MEDIDAS DIFUSAS
EN PROCESAMIENTO DE IMÁGENES

Autor: Matías L. Marenchino
Director: Dr. Oscar H. Bustos

Trabajo Especial de Licenciatura en Matemática

09 de agosto de 2013

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba
Argentina

Agradecimientos

El presente trabajo es, finalmente, el cierre de una etapa de mi vida. Es por eso que le quiero agradecer a uno de los mejores tipos que he conocido en la facu, Oscar Bustos. Gracias por la ayuda dada y la excelente predisposición.

Además, quisiera agradecer a mis padres y mis hermanas que me acompañaron durante la, ya lejana, etapa de cursado de las materias de la carrera. Y ahora a mi esposa por bancarme mientras la estoy terminando.

Abstract

El presente trabajo define formalmente el concepto de “medida difusa”, el cual generaliza a las medidas clásicas. A éstas nuevas medidas, les agregamos condiciones para obtener medidas λ-difusas, medidas de Sugeno y quasi-medidas. Luego introducimos las medidas de credibilidad, de plausibilidad, de posibilidad y de necesidad.

Como en la teoría de la medida convencional, naturalmente surgen las funciones medibles y la integración bajo esta nueva medida.

Finalmente, analizamos un par de casos de estudio aplicados al procesamiento de imágenes y de video.

Palabras claves: Medidas Difusas, Medidas de Sugeno, Integral Difusa, Procesamiento de Imágenes

Clasificación: 28E10

Tabla de Contenidos

Índice de figuras

Lista de símbolos

$(X, \mathscr{F})$	Espacio de medida
$\mathbf{F}$	conjunto de funciones medibles no negativas en $(X, \mathscr{F})$
$\mathscr{B}$	σ-álgebra de Borel
$\mathfrak{R}$	Anillo
$\mathfrak{C}$	Clase de subconjuntos de X
X	Conjunto
$\overline{A}$	complemento del conjunto A
$\{X_i\}_i$	$\{X_1, X_2, \ldots\}$ donde el número de elementos depende del rango implícito de i

Índice alfabético

Capítulo 1

Introducción

Los conceptos de medidas de funciones reales y su integración, forman parte de uno de los tópicos más importantes y más profundamente estudiados en la matemática moderna. A partir de las medidas, Michio Sugeno en su tesis doctoral [10] define las medidas difusas e integrales difusas, buscando lograr una generalización. Las mismas nacen como medidas "no-aditivas", simplemente relajando las condiciones sobre las medidas por otras más débiles.

El nombre de "difuso" surge de los esfuerzos de Sugeno por comparar las medidas de probabilidad con las funciones de pertenencia asociadas a los conjuntos difusos. Su intención fue la de extender las medidas convencionales en las nuevas "medidas difusas", en un proceso similar al de la generalización de conjuntos clásicos en conjuntos difusos.

Los conjuntos sobre los cuales se definen las medidas difusas, son clásicos y no difusos como uno esperaría. Si bien en este trabajo mantenemos el término utilizado por Sugeno, en la actualidad también se habla de medidas generalizadas [13] para evitar confusiones.

En general, las medidas no-aditivas generan un enfoque más realista a la hora de aplicarlas a problemas de la vida cotidiana. Esto sucede porque en tales problemas, aparecen incertidumbres y falta de información que hacen que las medidas convencionales sean muy rígidas. Para analizarlo en un caso en particular, consideremos el siguiente ejemplo: en la línea de montaje de motocicletas, un operario coloca la cadena de la moto en 30 minutos. Pero resulta que, la línea es capaz de ensamblar las motos en 25 minutos. Es decir, las motos se van acumulando en el punto en que el operario coloca la cadena. Es ahora cuando surge el interrogante de cómo solucionarlo. Si pensáramos en agregar un operario para colocar cadenas, no necesariamente ambos operarios colocarían las cadenas de dos motos en 30 minutos. Aparecen cuestiones de espacio y colaboración que pueden hacer al trabajo más o menos eficiente. Entonces, las medidas serán superaditivas o subaditivas, respectivamente.

El hecho de perder la aditividad, hace muy difícil el modelado de las medidas. Es por eso que Sugeno inicialmente sugirió las medidas λ-difusas que agregan una condición de "pseudo-aditividad". Luego, aparecen las medidas de credibilidad y plausibilidad, y las medidas de posibilidad y de necesidad. En el presente trabajo definimos y analizamos todas ellas.

Una vez que definamos las medidas, como en la teoría de medidas convencionales, podemos agregar el concepto de funciones medibles (difusamente). Naturalmente, surge en este momento la posibilidad de integrar usando tales medidas.

Es entonces el momento de analizar algunas aplicaciones de la teoría. La teoría de la medida difusa tiene un amplio espectro de utilidades. En este trabajo se analizarán dos publicaciones en las cuales, las medidas difusas constituyen la base teórica. Ambas aplicaciones tienen que ver con el procesamiento de imágenes. El primero de ellos, se refiere a la segmentación de imágenes. El segundo, es sobre un método para el desentrelazado de imágenes de video.

El contenido teórico del presente trabajo se basa principalmente en el libro “Fuzzy Measure Theory” [12] y en la publicación “Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals: an overview” [9].

Capítulo 2

Medidas Difusas

La medida clásica o convencional [1] tiene como su principal característica el requerimiento de la σ-aditividad. La noción de medida clásica ha sido generalizada en lo que se conoce como *Medida Difusa* [12]. El nuevo concepto, consiste en relajar tal σ-aditividad para agregarle dos nuevas propiedades: la *continuidad por abajo* y la *continuidad por arriba*. De esa manera, el término medida pasa a ser mucho más amplio.

En el presente capítulo presentamos este concepto novedoso. A partir de ahora, X será un conjunto y $\mathfrak{C}$ una clase de subconjuntos de X.

2.1. Medidas Difusas y Medidas λ-difusas

Definición 2.1.1 *Decimos que* $\mu : \mathfrak{C} \to [0,\infty]$ *es una* **medida difusa** *si satisface*

1. $\mu(\emptyset) = 0$ *si* $\emptyset \in \mathfrak{C}$.
2. $E \in \mathfrak{C}, F \in \mathfrak{C}$ *y* $E \subset F$ *entonces* $\mu(E) \leq \mu(F)$.
3. $\{E_n\}_n \in \mathfrak{C}, E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ *y* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{C}$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$
4. $\{E_n\}_n \in \mathfrak{C}, E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, *con al menos un conjunto* E_i *tal que* $\mu(E_i)$ *es finita y* $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{C}$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$

Además, diremos que μ *es* **semicontinua por abajo** *si satisface 1, 2 y 3 mientras que es* **semicontinua por arriba** *cuando satisfaga 1, 2 y 4.* μ *es* **regular** *cuando* $\mu(X) = 1$.
Denotamos por $(X, \mathscr{F}, \mu)$ *al* **espacio de medida difusa** *en el que* μ *es una medida difusa y* $(X, \mathscr{F})$ *es un espacio medible, es decir,* $\mathscr{F}$ *es una* σ*-álgebra.*
ν *definida por*

$$\nu(E) = 1 - \mu(\overline{E})$$

es la **medida difusa dual** *de* μ *(*$\overline{E}$ *es el complemento del conjunto* E*).*

La información que provee una medida difusa, coincide claramente con su medida dual. Lo que las diferencias, es que estas medidas representan la información de diferente manera.

Podremos tomar entonces funciones más inusuales que en la medida clásica que terminarán siendo medidas difusas. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1.2 *Sea $X = \{a,b\}$, $\mathfrak{C} = \mathscr{P}(X)$ y*

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & E = \emptyset \\ \frac{1}{2} & |E| = 1 \\ 1 & |E| = 2 \end{cases}$$

μ resulta entonces una medida difusa (además de ser una medida clásica).

Ejemplo 2.1.3 *Sea $X = \{a,b,c\}$, $\mathfrak{C} = \mathscr{P}(X)$ y*

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & E = \emptyset \\ \frac{1}{2} & 1 \leq |E| \leq 2 \\ 1 & |E| = 3 \end{cases}$$

μ resulta entonces una medida difusa (pero no es una medida clásica puesto que $\mu(X) \neq \mu(\{a\}) + \mu(\{b\}) + \mu(\{c\})$).

Debemos tener en cuenta que el término "medida difusa" sugiere de cierta manera que los "conjuntos difusos" están involucrados en estas medidas. Si bien tales conjuntos aparecerán más adelante, asumiremos por lo pronto que las medidas difusas poco tienen que ver con los conjuntos difusos.

A continuación, agregamos una nueva propiedad a las medidas difusas.

Definición 2.1.4 *La medida difusa μ satisface la* **regla λ** *si existe $\lambda \in (-\frac{1}{\sup_{E\in\mathfrak{C}} \mu(E)}, \infty)$ tal que*

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) + \lambda\ \mu(E)\ \mu(F)$$

cuando $E \in \mathfrak{C}, F \in \mathfrak{C}, E \cup F \in \mathfrak{C}$ y $E \cap F = \emptyset$.
Tal definición se extiende; μ satisface la **regla λ-finita (la regla λ-σ** *, respectivamente) si existe una tal λ tal que*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n(\infty)} E_i) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n(\infty)}(1+\lambda\ \mu(E_i)) - 1\right) & \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{n(\infty)} \mu(E_i) & \lambda = 0 \end{cases}$$

donde $\forall i$, $E_i \in \mathfrak{C}$ y $\forall i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, con $\bigcup_{i=1}^{n(\infty)} E_i \in \mathfrak{C}$.

Resulta evidente que, cuando $\lambda = 0$, la regla λ es equivalente a la aditividad de la medida clásica (a la aditividad finita, o a la σ-aditividad según corresponda).

Por inducción es posible probar el siguiente teorema.

Teorema 2.1.5 *Cuando $\mathfrak{C}$ es un anillo[1], la regla λ es equivalente a la regla λ-finita.*

[1]Una clase no vacía $\mathfrak{R}$ es un anillo si $\forall E, F \in \mathfrak{R}, E \cup F \in \mathfrak{R}$ y $E - F \in \mathfrak{R}$

Prueba: El caso $\lambda = 0$ es trivial. Tomemos $\lambda \neq 0$. El caso $n = 2$ también es trivial. Supongamos que $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \frac{1}{\lambda}(\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda\ \mu(E_i)) - 1)$ es válida para $n = k-1$. Consideremos la ecuación para k.

Necesitamos que $\mathfrak{C}$ sea un anillo así $\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \in \mathfrak{C}$.

$$
\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{i=1}^{k} E_i) &= \mu(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i \cup E_k) = \mu(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i) + \mu(E_k) + \lambda\mu(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i)\mu(E_k) \\
&= \mu(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i)(1+\lambda\mu(E_k)) + \mu(E_k) \\
&= \frac{1}{\lambda}[\prod_{i=1}^{k-1}(1+\lambda\ \mu(E_i)) - 1](1+\lambda\mu(E_k)) + \mu(E_k) \\
&= \frac{1}{\lambda}[\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda\ \mu(E_i)) - (1+\lambda\mu(E_k))] + \mu(E_k) \\
&= \frac{1}{\lambda}[\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda\ \mu(E_i)) - (1+\lambda\mu(E_k)) + \lambda\mu(E_k)] \\
&= \frac{1}{\lambda}[\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda\ \mu(E_i)) - 1]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación vale para $n = k$.

Definición 2.1.6 *μ es una* **medida λ-difusa** *en $\mathfrak{C}$ si satisface la regla λ-σ y $\exists\, E \in \mathfrak{C} : \mu(E) < \infty$. μ es una* **medida de Sugeno** *si es una medida λ-difusa, regular y definida en una σ-álgebra.*

Un problema interesante es el de la creación de medidas λ-difusas. Para el caso en particular en el que $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es finito, $\mathfrak{C}$ contiene a X y a $\{x_i\}$ cualquiera sea i y, además, $\exists\, i, j :$ $\mu(\{x_i\})\mu(\{x_j\}) > 0$, entonces existe una receta para la creación de λ: si $\mu(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\})$, basta tomar $\lambda = 0$; el caso contrario está cubierto por el siguiente teorema:

Teorema 2.1.7 *Dadas las condiciones mencionadas recientemente, la ecuación*

$$1 + \lambda\mu(X) = \prod_{i=1}^{n}[1+\lambda\mu(\{x_i\})] - 1$$

determina λ. Además,

1. *será $\lambda > 0$ cuando $\sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\}) < \mu(X)$;*

2. *será $\lambda = 0$ cuando $\sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\}) = \mu(X)$;*

3. *será $-\frac{1}{\mu(X)} < \lambda < 0$ cuando $\sum_{i=1}^{n} \mu(\{x_i\}) > \mu(X)$.*

Prueba: Consideremos que $\mu(\{x_1\})\mu(\{x_2\}) > 0$. Tenemos que $(1+\mu(\{x_i\})\lambda) > 0$ cualquiera sean i y $\lambda \in (-1/\mu(X), \infty)$. Si llamamos $p_k(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(1+\mu(\{x_i\})\lambda)$, de la definición del producto obtenemos que

$$p_k(\lambda) = (1+\mu(\{x_k\})\lambda)p_{k-1}(\lambda)$$

Derivando de ambos lados,

$$p_k'(\lambda) = \mu(\{x_k\})p_{k-1}(\lambda) + (1+\mu(\{x_k\})\lambda)p_{k-1}'(\lambda)$$

Haciéndolo nuevamente,

$$p_k''(\lambda) = 2\mu(\{x_k\})p_{k-1}'(\lambda) + (1+\mu(\{x_k\})\lambda)p_{k-1}''(\lambda)$$

Por lo tanto, si $p_{k-1}'(\lambda) > 0$ y $p_{k-1}''(\lambda) > 0$, entonces $p_k'(\lambda) > 0$ y $p_k''(\lambda) > 0$. Pero como

$$p_2'(\lambda) = \mu(\{x_1\})(1+\mu(\{x_2\})\lambda) + \mu(\{x_2\})(1+\mu(\{x_2\})\lambda) > 0$$

y

$$p_2''(\lambda) = 2\mu(\{x_1\})\mu(\{x_2\}) > 0$$

Entonces, tenemos que $p_k''(\lambda) > 0$ cualquiera sea k y $\lambda \in (-1/\mu(X), \infty)$. Es decir, en tal dominio las funciones $p_k(\lambda)$ son convexas. Además, de la derivación directa de $p_k(0)$, obtenemos $p_k'(0) = \sum_{i=1}^{k}\mu(\{x_i\})$ y podemos observar que $\lim_{\lambda\to\infty} p_k(\lambda) = \infty$. Así, si $\sum_{i=1}^{n}\mu(\{x_i\}) < \mu(X)$, entonces la función $p_n(\lambda)$ interseca en un único punto (con $\lambda > 0$) a $p(\lambda) = 1+\mu(X)\lambda$ porque $p_k'(0) < p'(0)$. Cuando $\sum_{i=1}^{n}\mu(\{x_i\}) = \mu(X)$, ambas funciones son tangentes en $\lambda = 0$. Por último, si $\sum_{i=1}^{n}\mu(\{x_i\}) > \mu(X)$, las funciones se cruzan en al menos un $\lambda \in (-1/\mu(X), 0)$. Tales casos se observan en la figura 2.1.

