

## VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS ROTANTES UTILIZANDO LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE KANE Y EL MÉTODO DE LOS MODOS ASUMIDOS

C. N. Gómez<sup>a,c</sup>, S. Preidikman<sup>a,c</sup> y B. A. Roccia<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Estructuras. Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba. Av. Vélez Sarsfield 1611, CP 5000, Córdoba, Argentina.

<sup>b</sup>Departamento de Mecánica. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Río Cuarto. Campus Universitario, Ruta Nacional 36 Km. 601. CP 5800, Río Cuarto. Argentina.

<sup>c</sup>CONICET – Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Av. Rivadavia 19117 Buenos Aires, Argentina.

Email: [cynthi\\_ng@hotmail.com](mailto:cynthi_ng@hotmail.com)

### RESUMEN

*El diseño de rotores de helicópteros, brazos robóticos, turbinas eólicas y otros sistemas mecánicos que involucran movimientos giratorios, ha motivado numerosos estudios sobre los modos de vibrar de vigas sometidas a movimiento de rotación. En este trabajo, se derivan las ecuaciones de movimiento que gobiernan la dinámica de una viga que está empotrada en uno de sus extremos (viga en voladizo) a una base sometida a un movimiento de rotación con velocidad angular constante. Se considera un modelo de viga de Euler-Bernoulli con propiedades homogéneas. Para encontrar las ecuaciones de movimiento que gobiernan el desplazamiento axial y transversal (flap-wise y edge-wise) de la viga, se utiliza: i) las ecuaciones dinámicas de Kane y, ii) el método de Rayleigh-Ritz de los modos asumidos que permite discretizar espacialmente el sistema continuo.*

*Las simulaciones numéricas muestran que al aumentar la velocidad de giro, las frecuencias naturales de vibración aumentan; aunque existe una velocidad que anula la primera frecuencia natural del sistema acoplado axial-edgewise lo que indica el “pandeo” de la estructura. Es posible captar este fenómeno porque se considera el acoplamiento entre los movimientos edge-wise y axial. En tanto que, el movimiento flap-wise tiene un comportamiento más previsible donde las frecuencias naturales crecen monótonamente con la velocidad debido a la rigidización que introducen las fuerzas centrífugas.*

**Palabras clave:** Vigas rotantes. Ecuaciones de Kane. Modos asumidos. Rotores de helicópteros. Rotores de turbinas eólicas.

### INTRODUCCIÓN

Existen numerosos estudios relacionados con los modos y frecuencias naturales de vibrar de vigas con movimiento de rotación que se diferencian por el método empleado para la obtención de las ecuaciones de movimiento, el modelo de viga adoptado y/o el método utilizado para discretizar espacialmente las ecuaciones diferenciales de movimiento. Entre ellos se destacan los trabajos de Wright [1] y de Haering [2], entre otros.

Para obtener el conjunto de ecuaciones diferenciales lineales que gobiernan el movimiento axial y los movimientos transversales de la viga, en este trabajo se utiliza la metodología propuesta por Kane [3]. Esa metodología fue posteriormente utilizada en un trabajo, similar al aquí presentado, por Yoo [4].

### SISTEMA DINAMICO: VIGA ROTANTE

El sistema dinámico en estudio (**Figura 1**) consiste de una viga ( $B$ ) en voladizo de longitud  $L$  que se encuentra libre en un extremo y empotrada en el otro a una base ( $A$ ) que rota a velocidad angular constante,  ${}^N\omega^A$ , con respecto a un sistema de referencia Newtoniano ( $N$ ).

Se considera un modelo de viga de Euler-Bernoulli de gran esbeltez y con propiedades homogéneas en toda su longitud. Además, se supone que el eje elástico de la viga coincide con el eje baricéntrico.

