

Transiciones estructurales en trampas de iones acopladas a cavidades ópticas

por

Alan Kahan

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y
Computación como parte de los requerimientos para la obtención del
grado de Doctor en Física de la

Universidad Nacional de Córdoba

1 de Noviembre, 2023

Directora Dra. Cecilia Cormick

Codirector Dr. Leonardo Ermann

Tribunal Especial

Titulares:

1. Dra. Karina Chattah
FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba
2. Dr. Hernán Calvo
FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba
3. Dr. Christian Schmiegelow
FCEyN, Universidad Nacional de Buenos Aires

Suplentes:

1. Dr. Omar Osenda
FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba
2. Dr. Augusto Roncaglia
FCEyN, Universidad Nacional de Buenos Aires



Este trabajo se distribuye bajo una

[licencia Creative Commons Atribución - No Comercial - Sin Obra Derivada 4.0 Internacional.](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Abstract

In this work we consider an optomechanical system composed of trapped ions dispersively coupled to a single mode of a pumped optical cavity. Firstly, we focus on a single ion, particularly on a parameter range that exhibits bistability of different configurations in the semiclassical description. This semiclassical description, however, is not valid in close proximity to the system transitions or when the mean photon number is low. Here, we provide a numerical analysis of the fully quantum state in the few-photon regime, exploring the features of the asymptotic state across the transition and analyzing possible markers of semiclassical bistability. For larger mean photon numbers, we resort to an approach based on a truncated evolution in phase space. We compare the results of our techniques with the ones from numerical diagonalization of the quantum evolution and find that although the treatment leads to a smoothening and a slight shift of the transitions in the system, it still provides a clear improvement over localized semiclassical approximations. Secondly, we provide a characterization of steady-state entanglement in a one-dimensional chain of three ions, and we describe the relation of maxima of entanglement with the vibrational modes of the ion chain and the formation of defects in it. The work is relevant to the areas of dissipative state preparation, the simulation of condensed matter models, and the control of ion crystals by optical potentials.

Resumen

En este trabajo consideramos un sistema optomecánico compuesto por iones atrapados acoplados dispersivamente a un único modo de una cavidad óptica bombeada. En primer lugar nos centramos en un único ion, particularmente en un rango de parámetros que exhibe biestabilidad de diferentes configuraciones en la descripción semiclásica. Esta descripción semiclásica, sin embargo, no es válida en las proximidades de las transiciones del sistema o cuando el número medio de fotones es bajo. Aquí proporcionamos un análisis numérico completamente cuántico del estado estacionario en el régimen de pocos fotones, explorando las características del estado asintótico a través de la transición y analizando posibles marcadores de biestabilidad semiclásica. Para mayores números medios de fotones, recurrimos a un enfoque basado en una evolución truncada en el espacio de fases. Comparamos los resultados de nuestras técnicas con los de la diagonalización numérica de la evolución cuántica y encontramos que, aunque el tratamiento conduce a un suavizado y a un ligero desplazamiento de las transiciones en el sistema, sigue proporcionando una clara mejora sobre las aproximaciones semiclásicas localizadas. En segundo lugar, proporcionamos una

caracterización del entrelazamiento en el estado estacionario de una cadena unidimensional de tres iones, y describimos la relación de los máximos de entrelazamiento con los modos vibracionales de la cadena de iones y la formación de defectos en ella. El trabajo propuesto es relevante para las áreas de preparación disipativa de estados, la implementación de simulaciones de modelos de materia condensada, y el control de cristales de iones por medio de potenciales ópticos.

Índice general

1	Introducción	1
2	Iones en cavidades ópticas: descripción del modelo	7
2.1	Trampas de iones	7
2.1.1	Confinamiento	8
2.1.2	Acoplamiento de los estados electrónicos	9
2.2	Átomos en cavidades ópticas	12
2.2.1	Cavidades ópticas	12
2.2.2	Acoplamiento entre átomos y cavidades	14
2.2.3	Acoplamiento dispersivo entre átomos y cavidades.	15
2.3	Iones atrapados acoplados dispersivamente a una cavidad óptica	18
2.4	Aproximación semiclásica	21
2.4.1	Valores de equilibrio clásicos	23
2.4.2	Dinámica de las fluctuaciones	25
3	Material teórico preliminar	31
3.1	Representación en el espacio de fases	31
3.1.1	Aproximación truncada de Wigner	34
3.2	Formalismo de estados Gaussianos	35
3.2.1	Estados Gaussianos	35
3.2.2	Medidas de Gaussianidad	36
3.2.3	Entrelazamiento en estados Gaussianos	37
3.3	Transiciones de fase disipativas y metaestabilidad	39
4	Transición optomecánica de un ion acoplado a una cavidad óptica	43
4.1	Parámetros experimentales	45
4.2	Análisis de las configuraciones de equilibrio semiclásicas	45
4.3	Evolución de las fluctuaciones en la aproximación Gaussiana localizada	49
4.4	Resumen	50
5	Transición optomecánica de un ion en el régimen de pocos fotones	51
5.1	Transición de la configuración de equilibrio	52
5.2	Análisis de marcadores típicos de la transición	56
5.3	Gaussianidad del estado estacionario	59
5.4	Resumen	61

6	Transición optomecánica de un ion cerca del régimen semiclásico	63
6.1	Aproximación de Wigner truncada	65
6.2	Caracterización del estado asintótico con TWA	69
6.3	Relajación hacia el estado asintótico	76
6.3.1	Estados individuales en el espacio de fases	77
6.3.2	Estimación de las tasas de relajación basada en tiempos de primer paso	79
6.4	Resumen	83
7	Transiciones estructurales en cadenas unidimensionales de tres iones	85
7.1	Transición estructural deslizante-anclada	87
7.1.1	Parámetros elegidos y régimen de validez	88
7.1.2	Configuraciones de equilibrio en la fase anclada	89
7.1.3	Modos de vibración a lo largo de la transición	91
7.2	Entrelazamiento en el estado estacionario	93
7.2.1	Entrelazamiento entre modos	93
7.2.2	Entrelazamiento entre iones	99
7.3	Resumen	102
8	Conclusiones y perspectivas	103
	Bibliografía	109
A	Métodos numéricos utilizados	125
A.1	Diagonalización con métodos iterativos	125
A.2	Simulación estocástica de la ec. de Fokker-Planck	127
A.3	Trayectorias cuánticas	128
B	Estimación de las tasas de relajación basada en overlaps	133
C	Transición optomecánica de un ion en el régimen de pocos fotones - Material suplementario	139

Introducción

En este trabajo nos centramos en el estudio de sistemas de iones atrapados acoplados a cavidades ópticas, en el régimen dispersivo. Este es el régimen en el cual los grados de libertad electrónicos pueden ser eliminados de la descripción, y la interacción dispersiva (lejos de resonancia) da lugar a potenciales ópticos para el movimiento de los iones.

Los procesos de absorción y emisión de un fotón por parte de un átomo producen un cambio en el estado del movimiento del centro de masa del mismo. Es posible aprovechar este efecto y utilizar la interacción con la luz para enfriar, atrapar y manipular átomos [1]. En particular, cuando el campo está lejos de la resonancia con la transición atómica, la interacción dispersiva entre átomos y el campo da lugar a la llamada fuerza dipolar, una fuerza conservativa proporcional al gradiente de intensidad del campo. Es posible utilizar esta interacción de forma tal que los átomos se vean atraídos hacia los máximos o mínimos de intensidad del campo, dependiendo de la desintonía del láser respecto de la transición atómica.

Es así que esto permite desarrollar las llamadas trampas dipolares, las cuales pueden ser realizadas con un haz de luz precisamente enfocado [2, 3] o a través de la formación de potenciales ópticos [4, 5, 6, 7], esto es, una onda estacionaria que forma una red en la cual los átomos son atraídos hacia los nodos o antinodos del campo.

Es común en la actualidad el estudio de sistemas cuánticos híbridos [8], en los cuales se trata de aprovechar las ventajas propias de cada uno de los diferentes subsistemas que los componen. Una de estas tantas implementaciones de sistemas híbridos está dada por la integración de trampas de iones a potenciales ópticos [6]. Un caso particular de estos sistemas está dado por el uso del campo dentro de una cavidad resonante para dar lugar a este potencial óptico [4, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

En estos sistemas, el potencial óptico localiza los iones en los mínimos o máximos de intensidad del campo electromagnético (dependiendo de la desintonía entre la frecuencia de la transición atómica y la frecuencia del láser), mientras que el potencial externo de la trampa mantiene confinados los iones a una región finita, lo cual produce que estén fuertemente acoplados mediante el potencial electrostático de largo alcance.

Estos sistemas son de gran interés debido a que el uso de potenciales ópticos abre la posibilidad de realizar experimentos que involucran combinaciones de partículas neutras y cargadas [15], y proporciona mecanismos para modificar la estructura cristalina [5] o el espectro vibracional [16], introducir interacciones de rango infinito [17], preparar diferentes fases cuánticas [18], enfriar el estado de movimiento de los iones [19], o realizar mediciones no invasivas a través del espectro óptico [20].

En estas configuraciones experimentales se demostró que es posible alcanzar el régimen de acoplamiento fuerte de electrodinámica cuántica de cavidades (CQED por sus siglas en inglés) [21, 22, 23], lo cual es de utilidad por ejemplo para lograr transferir estados entre los grados de libertad de los iones y la luz. Por otra parte, estos sistemas fueron propuestos y estudiados por sus posibles implementaciones para el almacenamiento y procesamiento cuántico de la información [22, 24], para utilizar como fuentes de fotones individuales [25, 26] e indistinguibles [27], además de que fueron propuestos para estudiar transiciones de fase estructurales en cristales de Coulomb [22].

En la actualidad la pregunta de cuál es la mejor implementación para almacenar y procesar la información cuántica sigue siendo una pregunta abierta. Los iones atrapados acoplados a cavidades ópticas fueron propuestos como una plataforma híbrida en la cual implementar el acoplamiento de qubits estacionarios (usados para procesar la información) y qubits de comunicación (utilizados para transmitir la misma) [28], o también para la creación de compuertas de entrelazamiento para fotones [29, 30, 31].

Otra de las principales motivaciones actuales para el estudio de las trampas de iones acopladas a cavidades ópticas es la posibilidad de utilizarlas para realizar simulaciones cuánticas. Por ejemplo para la simulación de modelos de fricción [32] como el modelo de Frenkel-Kontorova [16]. El modelo de Frenkel-Kontorova es un modelo de fricción que tiene en cuenta los grados de libertad internos (a través de la interacción entre las partículas dentro de la cadena), lo que hace posible describir a su vez el calentamiento producido durante la fricción [16]. Diferentes grupos han propuesto y demostrado el uso de esta plataforma para explorar características de este modelo y la dislocación de cristales [33, 34]. Esta línea de trabajo se basa en un primer experimento que observaba la dinámica anómala de un ion individual [35]. Y los recientes avances teóricos y experimentales han llevado a la realización de modelos similares que implican cadenas con unos pocos iones [16, 32, 36, 37, 38, 39, 40].

Cuando el confinamiento en una de las direcciones transversales de la trampa es mucho mayor que en la dirección axial, los iones en la trampa forman arreglos lineales. En presencia de un potencial óptico alineado con la cadena, estas estructuras lineales pueden deformarse en dos tipos distintos de transiciones inducidas por el potencial óptico [18, 20]. El primer caso corresponde a una cadena de iones alineada transversalmente al eje de la cavidad, mientras que el segundo se obtiene cuando la cadena está a lo largo de la dirección de propagación de la luz.

Consideramos el primer caso, la transición lineal-zigzag, suponiendo que la onda estacionaria del campo de la cavidad es perpendicular al eje de la cadena de iones, como se muestra en la Fig. 1.1-a). Cuando la intensidad del bombeo láser es baja, el estado estacionario de los iones está dado principalmente por la interacción de Coulomb y el confinamiento armónico. A medida que la intensidad del bombeo láser aumenta, la fuerza óptica sobre los iones empuja a los mismos lejos de los máximos de intensidad del campo (suponiendo una desintonía al azul), de tal forma que por encima de cierto valor del bombeo láser, la cadena toma una estructura de zigzag, como en la Fig. 1.1-b)

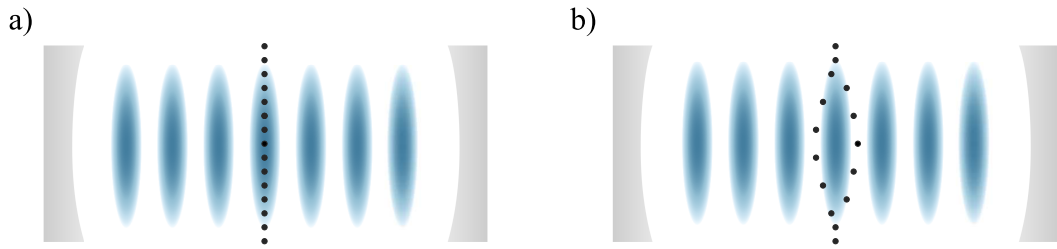


Fig. 1.1.: Representación esquemática de la transición lineal-zigzag. No se muestra el efecto del confinamiento armónico en el potencial. a) El potencial óptico es bajo, las posiciones de equilibrio están determinadas en mayor medida por la trampa de iones y forman una estructura lineal. b) El efecto del potencial óptico es más importante, la cadena se deforma en una estructura con forma de zigzag.

Una observación importante es que esta misma transición puede darse en sistemas de iones atrapados cuando una de las frecuencias transversales cae por debajo de cierto valor crítico. En tal caso, el confinamiento a lo largo de esa dirección se reduce, y la repulsión electrostática entre iones los lleva a formar un arreglo con forma de zigzag [41, 42, 43].

Una transición estructural diferente puede ser observada cuando la dirección de propagación del campo de la cavidad es paralela al eje de la cadena. En este caso, cuando la intensidad del bombeo es baja, las posiciones de equilibrio de los iones están principalmente dadas por la interacción de Coulomb y el confinamiento armónico (estado deslizante en Fig. 1.2). A medida que la intensidad del bombeo láser crece, el potencial óptico cobra más relevancia, hasta que nuevamente, por encima de cierto valor crítico, los iones son empujados hacia los mínimos del mismo, como se esquematiza en el estado anclado de Fig. 1.2. En este caso, los iones están “anclados” a los mínimos del potencial óptico. Esta es una variación de la transición de Aubry [44] o “deslizante-anclada” (*sliding-pinned*).

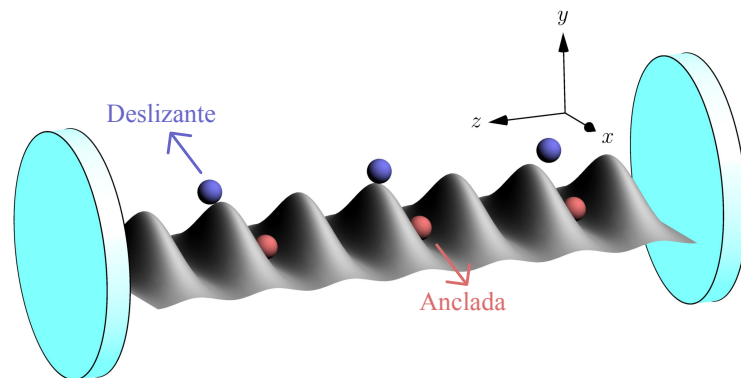


Fig. 1.2.: Representación esquemática de la transición deslizante-anclada. No se muestra el efecto del confinamiento armónico en el potencial.

Es sabido que los sistemas optomecánicos en el régimen de acoplamientos suficientemente fuertes conducen a multiestabilidad [45]. Este es el caso del sistema arriba descrito cuando se utiliza una aproximación semiclásica para describir la dinámica. Dicho comportamiento

ha sido ampliamente estudiado en relación con la transición estructural lineal-zigzag [20] en dos dimensiones, y la transición de cadena deslizante-anclada [38] en una dimensión. Ambos modelos presentan regímenes de parámetros en los que dos configuraciones clásicas diferentes son estables. En estos casos, el tratamiento semiclásico predice un estado asintótico que depende del estado inicial. El tipo de dinámica que consideramos en este trabajo es un caso particular de un modelo disipativo forzado (*driven-dissipative*), y existen muchos estudios en la literatura que muestran sistemas similares en los que una aproximación semiclásica conduce a un mapa dinámico con más de un punto fijo [46, 47, 48, 49, 50].

La descripción semiclásica es comparativamente sencilla y describe adecuadamente el comportamiento del sistema en muchos casos útiles, pero hay varias situaciones en las que este tratamiento no es fiable. Estos escenarios incluyen el régimen de pocos fotones y el caso en el que la delocalización espacial del ion no es lo suficientemente pequeña en comparación con las escalas relevantes del problema. En particular, se espera que la descripción semiclásica falle en las proximidades de una transición, cuando un modo de movimiento se vuelve inestable. La caracterización de este régimen es un problema abierto, y trabajos anteriores en sistemas ópticos no lineales han mostrado que las soluciones semiclásicas y las completamente cuánticas pueden diferir en el carácter continuo o discontinuo de la transición [46, 51, 52].

En este trabajo estamos interesados en las transiciones estructurales de las cadenas de iones en potenciales ópticos, y en particular nos concentramos en una descripción detallada del régimen de biestabilidad clásica, en la metaestabilidad, y en la relación entre la presencia de entrelazamiento y los modos de vibración de las estructuras dentro de la cavidad.

Con el objetivo de describir transiciones estructurales en sistemas cada vez más complejos, como cadenas de iones uni- o bidimensionales, necesitamos un análisis detallado de las distintas aproximaciones posibles para estudiar la dinámica del sistema y sus regímenes de validez. Partimos entonces de realizar una descripción del sistema más simple, un ion individual acoplado a la cavidad, obteniendo el espectro del generador de la dinámica y comparando esto con distintas aproximaciones semiclásicas. A partir de realizar una descripción rigurosa y detallada de los regímenes de validez de esas aproximaciones en ese sistema en particular, comenzamos la tarea de considerar sistemas más complejos. El primer paso para esto es estudiar una cadena de tres iones unidimensional utilizando la aproximación semiclásica.

Estructura de esta tesis

Esta tesis se enfoca en transiciones estructurales en cadenas de iones acopladas a cavidades ópticas. A grandes rasgos, en una primera instancia se estudian las consecuencias de analizar este sistema sin utilizar la usual aproximación semiclásica Gaussiana. En segundo lugar, se realiza una caracterización del estado estacionario del sistema de una cadena lineal de tres iones a lo largo de la transición deslizante-anclada.

En el capítulo 2 se describe el sistema bajo estudio, una trampa de iones acoplada a una cavidad óptica en el régimen dispersivo, mientras que en el capítulo 3 se describen algunas herramientas teóricas utilizadas en esta tesis.

En el capítulo 4 se hace una breve introducción común a los capítulos 5 y 6, donde se describe el modelo reducido de un único grado de libertad de movimiento acoplado al campo de la cavidad y se proporcionan resultados analíticos para la transición considerada en el régimen semiclásico.

En el capítulo 5 nos dedicamos a realizar un estudio del estado estacionario del sistema sin utilizar ninguna aproximación clásica, en el caso particular de un único ion acoplado al campo de la cavidad. En particular, estudiamos propiedades del estado estacionario del sistema en el régimen en el que la descripción semiclásica predice biestabilidad, pero en el límite de número medio de fotones pequeños, donde no se espera que la aproximación semiclásica siga siendo válida. Para diferentes elecciones de parámetros dentro de este límite, proporcionamos una caracterización de la transición y analizamos posibles indicadores de la biestabilidad semiclásica a través de la entropía del estado, el entrelazamiento entre el campo y el movimiento, y gap espectral del Liouvilliano, el cual describe la tasa de decaimiento hacia el estado estacionario.

En el capítulo 6 complementamos el estudio del mismo sistema considerado en el capítulo anterior, pero bajo una aproximación que nos permite describir regímenes más cercanos al semiclásico. El enfoque de este capítulo se basa en una evolución en el espacio de fases y el objetivo es explorar una región de parámetros en la que la solución completamente cuántica del capítulo anterior se vuelve difícil, mientras que el enfoque semiclásico más simple no consigue captar los fenómenos esenciales. Comparamos los resultados de esta técnica con los de la diagonalización numérica del generador y encontramos que, aunque este tratamiento conduce a un suavizado y a un ligero desplazamiento de las transiciones en el sistema, sigue proporcionando una clara mejora sobre las aproximaciones semiclásicas localizadas.

En el capítulo 7 se realiza una caracterización del mismo sistema pero considerando una configuración de una cadena unidimensional de tres iones, donde el vector de onda de la cavidad se encuentra paralelo al eje de la cadena de iones, dando lugar a una dinámica similar a la de un modelo de Frenkel-Kontorova, como en la Fig. 1.2. Se realiza un estudio de la relación entre el entrelazamiento en el estado estacionario del sistema, su relación con los modos de vibración de la cadena y la formación de defectos en la misma.

Los resultados mostrados en los capítulos 4 y 5 se encuentran publicados en [53], mientras que los resultados del capítulo 6 se corresponden con la publicación [54]. Los resultados del capítulo 7 aún no se encuentran publicados.

Iones en cavidades ópticas: descripción del modelo

2.1. Trampas de iones

Desde el primer experimento en el que un ion individual [55] fue atrapado hasta la actualidad, los experimentos con trampas de iones dieron lugar a contribuciones de gran relevancia en diversas áreas, y los mismos están entre las propuestas más prominentes para utilizar como plataformas para la realización de procesamiento cuántico de la información [56, 57]. Sin embargo, originalmente las trampas de iones fueron usadas con propósitos muy diversos, como por ejemplo espectrometría de masas, verificaciones de la linealidad de la teoría de la mecánica cuántica, mediciones de la razón de la masa inercial de protones y antiprotones [58]. Estos sistemas están caracterizados por su versatilidad, permiten atrapar partículas individuales a muy bajas temperaturas, o la formación de grandes estructuras de cientos de partículas, lo que da lugar a por ejemplo estudios de la dinámica de sistemas fuera del equilibrio termodinámico [42, 59].

Uno de los aspectos más interesantes de las trampas de iones tiene su origen en que las mismas permiten que los iones sean enfriados hasta estados vibracionales muy bajos mediante una variedad de técnicas [60], a través de la interacción entre la luz y los grados de libertad electrónicos de los iones, formando estructuras ordenadas usualmente llamadas cristales de Coulomb. Hoy en día estas configuraciones experimentales proporcionan estándares de frecuencia [61, 62], y son propuestas para realizar pruebas de fundamentos de física, por ejemplo para buscar variaciones temporales de constantes fundamentales [63, 64], verificación de la invarianza de Lorentz [65], o fuerzas más allá del modelo estándar [66, 67, 68]. Estos sistemas fueron también propuestos para la medición de la magnitud de un campo eléctrico [69], o mediciones de la polarización de un haz de luz [70].

Actualmente, se suman a las diversas motivaciones para estudiar sistemas de trampas de iones, la posibilidad de utilizarlas para el procesamiento cuántico de la información [57, 71, 72, 73, 74]. Por otra parte, la inmensa dificultad de describir la dinámica de sistemas cuánticos complejos (incluso mesoscópicos), llevó a la propuesta de las simulaciones cuánticas [75], donde el comportamiento de un sistema cuántico de interés es mapeado a un sistema cuántico distinto y con mayor grado de controlabilidad. La principal motivación para la realización de simulaciones cuánticas se encuentra en la posibilidad de volver tratable el análisis de sistemas que son computacionalmente complejos actualmente. Debido al gran nivel de control que se tiene en sistemas de iones atrapados, los mismos fueron propuestos para simular modelos muy diversos [76], como por ejemplo Hamiltonianos de

espines cuánticos [77, 78, 79], incluso de sistemas frustrados [80], y tanto en modelos unidimensionales como bidimensionales [81], o para la simulación de *lattice-gauge theories* [82, 83]. Además se propuso el estudio de modelos de fricción [39] y modelos de fricción en presencia de defectos topológicos [84, 85]. En los mismos es posible estudiar tanto sistemas de variables continuas [86, 87] como también modelos híbridos que contemplan grados de libertad continuos y discretos [88, 89].

2.1.1. Confinamiento

Para lograr el confinamiento de partículas cargadas es necesaria una configuración experimental que genere, al menos en una región pequeña del espacio, un potencial que presente posiciones de equilibrio estables (el hecho de que estas sean máximos o mínimos del potencial eléctrico solo importa una vez que el signo de la carga es elegido). Dado que un potencial electrostático en tres dimensiones no puede tener puntos extremos (teorema de Earnshaw [90]), no es posible lograr confinamiento utilizando tales configuraciones. Esto se ejemplifica aquí con un potencial Φ en aproximación armónica:

$$\Phi(x, y, z) = U(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) \quad (2.1)$$

Si este potencial debe satisfacer la ecuación de Laplace $\Delta\Phi = 0$, entonces esto implica que

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (2.2)$$

de donde es claro que este potencial, en torno al origen, debe tener la forma de un punto de ensilladura, por lo que no es posible confinar cargas con este método.

Hay muchas formas de evitar este aparente obstáculo, y de ahí provienen los dos tipos de trampas más comunes [60]: las llamadas trampas de Penning, en las cuales los átomos son confinados mediante una combinación de campos eléctricos y magnéticos estáticos, y las trampas de Paul, en las cuales el confinamiento está dado en su lugar por una combinación de campos estáticos y campos de radiofrecuencia. Así, considerando un potencial en aproximación cuadrupolar con una componente de radiofrecuencia como

$$\Phi = U(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) + \tilde{U} \cos(\Omega_{\text{RF}} t)(\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2) \quad (2.3)$$

la ecuación de Laplace lleva a las condiciones

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha' + \beta' + \gamma' &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

y, por ejemplo, la elección

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -\gamma \\ \alpha' &= -\beta', \gamma' = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

es una de las posibles elecciones que lleva a las condiciones de las trampas de Paul, donde hay un confinamiento dinámico a lo largo de las direcciones transversales, y un confinamiento estático a lo largo de la dirección axial. Esto de nuevo corresponde a un punto de ensilladura en el potencial, donde a cada tiempo t solo hay confinamiento a lo largo de una dirección transversal. Sin embargo, la frecuencia de oscilación del potencial genera una configuración de equilibrio estable para ciertos valores de Ω_{RF} , como se ilustra en la Fig. 2.1.

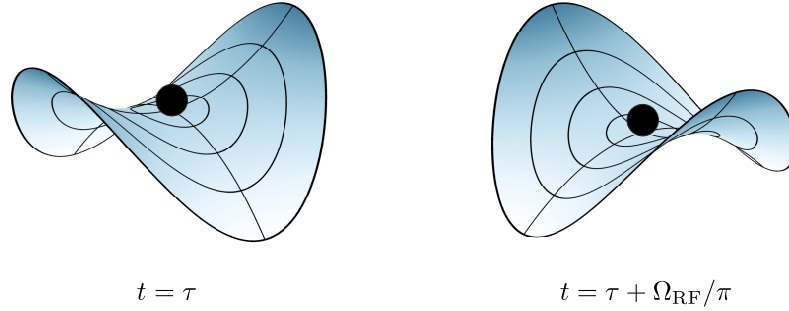


Fig. 2.1.: Representación esquemática de la dinámica de un ion interactuando con la componente dependiente del tiempo del potencial electromagnético en las direcciones x e y en la ec. (2.3). A un dado tiempo, sólo hay confinamiento estable en una única dirección. La oscilación de este potencial en un rango específico de frecuencias proporciona el confinamiento a lo largo del tiempo.

Esto lleva así a un movimiento oscilatorio en las direcciones radiales (x, y), que puede ser considerado en aproximación armónica a una frecuencia $\nu \ll \Omega_{\text{RF}}$, el llamado *movimiento secular*, superpuesto a un movimiento oscilatorio con una frecuencia Ω_{RF} y de amplitud mucho menor al movimiento secular, llamado *micromoción* [60]. En esta configuración, no hay micromoción a lo largo de la dirección axial, dado que el confinamiento a lo largo de esa dirección está dado por un potencial electrostático.

Esta combinación de campos da lugar a trampas que se pueden considerar en aproximación armónica, proporcionando usualmente un confinamiento asimétrico. En el límite en el cual el confinamiento en las direcciones transversales es mucho más grande que el confinamiento en la dirección axial, el arreglo de iones es aproximadamente unidimensional, es decir que forman cadenas, donde las distancias típicas entre iones son del orden de los μm [91]. Por último, es común despreciar la micromoción (presente en las direcciones radiales), de forma que la dinámica del sistema luego de esta aproximación está dada por el pseudopotencial [60]:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\nu_x^2 x^2 + \nu_y^2 y^2 + \nu_z^2 z^2) \quad (2.6)$$

2.1.2. Acoplamiento de los estados electrónicos

Se pueden generar acoplamientos entre los grados de libertad internos (estados electrónicos) de los iones en la trampa y el grado de libertad del movimiento de los mismos a través del acoplamiento con un láser. Para simplificar la discusión en esta sección se va a considerar

sólo el movimiento de un ion a lo largo de una dimensión. A lo largo de esta sección se sigue principalmente el análisis mucho más detallado dado en [60]. En tanto la frecuencia del láser está sólo cerca de resonancia entre dos niveles internos, y si la frecuencia de Rabi que describe la intensidad del acoplamiento a otras transiciones es mucho menor que la desintonía respecto de esas transiciones [60], se puede considerar a estos átomos como sistemas de dos niveles $|g\rangle$ y $|e\rangle$, para el estado fundamental y excitado, respectivamente. El correspondiente Hamiltoniano de la evolución libre de este subespacio está dado por

$$H_{el} = \hbar \frac{\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \quad (2.7)$$

Mientras que la evolución libre de los grados de libertad de movimiento está dada por la ec. (2.6)

$$H_m = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\nu^2}{2} x^2 \quad (2.8)$$

La interacción con los grados de libertad electrónicos y del movimiento se puede describir como [91]

$$H_{int} = \hbar \frac{\Omega}{2} (\sigma_- + \sigma_+) \left(e^{i(kx - \omega_l t)} + e^{-i(kx - \omega_l t)} \right) \quad (2.9)$$

donde estamos considerando al campo del láser como una onda plana clásica $E(x, t) = E_0(e^{i(kx - \omega_l t)} + e^{-i(kx - \omega_l t)})$. Además ω_l corresponde a la frecuencia del láser, k es la proyección sobre la dirección x del vector de onda, y $\sigma_+ = \sigma_-^\dagger = |e\rangle\langle g|$. Por último, Ω es la frecuencia de Rabi, que para el caso de transiciones dipolares, donde $H_{dip} = -dE(x, t)$, está dada por

$$\Omega = \frac{2}{\hbar} \langle g | d E_0 | e \rangle \quad (2.10)$$

donde d es el momento dipolar del átomo. En el caso de considerar transiciones cuadrupolares o Raman, esta frecuencia toma una expresión distinta [60].

En la representación interacción, el Hamiltoniano de interacción en ec. (2.9) luego de considerar despreciables los términos que oscilan rápidamente (aproximación de onda rotante o RWA por sus siglas en inglés) como $\exp(i(\omega_l + \omega_0)t)$ puede escribirse como

$$\tilde{H}_{int} = \hbar \frac{\Omega}{2} U_m^\dagger \left(\sigma_+ e^{i(kx - \delta t)} + \sigma_- e^{-i(kx - \delta t)} \right) U_m \quad (2.11)$$

donde el tilde indica que el operador está escrito en la representación interacción, y $U_m = e^{-iH_m t/\hbar}$.

Régimen de Lamb-Dicke

Introduciendo el parámetro de Lamb-Dicke [91] $\eta = kx_0$, donde $x_0 = \sqrt{\hbar/2m\nu}$ es la dispersión de la función de onda del estado fundamental del oscilador armónico con frecuencia ν (dada por ec. (2.6)), los términos que aparecen en las exponenciales de Ec. (2.9) se pueden reescribir en términos de $kx = kx_0(b + b^\dagger) = \eta(b + b^\dagger)$, donde se introdujeron

operadores de creación y aniquilación correspondientes al oscilador armónico de frecuencia ν :

$$b = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\nu}} (m\nu x + ip) \quad (2.12)$$

A temperaturas bajas es válido considerar que el sistema está en el llamado régimen de Lamb-Dicke [92], $\eta\sqrt{\langle(b + b^\dagger)^2\rangle} \ll 1$. Esto corresponde a la situación en la cual la dispersión espacial del ion en la trampa armónica es mucho menor que la longitud de onda del láser que excita la transición dipolar. En este caso, se puede aproximar la Ec. (2.11) expandiendo a primer orden en η :

$$\tilde{H}_{\text{int}} \approx \hbar\frac{\Omega_0}{2}\sigma_+ (1 + i\eta (be^{-i\nu t} + b^\dagger e^{i\nu t})) e^{-i\delta t} + h.c. \quad (2.13)$$

en la representación interacción y luego de la RWA, donde $\delta = \omega_l - \omega_0$, y Ω_0 es la intensidad de interacción Ω reescalada para tener en cuenta el efecto de micromoción [60]. En esta aproximación, hay tres términos resonantes:

- El “carrier”, que corresponde a $\delta = 0$. El Hamiltoniano en este caso está dado por

$$\tilde{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar}{2}\Omega_0 (\sigma_+ + \sigma_-) \quad (2.14)$$

Esta interacción sólo genera transiciones $|n\rangle|g\rangle \leftrightarrow |n\rangle|e\rangle$, donde denotamos por $|n\rangle$ a los autoestados del operador $b^\dagger b$ dados por ec. (2.12). Es decir que no genera cambios en el estado del movimiento del ion. La frecuencia de Rabi para este proceso es Ω_0

- La primera banda roja, correspondiente a $\delta = -\nu$, da lugar al Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

$$\tilde{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar}{2}\Omega_0\eta (b\sigma_+ + b^\dagger\sigma_-) \quad (2.15)$$

Esta interacción genera transiciones entre los niveles $|n\rangle|g\rangle \leftrightarrow |n-1\rangle|e\rangle$. La frecuencia de Rabi en este caso está dada por $\Omega_0\sqrt{n}\eta$.

- La primera banda azul, correspondiente a $\delta = \nu$, da lugar a un Hamiltoniano tipo anti-Jaynes-Cummings

$$\tilde{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar}{2}\Omega_0\eta (b^\dagger\sigma_+ + b\sigma_-) \quad (2.16)$$

Esta interacción genera transiciones entre los niveles $|n\rangle|g\rangle \leftrightarrow |n+1\rangle|e\rangle$. La frecuencia de Rabi en este caso está dada por $\Omega_0\sqrt{n+1}\eta$.

Las transiciones que involucran otros cambios de estado de movimiento corresponden a órdenes más altos en la expansión en el parámetro de Lamb-Dicke y son muy poco probables dentro del régimen de Lamb-Dicke.

2.2. Átomos en cavidades ópticas

2.2.1. Cavidades ópticas

En esta sección comentamos la dinámica de una cavidad óptica bombeada por un láser. En general las cavidades tienen una serie de frecuencias de resonancia, pero a lo largo de este trabajo suponemos que hay un único modo de la misma que es predominantemente excitado por la interacción con el láser, mientras el resto de los modos permanecen en un estado de vacío.

El sistema tratado en este trabajo debe considerarse esencialmente como un sistema abierto: las cavidades no son perfectas y presentan pérdidas a través de las mismas superficies que reflejan el campo. Hay distintos formalismos para estudiar esta situación, por ejemplo a través de ecuaciones maestras [93] en el caso de que sólo sea de interés la dinámica del sistema, o con el formalismo de *input-output* [94] en el caso de que además sea de interés el estudio de las propiedades de la radiación emitida por la cavidad. En esta sección utilizaremos el primer método.

Dado que las longitudes de onda resonantes en la cavidad se encuentran en el rango óptico, la ocupación térmica de los modos externos es considerada despreciable, y por lo tanto vamos a asumir que este acoplamiento con los modos del campo externo sólo puede causar pérdida de fotones. La evolución del sistema abierto se describe entonces en la aproximación Markoviana mediante una ecuación de Lindblad:

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \mathcal{D}_\kappa\rho \quad (2.17)$$

donde el primer término corresponde a la evolución unitaria.

El segundo término corresponde a la evolución no unitaria, y para el caso de una dinámica completamente positiva y que preserve la traza, en la aproximación Markoviana, tiene la forma general [93]

$$\mathcal{D}\rho \equiv \sum_k \gamma_k \left(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho\} \right), \quad (2.18)$$

donde L_k son los operadores de Lindblad que representan el correspondiente canal disipativo a una tasa γ_k , y los corchetes denotan un anticonmutador.

Como fue comentado anteriormente, para el caso particular de una cavidad óptica la reflectividad imperfecta de las superficies que la forman lleva a la pérdida de fotones en la misma. El decaimiento del número de fotones a una tasa 2κ puede ser descrito entonces utilizando $L_k = L = a$ [93].

$$\mathcal{D}_\kappa\rho = 2\kappa \left(a\rho a^\dagger - \frac{1}{2} \{a^\dagger a, \rho\} \right) \quad (2.19)$$

donde los operadores a^\dagger y a son los operadores creación y aniquilación del campo de la cavidad, respectivamente.

Se puede considerar así la dinámica disipativa de una cavidad bombeada por un láser, dada por la Ec. (2.17), con una dinámica unitaria dada por:

$$H/\hbar = -\Delta_c a^\dagger a + i\eta(a^\dagger - a) \quad (2.20)$$

donde $\Delta_c = \omega_l - \omega_c$ es la desintonía entre la frecuencia del láser de bombeo y el modo de la cavidad. En este Hamiltoniano está implícito que estamos considerando al estado del campo del láser como un estado coherente, donde η es proporcional a la amplitud del campo del láser. Dado que la fase del campo del láser es arbitraria, la fijamos a cero por simplicidad, por lo tanto $\eta \in \mathbb{R}$. El disipador está dado por la ec. (2.19).

A modo de ejemplo, este sistema presenta la siguiente evolución de algunos valores medios:

$$\begin{cases} \langle a \rangle(t) = \beta_1 e^{-(\kappa+i\omega_c)t} - i\eta \frac{e^{-i\omega_l t}}{(\kappa + i\Delta_c)} \\ \langle a^\dagger a \rangle(t) = \beta_2 e^{-2\kappa t} - 2\eta \operatorname{Im} \left(\beta_1 \frac{e^{-i\Delta_c t}}{(\kappa - i\Delta_c)} \right) e^{-\kappa t} + \eta^2 \frac{1}{(\kappa^2 + \Delta_c^2)} \end{cases} \quad (2.21)$$

donde β_1, β_2 son constantes de integración. Los valores de expectación del estado asintótico están dados en la ec. (2.22).

$$\begin{cases} \langle a \rangle = -i\eta \frac{e^{-i\omega_l t}}{(\kappa + i\Delta_c)} \\ \langle a^\dagger a \rangle = \eta^2 \frac{1}{(\kappa^2 + \Delta_c^2)} \end{cases} \quad (2.22)$$

En el caso de que $\kappa \rightarrow \infty$ (las pérdidas de la cavidad son muy grandes), o de que $\Delta \rightarrow \infty$ (el láser está lejos de la resonancia con el modo de la cavidad), se observa que el número medio de excitaciones $\langle a^\dagger a \rangle$ tiende a 0. Dado que tanto el Hamiltoniano como el disipador son cuadráticos en los operadores de creación y aniquilación, el estado asintótico es Gaussiano, es decir que está completamente determinado por sus primeros y segundos momentos [95].

Es importante destacar que el estado asintótico del sistema descrito no guarda ninguna relación con el estado fundamental de la dinámica unitaria, y que la evolución disipativa juega un rol fundamental en la determinación del mismo, y esto es válido para los sistemas disipativos en general. Esto es fácil de notar considerando el estado fundamental de ec. (2.20). El mismo es claramente independiente de κ , mientras que la solución de la dinámica completa, ec. (2.22), no lo es.

2.2.2. Acoplamiento entre átomos y cavidades

Consideramos ahora un átomo acoplado al campo en una cavidad. Ésta tiene una evolución libre dada por

$$H_{\text{cav}} = \hbar\omega_c a^\dagger a \quad (2.23)$$

En primer lugar, se asume que la frecuencia ω_c de la cavidad está cerca de resonancia con la frecuencia de la transición dipolar (frecuencia ω_0) entre dos niveles atómicos. De esta manera, el par de niveles involucrados en esta transición serán los más relevantes en la dinámica y podemos desprestigiar la presencia del resto de los niveles de la estructura electrónica del átomo. Denotamos a estos dos niveles como $|e\rangle$ y $|g\rangle$, el nivel excitado y el fundamental, respectivamente.

Así, la dinámica de los grados de libertad electrónicos está descripta por

$$H_{\text{el}} = \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e|, \quad (2.24)$$

sumado a la interacción

$$H_{\text{int}} = \hbar g (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) \quad (2.25)$$

dada por el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, que describe la absorción de un fotón acompañada por la excitación del átomo, dada por el operador $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$, y la correspondiente emisión de un fotón acompañada por la desexcitación del átomo, dada por $\sigma_- = \sigma_+^\dagger$. Esta interacción es válida en la aproximación dipolar y luego de realizar una aproximación de onda rotante [96]. La intensidad de esta interacción está dada, en el caso de una onda estacionaria en la dirección z con polarización en la dirección \vec{e} , por [96]

$$g(z) = -d_{eg} \sqrt{\frac{\omega_c}{\hbar\epsilon_0 V}} \cos(kz) \quad (2.26)$$

donde $d_{eg} = \langle e | (\vec{d} \cdot \vec{e}) | g \rangle$ son los elementos de matriz de la interacción dipolar d en los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$ involucrados; ω_c es la frecuencia del modo de la cavidad, ϵ_0 la permitividad del vacío, V el volumen del modo de la cavidad [30] y $k = \omega_c/c$ el número de onda.

La dinámica unitaria de este sistema exhibe las llamadas oscilaciones de Rabi, donde las excitaciones son periódicamente transferidas entre los grados de libertad electrónicos y el campo, en forma coherente. Estas oscilaciones ocurren entre los niveles $|e\rangle|n\rangle \leftrightarrow |g\rangle|n+1\rangle$ a una frecuencia $g\sqrt{n}$ [97].

Por último, la dinámica de este sistema sigue estando dada en general por la ec. (2.17), con el disipador (2.19), que describe las pérdidas de fotones de la cavidad a una tasa 2κ . Se debe tener en cuenta también el decaimiento espontáneo del estado excitado $|e\rangle$ a una tasa γ , con la consecuente emisión de un fotón en una dirección u hacia los modos del campo electromagnético externo. Esto estaría descripto por [98]:

$$\mathcal{D}_{\text{atom}} = -\gamma \left(\sigma_+ \sigma_- \rho + \rho \sigma_+ \sigma_- - 2 \int d^2 u N(u) \sigma_- e^{-ikr} \rho e^{ikr} \sigma_+ \right) \quad (2.27)$$

donde $N(u)$ es la distribución de direcciones en las cuales el fotón es emitido. La integral de la ec. (2.27) se puede aproximar por [98]:

$$\mathcal{D}_{\text{atom}} = -\gamma (\sigma_+ \sigma_- \rho + \rho \sigma_+ \sigma_- - 2\sigma_- \rho \sigma_+) \quad (2.28)$$

El régimen de acoplamiento fuerte de electrodinámica cuántica de cavidades (*cavity QED* por sus siglas en inglés) es el régimen en el cual la frecuencia de Rabi g es mucho mayor a la tasa de decaimiento espontánea γ y a la tasa de pérdidas de la cavidad κ . En este régimen la presencia de un único fotón puede modificar la dinámica del sistema [97]. Fue demostrado que es posible alcanzar el régimen de acoplamiento fuerte con sistemas de trampas de iones acopladas a cavidades ópticas [21, 22, 23, 99], lo cual es de utilidad por ejemplo para lograr transferir estados entre los grados de libertad de los iones y la luz. En contraste, el régimen de acoplamiento débil se corresponde a $g < (\kappa, \gamma)$.

Por otra parte, ciertas aplicaciones como distribución cuántica de claves [100, 101], codificación densa [102], *entanglement swapping* [103], teleportación [104], necesitan fuentes de fotones individuales [105]. Hay diversos métodos propuestos para realizar estas fuentes [106, 107, 108, 109], una de las cuales consiste en generar fotones utilizando *cavity QED*, para lo cual es necesario estar en el régimen $\kappa \gg g \gg \gamma$. De tal forma, los fotones de la cavidad son emitidos rápidamente a los modos del campo externo, y los fotones emitidos por el átomo no van a parar a un modo distinto del modo de la cavidad [97]. Se demostró que es posible realizar tal tipo de fuentes utilizando trampas de iones acopladas a cavidades ópticas [25, 26], y que las mismas permiten elegir la forma y la sincronización de los pulsos. Con los mismos sistemas también se demostró la generación de fotones indistinguibles [12, 27], lo cual abre la posibilidad de generar entrelazamiento entre iones a grandes distancias [110].

2.2.3. Acoplamiento dispersivo entre átomos y cavidades.

El régimen dispersivo es el régimen en el cual la población del estado electrónico excitado puede considerarse despreciable, y es de interés porque da lugar a un acoplamiento optomecánico efectivo entre la posición del átomo y el campo de la cavidad [1]. La principal característica necesaria para alcanzar este régimen es que la transición dipolar debe estar lejos de la resonancia, de forma que la interacción entre el átomo y el campo esté principalmente dada por la fuerza dipolar [2]. Esta es una fuerza conservativa proporcional al gradiente de la intensidad del campo, y es a través de este acoplamiento que se logra la formación de potenciales ópticos dipolares. El uso de potenciales ópticos para átomos neutros permite realizar simulaciones de fases topológicas [111], magnetismo [112], modelo de Bose-Hubbard [113], teorías de gauge discretas [114].

En esta sección describimos esta interacción efectiva y las condiciones necesarias para considerar que esta da el acoplamiento predominante en el sistema.

En el caso de que $|\delta| \gg g\sqrt{N}$, donde N es el valor medio de fotones en la cavidad, la frecuencia del campo está fuera de resonancia con la transición atómica, y de esta forma

no se estimulan las transiciones entre los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$. Sin embargo siguen ocurriendo interacciones dispersivas entre el campo y el átomo. Hay otras condiciones necesarias para la validez de la eliminación adiabática: $|\delta| \gg \kappa, \Gamma$. Esto es, la desintonía entre la transición electrónica y la frecuencia de la cavidad debe ser mayor al ancho de línea de la cavidad y de la transición, para que la interacción entre el campo de la cavidad y el átomo no sea resonante, de tal forma de evitar poblar el nivel excitado $|e\rangle$. Así, se puede considerar que en este régimen los átomos se encuentran en el estado fundamental.

El primer paso es buscar cuáles son los términos más importantes de la evolución a tiempos largos, con el objetivo de derivar un Hamiltoniano efectivo para esta evolución. En la representación interacción, se pueden escribir los dos primeros términos de la expansión de Dyson [115] del operador de evolución

$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \tilde{H}_{\text{int}}(t') + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \tilde{H}_{\text{int}}(t') \tilde{H}_{\text{int}}(t'') + \dots \quad (2.29)$$

$$\equiv U_0 + U_1 + U_2 + \dots$$

donde nuevamente el tilde indica los operadores en la representación interacción.

El primer término de esta expansión, U_1 , no tiene términos que crezcan con el tiempo. Sin embargo, sí los hay en el segundo término:

$$U_2 \propto \frac{-ig^2}{\delta} (aa^\dagger \sigma_+ \sigma_- - a^\dagger a \sigma_- \sigma_+) t \quad (2.30)$$

donde $\delta = \omega_c - \omega_0$, y de donde se puede reconocer un Hamiltoniano efectivo independiente del tiempo en la representación interacción, \tilde{G}_{eff} , a través de la comparación

$$U_2 = U_{\text{eff},1} = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \tilde{G}_{\text{eff}} \quad (2.31)$$

que va a ser el término más relevante de la dinámica a tiempos largos, y el cual está dado en la representación de Schrödinger por:

$$G_{\text{eff}} = \hbar \left(\omega_0 - \frac{g^2}{\delta} \right) |e\rangle\langle e| + \hbar \left(\omega_c - \frac{g^2}{\delta} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \right) a^\dagger a \quad (2.32)$$

Esta dinámica efectiva resulta entonces equivalente a una modificación de la frecuencia de resonancia de la cavidad dependiente del estado del átomo, y a un corrimiento de la resonancia de la transición dipolar dependiente del número de fotones en la cavidad.

De tal forma puede considerarse la dinámica sólo en el subespacio del estado fundamental, dando lugar así a un potencial efectivo para el mismo:

$$H_{\text{eff}} = \hbar \left(\omega_c + \frac{g^2}{\delta} \right) a^\dagger a \quad (2.33)$$

Supongamos ahora que la cavidad se encuentra bombeada por un láser mucho más cerca de resonancia con la cavidad que con el átomo. Pasando a un marco rotante con la frecuencia del láser, dado por:

$$U = e^{-i\frac{H_p t}{\hbar}}, \quad H_p \equiv \hbar\omega_l a^\dagger a, \quad (2.34)$$

se tiene que

$$\tilde{H}_{\text{eff}} = -\hbar \left(\Delta_c - \frac{g^2(x)}{\delta} \right) a^\dagger a \approx -\hbar \left(\Delta_c - \frac{g^2(x)}{\Delta_0} \right) a^\dagger a \equiv -\hbar \Delta_{\text{eff}}(x) a^\dagger a \quad (2.35)$$

donde se despreció $\Delta_c \equiv \omega_l - \omega_c$ en comparación a $\Delta_0 \equiv \omega_l - \omega_0$. Además se incluyó una dependencia del acoplamiento g en la posición del átomo, dado que en general, como se comentó en la sección 2.1.2, el mismo depende de la amplitud del campo, y por lo tanto en general será una función de la posición del átomo. Este tipo de interacción no lineal es típica en sistemas de átomos acoplados a cavidades en el régimen dispersivo [1].

El efecto de la interacción optomecánica en el Hamiltoniano de Ec. (2.35) puede ser entendido considerando en primer lugar su efecto sobre el átomo y sobre la cavidad por separado: si el número de fotones N se asume fijado externamente, entonces el acoplamiento con el átomo provee un potencial óptico de la forma $\hbar N g^2(x)/\Delta_0$. Para $\Delta_0 > 0$, es decir, un láser con corrimiento al azul, el acoplamiento empuja el átomo al mínimo de intensidad de este potencial óptico; si Δ_0 es elegido negativo, el acoplamiento empuja el átomo a las posiciones donde la intensidad del campo es máxima. Por otro lado, si la posición del átomo x se toma como fija, el mismo provee un *shift* de la frecuencia de la cavidad dependiente de la posición.

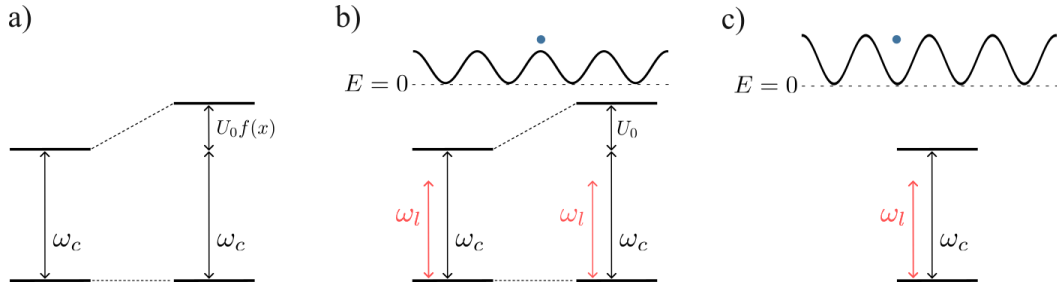


Fig. 2.2.: Diagrama de las resonancias de la cavidad dependientes de la posición del átomo luego de la eliminación adiabática del estado $|e\rangle$, para a) una posición arbitraria, b) en los máximos de intensidad del campo, y c) en los nodos del campo (mínimos de la intensidad del campo).

Más precisamente, como se muestra en la Fig. 2.2-a) (en el marco original, sin incluir la dependencia del láser), la frecuencia de resonancia de la cavidad se ve modificada en una cantidad dependiente de la posición del átomo

$$\frac{g^2(x)}{\Delta_0} = \frac{g_0^2}{\Delta_0} \cos^2(kx) \equiv U_0 f(x) \quad (2.36)$$

donde se definió $U_0 = g_0^2/\Delta_0$ con g_0 dado por ec. (2.26), es decir $g(x) = g_0 \cos(kx)$.

Consideremos por ejemplo $\Delta_c < 0$. Si el átomo se encuentra en un máximo de intensidad, como en la Fig. 2.2-b), la frecuencia de la cavidad se modifica en U_0 . Por otra parte, cuando el átomo se encuentra en un nodo del campo, como en la Fig. 2.2-c) la frecuencia de la cavidad no se ve modificada. En este caso, esto lleva a la cavidad a estar más cerca de

resonancia con el láser, y al consecuente aumento del número de fotones en la cavidad. Este crecimiento en el número medio de fotones de la cavidad lleva a un aumento de la intensidad de interacción entre estos dos grados de libertad, dado que esta interacción depende del operador del número de fotones.