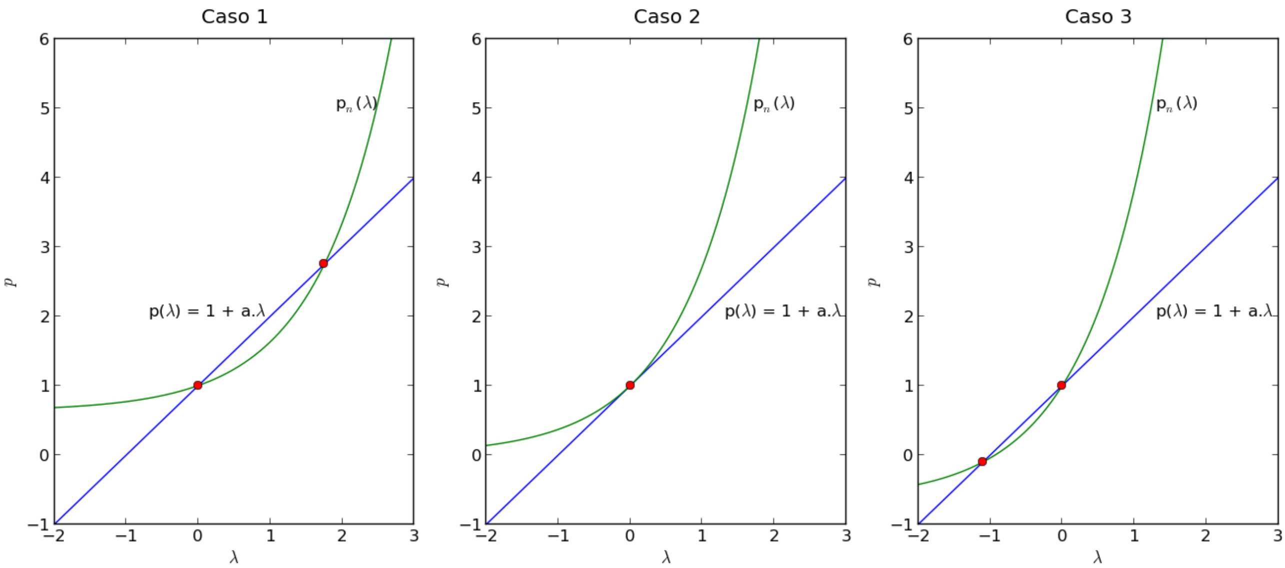


Figura 2.1: Intersección de las funciones $p_n(\lambda)$ y $p(\lambda)$

Ejemplo 2.1.8 *Si* $X = \{a,b\}, \mathfrak{C} = \mathscr{P}(X)$ *y* $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{a\}) = 1/2$, $\mu(\{b\}) = 1/2$ *y* $\mu(X) = 1$, *entonces* μ *es una medida* λ*-difusa con* $\lambda = 0$*, debido a que* $\mu(\{a\}) + \mu(\{b\}) = \mu(X)$*.*
Por su parte, si $X = \{a,b,c\}$ *y*

$$\mu(E) = \begin{cases} 1 & E = X \\ 0 & E = \emptyset \\ 1/2 & c.c. \end{cases}$$

Entonces μ *no es* λ*-difusa puesto que* $\mu(\{a,b\}) = \mu(\{a\}) + \mu(\{b\}) + \lambda\mu(\{a\})\mu(\{b\}) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \lambda\frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = -2$*. Pero* $1 = \mu(X) = \mu(\{a\}) + \mu(\{b,c\}) + \lambda\mu(\{a\})\mu(\{b,c\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$*, lo cual resulta en un absurdo.*

Las medidas λ-difusas que se acaban de introducir son medidas difusas cuando están definidas en un semianillo[2]. Para probarlo, introducimos el concepto de quasi-medida.

2.2. Quasi-medidas

Ahora, pediremos que las medidas convencionales se puedan construir mediante una composición de funciones.

Definición 2.2.1 *Una función real extendida $\theta : [0,a] \to [0,\infty]$ (con $a \in (0,\infty]$) es una* **función T** *si es continua, estrictamente creciente, $\theta(0) = 0$ y $\theta^{-1}(\infty) = \emptyset$ si a es finito o $\theta^{-1}(\infty) = \{\infty\}$.*
μ se llama **quasi-aditiva** *cuando existe θ, función T, cuyo dominio contiene a la imagen de μ y tal que $(\theta \circ \mu)$ es aditiva.*
μ es una **quasi-medida** *cuando existe una función θ como la anterior tal que $\theta \circ \mu$ es una medida (clásica). En tal caso, θ se llama* **función T propia** *de μ.*

Ejemplo 2.2.2 *Si $X = \{a_1, a_2\}$ y μ una función no-negativa sobre conjuntos de $\mathscr{P}(X)$. Si $0 = \mu(\emptyset) < \mu(\{a_i\}) < \mu(X) < \infty$, entonces μ resulta una quasi-medida.*
Para verlo, tomamos m una medida clásica sobre $(X, \mathscr{P}(X))$, definida por

$$m(E) = \begin{cases} 0 & E = \emptyset \\ \frac{1}{2} & |E| = 1 \\ 1 & E = X \end{cases}$$

Si θ es tal que

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x = \mu(X) \\ \frac{1}{2} & c.c. \end{cases}$$

entonces $\theta \circ \mu = m$

Teorema 2.2.3 *Si $\lambda \neq 0$, una medida λ-difusa μ es una quasi-medida con $\theta_\lambda(y) = \frac{\ln(1+\lambda y)}{k\lambda}$ (con $y \in [0, sup\ \mu]$ y k un número positivo real arbitrario) como su función T propia.*
Además, si μ es una medida, luego $\theta^{-1} \circ \mu$ es una medida λ-difusa.

Prueba: Es fácil ver que θ es una función T. Veamos que $\theta \circ \mu$ es una medida en $\mathfrak{C}$:
Sea E_n una secuencia de conjuntos disjuntos de $\mathfrak{C}$; tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{C}$. Como μ es una medida λ-difusa, existe $E_0 \in \mathfrak{C}$ tal que $\mu(E_0) < \infty$. Entonces:

$$(\theta \circ \mu)(E_0) < \infty$$

[2]Una clase no vacía $\mathfrak{S}$ es un semianillo si $\forall E, F \in \mathfrak{S}, E \cap F \in \mathfrak{S}$ y $\forall E, F \in \mathfrak{S}$ tales que $E \subset F$, existe una clase $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ que satisface $E = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_n = F$ y $D_i = C_i - C_{i-1} \in \mathfrak{S}$ para $i = 1 \ldots n$

y

$$
\begin{aligned}
(\theta \circ \mu)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \frac{1}{k\lambda}\ln\left(1+\lambda\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) \\
&= \frac{1}{k\lambda}\ln\left(1+\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1+\lambda\ \mu(E_n))-1\right)\right) \\
&= \frac{1}{k\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\lambda\ \mu(E_n)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\lambda\ \mu(E_n))}{k\,\lambda} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(\theta \circ \mu)(E_n)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(\theta \circ \mu)$ es una medida en $\mathfrak{C}$.
Sea ahora μ una medida en $\mathfrak{C}$. Existe entonces $E_0 \in \mathfrak{C}$ tal que $\mu(E_0) < \infty$. Así:

$$
\left(\theta^{-1} \circ \mu\right)(E_0) < \infty
$$

y

$$
\begin{aligned}
\left(\theta^{-1} \circ \mu\right)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \theta^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\right) \\
&= \frac{\exp\left(k\lambda\ \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\right)-1}{\lambda} \\
&= \frac{\prod_{n=1}^{\infty}\exp(k\lambda\ \mu(E_n)-1}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1+\lambda\ (\theta^{-1}\circ\mu(E_n)))-1)\right)
\end{aligned}
$$

Así, $\left(\theta^{-1} \circ \mu\right)$ es una medida λ-difusa.

Teorema 2.2.4 *Si μ es una medida λ-difusa en un semianillo $\mathfrak{S}$ (tal que $\emptyset \in \mathfrak{S}$) entonces μ es una medida difusa.*

Prueba: a) $\mu(\emptyset) = 0$ para cualquier anillo $\mathfrak{C}$ conteniendo a $\emptyset$: existe $E \in \mathfrak{C}$ tal que $\mu(E) < \infty$. Luego, tomando $E_1, E_2, E_3, \ldots$ con $E_1 = E_2 = \ldots = \emptyset$, como μ es λ-difusa:

$$
\begin{aligned}
\mu(E) &= \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=2}^{\infty}(1+\lambda\ \mu(E_i))\ (1+\lambda\ \mu(E))-1\right) \\
1+\lambda\ \mu(E) &= (1+\lambda\ \mu(E))\left(\prod_{i=2}^{\infty}(1+\lambda\ \mu(E_i))\right)
\end{aligned}
$$

Así,

$$\prod_{i=2}^{\infty}(1+\lambda\ \mu(\emptyset)) = 1$$

y luego

$$\mu(\emptyset) = 0$$

b) Veamos que μ es monótona: sean $E,F \in \mathfrak{S}$ con $E \subset F$. Como $\mathfrak{S}$ es un semianillo, $F - E = \cup_{i=1}^{n}(D_i)$, con $\{D_i\}_i$ una clase de conjuntos disjuntos de $\mathfrak{S}$. Tenemos:

$$\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda\ \mu(D_i)) - 1\right) \geq 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu(F) &= \mu(E \cup D_1 \cup \ldots \cup D_n) \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda\ \mu(D_i))(1+\lambda\ \mu(E)) - 1\right) \\
&= \mu(E) + \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda\ \mu(D_i)) - 1\right) \\
&\geq \mu(E)
\end{aligned}$$

c) Finalmente, veamos que μ es continua: por el teorema 2.2.3, existe θ tal que $(\theta \circ \mu)$ es una medida en $\mathfrak{S}$. Por resultado de la teoría de la medida clásica[3] $(\theta \circ \mu)$ es continua; pero entonces, $\mu = \theta^{-1} \circ (\theta \circ \mu)$ es continua.

Gracias al teorema anterior, podremos concluir que las medidas λ-difusas, bajo ciertas condiciones, coinciden con las medidas difusas.

2.3. Medidas de Credibilidad y Medidas de Plausibilidad

En el apartado anterior, construimos medidas no aditivas a partir de la transformación del rango de las medidas clásicas. Mediante las medidas que a continuación presentamos, usaremos una aproximación diferente para alcanzar medidas no-aditivas.

Definición 2.3.1 *Sea p una medida de probabilidad (discreta) en $(\mathscr{P}(X), \mathscr{P}(\mathscr{P}(X)))$ tal que $p(\{\emptyset\}) = 0$. Sea $m : \mathscr{P}(X) \to [0,1]$ definida por $m(E) = p(\{E\})$ para cada $E \in \mathscr{P}(X)$ (m se llama* **asignación básica de probabilidad** *). Llamamos* **medida de credibilidad** *en $(X, \mathscr{P}(X))$ a la función $Bel : \mathscr{P}(X) \to [0,1]$ dada por:*

$$Bel(E) = \sum_{F \subset E} m(F) \text{ para } E \in \mathscr{P}(X)$$

Ejemplo 2.3.2 *Si tomamos $X = \{a,b,c,d\}$ y m una asignación básica de probabilidad tal que $m(\{a\}) = 0{,}4$, $m(\{b,c\}) = 0{,}1$, $m(\{a,c,d\}) = 0{,}3$, $m(X) = 0{,}2$. La medida de credibilidad asociada a m es Bel*

[3] Si μ es una medida sobre un semianillo, entonces μ es continua.

definida por:

$$Bel(E) = \begin{cases} 0{,}1 & E = \{b,c\} \\ 0{,}4 & E \in \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\}\} \\ 0{,}5 & E = \{a,b,c\} \\ 0{,}7 & E = \{a,c,d\} \\ 1 & E = X \\ 0 & c.c \end{cases}$$

Como vemos, Bel modela, de cierta manera, la función de distribución de la probabilidad.

Teorema 2.3.3 *Las medidas de credibilidad poseen las siguientes propiedades:*

1. $Bel(\emptyset) = 0$.
2. $Bel(X) = 1$.
3. *Si* $\{E_1, \dots, E_n\}$ *es subclase de* $\mathscr{P}(X)$*, entonces* $Bel(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \geq \sum_{I \subset \{1,..,n\},\, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} Bel(\bigcap_{i \in I} E_i))$
4. *Bel es continua por arriba.*

Prueba: Si m es la asignación básica de probabilidad asociada a Bel, tenemos que $m(\emptyset) = 0$ y $\sum_{E \in \mathscr{P}(X)} m(E) = 1$. Por lo tanto, 1 y 2 son válidas.
Para probar 3, tomamos $I(F) = \{i | 1 \leq i \leq n, F \subset E_i\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{I \subset \{1,..,n\},\, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} Bel(\bigcap_{i \in I} E_i) &= \sum_{I \subset \{1,..,n\},\, I \neq \emptyset} [(-1)^{|I|+1} \sum_{F \subset \bigcap_{i \in I} E_i} m(F)] \\
&= \sum_{F | I(F) \neq \emptyset} [m(F) \sum_{I \subset I(F),\, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1}] \\
&= \sum_{F | I(F) \neq \emptyset} [m(F)(1 - \sum_{I \subset I(F)} (-1)^{|I|})] \\
&= \sum_{F | I(F) \neq \emptyset} m(F)(1 - 0) \\
&= \sum_{F | I(F) \neq \emptyset} m(F) \\
&= \sum_{F \subset E_i (\text{para algún i})} m(F) \\
&\leq \sum_{F \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i} m(F) \\
&= Bel(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que demostrar 4. Tomemos $\{E_i\}_i$ una clase decreciente tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = E$. Como $\sum_{E \in \mathscr{P}(X)} m(E) = 1$, existe una clase contable $\{D_i\}_i \subset \mathscr{P}(X)$, tal que $m(F) = 0$ cuando $F \notin \{D_i\}_i$. Además, para cada $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $\sum_{n > n_0} m(D_n) < \varepsilon$. Para cada D_n, con $n \leq n_0$, si $D_n \not\subset E$ existe $i(n)$ tal que $D_n \not\subset E$. Si tomamos $i_0 = max(i(1), \dots, i(n_0))$, entonces si $D_n \not\subset E$, tenemos

$D_n \not\subset E_{i_0}$ para los $n \leq n_0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
Bel(E) &= \sum_{F \subset E} m(F) \\
&= \sum_{D_n \subset E} m(D_n) \\
&\geq \sum_{D_n \subset E,\, n \leq n_0} m(D_n) \\
&\geq \sum_{D_n \subset E_{i_0},\, n \leq n_0} m(D_n) \\
&\geq \sum_{D_n \subset E_{i_0}} m(D_n) - \sum_{n > n_0} m(D_n) \\
&> \sum_{F \subset E_{i_0}} m(F) - \varepsilon \\
&= Bel(E_{i_0}) - \varepsilon
\end{aligned}$$

Como $Bel(E) \leq Bel(E_i)$ para $i = 1, \ldots, n$ y $\{Bel(E_i)\}_i$ es decreciente, tenemos $Bel(E) = \lim_i Bel(E_i)$.

Definición 2.3.4 *Sea m una asignación básica de probabilidad. Definimos* $Pl : \mathscr{P}(X) \to [0,1]$ *por*

$$Pl(E) = \sum_{F \cap E \neq \emptyset} m(F)$$

A Pl se la conoce como **medida de plausibilidad** *introducida por m.*

Ejemplo 2.3.5 *Tomemos m como en el ejemplo 2.3.2. Entonces la medida de plausibilidad Pl introducida por m será:*

$$Pl(E) = \begin{cases} 0 & E = X \\ 0{,}3 & E = \{a,c,d\} \\ 0{,}5 & E = \{a,b,c\} \\ 0{,}6 & E \in \{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\}\} \\ 0{,}9 & E = \{b,c\} \\ 1 & c.c \end{cases}$$

Teorema 2.3.6 *Si Bel y Pl son medidas de credibilidad y plausibilidad, creadas a partir de la misma asignación básica de probabilidad m, entonces, cualquiera sea* $E \subset X$*, satisfacen:*

$$Bel(E) = 1 - Pl(\overline{E})$$

$$Bel(E) \leq Pl(E)$$

Prueba:

$$\begin{aligned}
Bel(E) &= \sum_{F \subset E} m(F) \\
&= \sum_{F \subset X} m(F) - \sum_{F \not\subset E} m(F) \\
&= 1 - \sum_{F \cap E \neq \emptyset} m(F) \\
&= 1 - Pl(\overline{E})
\end{aligned}$$

La segunda prueba es una conclusión directa de las definiciones.

Teorema 2.3.7 *Si Pl es una medida de plausibilidad, entonces:*

1. $Pl(\emptyset) = 0$.
2. $Pl(X) = 1$.
3. *Si* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *es subclase finita de* $\mathscr{P}(X)$*, entonces* $Pl(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) \leq \sum_{I\subset\{1,..,n\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1} Pl(\bigcup_{i\in I} E_i))$
4. *Pl es continua por abajo.*

Prueba: Como en la prueba del teorema 2.3.3, 1 y 2 son válidas. Del teorema anterior, se deduce 4.

