operatorname{ad} x)\right) \\
&= \frac{1}{2}(\operatorname{Tr}\operatorname{ad} x - \operatorname{Tr}(J\operatorname{ad}(Jx)) - \frac{i}{2}(\operatorname{Tr}\operatorname{ad}(Jx) + \operatorname{Tr}(J\operatorname{ad} x)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\operatorname{Tr}\operatorname{ad}(x - iJx) = 0$ en $\mathfrak{g}^{1,0}$ si y sólo si $\operatorname{Tr}(J\operatorname{ad} x) = -\operatorname{Tr}\operatorname{ad}(Jx)$ en $\mathfrak{g}$. En particular, como $\mathfrak{g}$ es unimodular, se sigue que $\mathfrak{g}^{1,0}$ es unimodular si y sólo si $\operatorname{Tr}(J\operatorname{ad} x) = 0$, y la equivalencia sigue del Corolario 5.2.2. □

Utilizando el Teorema 5.2.1, podemos recuperar algunos resultados conocidos en la literatura.

Por ejemplo, los ejemplos básicos de variedades complejas con fibrado canónico holomórficamente trivial son las variedades paralelizables complejas. En efecto, la trivialidad del fibrado tangente holomorfo implica la trivialidad del fibrado canónico como fibrado holomorfo. Por un resultado de Wang [153] una variedad compleja paralelizable compacta es biholomorfa a un cociente compacto $\Gamma\backslash G$, donde G es un grupo de Lie complejo y Γ es un retículo uniforme de G. La trivialidad del fibrado canónico de tal cociente compacto $\Gamma\backslash G$ también es consecuencia del Teorema 5.2.1 observando que la estructura compleja en el cociente es inducida por una estructura compleja invariante a izquierda en G que satisface $J\operatorname{ad}(x) = \operatorname{ad}(x)J$ para todo $x \in \mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(G)$. Esto implica que $J\operatorname{ad} x = \operatorname{ad}(Jx)$ y dado que $\mathfrak{g}$ es unimodular, la 1-forma canónica ψ se anula idénticamente.

Otra familia de variedades complejas compactas con fibrado canónico trivial son las nilvariedades equipadas con estructuras complejas invariantes. Este hecho (probado en [20]) se puede deducir del Teorema 5.2.1, usando el hecho de que en un álgebra de Lie nilpotente equipada con una estructura compleja se satisface $\operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ (ver [20, Lemma 2.2] o [100, Proposition 2.1]). Sorprendentemente, este hecho no es usado originalmente en [20] para probar que las nilvariedades complejas tienen fibrado canónico trivial. En su lugar, se utiliza la existencia de una base distinguida de $(1,0)$-formas en álgebras de Lie nilpotentes dada por Salamon en [131].

Más recientemente, en [55] fueron caracterizadas las álgebras de Lie casi abelianas de dimensión $2n$ dotadas de una estructura compleja que admite una $(n,0)$-forma cerrada no nula. Recordemos que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice casi abeliana si posee un ideal abeliano de codimensión uno. En este caso, podemos escribir un álgebra de Lie casi abeliana $\mathfrak{g}$ como $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_{2n} \ltimes \mathfrak{u}$, donde $\mathfrak{u}$ es un ideal abeliano. Se sabe que (ver por ejemplo [100]) un álgebra de Lie casi abeliana de dimensión $2n$ admite una estructura compleja si y sólo si $B := \operatorname{ad} e_{2n}|_{\mathfrak{u}}$ se escribe de la forma

$$B = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline v & A \end{array}\right], \quad \text{donde } a \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^{2n-2},\ AJ_1 = J_1 A.$$

Aquí[4] estamos descomponiendo $\mathfrak{u} = \mathbb{R}e_1 \oplus (\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u})$, con $e_1 = -Je_{2n}$ y $J_1 := J|_{\mathfrak{u}\cap J\mathfrak{u}}$.

Como un corolario del Teorema 5.2.1 recuperamos el resultado en [55, Proposition 2.4].

Corolario 5.2.5. *Sean $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_{2n} \ltimes \mathbb{R}^{2n-1}$ un álgebra de Lie casi abeliana y J una estructura compleja en $\mathfrak{g}$ como arriba. Entonces $(\mathfrak{g}, J)$ admite una $(n,0)$-forma cerrada no nula si y sólo si*

$$a + \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr} A = 0, \quad \operatorname{Tr}(J_1 A) = 0.$$

Si además $\mathfrak{g}$ es unimodular entonces $a = 0$, $\operatorname{Tr} A = 0$ y $\operatorname{Tr}(J_1 A) = 0$.

Demostración. En primer lugar calculamos $J \operatorname{ad} e_{2n}$ y $J \operatorname{ad} e_1$ en la base $\{e_{2n}, e_1, \dots, e_{2n-1}\}$, donde $\{e_j\}_{j=2}^{2n-1}$ es una base J-adaptada de $\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$:

$$J \operatorname{ad} e_{2n} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ \hline & & J_1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & a & \\ \hline 0 & v & A \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & a & \\ 0 & 0 & \\ \hline 0 & * & J_1 A \end{array}\right],$$

$$J \operatorname{ad} e_1 = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ \hline & & J_1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ -a & 0 & \\ \hline -v & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -a & 0 & \\ 0 & 0 & \\ \hline * & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Así, obtenemos que

$$\begin{aligned} \psi(e_{2n}) &= \operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} e_{2n}) - \operatorname{Tr} \operatorname{ad}(Je_{2n}) = \operatorname{Tr}(J_1 A), \\ \psi(e_1) &= \operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} e_1) - \operatorname{Tr} \operatorname{ad}(Je_1) = -a - (a + \operatorname{Tr} A) = -2a - \operatorname{Tr} A. \end{aligned}$$

Se verifica fácilmente que $\psi(\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}) = 0$. Por lo tanto, $\psi \equiv 0$ si y sólo si $a + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A = 0$ y $\operatorname{Tr}(J_1 A) = 0$. Si $\mathfrak{g}$ es unimodular entonces $0 = a + \operatorname{Tr} A$, que junto con $a + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A = 0$ implican que $0 = a = \operatorname{Tr} A$. □

Ejemplo 5.2.6. En dimensión 6, de acuerdo con [54], las álgebras de Lie casi abelianas unimodulares (no nilpotentes) que admiten una estructura compleja con una $(3,0)$-forma cerrada no nula son:

- $\mathfrak{g}_1 = (e^{15}, -e^{25}, -e^{35}, e^{45}, 0, 0)$,
- $\mathfrak{g}_2^\alpha = (\alpha e^{15} + e^{25}, -e^{15} + \alpha e^{25}, -\alpha e^{35} + e^{45}, -e^{35} - \alpha e^{45}, 0, 0)$, $\alpha \geq 0$.

[4] La notación es distinta a la del Capítulo 3 para enunciar los resultados de manera acorde a otros artículos relacionados.

Esta notación significa que, por ejemplo, $\mathfrak{g}_1$ es el álgebra de Lie determinada por una base $\{e^j\}_{j=1}^6$ de $\mathfrak{g}_1^*$ tal que $de^1 = e^{15}$, $de^2 = -e^{25}$, $de^3 = -e^{35}$, $de^4 = e^{45}$, y $de^5 = de^6 = 0$. En $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2^0$ existe una sola estructura compleja que admite $(3,0)$-formas cerradas no nulas mientras que $\mathfrak{g}_2^\alpha$, $\alpha > 0$, tiene dos estructuras complejas de este tipo (salvo equivalencia). Los correspondientes grupos de Lie simplemente conexos G_1 y G_2^α admiten retículos (para un conjunto numerable de valores de α).

A continuación consideramos una familia especial de estructuras complejas invariantes a izquierda en grupos de Lie. Si una estructura casi compleja J en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ satisface $[Jx, Jy] = [x, y]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ entonces es inmediato verificar que J es integrable. Una tal estructura compleja se dice *abeliana*. Fueron introducidas en [19] y han demostrado ser muy útiles en diferentes contextos de la geometría diferencial y compleja. Las estructuras complejas abelianas sólo pueden existir en álgebras de Lie 2-pasos solubles (véase por ejemplo [5]).

En el siguiente resultado mostramos la existencia de una sección trivializante invariante a izquierda del fibrado canónico de un grupo de Lie unimodular equipado con una estructura compleja abeliana. Como es usual, enunciamos el resultado a nivel del álgebra de Lie.

Corolario 5.2.7. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión $2n$ equipada con una estructura compleja abeliana J posee una $(n,0)$-forma cerrada no nula si y sólo si $\mathfrak{g}$ es unimodular. En particular, toda solvariedad compleja equipada con una estructura compleja abeliana tiene fibrado canónico trivial.*

Demostración. El hecho de que J es abeliana es equivalente a que $[x, Jy] = -[Jx, y]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. De aquí, $\operatorname{ad}(x)J = -\operatorname{ad}(Jx)$, lo que implica $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad}(x)J) = -\operatorname{Tr}(\operatorname{ad}(Jx))$. Esta identidad junto con la condición $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad}(x)J) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}(Jx))$, que proviene de $\psi \equiv 0$, y el hecho de que J es un isomorfismo, implican el resultado. ☐

En dimensión 6, hay una sola álgebra de Lie (no nilpotente) unimodular que admite una estructura compleja (ver [4]). Es el álgebra de Lie $\mathfrak{s}$ generada por la base $\{e_i\}_{i=1}^6$ con corchetes de Lie dados por

$$\begin{aligned} &[e_1, e_6] = -e_1, \quad [e_2, e_5] = e_1, \quad [e_1, e_5] = -e_2, \quad [e_2, e_6] = -e_2, \\ &[e_3, e_6] = e_3, \quad [e_4, e_5] = -e_3, \quad [e_3, e_5] = e_4, \quad [e_4, e_6] = e_4. \end{aligned}$$

Esta álgebra de Lie aparece como $\mathfrak{g}_8$ en [54] y como $\mathfrak{s}_{(-1,0)}$ en [4]; es el álgebra de Lie real subyacente a la variedad compleja paralelizable de Nakamura [119] (veáse también [12]). Posee una cantidad infinita de estructuras complejas no equivalentes[5] que admiten una $(3,0)$-forma cerrada no nula, pero solo una de ellas es abeliana ([54, Proposition 3.7]), a saber: $Je_1 = e_2$, $Je_3 = e_4$ y $Je_5 = e_6$. Fue probado en [159] que su correspondiente grupo de Lie simplemente conexo S admite un retículo. Generalizamos a continuación este ejemplo a cualquier dimensión de la forma $4n + 2$.

Ejemplo 5.2.8. Para $n \geq 1$, sea $\mathfrak{s}_n = \mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^{4n}$ el álgebra de Lie unimodular $(4n+2)$-dimensional con base $\{f_1, f_2, e_1, e_2, \ldots, e_{4n}\}$ y corchetes de Lie dados por

$$A := \operatorname{ad} f_1|_{\mathbb{R}^{4n}} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)^{\oplus n}, \quad B := \operatorname{ad} f_2|_{\mathbb{R}^{4n}} = \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)^{\oplus n}.$$

Observar que $\mathfrak{s}_1$ coincide con el álgebra de Lie $\mathfrak{s}$ de arriba.

Es fácil verificar que la estructura casi compleja J definida por $Jf_1 = f_2$ y $Je_{2j-1} = e_{2j}$ para todo $1 \leq j \leq 2n$ es abeliana. Se sigue entonces del Corolario 5.2.7 que $\mathfrak{s}_n$ admite una $(n,0)$-forma cerrada no nula. Mostramos a continuación que el grupo de Lie simplemente conexo asociado S_n admite retículos. Dado $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, sea $t_m = \log(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2})$. Entonces

$$\exp(\pi A) = -\operatorname{I}_{4n}, \quad \exp(t_m B) = \operatorname{diag}(e^{t_m}, e^{t_m}, e^{-t_m}, e^{-t_m})^{\oplus n}.$$

[5] Dos estructuras complejas J_1, J_2 en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dicen *equivalentes* si existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que $\varphi \circ J_1 = J_2 \circ \varphi$.

No es difícil ver, usando que $\mathrm{e}^{t_m}+\mathrm{e}^{-t_m}=m$, que existe una matriz $P\in\mathrm{GL}(4n,\mathbb{R})$ que satisface $P^{-1}\exp(t_mB)P=\left[\begin{smallmatrix}0&-1\\1&m\end{smallmatrix}\right]^{\oplus 2n}$, y es claro que $P^{-1}(-\mathrm{I}_{4n})P=-\mathrm{I}_{4n}$, por lo que las matrices $\exp(\pi A)$ y $\exp(t_mB)$ se conjugan simultáneamente a matrices enteras unimodulares. Dado que cualquier base de $\mathbb{R}^{4n}$ es racional, el Teorema 1.2.5 implica que el subgrupo $\Gamma_m^n:=(\pi\mathbb{Z}\oplus t_m\mathbb{Z})\ltimes P\mathbb{Z}^4$ es un retículo de S_n. La solvariedad compleja correspondiente $(\Gamma_m^n\backslash S_n,J)$ tiene fibrado canónico trivial, para todo m.

Observación 5.2.9. El álgebra de Lie $\mathfrak{s}_n$ también posee una estructura compleja bi-invariante $\tilde{J}$ dada por

$$\tilde{J}f_1=-f_2,\quad \tilde{J}e_{2j-1}=e_{2j},\quad 1\le j\le 2n,$$

de manera que la solvariedad $(\Gamma\backslash S_n,\tilde{J})$ es compleja paralelizable para todo retículo $\Gamma\subset G$, generalizando de esta manera la variedad compleja paralelizable de Nakamura.

5.2.1. Ejemplos en solvariedades casi nilpotentes

Finalizamos esta sección utilizando el Teorema 5.2.1 para estudiar la existencia de $(n,0)$-formas cerradas en una clase de álgebras de Lie casi nilpotentes de dimensión $2n$ que fueron consideradas en [57]. Allí se obtiene una caracterización de la existencia de dos tipos de estructuras hermitianas (J,g) en álgebras de Lie casi nilpotentes $\mathfrak{g}=\mathbb{R}\ltimes_D\mathfrak{n}$ cuyo nilradical $\mathfrak{n}$ satisface $\dim[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=1$, en concreto:

(i) $J[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=\mathfrak{n}^{\perp_\mathfrak{g}}$, donde $\mathfrak{n}^{\perp_\mathfrak{g}}$ denota el complemento ortogonal de $\mathfrak{n}$ en $\mathfrak{g}$, y

(ii) $J[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\subset\mathfrak{n}$.

De acuerdo con [17], si un álgebra de Lie casi nilpotente $\mathfrak{n}$ satisface $\dim[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=1$, $\mathfrak{n}$ es una extensión central de un álgebra de Lie de Heisenberg $\mathfrak{h}_{2\ell+1}$, i.e. una suma directa $\mathfrak{h}_{2\ell+1}\oplus\mathbb{R}^h$ con ℓ,h enteros positivos. Recordemos que $\mathfrak{h}_{2\ell+1}=\mathrm{span}\{x_1,\dots,x_\ell,y_1,\dots,y_\ell,z\}$ con corchetes dados por $[x_i,y_i]=z$ para $1\le i\le\ell$.

Consideremos primero el caso (i). Daremos una caracterización de la existencia de $(n,0)$-formas cerradas no nulas, junto con dos familias de solvariedades complejas con fibrado canónico trivial.