En el escenario completo, dado que la desintonía efectiva de la cavidad es relevante para determinar el número de fotones en la misma, y a su vez, el número de fotones de la cavidad determina la profundidad del potencial óptico, ambos grados de libertad interactúan de tal forma que se da lugar a un “*back-action*” del átomo sobre la fuerza óptica que el mismo siente. Un parámetro especialmente relevante de este modelo es la cooperatividad dispersiva [116]

$$C = \frac{U_0}{\kappa} \quad (2.37)$$

La cooperatividad cuantifica el efecto del átomo sobre el campo de la cavidad, y por tanto el *back-action* de la ubicación del átomo sobre el potencial óptico que siente. En sistemas que contienen varios átomos, es conveniente pensar en la cooperatividad dispersiva efectiva C_{eff} , la cual escala con el número de partículas que se acoplan al campo, y los efectos de la misma se ven reflejados en la correspondiente desintonía efectiva Δ_{eff} .

El régimen de cooperatividades dispersivas pequeñas conduce a los potenciales ópticos habituales en trampas dipolares [2]. Por el contrario, valores grandes de C corresponden a potenciales altamente deformables que pueden mostrar multiestabilidad y, cuando se consideran varios átomos, interacciones significativas entre átomos mediadas por la cavidad (ver por ejemplo [38, 117, 118]). Estas interacciones se deben a que el potencial óptico acopla los iones entre sí: el cambio en la posición de un átomo modifica el estado del campo de la cavidad, y esto a su vez impacta en la dinámica del resto de los átomos.

2.3. Iones atrapados acoplados dispersivamente a una cavidad óptica

En las secciones anteriores describimos brevemente la dinámica de trampas de iones, y de un átomo neutro en un potencial óptico. En esta sección, extendemos esta descripción a un mayor número de átomos, y consideramos que la trampa de iones se encuentra integrada a una cavidad óptica, como se representa esquemáticamente en la Fig. 2.3. Más específicamente, describimos la evolución de un arreglo lineal de iones atrapados acoplados a un único modo de una cavidad óptica bombeada por un láser, en el régimen dispersivo, y está basada en el tratamiento de [116], adaptado a una cadena unidimensional.

Actualmente, los sistemas de trampas de iones integrados a cavidades ópticas se utilizan y desarrollan en muchos grupos de investigación. Para hacer una lista no exhaustiva con algunos ejemplos podemos nombrar a los grupos de la Universidad de Innsbruck y Sussex, en donde se enfocan en el uso de estos sistemas como fuentes de fotones individuales [12, 119],

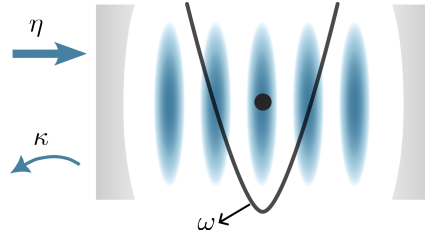


Fig. 2.3.: Diagrama de un ion atrapado en una trampa armónica de frecuencia ω , acoplado a una cavidad óptica con una tasa de pérdidas κ , bombeada coherentemente por un láser con intensidad η .

y en el desarrollo de interfaces entre átomos y cavidades para el desarrollo de redes donde la información cuántica pueda ser distribuida a lo largo de grandes distancias [31, 120]. Se destaca también el grupo de MIT, donde se enfocan en enfriamiento inducido por la cavidad [121], generación de estados entrelazados a través del acoplamiento con un único modo de la cavidad [17], y simulación de modelos de fricción [9, 32, 39, 40]. Y también el grupo de la Universidad de Aarhus, donde se concentran en el estudio de transparencia inducida electromagnéticamente y sus aplicaciones como memoria [122, 123, 124] y transiciones de fase estructurales en cristales de Coulomb [125].

El uso de potenciales ópticos fuertes se ha mostrado como un mecanismo para confinar los iones anclándolos en los pozos de los mismos [4, 5]. En algunos casos es incluso posible confinar los iones mediante su interacción con la luz sin la presencia de una trampa de radiofrecuencia, esto fue logrado tanto en iones individuales [4] como en pequeños cristales de Coulomb [7]. Más precisamente, en estos casos, los iones se atrapan inicialmente utilizando una trampa de radiofrecuencia, la cual se apaga una vez que los iones se acoplan al potencial óptico. Estas trampas ópticas de iones se han propuesto como estrategia para reducir los efectos de calentamiento no deseados en experimentos con partículas tanto neutras como cargadas [15, 126]. La aplicación de fuerzas ópticas puede ser útil para adaptar la estructura y el espectro de movimiento de un cristal de iones, para estudiar el transporte inducido por el ruido [9, 87, 125, 127], y para estudiar transiciones de fase estructurales [14].

Consideramos un único modo de una cavidad óptica con frecuencia ω_c . En el marco de referencia que rota a la frecuencia del láser, la evolución unitaria de este sistema está dada por

$$H = H_{\text{cav}} + H_{\text{ion}} + H_{\text{JC}} + H_{\text{el}} \quad (2.38)$$

Empezamos describiendo la dinámica de la cavidad:

$$H_{\text{cav}} = -\hbar\Delta_c a^\dagger a + i\hbar\eta (a^\dagger - a) \quad (2.39)$$

es el Hamiltoniano del campo dentro de la cavidad. Los operadores a^\dagger y a son los operadores creación y aniquilación del campo de la cavidad, respectivamente, y $\Delta_c = \omega_l - \omega_c$ es la desintonía entre la frecuencia del láser de bombeo y el modo de la cavidad. De nuevo,

estamos considerando el campo del láser en una aproximación clásica. Por último η es la intensidad del bombeo láser, proporcional a la amplitud del campo del mismo.

Recordamos que se asume que la frecuencia ω_c de la cavidad está cerca de resonancia con la frecuencia de la transición dipolar (frecuencia ω_0) entre dos niveles atómicos, pero lo suficientemente lejos de resonancia para no inducir transiciones entre estos dos estados. Denotamos a estos dos niveles como $|e\rangle$ y $|g\rangle$, el nivel excitado y el fundamental, respectivamente. Así, la dinámica de los grados de libertad electrónicos está descrita por

$$H_{\text{el}} = -\hbar\Delta_0 \sum_{j=1}^N |e\rangle_j \langle e| \quad (2.40)$$

donde $\Delta_0 = \omega_l - \omega_0$ es la desintonía entre la frecuencia del láser y la frecuencia de la transición dipolar. El Hamiltoniano que describe los grados de libertad de movimiento del ion en ausencia de la cavidad es:

$$H_{\text{ion}} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{p_j^2}{2m} + V_{\text{trap}}(x_j) \right) + \sum_{j=1}^N \sum_{k>j}^N V_{\text{coul}}(x_j, x_k) \quad (2.41)$$

Para el propósito de este trabajo, el potencial de la trampa se considera en aproximación armónica:

$$V_{\text{trap}}(x_j) = \frac{m\omega^2 x_j^2}{2} \quad (2.42)$$

donde consideramos que todos los iones son iguales, con masa m y carga q . Mientras que la repulsión electrostática entre iones está dada por

$$V_{\text{coul}}(x_j, x_k) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x_j - x_k|} \quad (2.43)$$

Como se comentó en la sección 2.2.3, en la aproximación dipolar, la interacción entre el campo electromagnético de la cavidad y los grados de libertad electrónicos está dado por el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings [96]:

$$H_{\text{JC}} = \hbar \sum_{j=1}^N g(x_j) \left(\sigma_+^{(j)} a + \sigma_-^{(j)} a^\dagger \right), \quad (2.44)$$

y describe la absorción de un fotón acompañada por la excitación de un átomo, dada por el operador $\sigma_+^{(j)} = |e\rangle_j \langle g|$, y la correspondiente emisión de un fotón acompañada por la desexcitación del átomo, dada por $\sigma_-^{(j)} = \sigma_+^{(j)\dagger}$. La intensidad de esta interacción está dada por la ec. (2.26).

Como fue comentado anteriormente, la reflectividad imperfecta de las superficies que forman la cavidad lleva a la pérdida de fotones en la misma. El decaimiento del número de fotones a una tasa 2κ puede ser descrito utilizando el disipador de la ec. (2.19) donde nuevamente, consideramos que no ingresan excitaciones al sistema desde el ambiente.

En un principio, se debería tener en cuenta el decaimiento espontáneo del estado excitado $|e\rangle$ a una tasa γ , con la consecuente emisión de un fotón en una dirección u hacia los

modos del campo electromagnético externo, como se comentó anteriormente en la sección 2.2.2. Sin embargo, de la misma forma que en la sección 2.2.3, a lo largo de este trabajo se va a despreciar la población del estado excitado $|e\rangle$ y por lo tanto los efectos de la emisión espontánea. Esto es así dado que se asume que la escala de tiempo más rápida está determinada por Δ_0 , es decir que $|\Delta_0| \gg \kappa, \gamma, |\Delta_c|, g_0 \sqrt{\langle a^\dagger a \rangle}$, donde g_0 es la amplitud de la frecuencia de Rabi de la transición. De este modo, bombeando el nivel excitado por debajo de la saturación y fuera de resonancia éste puede ser eliminado adiabáticamente [128, 129].

Siguiendo los mismos pasos que en la sección 2.2.3, esto da lugar a un Hamiltoniano efectivo correspondiente al nivel fundamental de los grados de libertad electrónicos [1, 116, 130]:

$$H_{\text{eff}} = -\hbar \Delta_{\text{eff}}(x) a^\dagger a - i\hbar \eta (a - a^\dagger) + H_{\text{ion}}(x), \quad (2.45)$$

válido en el régimen dispersivo, y donde se definió un vector x (y en forma análoga se define p) con componentes x_j (y p_j). El operador $\Delta_{\text{eff}}(x)$ está definido como

$$\Delta_{\text{eff}}(x) = \Delta_c - \sum_{j=1}^N \frac{g^2(x_j)}{\Delta_0} \equiv \Delta_c - U_0 \sum_{j=1}^N f(x_j) \quad (2.46)$$

donde se despreció Δ_c en comparación con Δ_0 . Dado que la frecuencia g del acoplamiento entre el campo de la cavidad y los grados de libertad electrónicos de los iones se asume no uniforme en la posición, este acopla a su vez el campo de la cavidad con la posición de los átomos. Además, como se dijo arriba, no se considera en esta descripción el efecto de la emisión espontánea (ec. (2.27)), lo cual es una aproximación válida también si $|\Delta_0|$ es lo suficientemente grande [2, 3]. Sin embargo, es posible incluir los efectos de la emisión espontánea incluso en el régimen dispersivo [130].

Por claridad, vamos a considerar sólo el caso de un láser con $\Delta_0 > 0$ (desintonía al azul), de tal forma que el ion es atraído hacia los mínimos de intensidad del campo. Cuando el bombeo láser es fuerte, se espera que las posiciones de equilibrio del ion sean esencialmente determinadas por el potencial óptico, mientras que para bombeo débil domina el efecto de la trampa. Si el potencial óptico y la trampa compiten, para valores intermedios de bombeo el tratamiento semiclásico de la dinámica predice, para ciertos valores específicos de parámetros (los cuales son alcanzables experimentalmente), multiestabilidad, es decir la coexistencia de diferentes soluciones para la posición del ion, cada una de las cuales está asociada a valores distintos de un número medio de fotones.

2.4. Aproximación semiclásica

En esta sección, se utiliza el formalismo de “input-output” [94, 131] en el cual se considera a la interacción de un sistema de interés con un ambiente dividida en dos partes: el ruido entrante al sistema, y la radiación emitida desde el mismo hacia el ambiente, cada uno

correspondiendo a los “input” y “output” respectivamente [131]. Para esto se derivan ecuaciones de Heisenberg-Langevin para los operadores del sistema, en las cuales las fuerzas de Langevin están dadas por los modos de “input”. Así, la teoría de input-output permite modelar directamente las fluctuaciones que ingresan al sistema debido al contacto con un ambiente, además de permitir estudiar la luz emitida por la cavidad.

En este marco, se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} \dot{a} = i\Delta_{\text{eff}}(x)a + \eta - \kappa a + \sqrt{2\kappa}a_{\text{in}}(t) \\ \dot{x}_i = \frac{p_i}{m} \\ \dot{p}_i = \hbar a^\dagger a \frac{\partial \Delta_{\text{eff}}(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial V_{\text{ion}}(x)}{\partial x_i} \end{cases} \quad (2.47)$$

donde V_{ion} se corresponde a los términos del potencial de la trampa armónica y la interacción de Coulomb en ec. (2.41) sin la energía cinética:

$$V_{\text{ion}} = \sum_{j=1}^N V_{\text{trap}}(x_j) + \sum_{j=1}^N \sum_{k>j}^N V_{\text{coul}}(x_j, x_k) \quad (2.48)$$

La ecuación para a en (2.47) es una ecuación tipo Heisenberg-Langevin para los operadores del campo dentro de la cavidad, donde los operadores $a_{\text{in}}(t)$ pueden ser interpretados como un campo externo estocástico [94]. Los mismos satisfacen la siguiente relación de conmutación:

$$[a_{\text{in}}(t), a_{\text{in}}^\dagger(t')] = \delta(t' - t) \quad (2.49)$$

luego de haber utilizado una aproximación Markoviana [131].

Ahora se describe la aproximación semiclásica que fue la base de los estudios en [19, 20, 38, 116]. Bajo esta aproximación se considera que la dinámica del sistema se puede describir por pequeñas fluctuaciones alrededor de los valores de equilibrio clásicos, e incluye un tratamiento lineal de las fluctuaciones, truncando las ecuaciones de Heisenberg-Langevin a primer orden en las mismas. De esta forma, se pueden encontrar estados asintóticos Gaussianos si los parámetros del sistema se corresponden a un régimen estable. Así en esta aproximación se considera

$$\begin{cases} a = \bar{a} + \delta a \\ x = \bar{x} + \delta x \\ p = \bar{p} + \delta p \end{cases} \quad (2.50)$$

donde $\bar{a} \equiv \langle a \rangle$, $\bar{x}_j \equiv \langle x_j \rangle$, y $\bar{p}_j \equiv \langle p_j \rangle$, de tal forma que los valores medios de las fluctuaciones descritas por los operadores δa , δx_j y δp_j son nulos. Y nuevamente, estas componentes están agrupadas en vectores \bar{x} , \bar{p} , δx y δp .

La principal idea de la aproximación semiclásica se puede representar esquemáticamente como en la Fig. 2.4. En un primer paso se encuentran los valores de equilibrio clásicos en el espacio de fases como en la Fig. 2.4-a). Luego, se incluye el efecto de las fluctuaciones y

así se describe el estado del sistema como un estado Gaussiano cuyos valores medios están dados por las posiciones de equilibrio clásicas, mientras que la correspondiente matriz de covarianza está determinada por el efecto de las fluctuaciones a primer orden.

El resultado de esta aproximación, como se esquematiza en la Fig. 2.4-b), es un conjunto de estados Gaussianos localizados alrededor de cada uno de los valores de equilibrio clásicos. Esto es solo un esquema para un único modo bosónico, al cual le corresponden dos coordenadas en el espacio de fases. La verdadera aproximación semiclásica utilizada describe el estado del sistema por una distribución de probabilidad Gaussiana en $2(N + 1)$ dimensiones (Hay $N + 1$ subsistemas: N iones y 1 modo de la cavidad, mientras que a cada uno de estos subsistemas corresponden 2 coordenadas en el espacio de fases) y como tal incluye las posibles correlaciones entre los distintos modos. En lo siguiente, nos referimos a esta aproximación como la “aproximación Gaussiana localizada”.

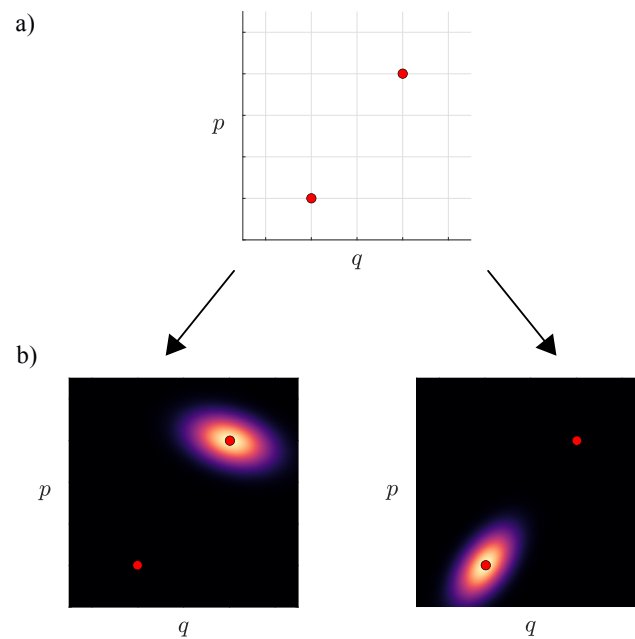


Fig. 2.4.: Representación esquemática de la aproximación semiclásica para un único grado de libertad. a) Valores de equilibrio clásicos en el espacio de fases. b) Distribuciones de probabilidad Gaussianas determinadas a partir de la consideración a primer orden de las fluctuaciones (operadores).

2.4.1. Valores de equilibrio clásicos

Para encontrar los valores de equilibrio clásicos los operadores de *input* se desprecian, mientras que se buscan soluciones de $\dot{a} = \dot{x}_i = \dot{p}_i = 0$. Esto lleva a:

$$\bar{a} = \frac{\eta}{\kappa - i\Delta_{\text{eff}}(\bar{x})} \quad (2.51)$$

$$\bar{p}_i = 0 \quad (2.52)$$

mientras que las posiciones de equilibrio posibles de los iones están determinadas por la condición

$$\nabla V_{\text{tot}}(\bar{x}) = 0, \quad (2.53)$$

donde

$$V_{\text{tot}} \equiv V_{\text{eff}}(\bar{x}) + V_{\text{ion}}(\bar{x}) \quad (2.54)$$

y V_{eff} es un potencial efectivo [132] dado por

$$V_{\text{eff}}(\bar{x}) = \hbar \frac{|\eta|^2}{\kappa} \arctan \left(-\frac{\Delta_{\text{eff}}(\bar{x})}{\kappa} \right) \quad (2.55)$$

En la Fig. 2.5 se muestran dos ejemplos del potencial efectivo total en los límites de amplitud de bombeo láser baja y alta en las figuras a) y b) respectivamente, para el caso de un ion individual. Puede verse aquí cómo en el límite de intensidad de bombeo baja (Fig. 2.5-a)), la posición de equilibrio determinada por el mínimo global del potencial efectivo está dada esencialmente por el potencial de la trampa armónica. Por otra parte, cuando la intensidad de bombeo aumenta y el potencial óptico cobra relevancia, las posiciones de equilibrio correspondientes a los mínimos de V_{tot} se acercan a los pozos del potencial óptico, correspondientes a los mínimos de intensidad del campo más cercanos al centro de la trampa, es decir a $\bar{x} = \lambda/4$.

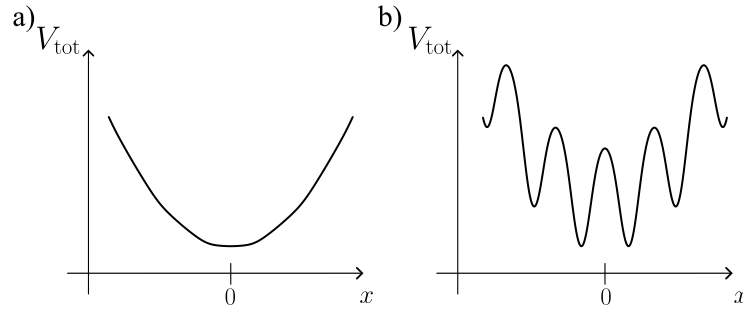


Fig. 2.5.: Potencial efectivo total en los límites de a) intensidad bombeo baja y b) alta.

La ecuación clásica (2.53) para las posiciones de equilibrio sólo impone una condición sobre la derivada del potencial efectivo total, pero las consideraciones de estabilidad para las fluctuaciones cuánticas en torno al equilibrio muestran que las posiciones de equilibrio semiclassicals deben corresponder, como es habitual, a mínimos del potencial efectivo total [20, 116]. Hay que tener en cuenta que el potencial efectivo es útil para encontrar las posiciones de equilibrio, pero no debe interpretarse como una energía potencial.

De la ec. (2.51) se observa que la expresión para el número medio de fotones a orden más bajo está dado por

$$\langle a^\dagger a \rangle \simeq |\bar{a}|^2 = \frac{\eta^2}{\kappa^2 + \Delta_{\text{eff}}^2(\bar{x})}. \quad (2.56)$$

En general, dependiendo de la forma de la ec. (2.55), es posible que se encuentre más de una posición de equilibrio clásica para los iones a través de la ec. (2.54). Esta es la situación de biestabilidad clásica anteriormente comentada. Es importante notar que la misma lleva también a dos estados claramente distintos para el campo de la cavidad a través de la ec. (2.56).

2.4.2. Dinámica de las fluctuaciones

Una vez determinados los valores de equilibrio clásicos, se pueden encontrar las ecuaciones de movimiento para los operadores de las fluctuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\delta a} &= (i\Delta_{\text{eff}} - \kappa)\delta a + i\bar{a}(\delta x \cdot \nabla \Delta_{\text{eff}}) + \sqrt{2\kappa}a_{\text{in}} \\ \dot{\delta x}_j &= \delta p_j/m \\ \dot{\delta p}_j &= -((\delta x \cdot \nabla)\nabla_j H_{\text{ion}} - \hbar|\bar{a}|^2(\delta x \cdot \nabla)\nabla_j \Delta_{\text{eff}}) + \hbar(\bar{a}^* \delta a + \bar{a}\delta a^\dagger)\nabla_j \Delta_{\text{eff}}\end{aligned}\quad (2.57)$$

A continuación, utilizamos una descomposición en modos normales sin tener en cuenta la presencia del campo de la cavidad. Usando la definición del potencial efectivo en ec. (2.55) la tercer ecuación de ecs. (2.57) se puede reescribir como

$$\dot{\delta p}_j = -(\delta x \cdot \nabla)(\nabla_j V_{\text{tot}}) + \hbar(\bar{a}^* \delta a + \bar{a}\delta a^\dagger)\nabla_j \Delta_{\text{eff}} \quad (2.58)$$

Sin considerar las fluctuaciones del campo, las ecuaciones de movimiento de los iones se pueden reescribir como

$$\ddot{\delta x}_j = -\frac{1}{m} \sum_i \delta x_i \partial_{ij} V_{\text{tot}}, \quad (2.59)$$

con lo cual se pueden estudiar los modos normales de vibración asumiendo soluciones oscilatorias con frecuencia ω_v , de donde se obtiene el problema de autovalores:

$$K \delta x = m\omega_v^2 \delta x \quad (2.60)$$

donde los elementos de la matriz K son $K_{ij} = \partial_{ij} V_{\text{tot}}$. Los modos normales corresponden así a operadores q_j dados por

$$q = M^{-1} \delta x \quad (2.61)$$

donde M es la matriz ortogonal de cambio de base a la base de autovectores de K . Es importante notar que los modos normales dependen del potencial óptico a través de V_{eff} .

Se pueden introducir para cada uno de estos operadores q_j y también para los correspondientes momentos p_j , operadores de creación y aniquilación de excitaciones en el modo normal j , definidos de la forma usual:

$$b_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_j + iP_j) \quad (2.62)$$

donde

$$\begin{aligned} Q_j &= q_j / q_{\omega_j^v} \\ P_j &= p_j / p_{\omega_j^v} \end{aligned} \quad (2.63)$$

son operadores canónicos adimensionalizados con escalas características definidas como $q_{\omega_j^v} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_j^v}}$ y $p_{\omega_j^v} = \sqrt{\hbar m\omega_j^v}$. Las ecuaciones de movimiento correspondientes a estos operadores son

$$\dot{b}_j = -i\omega_j^v b_j - ic_j (\bar{a}^* \delta a + \bar{a} \delta a^\dagger) \quad (2.64)$$

donde la intensidad del acoplamiento entre las fluctuaciones del campo y los modos de vibración queda dado por

$$c_j = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_j^v}} \sum_s M_{sj} \partial_s \Delta_{\text{eff}} \quad (2.65)$$

La primera ec. de (2.57) para las fluctuaciones del campo de la cavidad puede entonces reescribirse en términos de los operadores correspondientes a los modos normales:

$$\dot{\delta a} = (i\Delta_{\text{eff}} - \kappa)\delta a - i\bar{a} \sum_s c_s (b_s + b_s^\dagger) + \sqrt{2\kappa} a_{\text{in}}(t) \quad (2.66)$$

Los grados de libertad de movimiento de los iones están también sujetos a ruido. Este mecanismo disipativo tiene diversos orígenes, algunos de los cuales pueden ser [91]:

- decoherencia radiativa: el modo de movimiento del centro de masa puede perder coherencia considerando que el dipolo asociado con la carga oscilante de los iones se acopla a los campos electromagnéticos del ambiente,
- ruido en los electrodos: El estado vibracional de los iones puede perder coherencia debido a las fluctuaciones en el potencial de los electrodos,
- excitación de las vibraciones debida a la micromoción,

entre otros.

En este tratamiento se puede incluir el efecto del ruido sobre los grados de libertad de movimiento de la cadena de iones. Así, en este punto se introducen operadores de *input* que describen ruido sobre los modos normales de vibración, de tal modo que la evolución de los modos dada por ec. (2.64) se modifica dando lugar a

$$\dot{b}_j = -(i\omega_j^v + \Gamma)b_j - ic_j (\bar{a}^* \delta a + \bar{a} \delta a^\dagger) + \sqrt{2\Gamma} b_{\text{in}}(t) \quad (2.67)$$

Las ecuaciones (2.67) y (2.66) pueden utilizarse ahora para describir el estado asintótico del sistema. Dado que ambas ecuaciones son lineales en los operadores de creación y aniquilación, el estado del sistema obtenido mediante este método es Gaussiano a todo tiempo [133]. Considerando además las ecuaciones (2.67) y (2.66) hermíticas conjugadas,

se obtiene un sistema de $2(N + 1)$ ecuaciones lineales inhomogéneo, cuya inhomogeneidad es proporcional a las tasas de decaimiento e incluye los operadores de *input*:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}_{\text{in}}(t) \quad (2.68)$$

donde $\mathbf{x} = (\delta a, \delta a^\dagger, b_1, b_1^\dagger, \dots, b_N, b_N^\dagger)$ y

$$\mathbf{f}_{\text{in}}(t) = \left(\sqrt{2\kappa}a_{\text{in}}(t), \sqrt{2\kappa}a_{\text{in}}^\dagger(t), \sqrt{2\Gamma_1}b_{\text{in},1}(t), \sqrt{2\Gamma_1}b_{\text{in},1}^\dagger(t), \dots, \sqrt{2\Gamma_N}b_{\text{in},N}(t), \sqrt{2\Gamma_N}b_{\text{in},N}^\dagger(t) \right) \quad (2.69)$$

La solución formal a este sistema se puede obtener por el método usual de hacer un cambio de base a la base de autovectores de A . En particular para este problema, consideramos que el estado de *input* es un estado tal que sus funciones de correlación corresponden a ruido blanco clásico [94]:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\text{in},s}^\dagger(t)\phi_{\text{in},s}(t') \rangle &= \bar{N}_{B,s}\delta(t' - t) \\ \langle \phi_{\text{in},s}(t)\phi_{\text{in},s}^\dagger(t') \rangle &= (\bar{N}_{B,s} + 1)\delta(t' - t) \end{aligned} \quad (2.70)$$

donde el subíndice B indica que son los números de ocupación correspondiente al baño térmico, y el índice s indica el modo correspondiente. Mientras que las funciones de correlación de operadores de *input* de dos modos distintos se anulan:

$$\langle \phi_{\text{in},s}(t)\phi_{\text{in},s'}(t) \rangle = \langle \phi_{\text{in},s}(t)\phi_{\text{in},s'}^\dagger(t) \rangle = \langle \phi_{\text{in},s}^\dagger(t)\phi_{\text{in},s'}(t) \rangle = \langle \phi_{\text{in},s}^\dagger(t)\phi_{\text{in},s'}^\dagger(t) \rangle = 0 \quad (2.71)$$

El estado $\rho_{\text{in},s}$ de los modos externos sobre el cual se toman los valores de expectación $\langle \phi_{\text{in},s}^\dagger(t)\phi_{\text{in},s}(t') \rangle = \text{Tr}(\rho_{\text{in},s}\phi_{\text{in},s}^\dagger(t)\phi_{\text{in},s}(t'))$ no es un estado térmico, ya que $\bar{N}_{B,s}$ es independiente de la frecuencia ω_k de los modos del ambiente (lo cual no corresponde con un estado térmico [93], para el cual se tiene $N(\omega_k) = (\exp(\beta\hbar\omega_k) - 1)^{-1}$). Sin embargo la constante $\bar{N}_{B,s}$ (independiente de la frecuencia de los modos del ambiente) puede elegirse como el correspondiente número de ocupación de esos modos externos a una dada temperatura y frecuencia. Esto resulta una buena aproximación ya que se asume que los modos del ambiente que se acoplan fuertemente al sistema son sólo los modos resonantes con las frecuencias del sistema, y se puede asumir que en este rango $N(\omega_k)$ es constante.

En el caso de los modos del campo externo, es decir para los operadores a_{in} , el número de excitaciones del ambiente $\bar{N}_{B,\text{cav}}$ se asume despreciable, y el ambiente sólo provee un mecanismo de disipación de la energía de la cavidad, como se comentó anteriormente. Por otra parte, para los grados de libertad de movimiento, las tasas de calentamiento $\Gamma\bar{N}_{B,\text{modos}}$ son del orden de $10^{-4} - 1$ kHz [16, 60, 134]

Considerando que $P^{-1}AP = D$, con D una matriz diagonal, se obtiene, en el caso de que los autovalores satisfagan $\text{Re}(D_i) < 0$, que se asegura la estabilidad del sistema. Además, el conjunto de los primeros momentos $\langle x_i \rangle$ en el estado asintótico se anulan, mientras que para los segundos momentos se tiene:

$$\langle x_m^\dagger(t)x_{m'}(t) \rangle = \sum_{i,i'=1}^{2(N+1)} P_{mi}^* P_{m'i'} \langle y_i^\dagger(t)y_{i'}(t) \rangle \quad (2.72)$$

donde

$$\langle y_i^\dagger(t)y_{i'}(t) \rangle = \sum_{j=1}^{2(N+1)} P_{ij}^{-1*} P_{i'j}^{-1} \frac{\langle f_{\text{in},j}^\dagger(t)f_{\text{in},j}(t) \rangle}{-(D_i^* + D_{i'})} \quad (2.73)$$

con el vector y definido como $y = P^{-1}x$. Bajo ciertas condiciones el sistema puede ser inestable, dando lugar a que el sistema no tenga un estado asintótico definido. Condiciones más detalladas sobre la estabilidad del sistema están descritas en [116]. A partir de la ec. (2.72) se puede construir la matriz de covarianza del estado Gaussiano que describe el sistema en términos de las funciones de correlación de las fluctuaciones δa y los modos b_j .

Enfriamiento asistido por cavidades

El objetivo de un proceso de enfriamiento es reducir la energía cinética del ion. Usualmente un primer paso típicamente consiste en la utilización de enfriamiento Doppler [135], cuyo límite de temperatura está impuesto por los cambios en momento del átomo inducidos por los procesos de absorción y de emisión espontánea.

Algunos de los tantos mecanismos de enfriamiento propuestos para ir más allá del límite de enfriamiento Doppler son *resolved sideband cooling* [136], en el cual se utiliza un láser en resonancia con la primera banda roja (ec. (2.15)), o enfriamiento por transparencia inducida electromagnéticamente [137].

Otro de estos mecanismos de enfriamiento consiste en aprovechar el acoplamiento entre grados de libertad de movimiento y el campo electromagnético en una cavidad. En este caso, la idea es transferir la energía excedente de los grados de libertad de movimiento al campo de la cavidad, para que luego esta energía se transfiera a los modos del campo externo a través de los procesos disipativos de la cavidad [1].

El enfriamiento eficiente de cadenas de iones es un problema que se vuelve más difícil a medida que el número de modos de vibración de la cadena aumenta. Por ejemplo en [19] se propuso un método para enfriar simultáneamente todos los modos de vibración de una cadena de iones utilizando una cavidad, aprovechando la formación de defectos en la cadena.

La transferencia de energía entre el átomo y el campo puede entenderse aproximadamente en una versión simplificada de la dinámica de la siguiente forma. La mayor parte de los fotones que interactúan con el átomo son dispersados elásticamente, es decir que no involucran un cambio en la energía de los fotones ni del estado de vibración del átomo, estos son los procesos de dispersión de Rayleigh.

Por otra parte, hay una menor proporción de luz que es dispersada causando transiciones entre los distintos estados de movimiento en los procesos de *Raman scattering*. Hay dos

procesos principales en este caso. Para interpretarlos podemos analizar la dinámica unitaria de un único modo de vibración, por ejemplo el modo b_j con frecuencia ω_j^v , acoplado al campo de la cavidad.

$$H = H_{\text{cav}} + H_{\text{vib}} + H_{\text{int}}, \quad (2.74)$$

donde

$$\begin{aligned} H_{\text{cav}} &= -\hbar\Delta_{\text{eff}}\delta a^\dagger\delta a \\ H_{\text{vib}} &= \hbar\omega_j^v b_j^\dagger b_j \\ H_{\text{int}} &= \hbar c_j (\delta a + \delta a^\dagger)(b_j + b_j^\dagger) \end{aligned} \quad (2.75)$$

En la representación interacción tenemos que la dinámica está dada por

$$\tilde{H} = \hbar c_j \left[\left(\delta a b_j e^{i(\Delta_{\text{eff}} - \omega_j^v)t} + h.c. \right) + \left(\delta a b_j^\dagger e^{i(\Delta_{\text{eff}} + \omega_j^v)t} + h.c. \right) \right] \quad (2.76)$$

De esta forma hay dos resonancias para notar: $\Delta_{\text{eff}} = \omega_j^v$ y $\Delta_{\text{eff}} = -\omega_j^v$. Ambos casos, luego de una segunda aproximación de onda rotante, están dados por

$$\begin{aligned} \tilde{H} &\approx \hbar c_j \left[\delta a b_j + \delta a^\dagger b_j^\dagger \right], \quad (\Delta_{\text{eff}} = \omega_j^v) \\ \tilde{H} &\approx \hbar c_j \left[\delta a b_j^\dagger + \delta a^\dagger b_j \right], \quad (\Delta_{\text{eff}} = -\omega_j^v) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Es así que la resonancia $\Delta_{\text{eff}} = -\omega_j^v$ se corresponde a una interacción tipo *beam-splitter*, y produce un intercambio de excitaciones entre el modo de vibración y las fluctuaciones del campo, en donde aparecen procesos en los cuales el estado vibracional gana una cantidad de energía ω_j^v con la consecuente pérdida de energía por parte del campo, y viceversa. Estos son los procesos de *Stokes scattering* y son los que dan lugar al enfriamiento [138]. Por otra parte, la resonancia $\Delta_{\text{eff}} = \omega_j^v$ da lugar a una interacción del tipo *squeezing* de dos modos, estos son los procesos de *anti-Stokes scattering*.

Sin embargo, esta descripción simplificada puede fallar cuando el acoplamiento entre los modos de vibración y las fluctuaciones de la cavidad no es suficientemente débil. En tal caso, los modos de vibración se ven modificados por la presencia de la cavidad, de tal forma que es necesario pensar en los autovectores del sistema en ec. (2.68).

En [19] se mostró que cuando las fluctuaciones de la cavidad están cerca del estado de vacío, la tasa de enfriamiento γ_j del modo b_j es proporcional a $|c_j|^2$. Mientras que generalmente, pueden ser determinadas a partir de los autovalores D_j de la matriz A de ec. (2.68):

$$\gamma_j = -2 \text{Re}(D_j) \quad (2.78)$$

En los casos en los cuales uno de los iones se encuentra en el centro de la trampa o en un pozo del potencial óptico, el acoplamiento a orden más bajo en las fluctuaciones entre el modo de vibración y las fluctuaciones del campo (ec. (2.65)) disminuye. Esto tiene dos consecuencias. La primera es que en ausencia de un mecanismo de disipación que actúe directamente sobre los iones, el estado asintótico del sistema no está bien definido, como

puede verse de ec. (2.67). La segunda consecuencia es que en estos casos el enfriamiento inducido por la cavidad es poco eficiente [116]. Sin embargo, esta no es la única causa de un enfriamiento poco eficiente, ya que también puede darse un calentamiento de los modos de vibración cuando Δ_{eff} se aproxima a cero, lo cual se asocia con estados asintóticos de movimiento más excitados [19, 116].

Material teórico preliminar

3.1. Representación en el espacio de fases

En numerosos casos resulta de gran utilidad reescribir la dinámica de un sistema en términos de funciones complejas en el espacio de fases en lugar de utilizar operadores. Para esto, es necesario un método para asignar tanto al estado del sistema como a los operadores que actúan sobre el mismo estas funciones complejas, de tal forma que los valores de expectación de un operador \hat{A} queden dados como integrales en el espacio de fases:

$$\text{Tr}\{\hat{\rho}(\hat{q}, \hat{p}, t)\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})\} = \int dq \int dp A(q, p)F(q, p, t) \quad (3.1)$$

donde $A(q, p)$ es la función escalar que se obtiene de reemplazar los operadores \hat{q} y \hat{p} en $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ por números reales. A lo largo de esta sección utilizamos el símbolo $\hat{\ }^{\wedge}$ para diferenciar operadores de cantidades escalares.

Es sabido que debido a que \hat{q} y \hat{p} no conmutan, hay más de una forma de asignar una función $F(q, p, t)$ al estado del sistema [139]. Debido a esto, las funciones obtenidas para representar un operador en el espacio de fases dependen de las reglas elegidas para ordenar los productos de operadores no conmutativos. En general, el estado $\hat{\rho}(\hat{q}, \hat{p})$ puede ser mapeado a una familia de funciones escalares $\tilde{F}^f(q, p)$ a través de [139]:

$$\tilde{F}^f(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\xi \int d\eta \text{Tr}\{\hat{\rho}(\hat{q}, \hat{p})e^{i(\xi\hat{q}+\eta\hat{p})} f(\xi, \eta)\} e^{-i\xi q - i\eta p} \quad (3.2)$$

donde cada función $f(\xi, \eta)$ corresponde a diferentes formas de ordenar los operadores y $\chi_{f, \rho} = \text{Tr}\{\hat{\rho}(\hat{q}, \hat{p})e^{i(\xi\hat{q}+\eta\hat{p})} f(\xi, \eta)\}$ es la llamada función característica del estado ρ . Cada una de las posibles funciones $\tilde{F}^f(q, p)$ contiene la misma información sobre el estado del sistema ρ .

Distribución de Wigner

En el caso de la distribución de Wigner, que corresponde a un orden de Weyl [139]:

$$e^{i(\xi q + \eta p)} \leftrightarrow e^{i(\xi\hat{q} + \eta\hat{p})} \quad (3.3)$$

se obtienen valores de expectación de operadores ordenados simétricamente

$$\int d\xi \int d\eta W(q, p)e^{i(\xi q + \eta p)} = \text{Tr}\{\hat{\rho}(\hat{q}, \hat{p})e^{i(\xi\hat{q} + \eta\hat{p})}\} \quad (3.4)$$

es decir que esta elección se corresponde con $f(\xi, \eta) = 1$ [139]. Tomando la transformada de Fourier de ec. (3.4) se obtiene que la distribución de Wigner para el caso de una partícula individual es

$$W_\rho(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int du e^{-iup} \langle q + u/2 | \rho | q - u/2 \rangle \quad (3.5)$$

La existencia de la distribución de Wigner siempre está asegurada, pero ésta no es necesariamente positiva, por lo cual se la llama una distribución de cuasi-probabilidad. Como luego será de utilidad, la generalización de la distribución de Wigner para estados de n variables continuas está definida como [140]:

$$W_\rho(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\vec{u} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{u}} \langle \vec{q} + \vec{u}/2 | \rho | \vec{q} - \vec{u}/2 \rangle \quad (3.6)$$

donde \vec{q} y \vec{p} son los vectores de las n coordenadas y momentos.

La distribución de Wigner de un estado ρ es una distribución de cuasi-probabilidad para ese estado, esto es así dado que $W(q, p)$ puede tomar valores negativos, a diferencia de una distribución de probabilidad normal. Sin embargo, las integrales marginales de $W(q, p)$ son las distribuciones de probabilidad usuales para un estado. Mientras que los valores de expectación se obtienen como

$$\langle (\hat{x}^q \hat{p}^r)_s \rangle = \overline{(x^q p^r)}_W = \int dx dp W(x, p) x^q p^r \quad (3.7)$$

donde el subíndice s indica que se debe simetrizar el operador $\hat{x}^q \hat{p}^r$ [141]. Esto significa poner los operadores en un orden simétrico o de Weyl, en el cual aparecen promediados los $(q+r)!/(q!r!)$ posibles reordenamientos de q operadores \hat{x} y r operadores \hat{p} .

Distribución de Husimi

Esta distribución se corresponde con elegir un orden antinormal en la asignación entre operadores y funciones para los operadores de bajada (a) y subida (a^\dagger) [139], es decir que todos los operadores a se encuentran a la izquierda de los operadores a^\dagger :

$$e^{i(\xi q + \eta p)} = e^{-z^* a + z a^*} \leftrightarrow e^{-z^* \hat{a}} e^{z \hat{a}^\dagger} \quad (3.8)$$

donde se introdujo la relación entre los operadores canónicos q y p y los operadores de escalera de un oscilador armónico:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (m\omega \hat{q} + i\hat{p}) \quad (3.9)$$

por lo cual los valores de expectación obtenidos con esta distribución están dados por

$$\begin{aligned} \int d\xi \int d\eta Q(q, p) e^{i(\xi q + \eta p)} &= \text{Tr}\{\hat{\rho}(\hat{q}, \hat{p}) e^{-z^* \hat{a}} e^{z \hat{a}^\dagger}\} \\ &= \text{Tr}\{\hat{\rho}(\hat{q}, \hat{p}) e^{i(\xi \hat{q} + \eta \hat{p})} f(\xi, \eta)\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde $f(\xi, \eta) = e^{-|z|^2/2} = e^{(-\hbar\xi^2/4m\omega - \hbar m\omega\eta^2/4)}$, y z está dado por

$$z = i\xi\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} - \eta\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}. \quad (3.11)$$

La distribución de Husimi puede encontrarse tomando la transformada de Fourier de ec. (3.10), lo que resulta en

$$Q_\rho(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle \quad (3.12)$$

donde $|\alpha\rangle$ representa un estado coherente. La distribución en Ec. (3.12) está normalizada a 1. Así, esta distribución permite obtener los valores medios de operadores ordenados antinormalmente como:

$$\langle a^q a^{\dagger p} \rangle = \overline{(\alpha^{*p} \alpha^q)}_Q = \int d^2\alpha Q(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*p} \alpha^q \quad (3.13)$$

Expansión de Kramers-Moyal

En lo que sigue, va a ser necesario tener una representación en el espacio de fases de productos de operadores, cuya expresión general para una distribución dada por el ordenamiento indicado por $f(\xi, \eta)$ es [139, 142]:

$$AB \leftrightarrow \tilde{A}^f(q, p, t) f^{-1} \left(-i\overleftarrow{\partial}_q, -i\overleftarrow{\partial}_p \right) f \left(-i\overleftarrow{\partial}_q - i\overrightarrow{\partial}_q, -i\overleftarrow{\partial}_p - i\overrightarrow{\partial}_p \right) f^{-1} \left(-i\overrightarrow{\partial}_q, -i\overrightarrow{\partial}_p \right) \exp \left(i\frac{\hbar}{2}\Lambda \right) \tilde{B}^f(q, p, t) \quad (3.14)$$

donde se definió un operador diferencial $\Lambda = \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overrightarrow{\partial}_p \overleftarrow{\partial}_q$, las flechas indican sobre qué parte de la expresión actúan las derivadas, y $\tilde{A}^f(q, p)$ se obtiene ordenando $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ según el ordenamiento correspondiente a $f^{-1}(-\xi, -\eta)$ y luego reemplazando los operadores \hat{q}, \hat{p} por las variables reales q, p . Así, la representación en el espacio de fases del producto $F = AB$ de operadores está dado para el caso particular de la distribución de Wigner ($f = 1$) por [143]:

$$F_W(q, p) = A(q, p) \exp \left(\frac{i\hbar\Lambda}{2} \right) B(q, p) \quad (3.15)$$

De esta forma se obtienen representaciones en el espacio de fases de los conmutadores y anticonmutadores:

$$\begin{aligned} [A, B]_W &\rightarrow 2iA(q, p) \sin \left(\frac{\hbar}{2}\Lambda \right) B(q, p) \\ \{A, B\}_W &\rightarrow 2A(q, p) \cos \left(\frac{\hbar}{2}\Lambda \right) B(q, p) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Utilizando las identidades de ec. 3.16, la ecuación maestra puede reescribirse en el espacio de fases, obteniéndose así una expansión de Kramers-Moyal que describe la evolución de la distribución de cuasi-probabilidad $W(q_i, p_i)$.

3.1.1. Aproximación truncada de Wigner

La expansión de Kramers-Moyal comentada en la sección anterior puede truncarse con el objetivo de aproximarla por una ecuación de Fokker-Planck (FP), las cuales tienen la forma general:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu_i(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (D_{i,j}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t)) \quad (3.17)$$

y describen la evolución de una distribución de probabilidad $p(\mathbf{x}, t)$, donde μ corresponde al *drift*, y D es la matriz de difusión, semi-definida positiva.

Para interpretar el *drift*, es útil pensar en una realización de la evolución de las variables estocásticas \mathbf{x} , la cual está dada por [144]

$$d\mathbf{x} = \mu(\mathbf{x}, t)dt + B(\mathbf{x}, t)dW_t, \quad (3.18)$$

donde B se obtiene mediante la descomposición de Cholesky de la matriz de difusión $D = BB^T$ y dW_t son los incrementos de un proceso de Wiener [144]. En este caso es claro que el *drift* μ corresponde a la evolución determinista, mientras que B , y por lo tanto D , se corresponde con la difusión debida a los procesos estocásticos.

Esta aproximación es comúnmente llamada *Truncated Wigner Approximation* (TWA) [130, 145, 146]. Para obtenerla, es necesario hacer un desarrollo en serie de potencias de \hbar y quedarse a orden 1 en el mismo. Es importante notar que entonces la evolución unitaria en la TWA adquiere una interpretación particularmente simple. Expandiendo la primera de las ecs. (3.16) a primer orden en \hbar , se tiene

$$-\frac{i}{\hbar} [A, B]_W = A(q, p) \Lambda B(q, p) \quad (3.19)$$

De esta forma, si consideramos la dinámica unitaria de un sistema en el espacio de fases al orden más bajo en \hbar , tenemos que la misma se corresponde con un corchete de Poisson clásico:

$$-\frac{i}{\hbar} [H, \rho]_W \rightarrow \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial W}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial W}{\partial q} = \{H, W\}_{\text{PB}} \quad (3.20)$$

Por último, es importante notar que en algunos sistemas es común que las matrices de difusión obtenidas luego de la TWA no sean semi-definidas positivas, sin embargo en tal caso es posible realizar aproximaciones adicionales que solucionen este conflicto [147]. Lo mismo ocurre al realizar aproximaciones similares en las ecuaciones para las distribuciones P o Q [148].

3.2. Formalismo de estados Gaussianos

3.2.1. Estados Gaussianos

Consideremos un conjunto de operadores canónicos adimensionales q_k, p_k que representan un sistema de N grados de libertad continuos. Los operadores q_k, p_k están relacionados a los operadores creación y aniquilación de un dado modo a través de [149]:

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{(a_k + a_k^\dagger)}{\sqrt{2}} \\ p_k &= \frac{i(a_k^\dagger - a_k)}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

En general, un sistema de N modos bosónicos tiene un espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \bigotimes_{k=1}^N \mathcal{H}_k$, donde cada uno de los subespacios \mathcal{H}_k es a su vez un espacio de dimensión infinita que describe el modo k . Si los operadores canónicos son agrupados en un vector con el orden

$$\vec{\mathbf{R}} = (q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_N, p_N), \quad (3.22)$$

las relaciones de conmutación canónicas se pueden reescribir como:

$$[R_k, R_l] = i\Omega_{kl}, \quad (3.23)$$

donde Ω es la forma simpléctica:

$$\Omega = \bigoplus_{k=1}^N \omega, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

El conjunto de operadores desplazamiento $D(\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{C}^N$ es completo, en el sentido de que cada operador O actuando en el espacio de Hilbert \mathcal{H} puede ser escrito como [150]:

$$O = \int_{\mathbb{C}^N} \frac{d^{2N}\alpha}{\pi^N} \text{Tr}[OD(\alpha)] D^\dagger(\alpha) \quad (3.25)$$

donde $D(\alpha)$ son operadores desplazamiento con $\alpha \in \mathbb{C}^N$. La función $\chi_o(\alpha) = \text{Tr}[OD(\alpha)]$ es la llamada *función característica* del operador O . El conjunto de estados Gaussianos es el conjunto de estados cuyas funciones características son Gaussianas, y por lo tanto los mismos están completamente determinados por sus primeros y segundos momentos, esto es, por el vector de primeros momentos P (3.26) y por la matriz de covarianza σ (3.27):

$$P_i = \langle R_i \rangle \quad (3.26)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \langle \{R_i, R_j\} \rangle - \langle R_i \rangle \langle R_j \rangle \quad (3.27)$$

Esto permite la descripción de sistemas de variable continua en términos de matrices de dimensión finita. Algunos ejemplos particulares de estados Gaussianos son los estados coherentes, estados térmicos de Hamiltonianos cuadráticos, y estados *squeezed* [133].

Las operaciones que mapean estados Gaussianos en estados Gaussianos están descritas por transformaciones lineales del vector R (ec. (3.22)), que mantienen invariantes las relaciones de conmutación en ec. (3.23). Esto es así en tanto la transformación S satisfaga $S\Omega S^T = \Omega$, es decir que deben mantener invariante la forma simpléctica de ec. (3.24). Estas transformaciones son llamadas transformaciones simplécticas, y al nivel del espacio de Hilbert corresponden a operaciones unitarias generadas por Hamiltonianos que a lo sumo son cuadráticos en los operadores de creación y aniquilación [151].

Cada matriz de covarianza puede ser transformada a una forma diagonal por medio de operaciones simplécticas, lo cual difiere de la diagonalización usual de matrices. Esto es, para cada matriz de covarianza σ con N modos existe una transformación simpléctica S tal que [152]:

$$\sigma = S^T \nu S, \quad (3.28)$$

donde

$$\nu = \bigoplus_{k=1}^N \begin{pmatrix} \nu_k & 0 \\ 0 & \nu_k \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Los elementos diagonales ν_k son los autovalores simplécticos de σ , y con la convención que estamos utilizando satisfacen $\nu_k \geq 1/2$ debido al principio de incertidumbre [133]; estos pueden ser obtenidos también como el valor absoluto de los autovalores (con la diagonalización usual de matrices) de $i\Omega\sigma$ [151].

Cada uno de los bloques de la diagonalización simpléctica representa un estado térmico, ya que los mismos son estados Gaussianos diagonales [133]. Este permite evaluar fácilmente ciertas cantidades, por ejemplo la entropía de von Neumann está dada como [151]

$$S_V(\sigma) = \sum_{k=1}^N h(\nu_k) \quad (3.30)$$

donde

$$h(x) \equiv \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln \left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad (3.31)$$

Conociendo la entropía de von Neumann, es posible obtener la información mutua, una medida de la cantidad total de correlaciones (clásicas y cuánticas) presentes en un dado estado [153].

3.2.2. Medidas de Gaussianidad

Existen muchas cantidades utilizadas para cuantificar cuán Gaussiano es un estado arbitrario. Por ejemplo, existen medidas basadas en la entropía relativa [154, 155], la norma de Hilbert-Schmidt [156] o la métrica de Bures [157]. En este trabajo utilizamos una medida de no-Gaussianidad basada en la entropía de Wehrl, propuesta y estudiada en [158]. Dado un

estado ρ , la medida de no-Gaussianidad $\mathcal{N}(\rho)$ está definida como la diferencia de entropías de Wehrl:

$$\mathcal{N}(\rho) = H_W(\rho_G) - H_W(\rho). \quad (3.32)$$

donde el estado de referencia ρ_G representa el estado Gaussiano con los mismos primeros y segundos momentos que ρ , y la entropía de Wehrl, una generalización de la entropía diferencial en teoría clásica de la información, está definida para un estado de N modos como [158]

$$H_W(\rho) = -\frac{1}{\pi^N} \int \prod_{j=1}^N d^2\alpha_j Q_\rho(\alpha) \log Q_\rho(\alpha). \quad (3.33)$$

Esta entropía está basada en la distribución de cuasi-probabilidad de Husimi $Q_\rho(\alpha) = \langle \alpha | \rho | \alpha \rangle$, con $\alpha \in \mathbb{C}^N$ (notar que en este caso se eligió normalizar la distribución a π).