Veamos 3:

$$
\begin{aligned}
Pl(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) &= 1 - Bel(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} E_i}) \\
&= 1 - Bel(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{E_i}) \\
&\leq 1 - \sum_{I\subset\{1,..,n\},\, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1} Bel(\bigcap_{i\in I} \overline{E_i})) \\
&= \sum_{I\subset\{1,..,n\},\, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1} [1 - Bel(\bigcap_{i\in I} \overline{E_i}))] \\
&= \sum_{I\subset\{1,..,n\},\, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1} [1 - Bel(\overline{\bigcup_{i\in I} E_i}))] \\
&= \sum_{I\subset\{1,..,n\},\, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|+1} Pl(\bigcup_{i\in I} E_i)
\end{aligned}
$$

Teorema 2.3.8 *Cualquier medida de probabilidad discreta p en* $(X, \mathscr{P}(X))$ *es una medida de credibilidad y de plausibilidad. La correspondiente asignación básica de probabilidad m se define en los singletones de* $\mathscr{P}(X)$*. Del mismo modo, si m se define como en la definición 2.3.1 sobre los singletones de* $\mathscr{P}(X)$*, entonces coinciden la medida de credibilidad y de plausibilidad introducida por m, resultando en una medida de probabilidad discreta en* $(X, \mathscr{P}(X))$*.*

Prueba: Como p es una medida de probabilidad discreta, existe un conjunto contable $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} p(\{x_i\}) = 1$. Si tomamos

$$
m(E) = \begin{cases} p(E) & E = \{x_i\} \text{ para algún i} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}
$$

entonces m satisface:

$$
p(E) = \sum_{x_i\in E} p(\{x_i\}) = \sum_{F\subset E} m(F) = \sum_{F\cap E\neq\emptyset} m(F) = Pl(E)
$$

Para probar la recíproca, si asumimos que m se define sobre los singletones de $\mathscr{P}(X)$, entonces

$$
Bel(E) = \sum_{F\subset E} m(F) = \sum_{x\in E} m(\{x\}) = \sum_{F\cap E\neq\emptyset} m(F) = Pl(\{x\})
$$

Teorema 2.3.9 *Si X es contable y μ es una medida de Sugeno ($\lambda \neq 0$) en $(X, \mathscr{P}(X))$, entonces μ es una medida de credibilidad cuando $\lambda > 0$ y es una medida de plausibilidad cuando $\lambda < 0$.*

Prueba: Consideremos que $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Si $\lambda > 0$, definimos m por:

$$m(E) = \begin{cases} \lambda^{|E|-1} \prod_{x_i \in E} \mu(\{x_i\}) & \text{si } E \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } E = \emptyset \end{cases}$$

Luego, resulta que

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \frac{1}{\lambda}[\prod_{x_i \in E}(1 + \lambda\mu(\{x_i\})) - 1] \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{F \subset E, F \neq \emptyset} [\lambda^{|F|} \prod_{x_i \in F} \mu(\{x_i\})] \\ &= \sum_{F \subset E, F \neq \emptyset} [\lambda^{|F|-1} \prod_{x_i \in F} \mu(\{x_i\})] \\ &= \sum_{F \subset E} m(F) \end{aligned}$$

Como $\mu(X) = 1$, tenemos que $\sum_{F \in E} m(F) = 1$. Por lo tanto, m satisface la definición 2.3.1 y μ es una medida de credibilidad. Por su parte, cuando $\lambda < 0$, tenemos $\lambda' = -\lambda/(\lambda + 1) > 0$. Por el teorema 2.3.6, μ resulta una medida de plausibilidad.

2.4. Medidas de Posibilidad y Medidas de Necesidad

Antes de introducir las medidas de posibilidad y medidas de necesidad, necesitamos definir los conjuntos difusos y sus operaciones. L.A. Zadeh, en el artículo [14], construye tales conjuntos de la siguiente manera:

Definición 2.4.1 *Un* **conjunto difuso** $A \subset X$ *es una caracterización de un conjunto mediante una función de pertenencia asociada* $f_A : X \to [0, 1]$*, donde* $f_A(x)$ *representa el "grado de pertenencia" de un elemento* x *en* A.

A partir de la definición anterior podemos, por ejemplo, formalizar "el conjunto de números reales que son mucho mayores que cero" mediante una función $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ creciente, que satisfaga:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 0{,}01 & \text{si } x = 1 \\ 0{,}1 & \text{si } x = 10 \\ 0{,}5 & \text{si } x = 100 \\ 1 & \text{si } x = 1000 \end{cases}$$

Los conjuntos difusos tienen operaciones naturalmente definidas, como ser:

- **Igualdad:** $A = B \Leftrightarrow \forall x \in X, f_A(x) = f_B(x)$.
- **Complemento:** El complemento de A es $\overline{A}$ dado por $f_{\overline{A}}(x) = 1 - f_A(x)$.

- **Subconjunto:** $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in X, f_A(x) \leq f_B(x)$.
- **Unión:** La unión de A y B es $C = A \cup B$ con $f_C(x) = \text{máx}(f_A(x), f_B(x))$. Usualmente, se emplea el símbolo $\vee$, es decir, $f_C(x) = f_A(x) \vee f_B(x)$.
- **Intersección:** La intersección de A y B es $C = A \cap B$ dada por $f_C(x) = \text{mín}(f_A(x), f_B(x))$. Ahora, el símbolo $\wedge$ es el que se usa. $f_C(x) = f_A(x) \wedge f_B(x)$.

Las operaciones de unión, intersección y complemento satisfacen las propiedades básicas de los conjuntos convencionales. Por ejemplo, las leyes de De Morgan.

Podemos ahora agregar nuevas definiciones.

Definición 2.4.2 *μ es una* **medida difusa aditiva** *si*

$$\mu(\bigcup_{i \in T} E_i) = \sup_{i \in T} \mu(E_i)$$

para cualquier subclase $\{E_t | t \in T\}$ de $\mathfrak{C}$, donde T es un conjunto de índices arbitrario. Si existe $E \in \mathfrak{C}$ tal que $\mu(E) < \infty$, entonces μ es una **medida de posibilidad generalizada** .

Notemos que si $\mathfrak{C}$ es finito, entonces la definición anterior para μ es equivalente a la unión en conjuntos difusos. Es decir,

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) \vee \mu(E_2)$$

Definición 2.4.3 *Si π es una medida de posibilidad generalizada en $\mathscr{P}(X)$, entonces la función definida en X por $f(x) = \pi(\{x\})$ se llama* **función de densidad** . *Si π es regular, entonces f es una* **medida de posibilidad** .

Teorema 2.4.4 *Si f es la función de densidad de una medida de posibilidad π, entonces $\sup_{x \in X} f(x) = 1$. Asimismo, si una función $f : X \to [0,1]$ es tal que $\sup_{x \in X} f(x) = 1$, entonces f determina una medida de posibilidad π que es única, al tiempo que f es su función de densidad.*

Prueba:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} f(x) &= \sup_{x \in X} \pi(\{x\}) \\ &= \pi(\bigcup_{x \in X} \{x\}) \\ &= \pi(X) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Para la recíproca, si definimos $\pi(E) = \sup_{x \in E} f(x)$, entonces π es una medida de posibilidad y $\pi(\{x\}) = \sup_{x \in \{x\}} f(x) = f(x)$.

Definición 2.4.5 *Si π es una medida de posibilidad, entonces la función dual es la* **medida de necesidad** .

Ejemplo 2.4.6 *Si tomamos $X = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $f(x) = x$ para $x \in X$. Definimos $\pi : \mathscr{P}(X) \to [0,1]$ por*

$$\pi(E) = \sup_{x \in E} f(x) \text{ para } E \in \mathscr{P}(X)$$

Luego, π es una medida de posibilidad en $\mathscr{P}(X)$, aunque no es una medida de plausibilidad.

Teorema 2.4.7 *$\nu : \mathscr{P}(X) \to [0,1]$ es una medida de necesidad si y sólo si, para cualquier $\{E_t | t \in T\} \in \mathscr{P}(X)$ (con T conjunto de índices), se satisface*

$$\nu(\bigcap_{t \in T} E_t) = \inf_{t \in T} \nu(E_t)$$

Prueba: La demostración es trivial, a partir de las definiciones de medida de posibilidad y medida de plausibilidad.

Capítulo 3

Funciones Medibles

Antes de analizar las generalizaciones para la teoría de la medida difusa, recordemos algunos conceptos de la medida clásica respecto a las funciones medibles.

Definición 3.0.8 *Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es $\mathscr{F}$-medible si $f^{-1}(B) = \{x|f(x) \in B\} \in \mathscr{F}$ para cada conjunto de Borel $B \in \mathscr{B}$. Denotamos por $\mathbf{F}$ al conjunto de funciones medibles no negativas.*

Teorema 3.0.9 *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función, entonces son equivalentes:*

1. *f es medible*
2. *$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x|f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{F}$*
3. *$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x|f(x) > \alpha\} \in \mathscr{F}$*
4. *$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x|f(x) \leq \alpha\} \in \mathscr{F}$*
5. *$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \{x|f(x) < \alpha\} \in \mathscr{F}$*

Prueba: $(1 \Rightarrow 2)$ $\{x|f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha,\infty))$. Como $[\alpha,\infty) \in \mathscr{B}$, $\{x|f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{F}$.
$(2 \Rightarrow 1)$ Por la hipótesis, tenemos que $\forall\, B \in \{[a,\infty)|f(x) \geq \alpha\}$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$. Si tomamos los conjuntos $\mathscr{A} = \{B|f^{-1}(B) \in \mathscr{F}\}$ y $\mathscr{C} = \{[\alpha,\infty)|\alpha \in (-\infty,\infty)\}$, entonces $\mathscr{A} \supset \mathscr{C}$. Como $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$, si $B \in \mathscr{A}$, entonces $\overline{B} \in \mathscr{A}$. Es decir, $\mathscr{A}$ es cerrado por la operación de complemento. Equivalentemente, podemos probar que $\mathscr{A}$ es cerrado por la operación de unión contable.
Así, $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra y, por ende, $\mathscr{A} \supset \mathscr{F}(\mathscr{C}) = \mathscr{B}$. Por lo tanto, f resulta medible.
Las pruebas para el resto de las equivalencias son muy similares por eso se omiten.

Teorema 3.0.10 *Si f es medible, entonces $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \{x|f(x) = \alpha\} \in \mathscr{F}$.*

Prueba: Por ser f una función medible, tenemos que $\{x|f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{F}$ y $\{x|f(x) > \alpha\} \in \mathscr{F}$. Como $\mathscr{F}$ es σ-álgebra, entonces $\{x|f(x) > \alpha\} - \{x|f(x) \geq \alpha\} = \{x|f(x) \geq \alpha\} \in \mathscr{F}$.

Extenderemos a continuación los conjuntos borelianos a $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.0.11 *Sea* $\mathscr{S}^{(n)} = \{\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i) | a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i\}$.
Si $\mathscr{B}^{(n)}$ *es la* σ*-álgebra generada por* $\mathscr{S}^{(n)}$*, llamamos* **conjuntos de Borel** *a los conjuntos pertenecientes a* $\mathscr{B}^{(n)}$*. Una función* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una* **función de Borel** *si es una función medible en el espacio de medidas* $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^{(n)})$.

Teorema 3.0.12 *Si* $f_1, \ldots, f_n$ *son funciones medibles y* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una función de Borel, entonces* $g(f_1, \ldots, f_n)$ *es una función medible. Por lo tanto, si* f_1 *y* f_2 *son medibles y* $\alpha \in \mathbb{R}$*, las siguientes funciones también resultan medibles:* α, αf_1, $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$, $|f_1|$, $|f_1|^{\alpha}$, $f_1 \wedge f_2$, $f_1 \vee f_2$.

Prueba: Cualquiera sea el conjunto de borel $B \subset (-\infty, \infty)$,

$$\begin{aligned} (g(f_1, \ldots, f_n))^{-1}(B) &= \{x | g(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in B\} \\ &= \{x | (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in g^{-1}(B)\} \end{aligned}$$

Luego, cualquiera sea $E = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i) \in \mathscr{S}^{(n)}$,

$$\{x | (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in E\} = \bigcap_{i=1}^{n}\{x | f_i(x) \in [a_i, b_i)\} \in \mathscr{F}$$

Por la demostración del teorema anterior, $\{x | (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in F\} \in \mathscr{F}$, cualquiera sea $F \in \mathscr{B}^{(n)}$. Además, por ser g una función de Borel, $g^{-1}(B) \in \mathscr{B}^{(n)}$ para cualquier $B \subset (-\infty, \infty)$. Por lo tanto, $\{x | (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in g^{-1}(B)\} \in \mathscr{F}$ y por ello, $g(f_1, \ldots, f_n)$ es función medible.

Teorema 3.0.13 *Si* $\{f_n\}_n$ *es una secuencia de funciones medibles y* $\underline{f}(x) = \underline{\lim} f_n(x)$ *y* $\overline{f}(x) = \overline{\lim} f_n(x)$*, entonces* $\underline{f}$ *y* $\overline{f}$ *son medibles.*

Prueba: Como $\overline{f}(x) = \text{ínf}_m \sup_{n \geq m}\{f_n(x)\}$ y $\underline{f}(x) = \sup_m \text{ínf}_{n \geq m}\{f_n(x)\}$, probaremos que la función supremo e ínfimo son medibles.
$\{x | \sup_n\{f_n(x)\} > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x | f_n(x) > \alpha\} \in \mathscr{F}$ y $\{x | \text{ínf}_n\{f_n(x)\} > \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x | f_n(x) > \alpha\} \in \mathscr{F}$. Entonces ambas funciones son medibles.

El concepto de funciones medibles en una medida difusa es idéntico al de la medida clásica (por ello no lo definiremos nuevamente, como sí se hará en el próximo capítulo para las integrales). En cambio, tenemos que ver cómo extender la noción de “casi en todas partes” para los espacios de medida difusa. Esto lo haremos en la próxima sección. aquí

3.1. Convergencia a.e. y p.a.e.

Definición 3.1.1 *Sea* $A \in \mathscr{F}$ *y* P *una proposición sobre elementos de* A*. Si existe* $E \in \mathscr{F}$ *tal que* $\mu(E) = 0$ *y* P *es válida en* $A - E$*, decimos que* P *es válida* **casi en todas partes** *en* A *(usamos las siglas del inglés a.e.). Si existe* $F \in \mathscr{F}$ *con* $\mu(A - F) = \mu(A)$ *siendo* P *válida en* $A - F$*, decimos que* P *es válida* **pseudo-casi en todas partes** *en* A *(p.a.e. sus siglas).*
Además, denotamos la convergencia de $\{f_n\}_n$ *a* f *casi en todas partes por* $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ *y la convergencia pseudo-casi en todas partes por* $f_n \xrightarrow{p.a.e.} f$.

Ejemplo 3.1.2 *Sean* $X = \{a,b,c\}, \mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$ *y* μ *definida para* $E \in \mathscr{F}$ *por*

$$\mu(E) = \begin{cases} |E| & E \neq \{c\} \\ 0 & E = \{c\} \end{cases}$$

Ahora, tomemos para $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in \{a,b\} \\ 1 & x = c \end{cases}$$

Así, $f_n \xrightarrow{a.e.} 0$, *pero* $f_n \overset{p.a.e.}{\not\longrightarrow} 0$, $f_n \overset{a.e.}{\not\longrightarrow} 1$ *y* $f_n \overset{p.a.e.}{\not\longrightarrow} 1$.

En la medida convencional, si vale $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ y $f_n \xrightarrow{a.e.} f'$, entonces $f = f'$ a.e.. Para las medidas difusas, este teorema no es válido. Incluso no vale ni para "p.a.e.".

Definición 3.1.3 *Sean* $A \in \mathscr{F}$, $f \in \mathbf{F}$ *y* $\{f_n\} \in \mathbf{F}$. *Si existe* $\{E_k\}_k \subset \mathscr{F}$ *con* $\lim_k \mu(E_k) = 0$ *tal que* $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f *en* $A - E_k$ *para cualquier* k *fijo, entonces decimos que* $\{f_n\}$ *converge a* f *en* A **casi uniformemente** *y lo denotamos por* $f_n \xrightarrow{a.u.} f$. *Si existe* $\{F_k\}_k \subset \mathscr{F}$ *con* $\lim_k \mu(A - F_k) = 0$ *tal que* $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f *en* $A - F_k$ *para cualquier* k *fijo, entonces decimos que* $\{f_n\}$ *converge a* f *en* A **pseudo-casi uniformemente** *y lo denotamos por* $f_n \xrightarrow{p.a.u.} f$.
Sea $A \in \mathscr{F}$, $f \in \mathbf{F}$ *y* $\{f_n\}_n \subset \mathbf{F}$. *Si* $\lim_n \mu(\{x||f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \cap A) = 0$ *para cualquier* $\varepsilon > 0$, *entonces decimos que* $\{f_n\}$ *converge* **en medida** μ *a* f *sobre* A, *y lo denotamos* $f_n \xrightarrow{\mu} f$. *Si* $\lim_n \mu(\{x||f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \cap A) = \mu(A)$ *para cualquier* $\varepsilon > 0$, *entonces decimos que* $\{f_n\}_n$ *converge* **pseudo-en medida** μ *a* f *sobre* A, *y lo denotamos* $f_n \xrightarrow{p.\mu} f$.

Ejemplo 3.1.4 *Sean* $X = [0,1)$, $\mathscr{F} = \mathscr{B}_+$ *y* μ *la medida de Lebesgue* ($\mathscr{B}_+$ *es el álgebra de Borel restringida a* $[0,\infty)$). *Si definimos* $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $f(x) = 0$ *para* $x \in X$. *Entonces tenemos que* $f_n \xrightarrow{p.a.u.} f$, *pero* $f_n \overset{a.u.}{\not\longrightarrow} f$. *Asimismo,* $f_n \xrightarrow{p.\mu} f$, *pero* $f_n \overset{\mu}{\not\longrightarrow} f$.