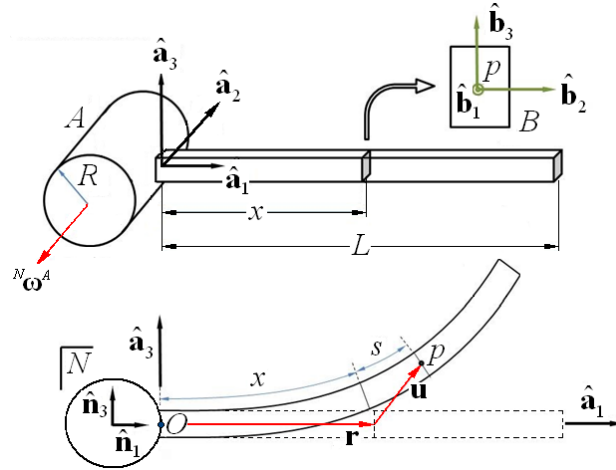


Figura 1: Viga en voladizo con su deformada

### Relaciones cinemáticas

Para describir la cinemática del sistema dinámico antes descrito se introducen tres ternas de vectores ortonormales y dextrógiros:  $\mathbf{N} = (\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3)$ ,  $\mathbf{A} = (\hat{\mathbf{a}}_1, \hat{\mathbf{a}}_2, \hat{\mathbf{a}}_3)$  y  $\mathbf{B} = (\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3)$ . La terna  $\mathbf{N}$  es una terna Newtoniana o inercial fija al suelo. La terna  $\mathbf{A}$  está fija al disco rígido  $A$  que rota mientras que la terna  $\mathbf{B}$  está fija a la sección de la viga ubicada a una distancia  $x$  del origen  $O$ , de manera que  $\hat{\mathbf{b}}_1$  es paralelo al eje baricéntrico de la viga rotante. La terna  $\mathbf{B}$  es paralela a la terna  $\mathbf{A}$  cuando la viga se encuentra en la configuración indeformada y  $\hat{\mathbf{b}}_2, \hat{\mathbf{b}}_3$  son ejes principales de inercia.

A partir de la magnitud de la velocidad angular ( $\Omega = \text{constante}$ ) del disco rígido  $A$ , se define el vector velocidad angular del marco de referencia  $\mathbf{A}$  respecto del marco de referencia Newtoniano  $\mathbf{N}$  como:

$${}^N\boldsymbol{\omega}^A = -\Omega \hat{\mathbf{a}}_2 \quad (1)$$

El vector posición  ${}^N\mathbf{r}^p$  del punto  $p$  ubicado en el centroide de una sección genérica de la viga  $B$  con respecto al marco de referencia Newtoniano, está dado por:

$${}^N\mathbf{r}^p = {}^N\mathbf{r}^O + \mathbf{r} + \mathbf{u} \quad (2)$$

donde:  ${}^N\mathbf{r}^O$  es el vector posición del punto  $p$  con respecto al sistema Newtoniano;  $\mathbf{r}$  es el vector posición de  $p$  en la posición indeformada, medido desde el punto  $O$  y  $\mathbf{u}$  es el vector que ubica el punto  $p$  en la posición deformada, a partir de su posición en la configuración indeformada. Las expresiones algebraicas para estos tres vectores geométricos son:

$${}^N\mathbf{r}^O \triangleq R\hat{\mathbf{a}}_1, \quad \mathbf{r} \triangleq x\hat{\mathbf{a}}_1, \quad \mathbf{u} \triangleq u_1\hat{\mathbf{a}}_1 + u_2\hat{\mathbf{a}}_2 + u_3\hat{\mathbf{a}}_3 \quad (3)$$

donde  $R$  es el radio de la base  $A$ ,  $x$  es la distancia desde  $O$  al punto  $p$ , medido a lo largo del eje indeformado de la viga, y  $u_l$  ( $l = 1, 2$  y  $3$ ), son las componentes del vector  $\mathbf{u}$  en las direcciones  $\hat{\mathbf{a}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_2$  y  $\hat{\mathbf{a}}_3$  respectivamente (**Figura 1**).

### Modos asumidos

Mediante el método de los modos asumidos se aproximan los campos de movimiento axial  $s(x, t)$ , y transversales,  $u_k(x, t)$ ,  $k = 2, 3$ , dados por:

$$s(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_{1i}(x) q_{1i}(t), \quad u_k(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_{ki}(x) q_{ki}(t), \quad k = 2, 3 \quad (4)$$

donde:  $\Phi_{1i}(x)$  son los modos axiales y  $\Phi_{ki}(x)$ , con  $k = 2, 3$ , son los modos transversales de una viga empotrada-libre no rotante. El índice  $k = 2$  denota el movimiento transversal flap-wise, en tanto que  $k = 3$  denota el movimiento transversal edge-wise.  $q_{1i}(t)$  y  $q_{ki}(t)$  son las coordenadas generalizadas asociadas a los modos  $\Phi_{1i}(x)$  y  $\Phi_{ki}(x)$ , respectivamente. El límite de la sumatoria,  $n$ , es el número de modos asumidos utilizados para la discretización espacial.

## Ecuaciones de Kane

Debido a que se buscan las ecuaciones de movimiento de una viga para pequeños desplazamientos  $s(x,t)$ ,  $u_2(x,t)$  y  $u_3(x,t)$ , se procede a la linealización de las magnitudes cinemáticas en las coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$  y sus derivadas temporales  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ . Cabe aclarar que las cantidades que han sido linealizadas se representan con una tilde sobre la cantidad en cuestión.