Esta medida tiene varias propiedades deseables, en particular, se centra en las características definitorias de la no-Gaussianidad. La medida $\mathcal{N}(\rho)$ es siempre no negativa, y vale 0 si y sólo si el estado ρ es Gaussiano. Además, una distribución de probabilidad Gaussiana sigue siendo tal si todas las coordenadas del espacio de fases son reescaladas uniformemente. Esta medida tiene la propiedad de que si dos estados cuánticos tienen representaciones en el espacio de fases (dadas por distribuciones de Husimi) que están relacionadas por un reescalo uniforme de todas las coordenadas del espacio de fases, entonces se les asigna la misma cantidad de no-Gaussianidad [158].

3.2.3. Entrelazamiento en estados Gaussianos

Un estado ρ de un sistema bipartito se dice entrelazado cuando no puede escribirse como una combinación convexa de estados producto:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \quad (3.34)$$

El grado en el cual los estados distan de estados como los de la ec. (3.34) es cuantificable y, desde un punto de vista operacional, el entrelazamiento de un sistema se puede considerar como todas aquellas correlaciones que no pueden ser creadas a través de operaciones locales y comunicación clásica (LOCC por sus siglas en inglés) [159]. La cuantificación del mismo es importante dada la cualidad del entrelazamiento como un recurso necesario para la implementación de tareas de computación e información cuánticas [101, 104, 160].

En el caso de sistemas de variables continuas, uno de los criterios más utilizados para detectar la presencia de entrelazamiento es el criterio de Peres-Horodecki [161, 162]. Para enunciarlo es necesario definir la operación de transposición parcial sobre un estado. Dado el estado de un sistema

$$\rho = \sum_{ijkl} \rho_{ijkl} |i\rangle\langle j| \otimes |k\rangle\langle l| \quad (3.35)$$

la operación de transposición parcial con respecto a los grados de libertad del subsistema B se define como [159]

$$\rho^{T_B} = \sum_{ijkl} \rho_{ijkl} |i\rangle\langle j| \otimes |l\rangle\langle k| \quad (3.36)$$

El criterio de Peres-Horodecki se basa en la observación de que los estados separables, luego de una operación de transposición parcial, siguen siendo matrices densidad válidas, es decir definidas positivas [162]. La positividad de la transpuesta parcial (PPT por sus siglas en inglés) es entonces una condición necesaria pero no suficiente para la separabilidad; si un estado ρ es separable $\Rightarrow \rho^{T_B}$ es una matriz definida positiva [161].

Negatividad logarítmica

Un ejemplo particular de medida de entrelazamiento para estados mixtos es la *negatividad*. La negatividad $N(\rho)$ cuantifica la violación del criterio PPT, es decir, cuánto falla la operación de transposición parcial de ρ en dar una matriz definida positiva. Se define así la negatividad como [163]:

$$N(\rho) = \frac{\|\rho^{T_B}\|_1 - 1}{2}, \quad (3.37)$$

donde $\|O\|_1 = \text{Tr}\sqrt{O^\dagger O}$ es la norma traza. La negatividad puede expresarse analíticamente como [151]

$$N(\rho) = \text{máx} \left\{ 0, -\sum_k \lambda_k^- \right\} \quad (3.38)$$

donde $\{\lambda_k^-\}$ es el conjunto de autovalores negativos de ρ^{T_B} . Una medida relacionada, que además tiene la propiedad de ser aditiva, es la *negatividad logarítmica* [163]:

$$E_N(\rho) = \log \|\rho^{T_B}\|_1 = \log(1 + 2N(\rho)) \quad (3.39)$$

Esta medida de entrelazamiento no tiene la propiedad de reducirse a la entropía de von Neumann cuando es aplicada en estados puros, por lo cual en algunos contextos esto es llamado un *entanglement monotone* [159]. La negatividad logarítmica tiene la propiedad de ser una cantidad completamente aditiva [159, 163] lo cual significa que para cualquier par de estados ρ_1 y ρ_2 satisface $E_N(\rho_1 \otimes \rho_2) = E_N(\rho_1) + E_N(\rho_2)$.

La negatividad logarítmica tiene la ventaja de ser fácilmente calculable en el caso particular de estados Gaussianos. Para un estado Gaussiano con matriz de covarianza σ la misma resulta [151]:

$$E_N(\sigma) = \begin{cases} -\sum_k \log(2\tilde{\nu}_k) & \text{para } k : \tilde{\nu}_k < 1/2 \\ 0 & \text{si } \tilde{\nu}_k > 1/2 \quad \forall k \end{cases} \quad (3.40)$$

donde $\{\tilde{\nu}_k^-\}$ es el conjunto de autovalores simplécticos de $\tilde{\sigma}$, la matriz de covarianza correspondiente al estado ρ^{T_B} .

Obtener la matriz $\tilde{\sigma}$ es particularmente sencillo, el procedimiento se basa en la observación de que al adoptar una descripción en el espacio de fases, la operación de transposición parcial se describe como una reversión en el signo de los momentos del subsistema transpuesto. Esto puede verse considerando la distribución de Wigner (ec. (3.5)) de la matriz ρ^T :

$$W_{\rho^T}(q, p) = W_{\rho}(q, -p) \quad (3.41)$$

Debido a esto, para obtener la matriz de covarianza $\tilde{\sigma}$ correspondiente al estado ρ^{T_B} , solo es necesario cambiar el signo de los momentos correspondientes al subsistema B .

En el caso particular de estados Gaussianos esto da un criterio de separabilidad que es especialmente sencillo de verificar, y que para el caso de estados mixtos en biparticiones de (1×1) ó $(1 \times N)$ modos es un criterio necesario y suficiente para detectar la separabilidad de un estado [164].

3.3. Transiciones de fase disipativas y metaestabilidad

El tipo de dinámica que consideramos en esta tesis es un caso particular de sistemas disipativos forzados (*driven-dissipative model*). La literatura disponible actualmente muestra muchos trabajos en tales sistemas para los cuales el uso de aproximaciones semiclásicas lleva a un mapa dinámico que tiene más de un punto fijo [46, 47, 48, 49, 165]. En otras palabras, esto significa que bajo una aproximación semiclásica o de campo medio se observan dos o más estados estacionarios para un dado conjunto de parámetros del sistema. Esto se corresponde a un cierre del gap del Liouvilliano, lo cual es el atributo que define a las transiciones de fase disipativas (TFD) [166].

Esto puede entenderse a través del espectro del generador de la dinámica. Si consideramos la ecuación

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho, \quad (3.42)$$

es claro que un estado estacionario del sistema pertenece al espacio nulo de \mathcal{L}

$$0 = \mathcal{L}\rho, \quad (3.43)$$

y que la presencia de múltiples estados estacionarios ocurre cuando el autovalor 0 es degenerado.

En términos de la descomposición espectral de \mathcal{L} podemos reescribir la evolución del estado del sistema como

$$\rho(t) = e^{t\mathcal{L}}\rho(0) = \sum_{k=0} e^{t\nu_k} \text{Tr}[\rho(0)L_k]R_k, \quad (3.44)$$

donde R_k y L_k denotan los autovectores por derecha e izquierda respectivamente, con sus correspondientes autovalores ν_k . En la Fig. 3.1 se puede ver una representación esquemática del espectro del generador.

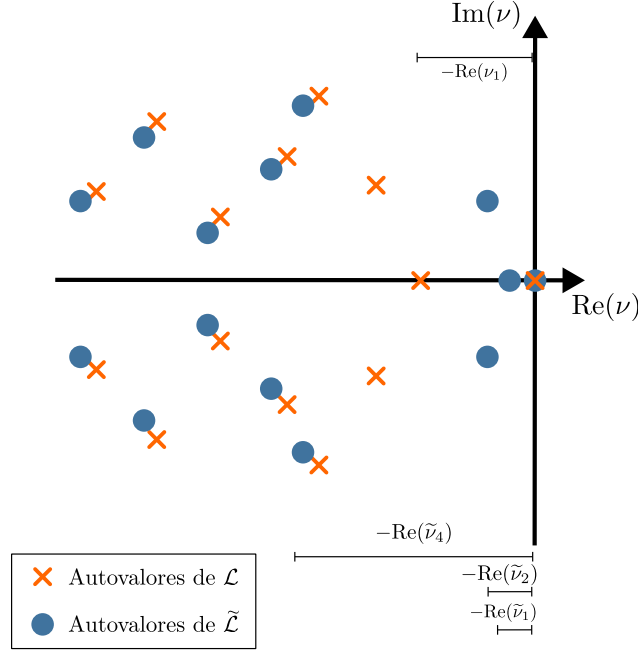


Fig. 3.1.: Diagrama de un espectro de dos generadores distintos \mathcal{L} y $\tilde{\mathcal{L}}$. La tasa de decaimiento más lenta está dada por $-\text{Re}(\nu_1)$. En el esquema correspondiente a $\tilde{\mathcal{L}}$ la presencia de una separación en bloques del espectro da lugar a metaestabilidad.

Es importante notar que si consideramos que los autovalores están ordenados de tal forma que $\text{Re}(\nu_k) > \text{Re}(\nu_{k+1})$, el segundo autovalor, ν_1 , da lugar a la tasa de decaimiento más lenta del sistema, y que la aparición de un régimen biestable se corresponde así con un cierre del gap espectral. Un ejemplo de esto puede verse en un modelo de Ising con coexistencia de fases ferromagnética y paramagnética [167].

Cuando estas transiciones suceden, usualmente hay un cambio no analítico del estado asintótico del sistema, generado por la competencia entre la dinámica unitaria y los mecanismos disipativos. Las transiciones de fase disipativas se nombran así en analogía con las transiciones de fase cuánticas, donde ocurre un cambio no analítico en el estado fundamental de un Hamiltoniano [168].

Las TFD son experimentalmente observables [169, 170, 171] y pueden ser catalogadas como transiciones de primer o segundo orden [166]. Las transiciones de primer orden son aquellas en las cuales el gap se cierra solamente en el punto crítico. Mientras que las de segundo orden con ruptura de simetría corresponden a transiciones en las cuales el gap permanece cerrado en la fase con ruptura de simetría.

Recientemente se mostró mucho interés en estudiar estas transiciones y los fenómenos relacionados a ellas, como por ejemplo metaestabilidad [167, 172, 173], intermitencia [174] y *dissipative freezing* [174, 175, 176]. Las TFD fueron estudiadas también en relación a su utilidad en metrología. Por ejemplo se demostró que en una TFD de primer orden [166] se puede obtener una mejora en la precisión alcanzable [177], dado que en la TFD se alcanza el límite de Heisenberg [178].

Por el contrario, cuando el sistema tiene un tamaño finito (sin aproximaciones semiclásicas o de campo medio, es decir lejos del límite semiclásico o termodinámico), estas fases dan lugar a una dinámica *metaestable* [167]. Esto significa que el gap del Liouvilliano, que da lugar a la tasa de relajación más lenta del sistema, puede volverse muy pequeño pero mantenerse finito [46], como fue demostrado al considerar la dinámica disipativa del modelo de Rabi [179], el modelo de Ising [167], modelo de Bose-Hubbard [146], o una cavidad con una no linealidad de Kerr [51].

Más precisamente, la dinámica metaestable ocurre cuando se produce una separación entre las escalas de tiempo de relajación del sistema. Es decir, cuando $\exists m \in \mathbb{N} \mid \text{Re}(\nu_{m+1})/\text{Re}(\nu_m) \gg 1$, como en el diagrama que se muestra en Fig. 3.1 para los autovalores de $\tilde{\mathcal{L}}$. La dinámica en el régimen metaestable se corresponde con una dinámica estocástica clásica [167], es decir que muestra saltos intermitentes entre las dos fases clásicamente estables.

El estudio de la transición estructural entre ambas configuraciones y el comportamiento de los tiempos de decaimiento alrededor de dicha transición se basan frecuentemente en el análisis de la ecuación maestra (2.17). Es sabido que la resolución numérica de la misma se vuelve rápidamente intratable a medida que el tamaño del sistema crece. La principal razón de esto es que encontrar el estado estacionario corresponde a encontrar el espacio nulo del Liouvilliano \mathcal{L} , que en una representación discreta de un espacio de Hilbert de dimensión N , se corresponde a una matriz de tamaño $N^2 \times N^2$. En nuestro caso en particular, a pesar de que tratamos con sólo dos subsistemas, los mismos están descritos por grados de libertad continuos, es decir, de dimensión infinita. El crecimiento cuadrático se ve reflejado entonces en la representación finita utilizada para la resolución numérica de ec. (2.17).

En el régimen particular en el cual esperamos observar el comportamiento de interés, la cantidad de estados necesarios para aproximar el estado del sistema en una representación finita es cada vez más alta, ya que necesitamos poder representar correctamente estados del sistema que tienen simultáneamente componentes con números altos y bajos de fotones en la cavidad, y estados del ion localizados espacialmente en regiones distintas. Además, es sabido que las fluctuaciones juegan un rol importante en las transiciones de fase disipativas, por lo cual es necesario desarrollar métodos que puedan describir sistemas de tamaños grandes, al mismo tiempo que capturen correctamente la dinámica de las fluctuaciones en el mismo. Es esta combinación de necesidades la que convierte a este en un problema complejo de resolver numéricamente.

Más aún, la metaestabilidad en la que estamos interesados no emerge como una separación de escalas temporales explícitas en el problema, como podrían ser por ejemplo dos procesos que se sabe tienen escalas de tiempo muy distintas (como por ejemplo en la aproximación

de Born-Oppenheimer o en un proceso de eliminación adiabática [180]) donde sería posible realizar una separación entre los grados de libertad *lentos* y *rápidos* analíticamente. Por el contrario, en este sistema la dinámica lenta se presenta como un decaimiento lento hacia el estado estacionario y viene de estudiar el espectro del generador de la evolución del sistema (compuesto) $\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho$. Es decir, la dinámica lenta no se corresponde a la dinámica de uno los sistemas individuales, sino que todos los grados de libertad evolucionan a la misma tasa hacia el estado asintótico.

Transición optomecánica de un ion acoplado a una cavidad óptica

En este capítulo se analizan las configuraciones de equilibrio clásicas del sistema descrito en el capítulo 2 para el caso particular de un solo grado de libertad de movimiento acoplado al campo de la cavidad. Este capítulo es una introducción común a los capítulos 5 y 6, donde se complementará este análisis utilizando distintos métodos más complejos para estudiar el estado asintótico del sistema. Este capítulo está casi enteramente contenido en [53].

Como fue comentado anteriormente, el potencial óptico puede dar lugar a distintas transiciones estructurales en los arreglos que forman las posiciones de equilibrio de los iones en una trampa. Esto sucede debido a que a medida que la intensidad del bombeo láser aumenta, la fuerza óptica sobre los iones lleva a los mismos lejos de los máximos de intensidad del campo (suponiendo una desintonía al azul). Cuando el eje de la cavidad está alineado paralelamente a la cadena de iones, como en la Fig. 1.2, la presencia del potencial óptico da lugar a una transición *sliding-pinned*. Por otra parte, cuando el eje de la cavidad está alineado perpendicularmente a la cadena de iones, como en la Fig. 1.1, se da lugar a la transición lineal-zigzag.

Siguiendo líneas de trabajo previas, nos concentramos en el caso de un Hamiltoniano que preserva la simetría de paridad, lo cual corresponde a una situación en la cual el campo de la cavidad está alineado con el eje de la cadena de iones [20, 116], ya sea paralela o perpendicularmente. Esta suposición es común en otros trabajos, por ejemplo en estudios de la transición *sliding-pinned* en cadenas de tamaño finito [37, 38]. Esto ayuda a la observación de un cambio de comportamiento abrupto alrededor de la región de la transición estructural. Bajo esta suposición, la descripción semiclásica predice un estado estacionario con paridad definida en el régimen de bombeo láser débil, cuando el ion central se encuentra en el centro de la trampa, y un estado estacionario con ruptura espontánea de simetría en el régimen de bombeo láser fuerte (asumiendo que el centro de la trampa coincide con un máximo del potencial óptico).

Como primera aproximación al tratamiento cuántico de nuestro sistema, a lo largo de esta primera parte de la tesis estudiamos el caso de un único grado de libertad de movimiento acoplado al campo de cavidad. Este modo puede corresponder a un único ion atrapado, o puede referirse a la descripción efectiva de un problema en términos de un modo particularmente relevante para la dinámica (por ejemplo el modo “zigzag” en el caso de la transición lineal-zigzag). La configuración es tal que la posición de equilibrio resulta

de una competición entre el potencial de la trampa y las fuerzas ópticas, como se representa en la Fig. 4.1. Por simplicidad, tomamos $\Delta_0 > 0$ y consideramos que el perfil de intensidad del campo de la ec. (2.44) está dado por:

$$g^2(x) = g_0^2 f(x), \quad (4.1)$$

$$f(x) = [(x/x_{\text{eq}})^2 - 1]^2. \quad (4.2)$$

Este perfil de intensidad no describe una configuración experimental realista, pero es útil al propósito de este trabajo dado que para el mismo solo resulta relevante el comportamiento de la intensidad del campo alrededor del centro de la trampa, incluyendo el primer pozo del potencial óptico. Esto resulta en un escenario paradigmático de transición de un pozo simple a un doble pozo. En este caso, las posiciones de equilibrio clásicas se encuentran en $x = 0$ para bombeo débil, mientras que en el límite de un número de ocupación infinito se encuentran en $x = \pm x_{\text{eq}}$. Esta elección fue realizada para hacer el tratamiento numérico más sencillo, además de que hace posible obtener resultados analíticos sobre las distintas regiones de estabilidad para las posiciones de equilibrio clásicas, como se comenta en la sección 4.2. Además, esta elección particular lleva a que la profundidad de los pozos del potencial óptico esté directamente caracterizada por el parámetro $U_0 = g_0^2/\Delta_0$.

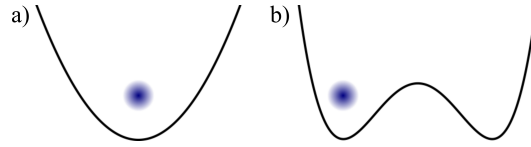


Fig. 4.1.: Representación esquemática de las diferentes configuraciones de equilibrio en el modelo optomecánico considerado: a) régimen de bombeo débil, la cavidad tiene un bajo número medio de fotones y el equilibrio para la posición del ion se localiza en el centro de la trampa de iones; b) régimen de bombeo fuerte, la cavidad tiene un número medio de fotones grande y la posición de equilibrio del ion está determinada principalmente por el potencial óptico, mostrando ruptura de simetría espontánea en el tratamiento semiclásico. Si la cooperatividad es lo suficientemente grande, el tratamiento semiclásico puede predecir la estabilidad de ambos tipos de soluciones en un régimen de bombeo intermedio.

En los próximos capítulos de esta tesis, nos concentramos en estudiar el comportamiento del estado estacionario, y las escalas de relajación hacia el mismo. Para esto utilizamos dos métodos. El primero, correspondiente al capítulo 5, se trata de la diagonalización del generador de la dinámica mediante el uso de métodos de subespacios de Krylov [181]. En este caso, no se utilizó ninguna aproximación “semiclásica” para reducir la complejidad de la dinámica dada por el operador de Liouville \mathcal{L} , definido en (2.17). De esta forma, se obtiene una porción reducida del espectro concentrada en la región de interés (cerca del estado estacionario). El segundo método utilizado fue una descripción simplificada de la dinámica en el espacio de fases, corroborando que la misma es adecuada para encontrar el estado asintótico, y a partir de esto estimando una medida de la tasa de relajación hacia el estado estacionario; esto se encuentra en el capítulo 6.

4.1. Parámetros experimentales

Los valores experimentalmente alcanzables para los distintos parámetros del problema varían en función de la implementación considerada. Las frecuencias típicas de la trampa de iones pueden estar en el rango $\omega = 2\pi \times (47 - 364)$ kHz [4, 5, 32], o incluso $\omega = 2\pi \times 2,7$ MHz [30]. Los valores típicos de la tasa de acoplamiento de un fotón individual (*single photon coupling rate*), que establece la escala para g_0 , son $2\pi \times (0,53 - 6)$ MHz [22, 30, 182]. Los valores experimentales de la tasa de decaimiento de la cavidad son muy variables y generalmente se sitúan dentro del rango $\kappa = 2\pi \times 68$ kHz – 320 MHz [11, 12, 22, 30].

El valor de x_{eq} también depende de la implementación específica en mente. Se puede pensar en nuestro potencial cuártico como una aproximación cualitativa de una intensidad óptica sinusoidal alrededor del centro de la trampa de iones. Así, la posición de equilibrio adimensional corresponde a $x_{\text{eq}}/x_\omega = \lambda/4x_\omega$, donde λ es la longitud de onda del modo de la cavidad.

Como sistemas de ejemplo consideramos átomos de Yb con luz láser de 369 nm [32] y átomos de Ca con 405 nm [5], y entonces $x_{\text{eq}}/x_\omega \approx 2,5 - 7,5$, hasta $x_{\text{eq}}/x_\omega \approx 20$ para una frecuencia de la trampa alta ω de unos pocos MHz. Observamos que también se podría pensar en modelos alternativos en los que el movimiento a lo largo del eje de la cavidad es irrelevante o está fijado, y entonces el potencial óptico correspondería al perfil óptico transversal; en tal caso x_{eq} podría ser mucho mayor.

4.2. Análisis de las configuraciones de equilibrio semiclásicas

En el marco de la aproximación semiclásica comentada en la sección 2.4, consideramos ahora las transiciones entre las distintas configuraciones de equilibrio. Dado que el perfil espacial elegido para la intensidad del campo es par, se tiene que $\bar{x} = 0$ es siempre una solución de ec. (2.53). Considerando la forma del potencial óptico efectivo (2.54), (como se muestra para un único ion en las Figs. 2.5 y 4.1 en el caso de una onda completa y en la aproximación válida alrededor del centro de la trampa armónica, respectivamente) es claro que en el régimen de bombeo fuerte hay otras soluciones de equilibrio, y estas deben satisfacer $\bar{x}^2 < x_{\text{eq}}^2$; la igualdad puede satisfacerse solo en ausencia del potencial de la trampa, o en el límite de intensidad de bombeo infinita.

La ecuación para las soluciones que se encuentran en torno de los mínimos de intensidad del campo, que existen solo para bombeo suficientemente grande, se derivan a continuación. Usando (2.53) y definiendo $z = 1 - (\bar{x}/x_{\text{eq}})^2$, la ecuación que determina las posiciones de equilibrio en torno a los pozos del potencial óptico es:

$$1 + C^2 (z^2 - 1 + c)^2 = 4C\eta_{\text{eff}}^2 z \quad (4.3)$$

donde se definieron las combinaciones adimensionales de parámetros:

$$c = -\frac{\Delta_c}{U_0} + 1 \quad (4.4)$$

asociado con la desintonía, y

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{\eta}{\sqrt{\kappa\omega}} \frac{x_\omega}{x_{\text{eq}}} \quad (4.5)$$

asociado a la intensidad del bombeo láser. Estas soluciones existen solamente para bombeo láser suficientemente grande, y cuando existen, son estables.

Hacemos ahora un análisis de la estabilidad del potencial efectivo total (ec. 2.54) $V_{\text{tot}} = V_{\text{eff}} + V_{\text{ion}}$ en términos de los parámetros del sistema. Se puede determinar para que parámetros los distintos puntos críticos de V_{tot} pasan de ser estables a inestables, es decir, cuando $V_{\text{tot}}'' = 0$. Al considerar la estabilidad de la solución en el centro de la trampa esto se corresponde a:

$$(\eta_{\text{eff}}^{(0)})^2 = \frac{1 + c^2 C^2}{4C} \quad (4.6)$$

es decir que para valores de $\eta_{\text{eff}} > \eta_{\text{eff}}^{(0)}$ la solución $\bar{x} = 0$ es inestable.

Por otra parte, si buscamos los puntos estables e inestables del potencial V_{tot} considerando $\bar{x} \neq 0$, se encuentra que las condiciones en las cuales aparecen las soluciones en los mínimos de intensidad del campo corresponden a:

$$(\eta_{\text{eff}}^{(s)})^2 = z_0 f^2(z_0)/C = \frac{1 + C^2 f^2(z_0)}{4C z_0} \quad (4.7)$$

donde usamos el superíndice s (del inglés *sides*) para indicar que es el valor crítico que corresponde a la aparición de posiciones de equilibrio en torno de los pozos del potencial óptico, mientras que $f(z)$ está dado por la ec. (4.2). Y $z_0 = z_0(C, c, x_{\text{eq}})$ es una de las soluciones de

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + C^2 f^2 - 4z^2 C^2 f \\ &= -3C^2 z^4 - 2C^2(c-1)z^2 + (1 + C^2(c-1)^2) \end{aligned} \quad (4.8)$$

De esta manera, para valores fijos de C , c y x_{eq} , la aproximación semiclásica predice una transición a un régimen de doble pozo que solo depende de η_{eff} . Para el caso particular en el cual el láser está en resonancia con la cavidad, es decir $c = 1$, se tiene:

$$(\eta_{\text{eff}}^{(s)})^2 = \frac{1}{3^{3/4} \sqrt{C}} \quad (4.9)$$

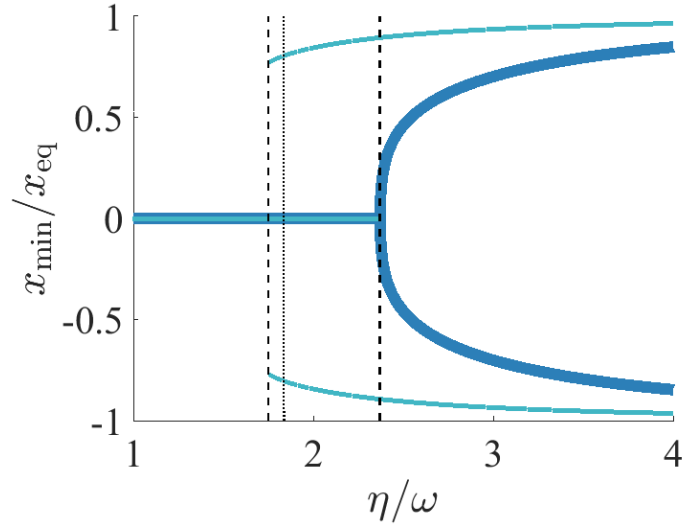


Fig. 4.2.: Mínimos del potencial efectivo total V_{tot} que determinan la posición de equilibrio en la descripción semiclásica. Los parámetros utilizados son $\kappa = \omega$, $x_{\text{eq}} = 3\sqrt{\hbar/(m\omega)}$, $c = 1$, $C = 0,5$ (azul oscuro), $C = 2$ (celeste), correspondientes a transiciones continuas y discontinuas respectivamente. Para este último caso, la línea vertical de puntos muestra el cambio en el mínimo global y las líneas rayadas verticales muestran los valores de transición calculados a partir de la Ec. (4.6) y la Ec. (4.9).

La transición entre los distintos tipos de soluciones puede ser continua o discontinua dependiendo de la cooperatividad C y el parámetro adimensional c asociado a la desintonía. El cambio de transiciones continuas a discontinuas puede ser identificado considerando la condición bajo la cual la inestabilidad de la solución de equilibrio alrededor de los pozos de potencial óptico ocurre cuando la solución de equilibrio clásico $\bar{x} \neq 0$ se acerca a 0. Esto lleva a un valor crítico de C que depende de la desintonía:

$$C_{\text{crit}} = \frac{1}{\sqrt{c(4-c)}}. \quad (4.10)$$

Si C está por encima de C_{crit} , entonces la transición es discontinua; en el caso contrario, es continua. Para una desintonía tal que $c \notin (0, 4)$, la descripción semiclásica predice una transición continua para todo valor de C .

Como ejemplo, en la Fig. 4.2 mostramos los mínimos de V como función de η , para un valor de cooperatividad por debajo (azul oscuro) y por encima (azul claro) del valor crítico. En el primer caso se puede observar una transición continua. En contraste, el segundo caso muestra una transición abrupta en la cual dos mínimos locales aparecen cerca de x_{eq} , mientras que $\bar{x} = 0$ sigue siendo una solución estable. A medida que η aumenta aún más, el mínimo local en el origen se vuelve inestable, y las únicas soluciones estables son las que están alrededor de $\pm x_{\text{eq}}$. En la Fig. 4.3 se muestra una representación esquemática de la transición discontinua en términos del potencial efectivo total (ec. 2.54), donde se puede observar cómo esta transición es reminiscente a una transición de primer orden en la teoría de Landau de puntos tricríticos [183].

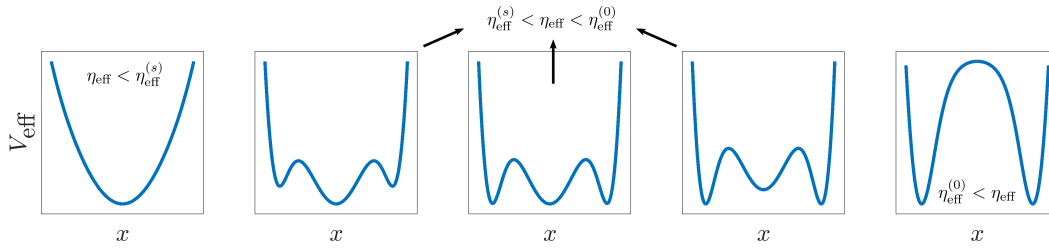


Fig. 4.3.: Potencial efectivo $V_{\text{eff}}(x)$ para C en el régimen de biestabilidad. De izquierda a derecha se muestran valores crecientes de η_{eff}

Observamos que el análisis semiclásico sugiere que las principales características de la transición dependen de muy pocos parámetros adimensionales. Esto no tiene por qué ser así en el régimen verdaderamente cuántico. Por ejemplo, si los mínimos del potencial óptico, $\pm x_{\text{eq}}$, se encuentran dentro de la región espacial ocupada por el estado fundamental de la trampa, entonces no se puede esperar una transición abrupta entre los dos tipos de soluciones, porque el tratamiento cuántico muestra que ambas presentan un overlap. Se espera que el tratamiento semiclásico sea más preciso en el límite de un gran número de fotones y con $x_{\text{eq}} \gg x_{\omega}$, donde $x_{\omega} = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ es la escala de longitud determinada por el estado fundamental de la trampa. Sin embargo, incluso bajo estas suposiciones, la descripción semiclásica falla cerca de los puntos de inestabilidad debido a las grandes fluctuaciones de la posición.

La descripción semiclásica en [20, 38], comentada en la sección 2.4 también incluye un tratamiento lineal de las fluctuaciones, truncando las Ecs. (2.47) a primer orden en los desplazamientos de los valores medios. A partir de este conjunto lineal de ecuaciones, si el régimen de parámetros corresponde a una configuración estable, se puede encontrar un estado asintótico Gaussiano [133] para el sistema. Sin embargo, hay valores de parámetros para los cuales el bombeo induce el calentamiento del grado de libertad de movimiento y, por lo tanto, el sistema linealizado se vuelve inestable [116].

Más aún, en las ecuaciones de las fluctuaciones de la cavidad y del ion llevadas a primer orden, el acoplamiento entre los dos grados de libertad es proporcional a la derivada de la intensidad del campo en la posición del ion (ver ec. (2.65)). Esto significa que, para el modelo que analizamos, este acoplamiento optomecánico es cero en toda la región de parámetros para la cual la posición de equilibrio del ion está en el origen de la trampa. Este hecho tiene dos consecuencias importantes: primero, en este régimen debe incluirse un mecanismo de disipación directa sobre el ion para obtener un estado asintótico. En segundo lugar, este estado asintótico no muestra correlaciones, cuánticas ni clásicas, entre la cavidad y el ion. Estas características se deben a la aproximación lineal y no a las propiedades del sistema cuántico completo.

4.3. Evolución de las fluctuaciones en la aproximación Gaussiana localizada

En esta sección proporcionamos el sistema linealizado de ecuaciones que gobiernan la evolución de las fluctuaciones en el tratamiento Gaussiano localizado estándar. Continuando con el procedimiento iniciado en la sección 2.4, para cada operador A correspondiente a las cuadraturas de los grados de libertad de la cavidad o del movimiento del ion, definimos operadores de fluctuación en la forma $A = \bar{A} + \delta A$, donde \bar{A} el valor medio asociado con la solución semiclásica, y δA un operador con media cero que describe las fluctuaciones en torno de ese valor de equilibrio clásico.

A continuación, derivamos las ecuaciones de movimiento de Heisenberg-Langevin para las fluctuaciones despreciando los términos cuadráticos en cualquiera de los operadores de fluctuación:

$$\begin{aligned}\dot{\delta a} &= (i\Delta_{\text{eff}}(\bar{x}) - \kappa) \delta a + i\frac{c}{\sqrt{2}}(b + b^\dagger) + \sqrt{2\kappa}a_{\text{in}}(t) \\ \dot{b} &= \frac{i}{2\omega} (-(\omega^2 + \omega_v^2) b + (\omega^2 - \omega_v^2) b^\dagger) + i\frac{c}{\sqrt{2}} (e^{-i\varphi} \delta a + e^{i\varphi} \delta a^\dagger)\end{aligned}\quad (4.11)$$

Aquí, δa corresponde a las fluctuaciones del operador de cavidad a , y b, b^\dagger son operadores de aniquilación y creación respectivamente para las fluctuaciones de movimiento del ion, obtenidos combinando $\delta x/x_\omega$ y $\delta p/p_\omega$. Los factores de fase $e^{\pm i\varphi}$ proceden de la fase del valor de equilibrio clásico del campo de la cavidad:

$$\bar{a} = |\bar{a}|e^{i\varphi} \quad (4.12)$$

y el acoplamiento entre las fluctuaciones de movimiento y del campo de la cavidad está dado por:

$$c = |\bar{a}|x_\omega \frac{d\Delta_{\text{eff}}(\bar{x})}{d\bar{x}}. \quad (4.13)$$

Finalmente, $a_{\text{in}}(t)$ representa el operador de *input* dentro del formalismo de *input-output* [94, 131], y

$$\omega_v^2 = \omega \left(\omega - |\bar{a}|^2 x_\omega^2 \frac{d^2 \Delta_{\text{eff}}(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \right) \quad (4.14)$$

contiene la corrección a la frecuencia vibracional introducida por el potencial óptico a orden más bajo.

Como sólo se mantienen los términos de primer orden en las fluctuaciones, la evolución puede describirse en términos de estados Gaussianos en todo momento, y sólo se necesita el vector de primeros momentos y la matriz de covarianza para describir completamente el estado del sistema.

Destacamos que la linealización implica que la desintonía efectiva que aparece en el conjunto de ecuaciones (4.11) se evalúa en la posición de equilibrio clásica \bar{x} . Además, las

fluctuaciones de la cavidad y del ion se desacoplan cuando \bar{x} corresponde a un mínimo o a un máximo del potencial óptico. Ambas cuestiones pueden ser una fuente importante de error para la aproximación Gaussiana localizada. Los valores de Δ_{eff} y de la constante de acoplamiento c son aspectos clave para la eficiencia del enfriamiento debido a la cavidad [19, 116]. El impacto de la linealización es especialmente grande cuando $\Delta_{\text{eff}}(\bar{x})$ es cercano a cero, dentro del régimen biestable, y/o en ausencia de disipación directa en el ion. Observamos que el error particular derivado del uso de $\Delta_{\text{eff}}(\bar{x})$ en (4.11) podría reducirse sustituyéndolo por un valor de $\langle \Delta_{\text{eff}} \rangle$ determinado de forma autoconsistente.

Además notamos que, dentro de esta aproximación, al no incluir un mecanismo de disipación actuando directamente sobre los modos de vibración en ec. (4.11), tenemos que si el campo de la cavidad se desacopla del modo de vibración, entonces este último no tiene un estado estacionario único. A partir de la ec. (4.13) vemos que el acoplamiento entre ambos grados de libertad se anula cuando la posición de equilibrio clásica del ion se encuentra exactamente en el centro de la trampa o en x_{eq} .

Por último es importante comentar sobre el régimen de validez de esta aproximación. En principio, las fluctuaciones del campo se hacen comparativamente pequeñas a medida que el número de fotones en la cavidad crece, de tal forma que tasas de disipación de la cavidad más pequeñas conducen a regímenes más semiclásicos. Por otra parte, la densidad espacial de los iones puede considerarse localizada en torno a los valores de equilibrio clásicos en tanto la probabilidad de transición entre las distintas configuraciones de equilibrio sea baja. Esto requiere que el overlap entre los estados en cada configuración de equilibrio sea pequeña. En este sentido es de esperar que a medida que la distancia entre pozos de potencial óptico crece, el sistema también se aproxime al límite semiclásico.

4.4. Resumen

En este capítulo discutimos un modelo de un único ion acoplado a una cavidad óptica bajo la aproximación semiclásica localizada de sección 2.4. Se dieron los regímenes de parámetros que separan las distintas configuraciones de equilibrio clásicas y se comentó el efecto de considerar las fluctuaciones a orden más bajo.

Transición optomecánica de un ion en el régimen de pocos fotones

En este capítulo consideramos un sistema optomecánico compuesto de un único ion atrapado acoplado dispersivamente [1] a un único modo de una cavidad óptica, de acuerdo al modelo presentado en la sección 2.3.

Siempre consideramos el sistema en las cercanías del régimen en el que la descripción semiclásica predice biestabilidad, pero en el límite de un número medio de fotones pequeño, más concretamente de unos diez fotones en la región de la transición, de modo que no se espera que la descripción semiclásica sea válida. Para trabajar en este régimen, nos mantenemos en valores de κ moderadamente altos, es decir una cavidad que presenta una tasa de pérdidas grande. Proporcionamos un análisis numérico a partir de la descripción completamente cuántica del estado del sistema. Exploramos las características del estado asintótico a lo largo de la transición, con el objetivo de analizar posibles marcadores de la biestabilidad clásica.

De la simetría del Hamiltoniano en ec. (2.45) se deduce que, a menos que se incluya un mecanismo de disipación directa o ruido sobre el grado de libertad de movimiento, el sistema tendrá al menos dos estados estacionarios correspondientes a subespacios con paridad par e impar en el espacio de coordenadas del ion [176]. Cabe mencionar que en un sistema cuántico abierto, una simetría del Liouvilliano no siempre implica una cantidad conservada y la presencia de múltiples estados estacionarios. Dado un operador A generador de una simetría $\mathcal{U} = \exp(i\phi A)$, se considera a esta operación una *simetría débil* si $\mathcal{L}(\mathcal{U}\rho\mathcal{U}^\dagger) = \mathcal{U}\mathcal{L}(\rho)\mathcal{U}^\dagger$. Si además el generador de la simetría satisface las condiciones

$$[A, H] = [A, L_k] = 0 \quad (5.1)$$

donde L_k son los operadores de Lindblad definidos en la ec. (2.18), entonces esta operación es una llamada *simetría fuerte*, e implica la existencia de una cantidad conservada y de múltiples estados estacionarios [176, 184], cada uno correspondiente a un sector de simetría o equivalentemente a la multiplicidad algebraica del espectro de A [185]. Notar que el operador paridad satisface las condiciones de una simetría fuerte (ec. (5.1)) para el sistema descrito en el capítulo 2.

La ruptura espontánea de simetría dada por el modelo semiclásico sólo puede observarse en la descripción cuántica en ausencia de efecto túnel entre pozos de potencial, lo que

corresponde al límite de infinitos fotones. Para simplificar la descripción, y dado que la ruptura de simetría no es la característica que queremos analizar, sólo consideramos el subespacio par de estados de movimiento.

Para simplificar la cantidad de parámetros presentes en el sistema, elegimos $\Delta_c = 0$; esta elección garantiza $\Delta_{\text{eff}} < 0$, que se identificó como una condición necesaria para evitar el calentamiento de los iones inducido por la cavidad [116]. Estudiamos el estado estacionario para valores fijos de cooperatividad C y de x_ω/x_{eq} . En particular, en lo siguiente tomamos $C = 2$, $x_{\text{eq}} = 5x_\omega$. Estos valores se eligieron de tal forma de que exhiban las características de la transición de interés y al mismo tiempo sean numéricamente manejables y cercanos al régimen experimentalmente accesible con la tecnología actual. Aunque no pretendemos describir ninguna implementación particular, nuestras elecciones de parámetros podrían corresponder, por ejemplo, a iones de calcio en la transición a 854 nm, tomando κ , U_0 y ω del orden de $2\pi \times 100$ kHz [12].

Se exploraron otros conjuntos de parámetros, confirmando la expectativa de que números de fotones más pequeños y valores más pequeños de x_{eq} conducen a transiciones más suaves. Aunque las principales características de nuestros resultados son representativas de los fenómenos que queremos estudiar, algunos aspectos de los resultados mostrados no son universales: por ejemplo, hay regímenes para los que el efecto de enfriamiento de la cavidad es demasiado pequeño para llevar a un estado de movimiento que está localizado con respecto a la escala establecida por x_{eq} , y también las posiciones precisas de los máximos en cantidades como la entropía o la negatividad varían de una elección de parámetros a otra.

5.1. Transición de la configuración de equilibrio

A continuación estudiamos el comportamiento de los valores de expectación asociados al campo de la cavidad a medida que se incrementa la intensidad del láser. Dado que la región de biestabilidad semiclassical depende de la combinación adimensional $\eta_{\text{eff}}^2 = \eta^2 x_\omega^2 / (x_{\text{eq}}^2 \omega \kappa)$ y trabajamos a lo largo de esta sección a $x_{\text{eq}} = 5x_\omega$ fijo, las curvas se muestran como funciones de $\eta/\sqrt{\omega\kappa}$. Para mantener C constante, cada curva con κ constante tiene su correspondiente valor de U_0 . Resultados análogos a los de este capítulo, correspondientes a otros conjuntos de parámetros ($C = 3$, $x_{\text{eq}} = 2x_\omega$ y $C = 2$, $x_{\text{eq}} = 3x_\omega$) se muestran en el apéndice C.

En cada figura de esta sección, las líneas discontinuas dividen las tres regiones que tienen un número diferente de mínimos locales en el potencial efectivo total de la ec. (2.54). En la región de la izquierda, V sólo tiene un mínimo en $x = 0$, es decir que se corresponde al régimen $\eta_{\text{eff}} < \eta_{\text{eff}}^{(s)}$; en la región de la derecha sólo son estables los mínimos de los costados de la trampa, es decir $\eta_{\text{eff}}^{(0)} < \eta_{\text{eff}}$; la región del medio corresponde a la biestabilidad clásica, es decir es el régimen $\eta_{\text{eff}}^{(s)} < \eta_{\text{eff}} < \eta_{\text{eff}}^{(0)}$, donde $\eta_{\text{eff}}^{(0)}$ y $\eta_{\text{eff}}^{(s)}$ se definieron en el capítulo 4 en las ecs (4.6) y (4.7) respectivamente. El cambio de un mínimo global en $\bar{x} = 0$ a uno en los lados se muestra con círculos.

La figura 5.1-a) muestra el número medio de fotones en el estado estacionario en función del bombeo y para diferentes valores de κ , U_0 (manteniendo la cooperatividad constante). De acuerdo con la descripción semiclásica, el número medio de fotones para $\eta/\sqrt{\kappa\omega}$ fijo crece a medida que κ disminuye, y más allá de la región de transición el número medio de fotones crece cuadráticamente con η . El número medio de fotones obtenido mediante el tratamiento semiclásico (2.56) sin tener en cuenta las fluctuaciones cuánticas, se muestra en las mismas figuras con líneas discontinuas. Se puede ver que el valor obtenido a partir de la aproximación semiclásica tiene un corrimiento diferente a cada lado de la transición. Este corrimiento está relacionado con el hecho de que la aproximación semiclásica, tal como se describe en la sección 2.4, no tiene en cuenta el efecto de la dispersión espacial del ion sobre Δ_{eff} . En un tratamiento completamente cuántico, esta dispersión tiene un gran impacto en el valor de la desintonía efectiva y a través de ella en el número medio de fotones.

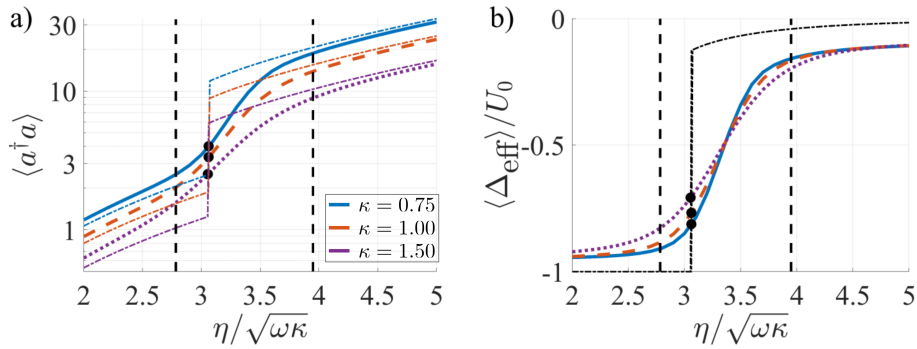


Fig. 5.1.: a) Número medio de fotones (en escala semilogarítmica) y b) valor medio de la desintonía, en función de la intensidad de bombeo. Con líneas punteadas-rayadas se muestran los valores obtenidos mediante la aproximación semiclásica a orden más bajo según (2.56), sin tener en cuenta las fluctuaciones. El resto de las líneas de color muestran los valores medios obtenidos a través de la diagonalización del Liouvilliano. Las curvas corresponden a los valores de los parámetros: $C = 2$, $x_{\text{eq}}/x_\omega = 5$, $\kappa/\omega = 0,75, 1,00, 1,50$ respectivamente (para la desintonía efectiva en b), las diferentes elecciones de κ dan el mismo resultado clásico). Obsérvese que como la cooperatividad C se mantiene fija, diferentes valores de κ corresponden también a diferentes valores de U_0 . La región para la que se produce el comportamiento clásicamente biestable se muestra entre líneas negras discontinuas, y los círculos indican el cambio en el mínimo clásico global.

El comportamiento de $\langle \Delta_{\text{eff}} \rangle / U_0$ en función de $\eta/\sqrt{\kappa\omega}$ se muestra en la Figura 5.1-b). Se muestra la predicción semiclásica correspondiente a $\Delta_{\text{eff}}(\bar{x})$ en líneas discontinuas negras (rayadas-punteadas); sólo puede observarse una curva semiclásica, ya que el resultado no cambia cuando se varía κ y U_0 manteniendo C constante (véase la sección 4.2 para más detalles). Existe una marcada discrepancia entre la predicción semiclásica y las curvas obtenidas de los cálculos numéricos. Esto se debe, como ya se ha mencionado, a la dispersión espacial de la posición del ion. Se puede observar en la figura que $\langle \Delta_{\text{eff}} \rangle / U_0$ crece hacia $\Delta_c = 0$ a medida que η aumenta. Esto es lo esperado, ya que a medida que η se incrementa la densidad de probabilidad del ion tiende a localizarse cerca de los pozos de potencial, que en nuestro caso corresponden a los nodos de campo, reduciendo la desintonía de la cavidad inducida por el ion. Sin embargo, la desintonía efectiva alcanza una meseta en un valor

inferior a Δ_c , porque el ion no se localiza completamente. También se puede confirmar en el gráfico que un aumento del número de fotones en la región de transición da lugar a un comportamiento cada vez más abrupto en $\langle \Delta_{\text{eff}} \rangle$.

Una comprensión más profunda del comportamiento del movimiento del ion puede obtenerse de los gráficos de la Fig. 5.2. El valor medio de x^2 se muestra en 5.2-a). Aunque las curvas son cualitativamente similares, se puede observar que el cambio de estado de movimiento se hace más abrupto a medida que los valores de κ y U_0 disminuyen, de modo que el número de fotones en la región de transición se hace mayor.

La dispersión de x^2 se muestra en la Fig. 5.2-b), donde se puede observar una dispersión máxima alrededor de la mitad de la región de la transición. Para tasas de bombeo grandes, los gráficos confirman que el ion no se localiza completamente, y en realidad las curvas se vuelven casi planas, con una dispersión no nula. Esto puede entenderse teniendo en cuenta que la localización del ion en los nodos del campo hace que la desintonía efectiva sea muy pequeña, a la vez que se reduce el acoplamiento a medida que el ion se acerca al pozo de potencial óptico, lo que limita el efecto de enfriamiento de la cavidad.

Por último, en la Fig. 5.2-c) mostramos la energía cinética del ion, en unidades de $p_\omega^2/m = \hbar\omega$. Las curvas correspondientes son bastante planas en el régimen en el cual el ion está situado en el centro, y muestran un aumento aproximadamente lineal con η en el régimen de bombeo grande. Este crecimiento es esperado ya que la escala de energía de movimiento asociada al potencial óptico clásico, despreciando *back-action*, aumenta como $\hbar\eta$.

Esto puede verse considerando que en el régimen de bombeo fuerte, el ion se localiza en uno de los pozos del potencial óptico, por lo cual se puede hacer una expansión del potencial en torno a x_{eq} . Si además se desprecia el efecto de *back-action* se puede sustituir el operador para el número de fotones por el correspondiente valor medio clásico, resultando en:

$$\hbar U_0 f(x) a^\dagger a \approx \hbar U_0 \frac{\eta^2}{\kappa^2 + \Delta_c^2} \frac{4}{x_{\text{eq}}^2} (x - x_{\text{eq}})^2 \quad (5.2)$$

Esto puede considerarse como un movimiento armónico con frecuencia dada por

$$\bar{\omega}^2 = \hbar U_0 \frac{8}{m x_{\text{eq}}^2} \frac{\eta^2}{\kappa^2 + \Delta_c^2} \quad (5.3)$$

de donde la escala de energía típica de este sistema crece como $\hbar\bar{\omega} \propto \hbar\eta$.

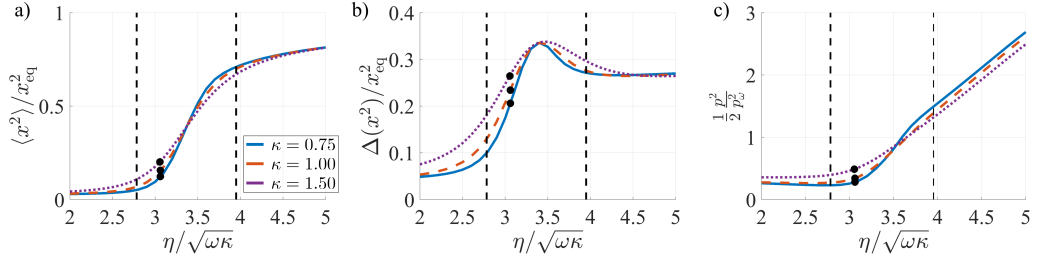


Fig. 5.2.: a) Valor medio del operador x^2 asociado a la posición del ion, en unidades de x_{eq}^2 . Nótese que el valor medio de x es siempre cero por razones de simetría. b) Dispersión de x^2 en unidades de x_{eq}^2 . c) Energía cinética media del ion, en unidades de $p_{\omega}^2/m = \hbar\omega$. Las curvas corresponden a los valores de parámetros: $C = 2$, $x_{\text{eq}}/x_{\omega} = 5$, $\kappa/\omega = 0,75, 1,00, 1,50$ respectivamente. En todos los casos la cooperatividad se mantiene fija, de manera que distintos valores de κ se corresponden a diferentes valores de U_0 .

En la descripción semiclásica, las dos configuraciones de equilibrio diferentes para el ion se relacionan directamente con dos valores de equilibrio distintos de la amplitud del campo de la cavidad. Este comportamiento puede observarse aproximadamente en las distribuciones de Husimi $Q_{\rho}(\alpha)$ (ver Sección 3.1). Mostramos estas distribuciones en la Fig. 5.3 para la cavidad (arriba) y el ion (abajo), con una tasa de bombeo creciente de izquierda a derecha. En [49, 51], los autores observan que la distribución de Husimi tiene dos lóbulos distintos en el régimen biestable. En este sentido, cabría esperar que la biestabilidad clásica se corresponda a una distribución de Husimi del ion con picos distintos en $x = \pm x_{\text{eq}}$ y $x = 0$ y con dos picos separados para las amplitudes de cavidad asociadas. Estas condiciones están relacionadas con los requisitos ya mencionados de que x_{eq} sea mucho mayor que x_{ω} y que el número medio de fotones sea mucho mayor que 1. Este límite no se alcanza para nuestros regímenes de parámetros, lo que queda claro en las funciones de Husimi que muestran un overlap no despreciable entre los picos que corresponden a diferentes soluciones semiclásicas.