Teorema 5.2.10. [57] *Sea $\mathfrak{g}=\mathbb{R}e_{2n}\ltimes\mathfrak{n}$ un álgebra de Lie casi nilpotente con $\dim[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=1$ equipada con una estructura hermitiana (J,g) tal que $J[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=\mathfrak{n}^{\perp_\mathfrak{g}}$. Entonces existe una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ tal que $Je_1=e_{2n}$ y $Je_{2k}=e_{2k+1}$ para $1\le k\le n-2$, y*

$$[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=\mathbb{R}e_1,\quad \mathfrak{k}_1:=\mathfrak{n}\cap J\mathfrak{n}=\mathit{span}\{e_2,\dots,e_{2n-1}\},\quad J[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=\mathbb{R}e_{2n}.$$

Los corchetes de Lie en esta base se describen mediante

$$\operatorname{ad}e_{2n}|_\mathfrak{n}=\begin{bmatrix}a&0\\0&A\end{bmatrix}\quad y\quad [Y,Z]=-\eta(Y,Z)e_1,\qquad a\in\mathbb{R},\ A\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{k}_1),\ \eta\in\textstyle\bigwedge^2\mathfrak{k}_1^*,\ Y,Z\in\mathfrak{k}_1,$$

donde las siguientes condiciones se satisfacen:

(1) *$AJ_1=J_1A$, donde $J_1=J|_{\mathfrak{k}_1}$,*

(2) *$\eta(J\cdot,J\cdot)=\eta(\cdot,\cdot)$, y*

(3) *$A^*\eta=a\eta$, donde $A^*\eta$ es la 2-forma en $\mathfrak{k}_1$ definida por*

$$(A^*\eta)(X,Y)=\eta(A(X),Y)+\eta(X,A(Y)),\quad X,Y\in\mathfrak{k}_1.$$

Recíprocamente, si los datos (a,A,η,J,g) como arriba satisfacen (1) – (3) entonces definen una estructura hermitiana en un álgebra de Lie casi nilpotente con $\dim[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=1$ tal que $J[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=\mathfrak{n}^{\perp_\mathfrak{g}}$.

Proposición 5.2.11. *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_{2n} \ltimes \mathfrak{n}$ *equipada con una estructura compleja* J *como antes admite una* $(n,0)$*-forma cerrada no nula si y sólo si*

$$a + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A = 0, \quad \operatorname{Tr}(J_1 A) = 0.$$

Si además $\mathfrak{g}$ *es unimodular, entonces*

$$a = \operatorname{Tr} A = 0, \quad \operatorname{Tr}(J_1 A) = 0.$$

Demostración. En [57, Lemma 5.1] fue calculada la siguiente expresión para la 1-forma canónica ψ:

$$\psi(e_1) = -2a - \operatorname{Tr} A, \quad \psi(e_{2n}) = \operatorname{Tr} J_1 A, \quad \psi|_{\mathfrak{k}_1} \equiv 0.$$

Entonces $\psi \equiv 0$ si y sólo si $a + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} J_1 A = 0$, y así el enunciado se sigue del Teorema 5.2.1. Si $\mathfrak{g}$ es unimodular entonces $a + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A = 0$ y $a + \operatorname{Tr} A = 0$ implican $a = \operatorname{Tr} A = 0$. □

Ejemplos 5.2.12. (i) Sea $\mathfrak{g}_n = \mathbb{R}e_{4n+2} \ltimes_B \mathfrak{h}_{4n+1}$ donde

$$B = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline & \mathrm{I}_{2n} & \\ & & -\mathrm{I}_{2n} \end{array}\right], \quad \text{y} \quad \eta = e^{2,2n+2} + \cdots + e^{2n+1,4n+1}.$$

Equipamos a $\mathfrak{g}_n$ con la métrica g que hace ortonormal a la base $\{e_j\}_{j=1}^{4n+2}$, y con la estructura compleja J definida por $Je_1 = e_{4n+2}$ y $Je_{2k} = e_{2k+1}$, $1 \le k \le 2n$. Entonces, en virtud del Teorema 5.2.10, $(\mathfrak{g}_n, J, g)$ define una estructura hermitiana en el álgebra de Lie casi nilpotente unimodular $\mathfrak{g}_n$. Más aún, es fácil verificar que $(\mathfrak{g}_n, J)$ satisface las condiciones de la Proposición 5.2.11, por lo que $(\mathfrak{g}_n, J)$ admite una $(2n+1,0)$-forma cerrada no nula. Para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 3$, el grupo de Lie simplemente conexo asociado G_n admite un retículo Γ_m^n. En efecto, si $t_m = \log(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2})$, definimos

$$P_m = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_{2n} & \alpha_m \mathrm{I}_{2n} \\ 0 & \frac{1}{\alpha_m^{-1}-\alpha_m}\mathrm{I}_{2n} & \frac{\alpha_m^{-1}}{\alpha_m^{-1}-\alpha_m}\mathrm{I}_{2n} \end{array}\right], \quad \text{donde} \quad \alpha_m = \exp(t_m).$$

Entonces $P_m^{-1}\exp(t_m B)P_m = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0_{2n} & -\mathrm{I}_{2n} \\ 0 & \mathrm{I}_{2n} & m\,\mathrm{I}_{2n} \end{array}\right]$. Así, si definimos $f_j = P_m e_j$, para $1 \le j \le 4n+1$, entonces $[f_j, f_k] = [e_j, e_k]$, $1 \le j,k \le 4n+1$, por lo que $\{f_j\}_{j=1}^{4n+1}$ es una base racional de $\mathfrak{h}_{4n+1}$ en la que la matriz de coordenadas de $\exp(t_m B)$ es una matriz entera unimodular. Concluimos del Teorema 1.2.5 que $\Gamma_m^n = t_m\mathbb{Z} \oplus \exp^{H_{4n+1}}(\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{f_1, \dots, f_{4n+1}\})$ es un retículo de G_m. Las solvariedades complejas correspondientes $(\Gamma_m^n \backslash G_m, J)$ tienen fibrado canónico trivial.

(ii) Dados $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=1}^n a_j = 0$, definimos $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(a_1, \dots, a_n) = \mathbb{R}e_{2n+2} \ltimes_B \mathfrak{h}_{2n+1}$ donde

$$B = (0) \oplus \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} 0 & -a_n \\ a_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \eta = e^{23} + \cdots + e^{2n,2n+1}.$$

Dotamos a $\mathfrak{g}$ con la métrica g tal que $\{e_j\}_{j=1}^{2n+2}$ es una base ortonormal y con la estructura compleja J definida por $Je_1 = e_{2n+2}$ y $Je_{2k} = e_{2k+1}$, $1 \le k \le n$. De acuerdo al Teorema 5.2.10, (J, g) es una estructura hermitiana en el álgebra de Lie casi nilpotente unimodular $\mathfrak{g}$. Es fácil verificar que $(\mathfrak{g}, J)$ satisface las condiciones de la Proposición 5.2.11 (pues $\operatorname{Tr} J_1 A = \sum_{j=1}^n a_j = 0$), lo cual implica que $(\mathfrak{g}, J)$ posee una $(n+1,0)$-forma cerrada no nula. El correspondiente grupo de Lie simplemente conexo $G \coloneqq G(a_1, \dots, a_n)$ admite un retículo para algunos valores de los parámetros $a_1, \dots, a_n$. En efecto, eligiendo $a_1, \dots, a_n \in \{2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}\} + 2\pi\mathbb{Z}$ con $a_1 + \cdots + a_n = 0$, obtenemos que $\{e_j\}_{j=1}^{2n+1}$ es una base racional de $\mathfrak{h}_{2n+1}$ en la cual la matriz de coordenadas de $\exp B$ es entera unimodular, por lo que el Teorema 1.2.5 implica que el grupo de Lie G admite un retículo $\Gamma \coloneqq \Gamma(a_1, \dots, a_n)$. Las correspondientes solvariedades complejas equipadas con la estructura compleja inducida $(\Gamma \backslash G, J)$ tienen fibrado canónico trivial.

Consideramos a continuación el caso (ii) y, como en el caso (i), damos una caracterización para la existencia de $(n,0)$-formas cerradas no nulas. Además, exhibimos dos familias de solvariedades complejas con fibrado canónico trivial.

Teorema 5.2.13. [57] *Sea* $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_{2n} \ltimes \mathfrak{n}$ *un álgebra de Lie casi nilpotente con* $\dim[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = 1$ *equipada con una estructura hermitiana* (J,g) *tal que* $J[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$. *Entonces existe una base ortonormal* $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ *tal que* $Je_{2j-1} = e_{2j}$, $1 \leq j \leq n$, *y*

$$\mathfrak{n} = \mathbb{R}\langle e_1, \ldots, e_{2n-1}\rangle, \quad [\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = \mathbb{R}e_1.$$

Denotamos $\mathfrak{k}_1 := [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]^{\perp_{\mathfrak{g}}} \cap \mathfrak{n}$ *y* $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}_1 \cap J\mathfrak{k}_1$. *Entonces, con respecto a la descomposición*

$$\mathfrak{n} = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathfrak{k}_2 \oplus \mathbb{R}e_{2n-1},$$

los corchetes de Lie se describen mediante

$$\operatorname{ad} e_{2n}|_{\mathfrak{n}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & 0 & \alpha & v_1 \\ \hline 0 & a_2 & \gamma & v_2 \\ \hline 0 & 0 & A & v \\ \hline 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right], \quad [Y,Z] = -\eta(Y,Z)e_1, \quad Y,Z \in \mathfrak{k}_1,$$

donde $a, a_1, a_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, $v \in \mathfrak{k}_2$, $\alpha, \gamma \in \mathfrak{k}_2^*$, $A \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{k}_2)$ *y*

$$\eta = \xi + (\gamma + \alpha \circ J) \wedge e^{2n-1} + (a_2 - a_1)e^2 \wedge e^{2n-1}, \quad \xi \in \Lambda^2\mathfrak{k}_2^*.$$

Además, $[A, J|_{\mathfrak{k}_2}] = 0$ *y se satisfacen las ecuaciones*

$$\begin{aligned} 0 &= (a_2 - a_1)(a + a_2 - a_1), \\ 0 &= A^*\xi - a_1\xi, \\ 0 &= (a - a_1)(\gamma + \alpha \circ J) + A^*(\gamma + \alpha \circ J) + (a_2 - a_1)\gamma - \iota_v\xi. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si los datos $(a, a_1, a_2, A, v_1, v_2, \alpha, \gamma, v, \xi, J, g)$ *satisfacen las condiciones de arriba entonces definen una estructura hermitiana* (J,g) *en el álgebra de Lie casi nilpotente* $\mathfrak{g}$ *de manera que* $J[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = \mathfrak{n}^{\perp_{\mathfrak{g}}}$.

Proposición 5.2.14. *El álgebra de Lie* $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_{2n} \ltimes \mathfrak{n}$ *equipada con la estructura compleja* J *como antes admite una* $(n,0)$*-forma cerrada no nula si y sólo si*

$$\operatorname{Tr} A = -2(a + a_1), \quad \operatorname{Tr}(J|_{\mathfrak{k}_2}A) = 0.$$

Si el grupo de Lie simplemente conexo asociado G *admite retículos entonces*

$$a_1 = a_2 = a = 0, \quad \operatorname{Tr} A = 0, \quad \operatorname{Tr}(J|_{\mathfrak{k}_2}A) = 0.$$

Demostración. En [57, Lemma 5.10] se calcula la siguiente expresión para la 1-forma canónica ψ:

$$\begin{aligned} \psi(e_1) &= \psi(e_2) = 0, \quad \psi(\mathfrak{k}_2) \equiv 0, \\ \psi(e_{2n-1}) &= (-a + a_2 - a_1) - (a + a_1 + a_2 + \operatorname{Tr} A) = -2(a + a_1) - \operatorname{Tr} A, \\ \psi(e_{2n}) &= \operatorname{Tr}(J|_{\mathfrak{k}_2}A). \end{aligned}$$

Entonces $\psi \equiv 0$ si y sólo si $\operatorname{Tr} A = -2(a + a_1)$ y $\operatorname{Tr}(J|_{\mathfrak{k}_2}A) = 0$, por lo que el enunciado se deduce del Teorema 5.2.1. Si G admite retículos, entonces por un resultado de [67] $\mathfrak{g}$ es *fuertemente unimodular*, y por [57, Remark 2.6] el álgebra de Lie casi nilpotente $\mathfrak{g}$ es fuertemente unimodular si y sólo si $a_1 = a + a_2 + \operatorname{Tr} A = 0$. Esto, junto con el hecho de que $\operatorname{Tr} A = -2(a + a_1)$ y $0 = a_2(a + a_2)$, implican que $a_1 = a_2 = a = \operatorname{Tr} A = 0$. ☐

Ejemplos 5.2.15. (i) Dado $n \geq 2$, sea $\mathfrak{g}_n = \mathbb{R}e_{4n} \ltimes_B \mathfrak{h}_{4n-1}$ donde

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{I}_{2n-2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\mathrm{I}_{2n-2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \ v_1, v_2 \neq 0, \quad \text{y} \quad \eta = e^{3,2n+1} + \cdots + e^{2n,4n-2}.$$

Dotamos a $\mathfrak{g}_n$ con la métrica g que satisface que $\{e_j\}_{j=1}^{4n}$ es una base ortonormal, y con la estructura compleja J definida por $Je_{2k-1} = e_{2k}$, $1 \leq k \leq 2n$. Luego, de acuerdo con el Teorema 5.2.13, (J, g) es una estructura hermitiana en el álgebra de Lie casi nilpotente unimodular $\mathfrak{g}_n$. Más aún, $(\mathfrak{g}_n, J)$ satisface las condiciones de la Proposición 5.2.14 de modo que $(\mathfrak{g}_n, J)$ admite una $(2n, 0)$-forma cerrada no nula. El grupo de Lie simplemente conexo asociado G_n admite retículos. En efecto, para $m \in \mathbb{N}, m \geq 3$, sea $\alpha_m = \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$ y $t_m = \log \alpha_m$. Así, la matriz

$$\exp(t_m B) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & v_1 t_m \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & v_2 t_m \\ \hline 0 & 0 & \alpha_m \mathrm{I}_{2n-2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \alpha_m^{-1} \mathrm{I}_{2n-2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

es conjugada mediante

$$P_m = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} v_1 t_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline v_2 t_m & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{v_1 t_m} \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{I}_{2n-2} & \alpha_m \mathrm{I}_{2n-2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_m^{-1}-\alpha_m} \mathrm{I}_{2n-2} & \frac{\alpha_m^{-1}}{\alpha_m^{-1}-\alpha_m} \mathrm{I}_{2n-2} & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a una matriz entera unimodular. Si definimos $f_j = P_m e_j$ para $1 \leq j \leq 4n-1$ resulta que $[f_j, f_k] = [e_j, e_k]$ por lo que $\{f_j\}_{j=1}^{4n-1}$ es una base racional de $\mathfrak{h}_{4n-1}$ en la cual $\exp(t_m B)$ se escribe como una matriz entera unimodular. En consecuencia, gracias al Teorema 1.2.5, el grupo de Lie G_n admite para cada $m \in \mathbb{N}$ un retículo Γ_n^m. Las solvariedades complejas asociadas $(\Gamma_n^m \backslash G_n, J)$ poseen fibrado canónico trivial.