Las ecuaciones de movimiento linealizadas que gobiernan la dinámica del sistema en estudio, se formulan mediante las ecuaciones dinámicas de Kane:

$$\tilde{F}_i^* + \tilde{F}_i = 0, \quad (i=1, \dots, n) \quad (5)$$

donde:  $\tilde{F}_i^*$  es la  $i$ -ésima fuerza de inercia generalizada linealizada y  $\tilde{F}_i$  es la  $i$ -ésima fuerza activa generalizada linealizada del sistema. La fuerza de inercia generalizada linealizada  $\tilde{F}_i^*$  se computa como:

$$\tilde{F}_i^* = -\int_0^L \rho(x) {}^N \tilde{\mathbf{v}}_i^p \cdot {}^N \tilde{\mathbf{a}}^p dx, \quad (i=1, \dots, n) \quad (6)$$

donde:  $\rho(x)$  es la masa por unidad de longitud,  ${}^N \tilde{\mathbf{a}}^p$  es la aceleración linealizada del punto  $p$  con respecto al marco  $N$  y  ${}^N \tilde{\mathbf{v}}_i^p$  es la  $i$ -ésima velocidad parcial linealizada del mismo punto, ésta última se calcula al linealizar la  $i$ -ésima velocidad parcial del punto  $p$  con respecto al marco  $N$ ,  ${}^N \mathbf{v}_i^p$ , definida como:

$${}^N \mathbf{v}_i^p \triangleq \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} {}^N \mathbf{v}^p, \quad (i=1, \dots, n) \quad (7)$$

donde  ${}^N \mathbf{v}^p$  es la velocidad del punto  $p$  en el marco  $N$  y  $\dot{q}_i$  es la  $i$ -ésima velocidad generalizada.

La fuerza activa generalizada linealizada  $\tilde{F}_i$  se obtiene de la energía potencial elástica del sistema  $U$ :

$$\tilde{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (i=1, \dots, n) \quad (8)$$

La energía potencial  $U$  se puede escribir como:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^L E(x) A(x) \Phi'_{1i}(x) \Phi'_{1j}(x) dx q_{1i}(t) q_{1j}(t) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^L E(x) I_3(x) \Phi''_{2i}(x) \Phi''_{2j}(x) dx q_{2i}(t) q_{2j}(t) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^L E(x) I_2(x) \Phi''_{3i}(x) \Phi''_{3j}(x) dx q_{3i}(t) q_{3j}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

donde los términos del miembro derecho corresponden, respectivamente, a la energía potencial elástica debida a las deformaciones: axial, transversal flap-wise y transversal edge-wise. Las cantidades  $E(x)$  es el módulo de elasticidad y  $A(x)$  es el área transversal de la viga, respectivamente. Además  $I_k(x)$  es el segundo momento de área de una sección, en la dirección del vector unitario  $\hat{\mathbf{b}}_k$ ,  $k = 2$  y  $3$ .

## VIBRACIONES LIBRES DE UNA VIGA ROTANTE DE PROPIEDADES CONSTANTES

Si bien, el análisis puede cubrir vigas con propiedades variables en su longitud, este estudio considera una viga de sección y propiedades constantes, donde además  $I_3 = I_2$ ,

$$\rho(x) = \rho, \quad A(x) = A, \quad E(x) = E, \quad I_3(x) = I, \quad I_2(x) = I \quad (10)$$

eso permite comparar como la rotación de la viga modifica de manera diferente las frecuencias del movimiento flexional flap-wise (fuera del plano de rotación) y del movimiento flexional edge-wise (contenido en el plano de rotación). Notar que a velocidad nula ( $\Omega = 0$ ) las frecuencias naturales correspondientes a esos planos coinciden.

Aplicando las ecuaciones dinámicas de Kane para cada grupo de vectores de velocidades parciales generalizadas linealizadas  ${}^N \tilde{\mathbf{v}}_{ki}^p$ , con  $k = 1, 2$  y  $3$ , se obtienen las ecuaciones de movimiento linealizadas que gobiernan el comportamiento axial, flap-wise y edge-wise.

### Variables adimensionales

Para el análisis modal del sistema dinámico en estudio se introducen variables adimensionales; de este modo el análisis se independiza del tipo de material y de las características geométricas de la viga. Las variables adimensionales utilizadas se indican con un trazo:

$$\bar{t} \triangleq \frac{t}{T}, \quad \bar{x} \triangleq \frac{x}{L}, \quad \bar{q}_j \triangleq \frac{q_j}{L}, \quad \bar{R} \triangleq \frac{R}{L}, \quad \bar{\Omega} \triangleq \Omega T, \quad \bar{\alpha} \triangleq \left( \frac{AL^2}{I} \right)^{1/2}, \quad \text{siendo } T \triangleq \left( \frac{\rho L^4}{EI} \right)^{1/2} \quad (11)$$

En la Ecuación (11) se definen de izquierda a derecha seis variables adimensionales: el tiempo  $\bar{t}$ , la coordenada espacial  $\bar{x}$ , la coordenada generalizada  $\bar{q}_j$ , el radio  $\bar{R}$ , la velocidad angular  $\bar{\Omega}$  y la variable  $\bar{\alpha}$ . El tiempo característico  $T$  es una variable dimensional medida en segundos que se utiliza para adimensionalizar al tiempo y a la velocidad de rotación.