3.2. Relación entre las distintas convergencias

Teorema 3.2.1 *Sea* $A \in \mathscr{F}$ *y* P *una proposición con respecto a elementos de* A. P *es válida p.a.e. cuando* P *sea válida a.e. si y sólo si* $\forall E,F \in \mathscr{F}$ *con* $E \cap F = \emptyset$ *y* $\mu(F) = 0$, *se satisface* $\mu(E \cup F) = \mu(E)$ *(en este caso,* μ *se dice* **nula-aditiva***).*

Prueba: ($\Rightarrow$) Sea $A,E \in \mathscr{F}$, con $\mu(E) = 0$ y P la proposición $P(x) =$ "$x \in A - E$". Asumimos que P es válida a.e.. Si esto implica que P es válida p.a.e. es porque $\exists\, F \in \mathscr{F}, \mu(A - F) = \mu(A) | P(x)$ es válida para cualquier $x \in A - F$. Es decir, $x \in A - F \Rightarrow x \in A - E$. Por lo tanto, $A - F \subset A - E$. Luego, $\mu(A - E) = \mu(A)$ y luego $\mu(E \cup F) = \mu(E)$.

($\Leftarrow$) Supongamos que μ satisface $\mu(E \cup F) = \mu(E)$. Si P es válida a.e., entonces existe $E \in \mathscr{F}$ con $\mu(E) = 0$ tal que $P(x)$ es válida para algún $x \in A - E$. Luego, por la monotonía de μ, tenemos $\mu(A - E) = \mu(A)$. Por ende, P es válida p.a.e..

Del teorema anterior se deduce, tomando la convergencia como proposición P, el siguiente corolario.

Corolario 3.2.2 *Sea* $A \in \mathscr{F}$, $f \in \mathbf{F}$, $\{f_n\}_n \subset \mathbf{F}$ *y* μ *nula-aditiva. Si* $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ *en* A, *entonces* $f_n \xrightarrow{p.a.e.} f$ *en* A.

Con el objetivo de establecer relaciones entre los diferentes tipos de convergencia, introduciremos nuevas definiciones. Las mismas servirán de condiciones para que una convergencia implique a otra.

Definición 3.2.3 $\mu : \mathscr{F} \to [-\infty, \infty]$ *es* **autocontinua por arriba** *si vale que*

$$\lim_n \mu(E \cup F_n) = \mu(E)$$

cuando $E \in \mathscr{F}$, $F_n \in \mathscr{F}$, $E \cap F_n = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_n(\mu(F_n)) = 0$.
μ *es* **autocontinua por abajo** *si*

$$\lim_n \mu(E - F_n) = \mu(E)$$

cuando $E \in \mathscr{F}$, $F_n \in \mathscr{F}$, $F_n \subset E$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_n(\mu(F_n)) = 0$.
μ *es* **autocontinua** *si es autocontinua por arriba y por abajo.*

Definición 3.2.4 $\mu : \mathscr{F} \to [-\infty, \infty]$ *es* **uniformemente autocontinua por arriba** *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 || \mu(E \cup F) - \mu(E)| < \varepsilon$$

donde $E \in \mathscr{F}$, $F \in \mathscr{F}$, $E \cap F_n = \emptyset$ *y* $\mu(F) \leq \delta$.
$\mu : \mathscr{F} \to [-\infty, \infty]$ *es* **uniformemente autocontinua por abajo** *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 || \mu(E - F) - \mu(E)| < \varepsilon$$

donde $E \in \mathscr{F}$, $F \in \mathscr{F}$, $E \subset F$ *y* $\mu(F) \leq \delta$.
μ *es* **uniformemente autocontinua** *si lo es por arriba y por abajo.*

Teorema 3.2.5 *Sea* $A \in \mathscr{F}$, $f \in \mathbf{F}$, $\{f_n\}_n \subset \mathbf{F}$ *y* μ *autocontinua por abajo. Si* $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ *en A, entonces* $f_n \xrightarrow{p.a.u.} f$ *en A.*

Prueba: Si $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ en A entonces existe $\{E_k\}_k \subset \mathscr{F}$ con $\lim_k \mu(E_k) = 0$ tal que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a f en $A - E_k$ (cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$). Como μ es autocontinua por abajo, tenemos que $\lim_k \mu(A - E_k) = \mu(A)$ y por ende $f_n \xrightarrow{p.a.u.} f$ en A.

Teorema 3.2.6 *Sean* $A \in \mathscr{F}$, $f \in \mathbf{F}$ *y* $\{f_n\} \subset \mathbf{F}$. μ *es autocontinua por abajo si y sólo si* ($f_n \xrightarrow{u.} f$ *en A* $\Rightarrow f_n \xrightarrow{p.u.} f$ *en A*).

Prueba: ($\Rightarrow$) Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$ en A, entonces $\forall\, \varepsilon > 0$, $\lim_n \mu(\{x || f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \cap A) = 0$. Como μ es autocontinua por abajo,

$$\begin{aligned}
\lim_n \mu(\{x || f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \cap A) &= \lim_n \mu((A - \{x || f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \cap A) \\
&= \mu(A)
\end{aligned}$$

Lo que implica que $f_n \xrightarrow{p.\mu} f$ en A.
($\Leftarrow$) Para $A \in \mathscr{F}$ y $\{B_n\} \subset \mathscr{F}$ con $\lim_n \mu(B_n) = 0$, definimos para $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \notin B_n \\ 1 & x \in B_n \end{cases}$$

Así, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ en A. Si ello implica que $f_n \xrightarrow{p.\mu} f$ en A, entonces tomando $\varepsilon = 1$, tenemos $\lim_n \mu(\{x || f_n(x)| < 1\} \cap A) = \mu(A)$. Pero como $\{x || f_n(x)| < 1\} \cap A = \overline{B_n} \cap A = A - B_n$, entonces $\lim_n \mu(A - B_n) = \mu(A)$. Por lo tanto μ es autocontinua por abajo.

Teorema 3.2.7 *Tomemos μ una medida difusa y $A \in \mathscr{F}$ con $\mu(A) < \infty$. Si $f_n \to f$ en A, entonces $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ y $f_n \xrightarrow{p.a.u.} f$ en A.*

Prueba: Asumimos que $A = X$ y μ es finita.
Sean $E_n^m = \bigcap_{i=n}^{\infty} \{x | |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\}$, para $m \in \mathbb{N}$. Luego, $E_1^m \subset E_2^m \subset \ldots$. Entonces, el conjunto de puntos x en los cuales $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$ está dado por $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n^m$.
Si $f_n \to f$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m = X$ cualquiera sea m. O, lo que es equivalente, $E_n^m \nearrow X$[1] cuando $n \to \infty$ y $\overline{E_n^m} \searrow \emptyset$[2] cuando $n \to \infty$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Tomando $\varepsilon > 0$, existe n_1 tal que $\mu(\overline{E_{n_1}^1}) < \varepsilon/2$ (por la continuidad por abajo y el hecho de que μ es finita). Existe entonces un n_2 tal que $\mu(\overline{E_{n_1}^1 \cup E_{n_2}^2}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2^2 = 3\varepsilon/4$. Así, sucesivamente, obtenemos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tal que $\mu(\bigcup_{i=1}^k \overline{E_{n_i}^i}) < (1 - 1/2^k)\varepsilon < \varepsilon$. Obtenemos las secuencias $\{n_i\}_i$ y $\overline{E_{n_i}^i}$. Por la continuidad por abajo de μ, $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{E_{n_i}^i}) \leq \varepsilon$.
Probaremos ahora que $\{f_n\}$ converge a f en $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^i$. Dado $\delta > 0$, tomamos $i_0 > 1/\delta$. Si $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n_i}^i$, entonces $|f_i(x) - f(x)| < 1/i_0 < \delta$ cuando $i \geq n_{i_0}$. Así, $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ en A.
La prueba de $f_n \xrightarrow{p.a.u.} f$ en A es idéntica.

Corolario 3.2.8 *Si μ es una medida difusa nula-aditiva, $A \in \mathscr{F}$ con $\mu(A) < \infty$. Si $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ en A, entonces $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ y $f_n \xrightarrow{p.a.u.} f$ en A.*

Teorema 3.2.9 *Sea $A \in \mathscr{F}$. Si $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ (o $f_n \xrightarrow{p.a.u.} f$) en A, entonces $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ (o $f_n \xrightarrow{p.a.e.} f$) en A.*

Prueba: Como $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ en A, existe $\{E_k\}_k \subset \mathscr{F}$ con $\lim_k \mu(E_k) = 0$ tal que $\{f_n\}_n$ converge a f en $A - E_k$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Como $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \subset E_k$, por la monotonía de μ tenemos que $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = 0$. Así, para $x \in A - \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, existe un E_k que satisface $x \in A - E_k$. Por ello, $\{f_n(x)\}_n$ converge a $f(x)$. Por lo tanto $f_n \xrightarrow{a.e.} f$. La prueba para $f_n \xrightarrow{p.a.e.} f$ es similar.

Teorema 3.2.10 *Sea $A \in \mathscr{F}$. Si $f_n \xrightarrow{a.e.} f$, μ es continua por arriba y $\mu(A) < \infty$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$ en A. Si $f_n \xrightarrow{p.a.e.} f$, μ es continua por abajo y $\mu(A) < \infty$, entonces $f_n \xrightarrow{p.\mu} f$ en A.*

Prueba: Como $f_n \xrightarrow{p.a.e.} f$ en A, existe $B \in \mathscr{F}$ con $B \subset A$ y $\mu(B) = \mu(A)$ tal que para cada $x \in B$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ y $x \in B$ existe $N(x)$ tal que $n \geq N(x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Por otro lado,

$$(\{x | N(x) \leq k\} \cap B) \nearrow \bigcup_{i=1}^{\infty} (\{x | N(x) \leq i\} \cap B) = B$$

Como

$$\{x | |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \cap A \supset \{x | N(x) \leq n\}$$

tenemos que

$$B \supset \{x | |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \cap A \cap B \supset \{x | N(x) \leq n\} \cap B = \{x | N(x) \leq n\} \cap B = \{x | N(x) \leq n\} \nearrow B$$

y, por consecuencia,

$$\lim_n \mu(\{x | |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \cap A \cap B) = \mu(B)$$

[1] $E_n \nearrow E$ si $\{E_n\}_n$ es creciente y $\lim_n E_n = E$
[2] $E_n \searrow E$ si $\{E_n\}_n$ es decreciente y $\lim_n E_n = E$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mu(A) &\geq \lim_n \mu(\{x \| f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \cap A) \\
&\geq \lim_n \mu(\{x \| f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\} \cap A \cap B) \\
&= \mu(B) \\
&= \mu(A)
\end{aligned}$$

Lo cual prueba que $f_n \xrightarrow{p.\mu} f$ en A. La otra prueba es similar.

Teorema 3.2.11 *Sean $A \in \mathscr{F}$ y μ una medida difusa semicontinua por abajo que es autocontinua por arriba. Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$ en A, entonces existe $\{f_{n_i}\}_i \subset \{f_n\}_n$tal que $f_{n_i} \xrightarrow{a.e.} f$ y $f_{n_i} \xrightarrow{p.a.e.} f$ en A.*

Prueba: Una vez más, sin pérdida de generalidad, asumimos que $A = X$. Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$, entonces $\lim_n \mu(\{x \| f_n(x) - f(x)| \geq 1/k\}) = 0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Es decir, existe n_k tal que $\mu(\{x \| f_{n_k}(x) - f(x)| \geq 1/k\}) < 1/k$.
Si asumimos que la secuencia $\{n_k\}_k$ es creciente, entonces $\lim_k \mu(\{x \| f_n(x) - f(x)| \geq 1/k\}) = 0$. Como μ es autocontinua por arriba, existe una subsecuencia $\{E_{k_i}\}_i$ de $\{E_k\}_k$ tal que $\mu(\overline{\lim}_i \mu(E_{k_i})) = 0$.
Probemos entonces que $\{f_{n_{k_i}}\}_i$ converge a f en $X - \overline{\lim}_i E_{k_i}$. Cualquiera sea $x \in X - \overline{\lim}_i E_{k_i}$, como $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=j}^{\infty} \overline{E_{k_i}}$, existe $j(x)$ tal que $x \in \bigcap_{i=j(x)}^{\infty} \overline{E_{k_i}}$, es decir, $|f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| < 1/k_i$ para $i \geq j(x)$. Luego, para $\varepsilon > 0$, existe i_0 con $1/k_{i_0} < \varepsilon$ tal que $|f_{n_{k_i}}(x) - f(x)| < 1/k_i \leq 1/k_{i_0} < \varepsilon$ cuando $i \geq j(x) \wedge i_0$. Lo cual demuestra que $f_{n_{k_i}} \xrightarrow{a.e.} f$.
Como μ es nula-aditiva, tenemos que $f_{n_{k_i}} \xrightarrow{p.a.e.} f$.

Corolario 3.2.12 *Sean $A \in \mathscr{F}$ y μ una medida difusa autocontinua por abajo, con $\mu(A) < \infty$. Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$ en A, entonces existe $\{f_{n_i}\}_i \subset \{f_n\}_n$tal que $f_{n_i} \xrightarrow{a.e.} f$ y $f_{n_i} \xrightarrow{p.a.e.} f$ en A.*

Teorema 3.2.13 *Sea $A \in \mathscr{F}$. Si $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ (o $f_n \xrightarrow{p.a.u.} f$) en A, entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (o $f_n \xrightarrow{p.\mu} f$) en A.*

Prueba: Como $f_n \xrightarrow{a.u.} f$, cualquiera sea $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existen n_0 y $E \in \mathscr{F}$ con $\mu(E) < \delta$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ cuando $x \in A - E$ y $n \geq n_0$. Por lo tanto, para $n \geq n_0$,

$$\mu(\{x \| f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \cap A) \leq \mu(E \cap A) \leq \mu(E) < \delta$$

Es decir, $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

En la figura 3.1 se graficó la relación entre los distintos tipos de convergencia según los teoremas de la presente sección. Las flechas señalan "implicancia", mientras que las flechas rotuladas indican "implicancia bajo la hipótesis del rótulo".

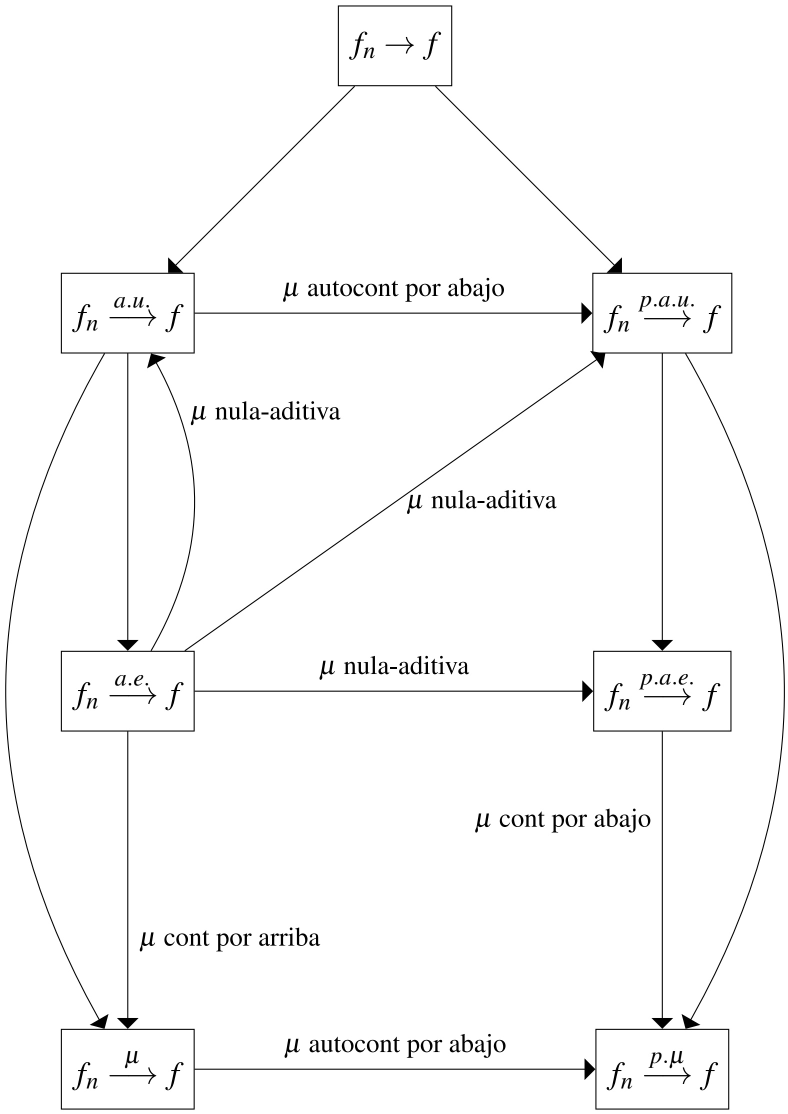


Figura 3.1: Relación entre distintos tipos de convergencia de funciones medibles

Capítulo 4

Integrales Difusas

Ahora estamos en condiciones de definir uno de los conceptos más relevantes de la teoría de la medida: la integración.

Para $f \in \mathbf{F}$, tomamos $F_\alpha = \{x | f(x) \geq \alpha\}$ y $F_{\alpha^+} = \{x | f(x) > \alpha\}$ donde $\alpha \in [0, \infty]$. Llamamos a estos conjuntos α-corte y α-corte estricto. Además, tomamos la convención de que $\text{ínf}_{x \in \emptyset} f(x) = \infty$.