(ii) Para $n \geq 2$, sea $\mathfrak{g}(a_1, \ldots, a_n) = \mathbb{R}e_{2n+2} \ltimes_B \mathfrak{h}_{2n+1}$ donde

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & v_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & v_2 \\ \hline 0 & 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \ v_1, v_2 \neq 0, \ A = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} 0 & -a_n \\ a_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$$

y $\eta = e^{34} + \cdots + e^{2n-1,2n}$. De acuerdo al Teorema 5.2.13, si definimos (J, g) como en el Ejemplo (i) anterior obtenemos una estructura hermitiana en $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(a_1, \ldots, a_n)$. Además, dado que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, obtenemos que $(\mathfrak{g}, J)$ posee una $(n+1, 0)$-forma cerrada no nula, debido a la Proposición 5.2.14. El grupo de Lie simplemente conexo asociado $G = G(a_1, \ldots, a_n)$ admite retículos. En efecto, si elegimos $a_1, \ldots, a_n \in \{2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}\} + 2\pi\mathbb{Z}$ tales que $a_1 + \cdots + a_n = 0$ y tomamos

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline v_2 & 0 & 0 & -\frac{1}{v_1} \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{I}_{2n-2} & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

tenemos una base racional $\{f_j\}_{j=1}^{2n+1}$ de $\mathfrak{h}_{2n+1}$, donde $f_j = Pe_j$, en la cual $\exp B$ es entera unimodular. Luego, el Teorema 1.2.5 implica que el grupo de Lie simplemente conexo asociado G admite un retículo $\Gamma = \Gamma(a_1, \dots, a_n)$. Las solvariedades complejas asociadas $(\Gamma\backslash G, J)$ tienen fibrado canónico trivial.

5.2.2. Fibrado canónico invariantemente de torsión

En esta breve subsección abordamos el caso en que alguna potencia del fibrado canónico de un cociente compacto complejo $(\Gamma\backslash G, J)$ es trivial mediante una sección holomorfa invariante. Lo que obtenemos es que en realidad el fibrado canónico es en sí mismo invariantemente trivial.

Proposición 5.2.16. *Sea (G, J) un grupo de Lie de dimensión $2n$ equipado con una estructura compleja invariante a izquierda. Si $K_G^{\otimes k}$ admite una sección holomorfa invariante no nula para algún $k \in \mathbb{N}$ entonces K_G admite una sección holomorfa invariante no nula. Esto es, (G, J) tiene fibrado canónico trivial. Lo mismo sucede para cualquier cociente $\Gamma\backslash G$ donde Γ es un retículo uniforme de G.*

Demostración. Como es habitual, podemos trabajar a nivel del álgebra de Lie dado que estamos tratando con objetos invariantes. Sea σ un generador de $\bigwedge^{n,0}\mathfrak{g}^*$, i.e. una $(n,0)$-forma, donde $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Entonces, $\sigma^{\otimes k} := \sigma \otimes \cdots \otimes \sigma$ (k veces) genera $(\bigwedge^{n,0}\mathfrak{g}^*)^{\otimes k}$, la cual podemos asumir holomorfa dado que este espacio tiene dimensión 1. La Observación 5.2.3 implica que $d\sigma = \beta \wedge \sigma$ para alguna $(0,1)$-forma β, la cual en términos del operador de Dolbeault extendido $\bar\partial$ puede expresarse como $\bar\partial\sigma = \beta \otimes \sigma$.

A continuación calculamos

$$0 = \bar\partial\sigma^{\otimes k} = \sum_{j=1}^{k} \sigma \otimes \cdots \otimes \underbrace{\bar\partial\sigma}_{j\text{-ésimo lugar}} \otimes \cdots \otimes \sigma = \sum_{j=1}^{k} \beta \otimes \sigma^{\otimes k} = k\beta \otimes \sigma^{\otimes k}.$$

En consecuencia, $\beta = 0$ y esto implica $\bar\partial\sigma = 0$. De aquí, σ es holomorfa y la prueba está completa. □

5.3. Trivialidad del fibrado canónico de grupos de Lie solubles con estructuras complejas invariantes a izquierda

El propósito principal de esta sección es mostrar que todo grupo de Lie soluble simplemente conexo equipado con una estructura compleja invariante a izquierda tiene fibrado canónico trivial. En general la sección holomorfa trivializante no será invariante a izquierda.

Cualquier sección nunca nula del fibrado canónico de un grupo de Lie de dimensión $2n$ equipado con una estructura compleja invariante a izquierda J puede ser escrita como $\tau = f\sigma$, donde σ es una $(n,0)$-forma invariante a izquierda no nula y f es una función diferenciable $f : G \to \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^\times$. Cuando esta f existe no podemos esperar unicidad en general (en el contexto no compacto) como el siguiente resultado muestra.

Lema 5.3.1. *Sea G un grupo de Lie de dimensión $2n$ equipado con una estructura compleja invariante a izquierda J, y sea σ una $(n,0)$-forma invariante a izquierda no nula en G. Asumimos que $\tau_1 := f_1\sigma$ es cerrada, para alguna función diferenciable $f_1 : G \to \mathbb{C}^\times$. Si $f_2 : G \to \mathbb{C}^\times$ es otra función diferenciable en G entonces $\tau_2 := f_2\sigma$ es cerrada si y sólo si $\frac{f_2}{f_1}$ es una función holomorfa en G. En particular, si G es compacto entonces $f_2 = cf_1$ para algún $c \in \mathbb{C}^\times$.*

Demostración. Supongamos primero que $H := \frac{f_2}{f_1}$ es holomorfa. Entonces

$$\overline{\partial}\tau_2 = \overline{\partial}((Hf_1)\sigma) = \overline{\partial}(Hf_1) \wedge \sigma + (Hf_1)\,\overline{\partial}\sigma = H(\overline{\partial}f_1) \wedge \sigma + (Hf_1)\,\overline{\partial}\sigma = H(\overline{\partial}f_1 \wedge \sigma + f_1\,\overline{\partial}\sigma) = H\,\overline{\partial}(f_1\sigma) = 0.$$

En consecuencia, τ_2 es holomorfa y por lo tanto cerrada.

Recíprocamente, supongamos ahora que τ_2 es cerrada. De $\mathrm{d}\tau_1 = 0$ y $\mathrm{d}\tau_2 = 0$ obtenemos que

$$\mathrm{d}f_1 \wedge \sigma + f_1\, \mathrm{d}\sigma = 0, \qquad \mathrm{d}f_2 \wedge \sigma + f_2\, \mathrm{d}\sigma = 0.$$

De estas ecuaciones se deduce inmediatamente que

$$\mathrm{d}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) \wedge \sigma = 0. \tag{5.3.1}$$

Consideremos una base $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ de $(1,0)$-formas invariantes a izquierda en G, por lo que podemos asumir $\sigma = \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n$. Si escribimos

$$\mathrm{d}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \sum_{j=1}^{n} (a_j \gamma_j + b_j \overline{\gamma}_j),$$

para algunos $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, entonces (5.3.1) se convierte en

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (a_j \gamma_j + b_j \overline{\gamma}_j) \wedge \sigma = \sum_{j=1}^{n} b_j \overline{\gamma}_j \wedge \sigma,$$

lo que implica $b_j = 0$ para $j = 1, \dots, n$ dado que $\{\overline{\gamma}_j \wedge \sigma\}_{j=1}$ es linealmente independiente. Esto significa que $\mathrm{d}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$ es una $(1,0)$-forma, y esto es equivalente a $\overline{\partial}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = 0$, esto es, $\frac{f_2}{f_1}$ es holomorfa. □

Corolario 5.3.2. *Sea G un grupo de Lie de dimensión $2n$ con una estructura compleja J, y asumimos que G admite un retículo uniforme Γ. Si σ es una $(n,0)$-forma invariante no nula y $f : \Gamma\backslash G \to \mathbb{C}^{\times}$ es una función diferenciable tal que $\tau := f\sigma$ es cerrada entonces f es única (salvo multiplicar por una constante no nula). En particular, las $(n,0)$-formas cerradas nunca nulas τ en $(\Gamma\backslash G, J)$ son todas invariantes o todas no invariantes.*

Procedemos a continuación a probar el teorema principal de la sección. Empezamos con una serie de resultados preliminares. Recordemos que en un álgebra de Lie soluble $\mathfrak{g}$, su nilradical $\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ está dado por $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad} x \text{ es nilpotente}\}$.

Lema 5.3.3. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble equipada con una estructura compleja J, y denotemos por $\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ a su nilradical. Si $\mathfrak{h} = \operatorname{Ker}\psi$, donde ψ es la 1-forma canónica en $(\mathfrak{g}, J)$, entonces*

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) \cap J\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathfrak{n}(\mathfrak{g}) \cap J\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$. Dado que $Jx \in \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ resulta que $\operatorname{ad}(Jx)$ es nilpotente y así $\operatorname{Tr}\operatorname{ad}(Jx) = 0$. En consecuencia es suficiente probar que $\operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} x) = 0$. Tenemos que

$$x - iJx \in \mathfrak{n}(\mathfrak{g}) \oplus i\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{n}(\mathfrak{g})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}),$$

de modo que $\operatorname{ad}(x - iJx)$ es un endomorfismo nilpotente de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Podemos escribir

$$\operatorname{ad}(x - iJx) = \left[\begin{array}{c|c} A_x & * \\ \hline 0 & B_x \end{array}\right],$$

en una cierta base de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ adaptada a la descomposición $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$. Como este operador es nilpotente, se deduce que las matrices A_x y B_x son ambas nilpotentes, por lo que $\operatorname{Tr} A_x = \operatorname{Tr} B_x = 0$. Finalmente calculamos

$$J^{\mathbb{C}} \operatorname{ad}(x - iJx) = \left[\begin{array}{c|c} iA_x & * \\ \hline 0 & -iB_x \end{array}\right].$$

En conclusión,
$$0 = \mathrm{Tr}(J^{\mathbb{C}}\,\mathrm{ad}(x - iJx)) = \mathrm{Tr}(J\,\mathrm{ad}(x)) - i\,\mathrm{Tr}(J\,\mathrm{ad}(Jx)),$$
lo que implica
$$\mathrm{Tr}(J\,\mathrm{ad}(x)) = \mathrm{Tr}(J\,\mathrm{ad}(Jx)) = 0,$$
y esto es, $x \in \mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h}$. □

El siguiente lema técnico proveerá una base especial de $(1,0)$-formas que será útil en la prueba del resultado principal de la sección.

Lema 5.3.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble de dimensión $2n$ equipada con una estructura compleja J. Entonces existe una base $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ de $(1,0)$-formas, con $\gamma_k = u^k + iv^k$, y un índice $1 \le s \le n$ tales que:*

(i) *u^j es cerrada para $1 \le j \le s$, y*

(ii) *$u_j, v_j \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \cap J[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ para $j > s$,*

donde $\{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\}$ denota la base dual de $\{u^1, v^1, \dots, u^n, v^n\}$.

Demostración. Sea $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ y sea $\mathfrak{u}$ un subespacio complementario a $\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}'$ en $\mathfrak{g}'$, esto es
$$\mathfrak{g}' = (\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{u}.$$
Además, tenemos que $\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{u} = \{0\}$. En efecto, si $v \in \mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{u}$, esto implica que $v \in \mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}'$ puesto que $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}'$. De aquí, $Jv \in \mathfrak{u} \cap (\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}')$, lo que implica $Jv = 0$ y así $v = 0$.

En resumen, podemos descomponer $\mathfrak{g}$ en suma directa como sigue:
$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{u} \oplus J\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{v},$$
donde $\mathfrak{v}$ es un subespacio complementario a $\mathfrak{g}' \oplus J\mathfrak{u}$ en $\mathfrak{g}$, el cual puede ser elegido J-invariante. Como $\mathfrak{g}$ es soluble, $\mathfrak{g}'$ es un subespacio propio de $\mathfrak{g}$, de modo que $J\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{v} \neq \{0\}$. Ahora, el hecho de que los subespacios $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{u} \oplus J\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}'$ son J-invariantes nos permite tomar bases $\{x_1, \dots, x_r, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r\}$ de $\mathfrak{v}$, $\{y_1, \dots, y_m, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m\}$ de $\mathfrak{u} \oplus J\mathfrak{u}$ (con $y_k \in J\mathfrak{u}, \tilde{y}_k \in \mathfrak{u}$) y $\{z_1, \dots, z_\ell, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_\ell\}$ de $\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}'$ tales que $Jx_k = \tilde{x}_k$, $Jy_k = \tilde{y}_k$, $Jz_k = \tilde{z}_k$ y $r + m + \ell = n$. Luego, podemos tomar la base ordenada de $(1,0)$-formas
$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_s, \dots, \gamma_n\} = \{x^1 + i\tilde{x}^1, \dots, x^r + i\tilde{x}^r, y^1 + i\tilde{y}^1, \dots, y^m + i\tilde{y}^m, z^1 + i\tilde{z}^1, \dots, z^\ell + i\tilde{z}^\ell\},$$
donde $s := r + m < n$ y $x^j, \tilde{x}^j, y^j, \tilde{y}^j, z^j, \tilde{z}^j$ son los elementos duales de $x_j, \tilde{x}_j, y_j, \tilde{y}_j, z_j, \tilde{z}_j$, respectivamente, para todo j. Renombramos $u^j = \mathrm{Re}\,\gamma_j$ y $v^j = \mathrm{Im}\,\gamma_j$. Para $1 \le j \le s$ tenemos que u^j pertenece al anulador de $\mathfrak{g}'$ por lo que u^j es cerrada, y para $j > s$ tenemos que $u_j, v_j \in \mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}'$. □

Observación 5.3.5. Se deduce de la prueba del Lema 5.3.4 que $s = n$ si y sólo si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus J\mathfrak{g}'$. En este caso la estructura compleja J es abeliana. En efecto, la condición más general $\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}' = \{0\}$ implica que J es abeliana, lo que puede ser fácilmente verificado de $N_J = 0$.

Teorema 5.3.6. *Todo grupo de Lie soluble simplemente conexo G de dimensión $2n$ equipado con una estructura compleja invariante a izquierda J admite una $(n,0)$-forma cerrada nunca nula τ. En particular, el fibrado canónico de (G,J) es trivial.*

Demostración. Sea $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ y sea la base $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ con $\gamma_k = u^k + iv^k$, como en el Lema 5.3.4. Consideremos ahora la $(n,0)$-forma σ dada por $\sigma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$. Si $\mathrm{d}\sigma = 0$ podemos simplemente elegir $\tau = \sigma$. Por otro lado, si $\mathrm{d}\sigma \neq 0$ resulta de la Observación 5.2.3 que

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(-\psi(v_j) + i\psi(u_j))\,\bar{\gamma}_j \wedge \sigma.$$

Llamemos $C_j = -\psi(v_j) + i\psi(u_j)$. Veremos primero que $C_j = 0$ para $j > s$. En efecto, en este caso $u_j, v_j \in \mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}'$. Como $\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{n}(\mathfrak{g}) \cap J\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ dado que $\mathfrak{g}$ es soluble, se sigue del Lema 5.3.3 que $\psi(u_j) = \psi(v_j) = 0$, por lo que $C_j = 0$ para $j > s$. Entonces podemos escribir

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{s} C_j\bar{\gamma}_j \wedge \sigma = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{s}(C_j\bar{\gamma}_j \wedge \sigma + C_j \underbrace{\gamma_j \wedge \sigma}_{=0}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} C_j u^j \wedge \sigma.$$

En consecuencia, la forma $\alpha = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} C_j u^j$ satisface $\mathrm{d}\sigma = \alpha \wedge \sigma$ y $\mathrm{d}\alpha = 0$ por la elección de la base $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$. Dado que G es simplemente conexo, la 1-forma invariante a izquierda α en G es exacta de manera que existe una función diferenciable $f : G \to \mathbb{C}$ que satisface $\alpha = \mathrm{d}f$. Finalmente, consideramos la $(n,0)$-forma $\tau := \mathrm{e}^{-f}\,\sigma$ y calculamos

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-f}(-\alpha \wedge \sigma + \mathrm{d}\sigma) = 0,$$

lo que dice que τ es una $(n,0)$-forma cerrada nunca nula en G. □

Observación 5.3.7. La $(n,0)$-forma cerrada τ del Teorema 5.3.6 puede ser escrita como $\tau = F\sigma$, donde $F : G \to \mathbb{C}^\times$ es un morfismo de grupos de Lie. En efecto, con la notación de la prueba del Teorema 5.3.6, reemplazando f por $f - f(1_G)$ de ser necesario, se sigue cumpliendo que $\alpha = \mathrm{d}f$ es invariante a izquierda y $f(1_G) = 0$, donde 1_G denota el elemento identidad. Esto implica que $f : G \to \mathbb{C}$ es un morfismo aditivo, de donde $F := \mathrm{e}^{-f} : G \to \mathbb{C}^\times$ es un morfismo multiplicativo.