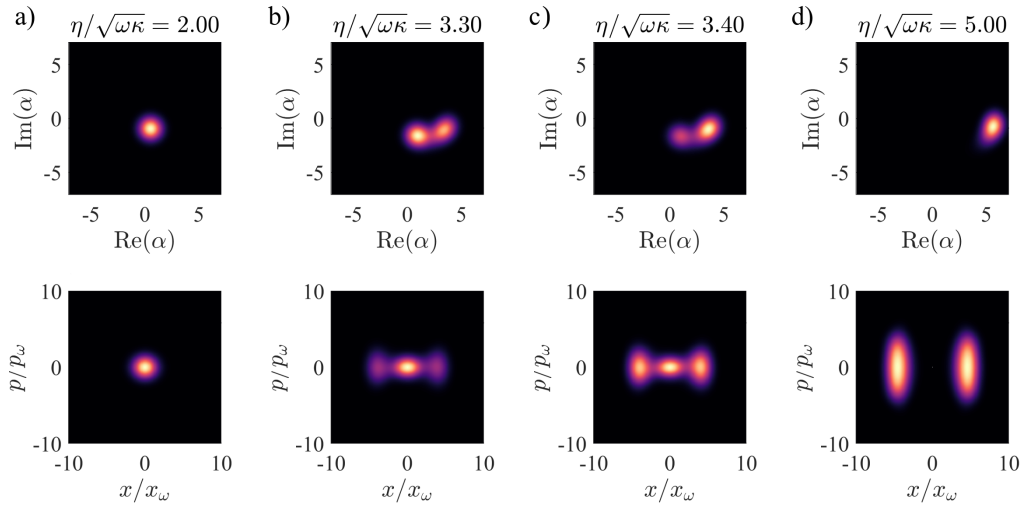


Fig. 5.3.: Distribuciones de Husimi para los estados reducidos de la cavidad y el ion, para $C = 2$, $x_{eq}/x_\omega = 5$, $\kappa/\omega = 0,75$, y $\eta/\sqrt{\omega\kappa} = 2,0, 3,3, 3,4$, y $5,0$, de izquierda a derecha. La fila superior corresponde al estado reducido de la cavidad, donde $\text{Re}(\alpha)$ y $\text{Im}(\alpha)$ son las cuadraturas de campo, mientras que la fila inferior corresponde al estado reducido del ion.

5.2. Análisis de marcadores típicos de la transición

A continuación estudiamos el comportamiento de varias magnitudes que se espera que muestren señales claras de la transición y/o indiquen metaestabilidad en la descripción cuántica del sistema. En primer lugar, analizamos la pureza del estado, que se espera que tenga un mínimo en la transición. Por ejemplo, en [166] los autores observan que el mínimo de pureza se produce en la transición entre diferentes fases, y en [49], utilizando el formalismo de trayectorias cuánticas, se identifican dos tipos diferentes de trayectorias, explicando el estado asintótico como una mezcla estadística de las dos configuraciones de equilibrio. En la Fig. 5.4 mostramos la entropía de von Neumann $S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log \rho)$ del estado del sistema compuesto y la de los estados reducidos.

Observamos un claro pico para la cavidad, pero no en la entropía del sistema completo o del ion. Una vez más, esto es una consecuencia del enfriamiento ineficiente de la cavidad. En el caso ideal, donde la cavidad puede enfriar completamente el movimiento del ion, se esperaría que el estado del mismo en el régimen de bombeo débil (fuerte) lejos de la región de biestabilidad clásica se aproxime a un estado fundamental alrededor del pozo de potencial armónico (óptico). En este caso, alejándonos de la región de biestabilidad clásica, el acoplamiento (en la representación semiclásica localizada, c_j de ec. (2.65)) entre los grados de libertad decrece a valores pequeños pero no nulos, debido a la dispersión espacial del ion. Esto lleva a un enfriamiento inducido por la cavidad ineficiente. Es por esto que en un régimen de bombeo fuerte hay un exceso de energía en el modo de vibración del ion, que

se traduce en una pureza que decrece a medida que η crece (además, se observó en la Fig. 5.2 que la energía cinética del ion crece con η , como se esperaría del análisis semiclásico). Por la misma razón, cuando la intensidad del bombeo láser es baja, el ion no se localiza completamente de acuerdo al estado fundamental de la trampa armónica, y por lo tanto la entropía en este régimen no se aproxima a 0.

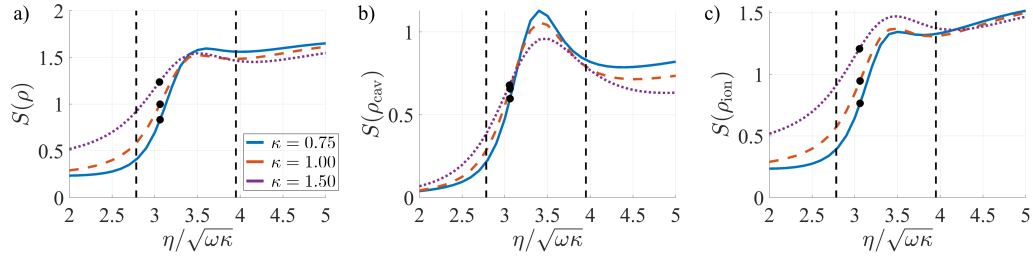


Fig. 5.4.: Entropía de Von Neumann del sistema compuesto y la de los estados reducidos ρ_{cav} y ρ_{ion} . Los parámetros son los mismos que en las figuras previas del mismo capítulo.

A pesar de que el estado es claramente un estado mezcla, existe un entrelazamiento no nulo entre el ion y el campo de la cavidad. En la Fig. 5.5-a) mostramos el comportamiento de la negatividad logarítmica E_N [151, 163] (ver sección 3.2.3) para los mismos parámetros que en las figuras anteriores. Para los regímenes de parámetros que estudiamos, la negatividad alcanza un máximo dentro de la región de transición. Además, el pico se agudiza a medida que aumenta el número medio de fotones en la transición. En cualquier caso, debe tenerse cuidado respecto a la cuantificación del entrelazamiento en este tipo de sistemas, ya que diferentes medidas de entrelazamiento pueden ser más relevantes dependiendo del propósito del estudio [151, 159]. Es importante destacar que una negatividad logarítmica distinta de 0 implica la presencia de entrelazamiento. Sin embargo, en estados bipartitos no Gaussianos o incluso en estados Gaussianos de más de dos modos [164], es posible que haya estados entrelazados con transpuesta parcial positiva, es decir cuyo entrelazamiento no es detectable por el criterio PPT.

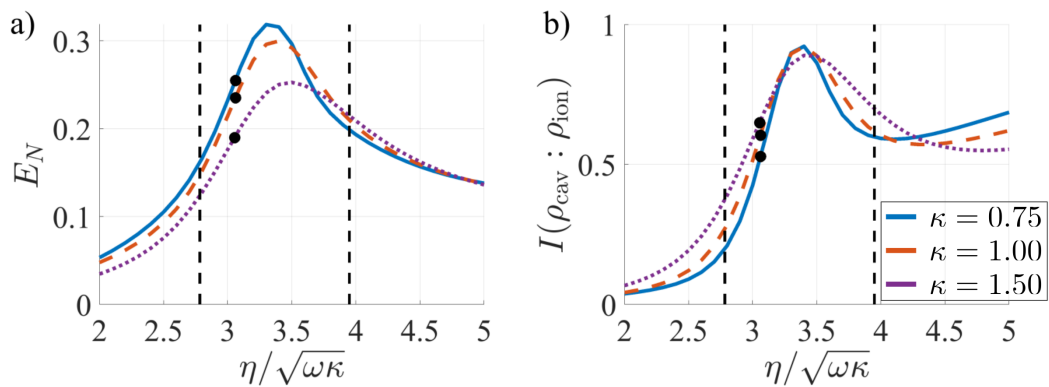


Fig. 5.5.: a) Negatividad logarítmica entre grados de libertad del campo y del movimiento. b) Información mutua entre grados de libertad del campo y del movimiento. Los parámetros son los mismos que en las figuras previas de este capítulo.

Otra forma de cuantificar las correlaciones entre el campo de la cavidad y el movimiento de los iones, que abarca tanto las correlaciones cuánticas como las clásicas, viene dado por la información mutua, que para un sistema compuesto con partes A y B es [153]

$$I(A : B) = S(A) + S(B) - S(A, B) \quad (5.4)$$

donde $S(A, B)$ es la entropía de von Neumann del sistema compuesto.

En la Fig. 5.5-b) mostramos el comportamiento de esta cantidad, que también muestra un pico en la región de transición. Dentro de la región de transición la magnitud de las correlaciones en términos de información mutua es aproximadamente la misma para todas las curvas mostradas, independientemente de la diferencia en el número medio de fotones. Los grandes valores de la información mutua en el régimen de bombeo fuerte están relacionados con la forma de la distribución de Husimi de la cavidad, que muestra una “estela” que recuerda a la configuración de equilibrio alternativa. Esto es, que nuevamente el enfriamiento poco eficiente inducido por la cavidad causa que los estados del ion disten de ser estados puros, como puede observarse a partir de Fig. 5.4-c), lo cual explica que la información mutua no decrezca.

La evolución temporal del sistema se puede escribir formalmente considerando la descomposición espectral de \mathcal{L} : R_k y L_k denotan los autovectores por derecha e izquierda respectivamente, con sus correspondientes autovalores ν_k . Así el estado del sistema puede escribirse como

$$\rho(t) = e^{t\mathcal{L}}\rho(0) = \sum_{k=0} e^{t\nu_k} \text{Tr}[\rho(0)L_k] R_k \quad (5.5)$$

de donde es claro que, si se asume que los autovalores están ordenados de tal forma que $\text{Re}(\nu_k) > \text{Re}(\nu_{k+1})$, el segundo autovalor da la tasa de decaimiento más lenta del sistema.

Se espera que la aproximación a la biestabilidad clásica se traduzca, en un tratamiento cuántico con gran número de excitaciones, en metaestabilidad, es decir, en la aparición de un decaimiento muy lento hacia el estado asintótico. Esta escala de tiempo, mucho más lenta que las demás escalas del sistema, puede observarse como un gap muy pequeño en el espectro del superoperador de evolución: el autovalor asociado al decaimiento más lento se vuelve muy cercano a cero. Entonces, la relajación tiene lugar en dos pasos: una relajación rápida hacia la variedad metaestable seguida de una aproximación muy lenta al verdadero estado asintótico [172].

En la figura 5.6 mostramos el gap espectral del Liouvilliano. No se observa ningún indicio de una disminución significativa del mismo en la región de la transición. En realidad, observamos más bien que el gap se hace más pequeño cuanto más lejos se está de la transición, debido a una reducción de la eficiencia de enfriamiento de la cavidad. Los rasgos irregulares observados en algunas de las curvas se deben a cruces de niveles. Confirmamos a partir de este gráfico que se requiere un mayor número de fotones y/o valor de x_{eq} para acercarse a la metaestabilidad. Sin embargo, observamos una convergencia numérica muy

lenta de los valores del gap, por lo que obtener una estimación precisa del mismo es mucho más difícil que el cálculo de los valores de expectación del estado estacionario.

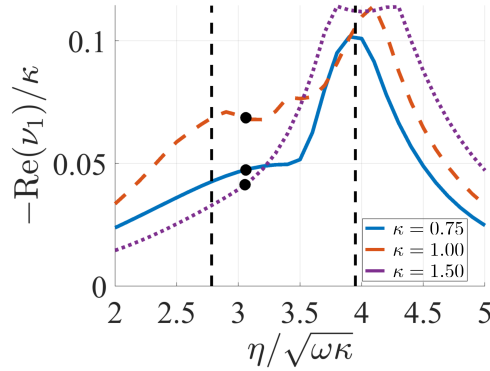


Fig. 5.6.: Gap del espectro del Liouvilliano en unidades de κ . Aquí, ν_1 es el autovalor más cercano a $\nu_0 = 0$, asociado al estado estacionario. Los parámetros son los mismos que en las figuras anteriores de esta sección.

5.3. Gaussianidad del estado estacionario

Como cuestión final, consideramos hasta qué punto el estado asintótico puede ser aproximado por un estado Gaussiano. La descripción semiclásica sólo puede ser aproximadamente correcta cuando el estado está cerca de ser Gaussiano, aunque ésta es una condición necesaria pero no suficiente. Como cuantificador del carácter no Gaussiano del estado, elegimos trabajar con la medida definida en [158] y explicada en la sección 3.2.2.

Esta medida se basa en la entropía de Wehrl H_W (ec. (3.33)):

$$\mathcal{N}(\rho) = H_W(\rho_G) - H_W(\rho) \quad (5.6)$$

donde ρ_G es el estado Gaussiano que tiene los mismos primeros y segundos momentos que ρ (para más detalles ver sección 3.2.2). Esta medida asigna la misma cantidad de no-Gaussianidad a dos estados relacionados por un escaleo del espacio de fases. También tiene la propiedad de ser invariante ante desplazamientos en el espacio de fases. Para referencia, al estado de Fock $|1\rangle$ se le asigna una no-Gaussianidad $\mathcal{N}(|1\rangle\langle 1|) \simeq 0,12$ [158].

En las Figs. 5.7-a) y b) mostramos esta medida para cada subsistema en función de la intensidad del láser. Recurrimos al cálculo de la no Gaussianidad para los subsistemas, ya que el estado del sistema completo sólo puede ser aproximadamente Gaussiano si los estados de los subsistemas lo son. La Fig. 5.7-a) muestra que, como se esperaba, el estado de la cavidad es máximamente no Gaussiano en la región de la transición, y es aproximadamente Gaussiano para un régimen de bombeo bajo. Sin embargo, este no es el caso más allá de la transición; esto puede relacionarse con la existencia de una importante deformación en

la correspondiente distribución de Husimi de la Fig. 5.3 (la distribución de Husimi de un estado Gaussiano es una distribución Gaussiana).

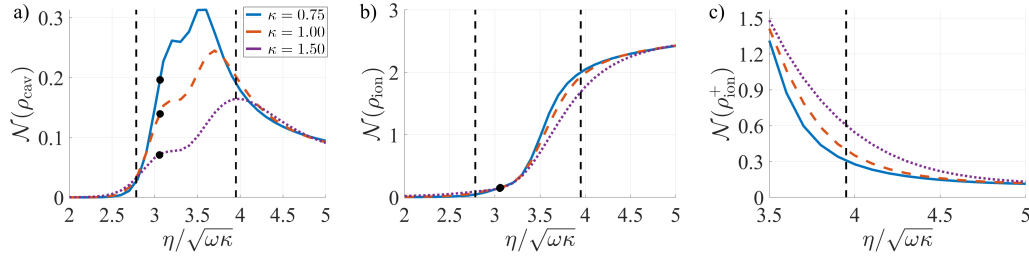


Fig. 5.7.: Medida de no-Gaussianidad $\mathcal{N}(\rho)$ dada por Ec. (5.6), calculada para: a) el estado de la cavidad, b) el estado de movimiento del ion, c) el estado de movimiento proyectado sobre el semieje positivo (sólo se muestra para la región de parámetros en la cual el ion está predominantemente localizado alrededor de los mínimos de intensidad del campo). Los parámetros son los mismos que en las figuras anteriores de esta sección.

La no Gaussianidad del estado del ion muestra un comportamiento monótono creciente con el aumento del bombeo. Esto puede entenderse teniendo en cuenta la simetría espacial: en el límite de bombeo grande, nuestro modelo predice una distribución de probabilidad para el ion con dos picos, uno a cada costado de la trampa. Un verdadero estado semiclásico correspondería a uno de estos dos picos. Para corregir este efecto, y analizar la Gaussianidad de un solo pico, consideramos un estado que se proyecta sobre el semieje positivo (o negativo) x . Esto lo conseguimos mediante el operador de proyección tal que:

$$P_+|x\rangle = \begin{cases} |x\rangle & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

seguido de la correspondiente normalización del estado. La aplicación de P_+ sobre un estado que no se hace 0 en el origen conduce a discontinuidades que no son físicas y hacen que el comportamiento del momento esté mal definido. Sin embargo, trabajamos con un operador modificado que se trunca en la base de estados de Fock.

Dado que estamos aplicando la acción de este operador y luego truncando la representación en una base de estados de Fock a una base finita, el resultado de esta operación ya no es exactamente este operador de proyección propiamente dicho, sino uno que da una aproximación cualitativamente correcta pero sin comportamientos bruscos alrededor de $q_{\text{ion}} = 0$.

Después de este procedimiento, en el límite de bombeo fuerte, las soluciones de estado estacionario se asemejan a la solución semiclásica con ruptura espontánea de simetría. La no-Gaussianidad del estado resultante se muestra en la Fig. 5.7-c). Utilizando el estado proyectado, el estado de movimiento sí muestra una tendencia hacia un carácter Gaussiano a medida que se incrementa la intensidad de bombeo, lo que indica que una aproximación Gaussiana puede ser aplicable lo suficientemente lejos del régimen clásicamente biestable.

5.4. Resumen

En este capítulo, nos concentramos en el régimen de parámetros para el cual la descripción semiclásica predice dos configuraciones de equilibrio claramente diferenciables en los límites de bombeo débil y fuerte, y un régimen biestable para intensidad de bombeo intermedia. A través de una comparación con los resultados obtenidos para el espectro del generador de la dinámica, observamos cómo esta descripción semiclásica no es válida en las cercanías de la transición entre configuraciones, o cuando el número medio de fotones de la cavidad es pequeño.

Nuestros resultados muestran algunas características de la transición predicha por el tratamiento semiclásico de la sección 2.4, pero ninguna indicación de metaestabilidad, que es lo que esperaríamos encontrar para sistemas de tamaño finito que muestran biestabilidad clásica. Confirmamos la expectativa de que la transición se hace más abrupta cuando aumenta el número medio de fotones en el régimen de biestabilidad clásica.

Los resultados de la aproximación semiclásica localizada de la sección 2.4 sólo pueden ser aproximadamente válidos cuando el estado asintótico sea aproximadamente Gaussiano. Como se verificó en este capítulo, para los parámetros que elegimos el estado puede tomarse como aproximadamente Gaussiano en el régimen de bombeo débil, y en menor medida luego de la transición, siempre fuera de la región de biestabilidad.

También observamos máximos locales de negatividad logarítmica, información mutua y entropía de von Neumann para el estado asintótico del sistema en la región de transición. No detectamos, sin embargo, una disminución del gap espectral, de modo que en todo momento el estado asintótico está claramente separado del resto de autoestados de \mathcal{L} . En general, confirmamos que la descripción semiclásica del estado no es apropiada en este régimen, pero sí captura a grandes rasgos la localización de la región de transición.

Transición optomecánica de un ion cerca del régimen semiclásico

En el capítulo anterior nos mantuvimos en regímenes donde hay un overlap no despreciable entre las distintas configuraciones que se corresponden a las soluciones de equilibrio clásicas. En el estudio se encontró un acuerdo cualitativo con varias predicciones semiclásicas, pero no se observó un cierre del gap espectral (lo cual señalaría biestabilidad clásica), esto se atribuyó a las limitaciones en el tamaño del sistema impuestas por la técnica de diagonalización numérica.

A lo largo de este capítulo, nos concentramos en regímenes de parámetros en los cuales el sistema se aproxima al límite de validez de la aproximación semiclásica. Utilizaremos otras aproximaciones semiclásicas que permitan tener en cuenta las transiciones entre ambos tipos de configuraciones presentes en el régimen clásicamente biestable. Este régimen necesariamente se corresponde con estados de un número de fotones alto, y con una distribución en el espacio de fases que no está localizada en torno a un único punto cuando el sistema se encuentra en la región de biestabilidad clásica. Esto causa que el enfoque numérico del capítulo anterior no sea fácilmente aplicable a esta situación.

Debido a esta complejidad computacional, los tratamientos teóricos suelen basarse en descripciones semiclásicas que no pueden aplicarse en las proximidades de puntos críticos o cuando el sistema *tunelea* entre diferentes configuraciones semiclásicas. En el presente capítulo, ampliamos el estudio del capítulo anterior considerando un tratamiento alternativo basado en la aproximación de Wigner truncada (TWA por sus siglas en inglés: *Truncated Wigner Approximation*), un método para describir distribuciones en el espacio de fases que conduce a una ecuación de Fokker-Planck (ver sección 3.1). Esta tiene muchas ventajas, puede simularse eficientemente [131, 147, 186, 187], y permite describir con facilidad distintos modelos de ruido para los subsistemas. Comparamos el estado asintótico encontrado con esta técnica con los resultados de la diagonalización completa del Liouvilliano, así como con la descripción semiclásica en términos de estados Gaussianos. Esto nos permite encontrar las regiones de parámetros donde la TWA es más precisa.

La TWA consiste en escribir la dinámica generada por \mathcal{L} en el espacio de fases, y luego truncar la ecuación resultante para convertirla en una ecuación de Fokker-Planck. Este procedimiento ampliamente utilizado en distintos sistemas [146, 147, 188] fue implementado también en particular para describir átomos neutros acoplados a cavidades en el régimen de

un número medio de fotones bajo [130, 189] o en trampas de iones (sin acoplamiento a una cavidad) [190].

En este capítulo corroboramos que en una gran parte del espacio de parámetros, el sistema así descrito se comporta similarmente al sistema original a lo largo de toda la transición, y verificamos que el mayor error de esta aproximación (en comparación al resultado de la diagonalización exacta usada en capítulo 5) se presenta en la región de la transición estructural. Aunque esta es justamente la región de interés, verificamos que los resultados de utilizar esta aproximación son correctos en una gran parte del espacio de parámetros y que son considerablemente más cercanos al resultado exacto que los resultados obtenidos mediante la aproximación semiclásica usual (de la sección 2.4), incluso en la región de la transición estructural.

Con el uso de esta aproximación semiclásica no localizada se obtiene un único estado asintótico, en concordancia con el tratamiento completamente cuántico. Además, se obtiene un comportamiento suave de la transición estructural lejos del límite semiclásico, tal como se observó sin utilizar la aproximación semiclásica en el capítulo 5. Se encuentra una estimación correcta de la región de la transición, y se observa que la misma se acerca a los resultados de la aproximación semiclásica comentada en la Sección 2.4 a medida que se alcanza el límite semiclásico.

La TWA no es comúnmente utilizada en el contexto de cadenas de iones acopladas a cavidades ópticas y creemos que ofrece grandes ventajas con respecto a la aproximación semiclásica Gaussiana más usual. Hay dos diferencias entre ambas aproximaciones. La primera está en que en la aproximación semiclásica usual (comentada en la sección 2.4), el punto de partida es considerar que la distribución de probabilidad en el espacio de fases está localizada en torno de los valores de equilibrio clásicos. Así, por construcción este procedimiento no puede describir soluciones que son mezclas estadísticas de estados situados alrededor de diferentes soluciones semiclásicas, y como vimos en el capítulo anterior, esperamos que este tipo de situación sea genérica dentro del régimen de biestabilidad semiclásica. La segunda es que en esta misma aproximación se considera que el estado del sistema es Gaussiano, resultado que proviene de despreciar el efecto de la no linealidad de las fluctuaciones en las ecuaciones de movimiento de Heisenberg. Esta aproximación causa que en algunos casos las fluctuaciones que determinan el estado del sistema no sean estimadas correctamente.

En contraste, en la TWA no se hace ninguna suposición sobre la distribución de probabilidad en el espacio de fases por lo que la evolución de la ecuación de Fokker-Planck resultante lleva a distribuciones de probabilidad que no están restringidas a estar localizadas en torno a un único punto clásico, pudiendo presentar superposiciones, como fue observado en los resultados de las distribuciones de Husimi del capítulo 5. Al mismo tiempo, la consideración de las no linealidades da a las distribuciones de probabilidad obtenidas un carácter no Gaussiano. Consideramos que ambas características dan lugar a la mejora de esta aproximación en comparación a la descripción en términos de estados Gaussianos. La TWA se representa esquemáticamente en la Fig. 6.1, comparar esto con la aproximación semiclásica de estados Gaussianos (Fig. 2.4).

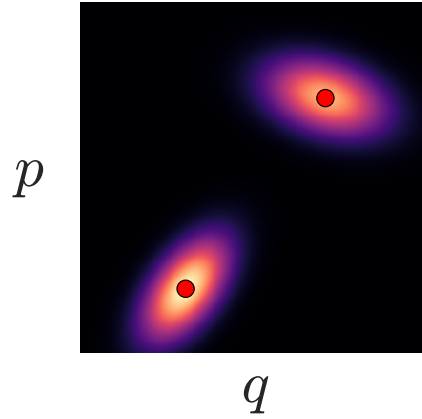


Fig. 6.1.: Representación esquemática de las distribuciones de probabilidad determinadas mediante TWA.

Se espera que el tratamiento semiclásico descrito en la Sección 2.4 sea más preciso en el límite en el cual hay un gran número de fotones en la cavidad y con $x_{\text{eq}} \gg x_{\omega} = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$, es decir, cuando ambos grados de libertad tienen grandes tamaños efectivos, de tal modo que las fluctuaciones cuánticas puedan considerarse comparativamente pequeñas. Sin embargo, incluso bajo estas suposiciones, la descripción se rompe cerca de los puntos de inestabilidad debido a las grandes fluctuaciones de posición y también en los regímenes clásicamente biestables.

6.1. Aproximación de Wigner truncada

Es conveniente trabajar con variables adimensionales para obtener una notación uniforme para la representación del espacio de fases tanto del campo de la cavidad como del estado de movimiento del ion. Para la cavidad, hacemos la elección habitual:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} \\ p_1 &= i \frac{a^\dagger - a}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (6.1)$$

mientras que para los grados de libertad de movimiento del ion se pueden eliminar las dimensiones mediante la elección:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow q_2 x_{\omega} \\ p &\rightarrow p_2 p_{\omega} \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde $x_{\omega} = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ y $p_{\omega} = \sqrt{\hbar m\omega}$ son escalas determinadas por la masa del ion y la frecuencia de la trampa, de tal forma que q_2 y p_2 no tienen dimensiones.

La ecuación para la evolución temporal de la distribución de Wigner (ver Sección 3.1) se puede encontrar siguiendo procedimientos estándar [131]. En este sistema, pasando a la

representación en el espacio de fases para la distribución de Wigner para el ion y la cavidad utilizando las ecuaciones (3.16) se obtiene la siguiente correspondencia para el disipador (considerando sólo por completitud el término de bombeo no coherente)

$$D(\rho)_W \rightarrow \kappa \left(\frac{\partial}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial}{\partial p_1} p_1 + (\bar{N} + 1/2) \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} \right) \right) W \quad (6.3)$$

donde se utilizará $\bar{N} = 0$ para el campo de la cavidad, al igual que a lo largo del resto de este trabajo. Sin embargo, esto permite tener en cuenta el bombeo no coherente de excitaciones en el sistema, como podría ser de utilidad por ejemplo para describir el ruido sobre los grados de libertad de movimiento del ion [116]. Por otro lado, los términos de la evolución unitaria libre correspondientes a H_{ion} , H_{cav} y H_{pump} se corresponden con corchetes de Poisson:

$$-\frac{i}{\hbar} [H_i, \rho]_W \rightarrow \left\{ H_i, W \right\}_{PB} \quad (6.4)$$

donde PB denota corchete de Poisson.

Hasta este paso, no se utilizó ninguna aproximación, ya que todos estos términos son a lo sumo cuadráticos en los operadores q y p . Esto está en contraste con el término correspondiente a la interacción optomecánica dispersiva. Para este término de interacción corresponden en principio términos con derivadas de orden 5:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\hbar} [H_{\text{int}}, \rho]_W \rightarrow U_0 \left[\left\{ f(H_{\text{cav}} - 1/2), W \right\}_{PB} \right. \\ \left. + \frac{1}{2^3} \Delta_{\text{cav}} \frac{df}{dq_2} \frac{\partial W}{\partial p_2} + \frac{1}{2^3} \frac{d^2 f}{dq_2^2} \frac{\partial^2}{\partial p_2^2} \left\{ H_{\text{cav}}, W \right\}_{PB_{\text{cav}}} \right. \\ \left. - \frac{1}{3!2^2} \frac{d^3 f}{dq_2^3} \left((H_{\text{cav}} - 1/2) + \frac{1}{2^3} \Delta_{\text{cav}} \right) \frac{\partial W}{\partial p_2^3} \right] \quad (6.5) \end{aligned}$$

Esta ecuación no es lineal en las variables del sistema y también contiene derivadas de orden mayor a dos. Como fue comentado anteriormente, en la TWA consideramos solo derivadas hasta segundo orden y descartamos el resto. Es decir, que bajo esta aproximación consideramos a la interacción como

$$-\frac{i}{\hbar} [H_{\text{int}}, \rho]_W \rightarrow \left\{ H_{\text{int}}, W \right\}_{PB} = \left\{ U_0 f(H_{\text{cav}} - 1/2), W \right\}_{PB} \quad (6.6)$$

de tal manera que la ecuación resultante para la distribución de Wigner bajo esta aproximación es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} \simeq -\sqrt{2}\eta \frac{\partial W}{\partial q_1} + \omega \left(q_2 \frac{\partial W}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial W}{\partial q_2} \right) - \frac{1}{2} \frac{d\Delta_{\text{eff}}}{dq_2} (q_1^2 + p_1^2 - 1) \frac{\partial W}{\partial p_2} \\ - \Delta_{\text{eff}}(q_2) \left(q_1 \frac{\partial W}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial W}{\partial q_1} \right) + \kappa \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (q_1 W) + \frac{\partial}{\partial p_1} (p_1 W) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial q_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial p_1^2} \right] \quad (6.7) \end{aligned}$$

Es importante notar en la ec. (6.7) cómo los términos de primer orden se corresponden al resultado de los valores de equilibrio clásicos de la aproximación semiclásica localizada.

Está claro entonces que la aproximación produce una evolución clásica (e incluye las no linealidades del perfil de intensidad del campo), para la distribución de Wigner modificada por términos difusivos y disipativos proporcionales a κ .

Dado que no estamos tratando con una ecuación de FP lineal (las ecuaciones de FP lineales son aquellas en las que el término de *drift* es una función lineal y la matriz de difusión es constante, y las distribuciones de probabilidad que solucionan estas ecuaciones son Gaussianas [141]), es de esperar que el estado asintótico no sea un estado Gaussiano, en contraste con la aproximación semiclásica de la sección 2.4.

Se puede argumentar que descartar las derivadas de orden superior está justificado en vista del comportamiento de los diferentes términos en la ecuación para la evolución de la función de Wigner cuando se toma un límite semiclásico. Cuando se utilizan variables dimensionales, se puede pensar que este límite surge cuando $\hbar \rightarrow 0$. Dado que tomamos variables adimensionales, el límite equivalente se puede obtener cambiando la escala de las cantidades relevantes [191] por un factor $\xi > 1$ y luego considerando $\xi \rightarrow \infty$. En nuestro sistema, el reescalado semiclásico sería:

$$q_j \rightarrow \xi q_j, \quad p_j \rightarrow \xi p_j, \quad \eta \rightarrow \xi \eta \quad (6.8)$$

mientras que, por otro lado, las cantidades κ , Δ_c , ω y U_0 deben dejarse constantes. Para el término de interacción, mantenemos constante el orden de magnitud del detuning efectivo, mientras que las posiciones de equilibrio óptico se cambian por el factor de escala ξ . Esto significa que mientras realizamos las transformaciones (6.8), $\Delta_{\text{eff}}(q_2)$ se mantiene inalterado. Cuando se aplica esta transformación de escala, todos los términos en Eq. (6.7) permanecen sin cambios, excepto los términos de ruido, los cuales son proporcionales a κ y contienen derivadas segundas respecto a las cuadraturas de campo. Estos términos, de hecho, disminuyen por un factor $1/\xi^2$, lo cual es consistente con la idea de que las fluctuaciones se vuelven comparativamente más pequeñas a medida que el sistema se acerca al límite semiclásico. Los términos que tienen derivadas de orden más alto y que hemos descartado en Eq. (6.7) van acompañados de prefactores $1/\xi^4$ o menores.

Este cambio en las escalas se puede entender a su vez como que la escala característica de la distribución de Wigner del ion debe ser mucho mayor al momento correspondiente a un fotón $\hbar k$, de tal forma que una sola emisión o absorción de un fotón no cambia considerablemente la distribución de momentos [130]. Para la cavidad, esto significa que la dispersión de las cuadraturas (relacionada al número de excitaciones en la cavidad) debe ser mucho más grande que las derivadas con respecto a las cuadraturas del campo, dando lugar a una distribución de Wigner suave.

El truncado dado en la Ec. (6.7) conduce exactamente a una ecuación de Fokker-Planck (ec. 6.9), con pérdidas en la cavidad que introducen términos de *drift* y difusión.

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu_i(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (D_{i,j}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t)) \quad (6.9)$$

donde definiendo

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (q_{cav}, p_{cav}, q_{ion}, p_{ion}) \quad (6.10)$$

se puede identificar el *drift* μ :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\Delta_c x_2 + U_0 f(x_3) x_2 - \kappa x_1 + \sqrt{2}\eta \\ \mu_2 &= \Delta_c x_1 - U_0 f(x_3) x_1 - \kappa x_2 \\ \mu_3 &= \omega x_4 \\ \mu_4 &= -\omega x_3 - U_0 \frac{df}{dx_3} \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{aligned} \quad (6.11)$$

y por último la matriz de difusión D es tal que $D_{11} = D_{22} = \kappa$ y el resto de los $D_{i,j}$ se anulan. Como se explica en el Apéndice A.2, esta evolución se puede mapear a un proceso estocástico, cuya implementación numérica es directa y sencilla [141]. Sin embargo, este mapeo implica que se necesita promediar sobre muchas realizaciones de la dinámica para poder obtener la distribución de probabilidad que es solución de la ecuación de Fokker-Planck.

En esta aproximación en términos de sistemas estocásticos clásicos, la metaestabilidad se observa, al igual que en el capítulo anterior, cuando emergen autovalores de parte real pequeña en comparación al resto del espectro del operador diferencial de la ecuación de Fokker-Planck (en el caso más general, las ecuaciones de Fokker-Planck no son autoadjuntas). Estas escalas lentas son las escalas de relajación entre estados metaestables [192]. Esto está en claro contraste con los sistemas en los cuales es posible utilizar técnicas de separación entre los grados de libertad *rápidos* y *lentos*, como por ejemplo eliminación adiabática [180]. En este caso, ambos subsistemas tiene escalas comparables (al menos no es posible distinguir diferencias entre las escalas de las variables canónicas) y por lo tanto tales aproximaciones no son aplicables.

Ha sido observado que, cuando se supone una solución semiclásica mediante este método, esta ecuación también debe linealizarse mediante una expansión del Hamiltoniano alrededor de la posición de equilibrio. Esto se debe a que las derivadas de orden superior descartadas tienen contribuciones que son del mismo orden que los términos Hamiltonianos de orden superior a dos alrededor del equilibrio clásico [186]. Sin embargo, este argumento no se puede aplicar si se desea considerar situaciones en las que hay más de una configuración de equilibrio clásica, y observamos cómo el efecto de las no linealidades de esta ecuación es fundamental para describir correctamente el estado asintótico.

La distribución resultante de este procedimiento es por construcción siempre positiva. Aunque la positividad de la función de Wigner es un criterio estándar para determinar qué tan clásico es un estado, los estados con funciones de Wigner positivas pueden, no obstante, mostrar entrelazamiento o ser útiles para tareas de metrología cuántica [193] e información cuántica [194, 195]. En cualquier caso, el procedimiento que seguimos no conduce a estados “más cuánticos” que los obtenidos con el método semiclásico localizado usado por ejemplo en [20, 38]. Sin embargo, este método representa una mejora en el sentido de que permite describir superposiciones estadísticas de diferentes configuraciones semiclásicas localizadas de forma sencilla y más aún, sin restringir la dinámica a estados Gaussianos. Remarcamos

que este procedimiento no es equivalente a las aproximaciones semiclásicas que incluyen interferencias entre diferentes trayectorias [196, 197].

6.2. Caracterización del estado asintótico con TWA

A continuación, comparamos las predicciones para el estado estacionario de la ec. de Fokker-Planck (FP) descrita en la Sección anterior con las obtenidas a partir de la diagonalización numérica del Liouvilliano como se explica en el capítulo 5 y con la descripción semiclásica localizada de sección 4.3. Nos interesa un régimen de cooperatividades moderadas, tales que el modelo clásico pueda exhibir multiestabilidad, pero lo suficientemente bajas como para que se aproximen a valores experimentalmente alcanzables. Como ya se ha mencionado, pueden definirse dos límites semiclásicos diferentes. El primero se espera que aparezca al aumentar el número de fotones dentro de la cavidad, mientras que el otro se alcanza cuando los pozos del potencial óptico están separados por escalas de longitud mucho mayores que la escala natural de la trampa armónica. Se espera que cuando ambos límites semiclásicos estén justificados, la aproximación Gaussiana localizada sea válida y se aproxime a los resultados correctos. A lo largo de este capítulo, caracterizamos la transición a través de una *intensidad de bombeo efectiva* adimensional η_{eff} definida en la Sección 2.4, la cual es el parámetro relevante para la transición.

Por claridad, fijamos $C = 2$ y $\Delta_c = 0$ en todos los gráficos. Aunque $C = 2$ no tiene nada de especial, elegir la frecuencia del láser para que resuene con la frecuencia de la cavidad pone de relieve algunas de las ventajas del tratamiento semiclásico de FP utilizado. Esto se debe a que, como se discute en la sec. 2.4, con $\Delta_c = 0$ el tratamiento Gaussiano estándar predice estados asintóticos de movimiento con un exceso de energía cinética (número de ocupación muy grande) cuando la amplitud del láser es grande.

En contraste con la descripción de trayectorias cuánticas [198], las trayectorias individuales obtenidas mediante la TWA son sólo un punto en el espacio de fases clásico, y por lo tanto no corresponden a un estado físico del sistema [199]. Puede verse un ejemplo de la evolución temporal de los valores medios obtenidos con 6400 trayectorias de la TWA en la Fig. 6.2. En la misma N_{ion} se define como $N_{\text{ion}} = \langle b^\dagger b \rangle = (\overline{q_{\text{ion}}^2} + \overline{p_{\text{ion}}^2} - 1)/2$. Los valores del estado estacionario se toman a tiempos suficientemente grandes de forma de asegurar que no hay más cambios en los valores medios y el sistema alcanzó el estado asintótico.

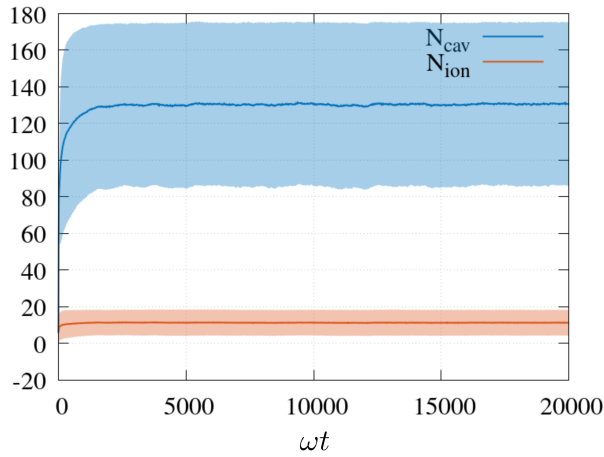


Fig. 6.2.: Valores medios del número de excitaciones en cada modo, para $\kappa = 1,00\omega$, $C = 2$, $x_{eq} = 6x_\omega$, $\eta_{eff} = 0,68$. Las áreas sombreadas muestran la desviación estándar.

Para comparar la ecuación de Fokker-Planck y la diagonalización numérica, nos centramos en unos pocos valores de expectación representativos que se estudiaron previamente en el capítulo anterior: el número de fotones, el operador de posición al cuadrado del ion, su energía cinética y la desintonía efectiva de la cavidad. Estas cantidades se representan en la Fig. 6.3. En cada subfigura, la línea negra continua corresponde a la diagonalización numérica y la curva azul oscuro discontinua es la obtenida a partir de la TWA.

Con el objeto de hacer una comparación, representamos también la aproximación semiclásica al orden más bajo correspondiente a las Ecs. (2.51-2.53) (celestre rayado-punteado) y la aproximación Gaussiana localizada explicada en la sección 4.3 (azul punteado).

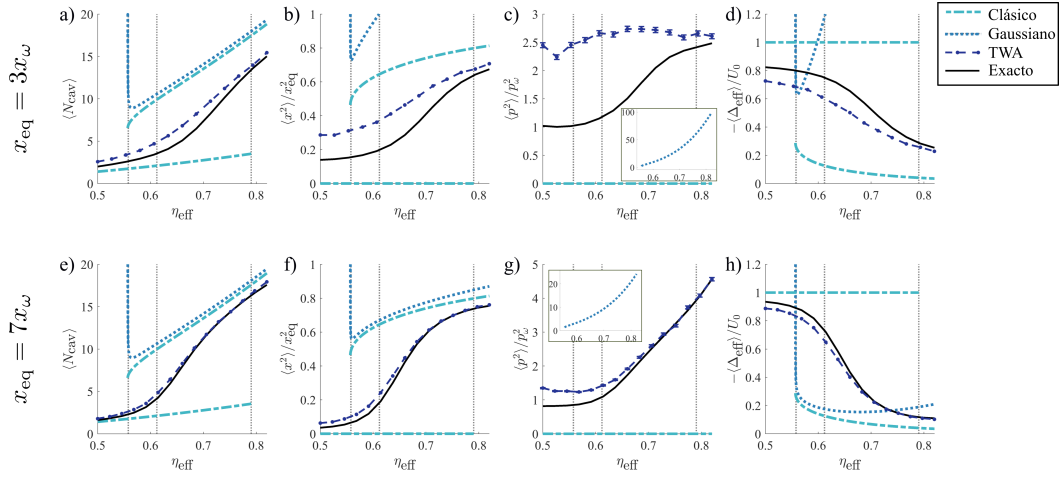


Fig. 6.3.: Valores medios que caracterizan el estado estacionario en función de η_{eff} en los distintos tratamientos considerados: diagonalización numérica exacta (negro sólido), TWA (círculos unidos por línea discontinua azul oscuro), predicción semiclásica al orden más bajo (celeste punteado), aproximación Gaussiana localizada (azul punteado, sólo en el régimen en el que el ion se encuentra alrededor de los mínimos del potencial óptico). En todos los casos, la cooperatividad y la desintonía de la cavidad se fijan en $C = 2$ y $\Delta_c = 0$ respectivamente. La escala espacial dada por x_{eq}/x_ω se elige como 3 (arriba) y 7 (abajo). El valor de κ/ω se varía para obtener las mismas predicciones semiclásicas de orden inferior para los dos casos. Las líneas discontinuas verticales de la izquierda y la derecha rodean la región de biestabilidad clásica, mientras que la línea discontinua entre ellas indica el cambio en el mínimo global del potencial efectivo. Los recuadros en c) y g) muestran el comportamiento de la aproximación Gaussiana, que está fuera de la escala de los gráficos principales. En los subgráficos b) y d) cortamos el eje vertical dejando fuera parte de la curva punteada para facilitar la comparación entre TWA y diagonalización.

Recordamos que la aproximación semiclásica a orden más bajo muestra un comportamiento biestable, razón por la cual existen dos soluciones de este tipo para valores intermedios de η_{eff} . Por el contrario, la descripción Gaussiana localizada (que, consecuentemente, también exhibe biestabilidad) sólo se muestra para la solución con el ion a los costados de la trampa. Esto se debe a que estamos considerando un caso sin disipación directa en el ion, de modo que el tratamiento linealizado no conduce a un estado estacionario único cuando el ion está situado en el centro (véase la sección 4.3). También observamos que las ecuaciones correspondientes a la aproximación Gaussiana localizada se vuelven inestables en el punto en que las soluciones semiclásicas con $\bar{x} \neq 0$ desaparecen al disminuir la intensidad del bombeo láser. En cuanto a la precisión de la TWA, el error de muestreo en los valores medios obtenidos está por debajo del tamaño de los puntos en el gráfico, con la excepción de $\langle p^2 \rangle / p_\omega^2$, para el cual se muestran las correspondientes barras de error.

Las filas superior e inferior de la Fig. 6.3 corresponden a $x_{\text{eq}}/x_\omega = 3$ y 7 respectivamente, con κ y U_0 elegidos de modo que la cooperatividad se mantiene fija y las soluciones semiclásicas a orden más bajo son las mismas en ambos casos. Esta elección nos permite observar como varía la precisión de la TWA con la escala espacial para el ion mientras que la escala asociada al número de fotones del campo se mantiene fija. Como era de esperar, la TWA proporciona resultados más fiables en el régimen con una mayor escala espacial

del potencial óptico (fila inferior) y con un mayor número de fotones (correspondiente a la parte derecha de cada figura).

Otro punto de interés en la Fig. 6.3 es que las predicciones de FP son menos precisas para la dispersión de los iones tanto en posición como en momento para el régimen de bombeo bajo. Hay que tener en cuenta que aunque para un número bajo de fotones el movimiento del ion está determinado principalmente por el potencial de la trampa, en ausencia de disipación directa sobre el ion es sólo la cavidad la que proporciona enfriamiento del estado de movimiento del ion. Para números de fotones más bajos el efecto de truncar las fluctuaciones (a través de truncar las derivadas de orden más alto en la expansión de Kramers-Moyal) de los fotones puede llegar a ser más importante tanto en la determinación del potencial óptico como en los mecanismos de enfriamiento.

No obstante, la TWA es claramente más precisa que la aproximación Gaussiana localizada en todo el rango estudiado. Cuando el ion está situado en el centro de la trampa, la aproximación Gaussiana linealizada predice un acoplamiento nulo entre el ion y la cavidad, y por lo tanto el estado asintótico del ion no está bien definido en ausencia de disipación adicional (véase la sec. 4.3). La TWA no sufre de este problema, y el sistema tiene un estado estacionario incluso en este caso particular. Cuando el ion está situado cerca de los mínimos del potencial óptico, el acoplamiento a orden más bajo es no nulo pero, como se menciona en la sección 2.4, la linealización predice un enfriamiento muy pobre de la cavidad a medida que $\Delta_{\text{eff}}(\bar{x})$ se hace muy pequeño. Esto conduce a un crecimiento excesivo de la energía cinética del ion, como se muestra en los recuadros de la Fig. 6.3-c) y g). Notamos de nuevo que esto se debe en parte a nuestra elección $\Delta_c = 0$ y al hecho de que nuestro modelo no tiene disipación directa en el ion, por lo que el tratamiento linealizado funciona especialmente mal en este caso ilustrativo. Por el contrario, la TWA tiene en cuenta correctamente el efecto de la dispersión espacial del ion sobre la desintonía efectiva y, por tanto, predice energías cinéticas mucho más cercanas a las obtenidas mediante diagonalización numérica del Liouvilliano.

En la Fig. 6.4 realizamos una comparación similar pero dejando x_{eq} fijo y variando κ/ω , U_0/ω para que cambie el número de fotones en la región de transición (la relación $C = U_0/\kappa = 2$ se mantiene fija). Mostramos valores medios asintóticos para $\kappa/\omega = 1, 5$ y $0, 5$ en las filas superior e inferior de la Fig. 6.4 respectivamente. En todos los gráficos, observamos una buena concordancia para el régimen de bombeo fuerte. Como en el caso anterior, observamos que la TWA predice valores mayores de posición y momento al cuadrado para el ion en el régimen de bombeo bajo. Sin embargo, y en contraste con el comportamiento de la figura anterior, la TWA no se vuelve más precisa para curvas con números medios de fotones más altos. De hecho, números de fotones más altos conducen a un cruce más abrupto entre configuraciones, pero en la TWA esto ocurre más suavemente que en la diagonalización exacta. Dentro del tratamiento de TWA la transición también se desplaza ligeramente hacia el régimen de bombeo débil.

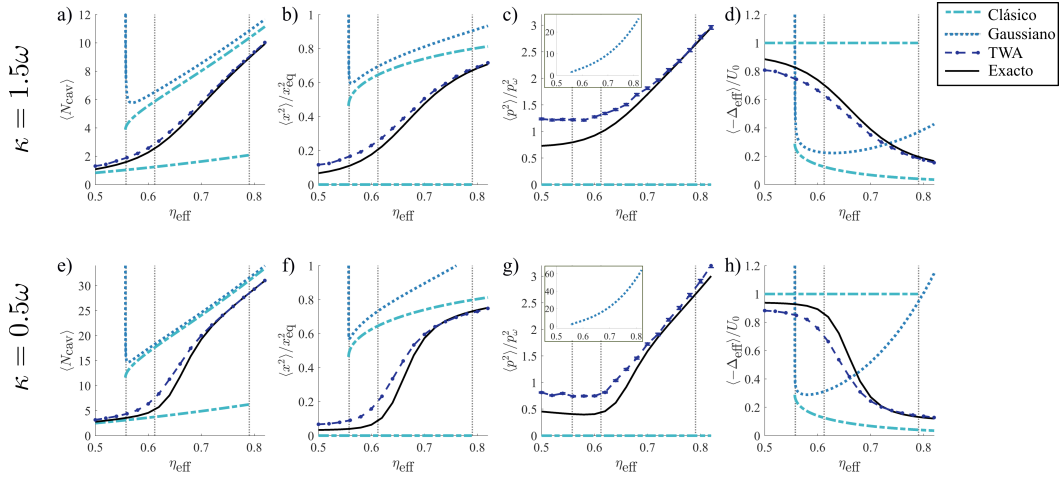


Fig. 6.4.: Valores medios que caracterizan el estado estacionario en función de η_{eff} para los distintos tratamientos considerados. El código de colores es el mismo que en la figura anterior. En todos los casos, la cooperatividad y la desintonía de la cavidad se fijan en $C = 2$ y $\Delta_c = 0$ respectivamente, mientras que la escala espacial se elige como $x_{\text{eq}}/x_\omega = 5$. Los valores de κ/ω son 1,5 (fila superior) y 0,5 (fila inferior). Las líneas discontinuas verticales de la izquierda y la derecha indican la región de biestabilidad clásica, mientras que la línea discontinua entre ellas indica el cambio en el mínimo global del potencial efectivo. Los recuadros en c) y g) muestran el comportamiento de la aproximación Gaussiana, que está fuera de la escala de los gráficos principales. En la subfigura f) cortamos el eje vertical dejando fuera parte de la curva punteada para facilitar la comparación entre TWA y diagonalización.

Para analizar mejor este comportamiento, en la Fig. 6.5 mostramos el error porcentual de los resultados de la TWA para el número medio de fotones, comparado con la diagonalización para un conjunto mayor de valores ($\kappa/\omega = 1, 5, 1, 0, 0, 75, 0, 5$). Encontramos picos del error relativo en la región de transición, correspondientes al régimen de biestabilidad clásica. Y lo que es más importante, contrariamente a una primer expectativa, los valores del error porcentual se hacen mayores para las curvas con números medios de fotones más altos.

Una posible explicación de este resultado es que la dinámica del sistema se vuelve fuertemente no lineal a medida que la transición se agudiza, y este efecto domina sobre el comportamiento “más semiclásico” esperado para números de fotones más altos. A la hora de evaluar la fiabilidad de la TWA, hay que tener en cuenta que escalas típicas mayores no siempre conducen a mejores resultados. No obstante, subrayamos de nuevo que para los regímenes de parámetros en los que un tratamiento completamente cuántico resulta demasiado costoso, el método de TWA sigue proporcionando una aproximación mucho mejor que la aproximación Gaussiana localizada estándar. De hecho, esta última es totalmente incapaz de describir el paso de una configuración de equilibrio a otra.

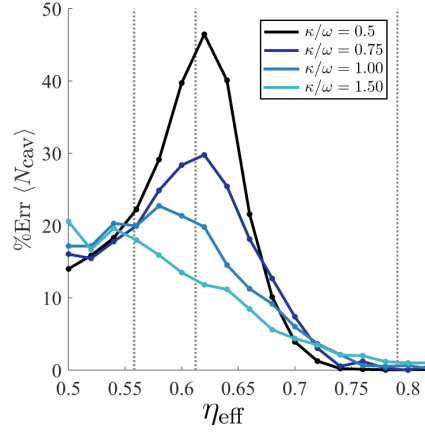


Fig. 6.5.: Error porcentual de la TWA comparado con la diagonalización numérica. Para variar el número de fotones tomamos $\kappa/\omega = 0, 50, 0, 75, 1, 00, 1, 50$. En esta figura los colores más oscuros corresponden a valores más bajos de κ (mayor número de fotones). Los parámetros restantes tienen los mismos valores que en la Fig. 6.4. Las líneas discontinuas verticales tienen el mismo significado que en las figuras anteriores.

Otro aspecto que merece atención es el hecho de que, aunque la descripción semiclásica estándar predice correctamente la localización de la región de la transición, el cambio en el mínimo global del potencial efectivo total no siempre coincide con lo que uno identificaría como el “punto de transición” entre configuraciones. Se trata de una cuestión sutil: aunque el sistema es disipativo, artículos anteriores pueden dar la impresión de que el mínimo global del potencial efectivo total puede identificarse con un “estado fundamental” semiclásico, con un papel privilegiado en la dinámica [19, 38, 200]. Sin embargo, no es obvio que, aparte de la condición de tener un mínimo local (lo cual indica la aparición o no de la región biestable), el valor concreto del potencial efectivo tenga algún significado en la determinación del estado asintótico.

Esta discrepancia se ilustra mejor en la Fig. 6.6, donde mostramos el número medio de fotones y sus fluctuaciones tal como se obtienen mediante el método de FP. Para esta figura, para la cual la dinámica explora una región mayor del espacio de fases, incluimos disipación directa en el movimiento de los iones a una tasa Γ para acelerar la convergencia. El valor de Γ se eligió muy pequeño para reducir el impacto de esta disipación sobre las cantidades mostradas. Más concretamente, introdujimos términos adicionales correspondientes a un baño térmico para las vibraciones del ion:

$$\mathcal{L}_\Gamma = \frac{\Gamma}{2} [(N + 1) (2b\rho b^\dagger - \{b^\dagger b, \rho\}) + N (2b^\dagger \rho b - \{bb^\dagger, \rho\})] \quad (6.12)$$

y por lo tanto equivalentes a Ec. (6.3), sustituyendo κ por Γ y q_1, p_1 por q_2, p_2 , y también considerando que en este caso en particular el ambiente no introduce excitaciones en el sistema:

En la Ec. (6.12), ΓN es la tasa a la cual ingresan excitaciones al subsistema del ion, mientras que $\Gamma(N + 1)$ determina la tasa de pérdidas. Para los cálculos pertinentes a la Fig. 6.6 se tomó $N = 0$. El operador de Lindblad b corresponde al oscilador efectivo definido a

partir de los operadores $x_{\text{ion}}, p_{\text{ion}}$ en la forma usual, adimensionalizados con la frecuencia de la trampa armónica incluyendo los efectos del potencial óptico, de la misma forma que se comentó en la sección 4.3. Notamos que esto no se corresponde a una descripción realista del ruido sobre el movimiento de un ion.