4.1. Integración

Definición 4.1.1 *Si $A \in \mathscr{F}$ y $f \in \mathbf{F}$, la* **integral difusa** *de f en A con respecto a μ, denotada por $⨍_A f \, \mathrm{d}\mu$, se define por*

$$⨍_A f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)]$$

Cuando A = X, se suele denotar la integral por $⨍ f \, \mathrm{d}\mu$.

Gráficamente la integral difusa, en el caso particular en que $X = (-\infty, \infty)$, $\mathscr{F}$ sea la σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}$, μ sea la medida de Lebesgue y $f : X \to [0, \infty)$ sea una función continua, representa la longitud del lado del mayor cuadrado entre la función f y el eje x.

Si tomamos

$$\Gamma = \{\alpha \mid \alpha \in [0, \infty],\ \mu(A \cap F_\alpha) > \mu(A \cap F_\beta) \text{ para cualquier } \beta > \alpha\}$$

entonces podemos reescribir la integral como

$$⨍_A f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\alpha \in \Gamma} [\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)]$$

Lema 4.1.2 *F_α y F_{α^+} son no crecientes con respecto a α y si $\alpha < \beta$, entonces $F_\beta \subset F_{\alpha^+}$. Además, se cumple que*

$$\lim_{\beta \to \alpha^-} F_\beta = \lim_{\beta \to \alpha^-} F_{\beta^+} = F_\alpha \supset F_{\alpha^+} = \lim_{\beta \to \alpha^+} F_\beta = \lim_{\beta \to \alpha^+} F_{\beta^+}$$

Prueba: La familia de conjuntos $\{F_\beta\}_{\beta\geq 0}$ es decreciente, luego, por definición, $\lim_{\beta\to\alpha^-} F_\beta = \bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$. Lo mismo vale para $\{F_{\beta^+}\}_{\beta\geq 0}$. Entonces, resolvemos para las intersecciones:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{\beta<\alpha}\{x|f(x)\geq\beta\} &= \bigcap_{\beta<\alpha}\{x|f(x)>\beta\}\\
&= \{x|f(x)\geq\alpha\}\\
&\supset \{x|f(x)>\alpha\}\\
&= \bigcap_{\beta>\alpha}\{x|f(x)\geq\beta\}\\
&= \bigcap_{\beta>\alpha}\{x|f(x)>\beta\}
\end{aligned}$$

Queda así demostrado el lema.

Teorema 4.1.3

$$\begin{aligned}
⨍_A f\,\mathrm{d}\mu &= \sup_{\alpha\in[0,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_\alpha)]\\
&= \sup_{\alpha\in[0,\infty]}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha^+})]\\
&= \sup_{\alpha\in[0,\infty)}[\alpha\wedge\mu(A\cap F_{\alpha^+})]\\
&= \sup_{E\in\mathscr{F}(f)}[(\inf_{x\in E} f(x))\wedge\mu(A\cap E)]\\
&= \sup_{E\in\mathscr{F}}[(\inf_{x\in E} f(x))\wedge\mu(A\cap E)]
\end{aligned}$$

donde $\mathscr{F}(f)$ es la σ-álgebra generada por f (la menor σ-álgebra en la que f es medible).

4.2. Propiedades

Como era de esperarse, las integrales difusas satisfacen las propiedades básicas de las integrales clásicas. Esto queda reflejado en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1 *1. Si $\mu(A)=0$, $⨍_A f\,\mathrm{d}\mu=0$, cualquiera sea $f\in\mathbf{F}$.*

2. *Si $⨍_A f\,\mathrm{d}\mu=0$, entonces $\mu(A\cap\{x|f(x)>0\})=0$.*

3. *Si $f\leq g$, entonces $⨍_A f\,\mathrm{d}\mu\leq⨍_A g\,\mathrm{d}\mu$.*

4. *$⨍_A f\,\mathrm{d}\mu=⨍ f.\chi_A\,\mathrm{d}\mu$.*

5. *Si $a\in[0,\infty)$; entonces $⨍_A a\,\mathrm{d}\mu=a\wedge\mu(A)$.*

6. *Si $a\in[0,\infty)$; entonces $⨍_A(f+a)\,\mathrm{d}\mu\leq⨍_A f\,\mathrm{d}\mu+⨍_A a\,\mathrm{d}\mu$.*

7. *Si $A\supset B$, entonces $⨍_A f\,\mathrm{d}\mu\geq⨍_B f\,\mathrm{d}\mu$.*

8. *$⨍_A(f\vee g)\,\mathrm{d}\mu\geq⨍_A f\,\mathrm{d}\mu\vee⨍_A g\,\mathrm{d}\mu$.*

9. $\fint_A (f \wedge g)\, \mathrm{d}\mu \leq \fint_A f\, \mathrm{d}\mu \wedge \fint_A g\, \mathrm{d}\mu$.

10. $\fint_{A\cup B} f\, \mathrm{d}\mu \geq \fint_A f\, \mathrm{d}\mu \vee \fint_B f\, \mathrm{d}\mu$.

11. $\fint_{A\cap B} f\, \mathrm{d}\mu \leq \fint_A f\, \mathrm{d}\mu \wedge \fint_B f\, \mathrm{d}\mu$.

Prueba: Veamos que se cumple 1:

$$\fint_A f\, \mathrm{d}\mu = \sup_{\alpha\in[0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_\alpha)] = \sup_{\alpha\in[0,\infty]} [\alpha \wedge 0] = \sup_{\alpha\in[0,\infty]} 0 = 0$$

Para probar 2, supongamos que $\mu(A \cap \{x|f(x) > 0\}) = c > 0$. Como $A \cap \{x|f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ es una secuencia creciente que tiende a $A \cap \{x|f(x) > 0\}$, tenemos que, por la continuidad por abajo,

$$\lim_n \mu(A \cap \{x|f(x) \geq \frac{1}{n}\}) = c$$

Por lo tanto, existe n_0 tal que

$$\mu(A\cap F_{1/n_0}) = \mu(A \cap \{x|f(x) \geq \frac{1}{n_0}\}) \geq \frac{c}{2}$$

Así,

$$\fint_A f\, \mathrm{d}\mu = \sup_{\alpha\in[0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_\alpha)] \geq \frac{1}{n_0} \wedge \frac{c}{2} > 0$$

Lo que contradice que $\fint_A f\, \mathrm{d}\mu = 0$.
Las pruebas de 3 y 4 son sencillas. Para la primera, $\{x|f(x) \geq \alpha\} \subset \{x|g(x) \geq \alpha\}$, entonces $\mu(\{x|f(x) \geq \alpha\}) \leq \mu(\{x|g(x) \geq \alpha\})$. Para la segunda, $A \cap \{x|f(x) \geq \alpha\} = \{x \in A|f(x) \geq \alpha\} = \{x|(f.\chi_A)(x) \geq \alpha\}$.
5 también es trivial puesto que $\{x|a \geq \alpha\}$ es X ó $\emptyset$ según sea $a \geq \alpha$ o no. Por lo tanto $\sup_{\alpha\in[0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_\alpha)]$ es $a \wedge \mu(A)$ ó $\sup_{\alpha\in(a,\infty]} [\alpha \wedge \mu(\emptyset)]$.
6 sigue del teorema anterior:

$$\begin{aligned}
\fint_A (f+a)\, \mathrm{d}\mu &= \sup_{E\in\mathscr{F}} [(\inf_{x\in E} [f(x)+a]) \wedge \mu(A\cap E] \\
&\leq \sup_{E\in\mathscr{F}} [((\inf_{x\in E} f(x)) \wedge \mu(A\cap E)) + (a \wedge \mu(A\cap E))] \\
&\leq \sup_{E\in\mathscr{F}} [((\inf_{x\in E} f(x)) \wedge \mu(A\cap E)) + (a \wedge \mu(A))] \\
&= \sup_{E\in\mathscr{F}} [(\inf_{x\in E} f(x)) \wedge \mu(A\cap E)] + (a \wedge \mu(A)) \\
&= \fint_A f\, \mathrm{d}\mu + \fint_A a\, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

La propiedad 7 sale de las propiedades 3 y 4, puesto que $f.\chi_B \leq f.\chi_A$.
Las propiedades 8 y 9 se deducen de 3, mientras que las 10 y 11 se obtienen a partir de 7.

Nota: Como ya se habrá notado, en la lista de propiedades anteriores, no se incluye una de las propiedades más importantes de la teoría convencional: la linealidad. Las integrales difusas no satisfacen tal propiedad.

Teorema 4.2.2 $\fint_A f \, \mathrm{d}\mu = \fint_A g \, \mathrm{d}\mu$ *siempre que* $f = g$ *a.e., si y sólo si* μ *es nula-aditiva.*

Prueba: ($\Rightarrow$) Tomemos $E, F \in \mathscr{F}$, con $\mu(F) = 0$ y $\mu(E) = \infty$. En tal caso, por monotonía, $\mu(E \cup F) = \infty = \mu(E)$. Asumamos ahora que $\mu(E) < \infty$, y probemos por el absurdo que $\mu(E \cup F) = \mu(E)$, es decir, partimos de la hipótesis que $\mu(E \cup F) > \mu(E)$. Tomemos también $a \in (\mu(E), \mu(E \cup F))$ y

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in E \cup F \\ 0 & \text{si } x \notin E \cup F \end{cases}$$

($\Leftarrow$) Como μ es nula-aditiva y, puesto que $f = g$ a.e., $\mu(\{x | f(x) \neq g(x)\}) = 0$, entonces para cualquier $\alpha \in [0, \infty]$,

$$\mu(\{x | g(x) \geq \alpha\}) \leq \mu(\{x | f(x) \geq \alpha\} \cup \{x | f(x) \neq g(x)\}) = \mu(\{x | f(x) \geq \alpha\})$$

Por simetría, tenemos que $\mu(\{x | f(x) \geq \alpha\}) = \mu(\{x | g(x) \geq \alpha\})$ y por lo tanto ambas integrales coinciden, porque ambos α-cortes son iguales.

Hemos construido así funciones f y g que satisfacen $\mu(\{x | f(x) \neq g(x)\}) = \mu(F - E) \leq \mu(F) = 0$. O, equivalentemente, $f = g$ a.e. Lo cual implicaría que $\fint f \, \mathrm{d}\mu = \fint g \, \mathrm{d}\mu$, pero $\fint f \, \mathrm{d}\mu = a \wedge \mu(E) = \mu(E)$ y $\fint g \, \mathrm{d}\mu = a \wedge \mu(E \cup F) = a \neq \mu(E)$. Lo cual resulta contradictorio.

Del teorema anterior se deduce que si μ es nula-aditiva entonces $\fint_A f \, \mathrm{d}\mu = \fint_A g \, \mathrm{d}\mu$ cuando $f = g$ a.e. en A y, además, cualquiera sea $f \in \mathbf{F}$, $\fint_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \fint_A f \, \mathrm{d}\mu$ para $A, B \in \mathscr{F}$, con $\mu(B) = 0$.

Definición 4.2.3 *Si* $\{f_n\}_n \subset \mathbf{F}$ *y* $f \in \mathbf{F}$*, decimos que* $\{f_n\}_n$ **converge difusamente en media** *a* f *si* $\mathrm{lím}_n \fint |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$

Teorema 4.2.4 *La convergencia difusamente en media es equivalente a la convergencia en medida en espacios de medida difusa.*

Prueba: Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$, entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 : \mu(\{x || f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\}) < \varepsilon$ cuando $n \geq n_0$. Por lo tanto, tenemos que $\fint |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$. Lo cual indica que $\{f_n\}_n$ converge difusamente en media a f. Por su parte, si $f_n \xrightarrow{\mu} f$ no fuese válida, entonces $\exists\, \varepsilon > 0, \delta > 0, \{n_i\}_i : \mu(\{x || f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} > \delta$ para cualquier n_i. De la definición de integración difusa, obtenemos

$$\fint |f_{n_i} - f| \, \mathrm{d}\mu \geq \varepsilon \wedge \mu(\{x || f_{n_i}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \geq \varepsilon \wedge \delta > 0$$

para cualquier $\{n_i\}_i$. Así, $\{f_n\}_n$ no converge difusamente en media a f.

4.3. Teoremas de convergencia de secuencias de integrales difusas

En la teoría de la medida convencional, dadas ciertas condiciones, si una secuencia de funciones medibles converge a una cierta función medible, entonces la secuencia integral converge a la integral de la función límite. Para el caso de la medida difusa, existen muchos teoremas de esta índole también.

Para todos ellos, tomamos $\{f_n\}_n \subset \mathbf{F}, f \in \mathbf{F}$ y usamos $\searrow$, $\nearrow$, y $\to$ para denotar la convergencia decreciente, decreciente y convergencia para secuencias de funciones y números. Además, extendemos el concepto de corte-α mediante $F_\alpha^n = \{x|f_n(x) \geq \alpha\}$ y $F_{\alpha^+}^n = \{x|f_n(x) > \alpha\}$.

Antes de analizar la convergencia, debemos introducir el siguiente lema:

Lema 4.3.1 *Si $f_n \searrow f$, entonces $F_\alpha^n \searrow \bigcap_{n=1}^\infty F_{\alpha^+}^n = F_\alpha$ y $F_{\alpha^+} \subset F_{\alpha^+}^n \searrow \bigcap_{n=1}^\infty F_{\alpha^+}^n \subset F_\alpha$. Del mismo modo, si $f_n \nearrow f$, entonces $F_{\alpha^+}^n \nearrow \bigcup_{n=1}^\infty F_{\alpha^+}^n = F_{\alpha^+}$ y $F_\alpha \supset F_\alpha^n \nearrow \bigcup_{n=1}^\infty F_\alpha^n \supset F_{\alpha^+}$.*

Prueba: Veamos la validez del lema para $f_n \searrow f$. Es decir, $f_n \geq f$ y $\forall x \in X$, $x \in F_{\alpha^+} \Rightarrow f(x) > \alpha \Rightarrow f_n(x) > \alpha \Rightarrow x \in F_{\alpha^+}^n$. Así tenemos que $F_{\alpha^+} \subset F_{\alpha^+}^n$. Similarmente $\{F_{\alpha^+}^n\}_n$ es no-creciente, entonces $F_{\alpha^+}^n \searrow \bigcap_{n=1}^\infty F_{\alpha^+}^n$. Por lo tanto,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\alpha^+}^n \Rightarrow \forall n,\, x \in F_{\alpha^+}^n \Rightarrow \forall n, f_n(x) > \alpha \Rightarrow f(x) \geq \alpha \Rightarrow f(x) \in F_\alpha$$

Por ende, $\bigcap_{n=1}^\infty F_{\alpha^+}^n \subset F_\alpha$.

Teorema 4.3.2 *Si $A \in \mathscr{F}$, $f_n \searrow f$ en A y $\exists\, n_0 : \mu(\{x|f_{n_0}(x) > ⨍_A f \,\mathrm{d}\mu\} \cap A) < \infty$ o si $f_n \nearrow f$, entonces*

$$\lim_n ⨍_A f_n \,\mathrm{d}\mu = ⨍_A f \,\mathrm{d}\mu$$

Prueba: Consideremos $A = X$ y asumamos que $f_n \searrow f$ con n_0 tal que $\mu(\{x|f_{n_0}(x) > c\}) < \infty$. Si $⨍ f \,\mathrm{d}\mu = \infty$, por monotonía de la integral difusa, $⨍ f_n \,\mathrm{d}\mu \geq ⨍ f \,\mathrm{d}\mu = \infty$.
En el caso en que $⨍ f \,\mathrm{d}\mu < \infty$, entonces $⨍ f_n \,\mathrm{d}\mu \geq ⨍ f \,\mathrm{d}\mu$ cualquiera sea n. Por lo que se deduce que $\lim_n ⨍ f_n \,\mathrm{d}\mu \geq c$.
Por el absurdo probaremos lo que resta del teorema: partimos de la suposición de que $\lim_n ⨍ f_n \,\mathrm{d}\mu > ⨍ f \,\mathrm{d}\mu$. Evidentemente, $\exists\, c' > ⨍ f \,\mathrm{d}\mu : \lim_n ⨍ f_n \,\mathrm{d}\mu > c'$ y, por ello, $⨍ f_n \,\mathrm{d}\mu > c'$. Por eso, sabemos que $\mu(F_{c'}^n) > c'$ cualquiera sea n. Como $\exists\, n_0 : \mu(F_{c'}^{n_0}) = \mu(\{x|f_{n_0}(x) \geq c'\}) \leq \mu(\{x|f_{n_0}(x) \geq ⨍ f \,\mathrm{d}\mu\}) < \infty$. Por el lema anterior, $\mu(F_c') = \lim_n \mu(F_{c'}^n) \geq c'$. Ahora, sabemos que $⨍ f \,\mathrm{d}\mu \geq c' > ⨍ f \,\mathrm{d}\mu$, lo cual resulta contradictorio. Es por ello que obtenemos

$$\lim_n ⨍ f_n \,\mathrm{d}\mu = ⨍ f \,\mathrm{d}\mu$$

Como consecuencia del teorema anterior, se obtienen los siguientes corolarios.