Observación 5.3.8. Hay grupos de Lie con estructuras complejas invariantes a izquierda que no poseen fibrado canónico trivial. Por ejemplo, el grupo de Lie compacto $S^1 \times \mathrm{SU}(2)$ de dimensión 4 admite una estructura compleja invariante a izquierda que lo hace biholomorfo a la variedad de Hopf $S^1 \times S^3$, y es un resultado conocido que esta superficie compleja compacta no tiene fibrado canónico trivial.

Observación 5.3.9. Hasegawa conjeturó en [85] que todo grupo de Lie soluble unimodular simplemente conexo con una estructura compleja invariante a izquierda es una variedad de Stein (esto es, es biholomorfo a una subvariedad compleja cerrada de algún $\mathbb{C}^N$). Si esta conjetura fuera cierta, entonces el fibrado canónico de cualesquiera de estos pares (G, J) sería holomórficamente trivial en virtud del principio de Oka-Grauert [78], dado que el fibrado canónico de tal grupo de Lie es diferenciablemente trivial mediante una sección invariante a izquierda. Así, el Teorema 5.3.6 provee evidencia en dirección a esta conjetura.

5.4. Una obstrucción algebraica para la trivialidad del fibrado canónico

En esta sección consideraremos cocientes compactos de un grupo de Lie por retículos uniformes, equipados con una estructura compleja invariante. En el resultado principal de la sección proveemos una obstrucción algebraica para que el fibrado canónico sea holomórficamente trivial (o más en general, holomórficamente de torsión), en términos de la 1-forma canónica ψ. Concretamente, ψ debe anularse en el conmutador del álgebra de Lie asociada. Para ello, explotaremos la relación de la 1-forma ψ con la forma de Chern-Ricci de cualquier métrica hermitiana invariante en el cociente.

Recordemos la definición de la forma de Chern-Ricci. Sea (M, J, g) una variedad hermitiana de dimensión $2n$, y sea $\omega = g(J\cdot, \cdot)$ la 2-forma fundamental asociada a (M, J, g). La *conexión de Chern* es la única conexión ∇^C en M que es hermitiana (i.e. $\nabla^C J = 0$, $\nabla^C g = 0$) que satisface que la componente $(1,1)$ de su torsión, $T^{1,1}$, se anula. En términos de la conexión de Levi-Civita ∇, la conexión de Chern se puede expresar mediante

$$g(\nabla^C_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\omega(JX, Y, Z), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

La *forma de Chern-Ricci* $\rho^C = \rho^C(J, g)$ se define por

$$\rho^C(X, Y) = -\tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}(J \circ R^C(X, Y)) = \sum_{i=1}^{n} g(R^C(X, Y)e_i, Je_i),$$

donde $R^C(X, Y) = [\nabla^C_X, \nabla^C_Y] - \nabla^C_{[X,Y]}$ es el tensor de curvatura asociado a ∇^C y $\{e_i, Je_i\}_{i=1}^n$ es un marco ortonormal local para g. Es sabido que ρ^C es una $(1,1)$-forma cerrada real en M.

Consideramos ahora una estructura casi hermitiana invariante a izquierda (J, g) en un grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. En [152] se prueba que

$$\rho^C(x, y) = \tfrac{1}{2}(\operatorname{Tr}(J\,\mathrm{ad}[x, y]) - \operatorname{Tr}\mathrm{ad}(J[x, y])), \quad x, y \in \mathfrak{g}. \tag{5.4.1}$$

Notablemente, la forma de Chern-Ricci no depende de la métrica. Vemos de (5.4.1) que $2\rho^C = -\mathrm{d}\psi$, lo que implica que si ψ se anula idénticamente entonces $\rho^C = 0$, para cualquier métrica hermitiana g. Esto provee una gran fuente de ejemplos de métricas Chern-Ricci planas; y en particular obtenemos ejemplos compactos cuando el grupo de Lie G admite retículos uniformes. Resumimos esto en la siguiente proposición.

Proposición 5.4.1. *Sea (G, J) un grupo de Lie de dimensión $2n$ equipado con una estructura compleja invariante a izquierda y sea Γ un retículo uniforme en G. Si existe una $(n, 0)$-forma cerrada invariante a izquierda no nula en G entonces para cualquier métrica hermitiana invariante a izquierda g en G, la forma de Chern-Ricci asociada a la estructura hermitiana inducida (J, g) en $\Gamma\backslash G$ es nula. En particular, la holonomía de Chern restringida de (J, g) en $\Gamma\backslash G$ está contenida en $\mathrm{SU}(n)$.*

Demostración. Sólo hay que justificar la última afirmación, la cual sigue de [144, Proposition 1.1]. □

Como consecuencia, si $\rho^C \neq 0$ (y por lo tanto $\psi \neq 0$) entonces no hay secciones trivializantes del fibrado canónico de $(\Gamma\backslash G, J)$ que sean invariantes. Veremos a continuación que la condición $\rho^C \neq 0$ implica la inexistencia de secciones trivializantes del fibrado canónico, ya sean invariantes o no, dando así una obstrucción algebraica para que una solvariedad compleja tenga fibrado canónico trivial. De hecho, probaremos un resultado más fuerte, más precisamente que si $\rho^C \neq 0$ entonces el fibrado canónico de $(\Gamma\backslash G, J)$ no es holomórficamente de torsión.

A partir de las ideas de [72, Proposition 5.1], utilizamos el proceso de simetrización de Belgun para probar el resultado. Describimos brevemente este proceso de simetrización ([22]):

Sea G un grupo de Lie equipado con una estructura compleja invariante a izquierda, y sea Γ un retículo uniforme en G. Sea ν la forma de volumen bi-invariante en G dada en [113, Lemma 6.2] tal que $\int_M \nu = 1$, donde $M := \Gamma\backslash G$. Identificando formas invariantes a izquierda en M con formas lineales sobre $\mathfrak{g}^*$ vía traslaciones a izquierda, podemos considerar el mapa de simetrización de Belgun definido por:

$$\mu : \Omega^*(M) \to \textstyle\bigwedge^* \mathfrak{g}^*, \quad \mu(\alpha)(X_1, \dots, X_k) = \int_M \alpha_m(X_1|_m, \dots, X_k|_m)\nu_m,$$

para $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$.

Entonces, el mapa μ satisface las siguientes propiedades:

(i) $\mu(f) \in \mathbb{R}$ para toda $f \in C^\infty(\Gamma\backslash G, \mathbb{R})$,

(ii) $\mu(\alpha) = \alpha$ si $\alpha \in \Lambda^* \mathfrak{g}^*$,

(iii) $\mu(J\alpha) = J\mu(\alpha)$, donde $J\alpha(\cdot, \dots, \cdot) = \alpha(J^{-1}\cdot, \dots, J^{-1}\cdot)$,

(iv) $\mu(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}(\mu(\alpha))$.

Extendiendo este mapa $\mathbb{C}$-linealmente a formas diferenciales a valores en $\mathbb{C}$ en M, también se tiene que:

(v) $\mu(\partial\alpha) = \partial(\mu(\alpha))$ y $\mu(\overline{\partial}\alpha) = \overline{\partial}(\mu(\alpha))$.

Teorema 5.4.2. *Sea G un grupo de Lie equipado con una estructura compleja invariante a izquierda J, y sea Γ un retículo uniforme en G. Denotamos también por J a la estructura compleja inducida en $\Gamma\backslash G$. Si el fibrado canónico de $(\Gamma\backslash G, J)$ es trivial (o, más generalmente, holomórficamente de torsión) entonces* $\operatorname{Tr}(J \operatorname{ad}([x, y])) = 0$ *para todo $x, y \in \mathfrak{g} = \operatorname{Lie}(G)$, esto es $\psi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.*

Demostración. De acuerdo con [144, Proposition 1.1], si M es una variedad compleja compacta y K_M es holomórficamente de torsión entonces dada cualquier métrica hermitiana g en M, la forma de Chern-Ricci asociada ρ^C satisface $\rho^C = i\partial\bar{\partial}F$, para alguna $F \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Ahora, asumimos que el fibrado canónico de $(\Gamma\backslash G, J)$ es holomórficamente de torsión y consideramos una métrica hermitiana g en $\Gamma\backslash G$ inducida por una métrica invariante a izquierda en G. Entonces su forma de Chern-Ricci asociada ρ^C satisface $\rho^C = i\partial\bar{\partial}F$, para alguna $F \in C^\infty(\Gamma\backslash G, \mathbb{R})$. A continuación, sea $\mu(\rho^C)$ la simetrización de ρ^C. Como la simetrización conmuta con los operadores de Dolbeault ∂ y $\bar{\partial}$ tenemos que

$$\mu(\rho^C) = i\partial\bar{\partial}\mu(F) = 0,$$

pues $\mu(F)$ es constante. Debido a que ρ^C es invariante a izquierda deducimos que $\rho^C = \mu(\rho^C)$ y por lo tanto $\rho^C = 0$. Como a nivel del álgebra de Lie tenemos que $\rho^C(x, y) = \operatorname{Tr}(J \operatorname{ad}([x, y]))$ para $x, y \in \mathfrak{g}$, esto concluye la prueba. ☐

Observación 5.4.3. [144, Proposition 1.1] predice la existencia de una métrica hermitiana con $\rho^C = 0$ en cualquier variedad compleja compacta con fibrado canónico holomórficamente de torsión. Resulta de la prueba del Teorema 5.4.2 que en el caso de una solvariedad compleja cualquier métrica hermitiana *invariante* tiene $\rho^C = 0$. Usando nuevamente [144, Proposition 1.1], se obtiene que estas métricas hermitianas invariantes tienen holonomía de Chern restringida contenida en $\mathrm{SU}(n)$, donde $2n$ es la dimensión real de la solvariedad.

Observación 5.4.4. La condición $\rho^C = 0$ no implica necesariamente que el fibrado canónico de la solvariedad es trivial. En efecto, consideremos el grupo de Lie G del Ejemplo 5.1.2 equipado con la estructura compleja invariante a izquierda J definida ahí mismo. Es fácil de ver que $\psi(e_0) = -2$ y $\psi(e_j) = 0$ para $1 \le j \le 3$, por lo que $\psi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$. Sin embargo, el grupo de Lie G admite un retículo $\Gamma' = \{(\pi k, m, n, \frac{p}{2}) \mid k, m, n, p \in \mathbb{Z}\}$ tal que $(\Gamma'\backslash G, J)$ es una superficie de Kodaira secundaria (ver [84]), por lo que el fibrado canónico es no trivial. Notar que $\tau \otimes \tau$, donde $\tau = \mathrm{e}^{it}\sigma$, es una sección trivializante de $K^{\otimes 2}_{\Gamma'\backslash G}$, por lo que el fibrado canónico es holomórficamente de torsión.

Exhibimos a continuación un ejemplo de este fenómeno en dimensión 6.

Ejemplo 5.4.5. Dado $p \in \mathbb{R}$, sea $\mathfrak{g}_p = \mathbb{R}e_6 \ltimes_{A_p} \mathbb{R}^5$, donde la matriz A_p está dada en la base $\{e_1, \dots, e_5\}$ de $\mathbb{R}^5$ por:

$$A_p = \begin{bmatrix} -p & -1 & & & \\ 1 & -p & & & \\ & & p & 2 & \\ & & -2 & p & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Dotamos a $\mathfrak{g}_p$ con la estructura compleja $Je_1 = e_2$, $Je_3 = e_4$ y $Je_5 = e_6$. Luego, es fácil calcular que $\psi(e_j) = 0$ para $1 \leq j \leq 5$ y $\psi(e_6) = 2$. Se deduce entonces del Teorema 5.2.1 que $\mathfrak{g}_p$ no admite ninguna $(3,0)$-forma cerrada no nula.

Para algunos valores de $p \in \mathbb{R}$, el grupo de Lie simplemente conexo asociado G_p admite retículos, de acuerdo con [43] (el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_p$ se corresponde con el grupo de Lie allí denotado $G_{5,17}^{p,-p,2} \times \mathbb{R}$). Además, fue probado, usando técnicas de Console y Fino en [42], que para ciertos valores de p algunos retículos Γ en G_p satisfacen $b_3(\Gamma\backslash G_p) = 0$ (ver [43, Table 7.1]). Por ejemplo, dado $m \in \mathbb{N}$, sea $p = \frac{s_m}{\pi}$, donde $s_m = \log\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}\right)$. Entonces, $\exp(\pi A_p) = \operatorname{diag}(-\mathrm{e}^{-s_m}, -\mathrm{e}^{-s_m}, \mathrm{e}^{s_m}, \mathrm{e}^{s_m}, 1)$ es conjugada a la matriz entera unimodular $E_m = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & m \end{smallmatrix}\right]^{\oplus 2} \oplus (1)$. De acuerdo con el Teorema 1.2.5, el grupo de Lie G_p admite un retículo $\Gamma_m = \pi\mathbb{Z} \ltimes P\mathbb{Z}^5$, donde $P^{-1}\exp(\pi A_p)P = E_m$. Dado que $b_3(\Gamma_m\backslash G_p) = 0$, se sigue de la Proposición 5.1.1 que el fibrado canónico de $(\Gamma_m\backslash G_p, J)$ no es holomórficamente trivial. Sin embargo, esta solvariedad compleja tiene fibrado canónico holomórficamente de torsión. En efecto, si σ es una $(3,0)$-forma invariante a izquierda no nula en G_p entonces $\tau \otimes \tau$, donde $\tau = \mathrm{e}^{it}\sigma$, induce una sección trivializante de $K_{\Gamma_m\backslash G_p}^{\otimes 2}$ puesto que $\mathrm{e}^{2it} = (\mathrm{e}^{it})^2$ es π-periódica.

Una consecuencia inmediata del Teorema 5.4.2 es el siguiente resultado en relación a solvariedades complejas asociadas a las álgebras de Lie casi abelianas y casi nilpotentes de §5.2. Usamos la notación de esa sección.

Corolario 5.4.6. *Sea $(\Gamma\backslash G, J)$ una solvariedad compleja con fibrado canónico holomórficamente de torsión, y sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G.*

(1) *Si $\mathfrak{g}$ es casi abeliana (como en el Corolario 5.2.7) entonces*[6] $a = \operatorname{Tr} A = 0$*;*

(2) *Si $\mathfrak{g}$ es una de las álgebras de Lie casi nilpotentes consideradas en el Caso (i) (como en la Proposición 5.2.11) entonces $a = \operatorname{Tr} A = 0$;*

(3) *Si $\mathfrak{g}$ es una de las álgebras de Lie casi nilpotentes consideradas en el Caso (ii) (como en la Proposición 5.2.14) entonces $a = a_1 = a_2 = \operatorname{Tr} A = 0$.*

Demostración. La prueba se sigue inmediatamente de la condición $\psi([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0$, usando en cada caso los cálculos para ψ previamente realizados. □

Ejemplo 5.4.7. Hay ejemplos de solvariedades complejas cuyo fibrado canónico no es holomórficamente de torsión (y en particular no es holomórficamente trivial). En efecto, las variedades de Oeljeklaus-Toma, introducidas en [122], son variedades complejas (no Kähler) compactas cuyo fibrado canónico no es holomórficamente de torsión. Estas variedades fueron construidas a partir de ciertos cuerpos de números, generalizando algunas superficies de Inoue, pero luego Kasuya mostró en [95] que pueden ser consideradas como solvariedades equipadas con una estructura compleja invariante. Usando la descripción de Kasuya y el Teorema 5.4.2 es fácil verificar que la 1-forma canónica ψ no se anula en el conmutador del álgebra de Lie correspondiente, recuperando de esta manera el hecho de que su fibrado canónico no es holomórficamente de torsión.