De esta forma el *drift* también se ve modificado por la inclusión de ruido sobre el ion, resultando en

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= -\Delta_c x_2 + U_0 f(x_3) x_2 - \kappa x_1 + \sqrt{2}\eta \\
\mu_2 &= \Delta_c x_1 - U_0 f(x_3) x_1 - \kappa x_2 \\
\mu_3 &= \omega x_4 - \Gamma x_3 \\
\mu_4 &= -\omega x_3 - \Gamma x_4 - U_0 \frac{df}{dx_3} \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 - 1)
\end{aligned}
\tag{6.13}$$

donde ahora la matriz de difusión D es tal que $D_{11} = D_{22} = \kappa$, $D_{33} = D_{44} = \Gamma$, y el resto de los $D_{i,j}$ se anulan.

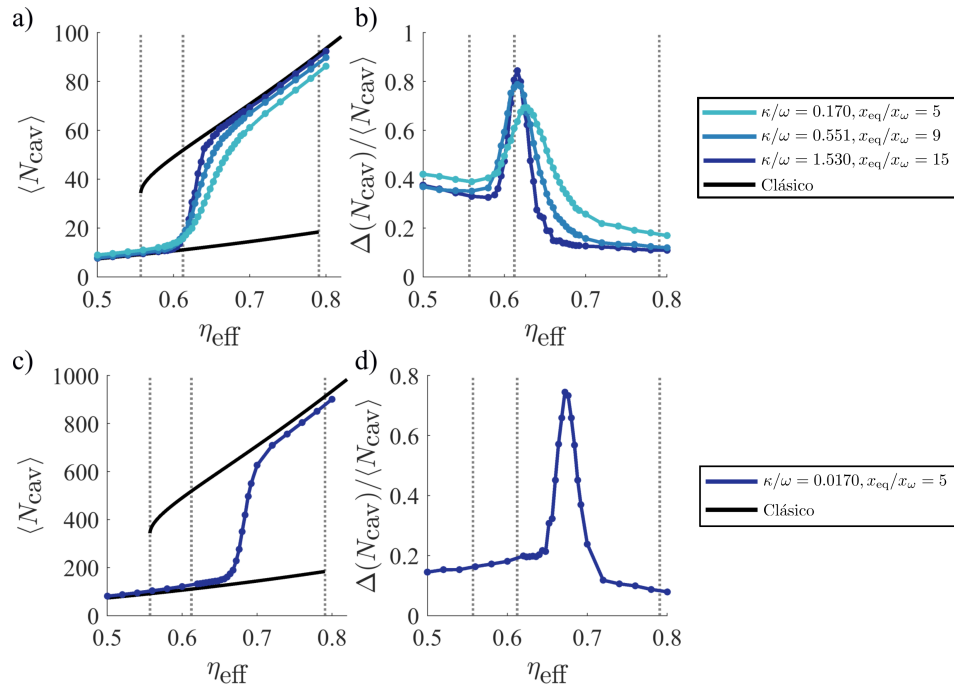


Fig. 6.6.: Marcadores típicos de la transición para números medios de fotones moderados (fila superior) y grandes (fila inferior), en función de la intensidad de bombeo efectiva. Izquierda: número medio de fotones, derecha: fluctuaciones relativas del número de fotones. Los parámetros utilizados son: $C = 2$, $\Delta_c = 0$, $\Gamma/\omega = 5 \times 10^{-4}$. Fila superior: $\kappa/\omega = 0, 170, 0, 551, 1, 730$ y $x_{\text{eq}}/x_\omega = 5, 9, 15$ respectivamente; en ambas figuras un color azul más oscuro indica valores crecientes de x_{eq}/x_ω . Fila inferior: $\kappa/\omega = 0, 0170$ y $x_{\text{eq}}/x_\omega = 5$. Las líneas discontinuas muestran las diferentes transiciones del potencial efectivo. La predicción semiclásica al orden más bajo se muestra en líneas negras.

Tanto en la fila superior como en la inferior de la Fig. 6.6, la predicción semiclásica de orden más bajo para el número de fotones se representa en líneas negras continuas. En la

fila superior, los parámetros se varían de tal forma que la curva negra es la misma para todos los casos, y dentro de la región de transición el número de fotones está alrededor de $\langle N_{cav} \rangle \simeq 30$. En este caso, a medida que se aumentan los valores de $x_{eq}/x_\omega = 5, 9, 15$ los resultados numéricos se aproximan a la predicción semiclassical: la transición se hace más abrupta y se aproxima al punto de cambio en el mínimo global del potencial efectivo.

Por el contrario, la fila inferior muestra los resultados para un número de fotones mucho mayor, de ≈ 400 en la transición pero con una escala espacial menor para el ion, $x_{eq}/x_\omega = 5$. En este caso, se observa una transición bastante abrupta pero en un lugar que difiere claramente de la ubicación del mínimo global del potencial efectivo. Comprobamos que el desplazamiento del punto de transición respecto a la predicción semiclassical no se debe a la presencia de disipación en el movimiento de los iones. Más aún, si tomamos $\Gamma = 0$ en los subgráficos c) y d) la transición se desplaza ligeramente hacia valores mayores de η_{eff} . Puesto que los valores experimentales típicos para x_{eq} están bastante lejos de los semiclassicals, concluimos que el mínimo global del potencial efectivo no es generalmente un indicador adecuado del punto de transición.

6.3. Relajación hacia el estado asintótico

Consideramos ahora la aproximación al estado asintótico; en un tratamiento completamente cuántico, este estado es único si se restringe al subespacio con paridad definida para el grado de libertad del ion, o si se introduce ruido en el movimiento del mismo. Se espera que los sistemas con multiestabilidad clásica muestren algún tipo de metaestabilidad en el régimen cuántico, que se manifiesta como un proceso de relajación en dos pasos: una rápida caída a una variedad metaestable, seguida de una convergencia lenta hacia el verdadero estado asintótico [167, 172, 173].

A partir de observar las trayectorias individuales dentro del formalismo de FP, se puede ver que estas muestran el comportamiento típico de sistemas clásicamente metaestables. Cada trayectoria pasa la mayor parte del tiempo en cuencas de atracción en torno de cada uno de los estados clásicamente estables, seguido por saltos aleatorios entre las distintas configuraciones metaestables, como se muestra en la figura 6.7.

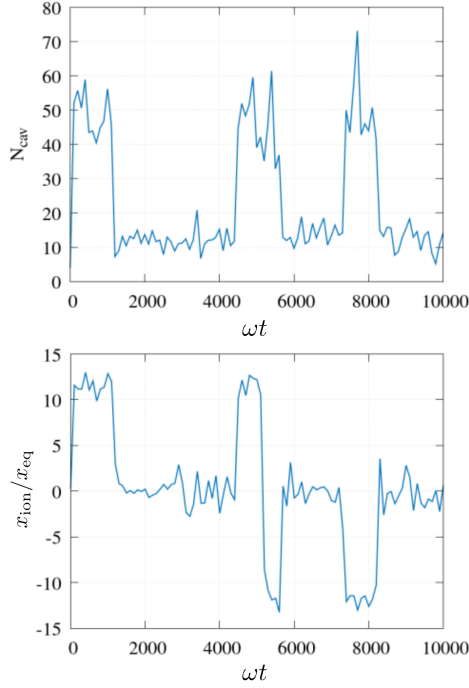


Fig. 6.7.: Evolución temporal de una trayectoria individual, para $\kappa = 1,53\omega$, $C = 2$, $\Gamma = 5 \times 10^{-4}\omega$, $x_{eq} = 15x_\omega$, $\eta_{eff} = 6,16$.

En el capítulo 5 se utilizó la diagonalización numérica en regímenes de parámetros con $\langle N_{cav} \rangle \simeq 10$ y $x_{eq} = 5x_\omega$. En este caso no había señales de metaestabilidad en términos de un cierre del gap espectral. Se conjeturó que esto se debía al pequeño tamaño del sistema y que las señales de metaestabilidad requerían un mayor número de fotones o mayores valores de x_{eq} , lo que conduciría a un menor overlap entre los dos tipos de configuraciones de equilibrio semiclásicas.

Así, deseamos encontrar métodos para estimar el comportamiento del tiempo de relajación en función de los parámetros del sistema para los regímenes “más semiclásicos” para los que los tratamientos completamente cuánticos son costosos desde el punto de vista computacional. Para ello, consideramos dos procedimientos semiclásicos diferentes. Observamos que no se esperaba que ninguna de estas estimaciones fuera exacta, sino sólo que proporcionara el orden de magnitud correcto de las tasas de relajación. Nuestra primera estimación analizó la evolución temporal de cada trayectoria según la ecuación de Fokker-Planck, y se describe en la sección 6.3.2. El segundo enfoque se basó en estudiar el overlap de los estados en el espacio de fases, con resultados muy insatisfactorios, y se explica en el apéndice B.

6.3.1. Estados individuales en el espacio de fases

En la región clásicamente biestable, la representación del espacio de fases del estado estacionario es bimodal (Fig. 6.8), donde cada pico corresponde a diferentes configuraciones

clásicas de equilibrio. Para poder estimar las tasas de transición correspondientes, es necesario delimitar los bordes de estas configuraciones de equilibrio. Definimos entonces dos regiones en el espacio de fases que corresponden a cada configuración semiclassical: una con el ion en los pozos del potencial óptico y un número medio de fotones grande, y otra región en la cual el ion está en el centro de la trampa y un número medio de fotones pequeño. Estas regiones en el espacio de fases se definen como elipses que rodean los picos en las distribuciones estacionarias encontradas a partir de la evolución de FP.

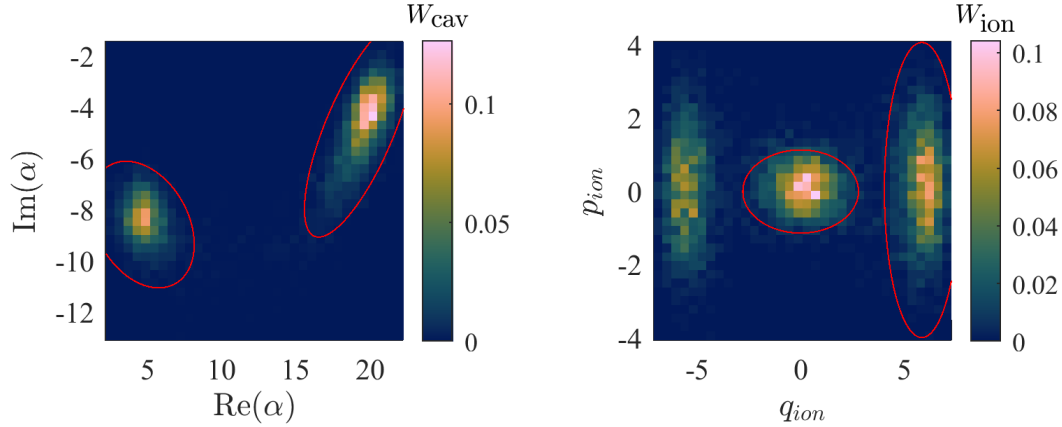


Fig. 6.8.: Distribución de Wigner obtenida mediante TWA. Las columnas izquierda y derecha muestran la distribución de Wigner del campo de la cavidad y del ion, respectivamente. Las líneas rojas indican las regiones utilizadas para definir el modelo estocástico de dos estados.

Para definir estos límites, se ajustó un modelo Gaussiano a las distribuciones del estado estacionario de cada subsistema por separado. Más precisamente se ajustó la distribución:

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^N p_k \mathcal{N}_x(m_k, \Sigma_k) \quad (6.14)$$

a las distribuciones de Wigner (por construcción positivas) del estado estacionario, donde $\mathcal{N}_x(m_k, \Sigma_k)$ es una distribución normal de dos variables (correspondientes a las coordenadas del espacio de fases de cada subsistema, con $N = 2$ componentes Gaussianas para la cavidad, y $N = 3$ componentes Gaussianas para la distribución del ion, como se puede ver de Fig. 6.8) con primeros momentos m_k y matriz de covarianza Σ_k . Este estado estacionario se encontró como la evolución a tiempos largos de una condición inicial normalmente distribuida, centrada aproximadamente en la posición de equilibrio inestable del potencial efectivo (Ec. 2.54). A continuación, cada una de las componentes Gaussianas $\mathcal{N}_x(m_k, \Sigma_k)$ se utilizaron como distribuciones de probabilidad iniciales para la evolución posterior de la ecuación de FP. A partir de esto se estima el tiempo medio de primer paso hacia cada estado, según se explica en la sección 6.3.2.

Las regiones que delimitaban cada estado en el espacio de fases se eligieron como elipses centradas en cada uno de los vectores de primeros momentos. Los semiejes de dichas elipses se definieron como 3 desviaciones estándar en las direcciones principales de cada matriz de covarianza.

6.3.2. Estimación de las tasas de relajación basada en tiempos de primer paso

A continuación describimos un procedimiento para estudiar el decaimiento al estado asintótico, extrayendo los tiempos de relajación directamente de la evolución de las trayectorias estocásticas correspondientes a la ecuación de Fokker-Planck asociada a la Ec. (6.7).

Una vez que las regiones correspondientes a cada estado están definidas según se detalló en la sección 6.3.1, es fácil corroborar si una trayectoria particular dejó la región del espacio de fases correspondiente a su estado inicial y así estimar el tiempo medio de primer paso. Es importante señalar que sólo se utilizó el primer tiempo de llegada en el cálculo del primer tiempo de paso a cada región, ya que después de volver a entrar en la región inicial, la densidad de probabilidad no se distribuiría normalmente y el significado de los tiempos de escape posteriores no está claro. Cuando la distribución inicial se fijó en el estado correspondiente a los pozos del potencial óptico, las condiciones iniciales fueron muestreadas a partir de las distribuciones Gaussianas en ambos pozos (izquierdo y derecho).

Este procedimiento es a grandes rasgos el mismo que se seguiría comúnmente para estimar el primer autovalor no nulo de la ec. de FP unidimensional que satisface condiciones de potencial [144, 201]: Una vez identificada la función potencial, los bordes de las regiones correspondientes a cada estado metaestable son los puntos silla de la misma. En nuestro problema, dado que no se satisfacen las condiciones de potencial estimamos estas regiones mediante la distribución estacionaria de la ec. de FP.

En esta forma, simplificamos el problema trasladándolo a un sistema estocástico de dos estados gobernado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 \\ \dot{p}_2 = \gamma_1 p_1 - \gamma_2 p_2 \end{cases} \quad (6.15)$$

Aquí, p_j representa la probabilidad de encontrar el sistema en la región j , mientras que γ_j es la tasa de transición fuera de la región j , con $j = 1, 2$. Así, cada estado se asocia a una de las regiones, y donde una de las regiones incluye a las componentes del ion localizadas en ambos pozos, izquierdo y derecho, del potencial óptico. La solución

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{ss} + e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)t} \vec{d}_0 \quad (6.16)$$

describe así que la tasa de decaimiento hacia el estado estacionario viene dada por $\gamma_t = \gamma_1 + \gamma_2$, con \vec{p}_{ss} el estado estacionario y \vec{d}_0 fijado por las condiciones iniciales. Consideramos que ésta es una aproximación válida luego de que se haya producido una relajación rápida del estado inicial, con lo que la dinámica se produce principalmente dentro de los estados metaestables en una escala temporal mucho más lenta.

Las tasas de relajación de un modelo de Markov están estrechamente relacionadas con el tiempo medio de primer paso entre diferentes estados [202], lo que ha sido útil para encontrar grupos de estados metaestables [203]. A continuación, realizamos una evolución temporal de un ensamble de trayectorias según el proceso estocástico descrito por la

ecuación de Fokker-Planck y relacionamos el tiempo medio de primer paso τ_i con la tasa de transición correspondiente como $\tau_i = 1/\gamma_i$. Aquí consideramos el tiempo de paso como el tiempo que tarda la trayectoria en alcanzar por primera vez la región del espacio de fases correspondiente al otro estado. Observamos que en principio los resultados dependen tanto de la definición de las regiones como de la distribución inicial en el espacio de fases, por lo que, de nuevo, sólo cabe esperar tendencias cualitativamente correctas.

En la Fig. 6.9 se puede observar una distribución de los tiempos de primer paso, los cuales muestran una distribución aproximadamente exponencial como es de esperar. Esto justifica la elección de $\tau_i = 1/\gamma_i$ ya que si la distribución δ_{12} de tiempos de primer paso del estado 1 hacia el 2 está dada por:

$$\delta_{12} = \gamma_1 e^{-\gamma_1 t} \quad (6.17)$$

entonces

$$\tau_1 = \langle t \rangle_{\delta_{12}} = \int_0^{\infty} dt t \delta_{12}(t) = 1/\gamma_1 \quad (6.18)$$

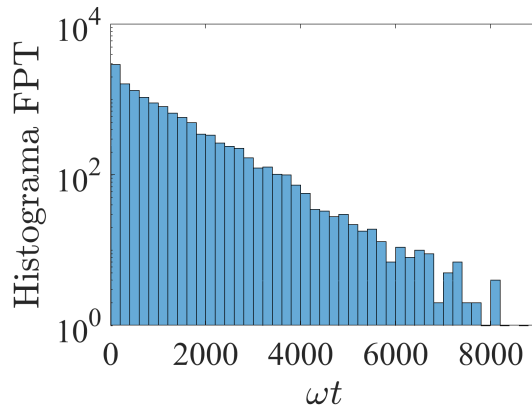


Fig. 6.9.: Histograma de tiempos de primer paso (FPT por sus siglas en inglés) desde los pozos de potencial óptico al centro de la trampa armónica. Para 6400 trayectorias con $\kappa = 1,00\omega$, $C = 2$, $x_{eq} = 6x_\omega$, $\eta_{eff} = 0,668$, en escala logarítmica.

En este punto hacemos notar que hay dos niveles de aproximación en este procedimiento. En un primer lugar, se están tratando de estimar las tasas de relajación de una ecuación de Lindblad (equivalente a la ec. para la distribución de Wigner completa) a partir del tiempo de relajación de la ecuación para la distribución de Wigner truncada. Estos tiempos de relajación no tienen por qué ser iguales en principio y no hay una indicación de que necesariamente esta sea una buena aproximación más allá de que los resultados obtenidos mediante la TWA representan correctamente los resultados del estado estacionario de la diagonalización del Liouvilliano. Además, está demostrado que la TWA sólo representa correctamente la dinámica del sistema original a tiempos cortos [191]. En un segundo lugar, se está tratando de aproximar la tasa de relajación de esta ecuación de FP obtenida en la TWA mediante un modelo de dos estados. Sí esperamos que esta segunda aproximación esté mejor justificada, en tanto que en el régimen que estamos considerando, luego de

una relajación rápida inicial, la dinámica ocurre principalmente entre este conjunto de dos estados metaestables, como puede corroborarse en Fig. 6.7.

En la Fig. 6.10-a) mostramos la tasa de relajación γ_t para un valor fijo de κ mientras varía x_{eq} , de modo que valores mayores de x_{eq} requieren un mayor número de fotones para cambiar la configuración de equilibrio. El azul más oscuro corresponde a regímenes “más semiclásicos” caracterizados tanto por escalas espaciales mayores como por un mayor número de fotones.

Los resultados muestran claramente una relajación más lenta a medida que el sistema se aproxima al régimen semiclásico, como era de esperar, ya que las regiones del espacio de fases correspondientes a las diferentes configuraciones de equilibrio se hacen más distantes. También se observa una relajación más lenta en la región central del cruce que podría señalar un punto crítico en el límite verdaderamente semiclásico. Observamos que no aplicamos este método a toda la región clásicamente biestable, ya que las regiones del espacio de fases no pueden definirse correctamente en las proximidades de los límites de la biestabilidad.

Las áreas sombreadas en Fig. 6.10-a) indican los resultados para regiones con áreas ligeramente mayores o menores. Para obtenerlas redefinimos los elipses utilizando 2,5 y 3,5 desviaciones estándar (en lugar de 3) para comprobar cuánto influía esto en los resultados. Las zonas sombreadas encierran la región comprendida entre las tasas mínima y máxima halladas en los tres casos.

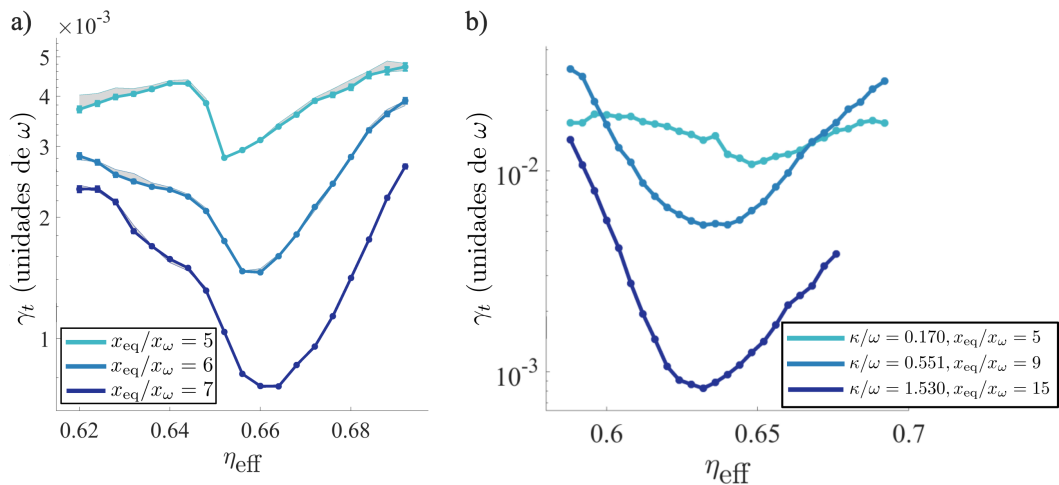


Fig. 6.10.: a) Tasas de equilibración obtenidas mediante la TWA, para $\kappa = 0,1\omega$, $C = 2$, $\Gamma = 0$. La escala espacial dada por x_{eq}/x_{ω} se elige como 5, 6, 7 para las curvas azules, con un azul más oscuro para x_{eq} más alto (y correspondientemente también para números de fotones más altos). Nótese el eje vertical logarítmico. Las barras de error (sólo mostradas para errores mayores que el tamaño del marcador) corresponden a errores de muestreo, las áreas sombreadas indican como cambian los resultados con diferentes elecciones de las regiones (ver Sección 6.3.1 para más detalles). b) Muestra las mismas tasas de equilibración para los valores $x_{\text{eq}}/x_{\omega} = 5, 9, 15$, y $\kappa/\omega = 0,170, 0,551, 1,530$ respectivamente. Estos fueron elegidos de tal forma que el número clásico de fotones se mantiene constante a lo largo de la transición.

Por otro lado, también se puede considerar un conjunto de parámetros para los cuales la aproximación semiclásica predice los mismos valores de expectación a medida que nos acercamos al límite semiclásico. Elegimos valores crecientes de x_{eq} y correspondientemente valores de κ decrecientes de tal forma de mantener constante el número de fotones en el límite clásico a lo largo de la transición, como se muestra en la Fig. 6.10-b), para los mismos parámetros que en la Fig. 6.6. El comportamiento observado en la misma indica que estas tasas de decaimiento solo se anularían en el límite en el cual la tasa de pérdidas de la cavidad sea lo suficientemente pequeña o la separación entre los pozos del potencial óptico lo suficientemente grande, recuperando el comportamiento biestable dado por la aproximación semiclásica localizada.

El régimen estudiado en la Fig. 6.10 es numéricamente muy difícil de simular en un tratamiento completamente cuántico, particularmente siguiendo los métodos del capítulo 5. Esto es así dado que, como puede verse en la Fig. 6.6-a), estos estados corresponden a números medios de fotones altos durante la transición, o a escalas espaciales mucho mayores a las consideradas en el capítulo 5. Por tanto, es difícil evaluar la fiabilidad de estos resultados. Como *benchmark*, hemos realizado simulaciones de un solo punto (el que presenta el mayor error en la Fig. 6.10-a)) utilizando 6400 trayectorias dentro del formalismo de trayectorias cuánticas [141, 204] (explicado en detalle en apéndice A.3). Nuestros resultados muestran buena concordancia de los valores medios, mientras que las tasas de relajación halladas a partir de ajustes numéricos son entre dos y tres veces mayores para los saltos cuánticos que para la TWA. Por tanto concluimos que, aunque las tasas halladas a partir de TWA no son, como se esperaba, exactas, siguen proporcionando un acuerdo cualitativo con el comportamiento esperado y el orden de magnitud correcto.

Como referencia, en la Fig. 6.11 y 6.12 se puede ver un resultado de aplicar el formalismo de trayectorias cuánticas a un sistema más pequeño (menor número de fotones).

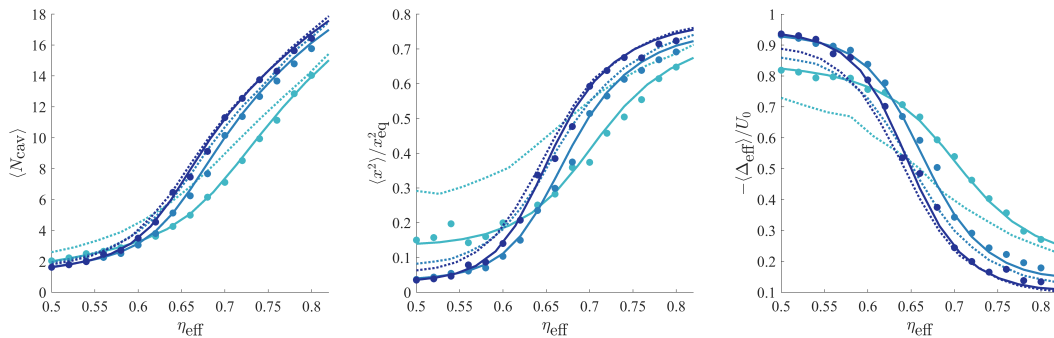


Fig. 6.11.: Comparación de los resultados obtenidos mediante trayectorias cuánticas para valores medios. Los parámetros utilizados son $\Gamma = 0$, $C = 2$, y $x_{\text{eq}}/x_{\omega} = 3, 5, 7$ con $\kappa/\omega = 0,032, 0,880, 1,730$ respectivamente. Valores más grandes de x_{eq} están mostrados en azul más oscuro. Los puntos muestran el resultado obtenido mediante el formalismo de trayectorias cuánticas, las líneas sólidas los de la diagonalización, y la línea de puntos muestra los resultados de la TWA. Promedios realizados a partir de 6400 trayectorias.

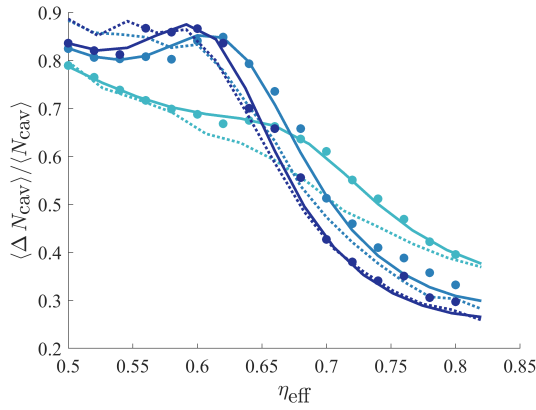


Fig. 6.12.: Comparación de los resultados obtenidos mediante trayectorias cuánticas para las fluctuaciones del número de fotones de la cavidad. Los parámetros utilizados son $\Gamma = 0$, $C = 2$, y $x_{\text{eq}}/x_{\omega} = 3, 5, 7$ con $\kappa/\omega = 0,032, 0,880, 1,730$ respectivamente. Valores más grandes de x_{eq} están mostrados en azul más oscuro. Los puntos muestran el resultado obtenido mediante el formalismo de trayectorias cuánticas, las líneas sólidas los de la diagonalización, y la línea de puntos muestra los resultados de la TWA. Promedios realizados a partir de 6400 trayectorias.

6.4. Resumen

En este capítulo nos enfocamos en un régimen con multiestabilidad clásica, que es el conceptualmente más interesante y numéricamente más desafiante ya que las aproximaciones Gaussianas muestran resultados muy distintos de los resultados exactos en esta región de parámetros, tal como se vio en el capítulo 5. A diferencia del capítulo anterior, para describir la evolución del sistema utilizamos la aproximación de Wigner truncada, que lleva a una ecuación de Fokker-Planck no lineal (es decir que no predice estados Gaussianos). Dado que esta descripción es numéricamente sencilla, esto permite la simulación de estados más cercanos al límite semiclásico, particularmente mediante la elección de tasas de pérdidas más pequeñas, o distancias más grandes entre los pozos del potencial óptico.

En primer lugar caracterizamos la validez de la TWA en este sistema, la cual tiene que ser evaluada en función de cada problema particular. En segundo lugar analizamos bajo qué condiciones es razonable utilizar el criterio de tomar el punto de la transición estructural como un mínimo global de un potencial efectivo clásico, y verificamos que esto da resultados aproximadamente correctos cuando el sistema se aproxima al límite semiclásico.

Por último, se derivaron aproximaciones a las tasas de decaimiento hacia el estado estacionario dentro del régimen metaestable. Observamos un comportamiento en el cual se ralentiza la dinámica en la región de la transición, de forma que los tiempos de relajación aumentan a medida que el sistema se acerca al límite semiclásico.

A pesar de las limitaciones de la TWA, llegamos a la conclusión de que la misma puede proporcionar una mejora notable sobre las descripciones semiclásicas localizadas como por ejemplo las de [20, 38]. El método que utilizamos describe correctamente la relajación a

un estado estacionario en regímenes en los que el tratamiento linealizado no es aplicable. Además, este procedimiento predice correctamente un cruce suave entre configuraciones, que no puede ser observado con la aproximación localizada. Esto se consigue de una manera computacionalmente poco costosa, recuperando los mismos resultados que las aproximaciones Gaussianas localizadas en los límites apropiados. El método es conceptualmente simple y versátil, por lo que puede aplicarse a problemas con más grados de libertad, y a otros sistemas cuánticos en los que los términos no lineales juegan un papel relevante para la dinámica y para los cuales sea adecuado un método semiclásico en el espacio de fases [146, 165, 168, 205, 206].

Transiciones estructurales en cadenas unidimensionales de tres iones

Habiendo realizado un estudio de distintos métodos cuánticos y semiclásicos y sus regímenes de aplicabilidad para el caso de un ion individual interactuando con un campo, comenzamos en este capítulo la tarea de extender el sistema bajo estudio a sistemas más grandes. Particularmente comenzamos por el estudio de una cadena de tres iones unidimensional en la aproximación semiclásica Gaussiana de la sección 2.4, fuera de la región de biestabilidad. Es importante recordar que la aproximación Gaussiana, de acuerdo a los capítulos anteriores, no es aplicable en la región clásicamente biestable.

Consideramos así en este capítulo un sistema de tres iones en una cavidad óptica en el régimen dispersivo, como fue descrito en el capítulo 2. Hay dos tipos de transiciones estructurales posibles en este sistema, la primera es una transición lineal-zigzag [20] como la mostrada en la Fig. 1.1, y ocurre a lo largo de dos dimensiones. Por otro lado, la segunda es una transición entre cadenas anclada-deslizante (*sliding-pinned*) [32, 40] y ocurre en una configuración unidimensional, como se esquematiza en la Fig. 1.2.

Ambas transiciones se dan por la competencia entre el potencial óptico, la repulsión de Coulomb entre iones y la trampa armónica. En particular, la dinámica de la transición anclada-deslizante puede ser utilizada para realizar versiones del modelo de Frenkel-Kontorova [36], y es la que consideramos a lo largo de este capítulo.

El modelo de Frenkel-Kontorova es un modelo de fricción que consiste en una cadena de osciladores acoplados entre primeros vecinos, que se deslizan sobre un potencial periódico [34]. Este modelo muestra una transición en la cual las partículas pasan de deslizarse libremente a estar localizadas en los pozos del potencial [40], la llamada transición de Aubry. Una dinámica muy similar se da en este sistema, donde el potencial óptico da el potencial periódico del modelo de Frenkel-Kontorova, y la intensidad del mismo aumenta con la intensidad del bombeo láser. Recientemente los efectos de tuneo fueron considerados en estos sistemas en el régimen en el cual el potencial óptico se asume desacoplado de la dinámica, es decir, cuando se reemplazan los operadores $a^\dagger a$ del Hamiltoniano por los correspondientes campos clásicos, utilizando técnicas de integrales de camino [44].

En el caso de iones atrapados, la presencia simultánea de la interacción de Coulomb y la trampa armónica produce que las distancias de equilibrio entre iones no sean todas iguales [127], en contraste con el modelo original de Frenkel-Kontorova. Nuestro sistema de tres

iones, por otra parte, tiene importantes efectos de tamaño finito ausentes en el modelo original, que considera una cadena infinita.

Si el potencial está dado por el campo de una cavidad, cuando la cooperatividad dispersiva es suficientemente grande, el *back-action* de la posición de los iones en el estado del campo [38] lleva a modificaciones de la transición, la cual puede volverse una transición de primer orden en la aproximación semiclásica de la sección 2.4. Nuevamente, asumimos para este capítulo que el centro de la trampa está alineado con un máximo del potencial óptico. Sin embargo, para estudiar la transición en el sistema de tres iones, ahora no vamos a truncar el perfil espacial del mismo, y vamos a considerar en ec. (2.46)

$$g^2(x) = g_0^2 f(x), \quad (7.1)$$

$$f(x) = \cos^2(kx). \quad (7.2)$$

con $k = 2\pi/\lambda$, de tal forma que la periodicidad del potencial óptico es $\lambda/2$.

En este caso, cuando la intensidad del bombeo láser es baja, los iones se encuentran en posiciones de equilibrio determinadas por la repulsión electrostática y el confinamiento axial de la trampa armónica, como se muestra esquemáticamente en la Fig. 7.1-a). En tal situación el ion central siempre se encuentra en el centro de la trampa armónica. Por analogía al modelo de Frenkel-Kontorova, llamamos a esta configuración la “fase deslizante”. A medida que la intensidad del bombeo láser aumenta, el potencial óptico cobra relevancia y las partículas tienden a localizarse en los mínimos del mismo (asumimos $\Delta_0 > 0$), de la misma forma que vimos en capítulos anteriores. Esta situación se muestra en la Fig. 7.1-b). Cuando esto sucede, debido a que el centro de la trampa está alineado a un máximo del potencial óptico, las soluciones clásicas ya no tienen la simetría del sistema. A lo largo de todo este capítulo consideramos que en la fase con ruptura de simetría el ion central se localiza en el pozo de la izquierda más cercano al centro de la trampa.

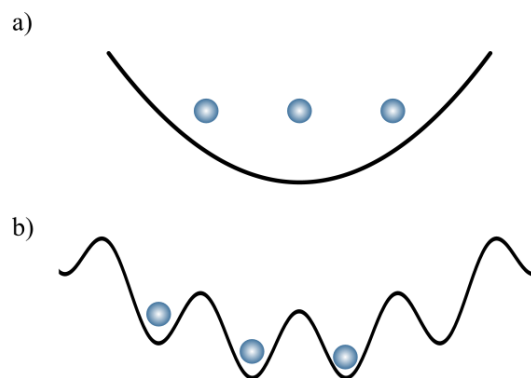


Fig. 7.1.: Transición deslizante-anclada. En a) las posiciones de equilibrio están dadas por el confinamiento armónico y la repulsión electrostática. b) Cuando el potencial óptico cobra relevancia, las posiciones de equilibrio quedan a su vez determinadas por los mínimos de intensidad del campo.

En ausencia de potencial óptico las posiciones de equilibrio de los iones en la trampa pueden ser determinadas analíticamente y están dadas por [207]

$$\begin{aligned}x_1(\eta = 0) &= -d_0 \\x_2(\eta = 0) &= 0 \\x_3(\eta = 0) &= d_0\end{aligned}\tag{7.3}$$

donde

$$d_0 = \left(\frac{5}{16} \frac{q^2}{\pi \epsilon_0 m \omega^2} \right)^{1/3}\tag{7.4}$$

Si se considera una cadena de tres iones en la trampa en una dimensión, se tiene que hay tres modos de vibración ordenados de menor a mayor frecuencia:

$$\begin{aligned}u_{\text{cm}} = u_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3) \\u_{\text{b}} = u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3) \\u_{\text{eg}} = u_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - 2x_2 + x_3)\end{aligned}\tag{7.5}$$

donde u_{cm} es el modo centro de masa, u_{b} es el *breathing mode* y u_{eg} es el modo egipcio, con frecuencias $\omega_1^v = \omega$, $\omega_2^v = 3\omega$ y $\omega_3^v = 5,8\omega$ [207].

Por lo comentado en los capítulos anteriores, sabemos que la validez de la aproximación semiclásica Gaussiana es especialmente problemática en la región de biestabilidad clásica, por esto nos restringimos a lo largo de todo este capítulo a considerar las regiones donde no hay coexistencia de los dos tipos de soluciones.

Los valores usados en esta sección son $\kappa/2\pi = 0,2$ MHz, $C = 0,5$, $N = 10$, $U_0 = C\kappa$, $\lambda = 369$ nm, y se consideran iones de Yb. Además, a lo largo de este capítulo consideramos ruido que actúa por igual sobre los tres modos de vibración, a una tasa $\Gamma = 10^{-6}\kappa$, a través de la ec. (2.67).

7.1. Transición estructural deslizante-anclada

En primer lugar, las posiciones de equilibrio de los iones sin presencia del potencial óptico dependen del confinamiento de la trampa armónica a lo largo de la dirección axial de la cadena. A medida que aumenta el bombeo láser, de forma que el potencial óptico cobra más relevancia, el mínimo de intensidad al cual caen los iones luego de la ruptura de la simetría depende de las posiciones iniciales (sin bombeo) relativas a la periodicidad del potencial óptico.

En la Fig. 7.2 se muestran las distancias entre iones consecutivos, como función de la frecuencia ω de la trampa, en un límite de η muy grande, en particular se eligió $\eta = 2,5$ THz. Se puede ver que hay regiones en donde las distancias son iguales, lo que corresponde a un

desplazamiento uniforme de la cadena respecto de su posición inicial. A los efectos de la Fig. 7.2 es equivalente variar la periodicidad del potencial óptico ($\lambda/2$) en lugar de cambiar ω . Sin embargo, la frecuencia de la trampa es un parámetro experimentalmente controlable, mientras que λ depende de la especie atómica en la trampa.

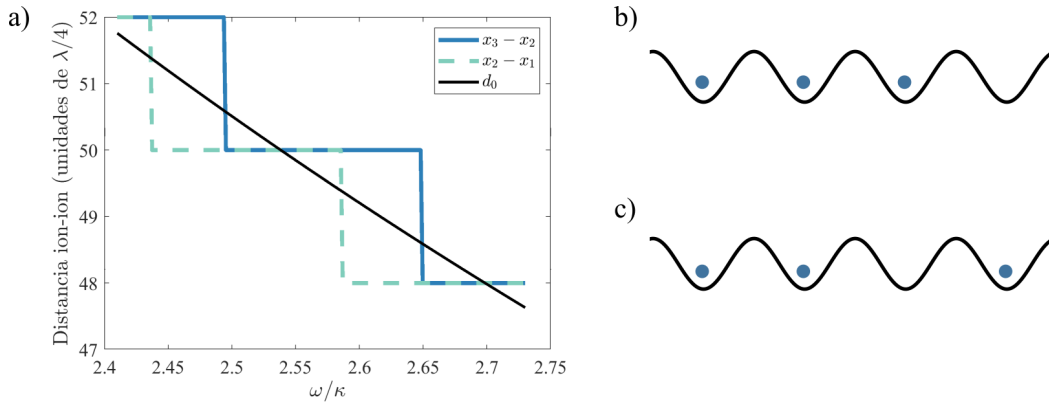


Fig. 7.2.: a) Distancias entre iones consecutivos en un régimen de bombeo fuerte, donde predomina el potencial óptico (mostradas en color), y distancia entre iones en ausencia del potencial óptico (mostrada en negro) b) Configuración uniforme de la cadena. c) Configuración no uniforme.

A partir de esto se distinguen dos tipos de soluciones luego de la ruptura de simetría: cuando los tres iones de la cadena están distribuidos uniformemente en la fase anclada (como en la Fig. 7.2-b), cuando se satisface la condición $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ y cuando las distancias entre iones consecutivos son distintas (como en Fig. 7.2-c)). Este cambio ocurre repetidamente, como se puede ver en la Fig. 7.2, ya que depende de la posición relativa entre la configuración de equilibrio de los iones en ausencia de potencial óptico y los mínimos del mismo. A medida que se aumenta la frecuencia de la trampa armónica las posiciones de equilibrio se acercan al centro de la trampa, recorriendo distintos puntos del potencial óptico.

A continuación, obtenemos las posiciones de equilibrio clásicas de los iones a través de la minimización del potencial efectivo en ec. (2.54). Con éstas, es posible describir los modos normales de vibración a través de la ec. (2.61), y describir el estado del sistema a través de la aproximación semiclásica localizada explicada en la sección 2.4.

7.1.1. Parámetros elegidos y régimen de validez

En general, es posible que las posiciones de equilibrio de los iones no estén determinadas únicamente por los mínimos globales del potencial efectivo en ec. (2.54). Más aún, incluso en el caso de que las verdaderas posiciones de equilibrio estén determinadas por los mínimos globales de este potencial, la energía cinética correspondiente a los modos vibracionales podría causar difusión hacia mínimos locales contiguos. Con el objetivo de determinar un

régimen de parámetros en el cual la probabilidad de esto sea baja, consideramos el costo “energético” de desplazar la configuración de equilibrio a mínimos adyacentes.

La elección de parámetros tiene que ser tal que la diferencia en “energías” semiclásica correspondiente a desplazar uniformemente la cadena en la fase anclada a lo largo de un período del potencial óptico ($\lambda/2$) sea mayor a la energía correspondiente a los modos de vibración. Es decir, consideramos la barrera de energía entre las dos configuraciones mostradas en la Fig. 7.3.

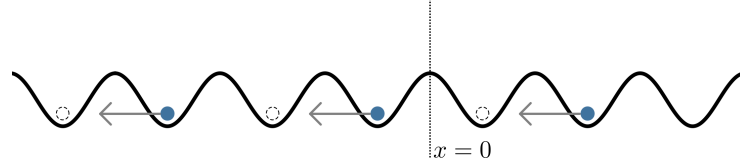


Fig. 7.3.: En azul se muestra la configuración correspondiente al mínimo global del potencial efectivo, en la fase anclada con desplazamiento uniforme. Se considera el costo energético de desplazar uniformemente la cadena como se esquematiza en esta figura, a la configuración mostrada con líneas punteadas. La línea vertical punteada muestra el centro de la trampa armónica. En esta representación esquemática no se ilustra el potencial de la trampa.

Podemos considerar por ejemplo fijar $\Delta_c=0$, $\eta = 200\kappa$, $N = 10$, y $\omega = 2,5369\kappa$ (uno de los puntos donde la cadena es uniforme en la fase anclada, particularmente el punto b de la Fig. 7.4-e)). En este caso, la diferencia de energías entre estas configuraciones es de

$$\Delta U = \frac{m\omega^2}{2} \sum_i \left((\lambda/2)^2 - \lambda x_i \right) = 2840 \text{ MHz.} \quad (7.6)$$

Por otra parte, la energía correspondiente a los modos de vibración $\omega_j^v b_j^\dagger b_j$ es (todos los modos tienden aproximadamente al mismo valor) del orden de 700 MHz. Esto justifica que es posible considerar que el confinamiento dado por la trampa localiza aproximadamente los iones en los pozos del potencial óptico correspondientes a las soluciones clásicas, y por lo tanto es posible despreciar la extensión espacial de los mismos a lo largo de varios pozos de potencial.

Notamos que para otras elecciones de ω , en particular para valores más bajos, los resultados mostrados a lo largo de este capítulo no se ven gravemente modificados. Sin embargo, con esta elección esperamos que la aproximación semiclásica sea válida en esta región de parámetros, y evitar difusión entre mínimos locales del potencial [35].

7.1.2. Configuraciones de equilibrio en la fase anclada

En la Fig. 7.4-e) se muestra la diferencia entre la posición final del ion i para el mayor valor de intensidad de bombeo láser η considerada y la posición del ion i en ausencia del potencial óptico: $\delta_i = x_i(\eta_{\max}) - x_i(\eta = 0)$ con $i = 1, 2, 3$, y donde las coordenadas de los iones se ordenan crecientemente de izquierda a derecha. En esta figura se fija $\Delta_c = 0$, dado

que modificar Δ_c en este caso solo tiene el efecto de desplazar la región de biestabilidad clásica.

Consideramos ahora la primera de estas situaciones típicas, la cual corresponde al caso en el que todas las posiciones de los iones en ausencia de potencial óptico se encuentran a una distancia mayor que un cierto valor crítico d_c de los mínimos del potencial óptico. En este caso, a medida que la intensidad del campo dentro de la cavidad aumenta, los iones se desplazan en un mismo sentido hacia los pozos del potencial óptico, como se ilustra en la Fig. 7.4-a). Hay un punto particular de este caso, en el cual los tres iones se encuentran originalmente en máximos del potencial óptico, por lo cual la cadena en la fase anclada se encuentra uniformemente desplazada respecto de su posición en la fase deslizante, como se muestra en la Fig. 7.4-b). Estos puntos se corresponden a los puntos en los cuales las 3 curvas de la Fig. 7.4-e) se encuentran, y están determinados por la condición

$$d_0 = \frac{\lambda}{2}n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (7.7)$$

derivada considerando el límite $\eta \rightarrow \infty$. Esto da como resultado los valores de $\omega/\kappa = 2,54, 2,70$ para el rango de parámetros considerado en Fig. 7.4-e).

La segunda situación típica ocurre cuando las posiciones de equilibrio de los iones de los extremos en ausencia del potencial óptico se encuentran a menos de d_c de los mínimos de intensidad del campo, como se muestra en la Fig. 7.4-c). En este caso, mientras el ion central se mueve a lo largo de $\lambda/4$ hacia un mínimo del potencial, los iones en los extremos de la cadena hacen pequeños desplazamientos en sentidos opuestos entre sí. Debido a que en este caso las distancias entre los iones para bombeo fuerte son distintas, lo nombramos como un “defecto” en la cadena.

Un punto particular en este caso, ocurre cuando las posiciones de equilibrio en ausencia del potencial óptico de los iones en los extremos de la cadena se corresponden con los mínimos del potencial óptico. Esto ocurre cuando se satisface la condición

$$d_0 = \frac{\lambda}{4}(2n + 1), \quad n \in \mathbb{N} \quad (7.8)$$

en ausencia del potencial óptico, es decir cuando $\eta = 0$. Así se obtienen los valores en el rango de parámetros considerados de frecuencias correspondientes a esta situación, $\omega/\kappa = 2,46, 2,62$. De esta forma, aumentar la intensidad del campo dentro de la cavidad sólo tiene el efecto de desplazar el ion central, como se muestra en la Fig. 7.4-d). Esto se corresponde a los valores de ω/κ en la Fig. 7.4-e), para los cuales se encuentran las curvas δ_1 y δ_3 .

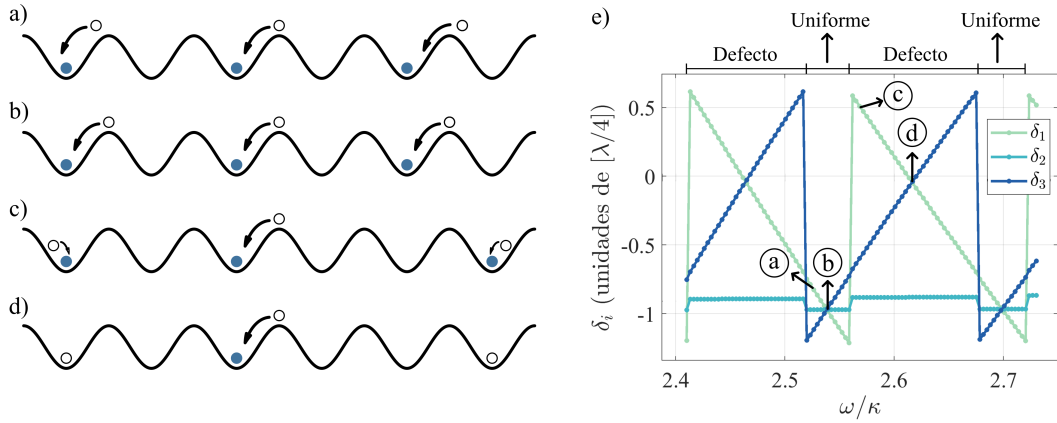


Fig. 7.4.: a)-d) Diagrama de las posibles transiciones a una cadena anclada (mostradas en azul), las cuales dependen de las posiciones de los iones en ausencia de potencial óptico (mostradas en blanco). Ver texto para la explicación. e) Diferencias entre las posiciones finales e iniciales de cada ion. En esta representación esquemática no se ilustra el potencial de la trampa.

Hay un tercer punto particular en esta descripción que corresponde a las intersecciones entre estas dos situaciones. Esto ocurre cuando las posiciones de equilibrio en ausencia de potencial óptico están exactamente a una distancia d_c de los pozos del potencial óptico, y se corresponde con las discontinuidades en Fig. 7.4-e). Observamos numéricamente que d_c es una cantidad que depende de la frecuencia de la trampa.

Las variaciones en las diferencias de posiciones para el ion central en el caso de bombeo fuerte (δ_2 en la Fig. 7.4-e)) sólo se deben a que el valor final de η utilizado para realizar esta figura está fijo, y para lograr que los iones se localicen completamente en los pozos del potencial es necesario considerar el límite $\eta \rightarrow \infty$. Para el régimen en el cual el desplazamiento no es uniforme es necesario llegar a valores más grandes de η para que los iones se aproximen al fondo de sus respectivos pozos ópticos. Es importante en la construcción de la Fig. 7.4-e) considerar que a lo largo de todo este capítulo estamos forzando al ion central a desplazarse hacia la izquierda.

En función de lo discutido, dividimos el eje de las frecuencias de la trampa en dos tipos de regiones distintas que llamamos “uniformes” o “sin defectos”, y las “no uniformes” o “con defectos”. Es necesario enfatizar que el régimen “uniforme” solo lo es estrictamente en el límite $\eta \rightarrow \infty$ o sobre los puntos que satisfacen la condición en ec. (7.7).

7.1.3. Modos de vibración a lo largo de la transición

Es importante notar que los modos en ec. (7.5) son los modos de vibración en ausencia de potencial óptico, y que su presencia causa la deformación de los modos de vibración, en principio incluso en la fase deslizante. Para hacer una comparación, se puede considerar el overlap entre los modos de vibración en presencia de potencial óptico con respecto a un modo de referencia elegido en ausencia del mismo. Es decir que tomamos como modos de referencia a los de la ec. (7.5): $u_n(\eta = 0)$. En la Fig. 7.5 se ve el overlap de cada modo con

respecto al mismo modo pero en su valor de referencia: $O_n \equiv u_n(\eta) \cdot u_n(\eta = 0)$, en función de η y ω , para un valor fijo de $\Delta_c = -10\kappa$. Otras elecciones de Δ_c sólo tienen el efecto de desplazar en η la región de la transición, pero el comportamiento de Fig. 7.5 es similar. Más aún, no observamos numéricamente cruces entre las frecuencias de los modos de vibración. Éstos se manifestarían como un salto abrupto en la Fig. 7.5.

Para entender esto, notamos que el cambio de la base de modos normales en presencia del potencial óptico a la base de los modos normales en ausencia del mismo, es precisamente la matriz con elementos $O_{j,k} = u_j(\eta = 0) \cdot u_k(\eta)$, cuyos elementos diagonales $O_{j,j} \equiv O_j$ son los overlaps mostrados en la Fig. 7.5. Dado que este es un cambio de base entre bases ortonormales, las filas de O satisfacen

$$O_{j,k}^2 + O_{j,l}^2 = 1 - O_{j,j}^2 \quad (7.9)$$

con $j, l, k = 1, 2, 3$ y $k, l \neq j$. Es decir que los overlaps entre modos distintos están acotados por los elementos diagonales de O . Corroboramos en la Fig. 7.5 que los elementos diagonales satisfacen siempre $O_j > 3/4$, de tal forma que

$$O_{j,k}^2 + O_{j,l}^2 \leq \frac{7}{16} < 1/2 \quad (7.10)$$

Es decir, los overlaps entre distintos modos están acotados por ec. (7.10).