Corolario 4.3.3 *Si $A \in \mathscr{F}$, $f_n \searrow f$ en A y existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{R}$ que satisface $c \leq ⨍_A f \,\mathrm{d}\mu$ tal que $\mu(\{x|f_{n_0}(x) > c\} \cap A) < \infty$, entonces*

$$⨍_A f_n \,\mathrm{d}\mu \searrow ⨍_A f \,\mathrm{d}\mu$$

Corolario 4.3.4 *Si $f_n \searrow f$ y μ es finita, entonces*

$$⨍_A f_n \,\mathrm{d}\mu \searrow ⨍_A f \,\mathrm{d}\mu$$

Corolario 4.3.5 *Si μ es nula-aditiva, entonces*

1. *Si* $f_n \searrow f$ *a.e. y existe* n_0 *y* $c < \fint f \, \mathrm{d}\mu$ *tal que* $\mu(\{x | f_{n_0}(x) > c\}) < \infty$*, entonces* $\fint f_n \, \mathrm{d}\mu \searrow \fint f \, \mathrm{d}\mu$.
2. *Si* $f_n \nearrow f$ *a.e., entonces* $\fint f_n \, \mathrm{d}\mu \nearrow \fint f \, \mathrm{d}\mu$.

Ya hemos visto la convergencia creciente o decreciente para las integrales; ahora haremos incapié en la convergencia estricta de las integrales.

Teorema 4.3.6 *Si* $A \in \mathscr{F}$ *y* $\forall x \in A, f(x) = \underline{\lim}_n f_n(x)$*. Entonces*

$$\fint_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_n \fint_A f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Prueba: Sea $g_n(x) = \inf_{i \geq n} f_i(x)$. En tal caso, $g_n \nearrow f$ en A. Por el teorema anterior, $\lim_n \fint_A g_n \, \mathrm{d}\mu = \fint_A f \, \mathrm{d}\mu$. Como $g_n \leq f_n$, entonces $\fint_A g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \fint_A f_n \, \mathrm{d}\mu$ y, por lo tanto, $\lim_n \fint_A g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_n \fint_A f_n \, \mathrm{d}\mu$. Finalmente, obtenemos $\fint_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_n \fint_A f_n \, \mathrm{d}\mu$.

Teorema 4.3.7 *Si* $A \in \mathscr{F}$*,* $f_n \to f$ *en* A *y existen* n_0 *y* $c \leq \fint_A f \, \mathrm{d}\mu$ *tal que* $\mu(\{x | \sup_{n \geq n_0} f_n \geq c\} \cap A) < \infty$*, entonces*

$$\fint_A f_n \, \mathrm{d}\mu \to \fint_A f \, \mathrm{d}\mu$$

Prueba: Asumimos que $A = X$ y tomemos $h_n = \sup_{i \geq n} f_i$ y $g_n = \inf_{i \geq n} f_i$. Luego, h_n y g_n son medibles y $h_n \searrow f$ y $g_n \nearrow f$. Como $g_n \leq f_n \leq h_n$, obtenemos $\fint g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \fint f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \fint h_n \, \mathrm{d}\mu$ y luego,

$$\lim_n \fint g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}_n \fint f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \overline{\lim}_n \fint f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_n \fint h_n \, \mathrm{d}\mu$$

Además, $\mu(\{x | h_{n_0}(x) > c\}) < \infty$ cuando $c < \fint f \, \mathrm{d}\mu$. De ello se deduce que

$$\lim_n \fint g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \fint h_n \, \mathrm{d}\mu = \fint f \, \mathrm{d}\mu$$

Y así,

$$\underline{\lim}_n \fint f_n \, \mathrm{d}\mu = \overline{\lim}_n \fint f_n \, \mathrm{d}\mu = \fint f \, \mathrm{d}\mu$$

Como resultado de los teoremas anteriores, siguen los siguientes teorema y corolario.

Teorema 4.3.8 μ *es nula-aditiva si y sólo si* $(A \in \mathscr{F}, f_n \xrightarrow{a.e.} f$ *en* A *y existen* n_0 *y* $c \leq \fint_A f \, \mathrm{d}\mu$ *tal que* $\mu(\{x | \sup_{n \geq n_0} f_n \geq c\} \cap A) < \infty) \Rightarrow \fint_A f_n \, \mathrm{d}\mu \to \fint_A f \, \mathrm{d}\mu$.

Corolario 4.3.9 *Si* μ *es finita y subaditiva y* $f_n \xrightarrow{a.e} f$*, entonces*

$$\fint f_n \, \mathrm{d}\mu \to \fint f \, \mathrm{d}\mu$$

El más interesante de los teoremas de convergencia para medidas difusas es para funciones medibles que convergen en medida. A continuación lo enunciamos y probamos.

Teorema 4.3.10 *Teorema de convergencia en medida:*
μ es autocontinua si y sólo si $(A \in \mathscr{F}, \{f_n\} \subset \mathbf{F}, f \in \mathbf{F}$ y $f_n \xrightarrow{\mu} f$ en $A) \Rightarrow \fint_A f_n \, \mathrm{d}\mu \to \fint_A f \, \mathrm{d}\mu$.

Prueba: ($\Rightarrow$) Para todo $B \in \mathscr{F}$ y $\{B_n\}_n \subset \mathscr{F}$ con $\mu(B_n) \to 0$, probaremos que $\mu(B \cup B_n) \to \mu(B)$. Sólo haremos la prueba para $\mu(B) < \infty$. Sea $a > \mu(B)$, y

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases} \qquad f_n(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in B \cup B_n \\ 0 & \text{si } x \notin B \cup B_n \end{cases}$$

Entonces, cualquiera sea $\varepsilon > 0$, tenemos que $\{x||f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset B_n$. Así, $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Ahora bien, por la hipótesis, tenemos que $\fint f_n \, \mathrm{d}\mu \to \fint f \, \mathrm{d}\mu$. Y como $\fint f_n \, \mathrm{d}\mu = a \wedge \mu(B \cup B_n)$ y $\fint f \, \mathrm{d}\mu = a \wedge \mu(B) = \mu(B)$, obtenemos $\mu(B \cup B_n) \to \mu(B)$.

($\Leftarrow$) Consideremos que $A = X$. μ es autocontinua, $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y sea $c = \fint f \, \mathrm{d}\mu$. Haremos la prueba primero para el caso en que $c < \infty$: para cada $\varepsilon > 0$, tenemos que $\mu(F_{c+\varepsilon}) \leq c$ y $c \leq \mu(F_{c-\varepsilon})$.
Por un lado, tenemos que $F^n_{c+2\varepsilon} \subset F_{c+\varepsilon} \cup \{x||f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Y como $f_n \xrightarrow{\mu} f$, obtenemos $\mu(\{x||f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0$. A partir de la autocontinuidad por arriba, tenemos $\mu(F_{c+\varepsilon} \cup \{x||f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to \mu(F_{c+\varepsilon})$.
Por lo tanto, existe n_0 tal que, cuando $n \geq n_0$ vale

$$\begin{aligned} \mu(F^n_{c+2\varepsilon}) &\leq \mu(F_{c+\varepsilon} \cup \{x||f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \\ &\leq \mu(F_{c+\varepsilon}) + \varepsilon \\ &\leq c + \varepsilon \\ &\leq c + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto se deduce que $\fint f_n \, \mathrm{d}\mu \leq c + 2\varepsilon$, para los $n \geq n_0$.
Por el otro lado, para probar la otra inecuación, consideramos que $c > 0$. Para cada $\varepsilon \in (0, c/2)$, tenemos $F^n_{c-2\varepsilon} \supset F_{c-\varepsilon} - \{x||f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Como $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y μ es autocontinua por abajo, existe n'_0 que satisface que cuando $n \geq n'_0$ entonces $\mu(F^n_{c-2\varepsilon}) \geq \mu(F_{c-\varepsilon}) - \varepsilon \geq c - 2\varepsilon$. Se deduce entonces que $\fint f_n \, \mathrm{d}\mu \geq c - 2\varepsilon$ cualquiera sea $n \geq n'_0$. Luego, $\lim_n \fint f_n \, \mathrm{d}\mu$ existe y

$$\fint f_n \, \mathrm{d}\mu \to c$$

Es hora de hacer la prueba para $c = \infty$: de lema anterior, $\mu(F_\alpha) = \infty$ cualquiera sea $\alpha \in [0, \infty)$. Entonces, para $N > 0$ tenemos $\mu(F^n_N) \supset \mu(F_{N+1}) - \{x||f_n(x) - f(x)| \geq 1\}$. Como $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y μ es autocontinua por abajo, existe n_0 que, cuando $n \geq n_0$, satisface $\mu(F^n_N) \geq \mu(F_{N+1} - \{x||f_n(x) - f(x)| \geq 1\}) \geq N$. Se tiene entonces que $\fint f_n \, \mathrm{d}\mu \geq N$ cuando $n \geq n_0$. Por lo tanto se obtiene que

$$\fint f_n \, \mathrm{d}\mu \to \infty = c$$

Teorema 4.3.11 *Teorema de convergencia de f-media:*
Si $\fint f_n \, \mathrm{d}\mu \to \fint f \, \mathrm{d}\mu$ cuando $\{f_n\} \subset \mathbf{F}, f \in \mathbf{F}$ y $\{f_n\}$ converge difusamente en media a f si y sólo si μ es autocontinua.

Definición 4.3.12 *Dado un espacio de medida difusa $(X, \mathscr{F}, \mu)$ y $f \in \mathbf{F}$, decimos que f es* **integrable difusamente** *(con respecto a μ) si $\fint f \, \mathrm{d}\mu < \infty$.*

Teorema 4.3.13 *Tomemos* $\mathbf{L}^1(\mu) = \{f|f \in \mathbf{F}, f$ *es integrable difusamente con respecto a* $\mu\}, A \in \mathscr{F}$ *y* μ *autocontinua uniformemente. Si* $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *en* A*, entonces:*

1. $⨍_A f \mathrm{d}\mu = \infty \Leftrightarrow \exists\, n_0 : \forall n \geq n_0,\ ⨍_A f_n\, \mathrm{d}\mu = \infty$
2. $⨍_A f \mathrm{d}\mu < \infty \Leftrightarrow \exists\, n_0 : \forall n \geq n_0,\ ⨍_A f_n\, \mathrm{d}\mu < \infty$
3. $f \notin \mathbf{L}^1(\mu) \Leftrightarrow \exists\, n_0 : \forall n \geq n_0,\ f_n \notin \mathbf{L}^1(\mu)$
4. $f \in \mathbf{L}^1(\mu) \Leftrightarrow \exists\, n_0 : \forall n \geq n_0,\ f_n \in \mathbf{L}^1(\mu)$

Prueba: Asumimos que $A = X$. Veamos 1: Por ser μ autocontinua uniformemente, entonces es autocontinua. Además, como $f_n \xrightarrow{\mu} f$, obtenemos $⨍ f_n\, \mathrm{d}\mu \to ⨍ f\, \mathrm{d}\mu$. Por lo tanto $\exists\, n_0 : \forall n \geq n_0,\ ⨍_A f_n\, \mathrm{d}\mu = \infty$.
Para probar la recíproca, partimos de la asunción de que $⨍_A f_n\, \mathrm{d}\mu = \infty$, lo que implica que $\mu(F_{\alpha+1}) = \infty$ cualquiera sea $\alpha \in [0,\infty)$. Como $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y μ es autocontinua por abajo, existe un n_0 tal que $\mu(F_{\alpha+1} - \{x||f_n(x) - f(x)| \geq 1\}) = \infty$ cualquiera sea $\alpha \in [0,\infty)$ con $n \geq n_0$. De $F_\alpha^n \supset F_{\alpha+1} - \{x||f_n(x) - f(x)| \geq 1\}$, obtenemos que $\mu(F_\alpha^n) \geq \mu(F_{\alpha+1} - \{x||f_n(x) - f(x)| \geq 1\}) = \infty$ para $n \geq n_0$ y $\alpha \in [0,\infty)$. Luego, obtenemos que $⨍ f_n\, \mathrm{d}\mu = \infty$.

2 se puede demostrar del hecho que $⨍ f_n\, \mathrm{d}\mu \to ⨍ f\, \mathrm{d}\mu \leq \infty$.

3 y 4 se deducen de 1 y 2.

Teorema 4.3.14 *Teorema de convergencia uniforme:*
Si $A \in \mathscr{F}$ *y* $f_n \xrightarrow{u.} f$ *en* A*, entonces*

$$⨍ f_n\, \mathrm{d}\mu \to ⨍ f\, \mathrm{d}\mu$$

Prueba: Como $f_n \xrightarrow{u.} f$, tenemos que $\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n - f| \leq \varepsilon$. Luego tenemos que $n \geq n_0 \Rightarrow |⨍_A f_n\, \mathrm{d}\mu - ⨍_A f\, \mathrm{d}\mu| \leq \varepsilon$. Lo que prueba que

$$⨍ f_n\, \mathrm{d}\mu \to ⨍ f\, \mathrm{d}\mu$$

4.4. Teorema de transformación para integrales difusas

La idea que se presenta en esta sección es la transformación de una integral difusa $⨍_A f\, \mathrm{d}\mu$ en un espacio de medida $(X, \mathscr{F}, \mu)$ en otra integral difusa $⨍ g\, \mathrm{d}m$ definida en el espacio de medida de Lebesgue $([0,\infty], \overline{\mathscr{B}_+}, m)$ tomando $\overline{\mathscr{B}_+}$ la clase de los conjuntos de Borel en $[0,\infty]$ y m la medida de Lebesgue.

Teorema 4.4.1 *Siendo* $A \in \mathscr{F}$*,*

$$⨍_A f\, \mathrm{d}\mu = ⨍ \mu(A \cap F_\alpha)\, \mathrm{d}m$$

Prueba: Tomemos $g(\alpha) = \mu(A \cap F_\alpha)$. $g(\alpha)$ resulta decreciente con respecto a α. Si definimos $\mathscr{B}_\alpha = \{E | \sup E = \alpha, E \in \overline{\mathscr{B}_+}\}$ entonces $\{\mathscr{B}_\alpha | \alpha \in [0,\infty]\}_\alpha$ es una partición de $\overline{\mathscr{B}_+}$ y $\sup_{E\in\mathscr{B}_\alpha} m(E) = \alpha$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\fint \mu(A\cap F_\alpha)\, \mathrm{d}m &= \fint g(\alpha)\, \mathrm{d}m \\
&= \sup_{E\in\mathscr{B}_+} [\inf_{\beta\in E} g(\beta) \wedge m(E)] \\
&= \sup_{\alpha\in[0,\infty]} \sup_{E\in\mathscr{B}_\alpha} [\inf_{\beta\in E} g(\beta) \wedge m(E)]
\end{aligned}
$$

Por ser $g(\beta)$ decreciente, tenemos que $g(\alpha-) \geq \inf_{\beta\in E} g(\beta) \geq g(\alpha)$ para $E \in \mathscr{B}_\alpha$, donde $g(\alpha-) = \lim_{\beta\to\alpha-} g(\beta)$. Entonces, por un lado tenemos que

$$
\begin{aligned}
\fint \mu(A\cap F_\alpha)\, \mathrm{d}m &\geq \sup_{\alpha\in[0,\infty]} [g(\alpha) \wedge \sup_{E\in\mathscr{B}_\alpha} m(E)] \\
&= \sup_{\alpha\in[0,\infty]} [g(\alpha) \wedge \alpha] \\
&= \sup_{\alpha\in[0,\infty]} [\alpha \wedge \mu(A\cap F_\alpha)] \\
&= \fint_A f\, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}
$$

y, por el otro lado, si $\varepsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
\fint \mu(A\cap F_\alpha)\, \mathrm{d}m &\leq \sup_{\alpha\in[0,\infty]} [g(\alpha-) \wedge \sup_{E\in\mathscr{B}_\alpha} m(E)] \\
&= \sup_{\alpha\in[0,\infty]} [g(\alpha-) \wedge \alpha] \\
&\leq \sup_{\alpha\in[\varepsilon,\infty]} [\alpha \wedge g(\alpha-)] \vee \varepsilon \\
&\leq \sup_{\alpha\in[\varepsilon,\infty]} [\alpha \wedge g(\alpha-\varepsilon)] \vee \varepsilon \\
&\leq \sup_{(\alpha-\varepsilon)\in[0,\infty]} [(\alpha-\varepsilon) \wedge g(\alpha-\varepsilon)] + \varepsilon \\
&= \sup_{(\alpha-\varepsilon)\in[0,\infty]} [(\alpha-\varepsilon) \wedge \mu(A\cap F_{\alpha-\varepsilon})] + \varepsilon \\
&= \fint_A f\, \mathrm{d}\mu + \varepsilon
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\fint \mu(A\cap F_\alpha)\, \mathrm{d}m = \fint_A f\, \mathrm{d}\mu
$$

4.5. Medidas difusas definidas por integrales difusas

Así como las integrales pueden definir medidas clásicas, las integrales difusas definen medidas difusas. En esta sección expandimos el tema.