Como otra ilustración de la obstrucción del Teorema 5.4.2, tratamos en el siguiente resultado el caso de los grupos de Lie compactos semisimples. Recordamos la construcción de Samelson de una estructura compleja en un álgebra de Lie compacta semisimple de dimensión par $\mathfrak{g}$ ([132]).

Sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{g}$. Entonces tenemos la descomposición en espacios de raíces de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ con respecto a $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$:

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

[6] Veáse también [83, Lemma 7].

donde Φ es el conjunto finito de elementos no nulos $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^*$ llamados raíces, y

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [h,x] = \alpha(h)x \quad \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\}$$

son los subespacios de raíces, que son de dimensión 1. Como $\mathfrak{h}$ es de dimensión par, uno puede escoger un endomorfismo antisimétrico J_0 de $\mathfrak{h}$ con respecto a la forma de Killing tal que $J_0^2 = -\mathrm{I}_{\mathfrak{h}}$. Samelson definió una estructura compleja en $\mathfrak{g}$ considerando un sistema positivo Φ^+ de raíces, el cual es un conjunto $\Phi^+ \subset \Phi$ que satisface

$$\Phi^+ \cap (-\Phi^+) = \varnothing, \qquad \Phi^+ \cup (-\Phi^+) = \Phi, \qquad \alpha, \beta \in \Phi^+,\ \alpha + \beta \in \Phi \Rightarrow \alpha + \beta \in \Phi^+.$$

Fijando

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^{1,0} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha,$$

donde $\mathfrak{h}^{1,0}$ es el autoespacio de $J_0^{\mathbb{C}}$ de autovalor i, se sigue que $\mathfrak{m}$ es una subálgebra de Lie compleja de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ la cual induce una estructura compleja J en $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g}^{1,0} = \mathfrak{m}$, es decir, $\mathfrak{m}$ es el autoespacio de $J^{\mathbb{C}}$ con autovalor i. Esta estructura compleja es antisimétrica con respecto a la forma de Killing en $\mathfrak{g}$.

Recíprocamente, Pittie demostró en [125] que cualquier estructura compleja invariante a izquierda en G se obtiene de este modo.

En el próximo resultado usamos el Teorema 5.4.2 para mostrar que el fibrado canónico de un grupo de Lie compacto equipado con una estructura compleja invariante a izquierda no es holomórficamente de torsión.

Proposición 5.4.8. *El fibrado canónico de un grupo de Lie compacto semisimple de dimensión $2n$ equipado con una estructura compleja invariante a izquierda no es holomórficamente de torsión.*

Demostración. Usamos la notación de los párrafos anteriores: G es el grupo de Lie compacto, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es la estructura compleja obtenida por la construcción de Samelson.

Dado que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, en virtud del Teorema 5.4.2 basta probar que $\operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} x) \neq 0$ para algún $x \in \mathfrak{g}$, o equivalentemente, $\operatorname{Tr}(J^{\mathbb{C}} \operatorname{ad} x) \neq 0$ para algún $x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Recordemos que $\mathfrak{g}^{1,0} = \mathfrak{h}^{1,0} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{g}^{0,1} = \mathfrak{h}^{0,1} \oplus \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Sea x_α un generador de $\mathfrak{g}_\alpha$ para cada $\alpha \in \Phi$. Si $\{h_1, \dots, h_r\}$ es una base de $\mathfrak{h}^{1,0}$, entonces $\mathcal{B} = \{h_1, \dots, h_r\} \cup \{x_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+\}$ es una base de $\mathfrak{g}^{1,0}$ y $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{h_1}, \dots, \overline{h_r}\} \cup \{x_{-\alpha} \mid \alpha \in \Phi^+\}$ es una base de $\mathfrak{g}^{0,1}$.

Consideramos ahora $h \in \mathfrak{h}^{1,0} \subset \mathfrak{g}^{1,0}$. Entonces, con respecto a la base $\mathcal{B} \cup \overline{\mathcal{B}}$ de $\mathfrak{g}$, tenemos que:

$$\operatorname{ad} h = \left[\begin{array}{c|c} A_h & * \\ \hline 0 & B_h \end{array}\right] \qquad \text{y} \qquad J^{\mathbb{C}} \operatorname{ad} h = \left[\begin{array}{c|c} iA_h & * \\ \hline 0 & -iB_h \end{array}\right].$$

Más precisamente, como $\mathfrak{h}^{1,0}$ es una subálgebra abeliana y $[h, x_\alpha] = \alpha(h)x_\alpha$, las matrices A_h y B_h están dadas por:

$$A_h = \left[\begin{array}{c|ccc} 0_r & & & \\ \hline & \alpha_1(h) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_s(h) \end{array}\right] \quad \text{y} \quad B_h = \left[\begin{array}{c|ccc} 0_r & & & \\ \hline & -\alpha_1(h) & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\alpha_s(h) \end{array}\right],$$

donde $s = |\Phi^+|$. De aquí,

$$\operatorname{Tr}(J^{\mathbb{C}} \operatorname{ad} h) = 2i \sum_{j=1}^{s} \alpha_j(h) = 2i \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha(h).$$

Es un resultado conocido que $\sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha \neq 0$. En efecto, existe un conjunto $\Pi \subset \Phi^+$, cuyos elementos se llaman raíces simples, tal que Π es una base de $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^*$ y cada $\alpha \in \Phi^+$ es una combinación lineal de las raíces simples con coeficientes enteros no negativos. Por lo tanto, si $\sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha = 0$ entonces todo $\alpha \in \Phi^+$ sería cero, lo cual es imposible.

En particular, podemos elegir $h \in \mathfrak{h}^{1,0}$ tal que $\operatorname{Tr}(J^{\mathbb{C}} \operatorname{ad} h) \neq 0$. $\square$

Observación 5.4.9. Sea G un grupo de Lie semisimple no compacto equipado con una estructura compleja invariante a izquierda J. De [30] se deduce que G admite un retículo uniforme Γ. Nuevamente, como G es semisimple (de manera que $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ satisface $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$), resulta del Teorema 5.2.1 y el Teorema 5.4.2 que el fibrado canónico de la variedad compleja compacta $(\Gamma\backslash G, J)$ es o bien trivial vía una sección invariante (cuando $\psi = 0$) o no es holomórficamente de torsión (cuando $\psi \neq 0$), donde ψ es la 1-forma canónica en $(\mathfrak{g}, J)$.

Algunos resultados recientes en relación a grupos de Lie semisimples no compactos son los siguientes:

- En [72] se probó que cualquier grupo de Lie real simple no compacto G de tipo interior de dimensión par admite una estructura compleja invariante a izquierda J. Más aún, si Γ es un retículo en G entonces $(\Gamma\backslash G, J)$ tiene fibrado canónico no trivial; de hecho, el fibrado canónico no es holomórficamente de torsión.

- En [123] se probó que un álgebra de Lie unimodular no soluble de dimensión 6 admite una estructura compleja con una $(3,0)$-forma cerrada no nula si y sólo si es isomorfa a $\mathfrak{so}(3,1)$. Se sigue que $\Gamma\backslash \mathrm{SO}(3,1)$ admite una estructura compleja con fibrado canónico trivial (mediante una sección invariante) para todo retículo Γ.

Generalizando este último resultado, observamos que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compleja semisimple entonces su "realificación" $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ admite una estructura compleja bi-invariante J. Si $G_{\mathbb{R}}$ denota el grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ entonces, como mencionamos en la Sección 5.2, el par $(G_{\mathbb{R}}, J)$ admite una sección trivializante de su fibrado canónico que es invariante a izquierda. Por lo tanto, cualquier cociente compacto $(\Gamma\backslash G_{\mathbb{R}}, J)$ posee fibrado canónico trivial.

5.4.1. Ejemplos de solvariedades complejas con fibrado canónico no invariantemente trivial

En virtud del Teorema 5.4.2, para encontrar ejemplos de solvariedades complejas $(\Gamma\backslash G, J)$ con fibrado canónico (no invariantemente) trivial necesitamos que $\psi \not\equiv 0$ pero $\psi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$. Mostramos a continuación que en algunos casos la condición $\psi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ nos permite obtener una sección trivializante no invariante explícita τ de $(\Gamma\backslash G, J)$.

Sea (G, J) un grupo de Lie soluble unimodular de dimensión $2n$ equipado con una estructura compleja invariante a izquierda y sea $\mathfrak{h} = \operatorname{Ker}\psi$, donde $\psi : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ es la 1-forma canónica. Si $\psi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ entonces $\mathfrak{h}$ es un ideal de codimensión uno de $\mathfrak{g}$. Utilizando un producto interno hermitiano en $\mathfrak{g}$ podemos elegir $e_1 \in \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h})^{\perp}$, de manera que $\mathfrak{h} = \mathbb{R}e_1 \oplus (\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h})$. Fijemos ahora $e_0 := -Je_1 \in \mathfrak{h}^{\perp}$, de aquí $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_0 \ltimes \mathfrak{h}$. Sea además $\{u_j, v_j\}_{j=1}^{n-1}$ una base de $\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h}$ tal que $Ju_j = v_j$, $1 \le j \le n-1$.

Definimos la $(n,0)$-forma σ en $\mathfrak{g}$ por $\sigma = (e^0 + ie^1) \wedge \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_{n-1}$, donde $\gamma_j = u^j + iv^j$ y $\{e^0, e^1, u^i, v^i\}_{i=1}^{n-1}$ es la base dual de $\{e_0, e_1, u_i, v_i\}_{i=1}^{n-1}$. En esta base, la Observación 5.2.3 implica que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &= \frac{i}{4}\operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} e_0)\,(e^0 - ie^1) \wedge (e^0 + ie^1) \wedge \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_{n-1} \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(J \operatorname{ad} e_0) e^{01} \wedge \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_{n-1}. \end{aligned}$$

Sea $G = \mathbb{R} \ltimes H$ el grupo de Lie simplemente conexo asociado, donde H es el único subgrupo conexo normal de G tal que $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$, y consideremos la coordenada t de $\mathbb{R}$. Por la definición del producto en G se deduce que si consideramos la base dual $\{e^0, e^1, u^i, v^i\}_{i=1}^{n-1}$ como 1-formas invariantes a izquierda en G (que es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$), entonces tenemos que $\mathrm{d}t = e^0$.

Así, afirmamos que la $(n,0)$-forma $\tau = \mathrm{e}^{i\lambda t}\sigma$ es cerrada, donde $\lambda = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(J\operatorname{ad}e_0)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau &= \mathrm{e}^{i\lambda t}\left(i\lambda\, e^0 \wedge \sigma + \mathrm{d}\sigma\right) \\ &= \mathrm{e}^{i\lambda t}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(J\operatorname{ad}e_0) - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(J\operatorname{ad}e_0)\right)e^{01} \wedge \gamma_1 \cdots \wedge \gamma_{n-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto τ es cerrada. De hecho, este es un caso particular de la construcción del Lema 5.3.4, dado que la base $\{e_0, e_1, u_i, v_i\}_{i=1}^{n-1}$ satisface las condiciones del lema.

Podemos resumir esta construcción como sigue:

Proposición 5.4.10. *Sea (G,J) un grupo de Lie soluble unimodular simplemente conexo de dimensión $2n$ equipado con una estructura compleja. Sea $\mathfrak{h}$ el núcleo de $\psi : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ y asumamos que $\psi([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \equiv 0$, de manera que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_0 \ltimes \mathfrak{h}$ y en consecuencia $G = \mathbb{R} \ltimes H$, donde H es el único subgrupo conexo normal de G tal que $\operatorname{Lie}(H) = \mathfrak{h}$. Entonces la $(n,0)$-forma $\tau = \exp(-\frac{i}{2}\operatorname{Tr}(J\operatorname{ad}e_0)t)\sigma$ es cerrada, donde t es la coordenada de $\mathbb{R}$ y σ es una $(n,0)$-forma invariante a izquierda.*

En el próximo ejemplo aplicamos la Proposición 5.4.10 para mostrar la trivialidad del fibrado canónico asociado a estructuras complejas de tipo *split* (veáse [13] para una definición precisa) en la solvariedad compleja paralelizable de Nakamura de dimensión 6.

Ejemplo 5.4.11. En [13, Proposition 3.1] se clasificaron las estructuras complejas de tipo split en la solvariedad compleja paralelizable de Nakamura de dimensión 6. Hay tres casos no equivalentes:

(i) $J : \mathrm{d}\omega^1 = -\omega^{13}, \quad \mathrm{d}\omega^2 = \omega^{23}, \quad \mathrm{d}\omega^3 = 0,$

(ii) $J_A : \begin{cases} \mathrm{d}\omega^1 = A\omega^{13} - \omega^{1\bar{3}}, \\ \mathrm{d}\omega^2 = -A\omega^{23} + \omega^{2\bar{3}}, \quad A \in \mathbb{C},\ |A| \neq 1, \\ \mathrm{d}\omega^3 = 0, \end{cases}$

(iii) $J_B : \begin{cases} \mathrm{d}\omega^1 = -\omega^{13} + B\omega^{1\bar{3}}, \\ \mathrm{d}\omega^2 = -\bar{B}\omega^{23} + \omega^{2\bar{3}}, \quad B \in \mathbb{C},\ |B| < 1, \\ \mathrm{d}\omega^3 = 0 \end{cases}$

donde $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ es una base de $(1,0)$-formas.

De acuerdo con [54, Proposition 3.7], el álgebra de Lie subyacente admite una $(3,0)$-forma cerrada no nula sólo para las estructuras complejas de tipo (i) y tipo (ii). Por lo tanto, cualquier solvariedad equipada con una estructura compleja J_B de tipo (iii) no posee fibrado canónico invariantemente trivial. Sin embargo, veremos que podemos conseguir una solvariedad asociada con fibrado canónico no invariantemente trivial también para las estructuras complejas de la familia (iii).

En una base real de 1-formas $\{e^1, \ldots, e^6\}$ tales que $J_B e_{2i-1} = e_{2i}$, las ecuaciones (iii) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e^1 &= (r-1)e^{15} + se^{16} - se^{25} + (r+1)e^{26}, \quad \mathrm{d}e^2 = se^{15} - (r+1)e^{16} + (r-1)e^{25} + se^{26}, \\ \mathrm{d}e^3 &= (1-r)e^{35} - se^{36} - se^{45} + (r+1)e^{46}, \quad \mathrm{d}e^4 = se^{35} - (r+1)e^{36} - (r-1)e^{45} - se^{46}, \\ \mathrm{d}e^5 &= 0, \quad \mathrm{d}e^6 = 0, \end{aligned}$$

donde $B = r + is$.