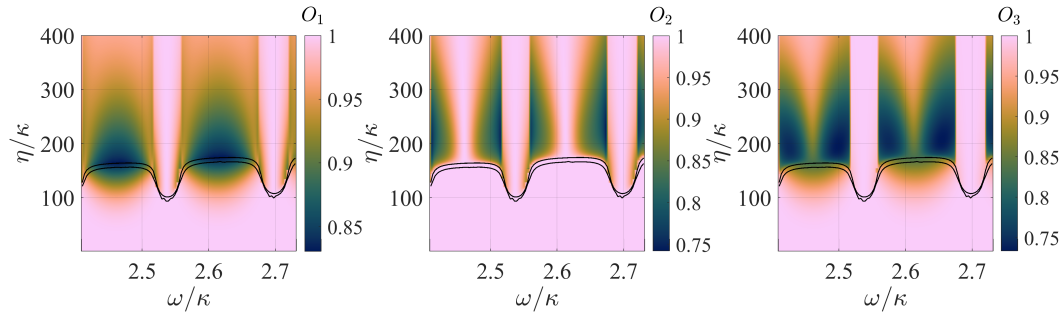


Fig. 7.5.: Overlaps entre los tres modos de vibración en función de η y los modos de vibración en ausencia de potencial óptico. Para hacer esta figura, la configuración elegida para encontrar estos overlaps en la región de biestabilidad corresponde a la rama de pocos fotones.

El mismo comportamiento periódico observado en la Fig. 7.4-e) puede ser visto en Fig. 7.5. En las regiones de cadenas uniformes en la fase anclada, es importante notar que los overlaps entre modos no decaen más allá de 0.9, de tal forma que los mismos permanecen siempre distinguibles entre sí, y muy similares a los modos en ausencia de potencial óptico (ec. (7.5)).

Por otro lado, si consideramos la región donde el desplazamiento de la cadena es no uniforme en la fase anclada, hay regiones donde los tres overlaps decaen luego de la región biestable, indicando que los modos se mezclan. Sin embargo, en el centro de esta región los modos u_1 y u_3 parecen mezclarse más, mientras O_2 muestra un pico. Esos máximos de O_2 se corresponden con los valores de ω para los cuales las posiciones de los iones extremos coinciden con los mínimos del potencial óptico, es decir Fig. 7.4-d).

7.2. Entrelazamiento en el estado estacionario

En esta sección estudiamos el entrelazamiento entre los distintos grados de libertad (tanto entre modos como entre iones) utilizando principalmente la negatividad logarítmica E_N [151, 163] (ver sección 3.2.3). Consideramos los máximos sobre η de la misma, a medida que se varía la frecuencia de la trampa armónica y la desintonía entre la cavidad y el láser. Es decir, para cada valor de Δ_c y ω , se varía η , y se define

$$\mathcal{E}(\Delta_c, \omega) \equiv \max_{\eta} E_N(\Delta_c, \eta, \omega) \quad (7.11)$$

considerando únicamente valores de η fuera de la región de biestabilidad.

7.2.1. Entrelazamiento entre modos

Biparticiones del estado reducido de dos modos

Al igual que en la sección 7.1, se puede ver que las figuras de esta sección son aproximadamente periódicas, mostrando que los máximos de entrelazamiento se corresponden en gran medida con la distribución espacial de los iones. Esto es particularmente notorio en la Fig. 7.6, donde se considera el entrelazamiento entre las fluctuaciones del campo y los distintos modos de vibración de la cadena. En la misma, se muestra la negatividad logarítmica (ver ec. (3.40)) obtenida considerando el estado reducido de sólo 2 subsistemas A y B (trazando sobre los modos restantes) y se la denota $E_{1 \times 1:AB}$.

A lo largo de todo este capítulo, dado que estamos trabajando con estados Gaussianos, adoptamos la convención usual de llamar modo a cada uno de los pares de operadores creación y aniquilación asociados a cada grado de libertad y no sólo para referirnos a los modos de vibración, es decir incluimos el campo de la cavidad en la colección de modos.

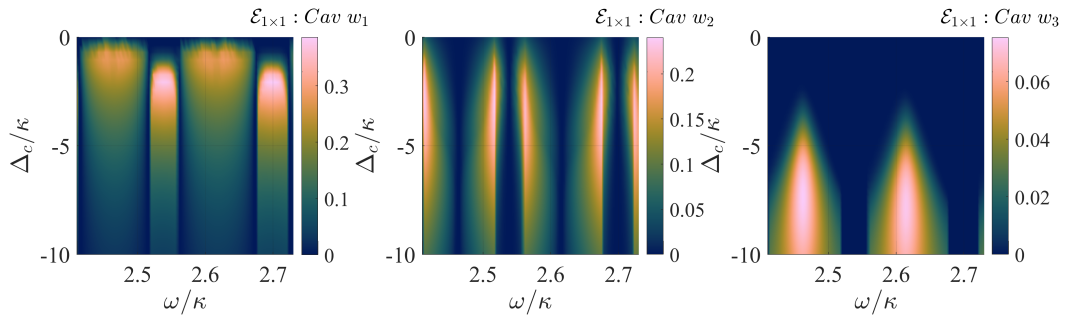


Fig. 7.6.: Máximos sobre η de la negatividad logarítmica en una bipartición 1x1 entre los modos del sistema.

En Fig. 7.6-a) se puede ver que el entrelazamiento entre el campo de la cavidad y el primer modo de vibración $\mathcal{E}_{1 \times 1: cav, \omega_1}$, muestra máximos locales independientemente de encontrarse en las regiones del desplazamiento uniforme o no uniforme. Estos máximos

locales de \mathcal{E} pasan de estar centrados en $\Delta_c/\kappa \approx -1$ a $\Delta_c/\kappa \approx -2$ para los desplazamientos no uniformes, y uniformes respectivamente.

Si se considera el entrelazamiento entre la cavidad y el segundo modo de vibración, $\mathcal{E}_{1 \times 1; \text{cav}, \omega_2}$ en Fig. 7.6-b), observamos que muestra máximos dentro de la región de formación de defectos. Sin embargo, estos ocurren particularmente en los límites entre la región en la que se forman defectos y la región de cadenas uniformes. Es importante notar que este tratamiento semiclásico no es confiable en esas regiones de parámetros.

Por otra parte, en la Fig. 7.6-c) se verifica que el entrelazamiento entre el tercer modo y la cavidad es despreciable cuando la frecuencia de la trampa es tal que la cadena es uniforme en la fase anclada. Esto es así debido a que en las regiones correspondientes a cadenas uniformes, se tiene que el acoplamiento c_3 entre cavidad y el modo egipcio es mucho menor en magnitud que el resto. Este acoplamiento está dado por ec. (2.65), escrita nuevamente aquí por claridad

$$c_j = \frac{q\omega_j}{\sqrt{2}} \sum_s M_{sj} \nabla_s U_0(x_1, x_2, x_3) \quad (7.12)$$

donde las columnas de la matriz M tienen las coordenadas de cada modo normal, que dependen del potencial óptico.

En ausencia del potencial óptico se tiene así que

$$c_3(\eta = 0) \propto \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right) U_0(x_1, x_2, x_3) \quad (7.13)$$

de donde puede verse que este acoplamiento se anularía exactamente si los iones son equidistantes a una distancia igual a un múltiplo de $\lambda/2$, debido a la periodicidad de $U_0(x_1, x_2, x_3)$. En principio esto sólo es válido en ausencia del potencial óptico, es decir, cuando es válida la expresión en ec. (7.13). Sin embargo, como se comentó anteriormente, a partir de Fig. 7.5 se observa que en las regiones de cadenas uniformes la estructura de los modos normales se ve escasamente modificada por la presencia del potencial óptico, y este argumento sigue siendo aproximadamente correcto. Esto por lo tanto explica que $|c_3(\eta)|$ sea mucho menor al resto de los acoplamientos en las regiones correspondientes a cadenas uniformes.

Más aún, en toda la fase deslizante, los acoplamientos c_1 y c_3 son nulos. Esto es así incluso para $\eta \neq 0$ ya que en toda la fase deslizante la solución clásica mantiene la simetría $x_1 = -x_3$, y $x_2 = 0$. Debido a esto, los máximos de entrelazamiento de la Fig. 7.6-a) y c) se encuentran siempre en la fase con ruptura de simetría, mientras que se anulan en la fase deslizante. Recordamos que esto no es visible en la Fig. 7.6, que muestra los resultados de una maximización sobre η .

En las regiones de formación de defectos, el entrelazamiento entre las fluctuaciones de la cavidad y el tercer modo (Fig. 7.6-c)) es distinto de cero, aunque menor al resto de las negatividades, y muestra máximos precisamente en los valores de la frecuencia de la trampa correspondientes a la Fig. 7.4-d), es decir, cuando las posiciones de equilibrio de los extremos de la cadena en $\eta \rightarrow \infty$ se encuentran en los mínimos del potencial óptico. Sin

embargo, estos máximos no ocurren para bombeo muy fuerte, sino que los iones muestran pequeños desplazamientos de estos mínimos del potencial justo después de la transición, como se puede ver en la Fig. 7.7. Es justamente para esos valores intermedios de η donde se alcanza el máximo de entrelazamiento con el modo u_3 . Como función de Δ_c , los máximos de entrelazamiento están dados para valores más grandes de $|\Delta_c|$.

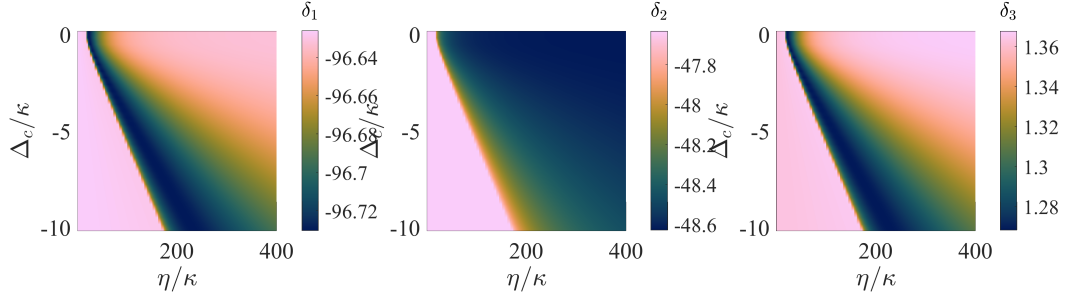


Fig. 7.7.: Diferencias entre las posiciones de equilibrio clásicas con y sin potencial óptico: $\delta_i(\eta)$ en $\omega/\kappa = 2,6169$, en unidades de $\lambda/4$.

En la Fig. 7.8 se muestran las negatividades E_N (es decir, sin considerar máximos sobre η), para un caso particular ($\omega/\kappa = 2,4326$) de la Fig. 7.6, pero en este caso como función de η . El primer punto a notar es que los máximos de entrelazamiento se obtienen para valores intermedios de la intensidad del bombeo láser, es decir que el mismo no crece indefinidamente con η .

En las subfiguras a) y c) se verifica que los máximos de E_N se encuentran generalmente fuera de la región de biestabilidad clásica. Sin embargo, esta elección de ω/κ es tal que estos máximos de entrelazamiento se ven particularmente alejados de la región de biestabilidad, mientras que para otras elecciones de parámetros pueden verse más cercanos a la misma. Es importante recordar que la aproximación que usamos es más confiable lejos de la región clásicamente biestable.

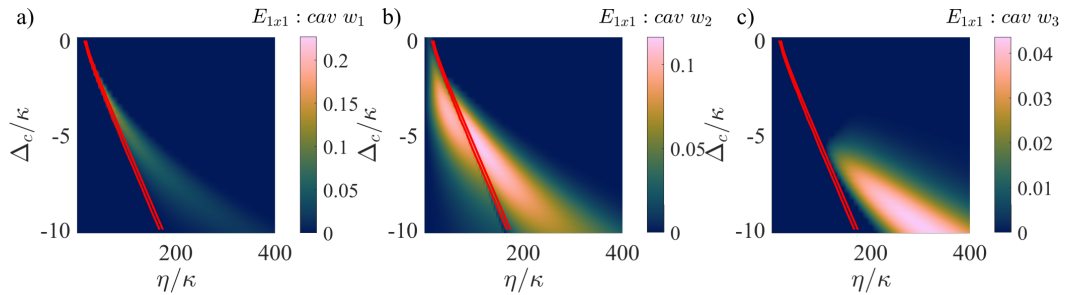


Fig. 7.8.: Negatividad logarítmica en una bipartición 1×1 entre los modos del sistema, para $\omega/\kappa = 2,4326$, la región biestable se muestra entre las líneas sólidas rojas.

Si se analiza la negatividad $E_{1 \times 1; \text{cav}, \omega_2}$ en la Fig. 7.8-b), se puede ver que los máximos de entrelazamiento ocurren en ambas fases, alrededor de la región de biestabilidad clásica, aunque puede obtenerse entrelazamiento apreciable en regiones alejadas de las fronteras de biestabilidad.

Además, se verifica numéricamente que esta negatividad es despreciable en la fase anclada sin defectos, lo cual es de esperar debido a la simetría del *breathing mode*: el acoplamiento entre éste y las fluctuaciones del campo de la cavidad es

$$c_2(\eta = 0) \propto \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3} \right) U_0(r) \quad (7.14)$$

de donde puede entenderse que el mismo se hace despreciable en comparación a los otros acoplamientos en la fase anclada sin defectos, debido a la simetría de la cadena y el potencial. Nuevamente, recordamos que esta interpretación en términos del modo en ausencia del potencial óptico es válida solo porque corroboramos que los mismos no se modifican significativamente en la región sin defectos.

Dentro de las regiones con formación de defectos, particularmente en los picos de O_2 (es decir las situaciones correspondientes a (Fig. 7.4-d)), esta negatividad se anula para todo valor de η . Esto puede entenderse en términos de lo explicado anteriormente para estos puntos particulares: dado que el único ion que se ve afectado por el incremento del bombeo láser es el ion central y este no está involucrado en el *breathing mode*, el acoplamiento entre la cavidad y el *breathing mode* es varios ordenes de magnitud menor que los acoplamientos entre la cavidad y los otros modos, lo que causa que $E_{1 \times 1; \text{cav}, \omega_2}$ sea tan pequeño. Otra vez, esta explicación es sólo válida en ausencia del potencial óptico. Sin embargo, se puede ver de la Fig. 7.5 que en estos valores de ω/κ el *breathing mode* se mantiene aproximadamente no modificado por el potencial óptico.

Por último, es importante notar que bajo esta aproximación nunca hay entrelazamiento entre los distintos modos de vibración. Es posible que esto sea una consecuencia del tratamiento semiclásico Gaussiano. Para determinarlo es necesario extender el tratamiento de este capítulo a un tratamiento no lineal de las ecuaciones de movimiento de Heisenberg-Langevin en sección 2.4, o realizar otras aproximaciones semiclásicas que den un acoplamiento directo entre modos de vibración. Corroboramos que bajo la aproximación semiclásica localizada, en el caso de considerar sistemas reducidos que solo incluyan dos modos de vibración, la información mutua es despreciable, de tal forma que no hay correlaciones cuánticas ni clásicas significativas entre modos de vibración.

A grandes rasgos se espera que un entrelazamiento alto entre modos de vibración y de la cavidad está relacionado a un acoplamiento entre los modos de vibración y la cavidad fuertes, y aproximadamente una resonancia entre Δ_{eff} y las frecuencias de los modos normales ω_j^v . Podemos considerar entonces la relación entre el entrelazamiento y las resonancias entre la desintonía efectiva y las frecuencias de cada uno de los modos de vibración, es decir las condiciones $\Delta_{\text{eff}} = -\omega_j^v$. La resonancia $\Delta_{\text{eff}} = -\omega_j^v$ se corresponde, como se comentó en el capítulo 2.4, a una dinámica donde los términos predominantes están dados por $\delta a b_j^\dagger + hc$, que corresponden a un intercambio de excitaciones entre el modo de la cavidad y el correspondiente modo de vibración en resonancia. Las resonancias tipo “banda azul” corresponden a un régimen inestable bajo este tratamiento.

Para esto se muestra en Fig. 7.9 la cantidad $\delta_j^v \equiv -\Delta_{\text{eff}} - \omega_j^v$ para cada modo de vibración, de tal forma que los ceros de esta figura corresponden a las resonancias donde una

interacción tipo *beam splitter* es predominante. A través de la comparación de las figuras 7.8 y 7.9 se verifica que las regiones de máximo entrelazamiento coinciden aproximadamente con las regiones de la resonancia.

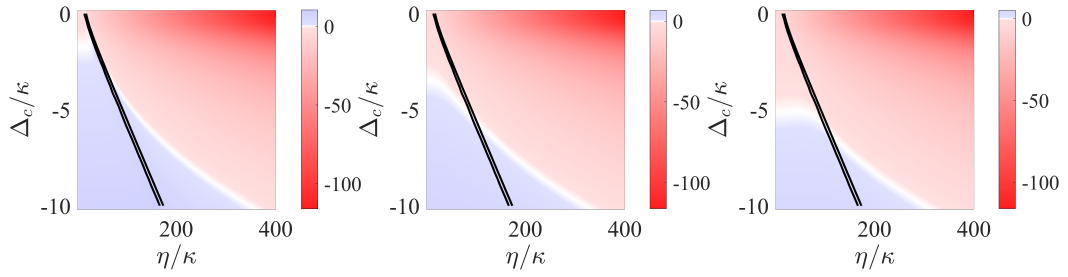


Fig. 7.9.: δ_j^v para $\omega/\kappa = 2,4326$, para cada uno de los tres modos de vibración. La región biestable se muestra entre las líneas sólidas negras.

Esto puede corroborarse en más detalle a través de la Fig. 7.10, donde se muestra el entrelazamiento entre la cavidad y los modos de vibración en función de los acoplamientos $|c_i|$ y la desintonía δ_j^v , para un valor fijo de ω a modo de ejemplo. Estas condiciones se verifican para el primer y segundo modo de vibración en a) y b). Por el contrario, para el tercer modo (en Fig. 7.10-c)) se observa que los máximos de entrelazamiento no se obtienen necesariamente cuando la cavidad está en resonancia con este modo de vibración. Sin embargo, el entrelazamiento con este modo siempre es muy pequeño, lo cual puede explicarse por el menor valor del acoplamiento $|c_3|$.

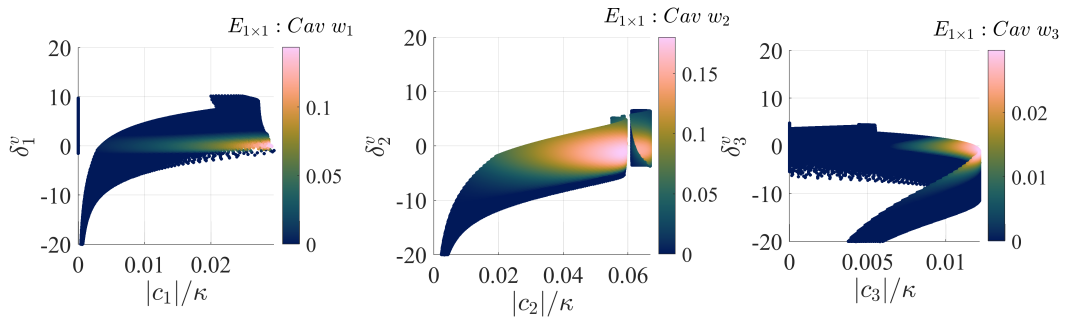


Fig. 7.10.: Negatividades en biparticiones de 1×1 modos, entre la cavidad y los distintos modos, para $\omega/\kappa = 2,4326$, para cada uno de los tres modos de vibración. El salto en b) se debe a que los máximos de entrelazamiento se encuentran en algunas ocasiones en la región de biestabilidad, y los mismos fueron excluidos de esta figura.

Biparticiones del sistema completo

Consideramos también las negatividades que se obtienen de hacer una bipartición del sistema completo en 1 y 3 modos. Es decir que se cuantifica el grado de entrelazamiento entre un subsistema A y los otros 3 modos restantes, y lo denotamos por $E_{1 \times 3:A}$. En analogía con la notación ya utilizada, denotamos a sus máximos sobre η por $\mathcal{E}_{1 \times 3:A}$

Puede verse en la Fig. 7.11-b)-d) que las negatividades $\mathcal{E}_{1 \times 3; \omega_j}$ dan resultados cuantitativamente similares a considerar el entrelazamiento $\mathcal{E}_{1 \times 1; \text{cav}, \omega_j}$. Esto puede entenderse a partir de notar que el entrelazamiento entre los distintos modos de vibración es nulo, y no contribuyen al entrelazamiento bipartito entre uno de los modos y el resto del sistema. Por otra parte, al considerar la negatividad $\mathcal{E}_{1 \times 3; \text{cav}}$, se ve que la misma se comporta aproximadamente como la combinación de las distintas negatividades en las biparticiones $\text{cav} \times \omega_1$ y $\text{cav} \times \omega_2$ ($\text{cav} \times \omega_3$ no contribuye significativamente dado que el entrelazamiento en esa bipartición es mucho menor en magnitud al de las otras biparticiones, como se puede ver en Fig. 7.6).

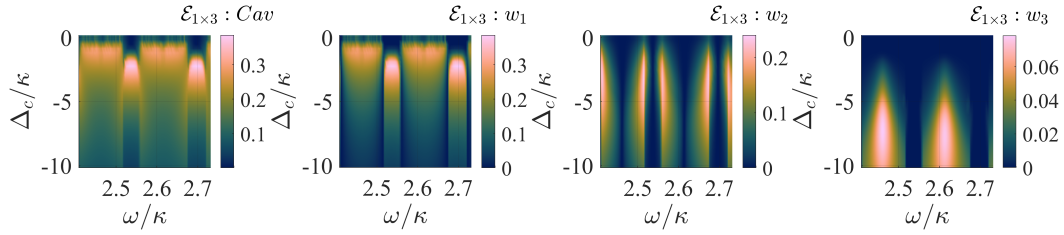


Fig. 7.11.: Máximos sobre η de la negatividad logarítmica en una bipartición 1x3 entre los modos del sistema.

Para ciertos valores de frecuencia aparecen acoplamientos que se anulan en regiones aproximadamente paralelas a la línea de la transición, como se puede ver en Fig. 7.12-a) para el tercer modo de vibración. Cada vez que esto ocurre el número de ocupación en el correspondiente modo tiende al valor dado por el baño térmico, como en la Fig. 7.12-b).

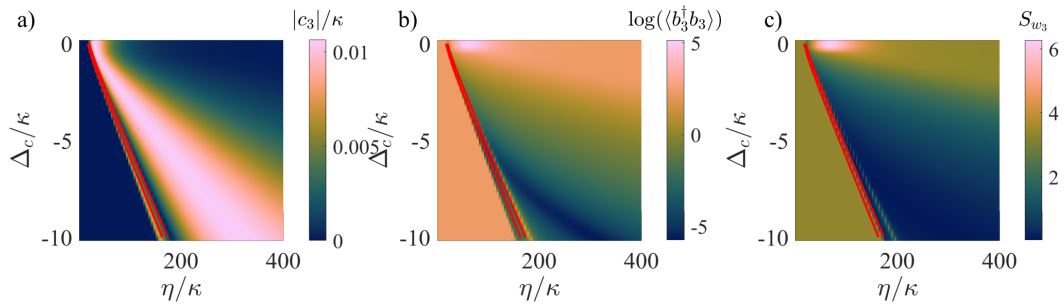


Fig. 7.12.: a) Acoplamiento entre las fluctuaciones de la cavidad y el tercer modo de vibración de la cadena. b) Logaritmo del número de ocupación del tercer modo. c) Entropía de von Neumann del tercer modo. En los tres casos $\omega/\kappa = 2,5134$.

En la Fig. 7.12-b) puede verse un pico en la ocupación del tercer modo de vibración para $\Delta_c = 0$. Esto se corresponde a que para este caso Δ_{eff} tiende a 0 cuando la cadena se localiza en la fase anclada, y la condición $\Delta_{\text{eff}} = 0$ causa calentamiento de los modos inducido por la cavidad [116]. El hecho de que tenga esa forma particular de pico se debe a que a medida que la cadena se localiza en los pozos del potencial óptico cuando η crece, el acoplamiento con la cavidad disminuye, de tal forma que el valor estacionario de la ocupación pasa a estar dado por el número de ocupación del ambiente. El comportamiento de la Fig. 7.12 es típico para los otros modos y otros conjuntos de parámetros también.

El incremento en las excitaciones del modo egipcio, tiene un consecuente aumento en la entropía del mismo, como puede verse en la Fig. 7.12-c). En general, la línea en la cual esto ocurre se encuentra fija en el plano η, Δ_c . Es la región biestabilidad la que varía en función de que la cadena muestre un desplazamiento uniforme o no en la fase anclada (como puede verse en la Fig. 7.5).

7.2.2. Entrelazamiento entre iones

Consideramos ahora el entrelazamiento entre la cavidad y los iones, o entre distintos iones, en lugar de considerar el entrelazamiento entre modos. Aunque la diferencia entre estas dos situaciones es un cambio de base, la cantidad de entrelazamiento es distinta. Esto se debe a que realizar un cambio de base en este caso implica tomar particiones distintas del sistema.

Un ejemplo de esto se esquematiza en la Fig. 7.13. En este diagrama se representan dos biparticiones distintas de los grados de libertad del sistema en la base de coordenadas de los iones. En la Fig. 7.13-a) se representa la bipartición correspondiente a considerar el entrelazamiento entre la cavidad y la coordenada del primer ion. Considerando el sistema completo, esto es distinto a tomar una bipartición entre la cavidad y el modo centro de masa, como se esquematiza en la Fig. 7.13-b), ya que los modos normales son una combinación de las coordenadas de los iones.

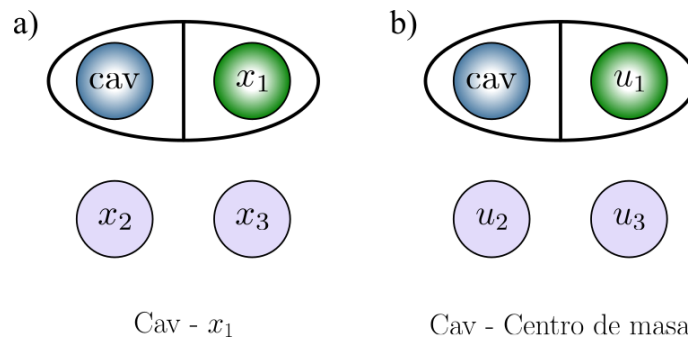


Fig. 7.13.: Esquema de dos biparticiones diferentes del sistema de 4 modos. a) Bipartición del estado reducido de la cavidad y el primer ion. b) Bipartición entre la cavidad y el modo centro de masa.

Biparticiones del estado reducido de dos modos

Si consideramos en primer lugar el entrelazamiento entre distintos iones, el primer resultado obtenido es que, dentro de esta aproximación, el entrelazamiento entre los iones de los extremos de la cadena es despreciable: es dos ordenes de magnitud menor al resto de las negatividades entre iones, y aparece sólo durante la fase anclada con defectos, a lo largo de una curva muy fina en el plano (η, Δ_c) que coincide aproximadamente con las resonancias $\Delta_{\text{eff}} = -\omega_3^v$.

Si consideramos entonces el entrelazamiento entre iones contiguos, se puede ver en la Fig. 7.14-a) y c) que el mismo se vuelve despreciable en el centro de las regiones de cadenas uniformes. Por el contrario, se pueden ver máximos del entrelazamiento cuando la fase anclada muestra defectos, donde se observa una asimetría entre las Figuras 7.14-a) y c). Esta asimetría es una consecuencia de fijar que el ion central siempre se localiza en el pozo izquierdo en la fase anclada. La elección contraria, solo causaría una reflexión a lo largo de ω entre las figuras 7.14-a) y c).

Cuando la cadena forma defectos, al aumentar el bombeo láser, los iones se localizan en sus pozos del potencial óptico más próximos, dando lugar a que el ion en uno de los extremos se desplaza en sentido opuesto a los otros dos. A medida que se incrementa la frecuencia de la trampa, las posiciones de equilibrio en ausencia de potencial óptico se desplazan hacia el origen. De forma tal que el ion que se desplaza en sentido opuesto alterna entre los dos extremos de la cadena, como se esquematiza en la Fig. 7.14-b). Se observa de las Figs. que el entrelazamiento es mayor entre el ion central y el que se desplaza en sentido opuesto a él.

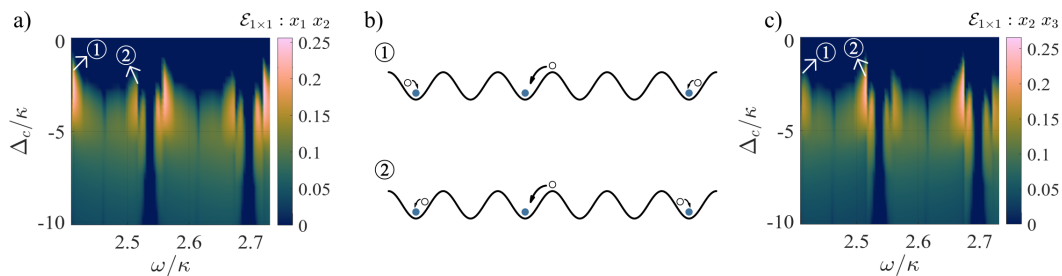


Fig. 7.14.: a) y c) Máximos sobre η de la negatividad logarítmica en una bipartición 1×1 entre iones consecutivos. b) Representación esquemática de dos casos particulares de la transición deslizante-anclada (ver texto para la explicación), en la misma no se ilustra el potencial de la trampa.

Si en cambio consideramos el entrelazamiento entre las fluctuaciones de la cavidad y los iones, en Fig. 7.15, vemos que hay dos regiones aproximadamente complementarias: una región donde el entrelazamiento entre la cavidad y los iones de los extremos de la cadena muestra máximos, mientras que hay otra región donde el entrelazamiento entre cavidad y el ion central es máximo. Vemos que los máximos \mathcal{E} son del mismo orden de magnitud, independientemente del modo de vibración considerado. Sin embargo, el entrelazamiento $\mathcal{E}_{1 \times 1 : cav, x_2}$ con el ion central es consistentemente distinto de cero en una región de parámetros más extensa.

Por otro lado, se observan máximos en el entrelazamiento entre la cavidad y los iones de los extremos en la región sin defectos. En este caso se puede ver en la Fig. 7.15-a) y c) que nuevamente el entrelazamiento es mayor cuando se considera el ion que se desplaza en la dirección opuesta al ion central.

Vemos además que el entrelazamiento entre iones consecutivos cae a cero en los centros de las regiones de desplazamiento uniforme y no uniforme. Como función del bombeo láser,

el máximo de entrelazamiento se encuentra en la fase anclada, y se verifica numéricamente que el mismo es nulo antes de la transición para cualquier combinación de parámetros.

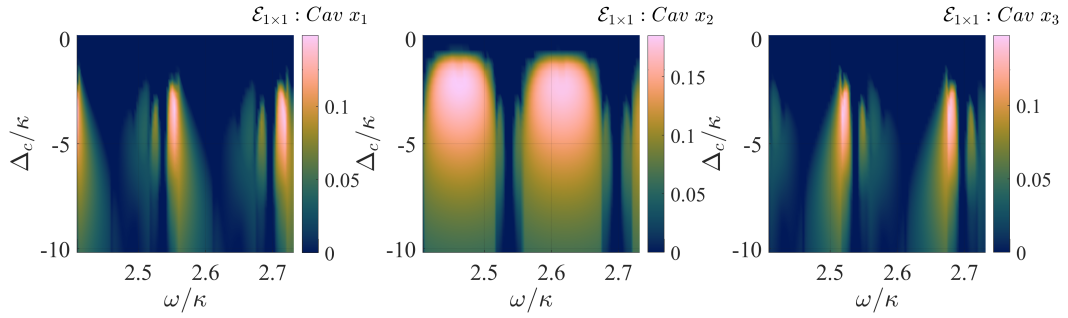


Fig. 7.15.: Máximos sobre η de la negatividad logarítmica en una bipartición 1x1 entre las fluctuaciones de la cavidad y los iones.

Un ejemplo de esto puede verse en la Fig. 7.16 para $\omega/\kappa = 2,5134$ (con formación de defectos). Además, se puede ver por ejemplo en Fig. 7.16-a) un mínimo en el entrelazamiento en la fase anclada, aproximadamente paralelo a la línea de la transición. Esto corresponde al acoplamiento $|c_3|$ despreciable y el consecuente incremento en las excitaciones del tercer modo y la entropía del mismo, como puede verse en las figuras 7.12-a)–c).

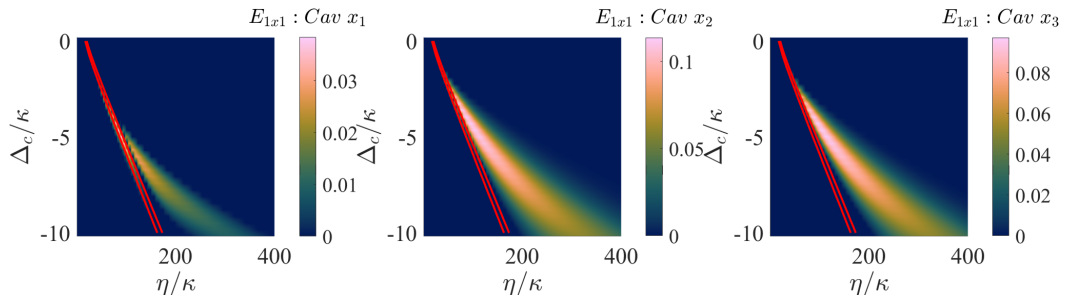


Fig. 7.16.: Negatividad logarítmica en una bipartición 1x1 entre las fluctuaciones de la cavidad y los iones, para $\omega/\kappa = 2,5134$.

Biparticiones del sistema completo

En esta misma base podemos considerar también las negatividades en biparticiones del sistema completo (sin tomar trazas parciales), las mismas se muestran en la Fig. 7.17. En este caso, se ve que la negatividad $cav \times (x_1 x_2 x_3)$ es igual a $cav \times (\omega_1 \omega_2 \omega_3)$ ya que la partición del sistema es la misma, y solo hay un cambio de base entre las dos cantidades. Se puede apreciar en las Figs. 7.17-b) y d) la misma asimetría presente en Fig. 7.14. Es importante notar que esta es la clase de bipartición del sistema que muestra mayor grado de entrelazamiento, y es mucho mayor a considerar el entrelazamiento entre pares de iones como en Fig. 7.14.

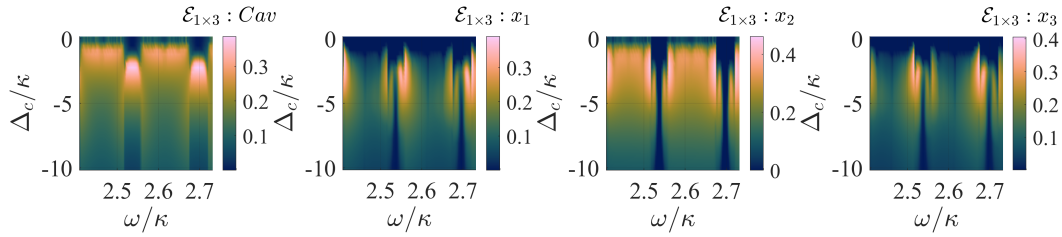


Fig. 7.17.: Máximos sobre η de la negatividad logarítmica en una bipartición 1x3 de las fluctuaciones de la cavidad y los iones.

7.3. Resumen

En este capítulo estudiamos transiciones estructurales en una cadena unidimensional de tres iones en un potencial óptico, a partir de la aproximación semiclásica de estados Gausianos de la sección 2.4, considerando que las distribuciones de los iones están localizadas en los mínimos del potencial efectivo clásico de (2.54), y que no hay procesos de difusión que lleven a los iones a mínimos locales próximos. Por lo estudiado en los capítulos 5 y 6, consideramos esta aproximación como válida en tanto este formalismo sea utilizado fuera de la región de biestabilidad clásica, y suficientemente lejos de los puntos de transición.

A partir de estos resultados, realizamos una caracterización del entrelazamiento y su relación con los distintos modos normales y la configuración de la cadena de iones en la fase anclada. Vemos que en una cadena de tres iones, en general la formación de “defectos” en la cadena favorece un entrelazamiento alto entre las fluctuaciones de la cavidad y el segundo y tercer modo de vibración. Mientras que es posible obtener estados entrelazados de las fluctuaciones de la cavidad y el modo centro de masa independientemente de la deformación de la cadena. Se mostró que es posible encontrar entrelazamiento no nulo entre distintos grados de libertad, en regiones que se encuentran separadas de la región de biestabilidad clásica.

Identificamos la presencia de resonancias que favorecen el entrelazamiento, así como la presencia de ceros en el acoplamiento que son perjudiciales para la generación de entrelazamiento. Notamos que al considerar biparticiones del sistema en término de los modos, el entrelazamiento se da entre la cavidad y cada modo de vibración, mientras que al realizar biparticiones en términos de iones individuales las mayores correlaciones se dan a nivel colectivo, de modo que las biparticiones 1×3 dan valores de entrelazamiento generalmente mayores que las biparticiones 1×1 . Observamos además que el entrelazamiento entre los iones de los extremos de la cadena es despreciable.

Otro aspecto interesante es que, en contraste con el caso de las transiciones estructurales en dos dimensiones (transición lineal-zigzag) [20], es posible encontrar entrelazamiento claramente separados de los límites de estabilidad y de la región clásicamente biestable.

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis nos enfocamos en transiciones estructurales en sistemas de iones atrapados acoplados a cavidades ópticas en el régimen dispersivo. En este régimen la dinámica de estos sistemas es efectivamente la de un modelo optomecánico. Como un primer paso realizamos una descripción detallada de un ion individual integrado a una cavidad óptica, en el régimen de biestabilidad clásica. Estudiamos distintas aproximaciones semiclásicas y sus regímenes de validez. Con el objetivo de empezar el estudio de sistemas más complejos realizamos una descripción de una cadena de tres iones y estudiamos la relación entre la presencia de entrelazamiento y los modos de vibración de las estructuras dentro de la cavidad.

En un primer lugar, en el capítulo 5, hemos analizado el estado asintótico de un sistema optomecánico compuesto por el movimiento de un ion acoplado a un campo de cavidad óptica, para valores de cooperatividad tales que el tratamiento semiclásico predice biestabilidad, pero en el régimen de pocos fotones. Nuestros resultados indican una transición suave entre las dos soluciones semiclásicas, lo que es de esperar dado el overlap no despreciable entre los estados asociados a las diferentes soluciones semiclásicas. Confirmamos la expectativa de que la transición se agudiza cuando disminuye el overlap entre las dos configuraciones de equilibrio en competencia. Observamos picos en el entrelazamiento, la pureza del estado de la cavidad y la información mutua en el estado estacionario en la región de transición. Sin embargo, no encontramos indicadores de la biestabilidad semiclásica en el gap espectral del superoperador de evolución. En su lugar, el comportamiento del mismo está dominado por la eficiencia del enfriamiento del ion inducido por la cavidad, que está determinada por la desintonía efectiva y la ubicación del ion.

Las predicciones semiclásicas [20] sólo pueden ser aproximadamente válidas cuando el estado asintótico está cerca de ser Gaussiano. Según nuestros resultados, para los parámetros que elegimos el estado puede tomarse como aproximadamente Gaussiano para un bombeo débil, mientras que recuperar un estado aproximadamente Gaussiano en el régimen en el cual el ion está localizado en los costados requiere intensidades de bombeo mucho mayores que aquellas para las que se observa la transición. Así, para el rango de parámetros que exploramos, esperaríamos que la descripción semiclásica fuera aproximadamente válida sólo en el lado de bombeo débil de la transición. Sin embargo, contrariamente a la descripción semiclásica, existen correlaciones no despreciables entre el estado del ion y el de la cavidad también dentro del régimen en el que el ion se encuentra en el centro de la trampa. Se podría concluir entonces que la aproximación semiclásica como en [20] no es apropiada para ninguno de los rangos de parámetros en nuestros estudios. Sin embargo, el tratamiento semiclásico localizado predice correctamente a grandes rasgos el rango de parámetros para la transición optomecánica.

Hay varios aspectos en los cuales el estudio de este trabajo podría ser extendido. En primer lugar, ya fue comentado que en este caso la mayor dificultad es la complejidad numérica de obtener el espectro del generador. Debido a esto sería deseable hacer un estudio de la eficiencia de variaciones [208] de *Implicitly Restarted Arnoldi Method* (IRAM) [181], o del uso de algoritmos basados en procedimientos distintos, como los métodos más recientes basados en integrales de contorno [209, 210]. Una segunda alternativa es mapear el Hamiltoniano del sistema estudiado al de una red y utilizar métodos comunes para este tipo de problemas, como fue realizado en [211], donde mapean la dinámica de una cavidad con una no linealidad tipo Kerr, con bombeo láser y una dinámica disipativa, a un modelo de una red para luego utilizar *Time-evolving block decimation*.

Por otra parte, en el capítulo 6 examinamos la fiabilidad de un método semiclásico aplicado al mismo sistema. Nos hemos centrado en un régimen con multiestabilidad clásica, que es el conceptualmente más interesante y numéricamente más desafiante ya que las aproximaciones Gaussianas muestran resultados muy distintos de los resultados exactos en esta región de parámetros, tal como se vio en el capítulo 5.

Nuestro estudio se basa en una aproximación de Wigner truncada en la que se descartan las derivadas de orden superior a dos, pero se mantienen las no linealidades en las variables del sistema (de tal forma que los estados resultantes no son Gaussianos). Esto lleva a una ecuación de Fokker-Planck que puede simularse con recursos muy moderados. Mantener algunos términos de orden superior permite describir un sistema con más de una configuración de equilibrio semiclásica, y sin restringirlo a estados Gaussianos. Esto resulta en una mejora sustancial con respecto a la aproximación Gaussiana localizada.

Presentamos una comparación de este procedimiento con la diagonalización numérica del superoperador de evolución cuántica, considerando las predicciones de los dos métodos para varias cantidades que caracterizan el estado asintótico. La aproximación de Fokker-Planck proporciona en general un buen acuerdo con los resultados completamente cuánticos, incluso en regímenes claramente no semiclásicos. Sin embargo, en comparación con los resultados exactos funciona peor para el régimen de bombeo débil y en el centro de la región de transición. Es razonable esperar esto dado que en ambos casos las fluctuaciones, despreciadas en la TWA, son comparativamente más importantes. En el régimen de bombeo bajo esto se debe a que el número de fotones es más bajo, y en el régimen de la transición esto se debe a que el estado del sistema está escasamente localizado en el espacio de fases. Curiosamente, el error del método no decae necesariamente con la escala característica del sistema, como pudo verse al aumentar el número de fotones en la cavidad. Por el contrario, un mayor número de fotones conduce a transiciones más agudas que hacen que la TWA sea menos precisa. De nuevo, esto puede entenderse por haber despreciado las fluctuaciones, que cobran más relevancia a medida que la disipación de la cavidad disminuye.

Por último, estudiamos el tiempo de relajación del sistema en el contexto de la TWA. Según nuestras observaciones, esto conduce a resultados razonables en términos del comportamiento esperado, la extrapolación de valores anteriores utilizando la diagonalización numérica [53], y la comparación (muy limitada) con los resultados obtenidos a partir del formalismo de saltos cuánticos. Éste muestra el mismo comportamiento en el cual se

ralentiza la dinámica en la región de la transición, de forma que los tiempos de relajación aumentan a medida que el sistema se acerca al límite semiclásico. Subrayamos que aunque la TWA conduce a resultados que cuantitativamente no son exactos, son cualitativamente correctos.

Este procedimiento semiclásico representa una mejora clara y poco costosa con respecto a la descripción Gaussiana localizada. Es una forma muy rápida de obtener estimadores fiables para los observables de interés, que pueden ser útiles como predicciones aproximadas o como punto de partida para métodos más sofisticados y costosos. También observamos que la aproximación semiclásica localizada en el mínimo global de un potencial efectivo para el ion puede proporcionar una predicción bastante errónea para la localización del punto de transición entre diferentes configuraciones de equilibrio. Este problema es especialmente relevante para sistemas con muchos mínimos locales, como las variaciones del modelo de Frenkel-Kontorova [38, 200]. Incluso para los problemas para los que la descripción Gaussiana localizada se considera apropiada, el método que utilizamos puede proporcionar un punto de comparación valioso.

La TWA es fácilmente generalizable y todavía fácil de simular en sistemas con un mayor número de iones, donde la interacción de Coulomb de largo alcance compite con las fuerzas ópticas y el confinamiento de la trampa produciendo una dinámica más compleja [20, 38]. También podría ser útil para la extensión de trabajos previos sobre el diseño de cristales de iones [127] al régimen de cooperatividades más altas. De hecho, la Ec. (6.7) puede modificarse para aplicarse a un espacio de fases mayor que incluya más iones. El uso de la TWA da, para la evolución unitaria, un corchete de Poisson en cada par de variables canónicamente conjugadas. Las pérdidas o el ruido en los iones pueden introducirse mediante términos de *drift* y difusión independientes o correlacionados, dependiendo del modelo de ruido de interés. El cálculo de los valores medios sigue siendo rápido, y el escaleo con el número de iones es mucho menos problemático que en un tratamiento cuántico. Como sugieren los resultados de este trabajo, el estado estacionario obtenido con una TWA podría ser significativamente más preciso que la aproximación Gaussiana localizada, con recursos computacionales muy bajos.

La metodología de trabajo utilizada en este caso abre la posibilidad de continuar el estudio de este sistema desde muchos puntos diferentes. En una primera instancia, es interesante notar que este formalismo permite fácilmente la descripción de distintos tipos de ruido. Esta perspectiva fue analizada solo superficialmente en este trabajo, ya que una elección particular de un modelo de ruido para los iones debería estar motivada por configuraciones experimentales específicas. También sería interesante considerar modelos de ruido que solo estén presentes sobre el momento del ion, de tal forma que el modelo no tenga una posición preferencial, y corresponda a un modelo de fricción.

En el capítulo 7 comenzamos con el estudio de transiciones estructurales en una cadena unidimensional, en el caso simple de tres iones y utilizando la aproximación semiclásica localizada. A partir de estos resultados, realizamos una caracterización del entrelazamiento y su relación con los distintos modos normales y la configuración de la cadena de iones en la fase anclada. Se mostró que es posible encontrar entrelazamiento no nulo entre distintos

grados de libertad, en regiones que se encuentran separadas de la región de biestabilidad clásica.

Vemos que en una cadena de tres iones, en general la formación de “defectos” en la cadena favorece un entrelazamiento alto entre las fluctuaciones de la cavidad y el segundo y tercer modo de vibración. Mientras que es posible obtener estados entrelazados de las fluctuaciones de la cavidad y el modo centro de masa independientemente de la deformación de la cadena. Observamos también la presencia de configuraciones especialmente favorables o desfavorables para la generación de entrelazamiento en relación con las resonancias y las constantes de acoplamiento.

Una continuación natural de este trabajo es la comparación de los resultados obtenidos para los valores medios y posiciones de equilibrio clásicas con resultados obtenidos sin utilizar la aproximación semiclásica localizada. Un primer punto de partida para esto podría ser la utilización de la TWA en cadenas de iones. Esto permitiría el cálculo de estados estacionarios de cadenas de iones acopladas a cavidades ópticas como una extensión directa del enfoque utilizado en el capítulo 6.

Más aún, incluso el cálculo de las tasas de relajación podría generalizarse a este caso a partir de los estados estacionarios obtenidos. El método correcto a seguir dependerá de la configuración experimental particular considerada. Como ejemplo, consideremos una cadena de iones unidimensional compuesta por N iones. Entonces el régimen biestable clásico (equivalente a los resultados obtenidos por la expansión de la ecuación maestra despreciando los términos de orden $1/\xi^2$) tendrá dos configuraciones, cada una de las cuales mostrará una distribución aproximadamente Gaussiana alrededor de una de las N posiciones de equilibrio clásicas. La primera de estas configuraciones mantendrá la simetría del potencial, mientras que la segunda configuración será una de simetría rota, con el ion central desplazado del centro de la trampa.

El mismo método utilizado en el capítulo 6, de un modelo reducido de dos estados y un cálculo del primer tiempo de paso entre el estado simétrico y el estado de simetría rota, puede utilizarse entonces para estimar las tasas de relajación hacia el estado estacionario. Dado que las tasas de relajación al estado estacionario deberían hacerse cada vez más grandes en el límite semiclásico, esto proporcionaría un método para estudiar la validez de la aproximación semiclásica en función del tamaño de la cadena. Respecto a este punto, también se podrían utilizar métodos diferentes y más precisos que el simple modelo de dos estados utilizado en este trabajo. Por ejemplo, se podría considerar utilizar los métodos de [192, 212, 213] para estimar las tasas de decaimiento hacia el estado estacionario.

La TWA permite describir procesos de difusión, lo que llevaría a distribuciones de probabilidad no localizadas únicamente alrededor de los valores de equilibrio clásicos, sino a estados mixtos donde hay probabilidad de hallar los iones en más de un pozo de potencial óptico. Dado que las trayectorias utilizadas son clásicas, esto no se corresponde a procesos de *tunneling*, sólo a procesos de difusión dados por la dinámica no unitaria. Por lo cual sería de utilidad un formalismo para describir efectos de tuneo en este sistema, por ejemplo

utilizando el formalismo de trayectorias cuánticas en casos de números de ocupación baja en el sistema.

Se espera que estas contribuciones teóricas acompañen el progreso experimental en las plataformas híbridas correspondientes a iones en cavidades ópticas, especialmente en relación con modelos complejos y con muchos grados de libertad en situaciones en que las aproximaciones semiclásicas tienen validez dudosa.

Bibliografía

- [1] Helmut Ritsch, Peter Domokos, Ferdinand Brennecke y Tilman Esslinger. “Cold atoms in cavity-generated dynamical optical potentials”. En: *Rev. Mod. Phys.* 85 (2 2013), págs. 553-601. DOI: [10.1103/RevModPhys.85.553](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.553) (vid. págs. 1, 15, 17, 21, 28, 51).
- [2] Rudolf Grimm, Matthias Weidemüller y Yuri B. Ovchinnikov. “Optical Dipole Traps for Neutral Atoms”. En: ed. por Benjamin Bederson y Herbert Walther. Vol. 42. *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*. Academic Press, 2000, págs. 95-170. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1049-250X\(08\)60186-X](https://doi.org/10.1016/S1049-250X(08)60186-X) (vid. págs. 1, 15, 18, 21).
- [3] J. D. Miller, R. A. Cline y D. J. Heinzen. “Far-off-resonance optical trapping of atoms”. En: *Phys. Rev. A* 47 (6 jun. de 1993), R4567-R4570. DOI: [10.1103/PhysRevA.47.R4567](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.47.R4567) (vid. págs. 1, 21).
- [4] Ch. Schneider, M. Enderlein, T. Huber y T. Schaetz. “Optical trapping of an ion”. En: *Nature Photonics* 4.11 (2010), págs. 772-775. DOI: [10.1038/nphoton.2010.236](https://doi.org/10.1038/nphoton.2010.236). arXiv: [1001.2953 \[quant-ph\]](https://arxiv.org/abs/1001.2953) (vid. págs. 1, 19, 45).
- [5] Rasmus B. Linnet, Ian D. Leroux, Mathieu Marcic, Aurélien Dantan y Michael Drewsen. “Pinning an ion with an intracavity optical lattice”. En: *Physical Review Letters* 109.23 (2012), págs. 1-5. DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.233005](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.233005) (vid. págs. 1, 19, 45).
- [6] C. T. Schmiegelow, H. Kaufmann, T. Ruster, J. Schulz, V. Kaushal, M. Hettrich, F. Schmidt-Kaler y U. G. Poschinger. “Phase-Stable Free-Space Optical Lattices for Trapped Ions”. En: *Phys. Rev. Lett.* 116 (3 ene. de 2016), pág. 033002. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.033002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.033002) (vid. pág. 1).
- [7] Julian Schmidt, Alexander Lambrecht, Pascal Weckesser, Markus Debatin, Leon Karpa y Tobias Schaetz. “Optical Trapping of Ion Coulomb Crystals”. En: *Physical Review X* 8.2 (2018), págs. 1-10. DOI: [10.1103/PhysRevX.8.021028](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.8.021028). arXiv: [1712.08385](https://arxiv.org/abs/1712.08385) (vid. págs. 1, 19).
- [8] M Wallquist, K Hammerer, P Rabl, M Lukin y P Zoller. “Hybrid quantum devices and quantum engineering”. En: *Physica Scripta* 2009.T137 (dic. de 2009), pág. 014001. DOI: [10.1088/0031-8949/2009/T137/014001](https://doi.org/10.1088/0031-8949/2009/T137/014001) (vid. pág. 1).
- [9] Marko Cetina, Alexei Bylinskii, Leon Karpa, Dorian Gangloff, Kristin M Beck, Yufei Ge, Matthias Scholz, Andrew T Grier, Isaac Chuang y Vladan Vuletić. “One-dimensional array of ion chains coupled to an optical cavity”. En: *New Journal of Physics* 15.5 (2013), pág. 053001. DOI: [10.1088/1367-2630/15/5/053001](https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/5/053001) (vid. págs. 1, 19).
- [10] B. Casabone, K. Friebe, B. Brandstätter, K. Schüppert, R. Blatt y T. E. Northup. “Enhanced Quantum Interface with Collective Ion-Cavity Coupling”. En: *Phys. Rev. Lett.* 114 (2 ene. de 2015), pág. 023602. DOI: [10.1103/PhysRevLett.114.023602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.023602) (vid. pág. 1).
- [11] Moonjoo Lee, Konstantin Friebe, Dario A. Fioretto, Klemens Schüppert, Florian R. Ong, David Plankensteiner, Valentin Torggler, Helmut Ritsch, Rainer Blatt y Tracy E. Northup. “Ion-Based Quantum Sensor for Optical Cavity Photon Numbers”. En: *Phys. Rev. Lett.* 122 (15 abr. de 2019), pág. 153603. DOI: [10.1103/PhysRevLett.122.153603](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.153603) (vid. págs. 1, 45).