Teorema 4.5.1 *Si $(X,\mathscr{F},\mu)$ es un espacio de medida difusa y $f \in \mathbf{F}$, entonces si definimos $\nu(A) = ⨍_A f\, \mathrm{d}\mu$ para $A \in \mathscr{F}$, ν resulta una medida difusa semicontinua por abajo en $(X,\mathscr{F})$. En el caso en que μ sea finita, entonces ν es una medida difusa finita en $(X,\mathscr{F})$.*

Prueba: $\nu(\emptyset) = 0$ y ν es monótona. Entonces, lo único que resta por ver es que ν es continua por abajo. Sea $\{E_n\}_n$ una secuencia creciente en $\mathscr{F}$, con $E_n \nearrow E \in \mathscr{F}$. Entonces, tenemos que $f.\chi_{E_n} \nearrow f.\chi_E$. Además,

$$\lim_n \nu(E_n) = \lim_n ⨍_{E_n} f\, \mathrm{d}\mu = \lim_n ⨍ f.\chi_{E_n}\, \mathrm{d}\mu = ⨍ f.\chi_E\, \mathrm{d}\mu = ⨍_E f\, \mathrm{d}\mu = \nu(E)$$

Ahora bien, si μ es finita, tomando $\{E_n\}_n \subset \mathscr{F}$ con $E_n \searrow E \in \mathscr{F}$, puesto que $f.\chi_{E_n} \searrow f.\chi_E$, obtenemos $\lim_n \nu(E_n) = \nu(E)$. Por ende ν es autocontinua por arriba y ν resulta una medida difusa.
El hecho que ν sea finita resulta de $\nu(X) = ⨍ f\, \mathrm{d}\mu \leq \mu(X) < \infty$.

Teorema 4.5.2 *Si $(X,\mathscr{P}(X),\pi)$ es un espacio de medida de posibilidad y $f_n \xrightarrow{\pi} f$ en A, entonces*

$$⨍_A f_n\, \mathrm{d}\pi \to ⨍_A f\, \mathrm{d}\pi$$

Corolario 4.5.3 *Si $(X,\mathscr{P}(X),\pi)$ es un espacio de medida de posibilidad y $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ en A, entonces*

$$⨍_A f_n\, \mathrm{d}\pi \to ⨍_A f\, \mathrm{d}\pi$$

Capítulo 5

Aplicaciones

Hemos visto los fundamentos teóricos más trascendentes de la teoría de la medida difusa. El objetivo del presente apartado es la de presentar ciertos ámbitos en los que se aplica tal teoría. La misma tiene un gran espectro de usos.

El concepto de medida clásica es uno de los más importantes de la matemática. Incluso, es crucial en ciertos ámbitos como ser en Probabilidad. De hecho, Andrey Kolmogorov en [2] hizo la formulación rigurosa de la Probabilidad basada en las medidas. Sin desmerecer esta teoría, la limitación que presenta la estricta aditividad restringe su aplicación en ciertos ámbitos. Algunos problemas del mundo real, distan bastante de la perfección que imponen las medidas convencionales. Es ahí cuando se hacen fuertes las medidas difusas. Inteligencia artificial, teoría de juegos, psicología, procesamiento de imágenes, minería de datos, economía, son algunas de las áreas donde estas medidas no-aditivas pueden ser empleadas.

En el presente capítulo, introducimos dos ejemplos de aplicaciones de la teoría. El primero de ellos, referido a la segmentación de imágenes. El segundo, por mi interés en el área de las imágenes, sobre el desentrelazado en videos.

5.1. Determinación automática de umbrales de histogramas

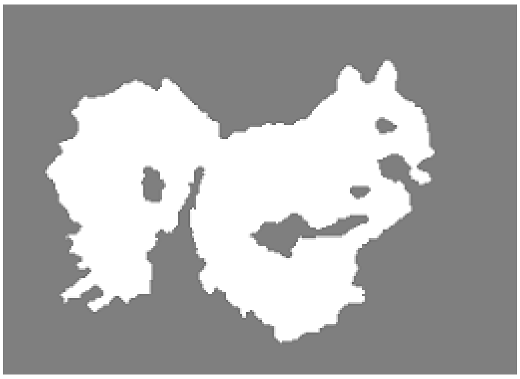
En la presente sección se analiza y estudia el artículo “Authomatic histogram threshold using fuzzy measures”, de Nuno Vieira Lopes et al. [3]. La misma introduce una aplicación de la medida difusa para la segmentación de imágenes.

5.1.1. Motivación

En el área de visión artificial, se conoce como “segmentación de imágenes” al proceso de descomponer una imagen digital en varios objetos o regiones. En términos generales, se intenta simplificar la imagen original en otras más fácil de analizar. Es decir, se produce cierta pérdida de información para facilitar su interpretación. La segmentación puede hacerse para detectar los límites de objetos en la imagen o para localizar tales objetos. En la figura 5.1 se grafica el resultado de aplicar un algoritmo de segmentación sobre una imagen conteniendo flores.

Al ser un problema tan general, históricamente se han desarrollado diferentes métodos. El reporte [5] analiza algunas de las opciones para hacerlo, evaluándolas objetivamente.

(a) Imagen original



(b) Resultado de la segmentación

Figura 5.1: Segmentación de imágenes

En particular, en este trabajo se analiza la segmentación para imágenes monocromáticas. Y más específicamente, la segmentación se basa en la determinación de un umbral del histograma de niveles de grises de la imagen para dividirla en dos regiones: objeto y fondo. Lo que haremos es definir ese umbral para toda la imagen, aquellos píxeles por debajo del umbral serán asignados a una región y los restantes a la otra. En [8] se han analizado en detalle los distintos métodos para la determinación de umbrales.

Las imágenes con un objeto y un fondo suelen caracterizarse por tener histogramas con dos picos separados por un valle. A tales histogramas se los llama histogramas bimodales . Para ellos, el umbral está ubicado en el valle. Pero cuando el histograma no exhibe una separación clara, las técnicas habituales para definirlo no funcionan adecuadamente. La teoría de la medida difusa provee herramientas para hacerlo.

5.1.2. Definiciones

Asumimos que A es un conjunto difuso con f_A función de pertenencia asociada. En [15], Zadeh crea una función para modelar el grado de pertenencia, llamada "función-S", definida por:

$$f_{AS}(x) = S(x;a,c) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 2(\frac{x-a}{c-a})^2 & a \leq x \leq b \\ 1-2(\frac{x-a}{c-a})^2 & b \leq x \leq c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

con $b = \frac{a+c}{2}$. De tal forma, $f_{AS}(b) = 0{,}5$. Esta función se utiliza para representar al conjunto de puntos brillantes, es decir, mientras más claro o cercano al blanco sea el valor del píxel, mayor el grado de pertenencia. Opuestamente, agregamos la "función-Z", definida por

$$f_{AZ}(x) = Z(x;a,c) = 1 - S(x;a,c)$$

Ahora agregamos el concepto de **índice de difusión** para comparar un conjunto difuso con respecto al conjunto clásico más cercano. Un conjunto difuso A' se llama conjunto clásico de A si

$$f_{A'}(x) = \begin{cases} 0 & f_A(x) < 0{,}5 \\ 1 & f_A(x) \geq 0{,}5 \end{cases}$$

Y su índice de difusión está dado por la norma-k normalizada entre A y A', es decir:

$$\psi_k(A) = \frac{2}{n^{1/k}}(\sum_{i=1}^{n} |f_A(x_i) - f_{A'}(x_i)|^k)^{1/k}$$

con $n = |A|$. Este índice muestra la ambigüedad que tienen los elementos de A.

5.1.3. Método a mejorar

El trabajo que se está analizando está basado en el perfeccionamiento de un método basado en medidas difusas para encontrar el valor del umbral en un histograma de una imagen monocromática, definido en [11]. El método propuesto, en vez de lidiar con la búsqueda del umbral en el valle mediante el mínimo de una función, incorpora conceptos de la teoría de los conjuntos difusos para manejar los límites de los objetos. El problema es que presenta limitaciones a la hora de determinar las semillas para el cálculo de esos conjuntos difusos. Tal limitación surge de la asunción de que existe un significativo contraste entre los objetos y el fondo.

La idea es la siguiente. Consideremos que el nivel de grises de la imagen constituye nuestro universo X. Tenemos por objetivo determinar los subconjuntos clásicos de los objetos O y el fondo F. Inicialmente, disponemos de conjuntos difusos B y W, asociados a intervalos en el comienzo y final del histograma. La función de pertenencia de estos conjuntos difusos serán la función-S y la función-Z, con parámetros a definir. Para objetos oscuros, tendremos $B \subset O$ y $W \subset F$. Si los objetos fuesen claros, $B \subset F$ y $W \subset O$. Un ejemplo de los conjuntos B y W, basados en el histograma de la imagen anterior de las flores se aprecia en la figura 5.2. Al conjunto de puntos x donde $B \cap W(x) = 0$, le llamamos región difusa.

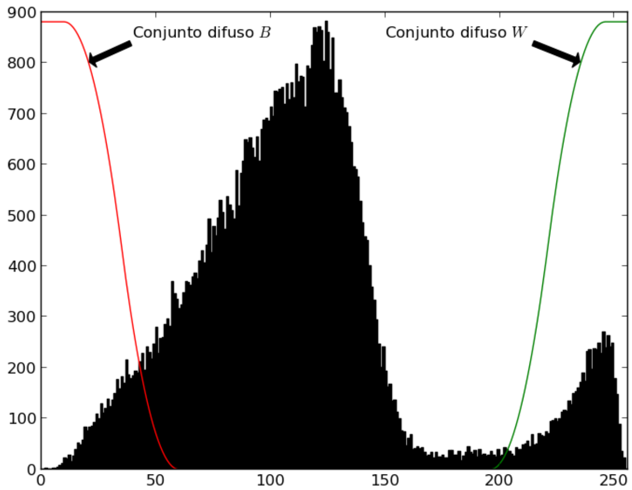


Figura 5.2: Conjuntos difusos B y W en el histograma de una imagen

Los subconjuntos B y W son una semilla para iniciar el proceso de clasificación. Éste consiste en la determinación de cualquier punto x_i en la región difusa. Luego, se determina el índice de difusión para los conjuntos $B \cup \{x_i\}$ y $W \cup \{x_i\}$. El punto x_i pasa a formar parte del conjunto con el menor índice de difusión (lo cual significa que tiene mayor similitud). El procedimiento se aplica a todos los puntos de la región difusa para así obtener la segmentación.

Antes del cómputo de los índices de difusión, éstos deben ser normalizados para que los conjuntos iniciales tengan igual índice de difusión. La normalización se hace mediante $\alpha = \frac{\psi(W)}{\psi(B)}$. Es decir, debemos comparar $\psi(W \cup \{x_i\})$ con $\alpha\psi(B \cup \{x_i\})$.

5.1.4. Método perfeccionado

El trabajo que se está analizando, propone una mejora para el método descripto en la subsección 5.1.3. El problema principal que se le adjudica a tal método es que, manualmente, se deben definir los subconjuntos que hacen de semilla. La idea propuesta es la de definir automáticamente esos subconjuntos. Además, ellos serán lo suficientemente grandes como para albergar un **número mínimo de píxeles** al comienzo del algoritmo. Definimos al mínimo por:

$$\mathrm{MinPix}_{B\mathrm{seed}(W\mathrm{seed})} = P_1 \sum_{i=0(128)}^{127(255)} h(x_i)$$

donde $h(x_i) = |\{(i, j)\ :\ \mathrm{Imagen}[i, j] = x_i\}|$. Más adelante definiremos la variable $P_1 \in [0, 1]$.

En imágenes con poco contraste, el método presenta fallas puesto que la región inicial puede contener pocos píxeles. Se procede a realizar una ecualización del histograma de la siguiente manera. Supongamos que el número de píxeles en los intervalos $[0, 127]$ ó $[128, 255]$ es menor que el valor $P_{\mathrm{MIN}} = P_2 MN$, donde MxN es la dimensión de la imagen y $P_2 \in [0, 1]$ (nuevamente, definimos P_2 más adelante). En tal caso, el histograma debe ser ecualizado. La ecualización se realiza a partir de la distribución acumulada. La probabilidad de ocurrencia del nivel de gris x_i se aproxima por $p(x_i) = \frac{h(x_i)}{MN}$. Así, la distribución acumulada será:

$$T(x_i) = \sum_{k=0}^{i} p(x_k) = \sum_{k=0}^{i} \frac{h(x_i)}{MN}$$

Por lo tanto, se calcula el histograma de la imagen cuyo valor de gris x_i se transforma en $T(x_i)$.

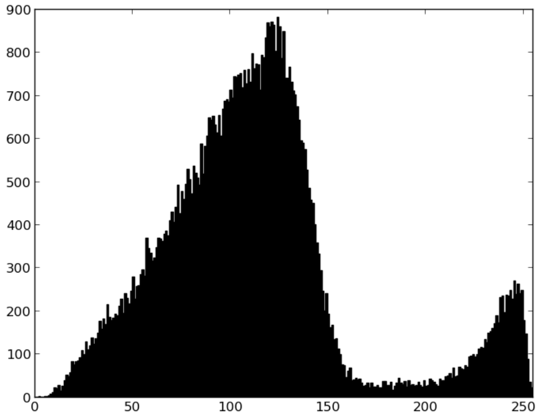
Para determinar los parámetros P_1 y P_2 se usó una aproximación estadística. Se emplearon 30 imágenes. Se seleccionaron imágenes con una distribución significativa de los píxeles sobre todo el intervalo $[0, 255]$ (así no es necesaria una ecualización del histograma). Para cada una de las imágenes, se seleccionó “manualmente” el parámetro P_1 de forma tal que el índice de difusión de los conjuntos W y B sea creciente. En base a la experiencia, se obtiene un P_1 medio de 0,3964 con distribución estándar de 0,1337.

Similar es la determinación de P_2, aunque se usan imágenes con poco contraste y el valor de P_1 anterior. Mediante “prueba y error” se determina el valor de P_2 que asegure que el método converge. Así, se obtiene un P_2 medio de 0,207 con distribución estándar de 0,143.

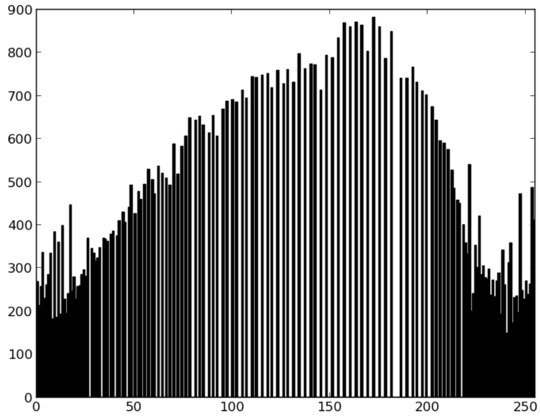
En la figura 5.3 se observa el resultado de la ecualización de la imagen de las flores. Debajo, se reflejan ambos histogramas. Se aprecia cómo se mejora la distribución de los valores sobre todo el dominio de valores de la escala de grises.

(a) Imagen original

(b) Imagen ecualizada



(c) Histograma de la imagen original



(d) Histograma de la imagen ecualizada

(e) Imagen original

(f) Imagen segmentada

Figura 5.3: Ecualización y segmentación de la imagen

5.2. Desentrelazado de Videos

Usaremos el artículo “Fuzzy Metrics Application in Video Spatial Deinterlacing”, de Julio Riquelme et al. [6] para describir el uso de medidas difusas para el desentrelazado de videos. Así veremos una nueva aplicación de la medida difusa.

5.2.1. Motivación

Las imágenes de video generan una sensación de movimiento basada en la persistencia de la retina y su relación con los objetos móviles: si exponemos un conjunto de imágenes fijas al ojo humano, interponiéndolas rápidamente, se produce la sensación de un movimiento continuo. El fenómeno se debe a que las imágenes que llegan a la retina no desaparecen bruscamente sino que se desvanecen paulatinamente. Por ello, una sucesión rápida de imágenes se interpreta como una imagen en movimiento. Por esta sensación, los dibujos animados han sido exitosos.

En el cine, la sucesión de imágenes se realiza con una frecuencia de 24 por segundo (24 Hz) con un intervalo de oscuridad entre ellas. Tal sucesión motiva un cierto parpadeo perceptible en algunas ocasiones. Esto se puede evitar aumentando la cadencia de las imágenes. Pero el aumento motivaría rollos más largos. Para solucionar este problema, se recurre a la proyección de cada fotograma dos o tres veces.