Entonces, los corchetes de Lie determinados por $\{de^1, \dots, de^6\}$ son

$$\begin{aligned} [e_1,e_5] &= (1-r)e_1 - se_2, & [e_1,e_6] &= -se_1 + (r+1)e_2, \\ [e_2,e_5] &= se_1 + (1-r)e_2, & [e_2,e_6] &= -(r+1)e_1 - se_2, \\ [e_3,e_5] &= (r-1)e_3 - se_4, & [e_3,e_6] &= se_3 + (r+1)e_4, \\ [e_4,e_5] &= se_3 + (r-1)e_4, & [e_4,e_6] &= -(r+1)e_3 + se_4. \end{aligned}$$

Denotemos por $(\mathfrak{g}, J_B)$ al álgebra de Lie determinada por estos corchetes de Lie, con estructura compleja $J_Be_1 = e_2$, $J_Be_3 = e_4$ y $J_Be_5 = e_6$. Por otro lado, recordemos el álgebra de Lie $\mathfrak{s}$ del párrafo anterior al Ejemplo 5.2.8, determinada por $(f^{16} - f^{25}, f^{15} + f^{26}, -f^{36} + f^{45}, -f^{35} - f^{46}, 0, 0)$. Es directo verificar que $\varphi : (\mathfrak{g}, J_B) \to (\mathfrak{s}, \tilde{J}_B)$ dada por

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -s & r+1 \\ 1-r & -s \end{bmatrix}$$

es un isomorfismo biholomorfo, donde

$$\begin{gathered} \tilde{J}_B f_1 = -f_2, \quad \tilde{J}_B f_2 = f_1, \quad \tilde{J}_B f_3 = f_4, \quad \tilde{J}_B f_4 = -f_3, \\ \tilde{J}_B f_5 = \tfrac{1}{r^2+s^2-1}(-2s\, f_5 + (r^2+s^2-2r+1)\, f_6), \\ \tilde{J}_B f_6 = \tfrac{1}{r^2+s^2-1}(-(r^2+s^2+2r+1)\, f_5 + 2s\, f_6). \end{gathered}$$

Si $\psi(x) = \mathrm{Tr}(\tilde{J}_B \operatorname{ad} x)$ es la 1-forma canónica en $(\mathfrak{s}, \tilde{J}_B)$, entonces $\psi(f_5) = 4$ y $\psi(f_j) = 0$ para $j \neq 5$. Dado que $f_5 \notin [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ podemos aplicar la Proposición 5.4.10 y obtener una $(3,0)$-forma cerrada nunca nula en el grupo de Lie $S = \mathbb{R} \ltimes H$ definida por

$$\tau = e^{-2it}(f^1 - if^2) \wedge (f^3 + if^4) \wedge \left(f^5 - i\left(\tfrac{2s}{r^2+s^2-1} f^5 + \tfrac{r^2+s^2+2r+1}{r^2+s^2-1} f^6\right)\right),$$

donde t es la coordenada de $\mathbb{R}$. Por otro lado, de acuerdo con el Ejemplo 5.2.8, el grupo de Lie S admite retículos dados por $\Gamma_m = (\pi\mathbb{Z} \oplus t_m\mathbb{Z}) \ltimes P_m\mathbb{Z}^4$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$. La forma τ es invariante por el retículo pues $\exp(-2i(t+\pi k)) = \exp(-2it)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, por lo que induce una $(3,0)$-forma cerrada nunca nula en las solvariedades complejas $(\Gamma_m \backslash S, \tilde{J}_B)$, las cuales en consecuencia tienen fibrado canónico (no invariantemente) trivial.

Finalizamos esta sección aplicando nuevamente la Proposición 5.4.10 para obtener un ejemplo de una solvariedad con fibrado canónico trivial asociada a un álgebra de Lie que no aparece en la lista de [54, Proposition 2.8]. Este ejemplo aparece como $\mathfrak{s}_{6.44}$ en [57].

Ejemplo 5.4.12. Sea $\mathfrak{g} = (e^{23}, e^{36}, -e^{26}, e^{26} + e^{56}, e^{36} - e^{46}, 0)$. Podemos ver a $\mathfrak{g}$ como el álgebra de Lie casi nilpotente unimodular $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_6 \ltimes_A (\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2)$, donde A se escribe en la base $\{e_1, \dots, e_5\}$ como

$$A := \operatorname{ad} e_6|_{\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Equipamos a $\mathfrak{g}$ con la estructura compleja $Je_1 = e_6, Je_2 = e_3, Je_4 = e_5$. Debido al Teorema 5.2.1, dado que $\psi(e_6) = \mathrm{Tr}(J \operatorname{ad} e_6) = 4 \neq 0$, $(\mathfrak{g}, J)$ no admite una $(3,0)$-forma cerrada no nula por lo que $\mathfrak{g}$ no aparece en [54, Proposition 2.8]. No obstante, como $\psi([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \equiv 0$, usando la Proposición 5.4.10

obtenemos la $(3,0)$-forma cerrada nunca nula τ en el grupo de Lie simplemente conexo asociado G dada por $\tau = \mathrm{e}^{-2it}(e^1 + ie^6) \wedge (e^2 + ie^3) \wedge (e^4 + ie^5)$, donde t es la coordenada de $\mathbb{R}$. Por otro lado,

$$\exp(\pi A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si fijamos $f_1 = e_1, f_2 = -\pi e_5, f_3 = e_3, f_4 = -\pi e_4, f_5 = e_2 - e_5$, entonces es fácil de chequear que $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_5\}$ es una base racional de $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2$. Como

$$[\exp(\pi A)]_{\mathcal{B}} = (1) \oplus \left[\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]^{\oplus 2},$$

de acuerdo con el Teorema 1.2.5, G admite un retículo $\Gamma = \pi\mathbb{Z} \ltimes \exp^{H_3 \oplus \mathbb{R}^2}(\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5))$.

La forma τ es invariante por el retículo Γ debido a que $\exp(-2i(t + \pi k)) = \exp(-2it)$. Por lo tanto la solvariedad compleja asociada tiene fibrado canónico (no invariantemente) trivial.

5.5. Aplicaciones a la geometría hipercompleja

En esta última sección, exploramos la trivialidad del fibrado canónico de variedades complejas que se obtienen a partir de grupos de Lie hipercomplejos $(G, \{J_1, J_2, J_3\})$, o los cocientes correspondientes por retículos uniformes. Más concretamente, veremos que si existe una sección trivializante invariante a izquierda de $K_{(G, J_\alpha)}$ para algún $\alpha = 1, 2, 3$, entonces cualquier cociente compacto asociado $(\Gamma\backslash G, J_\alpha)$ tiene fibrado canónico trivial para todo α, también mediante una sección invariante. Sin embargo, si la sección trivializante de $(\Gamma\backslash G, J_\alpha)$ no es invariante, entonces $K_{(\Gamma\backslash G, J_\beta)}$ no es necesariamente trivial para $\beta \neq \alpha$. Usando estos resultados proveemos una respuesta negativa a una pregunta de M. Verbitsky.

Empezamos por recordar algunos hechos acerca de variedades hipercomplejas. Una *estructura hipercompleja* en M es una terna de estructuras complejas $\{J_1, J_2, J_3\}$ en M que satisfacen las leyes de multiplicación de los cuaterniones:

$$J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3.$$

En particular, $J_\alpha J_\beta = -J_\beta J_\alpha = J_\gamma$ para cualquier permutación cíclica (α, β, γ) de $(1, 2, 3)$.

Además, M admite una esfera $\mathbb{S}^2$ de estructuras complejas. En efecto, si $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{S}^2$ entonces

$$J_a := a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_3 J_3 \tag{5.5.1}$$

es una estructura compleja en M. Más aún, cada T_pM, $p \in M$, posee una estructura de $\mathbb{H}$-módulo, donde $\mathbb{H}$ denota los cuaterniones. En consecuencia $\dim_{\mathbb{R}} M = 4n$, $n \in \mathbb{N}$.

Toda estructura hipercompleja $\{J_\alpha\}$ en M determina una única conexión libre de torsión $\nabla^{\mathcal{O}}$, llamada la *conexión de Obata* (ver [121]), que satisface $\nabla^{\mathcal{O}} J_\alpha = 0$ para todo α. En [133] fue probada la siguiente expresión para esta conexión:

$$\nabla^{\mathcal{O}}_X Y = \tfrac{1}{2}\left([X, Y] + J_1[J_1 X, Y] - J_2[X, J_2 Y] + J_3[J_1 X, J_2 Y]\right), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Dada la estructura hipercompleja usual $\{J_\alpha\}$ en $\mathbb{R}^{4n}$ inducida por los cuaterniones, denotamos por

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{H}) := \{T \in \mathrm{GL}(4n, \mathbb{R}) : TJ_\alpha = J_\alpha T \text{ para todo}\, \alpha\},$$

al grupo general lineal cuaterniónico, con álgebra de Lie correspondiente

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) := \{T \in \mathfrak{gl}(4n, \mathbb{R}) : TJ_\alpha = J_\alpha T \text{ para todo}\, \alpha\}.$$

Dado que $\nabla^{\mathcal{O}} J_\alpha = 0$ para todo α, el grupo de holonomía de la conexión de Obata, $\mathrm{Hol}(\nabla^{\mathcal{O}})$, está contenido en $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$. Una variedad hipercompleja $(M^{4n}, \{J_\alpha\})$ se dice una $\mathrm{SL}(n,\mathbb{H})$-*variedad* si $\mathrm{Hol}(\nabla^{\mathcal{O}}) \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{H})$, donde $\mathrm{SL}(n,\mathbb{H}) = [\mathrm{GL}(n,\mathbb{H}), \mathrm{GL}(n,\mathbb{H})]$ es el subgrupo conmutador de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})$. Estas variedades han sido recientemente estudiadas de manera activa (ver [71, 72, 77, 91, 105, 104]).

Consideraremos a continuación estructuras hipercomplejas invariantes a izquierda en grupos de Lie, o equivalentemente estructuras hipercomplejas en álgebras de Lie, como es habitual. La correspondiente conexión de Obata también es invariante a izquierda por lo que está determinada por su acción en campos vectoriales invariantes a izquierda, es decir, en el álgebra de Lie.

Como otra aplicación del Teorema 5.2.1 mostramos que si (G^{4n}, J_α) admite una $(2n,0)$-forma cerrada invariante a izquierda no nula para algún $\alpha = 1,2,3$, entonces (G^{4n}, J_a) (con J_a dada como en (5.5.1)) tiene una $(2n,0)$-forma cerrada invariante a izquierda no nula, para todo $a \in \mathbb{S}^2$.

Teorema 5.5.1. *Sea $\{J_1, J_2, J_3\}$ una estructura hipercompleja en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión $4n$. Si J_α admite una $(2n,0)$-forma cerrada no nula para algún $\alpha = 1,2,3$, entonces J_a admite una $(2n,0)$-forma cerrada no nula para todo $a \in \mathbb{S}^2$, con J_a dada como en (5.5.1).*

Demostración. Sea (α,β,γ) una permutación cíclica de $(1,2,3)$ con J_α que satisface la condición del enunciado. Entonces, debido a que el tensor de Nijenhuis N_{J_γ} es idénticamente cero, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ obtenemos

$$J_\gamma[x,y] = [J_\gamma x, y] + [x, J_\gamma y] + J_\gamma[J_\gamma x, J_\gamma y].$$

Dado que $J_\gamma = J_\alpha J_\beta$, aplicando $-J_\alpha$ en ambos lados de esta igualdad resulta

$$J_\beta[x,y] = -J_\alpha[J_\gamma x, y] - J_\alpha[x, J_\gamma y] + J_\beta[J_\gamma x, J_\gamma y],$$

lo que implica

$$\mathrm{Tr}(J_\beta \,\mathrm{ad}(x)) = -\mathrm{Tr}(J_\alpha \,\mathrm{ad}(J_\gamma x)) - \mathrm{Tr}(J_\alpha \,\mathrm{ad}(x) J_\gamma) + \mathrm{Tr}(J_\beta \,\mathrm{ad}(J_\gamma x) J_\gamma).$$

Usando que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ y $\mathrm{Tr}(J_\alpha \,\mathrm{ad}(x)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(J_\alpha x))$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ debido al Teorema 5.2.1 (pues la 1-forma canónica ψ_α se anula idénticamente) llegamos a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(J_\beta \,\mathrm{ad}(x)) &= -\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(J_\alpha J_\gamma x)) - \mathrm{Tr}(J_\gamma J_\alpha \,\mathrm{ad}(x)) + \mathrm{Tr}(J_\gamma J_\beta \,\mathrm{ad}(J_\gamma x)) \\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(J_\beta x)) - \mathrm{Tr}(J_\beta \,\mathrm{ad}(x)) - \mathrm{Tr}(J_\alpha \,\mathrm{ad}(J_\gamma x)) \\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(J_\beta x)) - \mathrm{Tr}(J_\beta \,\mathrm{ad}(x)) + \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(J_\beta x)),
\end{aligned}$$

y esto implica

$$\mathrm{Tr}(J_\beta \,\mathrm{ad}(x)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(J_\beta x)).$$

El mismo cálculo reemplazando α por β muestra que la misma condición vale para J_γ. Se sigue entonces que

$$\mathrm{Tr}(J_a \,\mathrm{ad}(x)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(J_a x))$$

para todo $a \in \mathbb{S}^2$. Por lo tanto, la correspondiente 1-forma canónica ψ_a se anula idénticamente en $\mathfrak{g}$ y gracias al Teorema 5.2.1 la prueba queda completa. ☐

Corolario 5.5.2. *Sea G un grupo de Lie equipado con una estructura hipercompleja invariante a izquierda $\{J_1, J_2, J_3\}$ y sea Γ un retículo uniforme de G. Si existe una sección trivializante invariante a izquierda de $K_{(G,J_\alpha)}$ para algún $\alpha = 1,2,3$, entonces $K_{(G,J_a)}$ admite una seccion trivializante invariante a izquierda para todo $a \in \mathbb{S}^2$. En particular, $(\Gamma\backslash G, J_a)$ tiene fibrado canónico trivial para todo $a \in \mathbb{S}^2$.*

En [151], Verbitsky prueba que si $(M, \{J_\alpha\})$ es una $\mathrm{SL}(n, \mathbb{H})$-variedad entonces la variedad compleja (M, J_α) tiene fibrado canónico trivial para todo α. Luego plantea la siguiente pregunta:

Pregunta ([151]): Sea $(M, \{J_\alpha\})$ una variedad hipercompleja compacta. Si se asume que la variedad compleja (M, J_1) tiene fibrado canónico trivial, ¿se sigue que M es una $\mathrm{SL}(n, \mathbb{H})$-variedad?

En ciertos casos la respuesta a esta pregunta es afirmativa, por ejemplo cuando $(M, \{J_\alpha\})$ admite una métrica hiperKähler con torsión ([151, Theorem 2.3]) o cuando M es una nilvariedad equipada con una estructura hipercompleja invariante ([20, Corollary 3.3]). En este último caso, el punto clave es que toda nilvariedad con una estructura compleja invariante tiene fibrado canónico trivial vía una sección trivializante invariante. Usando el mismo argumento, en [71] fue probado que si una solvariedad hipercompleja $(\Gamma\backslash G, \{J_\alpha\})$ admite una sección trivializante invariante de $K_{(\Gamma\backslash G, J_\alpha)}$ para algún α entonces $\Gamma\backslash G$ es una $\mathrm{SL}(n, \mathbb{H})$-variedad.

Nuestro siguiente ejemplo de una solvariedad hipercompleja $(\Gamma\backslash G, \{J_\alpha\})$ muestra que si $K_{(\Gamma\backslash G, J_\alpha)}$ admite una sección trivializante no invariante para algún α, esto no necesariamente implica que la solvariedad es una $\mathrm{SL}(n, \mathbb{H})$-variedad.