- [12]M. Meraner, A. Mazloom, V. Krutyanskiy, V. Krcmarsky, J. Schupp, D. A. Fioretto, P. Sekatski, T. E. Northup, N. Sangouard y B. P. Lanyon. “Indistinguishable photons from a trapped-ion quantum network node”. En: *Phys. Rev. A* 102 (5 nov. de 2020), pág. 052614. DOI: [10.1103/PhysRevA.102.052614](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.052614) (vid. págs. 1, 15, 18, 45, 52).
- [13]Markus Teller, Viktor Messerer, Klemens Schüppert, Yueyang Zou, Dario A. Fioretto, Maria Galli, Philip C. Holz, Jakob Reichel y Tracy E. Northup. “Integrating a fiber cavity into a wheel trap for strong ion–cavity coupling”. En: *AVS Quantum Science* 5.1 (ene. de 2023), pág. 012001. DOI: [10.1116/5.0121534](https://doi.org/10.1116/5.0121534). eprint: https://pubs.aip.org/avs/aqs/article-pdf/doi/10.1116/5.0121534/16774022/012001_1_online.pdf (vid. pág. 1).
- [14]Zewen Sun, Yi Hong Teoh, Fereshteh Rajabi y Rajibul Islam. *Investigations of 2D ion crystals in a hybrid optical cavity trap for quantum information processing*. 2023. arXiv: [2308.09231](https://arxiv.org/abs/2308.09231) [quant-ph] (vid. págs. 1, 19).
- [15]Cecilia Cormick, Tobias Schaetz y Giovanna Morigi. “Trapping ions with lasers”. En: *New Journal of Physics* 13.4 (2011), pág. 043019. DOI: [10.1088/1367-2630/13/4/043019](https://doi.org/10.1088/1367-2630/13/4/043019) (vid. págs. 1, 19).
- [16]Thaned Pruttivarasin, Michael Ramm, Ishan Talukdar, Axel Kreuter y Hartmut Häffner. “Trapped ions in optical lattices for probing oscillator chain models”. En: *New Journal of Physics* 13.7 (2011), pág. 075012 (vid. págs. 1, 2, 27).
- [17]Joshua Ramette, Josiah Sinclair, Zachary Vendeiro, Alyssa Rudelis, Marko Cetina y Vladan Vuletić. “Any-To-Any Connected Cavity-Mediated Architecture for Quantum Computing with Trapped Ions or Rydberg Arrays”. En: *PRX Quantum* 3 (1 mar. de 2022), pág. 010344. DOI: [10.1103/PRXQuantum.3.010344](https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.3.010344) (vid. págs. 1, 19).
- [18]R Schmied, T Roscilde, V Murg, D Porrás y J I Cirac. “Quantum phases of trapped ions in an optical lattice”. En: *New Journal of Physics* 10.4 (abr. de 2008), pág. 045017. DOI: [10.1088/1367-2630/10/4/045017](https://doi.org/10.1088/1367-2630/10/4/045017) (vid. págs. 1, 2).
- [19]Thomás Fogarty, Haggai Landa, Cecilia Cormick y Giovanna Morigi. “Optomechanical many-body cooling to the ground state using frustration”. En: *Phys. Rev. A* 94 (2 ago. de 2016), pág. 023844. DOI: [10.1103/PhysRevA.94.023844](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.023844) (vid. págs. 1, 22, 28-30, 50, 74).
- [20]Cecilia Cormick y Giovanna Morigi. “Structural transitions of ion strings in quantum potentials”. En: *Physical Review Letters* 109.5 (2012), pág. 053003 (vid. págs. 1, 2, 4, 22, 24, 43, 48, 68, 83, 85, 102, 103, 105).
- [21]M. Albert, J. P. Marler, P. F. Herskind, A. Dantan y M. Drewsen. “Collective strong coupling between ion Coulomb crystals and an optical cavity field: Theory and experiment”. En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 85.2 (2012), págs. 1-13. DOI: [10.1103/PhysRevA.85.023818](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.023818). arXiv: [1108.0528](https://arxiv.org/abs/1108.0528) (vid. págs. 2, 15).
- [22]Peter F. Herskind, Aurélien Dantan, Joan P. Marler, Magnus Albert y Michael Drewsen. “Realization of collective strong coupling with ion Coulomb crystals in an optical cavity”. En: *Nature Physics* 5.7 (2009), págs. 494-498. DOI: [10.1038/nphys1302](https://doi.org/10.1038/nphys1302) (vid. págs. 2, 15, 45).
- [23]Costas Christoforou, Corentin Pignot, Ezra Kassa, Hiroki Takahashi y Matthias Keller. “Enhanced ion–cavity coupling through cavity cooling in the strong coupling regime”. En: *Scientific Reports* 10.1 (sep. de 2020), pág. 15693. DOI: [10.1038/s41598-020-72796-9](https://doi.org/10.1038/s41598-020-72796-9) (vid. págs. 2, 15).
- [24]Jiannis Pachos y Herbert Walther. “Quantum Computation with Trapped Ions in an Optical Cavity”. En: *Phys. Rev. Lett.* 89 (18 oct. de 2002), pág. 187903. DOI: [10.1103/PhysRevLett.89.187903](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.187903) (vid. pág. 2).

- [25] Matthias Keller, Birgit Lange, Kazuhiro Hayasaka, Wolfgang Lange y Herbert Walther. “Continuous generation of single photons with controlled waveform in an ion-trap cavity system”. En: *Nature* 431 (oct. de 2004), págs. 1075-1078 (vid. págs. 2, 15).
- [26] H G Barros, A Stute, T E Northup, C Russo, P O Schmidt y R Blatt. “Deterministic single-photon source from a single ion”. En: *New Journal of Physics* 11.10 (oct. de 2009), pág. 103004. DOI: [10.1088/1367-2630/11/10/103004](https://doi.org/10.1088/1367-2630/11/10/103004) (vid. págs. 2, 15).
- [27] Thomas Walker, Samir Vartabi Kashanian, Travers Ward y Matthias Keller. “Improving the indistinguishability of single photons from an ion-cavity system”. En: *Phys. Rev. A* 102 (3 sep. de 2020), pág. 032616. DOI: [10.1103/PhysRevA.102.032616](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.032616) (vid. págs. 2, 15).
- [28] K. Sosnova, A. Carter y C. Monroe. “Character of motional modes for entanglement and sympathetic cooling of mixed-species trapped-ion chains”. En: *Phys. Rev. A* 103 (1 ene. de 2021), pág. 012610. DOI: [10.1103/PhysRevA.103.012610](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.012610) (vid. pág. 2).
- [29] J. D. Sterk, L. Luo, T. A. Manning, P. Maunz y C. Monroe. “Photon collection from a trapped ion-cavity system”. En: *Phys. Rev. A* 85 (6 2012), pág. 062308. DOI: [10.1103/PhysRevA.85.062308](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.062308) (vid. pág. 2).
- [30] Matthias Steiner, Hendrik M. Meyer, Christian Deutsch, Jakob Reichel y Michael Köhl. “Single Ion Coupled to an Optical Fiber Cavity”. En: *Phys. Rev. Lett.* 110 (4 2013), pág. 043003. DOI: [10.1103/PhysRevLett.110.043003](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.043003) (vid. págs. 2, 14, 45).
- [31] Thomas Walker, Koichiro Miyanishi, Rikizo Ikuta, Hiroki Takahashi, Samir Vartabi Kashanian, Yoshiaki Tsujimoto, Kazuhiro Hayasaka, Takashi Yamamoto, Nobuyuki Imoto y Matthias Keller. “Long-Distance Single Photon Transmission from a Trapped Ion via Quantum Frequency Conversion”. En: *Phys. Rev. Lett.* 120 (20 2018), pág. 203601. DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.203601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.203601) (vid. págs. 2, 19).
- [32] Alexei Bylinskii, Dorian Gangloff y Vladan Vuletić. “Tuning friction atom-by-atom in an ion-crystal simulator”. En: *Science* 348.6239 (2015), págs. 1115-1118. DOI: [10.1126/science.1261422](https://doi.org/10.1126/science.1261422). arXiv: [1410.4169](https://arxiv.org/abs/1410.4169) (vid. págs. 2, 19, 45, 85).
- [33] Ya. I. Frenkel y T.A. Kontorova. “The model of dislocation in solid body”. En: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 8 (1938). [*Phys. Z. Sowjetunion* 13, 1 (1938)], pág. 1340 (vid. pág. 2).
- [34] O.M. Braun e Y.S. Kivshar. *The Frenkel-Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2013 (vid. págs. 2, 85).
- [35] Hidetoshi Katori, Stefan Schlipf y Herbert Walther. “Anomalous Dynamics of a Single Ion in an Optical Lattice”. En: *Phys. Rev. Lett.* 79 (12 1997), págs. 2221-2224. DOI: [10.1103/PhysRevLett.79.2221](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.2221) (vid. págs. 2, 89).
- [36] I. Garcia-Mata, O. V. Zhirov y D. L. Shepelyansky. “Frenkel-Kontorova model with cold trapped ions”. En: *The European Physical Journal D* 41.2 (2007), págs. 325-330. DOI: [10.1140/epjd/e2006-00220-2](https://doi.org/10.1140/epjd/e2006-00220-2) (vid. págs. 2, 85).
- [37] A. Benassi, A. Vanossi y E. Tosatti. “Nanofriction in cold ion traps”. En: *Nature Communications* 2 (2011), pág. 236 (vid. págs. 2, 43).
- [38] T. Fogarty, C. Cormick, H. Landa, Vladimir M. Stojanović, E. Demler y Giovanna Morigi. “Nanofriction in Cavity Quantum Electrodynamics”. En: *Physical Review Letters* 115.23 (2015), págs. 1-9. DOI: [10.1103/PhysRevLett.115.233602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.233602). arXiv: [1504.00275](https://arxiv.org/abs/1504.00275) (vid. págs. 2, 4, 18, 22, 43, 48, 68, 74, 83, 86, 105).

- [39]Dorian Gangloff, Alexei Bylinskii, Ian Counts, Wonho Jhe y Vladan Vuletić. “Velocity tuning of friction with two trapped atoms”. En: *Nature Physics* 11.11 (2015), págs. 915-919 (vid. págs. 2, 8, 19).
- [40]Alexei Bylinskii, Dorian Gangloff, Ian Counts y Vladan Vuletić. “Observation of Aubry-type transition in finite atom chains via friction”. En: *Nature Materials* 15.7 (2016), págs. 717-721 (vid. págs. 2, 19, 85).
- [41]Efrat Shimshoni, Giovanna Morigi y Shmuel Fishman. “Quantum Zigzag Transition in Ion Chains”. En: *Phys. Rev. Lett.* 106 (1 ene. de 2011), pág. 010401. DOI: [10.1103/PhysRevLett.106.010401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.010401) (vid. pág. 3).
- [42]F. Cosco, M. Borrelli, P. Silvi, S. Maniscalco y G. De Chiara. “Nonequilibrium quantum thermodynamics in Coulomb crystals”. En: *Phys. Rev. A* 95 (6 jun. de 2017), pág. 063615. DOI: [10.1103/PhysRevA.95.063615](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.95.063615) (vid. págs. 3, 7).
- [43]Jan Kiethe, Lars Timm, Haggai Landa, Dimitri Kalincev, Giovanna Morigi y Tanja E. Mehlstäubler. “Finite-temperature spectrum at the symmetry-breaking linear to zigzag transition”. En: *Phys. Rev. B* 103 (10 mar. de 2021), pág. 104106. DOI: [10.1103/PhysRevB.103.104106](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.103.104106) (vid. pág. 3).
- [44]Pietro Maria Bonetti, Andrea Rucci, Maria Luisa Chiofalo y Vladan Vuletić. “Quantum effects in the Aubry transition”. En: *Phys. Rev. Res.* 3 (1 ene. de 2021), pág. 013031. DOI: [10.1103/PhysRevResearch.3.013031](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.013031) (vid. págs. 3, 85).
- [45]Markus Aspelmeyer, Tobias J Kippenberg y Florian Marquardt. “Cavity optomechanics”. En: *Reviews of Modern Physics* 86.4 (2014), pág. 1391 (vid. pág. 3).
- [46]Dmitry O. Krimer y Mikhail Pletyukhov. “Few-mode geometric description of a driven-dissipative phase transition in an open quantum system”. En: *Physical Review Letters* 123.11 (2019), págs. 1-13. DOI: [10.1103/PhysRevLett.123.110604](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.110604). arXiv: [1808.00030](https://arxiv.org/abs/1808.00030) (vid. págs. 4, 39, 41).
- [47]Andreas Angerer, Stefan Putz, Dmitry O. Krimer, Thomas Astner, Matthias Zens, Ralph Glattauer, Kirill Streltsov, William J. Munro, Kae Nemoto, Stefan Rotter, Jörg Schmiedmayer y Johannes Majer. “Ultralong relaxation times in bistable hybrid quantum systems”. En: *Science Advances* 3.12 (2017). DOI: [10.1126/sciadv.1701626](https://doi.org/10.1126/sciadv.1701626). eprint: <https://advances.sciencemag.org/content/3/12/e1701626.full.pdf> (vid. págs. 4, 39).
- [48]Dmitry O. Krimer, Matthias Zens y Stefan Rotter. “Critical phenomena and nonlinear dynamics in a spin ensemble strongly coupled to a cavity. I. Semiclassical approach”. En: *Phys. Rev. A* 100 (1 2019), pág. 013855. DOI: [10.1103/PhysRevA.100.013855](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.013855) (vid. págs. 4, 39).
- [49]Catalin-Mihai Halati, Ameneh Sheikhan, Helmut Ritsch y Corinna Kollath. “Numerically Exact Treatment of Many-Body Self-Organization in a Cavity”. En: *Phys. Rev. Lett.* 125 (9 2020), pág. 093604. DOI: [10.1103/PhysRevLett.125.093604](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.093604) (vid. págs. 4, 39, 55, 56, 125).
- [50]R. Gutiérrez-Jáuregui y H. J. Carmichael. “Dissipative quantum phase transitions of light in a generalized Jaynes-Cummings-Rabi model”. En: *Phys. Rev. A* 98 (2 ago. de 2018), pág. 023804. DOI: [10.1103/PhysRevA.98.023804](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.023804) (vid. pág. 4).
- [51]W. Casteels, R. Fazio y C. Ciuti. “Critical dynamical properties of a first-order dissipative phase transition”. En: *Phys. Rev. A* 95 (1 2017), pág. 012128. DOI: [10.1103/PhysRevA.95.012128](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.95.012128) (vid. págs. 4, 41, 55).
- [52]P D Drummond y D F Walls. “Quantum theory of optical bistability. I. Nonlinear polarisability model”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 13.2 (1980), págs. 725-741. DOI: [10.1088/0305-4470/13/2/034](https://doi.org/10.1088/0305-4470/13/2/034) (vid. pág. 4).

- [53] Alan Kahan, Leonardo Ermann y Cecilia Cormick. “Trapped ion in an optical cavity: Numerical study of an optomechanical transition in the few-photon regime”. En: *Phys. Rev. A* 104 (4 oct. de 2021), pág. 043705. DOI: [10.1103/PhysRevA.104.043705](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.043705) (vid. págs. 5, 43, 104).
- [54] Alan Kahan, Leonardo Ermann, Marcos Saraceno y Cecilia Cormick. “Fokker-Planck treatment of nonlinearities in the dispersive coupling of an ion and an optical cavity”. En: *Phys. Rev. A* 107 (3 mar. de 2023), pág. 033712. DOI: [10.1103/PhysRevA.107.033712](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.107.033712) (vid. pág. 5).
- [55] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. E. Toschek y H. Dehmelt. “Localized visible Ba⁺ mono-ion oscillator”. En: *Phys. Rev. A* 22 (3 sep. de 1980), págs. 1137-1140. DOI: [10.1103/PhysRevA.22.1137](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.22.1137) (vid. pág. 7).
- [56] D. Jonathan, M. B. Plenio y P. L. Knight. “Fast quantum gates for cold trapped ions”. En: *Phys. Rev. A* 62 (4 sep. de 2000), pág. 042307. DOI: [10.1103/PhysRevA.62.042307](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.042307) (vid. pág. 7).
- [57] H. Häffner, C.F. Roos y R. Blatt. “Quantum computing with trapped ions”. En: *Physics Reports* 469.4 (2008), págs. 155-203. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.09.003> (vid. pág. 7).
- [58] P. K. Ghosh. *Ion traps*. United Kingdom: Clarendon Press, 1995 (vid. pág. 7).
- [59] Alba Ramos y Cecilia Cormick. “Feasibility of the ion-trap simulation of a class of non-equilibrium phase transitions”. En: *The European Physical Journal D* 73.11 (nov. de 2019), pág. 237. DOI: [10.1140/epjd/e2019-100180-4](https://doi.org/10.1140/epjd/e2019-100180-4) (vid. pág. 7).
- [60] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe y D. Wineland. “Quantum dynamics of single trapped ions”. En: *Rev. Mod. Phys.* 75 (1 mar. de 2003), págs. 281-324. DOI: [10.1103/RevModPhys.75.281](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.281) (vid. págs. 7-11, 27).
- [61] T. Rosenband, D. B. Hume, P. O. Schmidt et al. “Frequency Ratio of Al⁺ and Hg⁺ Single-Ion Optical Clocks; Metrology at the 17th Decimal Place”. En: *Science* 319.5871 (2008), págs. 1808-1812. DOI: [10.1126/science.1154622](https://doi.org/10.1126/science.1154622). eprint: <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.1154622> (vid. pág. 7).
- [62] S. M. Brewer, J.-S. Chen, A. M. Hankin, E. R. Clements, C. W. Chou, D. J. Wineland, D. B. Hume y D. R. Leibbrandt. “²⁷Al⁺ Quantum-Logic Clock with a Systematic Uncertainty below 10⁻¹⁸”. En: *Phys. Rev. Lett.* 123 (3 jul. de 2019), pág. 033201. DOI: [10.1103/PhysRevLett.123.033201](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.033201) (vid. pág. 7).
- [63] N. Huntemann, B. Lipphardt, Chr. Tamm, V. Gerginov, S. Weyers y E. Peik. “Improved Limit on a Temporal Variation of m_p/m_e from Comparisons of Yb⁺ and Cs Atomic Clocks”. En: *Phys. Rev. Lett.* 113 (21 nov. de 2014), pág. 210802. DOI: [10.1103/PhysRevLett.113.210802](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.210802) (vid. pág. 7).
- [64] R. M. Godun, P. B. R. Nisbet-Jones, J. M. Jones, S. A. King, L. A. M. Johnson, H. S. Margolis, K. Szymaniec, S. N. Lea, K. Bongs y P. Gill. “Frequency Ratio of Two Optical Clock Transitions in ¹⁷¹Yb⁺ and Constraints on the Time Variation of Fundamental Constants”. En: *Phys. Rev. Lett.* 113 (21 nov. de 2014), pág. 210801. DOI: [10.1103/PhysRevLett.113.210801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.210801) (vid. pág. 7).
- [65] Laura S. Dreissen, Chih-Han Yeh, Henning A. Fürst, Kai C. Grensemann y Tanja E. Mehlstäubler. “Improved bounds on Lorentz violation from composite pulse Ramsey spectroscopy in a trapped ion”. En: *Nature Communications* 13.1 (nov. de 2022), pág. 7314. DOI: [10.1038/s41467-022-34818-0](https://doi.org/10.1038/s41467-022-34818-0) (vid. pág. 7).
- [66] S. Schiller. “Hydrogenlike Highly Charged Ions for Tests of the Time Independence of Fundamental Constants”. En: *Phys. Rev. Lett.* 98 (18 abr. de 2007), pág. 180801. DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.180801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.180801) (vid. pág. 7).

- [67]M. G. Kozlov, M. S. Safronova, J. R. Crespo López-Urrutia y P. O. Schmidt. “Highly charged ions: Optical clocks and applications in fundamental physics”. En: *Rev. Mod. Phys.* 90 (4 dic. de 2018), pág. 045005. DOI: [10.1103/RevModPhys.90.045005](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.045005) (vid. pág. 7).
- [68]M. S. Safronova, D. Budker, D. DeMille, Derek F. Jackson Kimball, A. Derevianko y Charles W. Clark. “Search for new physics with atoms and molecules”. En: *Rev. Mod. Phys.* 90 (2 jun. de 2018), pág. 025008. DOI: [10.1103/RevModPhys.90.025008](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.025008) (vid. pág. 7).
- [69]Kevin A. Gilmore, Matthew Affolter, Robert J. Lewis-Swan, Diego Barberena, Elena Jordan, Ana Maria Rey y John J. Bollinger. “Quantum-enhanced sensing of displacements and electric fields with two-dimensional trapped-ion crystals”. En: *Science* 373.6555 (2021), págs. 673-678. DOI: [10.1126/science.abi5226](https://doi.org/10.1126/science.abi5226). eprint: <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.abi5226> (vid. pág. 7).
- [70]Nicolás A. Nuñez Barreto, Martín Drechsler y Christian T. Schmiegelow. “Three-laser coherent population trapping in a multi- Λ system: Theory, experiment, and applications”. En: *Phys. Rev. A* 106 (5 nov. de 2022), pág. 053708. DOI: [10.1103/PhysRevA.106.053708](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.106.053708) (vid. pág. 7).
- [71]J. I. Cirac y P. Zoller. “Quantum Computations with Cold Trapped Ions”. En: *Phys. Rev. Lett.* 74 (20 mayo de 1995), págs. 4091-4094. DOI: [10.1103/PhysRevLett.74.4091](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.4091) (vid. pág. 7).
- [72]R. T. Sutherland, R. Srinivas, S. C. Burd, H. M. Knaack, A. C. Wilson, D. J. Wineland, D. Leibfried, D. T. C. Allcock, D. H. Slichter y S. B. Libby. “Laser-free trapped-ion entangling gates with simultaneous insensitivity to qubit and motional decoherence”. En: *Phys. Rev. A* 101 (4 abr. de 2020), pág. 042334. DOI: [10.1103/PhysRevA.101.042334](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.042334) (vid. pág. 7).
- [73]D. T. C. Allcock, W. C. Campbell, J. Chiaverini, I. L. Chuang, E. R. Hudson, I. D. Moore, A. Ransford, C. Roman, J. M. Sage y D. J. Wineland. “omg blueprint for trapped ion quantum computing with metastable states”. En: *Applied Physics Letters* 119.21 (2021), pág. 214002. DOI: [10.1063/5.0069544](https://doi.org/10.1063/5.0069544) (vid. pág. 7).
- [74]Deviprasath Palani, Florian Hasse, Philip Kiefer, Frederick Boeckling, Jan-Philipp Schroeder, Ulrich Warring y Tobias Schaetz. “High-fidelity transport of trapped-ion qubits in a multilayer array”. En: *Phys. Rev. A* 107 (5 mayo de 2023), pág. L050601. DOI: [10.1103/PhysRevA.107.L050601](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.107.L050601) (vid. pág. 7).
- [75]Richard P. Feynman. “Simulating physics with computers”. En: *International Journal of Theoretical Physics* 21.6 (jun. de 1982), págs. 467-488. DOI: [10.1007/BF02650179](https://doi.org/10.1007/BF02650179) (vid. pág. 7).
- [76]R. Blatt y C. F. Roos. “Quantum simulations with trapped ions”. En: *Nature Physics* 8 (abr. de 2012). Review Article, págs. 277-284 (vid. pág. 7).
- [77]D. Porras y J. I. Cirac. “Effective Quantum Spin Systems with Trapped Ions”. En: *Phys. Rev. Lett.* 92 (20 mayo de 2004), pág. 207901. DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.207901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.207901) (vid. pág. 8).
- [78]A. Friedenauer, H. Schmitz, J. T. Glueckert, D. Porras y T. Schaetz. “Simulating a quantum magnet with trapped ions”. En: *Nature Physics* 4.10 (oct. de 2008), págs. 757-761. DOI: [10.1038/nphys1032](https://doi.org/10.1038/nphys1032) (vid. pág. 8).
- [79]C. Monroe, W. C. Campbell, L.-M. Duan, Z.-X. Gong, A. V. Gorshkov, P. W. Hess, R. Islam, K. Kim, N. M. Linke, G. Pagano, P. Richerme, C. Senko y N. Y. Yao. “Programmable quantum simulations of spin systems with trapped ions”. En: *Rev. Mod. Phys.* 93 (2 abr. de 2021), pág. 025001. DOI: [10.1103/RevModPhys.93.025001](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025001) (vid. pág. 8).
- [80]K. Kim, M.-S. Chang, S. Korenblit, R. Islam, E. E. Edwards, J. K. Freericks, G.-D. Lin, L.-M. Duan y C. Monroe. “Quantum simulation of frustrated Ising spins with trapped ions”. En: *Nature* 465.7298 (jun. de 2010), págs. 590-593. DOI: [10.1038/nature09071](https://doi.org/10.1038/nature09071) (vid. pág. 8).

- [81] Robert J. Clark, Tongyan Lin, Kenneth R. Brown e Isaac L. Chuang. “A two-dimensional lattice ion trap for quantum simulation”. En: *Journal of Applied Physics* 105.1 (2009), pág. 013114. DOI: [10.1063/1.3056227](https://doi.org/10.1063/1.3056227). eprint: <https://doi.org/10.1063/1.3056227> (vid. pág. 8).
- [82] Esteban A. Martinez, Christine A. Muschik, Philipp Schindler, Daniel Nigg, Alexander Erhard, Markus Heyl, Philipp Hauke, Marcello Dalmonte, Thomas Monz, Peter Zoller y Rainer Blatt. “Real-time dynamics of lattice gauge theories with a few-qubit quantum computer”. En: *Nature* 534 (jun. de 2016), págs. 516-519 (vid. pág. 8).
- [83] Christine Muschik, Markus Heyl, Esteban Martinez, Thomas Monz, Philipp Schindler, Berit Vogell, Marcello Dalmonte, Philipp Hauke, Rainer Blatt y Peter Zoller. “U(1) Wilson lattice gauge theories in digital quantum simulators”. En: *New Journal of Physics* 19.10 (2017), pág. 103020 (vid. pág. 8).
- [84] J. Kiethe, R. Nigmatullin, T. Schmirander, D. Kalincev y T. E. Mehlstaubler. “Nanofriction and motion of topological defects in self-organized ion Coulomb crystals”. En: *New Journal of Physics* 20.12 (2018). DOI: [10.1088/1367-2630/aaf3d5](https://doi.org/10.1088/1367-2630/aaf3d5). arXiv: [1806.08566](https://arxiv.org/abs/1806.08566) (vid. pág. 8).
- [85] L. Timm, L. A. Ruffert, H. Weimer, L. Santos y T. E. Mehlstäubler. “Quantum nanofriction in trapped ion chains with a topological defect”. En: *Phys. Rev. Res.* 3 (4 nov. de 2021), pág. 043141. DOI: [10.1103/PhysRevResearch.3.043141](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.043141) (vid. pág. 8).
- [86] A. Bermudez, M. Bruderer y M. B. Plenio. “Controlling and Measuring Quantum Transport of Heat in Trapped-Ion Crystals”. En: *Phys. Rev. Lett.* 111 (4 jul. de 2013), pág. 040601. DOI: [10.1103/PhysRevLett.111.040601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.040601) (vid. pág. 8).
- [87] Cecilia Cormick y Christian T. Schmiegelow. “Noise-induced transport in the motion of trapped ions”. En: *Phys. Rev. A* 94 (5 2016), pág. 053406. DOI: [10.1103/PhysRevA.94.053406](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.053406) (vid. págs. 8, 19).
- [88] A. Mezzacapo, J. Casanova, L. Lamata y E. Solano. “Digital Quantum Simulation of the Holstein Model in Trapped Ions”. En: *Phys. Rev. Lett.* 109 (20 nov. de 2012), pág. 200501. DOI: [10.1103/PhysRevLett.109.200501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.200501) (vid. pág. 8).
- [89] A Lemmer, C Cormick, D Tamascelli, T Schaez, S F Huelga y M B Plenio. “A trapped-ion simulator for spin-boson models with structured environments”. En: *New Journal of Physics* 20.7 (jul. de 2018), pág. 073002. DOI: [10.1088/1367-2630/aac87d](https://doi.org/10.1088/1367-2630/aac87d) (vid. pág. 8).
- [90] C.J. Foot. *Atomic Physics*. Oxford Master Series in Physics. OUP Oxford, 2005 (vid. pág. 8).
- [91] D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King y D. M. Meekhof. “Experimental Issues in Coherent Quantum-State Manipulation of Trapped Atomic Ions”. En: *J Res Natl Inst Stand Technol* 103.3 (jun. de 1998), págs. 259-328. DOI: [10.6028/jres.103.019](https://doi.org/10.6028/jres.103.019) (vid. págs. 9, 10, 26).
- [92] Arezoo Mokhberi, Markus Hennrich y Ferdinand Schmidt-Kaler. “Trapped Rydberg ions: A new platform for quantum information processing”. En: ed. por Louis F. Dimauuro, Hélène Perrin y Susanne F. Yelin. Vol. 69. *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*. Academic Press, 2020, págs. 233-306. DOI: <https://doi.org/10.1016/bs.aamop.2020.04.004> (vid. pág. 11).
- [93] H.P. Breuer y F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2002 (vid. págs. 12, 27).
- [94] C. W. Gardiner y M. J. Collett. “Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation”. En: *Phys. Rev. A* 31 (6 1985), págs. 3761-3774. DOI: [10.1103/PhysRevA.31.3761](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.31.3761) (vid. págs. 12, 21, 22, 27, 49).

- [95]Géza Giedke y J. Ignacio Cirac. “Characterization of Gaussian operations and distillation of Gaussian states”. En: *Phys. Rev. A* 66 (3 sep. de 2002), pág. 032316. DOI: [10.1103/PhysRevA.66.032316](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.66.032316) (vid. pág. 13).
- [96]C. Gerry y P. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2005 (vid. págs. 14, 20).
- [97]D.F. Walls y G.J. Milburn. *Quantum Optics*. SpringerLink: Springer e-Books. Springer Berlin Heidelberg, 2007 (vid. págs. 14, 15, 126).
- [98]S. J. van Enk, J. McKeever, H. J. Kimble y J. Ye. “Cooling of a single atom in an optical trap inside a resonator”. En: *Phys. Rev. A* 64 (1 jun. de 2001), pág. 013407. DOI: [10.1103/PhysRevA.64.013407](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.013407) (vid. págs. 14, 15).
- [99]Alejandro Márquez Seco, Hiroki Takahashi y Matthias Keller. “Novel Ion Trap Design for Strong Ion-Cavity Coupling”. En: *Atoms* 4.2 (2016). DOI: [10.3390/atoms4020015](https://doi.org/10.3390/atoms4020015) (vid. pág. 15).
- [100]R. J. Hughes, W. T. Buttler, P. G. Kwiat, S. K. Lamoreaux, G. G. Luther, G. L. Morgan, J. E. Nordholt, C. G. Peterson y C. M. Simmons. “Practical Free-Space Quantum Cryptography”. En: *Quantum Computing and Quantum Communications*. Ed. por Colin P. Williams. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1999, págs. 200-213 (vid. pág. 15).
- [101]Artur K. Ekert. “Quantum cryptography based on Bell’s theorem”. En: *Phys. Rev. Lett.* 67 (6 ago. de 1991), págs. 661-663. DOI: [10.1103/PhysRevLett.67.661](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.661) (vid. págs. 15, 37).
- [102]Charles H. Bennett y Stephen J. Wiesner. “Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states”. En: *Phys. Rev. Lett.* 69 (20 nov. de 1992), págs. 2881-2884. DOI: [10.1103/PhysRevLett.69.2881](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.2881) (vid. pág. 15).
- [103]M. Żukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne y A. K. Ekert. “Event-ready-detectors” Bell experiment via entanglement swapping”. En: *Phys. Rev. Lett.* 71 (26 dic. de 1993), págs. 4287-4290. DOI: [10.1103/PhysRevLett.71.4287](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.4287) (vid. pág. 15).
- [104]Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres y William K. Wootters. “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”. En: *Phys. Rev. Lett.* 70 (13 mar. de 1993), págs. 1895-1899. DOI: [10.1103/PhysRevLett.70.1895](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895) (vid. págs. 15, 37).
- [105]J. Brendel, N. Gisin, W. Tittel y H. Zbinden. “Pulsed Energy-Time Entangled Twin-Photon Source for Quantum Communication”. En: *Phys. Rev. Lett.* 82 (12 mar. de 1999), págs. 2594-2597. DOI: [10.1103/PhysRevLett.82.2594](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.2594) (vid. pág. 15).
- [106]Nicola Montaut, Linda Sansoni, Evan Meyer-Scott, Raimund Ricken, Viktor Quiring, Harald Herrmann y Christine Silberhorn. “High-Efficiency Plug-and-Play Source of Heralded Single Photons”. En: *Phys. Rev. Appl.* 8 (2 ago. de 2017), pág. 024021. DOI: [10.1103/PhysRevApplied.8.024021](https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.8.024021) (vid. pág. 15).
- [107]Matthias Bock, Andreas Lenhard, Christopher Chunnillal y Christoph Becher. “Highly efficient heralded single-photon source for telecom wavelengths based on a PPLN waveguide”. En: *Opt. Express* 24.21 (oct. de 2016), págs. 23992-24001. DOI: [10.1364/OE.24.023992](https://doi.org/10.1364/OE.24.023992) (vid. pág. 15).
- [108]Agustina G. Magnoni, Ignacio H. López Grande, Laura T. Knoll y Miguel A. Larotonda. “Performance of a temporally multiplexed single-photon source with imperfect devices”. En: *Quantum Information Processing* 18.10 (ago. de 2019), pág. 311. DOI: [10.1007/s11128-019-2417-0](https://doi.org/10.1007/s11128-019-2417-0) (vid. pág. 15).

- [109] Agustina G. Magnoni, Laura T. Knoll y Miguel A. Larotonda. “Scheme for sub-shot-noise transmission measurement using a time-multiplexed single-photon source”. En: *J. Opt. Soc. Am. B* 38.9 (sep. de 2021), págs. 2502-2510. DOI: [10.1364/JOSAB.428105](https://doi.org/10.1364/JOSAB.428105) (vid. pág. 15).
- [110] Christoph Simon y William T. M. Irvine. “Robust Long-Distance Entanglement and a Loophole-Free Bell Test with Ions and Photons”. En: *Phys. Rev. Lett.* 91 (11 sep. de 2003), pág. 110405. DOI: [10.1103/PhysRevLett.91.110405](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.110405) (vid. pág. 15).
- [111] N. Goldman, J. C. Budich y P. Zoller. “Topological quantum matter with ultracold gases in optical lattices”. En: *Nature Physics* 12.7 (jul. de 2016), págs. 639-645. DOI: [10.1038/nphys3803](https://doi.org/10.1038/nphys3803) (vid. pág. 15).
- [112] Jean Dalibard, Fabrice Gerbier, Gediminas Juzeliūnas y Patrik Öhberg. “Colloquium: Artificial gauge potentials for neutral atoms”. En: *Rev. Mod. Phys.* 83 (4 nov. de 2011), págs. 1523-1543. DOI: [10.1103/RevModPhys.83.1523](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.83.1523) (vid. pág. 15).
- [113] Immanuel Bloch, Jean Dalibard y Wilhelm Zwerger. “Many-body physics with ultracold gases”. En: *Rev. Mod. Phys.* 80 (3 jul. de 2008), págs. 885-964. DOI: [10.1103/RevModPhys.80.885](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.80.885) (vid. pág. 15).
- [114] Federica Maria Surace, Pierre Fromholz, Nelson Darkwah Oppong, Marcello Dalmonte y Monika Aidelsburger. “Ab Initio Derivation of Lattice-Gauge-Theory Dynamics for Cold Gases in Optical Lattices”. En: *PRX Quantum* 4 (2 mayo de 2023), pág. 020330. DOI: [10.1103/PRXQuantum.4.020330](https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.4.020330) (vid. pág. 15).
- [115] J. J. Sakurai y Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. 2.^a ed. Cambridge University Press, 2017. DOI: [10.1017/9781108499996](https://doi.org/10.1017/9781108499996) (vid. pág. 16).
- [116] Cecilia Cormick y Giovanna Morigi. “Ion chains in high-finesse cavities”. En: *Phys. Rev. A* 87 (1 2013), pág. 013829. DOI: [10.1103/PhysRevA.87.013829](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.013829) (vid. págs. 18, 21, 22, 24, 28, 30, 43, 48, 50, 52, 66, 98).
- [117] Rafael Mottl, Ferdinand Brennecke, Kristian Baumann, Renate Landig, T Donner y Tilman Esslinger. “Roton-type mode softening in a quantum gas with cavity-mediated long-range interactions”. En: *Science* 336.6088 (2012), págs. 1570-1573 (vid. pág. 18).
- [118] Manas Kulkarni, Baris Öztop y Hakan E. Türeci. “Cavity-Mediated Near-Critical Dissipative Dynamics of a Driven Condensate”. En: *Phys. Rev. Lett.* 111 (22 2013), pág. 220408. DOI: [10.1103/PhysRevLett.111.220408](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.220408) (vid. pág. 18).
- [119] Travers Ward y Matthias Keller. “Generation of time-bin-encoded photons in an ion-cavity system”. En: *New Journal of Physics* 24.12 (dic. de 2022), pág. 123028. DOI: [10.1088/1367-2630/aca9ee](https://doi.org/10.1088/1367-2630/aca9ee) (vid. pág. 18).
- [120] V. Krutyanskiy, M. Galli, V. Krcmarsky et al. “Entanglement of Trapped-Ion Qubits Separated by 230 Meters”. En: *Phys. Rev. Lett.* 130 (5 feb. de 2023), pág. 050803. DOI: [10.1103/PhysRevLett.130.050803](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.050803) (vid. pág. 19).
- [121] David R. Leibbrandt, Jaroslaw Labaziewicz, Vladan Vuletić e Isaac L. Chuang. “Cavity Sideband Cooling of a Single Trapped Ion”. En: *Phys. Rev. Lett.* 103 (10 ago. de 2009), pág. 103001. DOI: [10.1103/PhysRevLett.103.103001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.103001) (vid. pág. 19).
- [122] Kasper R Zangenberg, Aurélien Dantan y Michael Drewsen. “Spatial mode effects in a cavity EIT-based quantum memory with ion Coulomb crystals”. En: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 45.12 (jun. de 2012), pág. 124011. DOI: [10.1088/0953-4075/45/12/124011](https://doi.org/10.1088/0953-4075/45/12/124011) (vid. pág. 19).

- [123] Christoph Clausen, Nicolas Sangouard y Michael Drewsen. “Analysis of a photon number resolving detector based on fluorescence readout of an ion Coulomb crystal quantum memory inside an optical cavity”. En: *New Journal of Physics* 15.2 (feb. de 2013), pág. 025021. DOI: [10.1088/1367-2630/15/2/025021](https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/2/025021) (vid. pág. 19).
- [124] Magnus Albert, Aurélien Dantan y Michael Drewsen. “Transient dynamics in cavity electromagnetically induced transparency with ion Coulomb crystals”. En: *Journal of Modern Optics* 65.5-6 (2018), págs. 602-612. DOI: [10.1080/09500340.2017.1401135](https://doi.org/10.1080/09500340.2017.1401135). eprint: <https://doi.org/10.1080/09500340.2017.1401135> (vid. pág. 19).
- [125] Peter Horak, Aurélien Dantan y Michael Drewsen. “Optically induced structural phase transitions in ion Coulomb crystals”. En: *Phys. Rev. A* 86 (4 2012), pág. 043435. DOI: [10.1103/PhysRevA.86.043435](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.043435) (vid. pág. 19).
- [126] Andrew T Grier, Marko Cetina, Fedja Oručević y Vladan Vuletić. “Observation of cold collisions between trapped ions and trapped atoms”. En: *Physical Review Letters* 102.22 (2009), pág. 223201 (vid. pág. 19).
- [127] Thomas Lauprêtre, Rasmus B. Linnet, Ian D. Leroux, Haggai Landa, Aurélien Dantan y Michael Drewsen. “Controlling the potential landscape and normal modes of ion Coulomb crystals by a standing-wave optical potential”. En: *Phys. Rev. A* 99 (3 2019), pág. 031401. DOI: [10.1103/PhysRevA.99.031401](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.99.031401) (vid. págs. 19, 85, 105).
- [128] E Brion, L H Pedersen y K Mølmer. “Adiabatic elimination in a lambda system”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40.5 (2007), pág. 1033 (vid. pág. 21).
- [129] I. Marzoli, J. I. Cirac, R. Blatt y P. Zoller. “Laser cooling of trapped three-level ions: Designing two-level systems for sideband cooling”. En: *Phys. Rev. A* 49 (4 1994), págs. 2771-2779. DOI: [10.1103/PhysRevA.49.2771](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.49.2771) (vid. pág. 21).
- [130] Peter Domokos, Peter Horak y Helmut Ritsch. “Semiclassical theory of cavity-assisted atom cooling”. En: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 34.2 (ene. de 2001), pág. 187. DOI: [10.1088/0953-4075/34/2/306](https://doi.org/10.1088/0953-4075/34/2/306) (vid. págs. 21, 34, 64, 67).
- [131] C. Gardiner, P. Zoller y P. Zoller. *Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*. Springer Series in Synergetics. Springer, 2004 (vid. págs. 21, 22, 49, 63, 65).
- [132] P. Maunz, T. Fischer, T. Puppe, P. W.H. Pinkse y G. Rempe. “Collective light forces on atoms in a high-finesse cavity”. En: *Technical Digest - Summaries of Papers Presented at the Quantum Electronics and Laser Science Conference, QELS 2001* (2001), págs. 94-95. DOI: [10.1109/QELS.2001.961902](https://doi.org/10.1109/QELS.2001.961902) (vid. pág. 24).
- [133] Alessandro Ferraro, Stefano Olivares y Matteo G. A. Paris. *Gaussian states in continuous variable quantum information*. 2005. arXiv: [0503237](https://arxiv.org/abs/0503237) [quant-ph] (vid. págs. 26, 35, 36, 48, 135).
- [134] J. F. Goodwin, G. Stutter, R. C. Thompson y D. M. Segal. “Resolved-Sideband Laser Cooling in a Penning Trap”. En: *Phys. Rev. Lett.* 116 (14 2016), pág. 143002. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.143002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.143002) (vid. pág. 27).
- [135] D. J. Wineland, R. E. Drullinger y F. L. Walls. “Radiation-Pressure Cooling of Bound Resonant Absorbers”. En: *Phys. Rev. Lett.* 40 (25 jun. de 1978), págs. 1639-1642. DOI: [10.1103/PhysRevLett.40.1639](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.40.1639) (vid. pág. 28).
- [136] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, S. R. Jefferts, W. M. Itano, D. J. Wineland y P. Gould. “Resolved-Sideband Raman Cooling of a Bound Atom to the 3D Zero-Point Energy”. En: *Phys. Rev. Lett.* 75 (22 nov. de 1995), págs. 4011-4014. DOI: [10.1103/PhysRevLett.75.4011](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.4011) (vid. pág. 28).

- [137]Giovanna Morigi, Jürgen Eschner y Christoph H. Keitel. “Ground State Laser Cooling Using Electromagnetically Induced Transparency”. En: *Phys. Rev. Lett.* 85 (21 nov. de 2000), págs. 4458-4461. DOI: [10.1103/PhysRevLett.85.4458](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4458) (vid. pág. 28).
- [138]Sebastian G. Hofer, Witłef Wiczorek, Markus Aspelmeyer y Klemens Hammerer. “Quantum entanglement and teleportation in pulsed cavity optomechanics”. En: *Phys. Rev. A* 84 (5 nov. de 2011), pág. 052327. DOI: [10.1103/PhysRevA.84.052327](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.052327) (vid. pág. 29).
- [139]Hai-Woong Lee. “Theory and application of the quantum phase-space distribution functions”. En: *Physics Reports* 259.3 (1995), págs. 147-211. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(95\)00007-4](https://doi.org/10.1016/0370-1573(95)00007-4) (vid. págs. 31-33).
- [140]W.P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley, 2011 (vid. pág. 32).
- [141]Howard J. Carmichael y Marlan O. Scully. *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations*. Vol. 53. 3. 2000, págs. 78-80. DOI: [10.1063/1.883009](https://doi.org/10.1063/1.883009) (vid. págs. 32, 67, 68, 82).
- [142]Thomas L. Curtright y Cosmas K. Zachos. “Quantum Mechanics in Phase Space”. En: *Asia Pacific Physics Newsletter* 01.01 (2012), págs. 37-46. DOI: [10.1142/S2251158X12000069](https://doi.org/10.1142/S2251158X12000069). eprint: <https://doi.org/10.1142/S2251158X12000069> (vid. pág. 33).
- [143]A. Isar, A. Sandulescu y W. Scheid. “Phase space representation for open quantum systems within the Lindblad theory”. En: *International Journal of Modern Physics B* 10.22 (1996), págs. 2767-2779. DOI: [10.1142/S0217979296001240](https://doi.org/10.1142/S0217979296001240). arXiv: [9605041](https://arxiv.org/abs/9605041) [quant-ph] (vid. pág. 33).
- [144]C.W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences*. Proceedings in Life Sciences. Springer-Verlag, 1985 (vid. págs. 34, 79, 127, 128).
- [145]M. Foss-Feig, P. Niroula, J. T. Young, M. Hafezi, A. V. Gorshkov, R. M. Wilson y M. F. Maghrebi. “Emergent equilibrium in many-body optical bistability”. En: *Phys. Rev. A* 95 (4 abr. de 2017), pág. 043826. DOI: [10.1103/PhysRevA.95.043826](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.95.043826) (vid. pág. 34).
- [146]Filippo Vicentini, Fabrizio Minganti, Riccardo Rota, Giuliano Orso y Cristiano Ciuti. “Critical slowing down in driven-dissipative Bose-Hubbard lattices”. En: *Phys. Rev. A* 97 (1 ene. de 2018), pág. 013853. DOI: [10.1103/PhysRevA.97.013853](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.013853) (vid. págs. 34, 41, 63, 84).
- [147]Julian Huber, Peter Kirton y Peter Rabl. “Phase-space methods for simulating the dissipative many-body dynamics of collective spin systems”. En: *SciPost Phys.* 10 (2021), pág. 045. DOI: [10.21468/SciPostPhys.10.2.045](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.10.2.045) (vid. págs. 34, 63, 127).
- [148]F. Trimborn, D. Witthaut y H. J. Korsch. “Beyond mean-field dynamics of small Bose-Hubbard systems based on the number-conserving phase-space approach”. En: *Phys. Rev. A* 79 (1 ene. de 2009), pág. 013608. DOI: [10.1103/PhysRevA.79.013608](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.013608) (vid. pág. 34).
- [149]Artur Ekert y Peter L. Knight. “Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition”. En: *American Journal of Physics* 63.5 (1995), págs. 415-423. DOI: [10.1119/1.17904](https://doi.org/10.1119/1.17904). eprint: <https://doi.org/10.1119/1.17904> (vid. pág. 35).
- [150]K. E. Cahill y R. J. Glauber. “Ordered Expansions in Boson Amplitude Operators”. En: *Phys. Rev.* 177 (5 1969), págs. 1857-1881. DOI: [10.1103/PhysRev.177.1857](https://doi.org/10.1103/PhysRev.177.1857) (vid. pág. 35).
- [151]Gerardo Adesso y Fabrizio Illuminati. “Entanglement in continuous-variable systems: recent advances and current perspectives”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40.28 (2007), pág. 7821 (vid. págs. 36, 38, 57, 93).
- [152]John Williamson. “On the Algebraic Problem Concerning the Normal Forms of Linear Dynamical Systems”. En: *American Journal of Mathematics* 58.1 (1936), págs. 141-163 (vid. pág. 36).

- [153]M.A. Nielsen e I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010 (vid. págs. 36, 58).
- [154]Marco G. Genoni, Matteo G. A. Paris y Konrad Banaszek. “Quantifying the non-Gaussian character of a quantum state by quantum relative entropy”. En: *Phys. Rev. A* 78 (6 2008), pág. 060303. DOI: [10.1103/PhysRevA.78.060303](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.060303) (vid. pág. 36).
- [155]Paulina Marian y Tudor A. Marian. “Relative entropy is an exact measure of non-Gaussianity”. En: *Phys. Rev. A* 88.1 (2013), págs. 1-7. DOI: [10.1103/PhysRevA.88.012322](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.012322). arXiv: [1308.2939](https://arxiv.org/abs/1308.2939) (vid. pág. 36).
- [156]Marco G. Genoni, Matteo G. A. Paris y Konrad Banaszek. “Measure of the non-Gaussian character of a quantum state”. En: *Phys. Rev. A* 76 (4 2007), pág. 042327. DOI: [10.1103/PhysRevA.76.042327](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.042327) (vid. pág. 36).
- [157]Paulina Marian, Iulia Ghiu y Tudor A. Marian. “Gaussification through decoherence”. En: *Phys. Rev. A* 88.1 (2013), págs. 1-11. DOI: [10.1103/PhysRevA.88.012316](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.012316) (vid. pág. 36).
- [158]J. Solomon Ivan, M. Sanjay Kumar y R. Simon. “A measure of non-Gaussianity for quantum states”. En: *Quantum Information Processing* 11.3 (2012), págs. 853-872. DOI: [10.1007/s11128-011-0314-2](https://doi.org/10.1007/s11128-011-0314-2) (vid. págs. 36, 37, 59).
- [159]Martin B. Plenio y Shashank Virmani. “An Introduction to Entanglement Measures”. En: *Quantum Info. Comput.* 7.1 (2007), págs. 1-51 (vid. págs. 37, 38, 57).
- [160]Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle, Manfred Eibl, Harald Weinfurter y Anton Zeilinger. “Experimental quantum teleportation”. En: *Nature* 390.6660 (dic. de 1997), págs. 575-579. DOI: [10.1038/37539](https://doi.org/10.1038/37539) (vid. pág. 37).
- [161]Asher Peres. “Separability Criterion for Density Matrices”. En: *Phys. Rev. Lett.* 77 (8 ago. de 1996), págs. 1413-1415. DOI: [10.1103/PhysRevLett.77.1413](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413) (vid. págs. 37, 38).
- [162]R. Simon. “Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems”. En: *Phys. Rev. Lett.* 84 (12 mar. de 2000), págs. 2726-2729. DOI: [10.1103/PhysRevLett.84.2726](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.2726) (vid. págs. 37, 38).
- [163]G. Vidal y R. F. Werner. “Computable measure of entanglement”. En: *Phys. Rev. A* 65 (3 feb. de 2002), pág. 032314. DOI: [10.1103/PhysRevA.65.032314](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.032314) (vid. págs. 38, 57, 93).
- [164]Ludovico Lami, Alessio Serafini y Gerardo Adesso. “Gaussian entanglement revisited”. En: *New Journal of Physics* 20.2 (feb. de 2018), pág. 023030. DOI: [10.1088/1367-2630/aaa654](https://doi.org/10.1088/1367-2630/aaa654) (vid. págs. 39, 57).
- [165]Myung-Joong Hwang, Peter Rabl y Martin B. Plenio. “Dissipative phase transition in the open quantum Rabi model”. En: *Phys. Rev. A* 97 (1 2018), pág. 013825. DOI: [10.1103/PhysRevA.97.013825](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.013825) (vid. págs. 39, 84).
- [166]Fabrizio Minganti, Alberto Biella, Nicola Bartolo y Cristiano Ciuti. “Spectral theory of Liouvillians for dissipative phase transitions”. En: *Phys. Rev. A* 98 (4 2018), pág. 042118. DOI: [10.1103/PhysRevA.98.042118](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.042118) (vid. págs. 39-41, 56, 125).
- [167]Dominic C. Rose, Katarzyna Macieszczak, Igor Lesanovsky y Juan P. Garrahan. “Metastability in an open quantum Ising model”. En: *Physical Review E* 94.5 (2016), págs. 1-11. DOI: [10.1103/PhysRevE.94.052132](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.052132). arXiv: [1607.06780](https://arxiv.org/abs/1607.06780) (vid. págs. 40, 41, 76, 133).
- [168]Xin H. H. Zhang y Harold U. Baranger. “Driven-dissipative phase transition in a Kerr oscillator: From semiclassical \mathcal{PT} symmetry to quantum fluctuations”. En: *Phys. Rev. A* 103 (3 mar. de 2021), pág. 033711. DOI: [10.1103/PhysRevA.103.033711](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.033711) (vid. págs. 40, 84).