La exploración entrelazada (interlacing, en inglés) es un sistema de captación y representación de imágenes utilizado en teledifusión analógica y digital. Su objetivo es el de comprimir la señal y, a la vez, reducir los efectos de parpadeo. El método consiste en tomar imágenes de las líneas pares por un lado, y de líneas impares por el otro. Llamamos a estos conjuntos como “campos” o “semi-imágenes”. Inicialmente se expone el campo impar y, n milésimas de segundo después, el campo par. La adición de ambos genera un cuadro. En su formación aparece un error temporal de n milésimas de segundo, ya que el cuadro contiene información desplazada en el tiempo.

Naturalmente, aparece el desentrelazado como el proceso de conversión de video entrelazado en una forma no entrelazada, es decir, se eliminan los dos campos para disponer únicamente de un cuadro. El desentrelazado ha sido objeto de estudio durante décadas y se han desarrollado algoritmos muy complejos para lograrlo.

5.2.2. Método propuesto

El algoritmo es uno de ventana. Para cada píxel (i, j) cuyo dato sea faltante (por ser (i, j) píxel del otro campo), se define una ventana W en la cual se procesará. Es decir, el algoritmo dependerá sólo de aquellos puntos dentro de la ventana. Un ejemplo de una ventana lo vemos en la figura 5.4. En este caso, el dato faltante está en la posición (i, j) (y en las otras líneas con igual paridad que i).

Dentro de la ventana, se ordenarán los vectores de color de forma tal que aquél que sea más similar (cromáticamente) y espacialmente cercano con respecto al resto de los píxeles en la ventana W será el valor que se le adjudique al píxel faltante. A continuación se definen el algoritmo.

5.2.2.1. Métricas Difusas

A continuación definiremos el concepto de métrica difusa. A partir de ellas, podremos construir medidas difusas. La referencia principal de esta subsección es [7].

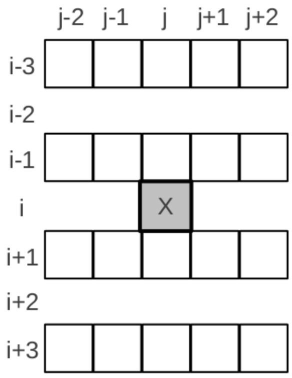


Figura 5.4: Ventana para el desentrelazado del píxel en la posición (i, j)

Definición 5.2.1 *Un operador binario* $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *es una* **norma-t continua** *si satisface:*

1. $*$ *es asociativa y conmutativa;*
2. $*$ *es continua;*
3. $a * 1 = a$ *cualquiera sea* $a \in [0,1]$*;*
4. $a * b \leq c * d$ *siempre y cuando* $a \leq c$ *y* $b \leq d$*, cualesquiera sean* $a, b, c, d \in [0,1]$.

Usamos la definición anterior como operador para una métrica difusa:

Definición 5.2.2 *Un* **espacio métrico difuso** *es un triple* $(X, M, *)$*, donde* X *es un conjunto,* $*$ *es una norma-t continua y* M *es un conjunto difuso,* $M \subset X \times X \times (0, \infty)$*, cuya función de pertenencia satisface para* $x, y, z \in X$ *y* $s, t > 0$*:*

1. $M(x, y, t) > 0$*;*
2. $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$*;*
3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$*;*
4. $M(x, y, s) * M(y, z, t) \leq M(x, z, s + t)$*;*
5. $M(x, y, .) : (0, \infty) \to (0, 1]$ *es continua.*

Tomemos (X, d) un espacio métrico clásico y definamos como $a * b = ab$, para $A, b \in [0,1]$. Entonces $M \subset XxXx[0, \infty]$ cuya función de pertenencia esté definida por $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x,y)}$ constituye un conjunto difuso tal que $(X, M, *)$ es una métrica difusa.

Veamos que M_d satisface las propiedades anteriores. Todas las pruebas son triviales, quizás la desigualdad triangular. Para esta última, introduciremos un lema.

Lema 5.2.3 *Si* (X, d) *es un espacio métrico y* $s, t > 0$*, entonces tenemos que*

$$\frac{d(x,z)}{(s+t)} \leq \text{máx}\{\frac{d(x,y)}{s}, \frac{d(y,z)}{t}\}$$

Prueba: Los casos en que $d(x,z) < d(x,y)$ o $d(x,z) < d(y,z)$ son triviales. Veamos el caso en que $d(x,z) > d(x,y)$ y $d(x,z) > d(y,z)$. Supongamos entonces que $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$ (el caso en que $d(x,z) < d(x,y) + d(y,z)$ será una consecuencia).
Tomemos $\alpha \in (0,1)$ tal que $d(x,y) = \alpha d(x,z)$ y, por consecuencia, $d(y,z) = (1-\alpha)d(x,z)$. Entonces la prueba se limita a

$$\frac{1}{s+t} \leq \text{máx}\{\frac{\alpha}{s}, \frac{1-\alpha}{t}\}$$

Tomamos las funciones $f(\alpha) = \frac{t}{\alpha}$ (estrictamente decreciente) y $g(\alpha) = \frac{s}{1-\alpha}$ (estrictamente creciente). El valor máximo que alcanza $\text{mín}\{\frac{t}{\alpha}, \frac{s}{1-\alpha}\}$ se obtiene cuando $f(\alpha) = g(\alpha)$. Es decir, $\alpha = \frac{t}{s+t}$. Entonces,

$$t+s = f(\frac{t}{s+t}) \geq \text{mín}\{\frac{t}{\alpha}, \frac{s}{1-\alpha}\}$$

Por el lema anterior, tenemos que

$$1 + \frac{d(x,z)}{s+t} \leq \text{máx}\{1 + \frac{d(x,y)}{s}, 1 + \frac{d(y,z)}{t}\}$$

O, equivalentemente,

$$\frac{(s+t)d(x,z)}{s+t} \leq \text{máx}\{\frac{s+d(x,y)}{s}, \frac{t+d(y,z)}{t}\}$$

Si calculamos las inversas,

$$\frac{s+t}{(s+t)d(x,z)} \geq \frac{1}{\text{máx}\{\frac{s+d(x,y)}{s}, \frac{t+d(y,z)}{t}\}}$$

Pero como $\text{máx}\{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\} = \frac{1}{min\{\frac{b}{a}, \frac{d}{c}\}}$,

$$\frac{s+t}{(s+t)d(x,z)} \geq \text{mín}\{\frac{s}{s+d(x,y)}, \frac{t}{t+d(y,z)}\} \geq \frac{s}{s+d(x,y)} \frac{t}{t+d(y,z)}$$

La última desigualdad sale del hecho que ambas fracciones a las que se les calcula el mínimo están en el intervalo $(0,1]$.

5.2.2.2. Nuestras Métricas

Para medir la similitud cromática entre vectores de color, usaremos los vectores RGB. Si tomamos una imagen I, y consideramos el píxel $p = (i,j)$, entonces podemos representar el color de I en la posición p por $I_p = (I_p^R, I_p^G, I_p^B)$, donde I_p^R es la intensidad del color rojo, I_p^G del verde y I_p^B del azul. Normalizando, obtenemos I'_p la cual adquiere el valor $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ en los valores monocromáticos ($I_p = (x,x,x) \Rightarrow I'_p = (\frac{x}{x\sqrt{3}}, \frac{x}{x\sqrt{3}}, \frac{x}{x\sqrt{3}})$). En la figura 5.5 se grafica la porción de esfera que representa a los vectores RGB.

La similitud cromática, se medirá a partir de la métrica M_K, definida para los vectores RGB unitarios:

$$M_K(I'_p, I'_q) = \frac{\text{mín}\{I'^R_p, I'^R_q\} + K}{\text{máx}\{I'^R_p, I'^R_q\} + K} \frac{\text{mín}\{I'^G_p, I'^G_q\} + K}{\text{máx}\{I'^G_p, I'^G_q\} + K} \frac{\text{mín}\{I'^B_p, I'^B_q\} + K}{\text{máx}\{I'^B_p, I'^B_q\} + K}$$

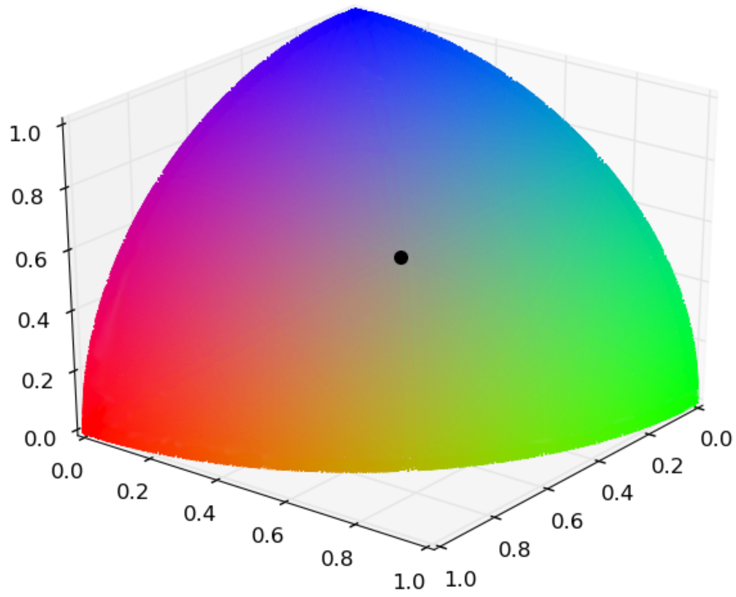


Figura 5.5: Representación gráfica de todos los vectores RGB

Es decir, cuando los valores de I'_p y I'_q sean muy próximos en las tres coordenadas (RGB), entonces la métrica M_K es próxima a 1. Pero si I'_p y I'_q

A modo de ejemplo, calculamos los valores de M_K para algunos vectores. Los mismos están representados en la esfera en la figura 5.6

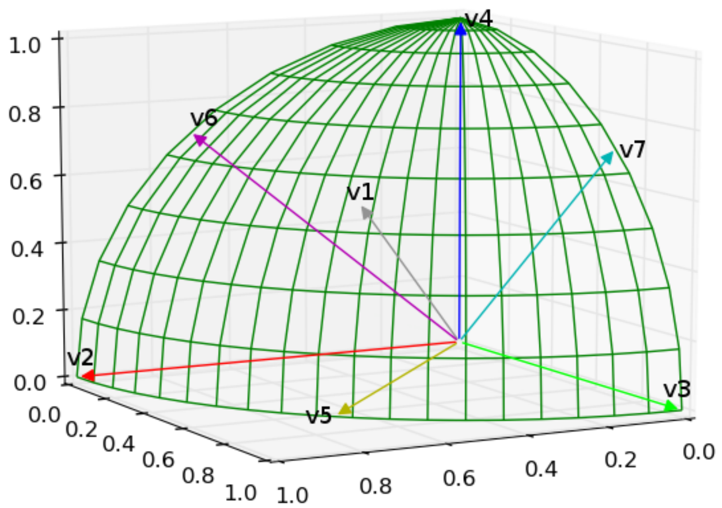


Figura 5.6: Vectores RGB para los que se calcula la métrica M_k

$M_K(v_j, v_j)$	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7
v1	1	0.69909441	0.69909441	0.69909441	0.82635382	0.82635382	0.82635382
v2	0.69909441	1	0.64	0.64	0.8	0.8	0.57769934
v3	0.69909441	0.64	1	0.64	0.8	0.57769934	0.8
v4	0.69909441	0.64	0.64	1	0.57769934	0.8	0.8
v5	0.82635382	0.8	0.8	0.57769934	1	0.72212417	0.72212417
v6	0.82635382	0.8	0.57769934	0.8	0.72212417	1	0.72212417
v7	0.82635382	0.57769934	0.8	0.8	0.72212417	0.72212417	1

Por su parte, para determinar la distancia espacial entre los píxeles, se usará la norma L_1 (recordemos que $L_1(x,y) = (x-y)^R + (x-y)^G + (x-y)^B$). A partir de ella, empleamos la métrica difusa M_{L_1}, dada por:

$$M_{L_1}(p,q,t) = \frac{t}{t + L_1(p,q)}$$

donde el parámetro t se define según la importancia que se le asigna a la distancia espacial. Cuanto t es muy grande, la métrica es prácticamente 1, mientras que si t es pequeño, se aproximará a 0.

A partir de las métricas anteriormente definidas, usamos la combinación de ambas M_{K,L_1}:

$$M_{K,L_1}(p,q,t) = M_K(p,q).M_{L_1}(p,q,t)$$

Tal métrica determina la medida difusa determinará la similitud cromática difusa (SCD) y la distancia espacial difusa (DED) entre los vectores p y q.

Como en [4], para cada píxel dentro de la ventana W, calculamos la SCD y DED al resto de los píxeles en W. Es decir, $R_p = \sum_{q \in W,\, q \neq p} M_{K,L_1}(p,q,t)$. Así, ordenamos los vectores $p \in W$ según el orden de las medidas R_q. Así, obtenemos:

$$R_{p_0} \leq R_{p_1} \leq R_{p_2} \leq \ldots R_{p_{n-1}}$$

donde $n = |W|$. Usamos la secuencia $\{p_i\}_i$, para obtener un orden sobre los vectores en la ventana W:

$$p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \cdots p_{n-1}$$

Así, se selecciona el valor de p_{n-1}, el cual es el que maximiza la SCD y DED acumulada, esto significa que p_{n-1} es el píxel más similar cromáticamente y espacialmente cercano al resto de los píxeles en W.

El método propuesto se ha comparado con el conocido EDI, ELA y sus modificaciones y para los índices de calidad que se emplean habitualmente (MAE Y PSNR), se alcanzan mejores resultados. De todas maneras, las comparaciones se hicieron sólo con “métodos de ventana”; es decir, no se analizaron otros métodos.

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo del presente trabajo, se introdujeron aspectos fundamentales de la teoría de la “Medida difusa”. Se incluyeron la definición de la medida, la noción de las funciones medibles difusamente y la integración difusa. Se postularon teoremas los cuales fueron debidamente probados y se logró relacionar las distintas propiedades de las medidas entre sí. Todos estos conceptos se detallan con un buen nivel de formalismo.

La teoría de la medida difusa ha evolucionado en los últimos años a lo que se conoce como medidas generalizadas. Estas últimas agregan muchas medidas que no fueron definidas en este trabajo. Es por ello que se recomienda el estudio del libro [13], el cual recorre muchos conceptos ajenos a este análisis.

Además, aquí se vieron aplicaciones de la teoría. Ambas estuvieron enfocadas, por una afinidad personal, al procesamiento de imágenes. En cuanto a ellas, se realizaron también implementaciones que permitieron ver en detalle cómo llevar a la práctica la teoría. Como complemento futuro, se podrían agregar más casos de estudio con sus respectivas implementaciones para comprender más finamente los conceptos y cuándo son de utilidad estas medidas.

Bibliografía

[1] P.R. Halmos. *Measure theory*. University series in higher mathematics. Van Nostrand, 1950.

[2] Andrey N. Kolmogorov. *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsea Pub Co, 2 edition, June 1960.

[3] Nuno Vieira Lopes, Pedro A. Mogadouro do Couto, Humberto Bustince, and Pedro Melo-Pinto. Automatic histogram threshold using fuzzy measures. *Trans. Img. Proc.*, 19(1):199–204, January 2010.

[4] Samuel Morillas and Valentín Gregori. Robustifying vector median filter. *Sensors*, 11(8):8115–8126, 2011.

[5] Caroline Pantofaru and Martial Hebert. A comparison of image segmentation algorithms. Technical report, 2005.

[6] Julio Riquelme, Samuel Morillas, Guillermo Peris-Fajarnés, and Dolores Castro. Fuzzy metrics application in video spatial deinterlacing. In *Proceedings of the 7th international workshop on Fuzzy Logic and Applications: Applications of Fuzzy Sets Theory*, WILF '07, pages 349–354, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer-Verlag.

[7] Almanzor Sapena. A contribution to the study of fuzzy metric spaces. *Appl. Gen. Topol.*, 2(1):63–76, 2001.

[8] Mehmet Sezgin and Bülent Sankur. Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation. *J. Electronic Imaging*, 13(1):146–168, 2004.

[9] JOHN R. SIMS and WANG ZHENYUAN. Fuzzy measures and fuzzy integrals: An overview. *International Journal of General Systems*, 17(2-3):157–189, 1990.

[10] M. Sugeno. *Theory of fuzzy integrals and its applications*. PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.

[11] O. J. Tobias and R. Seara. Image segmentation by histogram thresholding using fuzzy sets. *Trans. Img. Proc.*, 11(12):1457–1465, December 2002.

[12] Z. Wang and G.J. Klir. *Fuzzy Measure Theory*. Plenum Press, 1992.

[13] Z. Wang and G.J. Klir. *Generalized Measure Theory*. IFSR International Series on Systems Science and Engineering. Springer, 2010.

[14] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information Control*, 8:338–353, 1965.

[15] L.A. Zadeh. *A Fuzzy-algorithmic Approach to the Definition of Complex Or Imprecise Concepts*. Memorandum (University of California, Berkeley, Electronics Research Laboratory). Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, 1974.