Ejemplo 5.5.3. Sea $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_4\}$ el álgebra de Lie completamente soluble unimodular de dimensión 4 determinada por

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = -e_3.$$

Se verifica fácilmente que la estructura casi compleja J definida por $Je_1 = e_2$ y $Je_3 = e_4$ es integrable. Notar que $\mathfrak{g}_+ = \mathrm{span}\{e_1, e_3\}$ y $\mathfrak{g}_- := J\mathfrak{g}_+ = \mathrm{span}\{e_2, e_4\}$ son subálgebras de $\mathfrak{g}$. Luego, en virtud de [9], el álgebra de Lie $\hat{\mathfrak{g}} := (\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ admite una estructura hipercompleja $\{J_1, J_2, J_3\}$. En efecto, con respecto a la descomposición $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$, estas estructuras complejas están dadas por

$$J_1(x + iy) = \begin{cases} i(x + iy), & x, y \in \mathfrak{g}_+, \\ -i(x + iy), & x, y \in \mathfrak{g}_-, \end{cases}$$
$$J_2(x + iy) = Jx + iJy, \quad x, y \in \mathfrak{g},$$

y $J_3 = J_1 J_2$. Renombrando los elementos de la base $\{e_1, \dots, e_4, ie_1, \dots, ie_4\}$ como $\{e_1, \dots, e_8\}$ podemos escribir explícitamente la terna de estructuras complejas $\{J_1, J_2, J_3\}$ como sigue:

$$\begin{gathered} J_1 e_1 = e_5, \quad J_1 e_2 = -e_6, \quad J_1 e_3 = e_7, \quad J_1 e_4 = -e_8, \\ J_2 e_1 = e_2, \quad J_2 e_3 = e_4, \quad J_2 e_5 = e_6, \quad J_2 e_7 = e_8, \\ J_3 e_1 = -e_6, \quad J_3 e_2 = -e_5, \quad J_3 e_3 = -e_8, \quad J_3 e_4 = -e_7. \end{gathered}$$

Con respecto a esta base los corchetes de Lie de $\hat{\mathfrak{g}}$ son

$$\begin{gathered} [e_2, e_4] = e_2, \ [e_3, e_4] = -e_3, \ [e_4, e_6] = -e_6, \ [e_4, e_7] = e_7, \\ [e_2, e_8] = e_6, \ [e_3, e_8] = -e_7, \ [e_6, e_8] = -e_2, \ [e_7, e_8] = e_3, \\ [e_2, e_3] = e_1, \ [e_2, e_7] = e_5, \ [e_3, e_6] = -e_5, \ [e_6, e_7] = -e_1. \end{gathered}$$

Si denotamos $\psi_\alpha(x) := \mathrm{Tr}(J_\alpha \operatorname{ad} x)$ para $\alpha = 1, 2, 3$, entonces

$$\psi_1 = -4e^8, \quad \psi_2 = -4e^3, \quad \psi_3 = -4e^7,$$

donde $\{e^j\}_{j=1}^8$ es la base dual de $\{e_j\}_{j=1}^8$. Dado que $\psi_\alpha \neq 0$, tenemos que $(\hat{\mathfrak{g}}, J_\alpha)$ no admite una $(4, 0)$-forma cerrada no nula, para todo α.

Más aún, notar que $\psi_1([\hat{\mathfrak{g}},\hat{\mathfrak{g}}]) = 0$, pero $\psi_2([\hat{\mathfrak{g}},\hat{\mathfrak{g}}]) \neq 0$ y $\psi_3([\hat{\mathfrak{g}},\hat{\mathfrak{g}}]) \neq 0$. Luego, el Teorema 5.4.2 implica que, para cualquier retículo $\Lambda \subset \hat{G}$, donde $\hat{G}$ es el grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\hat{\mathfrak{g}}$, la variedad compleja compacta $(\Lambda\backslash\hat{G}, J_\alpha)$ tiene fibrado canónico no trivial para $\alpha = 2,3$. Sin embargo, veremos a continuación que existen retículos $\Gamma_m \subset \hat{G}$ tales que las correspondientes solvariedades complejas $(\Gamma_m\backslash\hat{G}, J_1)$ sí tienen fibrado canónico trivial.

Veamos primero que $\hat{G}$ admite un retículo Γ_m para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$. En efecto, podemos escribir $\hat{\mathfrak{g}} = (\mathbb{R}e_8 \oplus \mathbb{R}e_4) \ltimes \mathfrak{n}$, donde el nilradical $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}(\hat{\mathfrak{g}})$ está generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6, e_7\}$. Calculamos

$$\begin{aligned} A &:= \exp(\pi \operatorname{ad} e_8|_{\mathfrak{n}}) = \operatorname{diag}(1,-1,-1,1,-1,-1), \\ B_m &:= \exp(t_m \operatorname{ad} e_4|_{\mathfrak{n}}) = \operatorname{diag}(1,\alpha_m^{-1},\alpha_m,1,\alpha_m^{-1},\alpha_m), \end{aligned}$$

donde $\alpha_m = \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$, y $t_m = \log \alpha_m$. Si

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_m^{-1} \\ 0 & \dfrac{1}{\alpha_m - \alpha_m^{-1}} & \dfrac{\alpha_m}{\alpha_m - \alpha_m^{-1}} \end{bmatrix}^{\oplus 2},$$

entonces resulta $P_m^{-1} B_m P_m = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m \end{smallmatrix}\right]^{\oplus 2}$ y $P_m^{-1} A P_m = A$ para todo m. Si definimos $f_j = P_m e_j$ para $j \neq 4,8$, entonces es fácil verificar que $[f_k, f_\ell] = [e_k, e_\ell]$ para $k,\ell \in \{1,2,3,5,6,7\}$. En consecuencia, $\{f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_7\}$ es una base racional de $\mathfrak{n}$ en la que A y B_m se expresan como matrices enteras unimodulares. De acuerdo con el Teorema 1.2.5, el producto semidirecto

$$\Gamma_m = (\pi\mathbb{Z} \oplus t_m\mathbb{Z}) \ltimes \exp^N(\operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_7\})$$

es un retículo en $\hat{G} = \mathbb{R}^2 \ltimes N$, donde N es el nilradical de $\hat{G}$.

Consideremos ahora la forma no nula $\sigma_1 = (e^1 + ie^5) \wedge (e^2 - ie^6) \wedge (e^3 + ie^7) \wedge (e^4 - ie^8)$ la cual es $(4,0)$ con respecto a J_1. Se deduce de la Proposición 5.4.10 y de $-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(J_1 \operatorname{ad} e_8) = 2$ que $\tau_1 := \exp(2ix_8)\sigma_1$ es una $(4,0)$-forma cerrada no nula en $\hat{G}$ con respecto a J_1, donde $\mathbf{x} := (x_8, x_4, x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7)$ son las coordenadas reales de $\hat{G}$. De la igualdad $\exp(2i(x_8 + \pi k)) = \exp(2ix_8)$ se deduce que $f(\mathbf{x}) = \exp(2ix_8)$ es invariante por la acción de Γ_m por lo que f induce una función diferenciable $\hat{f} : \Gamma_m\backslash\hat{G} \to \mathbb{C}$ tal que la $(4,0)$-forma $\hat{\tau}_1 = \hat{f}\hat{\sigma}_1$ es una sección trivializante de $(\Gamma_m\backslash\hat{G}, J_1)$. En particular, $(\Gamma_m\backslash\hat{G}, J_1)$ tiene fibrado canónico trivial.

Si $\operatorname{Hol}(\nabla^{\mathcal{O}})$ estuviese contenido en $\mathrm{SL}(n,\mathbb{H})$, entonces el fibrado canónico de $(\Gamma_m\backslash\hat{G}, J_\alpha)$ sería trivial para todo α. Sin embargo, acabamos de ver que este no es el caso para $\alpha = 2$ y $\alpha = 3$. En conclusión, este ejemplo provee una respuesta negativa a la pregunta de Verbitsky.

Observación 5.5.4. La pregunta de Verbitsky permanece abierta para el caso de una variedad hipercompleja $(M, \{J_\alpha\})$ tal que (M, J_α) tiene fibrado canónico trivial para todo α.

Referencias

[1] E. Abbena, An example of an almost Kähler manifold which is not Kählerian, *Boll. Unione Mat. Ital., VI. Ser.* **A 3** (1984), 383–392.

[2] I. Agricola, The Srní lectures on non-integrable geometries with torsion, *Arch. Math. (Brno)* **42** (2006), suppl., 5–84.

[3] D. Alekseevskii, B. Kimelfeld, Structure of homogeneous Riemann spaces with zero Ricci curvature, *Funct. Anal. Appl.* **9** (1975), 97–102.

[4] A. Andrada, M. L. Barberis, I. Dotti, Classification of abelian complex structures on 6-dimensional Lie algebras, *J. London Math. Soc. (2)* **83** (2011), 232–255.

[5] A. Andrada, M. L. Barberis, I. Dotti, G. Ovando, Product structures on four dimensional solvable Lie algebras, *Homology Homotopy Appl.* **7** (2005), 9–37.

[6] A. Andrada, I. G. Dotti, Conformal Killing-Yano 2-forms, *Differential Geom. Appl.* **58** (2018), 103–119.

[7] A. Andrada, A. Fino, L. Vezzoni, A class of Sasakian 5-manifolds, *Transform. Groups* **14** (2009), 493–512.

[8] A. Andrada, M. Origlia, Lattices in almost abelian Lie groups with locally conformal Kähler or symplectic structures, *Manuscripta Math.* **155** (2018), 389–417.

[9] A. Andrada, S. Salamon, Complex product structures on Lie algebras, *Forum Math.* **17** (2012), 261–295.

[10] A. Andrada, R. Villacampa, Abelian balanced Hermitian structures on Lie algebras, *Transform. Groups* **21** (2016), 903–927.

[11] A. Andrada, R. Villacampa, Bismut connection on Vaisman manifolds, *Math. Z.* **302** (2022), 1091–1126.

[12] D. Angella, *Cohomological aspects in complex non-Kähler geometry*, Lecture Notes in Math. 2095, Cham: Springer (2014).

[13] D. Angella, A. Otal, L. Ugarte, R. Villacampa, Complex structures of splitting type, *Rev. Mat. Iberoam.* **33** (2017), 1309–1350.

[14] V. Apostolov, M. Gualtieri, Generalized Kähler manifolds with split tangent bundle, *Comm. Math. Phys.* **271** (2007), 561–575.

[15] R. Arroyo, R. Lafuente, The long-time behavior of the homogeneous pluriclosed flow, *Proc. Lond. Math. Soc.* **119** (2019), 266–289.

[16] G. Barbaro, On the curvature of the Bismut connection: Bismut-Yamabe problem and Calabi-Yau with torsion metrics, *J. Geom. Anal.* **33** (2023), Article 153.

[17] M. L. Barberis, I. Dotti, Hypercomplex structures on a class of solvable Lie groups, *Q. J. Math.* **47** (1996), 389–404.

[18] M. L. Barberis, I. Dotti, A. Fino, Hyper-Kähler quotients of solvable Lie groups, *J. Geom. Phys.* **56** (2006), 691–711.

[19] M. L. Barberis, I. Dotti, R. Miatello, On certain locally homogeneous Clifford manifolds, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **13** (1995), 289–301.

[20] M. L. Barberis, I. Dotti, M. Verbitsky, Canonical bundles of complex nilmanifolds, with applications to hypercomplex geometry, *Math. Res. Lett.* **16** (2009), 331–347.

[21] G. Bazzoni, J. C. Marrero, Locally conformal symplectic nilmanifolds with no locally conformal Kähler metrics, *Complex Manifolds* **4** (2017), 172–178.

[22] F. Belgun, On the metric structure of non-Kähler complex surfaces, *Math. Ann.* **317** (2000), 1–40.

[23] F. Belgun, On the metric structure of some non-Kähler complex threefolds, preprint (2012), arXiv:1208.4021.

[24] M. Berger, Sur les groupes d'holonomie homogènes de variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes, *Bull. Soc. Math. France* **283** (1955), 279–330.

[25] J.-M. Bismut, A local index theorem for non-Kähler manifolds, *Math. Ann.* **284** (1989), 681–699.

[26] D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds.* Second edition. Progress in Mathematics **203**, Birkhäuser, Boston, 2010.

[27] C. Bock, On low-dimensional solvmanifolds, *Asian J. Math.* **20** (2016), 199–262.

[28] W. M. Boothby, H. C. Wang, On contact manifolds, *Ann. of Math.* **68** (1958), 721–734.

[29] G. Bor, L. Hernández-Lamoneda, M. Salvai, Orthogonal almost-complex structures of minimal energy, *Geom. Dedicata* **127** (2007), 75–85.

[30] A. Borel, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, *Topology* **2** (1963), 111–122.

[31] C. Boyer, K. Galicki, *Sasakian geometry.* Oxford University Press. Oxford, 2008.

[32] C. Boyer, K. Galicki, J. Kollár, Einstein metrics on spheres, *Ann. of Math.* **162** (2005), 557–580.

[33] C. Boyer, K. Galicki, P. Matzeu, On η-Einstein Sasakian geometry, *Comm. Math. Phys.* **262** (2006), 177–208.

[34] R. Bryant, Metrics with exceptional holonomy, *Ann. of Math.* **126** (1987), 525–576.

[35] R. Bryant, Some remarks on G_2-structures, *Proc. Gokova Geom.-Topol. Conf.* **126** (2005), 75–109.

[36] J. Butruille, Classification des variétés approximativement kähleriennes homogènes, *Ann. Global Anal. Geom.* **27** (2005), 201—225.

[37] E. Calabi, B. Eckmann, A class of compact complex manifolds which are not algebraic, *Ann. of Math.* **58** (1953), 494–500.

[38] G. Cavalcanti, Hodge theory of SKT manifolds, *Adv. Math.* **374** (2020), Article 107270.

[39] B. Cavallo, J. Delgado, D. Kahrobaei, E. Ventura, Algorithm recognition of infinite cyclic extensions, *J. Pure Appl. Algebra* **221** (2017), 2157–2179.

[40] R. Cleyton, A. Moroianu, U. Semmelmann, Metric connections with parallel skew-symmetric torsion, *Adv. Math.* **378** (2021), Article 107519.

[41] L. Charlap, *Bieberbach groups and flat manifolds*, Springer, New York, 1986.

[42] S. Console, A. Fino, On the de Rham cohomology of solvmanifolds, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5)* **10** (2011), 801–818.

[43] S. Console, M. Macrì, Lattices, cohomology and models of 6-dimensional almost abelian solvmanifolds, *Rend. Semin. Mat., Univ. Politec. Torino* **74** (2016), 95–119.

[44] J. Davidov, O. Mushkarov, Harmonic almost-complex structures on twistor spaces, *Israel J. Math.* **131** (2002), 319–332.

[45] J. Davidov, O. Mushkarov, Harmonicity of the Atiyah-Hitchin-Singer and Eells-Salamon almost complex structures, *Ann. Mat. Pura Appl.* **197** (2018), 185–209.

[46] J. Davidov, A. Ul Haq, O. Mushkarov, Almost complex structures that are harmonic maps, *J. Geom. Phys.* **124** (2018), 86–99.

[47] K. Dekimpe, M. Halenda, A. Szczepański, Kähler flat manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **61** (2009), 363–377.

[48] J. Eells, J. H. Sampson, Harmonic mapping Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.* **86** (1964), 109–160.

[49] M. Fernández, A. Gray, Riemannian manifolds with structure group G_2, *Ann. Mat. Pura Appl.* **132** (1982), 19–45.

[50] M. Fernández, V. Manero, A. Otal and L. Ugarte, Symplectic half-flat solvmanifolds, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **43** (2013), 367–383.

[51] M. Fernández, V. Muñoz, J. Santisteban, Cohomologically Kähler manifolds with no Kähler metrics, *Int. J. Math. Math. Sci.* **52** (2003), 3315-–3325.