- [169]Mattias Fitzpatrick, Neereja M. Sundaresan, Andy C. Y. Li, Jens Koch y Andrew A. Houck. “Observation of a Dissipative Phase Transition in a One-Dimensional Circuit QED Lattice”. En: *Phys. Rev. X* 7 (1 feb. de 2017), pág. 011016. DOI: [10.1103/PhysRevX.7.011016](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.7.011016) (vid. pág. 40).
- [170]J. M. Fink, A. Dombi, A. Vukics, A. Wallraff y P. Domokos. “Observation of the Photon-Blockade Breakdown Phase Transition”. En: *Phys. Rev. X* 7 (1 ene. de 2017), pág. 011012. DOI: [10.1103/PhysRevX.7.011012](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.7.011012) (vid. pág. 40).
- [171]Thomas Fink, Anne Schade, Sven Höfling, Christian Schneider y Ataç Imamoglu. “Signatures of a dissipative phase transition in photon correlation measurements”. En: *Nature Physics* 14.4 (abr. de 2018), págs. 365-369. DOI: [10.1038/s41567-017-0020-9](https://doi.org/10.1038/s41567-017-0020-9) (vid. pág. 40).
- [172]Katarzyna Macieszczak, Mădălin Guță, Igor Lesanovsky y Juan P. Garrahan. “Towards a Theory of Metastability in Open Quantum Dynamics”. En: *Physical Review Letters* 116.24 (2016), págs. 1-15. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.240404](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.240404). arXiv: [1512.05801](https://arxiv.org/abs/1512.05801) (vid. págs. 41, 58, 76, 133, 134).
- [173]Katarzyna Macieszczak, Dominic C. Rose, Igor Lesanovsky y Juan P. Garrahan. “Theory of classical metastability in open quantum systems”. En: (2020), págs. 1-73. arXiv: [2006.01227](https://arxiv.org/abs/2006.01227) (vid. págs. 41, 76, 133).
- [174]Carlos Sánchez Muñoz, Berislav Buča, Joseph Tindall, Alejandro González-Tudela, Dieter Jaksch y Diego Porras. “Symmetries and conservation laws in quantum trajectories: Dissipative freezing”. En: *Phys. Rev. A* 100 (4 oct. de 2019), pág. 042113. DOI: [10.1103/PhysRevA.100.042113](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.100.042113) (vid. págs. 41, 129).
- [175]Cenap Ates, Beatriz Olmos, Juan P. Garrahan e Igor Lesanovsky. “Dynamical phases and intermittency of the dissipative quantum Ising model”. En: *Phys. Rev. A* 85 (4 abr. de 2012), pág. 043620. DOI: [10.1103/PhysRevA.85.043620](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.043620) (vid. pág. 41).
- [176]Catalin-Mihai Halati, Ameneh Sheikhan y Corinna Kollath. *Breaking strong symmetries in dissipative quantum systems: the (non-)interacting bosonic chain coupled to a cavity*. 2021. arXiv: [2102.02537](https://arxiv.org/abs/2102.02537) [[cond-mat.quant-gas](https://arxiv.org/abs/2102.02537)] (vid. págs. 41, 51, 129).
- [177]Katarzyna Macieszczak, Mădălin Guță, Igor Lesanovsky y Juan P. Garrahan. “Dynamical phase transitions as a resource for quantum enhanced metrology”. En: *Phys. Rev. A* 93 (2 feb. de 2016), pág. 022103. DOI: [10.1103/PhysRevA.93.022103](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.022103) (vid. pág. 41).
- [178]Sisi Zhou, Mengzhen Zhang, John Preskill y Liang Jiang. “Achieving the Heisenberg limit in quantum metrology using quantum error correction”. En: *Nature Communications* 9 (1 2018). DOI: [10.1038/s41467-017-02510-3](https://doi.org/10.1038/s41467-017-02510-3) (vid. pág. 41).
- [179]Alexandre Le Boité, Myung-Joong Hwang y Martin B. Plenio. “Metastability in the driven-dissipative Rabi model”. En: *Phys. Rev. A* 95 (2 2017), pág. 023829. DOI: [10.1103/PhysRevA.95.023829](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.95.023829) (vid. pág. 41).
- [180]Daniel Finkelstein-Shapiro, David Viennot, Ibrahim Saideh, Thorsten Hansen, Tõnu Pullerits y Arne Keller. “Adiabatic elimination and subspace evolution of open quantum systems”. En: *Phys. Rev. A* 101 (4 abr. de 2020), pág. 042102. DOI: [10.1103/PhysRevA.101.042102](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.042102) (vid. págs. 42, 68).
- [181]Danny C. Sorensen. “Implicitly Restarted Arnoldi/Lanczos Methods for Large Scale Eigenvalue Calculations”. En: *Parallel Numerical Algorithms*. Ed. por David E. Keyes, Ahmed Sameh y V. Venkatakrishnan. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997, págs. 119-165. DOI: [10.1007/978-94-011-5412-3_5](https://doi.org/10.1007/978-94-011-5412-3_5) (vid. págs. 44, 104, 125).

- [182]R. J. Thompson, G. Rempe y H. J. Kimble. “Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity”. En: *Phys. Rev. Lett.* 68 (8 feb. de 1992), págs. 1132-1135. DOI: [10.1103/PhysRevLett.68.1132](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.1132) (vid. pág. 45).
- [183]N. Goldenfeld. *Lectures On Phase Transitions And The Renormalization Group*. CRC Press, 2018 (vid. pág. 47).
- [184]Victor V. Albert y Liang Jiang. “Symmetries and conserved quantities in Lindblad master equations”. En: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 89 (2 feb. de 2014). DOI: [10.1103/PhysRevA.89.022118](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.022118) (vid. págs. 51, 125).
- [185]Berislav Buča y Tomaž Prosen. “A note on symmetry reductions of the Lindblad equation: transport in constrained open spin chains”. En: *New Journal of Physics* 14.7 (jul. de 2012), pág. 073007. DOI: [10.1088/1367-2630/14/7/073007](https://doi.org/10.1088/1367-2630/14/7/073007) (vid. pág. 51).
- [186]H. Carmichael. *An Open Systems Approach to Quantum Optics: Lectures Presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991*. Lecture Notes in Physics Monographs. Springer Berlin Heidelberg, 2009 (vid. págs. 63, 68).
- [187]Wouter Verstraelen, Riccardo Rota, Vincenzo Savona y Michiel Wouters. “Gaussian trajectory approach to dissipative phase transitions: The case of quadratically driven photonic lattices”. En: *Physical Review Research* 2.2 (2020), págs. 1-7. DOI: [10.1103/PhysRevResearch.2.022037](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.022037). arXiv: [1912.02066](https://arxiv.org/abs/1912.02066) (vid. págs. 63, 129).
- [188]M. R. Hush, A. R. R. Carvalho y J. J. Hope. “Number-phase Wigner representation for efficient stochastic simulations”. En: *Phys. Rev. A* 81 (3 2010), pág. 033852. DOI: [10.1103/PhysRevA.81.033852](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.033852) (vid. pág. 63).
- [189]A. Vukics y P. Domokos. “Simultaneous cooling and trapping of atoms by a single cavity-field mode”. En: *Phys. Rev. A* 72 (3 sep. de 2005), pág. 031401. DOI: [10.1103/PhysRevA.72.031401](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.72.031401) (vid. pág. 64).
- [190]A. Maitra, D. Leibfried, D. Ullmo y H. Landa. “Far-from-equilibrium noise-heating and laser-cooling dynamics in radio-frequency Paul traps”. En: *Phys. Rev. A* 99 (4 abr. de 2019), pág. 043421. DOI: [10.1103/PhysRevA.99.043421](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.99.043421) (vid. pág. 64).
- [191]Anatoli Polkovnikov. “Quantum corrections to the dynamics of interacting bosons: Beyond the truncated Wigner approximation”. En: *Phys. Rev. A* 68 (5 nov. de 2003), pág. 053604. DOI: [10.1103/PhysRevA.68.053604](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.053604) (vid. págs. 67, 80).
- [192]Andreas Bittracher, Péter Koltai, Stefan Klus, Ralf Banisch, Michael Dellnitz y Christof Schütte. “Transition Manifolds of Complex Metastable Systems”. En: *Journal of Nonlinear Science* 28.2 (abr. de 2018), págs. 471-512. DOI: [10.1007/s00332-017-9415-0](https://doi.org/10.1007/s00332-017-9415-0) (vid. págs. 68, 106, 133).
- [193]Teruo Matsubara, Paolo Facchi, Vittorio Giovannetti y Kazuya Yuasa. “Optimal Gaussian metrology for generic multimode interferometric circuit”. En: *New Journal of Physics* 21.3 (mar. de 2019), pág. 033014. DOI: [10.1088/1367-2630/ab0604](https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab0604) (vid. pág. 68).
- [194]Samuel L. Braunstein y Peter van Loock. “Quantum information with continuous variables”. En: *Rev. Mod. Phys.* 77 (2 jun. de 2005), págs. 513-577. DOI: [10.1103/RevModPhys.77.513](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.513) (vid. pág. 68).
- [195]Christian Weedbrook, Stefano Pirandola, Raúl García-Patrón, Nicolas J. Cerf, Timothy C. Ralph, Jeffrey H. Shapiro y Seth Lloyd. “Gaussian quantum information”. En: *Rev. Mod. Phys.* 84 (2 mayo de 2012), págs. 621-669. DOI: [10.1103/RevModPhys.84.621](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.621) (vid. pág. 68).
- [196]M. Brack y R. Bhaduri. *Semiclassical Physics*. Frontiers in physics. Avalon Publishing, 1997 (vid. pág. 69).

- [197]L. Reichl. *The Transition to Chaos: In Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations*. Institute for Nonlinear Science. Springer New York, 2013 (vid. pág. 69).
- [198]M. B. Plenio y P. L. Knight. “The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics”. En: *Rev. Mod. Phys.* 70 (1 ene. de 1998), págs. 101-144. DOI: [10.1103/RevModPhys.70.101](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.70.101) (vid. págs. 69, 129).
- [199]Wouter Verstraelen y Michiel Wouters. “Gaussian Quantum Trajectories for the Variational Simulation of Open Quantum-Optical Systems”. En: *Applied Sciences* 8.9 (2018). DOI: [10.3390/app8091427](https://doi.org/10.3390/app8091427) (vid. págs. 69, 129).
- [200]Andreas A. Buchheit y Sergej Rjasanow. “Ground state of the Frenkel–Kontorova model with a globally deformable substrate potential”. En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 406 (2020), pág. 132298. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2019.132298> (vid. págs. 74, 105).
- [201]H. Risken. *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*. Springer Series in Synergetics. Springer Berlin Heidelberg, 2012 (vid. pág. 79).
- [202]Teruaki Okushima, Tomoaki Niiyama, Kensuke S. Ikeda y Yasushi Shimizu. “Mean first passage times reconstruct the slowest relaxations in potential energy landscapes of nanoclusters”. En: *Phys. Rev. E* 100 (3 sep. de 2019), pág. 032311. DOI: [10.1103/PhysRevE.100.032311](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032311) (vid. pág. 79).
- [203]Adam Kells, Zsuzsanna É. Mihálka, Alessia Annibale y Edina Rosta. “Mean first passage times in variational coarse graining using Markov state models”. En: *The Journal of Chemical Physics* 150.13 (2019), pág. 134107. DOI: [10.1063/1.5083924](https://doi.org/10.1063/1.5083924) (vid. pág. 79).
- [204]Jean Dalibard, Yvan Castin y Klaus Mølmer. “Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics”. En: *Phys. Rev. Lett.* 68 (5 feb. de 1992), págs. 580-583. DOI: [10.1103/PhysRevLett.68.580](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.580) (vid. pág. 82).
- [205]Raphaël Lescanne, Lucas Verney, Quentin Ficheux, Michel H. Devoret, Benjamin Huard, Mazyar Mirrahimi y Zaki Leghtas. “Escape of a Driven Quantum Josephson Circuit into Unconfined States”. En: *Phys. Rev. Appl.* 11 (1 ene. de 2019), pág. 014030. DOI: [10.1103/PhysRevApplied.11.014030](https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.11.014030) (vid. pág. 84).
- [206]S. Dettmer, D. Hellweg, P. Ryytty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos y M. Lewenstein. “Observation of Phase Fluctuations in Elongated Bose-Einstein Condensates”. En: *Phys. Rev. Lett.* 87 (16 oct. de 2001), pág. 160406. DOI: [10.1103/PhysRevLett.87.160406](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.160406) (vid. pág. 84).
- [207]D. F. V. James. “Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation”. En: *Applied Physics B* 66.2 (feb. de 1998), págs. 181-190. DOI: [10.1007/s003400050373](https://doi.org/10.1007/s003400050373) (vid. pág. 87).
- [208]K. Dookhitram, R. Boojhawon y M. Bhuruth. “A new method for accelerating Arnoldi algorithms for large scale eigenproblems”. En: *Mathematics and Computers in Simulation* 80.2 (2009), págs. 387-401. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2009.07.009> (vid. pág. 104).
- [209]Eric Polizzi. “Density-matrix-based algorithm for solving eigenvalue problems”. En: *Phys. Rev. B* 79 (11 mar. de 2009), pág. 115112. DOI: [10.1103/PhysRevB.79.115112](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.79.115112) (vid. pág. 104).
- [210]Akira Imakura y Tetsuya Sakurai. “Complex moment-based eigensolver coupled with two Krylov subspaces”. En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 432 (2023), pág. 115283. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115283> (vid. pág. 104).
- [211]Souvik Agasti. *Simulation of Kerr Nonlinearity: Revealing Initial State Dependency*. 2023. arXiv: [2308.10667](https://arxiv.org/abs/2308.10667) [quant-ph] (vid. pág. 104).

- [212]Stefan Klus, Péter Koltai y Christof Schütte. “On the numerical approximation of the Perron-Frobenius and Koopman operator”. En: *Journal of Computational Dynamics* 3.1 (2016), págs. 51-79. DOI: [10.3934/jcd.2016003](https://doi.org/10.3934/jcd.2016003) (vid. págs. 106, 133).
- [213]Stefan Klus, Feliks Nüske, Péter Koltai, Hao Wu, Ioannis Kevrekidis, Christof Schütte y Frank Noé. “Data-Driven Model Reduction and Transfer Operator Approximation”. En: *Journal of Nonlinear Science* 28.3 (jun. de 2018), págs. 985-1010. DOI: [10.1007/s00332-017-9437-7](https://doi.org/10.1007/s00332-017-9437-7) (vid. págs. 106, 133).
- [214]Angel Rivas y Susana F. Huelga. *Open Quantum Systems*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. DOI: [10.1007/978-3-642-23354-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-23354-8) (vid. pág. 125).
- [215]R. B. Lehoucq y D. C. Sorensen. “Deflation Techniques for an Implicitly Restarted Arnoldi Iteration”. En: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 17.4 (1996), págs. 789-821. DOI: [10.1137/S0895479895281484](https://doi.org/10.1137/S0895479895281484). eprint: <https://doi.org/10.1137/S0895479895281484> (vid. pág. 125).
- [216]P.E. Kloeden, E. Platen y H. Schurz. *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2002 (vid. pág. 128).
- [217]N. Gisin. “Quantum Measurements and Stochastic Processes”. En: *Phys. Rev. Lett.* 52 (19 mayo de 1984), págs. 1657-1660. DOI: [10.1103/PhysRevLett.52.1657](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.52.1657) (vid. pág. 129).
- [218]N Gisin e I C Percival. “The quantum-state diffusion model applied to open systems”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 25.21 (nov. de 1992), pág. 5677. DOI: [10.1088/0305-4470/25/21/023](https://doi.org/10.1088/0305-4470/25/21/023) (vid. pág. 129).
- [219]T. Müller, S. Diehl y M. Buchhold. “Measurement-Induced Dark State Phase Transitions in Long-Ranged Fermion Systems”. En: *Phys. Rev. Lett.* 128 (1 ene. de 2022), pág. 010605. DOI: [10.1103/PhysRevLett.128.010605](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.128.010605) (vid. pág. 129).
- [220]Joseph Tindall, Dieter Jaksch y Carlos Sánchez Muñoz. “On the generality of symmetry breaking and dissipative freezing in quantum trajectories”. En: *SciPost Phys. Core* 6 (2023), pág. 004. DOI: [10.21468/SciPostPhysCore.6.1.004](https://doi.org/10.21468/SciPostPhysCore.6.1.004) (vid. pág. 129).
- [221]Juan P. Garrahan e Igor Lesanovsky. “Thermodynamics of Quantum Jump Trajectories”. En: *Phys. Rev. Lett.* 104 (16 abr. de 2010), pág. 160601. DOI: [10.1103/PhysRevLett.104.160601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.160601) (vid. pág. 129).
- [222]Gabriele Peretto, Federico Carollo e Igor Lesanovsky. “Thermodynamics of quantum-jump trajectories of open quantum systems subject to stochastic resetting”. En: *SciPost Phys.* 13 (2022), pág. 079. DOI: [10.21468/SciPostPhys.13.4.079](https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.13.4.079) (vid. pág. 129).
- [223]Andrew J. Daley. “Quantum trajectories and open many-body quantum systems”. En: *Advances in Physics* 63.2 (2014), págs. 77-149. DOI: [10.1080/00018732.2014.933502](https://doi.org/10.1080/00018732.2014.933502). eprint: <https://doi.org/10.1080/00018732.2014.933502> (vid. pág. 130).
- [224]J. R. Cash y Alan H. Karp. “A Variable Order Runge-Kutta Method for Initial Value Problems with Rapidly Varying Right-Hand Sides”. En: 16.3 (sep. de 1990), págs. 201-222. DOI: [10.1145/79505.79507](https://doi.org/10.1145/79505.79507) (vid. pág. 131).
- [225]Andreas Bittracher, Stefan Klus, Boumediene Hamzi, Péter Koltai y Christof Schütte. “Dimensionality Reduction of Complex Metastable Systems via Kernel Embeddings of Transition Manifolds”. En: *Journal of Nonlinear Science* 31.1 (dic. de 2020), pág. 3. DOI: [10.1007/s00332-020-09668-z](https://doi.org/10.1007/s00332-020-09668-z) (vid. pág. 133).
- [226]Jonatan Bohr Brask. *Gaussian states and operations – a quick reference*. 2022. arXiv: [2102.05748](https://arxiv.org/abs/2102.05748) [quant-ph] (vid. pág. 135).

Métodos numéricos utilizados

A.1. Diagonalización con métodos iterativos

La ecuación maestra $\dot{\rho} = \mathcal{L}(\rho)$ en forma de Lindblad

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}(\rho) = -i [H, \rho] + \sum_k \gamma_k \left[L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho\} \right] \quad (\text{A.1})$$

incluye un término correspondiente a la evolución unitaria y términos disipativos, donde cada uno de los operadores L_k está asociado a un canal disipativo a una tasa γ_k . A lo largo de este capítulo consideramos que solo la cavidad óptica presenta pérdida de fotones a una tasa 2κ . Dado que \mathcal{L} es independiente del tiempo, existe al menos un estado estacionario [214]. Si \mathcal{L} es diagonalizable, sus autovectores, definidos por $\mathcal{L}\rho_i = \nu_i\rho_i$, satisfacen $\text{Re}[\nu_i] \leq 0$. El conjunto de autovectores que satisfacen $\text{Re}[\nu_i] = 0$ forma un *subespacio libre de decoherencia* de \mathcal{L} [49]. Si el autovalor cero es degenerado con multiplicidad algebraica n , entonces hay un conjunto infinito de estados hacia los cuales el sistema puede decaer, dependiendo del estado inicial. Sin embargo, en ausencia de simetrías el estado estacionario es generalmente único [166, 184], y está dado por el autovector por derecha correspondiente al autovalor 0: $\rho_{ss} = \rho_0 / \text{Tr}[\rho_0]$. El *gap* del operador de Liouville $|\text{Re}[\nu_1]|$, también llamado tasa de decaimiento asintótica [166], determina la tasa de relajación más lenta del sistema [166].

Para las simulaciones numéricas, el estado del sistema fue descrito en una base finita de estados de Fock correspondientes a cada subsistema. El *cutoff* de la base de la cavidad es ajustado para cada valor de κ utilizado, y fue elegido de tal forma que las poblaciones de la matriz densidad decaigan por debajo de un umbral previamente establecido. Además, se verificó que los resultados no varíen significativamente al variar las dimensiones de la descripción discreta. Dado que las dimensiones de la base necesarias para representar correctamente los estados en el espacio de Hilbert del sistema compuesto son muy grandes, no es factible diagonalizar el operador de Liouville completo por medio de algoritmos de diagonalización exacta. Es por esto que utilizamos métodos iterativos en subespacios de Krylov, los cuales permiten encontrar una porción del espectro en una determinada región de interés [215]. En particular, utilizamos el método de Arnoldi [181], ya que el operador \mathcal{L} es complejo y no hermitiano. El mismo está implementado ARPACK, una librería de Fortran que fue la versión del algoritmo utilizada.

La región de interés del espectro de \mathcal{L} corresponde a los autovalores con parte real más pequeña, y en particular el autovalor nulo, mientras que el método de Arnoldi es más eficiente para encontrar la porción del espectro de mayor magnitud. Debido a esto, se decidió resolver el problema equivalente de encontrar los autovectores del mapa dinámico

$\Lambda(t) = \exp(Lt)$ a un tiempo fijo t . En este caso, la multiplicación del mapa por un vector x_0 resulta en la evolución del mismo bajo la acción del generador \mathcal{L} , y así la región de interés del espectro pasan a ser los autovalores con mayor valor absoluto, y en particular el autovalor 1, que ahora corresponde al estado estacionario. Dado que los autovectores del mapa son independientes del tiempo, la ecuación de Lindblad puede ser integrada para obtener el mapa dinámico $\Lambda(t)$. La misma se integra por medio del método de Euler a tiempos muy cortos Δt , de tal forma que $t = N_{steps}\Delta t$. Para estos cálculos, tomamos un paso de integración $\Delta t = 10^{-4}/\omega$, lo que provee de precisión suficiente sin requerir tiempos excesivamente largos, de tal forma que el error porcentual obtenido para los valores medios del capítulo 5 están por debajo del 5%.

Base de estados de Fock desplazados

Las dos estructuras de la transición corresponden a estados con pocos fotones o con un número medio de fotones grande. Se puede observar, al ver los estados reducidos de la cavidad en el espacio de fases (ver e.g. Fig. 5.3), que los estados de la cavidad lejos de la transición son muy similares al verlos en el espacio de fases a estados coherentes. Debido a esto, se utilizó una base de estados de Fock desplazados $|\alpha, n\rangle \equiv D(\alpha)|n\rangle$ donde $D(\alpha)$ es un operador desplazamiento para representar la dinámica del sistema. Una primera aproximación numérica a baja precisión permite estimar el desplazamiento α necesario para el estado reducido de la cavidad, una vez elegido el desplazamiento, se reescribe la dinámica en la nueva base: Utilizando que los operadores de desplazamiento satisfacen [97]

$$\begin{aligned} D^\dagger(\alpha)aD(\alpha) &= a + \alpha \\ D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha) &= a^\dagger + \alpha^* \end{aligned} \tag{A.2}$$

se obtiene que en la base de estados de Fock desplazados $|\alpha, n\rangle$ el operador del número de fotones de la cavidad está dado por $(a^\dagger a)_\alpha = a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2$. Luego se realiza una nueva diagonalización de \mathcal{L} con mayor precisión numérica. Esto permite reducir el número de estados necesarios en la base de la representación discreta de ρ . El desplazamiento α se elige independientemente para cada valor de $\eta/\sqrt{\omega\kappa}$. Se puede ver un ejemplo de este procedimiento en la Fig. A.1 para un estado después del punto de la transición: en *a*) se muestra el estado asintótico en la base de estados de Fock luego de la primer diagonalización (a precisión baja), mientras que en *b*) se muestra el mismo resultado en la base de estados de Fock desplazados de la cavidad. El nuevo *cutoff* de la base se elige de tal forma de que incluso los estados en la región de la transición (donde no se espera que el estado sea similar a un estado coherente) sean correctamente representados.

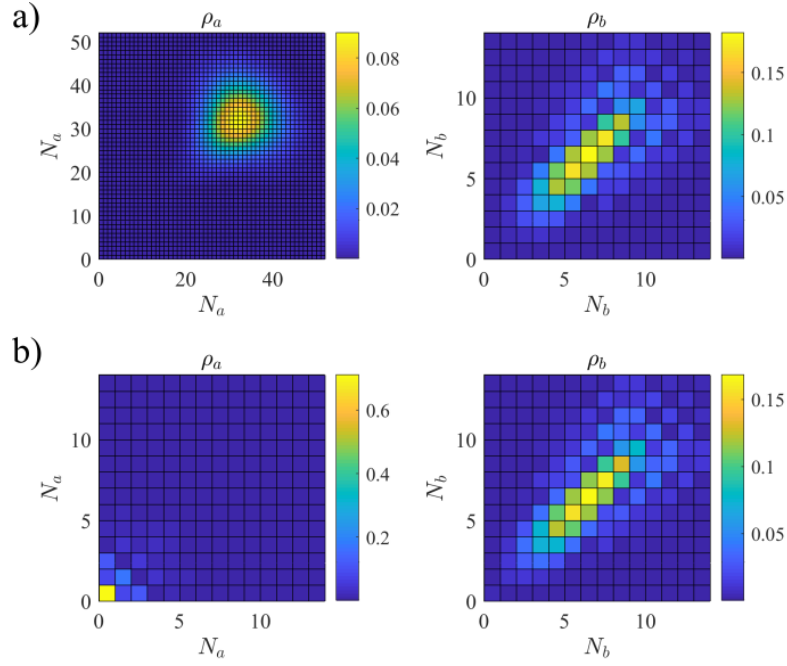


Fig. A.1.: Representación esquemática de las matrices densidad reducidas ρ_{cav} (columna izquierda) y ρ_{ion} (columna derecha), en a) una base de estados de Fock y b) una base de estados de Fock desplazados. Parámetros utilizados $\eta/\sqrt{\omega\kappa} = 5$, $\kappa = 0,75$.

A.2. Simulación estocástica de la ec. de Fokker-Planck

La ecuación de Fokker-Planck proporciona la descripción dinámica de una distribución de probabilidad a través de la solución de una EDP de segundo orden. Para resolverla utilizamos un enfoque numérico: la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas (SDE por sus siglas en inglés: Stochastic Differential Equation) que describen el proceso estocástico subyacente. Un vector n -dimensional que satisface la SDE

$$dx = A(x, t)dt + B(x, t)dW_t, \quad (\text{A.3})$$

donde dW_t es un proceso de Wiener, es equivalente a una ecuación de Fokker-Planck [144] cuando se evoluciona un ensamble de trayectorias [147]. La correspondiente ecuación diferencial para la distribución de probabilidad p toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\mathbf{x}, t) = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (B(\mathbf{x}, t)B^T(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)) \quad (\text{A.4})$$

donde $\mu = A$ es el *drift* y $D = BB^T$ es la matriz de difusión. La solución numérica de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas puede ser aproximada con precisión

mediante una variedad de métodos [144, 216]. Para nuestro problema, se eligió utilizar un esquema de Taylor de orden fuerte 1,5, siguiendo la implementación descrita en [216].

$$\begin{aligned}
Y_{n+1}^k = & Y_n^k + A^k dt + \frac{1}{2} L^0 A^k dt^2 + \sum_{j=1}^m (B^{k,j} \Delta W_n^j + L^0 B^{k,j} I_{(0,j)} + L^j A^k I_{(j,0)}) \\
& + \sum_{j_1, j_2=1}^m L^{j_1} B^{k, j_2} I_{(j_1, j_2)} + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^m L^{j_1} L^{j_2} B^{k, j_3} I_{(j_1, j_2, j_3)}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

donde Y_n^k es la solución para la k -ésima componente de (A.3) en el paso de tiempo n , y donde los incrementos ΔW_n son variables aleatorias con distribución normal $\mathcal{N}(0, 1)$ (con media 0 y varianza 1). Y

$$\begin{aligned}
L^0 & \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^d A^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \sum_{j=1}^m B^{k,j} B^{l,j} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \\
L^j & \equiv \sum_{k=1}^d B^{k,j} \frac{\partial}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$I_{(j_1, \dots, j_n)}$ son integrales estocásticas Ito múltiples. Las integrales dobles $I_{(j,0)}$ se pueden encontrar analíticamente, éstas son variables distribuidas normalmente ΔZ_n^j , con valor medio $E(\Delta Z_n) = 0$, varianza $E((\Delta Z_n)^2) = \frac{dt^3}{3}$ y covarianza $E(\Delta Z_n \Delta W_n) = \frac{dt^2}{2}$ [216].

Para el sistema tratado en el capítulo 6, cuando se utiliza el esquema de Taylor de orden fuerte 1.5, los únicos elementos no nulos que incluyen integrales múltiples son los que tienen factores $I_{(j,0)}$. Así sólo se requiere el cálculo de estas integrales $I_{(j,0)} = \Delta Z_n^j$. Mientras que las integrales $I_{(j_1, j_2, j_3)}$, que deberían ser obtenidas numéricamente, no son necesarias.

A.3. Trayectorias cuánticas

Comúnmente, los formalismos para describir el contacto de un sistema con un ambiente externo, muestran un decaimiento suave de los elementos de matriz de la matriz densidad, o consecuentemente de los valores de expectación. Esto es común a una dinámica en la que se describe el comportamiento de una propiedad de un ensamble. Por el contrario, también se puede pensar en formalismos que describan la evolución de una realización individual de un experimento. Un ejemplo de esto podría ser un sistema sujeto a un mecanismo de detección. Desde décadas, debido al avance en la manipulación de sistemas individuales, por ejemplo de átomos y la detección de sus estados, es posible, además de relevante, considerar el resultado de mediciones en realizaciones individuales de un experimento. Estos formalismos pueden generalmente ser usados para recuperar los resultados del usual decaimiento exponencial, al considerar que el mismo emerge como resultado de considerar ensambles de realizaciones individuales de un mismo experimento.

Hay una variedad de métodos para describir la evolución de un sistema abierto que se basan en considerar al ambiente como un aparato de medición actúa sobre el estado del sistema. Según el tipo de medición realizada por el ambiente, se generan distintos *unravellings* o descomposiciones de la ecuación maestra, en los cuales la evolución de la matriz densidad se obtiene mediante la evolución estocástica de un ensamble de estados puros. Así, el formalismo de trayectorias cuánticas es una clase de métodos.

En el caso particular en el cual el ambiente realiza un proceso de detección de fotones, se obtiene el llamado formalismo de *quantum jumps*. La dinámica en un proceso de *saltos cuánticos* es una evolución determinista a trozos, interrumpida por una evolución estocástica considerada instantánea y dada por los *saltos* descritos por los operadores de Lindblad. Por el contrario, se podría elegir un proceso de medición distinto, por ejemplo un proceso de detección sobre las cuadraturas del campo (*heterodyne detection*), obteniéndose así el formalismo de *quantum state diffusion* [198]. El mismo se obtuvo originalmente en el contexto de estudios sobre el colapso de la función de onda [217], y fue luego utilizado para describir la evolución de sistemas cuánticos abiertos [218]. En este caso, la evolución del sistema en el espacio de Hilbert está sujeta continuamente a procesos estocásticos que actúan conjuntamente con la dinámica unitaria, en clara semejanza con un proceso estocástico clásico.

El resultado de la evolución mediante cualquiera de estos métodos es independiente del *unravelling* elegido para evolucionar el ensamble de estados puros [187]. Esto está en claro contraste con otros formalismos similares que consideran restricciones adicionales sobre la dinámica, como por ejemplo el método de trayectorias Gaussianas, donde el *unravelling* elegido afecta el resultado [187, 199].

La principal ventaja de utilizar este enfoque para estudiar la dinámica de un sistema se encuentra en la reducción de las dimensiones del problema: Para un sistema descrito en un espacio de Hilbert de dimensión D , se reduce el problema de tener que resolver la dinámica de la matriz densidad en un espacio de Liouville de dimensión D^2 , a resolver la dinámica de sistemas de dimensión D . Sin embargo, la dificultad se transfiere a tener que simular la dinámica de un ensamble de estas trayectorias en dimensión D . Por otra parte, más allá de su utilidad práctica en simulaciones numéricas, el estudio de las trayectorias cuánticas posee interés en si mismo para describir una variedad de fenómenos como por ejemplo transiciones de fase inducidas por medición [219], *dissipative freezing* [174, 176, 220], o el estudio de termodinámica de las trayectorias [221, 222]. A continuación se describe básicamente el desarrollo del algoritmo. La ecuación de Lindblad

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_k \gamma_k \left[L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho\} \right] \quad (\text{A.7})$$

puede reescribirse en términos de un Hamiltoniano efectivo no hermítico como

$$\dot{\rho} = -i \left(H_{\text{eff}} \rho - \rho H_{\text{eff}}^\dagger \right) + \sum_m c_m \rho c_m^\dagger \quad (\text{A.8})$$

donde los operadores $c_m = \sqrt{\gamma_m} L_m$ y

$$H_{\text{eff}} = H - \frac{i}{2} \sum_m c_m^\dagger c_m \quad (\text{A.9})$$

Esto sugiere la idea comentada anteriormente:

- ▷ Entre eventos de detección, el sistema evoluciona según

$$\dot{\psi} = -iH_{\text{eff}}\psi \quad (\text{A.10})$$

- ▷ Cuando ocurre una detección el sistema evoluciona según

$$\psi = \frac{c_m \psi(t)}{\|c_m \psi(t)\|} \quad (\text{A.11})$$

con probabilidad $\delta p_m = dt \langle \psi(t) | c_m^\dagger c_m | \psi(t) \rangle$. A partir de esto pueden pensarse en distintos algoritmos con diferentes técnicas y órdenes de convergencia. Por ejemplo, un algoritmo de orden 1 $\mathcal{O}(dt)$ puede pensarse como:

1. Busco un estado candidato $\phi(t + dt)$, bajo la evolución del Hamiltoniano efectivo:

$$|\phi(t + dt)\rangle = e^{-iH_{\text{eff}}dt} |\psi(t)\rangle \approx (1 - iH_{\text{eff}} dt) |\psi(t)\rangle \quad (\text{A.12})$$

2. Calculo la norma del estado candidato:

$$\|\phi(t + dt)\|^2 = 1 - \sum_m \delta p_m \equiv 1 - \delta p \quad (\text{A.13})$$

3. ▷ Con probabilidad $1 - \delta p$

$$\psi(t + dt) = \frac{\phi(t + dt)}{\sqrt{1 - \delta p}} \quad (\text{A.14})$$

- ▷ Con probabilidad δp

$$\psi(t + dt) = \frac{c_m \psi(t)}{\sqrt{\delta p_m / dt}} \quad (\text{A.15})$$

y m se elige con probabilidad $\pi_m = \delta p_m / \delta p$

También pueden describirse algoritmos de orden más alto en dt [223]:

1. Dado $r \in (0, 1)$ aleatorio, resolver para t_1 la ecuación

$$\|e^{-iH_{\text{eff}}t_1} \psi(t_0)\|^2 = r \quad (\text{A.16})$$

Esto da un estado antes del salto $\psi(t_1^-)$

2. Aplicar un salto c_m con probabilidad δp_m . El estado después del salto es

$$\psi(t_1^+) = \frac{c_m \psi(t_1^-)}{\|c_m \psi(t_1^-)\|} \quad (\text{A.17})$$

donde m se elige con probabilidad $\pi_m = \delta p_m / \delta p$

En este caso, el orden de este método está dado por el orden del método de integración utilizado para resolver el paso 2). Éste es el algoritmo utilizado en este trabajo, en combinación con el método de Cash-Karp [224] de paso variable de orden $\mathcal{O}(dt^4)$ para resolver la ec. A.16.

Estimación de las tasas de relajación basada en overlaps

En esta sección tratamos de describir otro enfoque para estimar las tasas de relajación. Basándonos en estudios previos de metaestabilidad [167, 172, 173], consideramos un modelo reducido, en el que suponemos que se describe la dinámica a tiempos largos, donde se asume que luego de un transitorio la misma ocurre principalmente dentro del conjunto de estados metaestables.

Esta dinámica metaestable surge, al igual que en su contraparte en sistemas estocásticos clásicos, de una separación en las escalas temporales características del generador de la dinámica, como fue detallado en [172]. En este mismo trabajo, se proporciona un método para obtener un modelo reducido para describir la dinámica en términos de estados metaestables que se construyen a partir de los modos lentos del generador de la dinámica (una tarea ampliamente estudiada actualmente en sistemas estocásticos clásicos [192, 212, 213, 225]). Esto por supuesto limita este método a sistemas en los cuales la obtención del espectro del generador es factible. Bajo la evolución temporal generada por \mathcal{L} , el estado del sistema puede escribirse como

$$\rho(t) = e^{t\mathcal{L}}\rho(0) = \sum_{k=1} e^{t\lambda_k} \text{Tr}[\rho(0)L_k] R_k \quad (\text{B.1})$$

donde se introdujo la descomposición espectral de \mathcal{L} : R_k y L_k son los autovectores por derecha e izquierda respectivamente, con sus correspondientes autovalores λ_k . Todos los autovalores λ_k tienen parte real negativa. Se asume que los autovalores están ordenados de tal forma que $\text{Re}(\lambda_k) > \text{Re}(\lambda_{k+1})$. Como fue comentado anteriormente, el comportamiento metaestable emerge si aparece una separación entre las escalas temporales dadas por \mathcal{L} , es decir existe M tal que $\text{Re}(\lambda_M) \gg \text{Re}(\lambda_{M+1})$. De esta forma una proyección sobre la variedad metaestable [167] tiene la forma

$$\rho(t) = e^{t\mathcal{L}}\rho(0) = \sum_{k=1}^M e^{t\lambda_k} \text{Tr}[\rho(0)L_k] R_k \quad (\text{B.2})$$

donde los coeficientes de la proyección están acotados por los máximos y mínimos autovalores de los autovectores por izquierda L_k .

Si consideramos que hay una separación del espectro de tal forma que $\lambda_2^R \gg \lambda_3^R$. En este caso, para tiempos largos, la evolución alcanza un régimen de metaestabilidad, donde la evolución ocurre principalmente dentro de una variedad metaestable. En este caso, se tiene que los estados metaestables se pueden escribir como

$$\rho_{\text{MS}} = R_1 + c_2 R_2 \quad (\text{B.3})$$

con $c_2 = \text{Tr}(L_2 \rho_0)$. En [172] se definen estados metaestables extremos $\{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2\}$, a partir de los cuales se puede derivar una dinámica efectiva para

$$\rho(t) = e^{t\mathcal{L}} \rho_0 \approx p_1(t) \tilde{\rho}_1 + p_2(t) \tilde{\rho}_2 \quad (\text{B.4})$$

la cual captura la dinámica del sistema en todo el régimen metaestable, y están definidos como

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1 &= R_1 + c_2^{\text{max}} R_2 \\ \tilde{\rho}_2 &= R_1 + c_2^{\text{min}} R_2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde c_2^{max} y c_2^{min} representan el mayor y menos autovalor de L_2 respectivamente. Y esta dinámica efectiva está descrita por el generador L_{eff} :

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = L_{\text{eff}} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ \Delta c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_2^{\text{max}} & -c_2^{\text{min}} \\ c_2^{\text{max}} & c_2^{\text{min}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Claramente, este procedimiento requiere de tener una descomposición espectral del generador, es decir, la solución del problema completo. En este caso, basados en la intuición de que los estados metaestables extremos se corresponden a los dos estados clásicamente estables obtenidos a medida que nos aproximamos al límite semiclásico (es decir que conocemos $\{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2\}$ mediante los métodos usados en este capítulo), tratamos de estimar este generador efectivo a través de:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = L_{\text{eff}} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Tr}(\tilde{\rho}_1 \mathcal{L} \tilde{\rho}_1) & \text{Tr}(\tilde{\rho}_1 \mathcal{L} \tilde{\rho}_2) \\ \text{Tr}(\tilde{\rho}_2 \mathcal{L} \tilde{\rho}_1) & \text{Tr}(\tilde{\rho}_2 \mathcal{L} \tilde{\rho}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Es decir que asumiendo que la evolución tiene la forma de ec. B.4, asumimos que podemos proyectar el generador sobre los estados $\tilde{\rho}_1$ y $\tilde{\rho}_2$ para aproximar el decaimiento al estado estacionario.

Los estados extremos metaestables son aproximadamente disjuntos, y a continuación describimos cual fue el procedimiento realizado para estimarlos. Por simplicidad, tomamos este conjunto como formado por combinaciones de estados Gaussianos. En particular, llamamos ρ_{\pm} a los estados con valor medio $q_{\text{ion}} = \pm \bar{x}$ y ρ_0 al que tiene $q_{\text{ion}} = 0$. Así, el subespacio par es el generado por las matrices densidad ρ_0 y $\rho_e = (\rho_+ + \rho_-)/2$. Notamos que estos estados incluyen a su vez los grados de libertad de la cavidad, pero los etiquetamos con la posición del ion por conveniencia. Cada uno de estos estados Gaussianos se describe a través de los primeros momentos y matriz de covarianza encontrados ajustando los resultados obtenidos a través de la evolución de FP a tiempos suficientemente largos como para alcanzar la convergencia al estado asintótico.

Dado que el operador de evolución tiene simetría de reflexión espacial en la coordenada del ion, el subespacio formado por los estados metaestables se desacopla en componentes pares e impares. Así, el subespacio par es el generado por las matrices densidad ρ_0 y

$\rho_e = (\rho_+ + \rho_-) / 2$. Por otro lado, el subespacio impar está dado por $\Delta = (\rho_+ - \rho_-) / 2$, el cual tiene traza 0 y por lo tanto no corresponde a un estado, pero es necesario para recuperar las soluciones semiclásicas que rompen la simetría.

La descripción de un estado Gaussiano de dos modos en términos de la distribución de Wigner está dada por [226]:

$$W(\vec{X}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{\det(\sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{X}-\vec{d})^t \sigma^{-1} (\vec{X}-\vec{d})} \quad (\text{B.8})$$

donde \vec{X} representa un vector con los operadores canónicos (o cuadraturas en el caso del campo), \vec{d} es el vector de primeros momentos y σ es la matriz de covarianza, dada por:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \langle \{X_i, X_j\} \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle \quad (\text{B.9})$$

El overlap entre estados puede ser calculado por medio de la integral [133]:

$$\text{Tr} [\rho_A \rho_B] = (2\pi)^2 \int W_A W_B d\vec{x} d\vec{p}. \quad (\text{B.10})$$

Y para el caso particular dos estados Gaussianos de N -modos puede ser calculado como [226]

$$\text{Tr} (\rho_1 \rho_2) = \frac{1}{\sqrt{\det(\sigma_1 + \sigma_2)}} e^{(\vec{d}_1 - \vec{d}_2)^t (\sigma_1 + \sigma_2)^{-1} (\vec{d}_1 - \vec{d}_2)} \quad (\text{B.11})$$

Así, necesitamos calcular los overlaps de la forma $\text{Tr} [\rho_k \mathcal{L} \rho_j]$. Estos llevan, en términos de la distribución de Wigner, a integrales en el espacio de fases de funciones Gaussianas. Como ya fue mencionado, la simetría del problema implica que algunos de estos overlaps deben ser iguales:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\rho_0 \mathcal{L} \rho_+] &= \text{Tr} [\rho_0 \mathcal{L} \rho_-] \\ \text{Tr} [\rho_+ \mathcal{L} \rho_0] &= \text{Tr} [\rho_- \mathcal{L} \rho_0] \\ \text{Tr} [\rho_+ \mathcal{L} \rho_-] &= \text{Tr} [\rho_- \mathcal{L} \rho_+] \\ \text{Tr} [\rho_+ \mathcal{L} \rho_+] &= \text{Tr} [\rho_- \mathcal{L} \rho_-] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

donde es importante tener en cuenta que \mathcal{L} no es hermítico y por lo tanto intercambiar índices a cada lado de \mathcal{L} da lugar a resultados distintos. Así de las 9 integrales, sólo hay 5 distintas.

Con esto, es posible diagonalizar el operador de evolución proyectado al subespacio de los ρ_j . Dado que, como fue comentado anteriormente, la solución simétrica se desacopla de la antisimétrica, podemos diagonalizar el sistema sólo en las componentes simétricas ρ_0 y ρ_e . Idealmente, esta matriz debería tener un autovalor aproximadamente cero, cuyo autovector por derecha asociado debería ser una aproximación al estado estacionario. El otro autovalor, con parte real negativa, debería corresponder a la tasa de decaimiento hacia el estado estacionario.

Primero, los estados ρ_0 y ρ_e no son puros, por lo que su norma no es 1. Definimos así, el operador

$$A_0 = \frac{\rho_0}{\sqrt{\text{Tr}[\rho_0^2]}} \quad (\text{B.13})$$

proporcional a ρ_0 y definido de tal forma que $\text{Tr}[A_0^2] = 1$. Elegimos otro operador que forma con este una base ortonormal respecto de la norma traza y puede ser escrito como:

$$A_e = \alpha \rho_e + \beta \rho_0 \quad (\text{B.14})$$

donde α y β son reales y pueden ser determinados mediante las condiciones $\text{Tr}[A_e^2] = 1$, $\text{Tr}[A_0 A_e] = 0$. Así ec. (B.7) queda dado por:

$$L_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \text{Tr}[A_0 \mathcal{L} A_0] & \text{Tr}[A_0 \mathcal{L} A_e] \\ \text{Tr}[A_e \mathcal{L} A_0] & \text{Tr}[A_e \mathcal{L} A_e] \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Es simple calcular la acción de este superoperador en los estados Gaussianos ρ_0 y ρ_{\pm} , de forma que, dentro de la TWA, los overlaps están dados por:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho_1 \mathcal{L} \rho_2) = (2\pi)^2 \int dx W_1 W_2 & \left(2\eta a_1 + \Delta_c (x_1 a_2 - x_2 a_1) - \omega (x_3 a_4 - x_4 a_3) \right. \\ & - U_0 \left(f(x_1 a_2 - x_2 a_1) + \frac{f'}{2} (x_1^2 + x_2^2 - 1) a_4 \right) \\ & + \kappa \left(2 - (x_1 a_1 + x_2 a_2) + \frac{1}{2} (x_1^2 - \nu_{11} + a_2^2 - \nu_{22}) \right) \\ & \left. + \Gamma (2 - (x_3 a_3 + x_4 a_4)) + \frac{\Gamma(2N+1)}{2} (a_3^2 - \nu_{33} + a_4^2 - \nu_{44}) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

donde se definieron los vectores $s = x - d_2$ y $a = \sigma_2^{-1} s$ en base a los primeros y segundos momentos del estado W_2 .

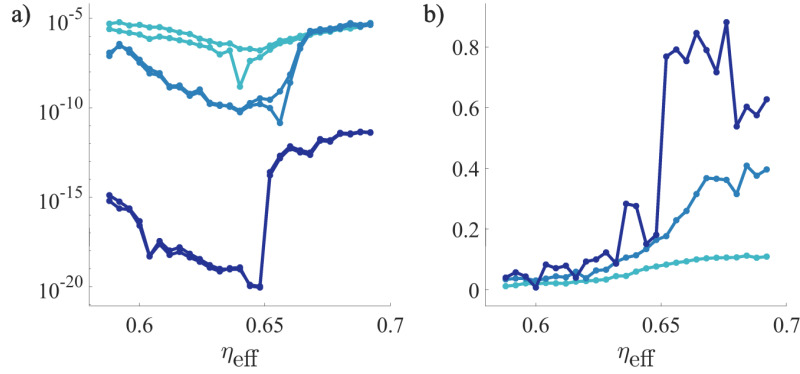


Fig. B.1.: Términos a) no diagonales y b) diagonales (en valor absoluto) de L_{eff} . Los parámetros utilizados son $\Gamma = 0$, $C = 2$, y $x_{\text{eq}}/x_{\omega} = 5, 9, 15$ con $\kappa/\omega = 0,032, 0,880, 1,730$ respectivamente. Valores más grandes de x_{eq} están mostrados en azul más oscuro.

Como puede verse de las Figs. B.1-b), los valores así obtenidos no representan las tasas de relajación del sistema. Una posible justificación de esto es que las aproximaciones Gaussianas que encontramos no se acercan lo suficiente a los verdaderos estados metaestables. En primer

lugar, la evolución FP de la que extraemos el conjunto de estados metaestables está truncada. En segundo lugar, los estados obtenidos a partir de la evolución FP no son verdaderos estados Gaussianos. Esto da lugar a términos diagonales muy grandes L_{jj} (mostrados en Fig. B.1-b)). Estos términos, que deberían ser muy pequeños si los estados son aproximadamente estables, son en realidad mayores que los términos de tuneleo (no diagonales) en muchos órdenes de magnitud. Peor aún, los términos diagonales resultaron ser positivos, por lo que no podrían asociarse a una pérdida de población debida a la salida de la configuración dada.

Encontrar una descripción precisa de un estado semiclásico metaestable no Gaussiano puede llegar a ser tan difícil como resolver el problema completo, por lo que recurrimos a una estrategia diferente: ignoramos los términos diagonales de esta matriz y consideramos sólo los términos no diagonales, para comprobar si $|L_{jk}|$ con $j \neq k$ podría proporcionar una estimación razonable de las tasas de equilibración entre configuraciones semiclásicas. Sin embargo, esto condujo a tasas de relajación excesivamente pequeñas, como se muestra en la Fig. B.1-a), varios órdenes de magnitud más pequeñas que las esperadas de la extrapolación del régimen donde la diagonalización numérica es factible. Esto sugiere una falla de este método, posiblemente porque las características no Gaussianas de los estados localizados son cruciales para la descripción del tuneleo entre configuraciones.

Transición optomecánica de un ion en el régimen de pocos fotones - Material suplementario

En este apéndice se muestran resultados complementarios al capítulo 5, correspondientes a distintas cooperatividades y distancias entre pozos de potencial óptico. En particular, en la Fig. C.1 se muestran resultados correspondientes a $C = 3$, $x_{\text{eq}} = 2x_\omega$, mientras que la Fig. C.2 corresponde a $C = 2$, $x_{\text{eq}} = 3x_\omega$. Los resultados son cualitativamente similares a los mostrados en el capítulo 5, con la única excepción de la Fig. C.1-b) donde se puede ver la escasa localización del ion a lo largo de toda la transición debido a la cercanía entre los pozos de potencial óptico.

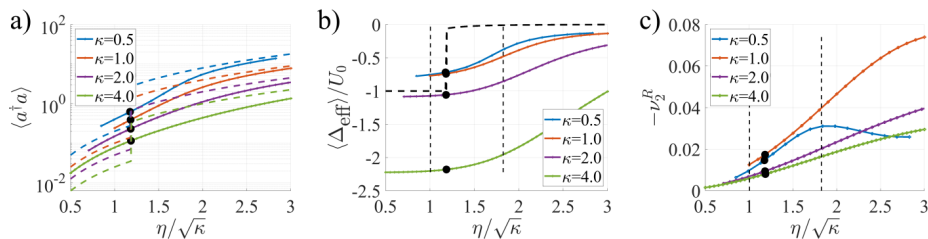


Fig. C.1.: a) Número medio de fotones (en escala semilogarítmica) y b) valor medio de la desintonía, en función de la intensidad de bombeo. Con líneas punteadas-rayadas se muestran los valores obtenidos mediante la aproximación semiclásica a orden más bajo según (2.56), sin tener en cuenta las fluctuaciones. El resto de las líneas de color muestran los valores medios obtenidos a través de la diagonalización del Liouvilliano. Las curvas corresponden a los valores de los parámetros: $C = 3$, $x_{\text{eq}}/x_\omega = 2$ (para la desintonía efectiva en b), las diferentes elecciones de κ dan el mismo resultado clásico. La región para la que se produce el comportamiento clásicamente biestable se muestra entre líneas negras discontinuas verticales, y los círculos indican el cambio en el mínimo clásico global.

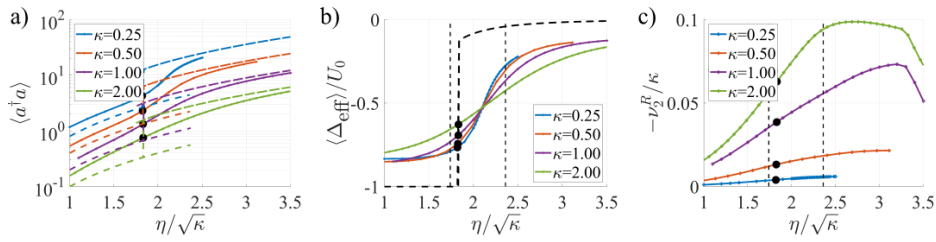


Fig. C.2.: a) Número medio de fotones (en escala semilogarítmica) y b) valor medio de la desintonía, en función de la intensidad de bombeo. Con líneas punteadas-rayadas se muestran los valores obtenidos mediante la aproximación semiclásica a orden más bajo según (2.56), sin tener en cuenta las fluctuaciones. El resto de las líneas de color muestran los valores medios obtenidos a través de la diagonalización del Liouvilliano. Las curvas corresponden a los valores de los parámetros: $C = 2$, $x_{\text{eq}}/x_{\omega} = 3$ (para la desintonía efectiva en b), las diferentes elecciones de κ dan el mismo resultado clásico). La región para la que se produce el comportamiento clásicamente biestable se muestra entre líneas negras discontinuas verticales, y los círculos indican el cambio en el mínimo clásico global.