[52] A. Fino, G. Grantcharov, Properties of manifolds with skew-symmetric torsion and special holonomy, *Adv. Math.* **189** (2004), 439–450.

[53] A. Fino, H. Kasuya, L. Vezzoni, SKT and tamed symplectic structures on solvmanifolds, *Tohoku Math. J.* **67** (2015), 19–37.

[54] A. Fino, A. Otal, L. Ugarte, Six-dimensional solvmanifolds with holomorphically trivial canonical bundle, *Int. Math. Res. Not.* **2015** (2015), 13757–13799.

[55] A. Fino, F. Paradiso, Balanced Hermitian structures on almost abelian Lie algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **227** (2022), Article 107186.

[56] A. Fino, F. Paradiso, Generalized Kähler almost abelian Lie groups, *Ann. Mat. Pura Appl.* **200** (2021), 1781–1812.

[57] A. Fino, F. Paradiso, Hermitian structures on a class of almost nilpotent solvmanifolds, *J. Algebra* **609** (2022), 861–925.

[58] A. Fino, M. Parton, S. Salamon, Families of strong KT structures in six dimensions, *Comment. Math. Helv.* **79** (2004), 317–340.

[59] A. Fino, A. Raffero, Closed G_2-structures on non-solvable Lie groups, *Rev. Mat. Complut.* **32** (2019), 837–851.

[60] A. Fino, N. Tardini, Some remarks on Hermitian manifolds satisfying Kähler-like conditions, *Math. Z.* **298** (2021), 49–68.

[61] A. Fino, L. Ugarte, On generalized Gauduchon metrics, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **56** (2013), 733–753.

[62] M. Freibert, Calibrated and parallel structures on almost abelian Lie algebras, preprint, arXiv:1307.2542.

[63] M. Freibert, Cocalibrated structures on Lie algebras with a codimension one Abelian ideal, *Ann. Glob. Anal.Geom.* **42** (2012), 537–563.

[64] T. Friedrich, S. Ivanov, Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory, *Asian J. Math.* **6** (2002), 303–335.

[65] J. Fu, Z. Wang, D. Wu, Semilinear equations, the γ_k function, and generalized Gauduchon metrics, *J. Eur. Math. Soc.* **15** (2013), 659–680.

[66] M. García-Fernández, J. Streets, *Generalized Ricci Flow*, AMS University Lecture Series **76**, 2021.

[67] H. Garland, On the cohomology of lattices in solvable Lie groups, *Ann. of Math.* **84** (1966), 174–195.

[68] S. J. Gates, C. M. Hull, M. Rocek, Twisted multiplets and new supersymmetric nonlinear sigma models, *Nuclear Phys. B* **248** (1984), 157–186.

[69] P. Gauduchon, Le théorème de l'excentricité nulle, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **285** (1977), 387–390.

[70] H. Geiges, Normal contact structures on 3-manifolds, *Tohoku Math. J.* **49** (1997), 415–422.

[71] G. Gentili, N. Tardini, HKT manifolds: Hodge theory, formality and balanced metrics, preprint 2022, arXiv:2207.09168.

[72] F. Giusti, F. Podestà, Real semisimple Lie groups and balanced metrics, *Rev. Mat. Iberoam.* **39** (2023), 711–729.

[73] J. C. González-Dávila, F. Martín Cabrera, Harmonic G-structures, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **146** (2009), 435–459.

[74] M. Goze, E. Remm, Non existence of complex structures on filiform Lie algebras, *Commun. Algebra* **30** (2002), 3777–3788.

[75] D. Grantcharov, G. Grantcharov, Y. S. Poon, Calabi-Yau connections with torsion on toric bundles, *J. Differential Geom.* **78** (2008), 13–32.

[76] G. Grantcharov, Geometry of compact complex homogeneous spaces with vanishing first Chern class, *Adv. Math.* **226** (2011), 3136–3159.

[77] G. Grantcharov, M. Lejmi, M. Verbitsky, Existence of HKT metrics on hypercomplex manifolds of real dimension 8, *Adv. Math.* **320** (2017), 1135–1157.

[78] H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, *Math. Ann.* **135** (1958), 263–273.

[79] A. Gray, Some examples of almost Hermitian manifolds, *Illinois J. Math.* **10** (1966), 353–366.

[80] A. Gray, L. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, *Ann. Mat. Pura Appl.* **123** (1980), 35–58.

[81] S. Grigorian, Isometric flows of G_2-structures (2020), preprint, arXiv:2008.06593.

[82] M. Gualtieri, Generalized complex geometry, *Ann. of Math.* **174** (2011), 75–123.

[83] Y. Guo, F. Zheng, Hermitian geometry of Lie algebras with abelian ideals of codimension 2, *Math. Z.* **304** (2023), Article 51.

[84] K. Hasegawa, Complex and Kähler structures on compact solvmanifolds, *J. Symplectic Geom.* **3** (2005), 749–767.

[85] K. Hasegawa, Small deformations and non-left-invariant complex structures on six-dimensional compact solvmanifolds, *Differ. Geom. Appl.* **28** (2010), 220–227.

[86] A. Hattori, Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo I* **8** (1960), 289–331.

[87] W. He, B. Li, The harmonic heat flow of almost complex structures, *Trans. Amer. Math. Soc.* **374** (2021), 6179–6199.

[88] C. M. Hull, Compactification of the heterotic superstrings, *Phys. Lett. B* **178** (1986), 357–364.

[89] D. Huybrechts, *Complex Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[90] S. Ivanov, G. Papadopoulos, Vanishing theorems and string backgrounds, *Classical Quantum Gravity* **18** (2001), 1089–1110.

[91] S. Ivanov, A. Petkov, HKT manifolds with holonomy $\mathrm{SL}(n,\mathbb{H})$, *Int. Math. Res. Not.* **2012** (2012), 3779–3799.

[92] J. Jost, S.-T. Yau, A nonlinear elliptic system for maps from Hermitian to Riemannian manifolds and rigidity theorems in Hermitian geometry, *Acta Math.* **170** (1993), 221–254. Correction, ibid. **173** (1994), 307.

[93] D. Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press Inc, New York, 1st edition (2000).

[94] S. Karigiannis, B. McKay, T. Mao-Pei, Soliton solutions for the Laplacian co-flow of some G_2-structures with symmetry, *Diff. Geom. Appl.* **30** (2012), 318–333.

[95] H. Kasuya, Vaisman metrics on solvmanifolds and Oeljeklaus-Toma manifolds, *Bull. Lond. Math. Soc.* **45** (2013), 15–26.

[96] I. Kath, J. Lauret, A new example of a compact ERP G_2-structure, *Bull. Lond. Math. Soc.* **53** (2021), 1692–1710.

[97] R. Koo, A classification of matrices of finite order over $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ and $\mathbb{Q}$, *Math. Mag.* **76** (2003), 143–148.

[98] J. Koszul, Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes, *Can. J. Math.* **7** (1955), 562–576.

[99] Y.-Y. Kuo, On almost contact 3-structure, *Tôhoku Math. J.* **22** (1970), 325–332.

[100] J. Lauret, E. Rodríguez-Valencia, On the Chern-Ricci flow and its solitons for Lie groups, *Math. Nachr.* **288** (2015), 1512–1526.

[101] J. Lauret, C. Will, On the symplectic curvature flow for locally homogeneous manifolds, *J. Symplectic Geom.* **15** (2017), 1–49.

[102] H. Lawson, M. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Mathematical Series (Vol. 38), Princeton: Princeton University Press. (1989).

[103] J. Lee, J. Park, K. Sekigawa, Hermitian structures on the product of Sasakian manifolds, *Geom. Dedicata* **161** (2012), 399–408.

[104] M. Lejmi, P. Weber, Cohomologies on hypercomplex manifolds. En: *Complex and symplectic geometry*, editors: D. Angella et al., Springer INdAM Series 21 (2017), 107–121.

[105] M. Lejmi, P. Weber, Quaternionic Bott–Chern cohomology and existence of HKT metrics, *Q. J. Math.* **68** (2017), 705–728.

[106] Y. Liu, T. Sano, L. Tasin, Infinitely many families of Sasaki-Einstein metrics on spheres, preprint (2022), arXiv:2203.08468.

[107] E. Loubeau, Harmonic geometric structures: the general theory and the cases of almost complex and almost contact structures, *Note Mat.* **37** (2017), suppl. 1, 103–118.

[108] E. Loubeau, H. Sá Earp, Harmonic flow of geometric structures, preprint (2019), arXiv:1907.06072.

[109] A. Malcev, On a class of homogeneous spaces, *Izv. Akad. Nauk. Armyan. SSSR Ser. Mat* **13** (1949), 9–32 (English translation: *Amer. Math. Soc. Transl.* 1951, No. 39 (1951), 33 pp).

[110] K. Matsuo, Astheno-Kähler structures on Calabi-Eckmann manifolds, *Colloq. Math.* **115** (2009), 33–39.

[111] R. Miatello, J. P. Rossetti, Spectral properties of flat manifolds, *Contemp. Math.* **491** (2009), 83–113.

[112] M. Michelsohn, On the existence of special metrics in complex geometry, *Acta Math.* **143** (1983), 261–295.

[113] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.* **21** (1976), 293–329.

[114] M. V. Milovanov, A description of solvable Lie groups with a given uniform subgroup, *Math. USSR Sbornik* **41** (1982), 83–99.

[115] A. Moreno, H. Sá Earp, Explicit soliton for the Laplacian co-flow on a solvmanifold, *São Paulo J. Math. Sci.* **15** (2021), 280–292.

[116] A. Morimoto, On normal almost contact structures, *J. Math. Soc. Japan* **15** (1963), 420–436.

[117] G. Mostow, Cohomology of topological groups and solvmanifolds, *Ann. of Math.* **73** (1961), 20–48.

[118] G. Mostow, Factor spaces of solvable groups, *Ann. of Math.* **60** (1954), 1–27.

[119] I. Nakamura, Complex parallelisable manifolds and their small deformations, *J. Differ. Geom.* **10** (1975) , 85–112.

[120] K. Nomizu, On the cohomology of compact homogeneous space of nilpotent Lie groups, *Ann. of Math.* **59** (1954), 531–538.

[121] M. Obata, Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure, *Japanese J. Math.* **26** (1956), 43–79.

[122] K. Oeljeklaus, M. Toma, Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), 161–171.

[123] A. Otal, L. Ugarte, Six dimensional homogeneous spaces with holomorphically trivial canonical bundle, preprint 2023, arXiv:2305.02654

[124] A. Otal, L. Ugarte, R. Villacampa, Invariant solutions to the Strominger system and the heterotic equations of motion, *Nuclear Phys. B* **920** (2017), 442–474.

[125] H. Pittie, The Dolbeault-cohomology ring of a compact, even-dimensional Lie group, *Proc. Indian Acad. Sci., Math. Sci.* **98** (1988), 117–152.

[126] W. Plesken, T. Schulz, Counting crystallographic groups in low dimensions, *Exp. Math.* **9** (2000), 407–411.

[127] F. Podestà, A. Raffero, Bismut Ricci flat manifolds with symmetries, *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A* **153** (2022).

[128] F. Podestà, A. Raffero, Infinite families of homogeneous Bismut Ricci flat manifolds, aparecerá en *Comm. Contemp. Math.*, preprint 2022, arXiv:2205.12690.

[129] S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer, Berlin, 1972.

[130] M. Saito, Sur certains groupes de Lie résolubles II, *Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo* **7** (1957), 157–168.

[131] S. Salamon, Complex structures on nilpotent Lie algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **157** (2001), 311–333.

[132] H. Samelson, A class of complex-analytic manifolds, *Portugal. Math.* **12** (1953), 129–132.

[133] A. Soldatenkov, Holonomy of the Obata connection on SU(3), *Int. Math. Res. Not.* **2012** (2012), 3483–3497.

[134] J. Sparks, Sasaki-Einstein Manifolds. En: *Geometry of special holonomy and related topics.* Eds: N. Conan Leung, S.-T. Yau. International Press of Boston, Inc. 2011

[135] J. Streets, G. Tian, A parabolic flow of pluriclosed metrics, *Int. Math. Res. Not.* **2010** (2010), 3101–3133.

[136] J. Streets, G. Tian, Regularity theory for pluriclosed flow, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **349** (2011), 1-4.

[137] A. Strominger, Superstrings with torsion, *Nuclear Phys. B* **274** (1986), 253–284.

[138] A. Szczepański, *Geometry of crystallographic groups*, World Scientific, Singapore, 2012.

[139] S. Tanno, The topology of contact Riemannian manifolds, *Illinois J. Math.* **12** (1968), 700–717.

[140] S. Tanno, Geodesic flows on C_L-manifolds and Einstein metrics on $S^3 \times S^2$. En: *Minimal submanifolds and geodesics* (Proc. Japan-United States Sem., Tokyo, 1977), Amsterdam: North-Holland, 1979, 283–292.

[141] W. Thurston, Some simple examples of symplectic manifolds. *Proc. Am. Math. Soc.* **55** (1976), 467–468.

[142] A. Tolcachier, Holonomy groups of compact flat solvmanifolds, *Geom. Dedicata* **209** (2020), 95–117.

[143] A. Tolcachier, Classification of 6-dimensional splittable flat solvmanifolds, *Manuscripta Math.* **170** (2023), 531–561.

[144] V. Tosatti, Non-Kähler Calabi-Yau manifolds. En: *Analysis, complex geometry, and mathematical physics: in honor of Duong H. Phong*, Contemp. Math. **644**, 261–277, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2015).

[145] K. Tsukada, Eigenvalues of the Laplacian on Calabi-Eckmann manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **33** (1981), 673–691.

[146] C. Udrişte, Structures presque coquaternioniennes, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum.* **13(61)** (1969), 487–507.

[147] L. Ugarte, Hermitian structures on six-dimensional nilmanifolds, *Transform. Groups* **12** (2007), 175–202.

[148] L. Ugarte, R. Villacampa, Balanced Hermitian geometry on 6-dimensional nilmanifolds, *Forum Math.* **27** (2015), 1025–1070.

[149] L. Ugarte, R. Villacampa, Symplectic harmonicity and generalized coeffective cohomologies, *Ann. Mat. Pura Appl.* **198** (2019), 1351–1380.

[150] I. Vaisman, On locally conformal almost Kähler manifolds, *Israel J. Math.* **24** (1976), 338–351.

[151] M. Verbitsky, Hypercomplex manifolds with trivial canonical bundle and their holonomy. En: *Moscow Seminar on Mathematical Physics*, II, 203–211, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.* 2, 221, Adv. Math. Sci., 60, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[152] L. Vezzoni, A note on canonical Ricci forms on 2-step nilmanifolds, *Proc. Am. Math. Soc.* **141** (2013), 325–333.

[153] H. Wang, Complex parallelizable manifolds, *Proc. Am. Math. Soc.* **5** (1954), 771–776.

[154] Q. Wang, B. Yang, F. Zheng, On Bismut flat manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **373** (2020), 5747–5772.

[155] B. Watson, New examples of strictly almost Kähler manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **88** (1983), 541–544.

[156] D. Witte, Superrigidity of lattices in solvable Lie groups, *Invent. Math.* **122** (1995), 147–193.

[157] C. M. Wood, Instability of the nearly-Kähler six-sphere, *J. Reine Angew. Math.* **439** (1993), 205–212.

[158] C. M. Wood, Harmonic almost-complex structures, *Compos. Math.* **99** (1995), 183–212.

[159] T. Yamada, A construction of lattices in splittable solvable Lie groups, *Kodai Math. J.* **39** (2016), 378–388.

[160] H. Zassenhaus, Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen, *Comment. Math. Helv.* **21** (1948), 117–141.