### Ecuaciones de movimiento

Al utilizar las variables adimensionales, las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio (vibraciones libres) pueden escribirse como:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left( \int_0^1 \Psi_{1i} \Psi_{1j} d\bar{x} \right) \ddot{\bar{q}}_{1j} - 2\bar{\Omega} \left( \int_0^1 \Psi_{1i} \Psi_{3j} d\bar{x} \right) \dot{\bar{q}}_{3j} + \left( \bar{\alpha}^2 \int_0^1 \Psi'_{1i} \Psi'_{1j} d\bar{x} - \bar{\Omega}^2 \int_0^1 \Psi_{1i} \Psi_{1j} d\bar{x} \right) \bar{q}_{1j} \right] = 0 \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left( \int_0^1 \Psi_{2i} \Psi_{2j} d\bar{x} \right) \ddot{\bar{q}}_{2j} + \left( \int_0^1 \Psi''_{3i} \Psi''_{3j} d\bar{x} + \bar{R} \bar{\Omega}^2 \int_0^1 (1-\bar{x}) \Psi'_{2i} \Psi'_{2j} d\bar{x} + \frac{1}{2} \bar{\Omega}^2 \int_0^1 (1-\bar{x}^2) \Psi'_{2i} \Psi'_{2j} d\bar{x} \right) \bar{q}_{2j} \right] = 0 \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left( \int_0^1 \Psi_{3i} \Psi_{3j} d\bar{x} \right) \ddot{\bar{q}}_{3j} + 2\bar{\Omega} \left( \int_0^1 \Psi_{3i} \Psi_{1j} d\bar{x} \right) \dot{\bar{q}}_{1j} + \left( \int_0^1 \Psi''_{3i} \Psi''_{3j} d\bar{x} + \bar{R} \bar{\Omega}^2 \int_0^1 (1-\bar{x}) \Psi'_{3i} \Psi'_{3j} d\bar{x} + \frac{1}{2} \bar{\Omega}^2 \int_0^1 (1-\bar{x}^2) \Psi'_{3i} \Psi'_{3j} d\bar{x} - \bar{\Omega}^2 \int_0^1 \Psi_{3i} \Psi_{3j} d\bar{x} \right) \bar{q}_{3j} \right] = 0 \quad (14)$$

donde  $\Psi_{kl}$ , ( $k=1,2,3$ ;  $l=i,j$ ) son los modos de vibrar en función de la variable adimensional  $\bar{x}$  que toman el mismo valor que los modos  $\Phi_{kl}$ , ( $k=1,2,3$ ;  $l=i,j$ ), estos últimos funciones de  $x$ . La tilde en los modos significa derivada espacial. Para simplificar la notación no se explicitó de qué variables depende cada cantidad. Además, debido a que los índices  $i$  y  $j$  van de 1 hasta  $n$ , se tienen  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas para cada una de las Ecuaciones (12), (13) y (14).

### Movimiento transversal flap-wise

La ecuación de movimiento (13) muestra que la vibración transversal flap-wise ( $\bar{q}_2$ ) está desacoplada de los movimientos axial ( $\bar{q}_1$ ) y edge-wise ( $\bar{q}_3$ ). Matricialmente esa ecuación se puede expresar como:

$$[\mathbf{M}^{22}] \{ \ddot{\bar{q}}_2 \} + [\mathbf{K}^{22}] \{ \bar{q}_2 \} = \{ \mathbf{0}_{n \times n} \} \quad (15)$$

donde:

$M_{ij}^{22} \triangleq \int_0^1 \Psi_{2i} \Psi_{2j} d\bar{x}$ , ( $i, j=1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la matriz de masa generalizada asociada a las coordenadas generalizadas  $\bar{q}_2$ .

$\mathbf{K}^{22} \triangleq \mathbf{K}^{B22} + \bar{\Omega}^2 \mathbf{K}^{G22}$ , es la matriz de rigidez generalizada asociada a las coordenadas generalizadas  $\bar{q}_2$ .

$K_{ij}^{B22} \triangleq \int_0^1 \Psi''_{2i} \Psi''_{2j} d\bar{x}$ , ( $i, j=1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la matriz de rigidez flexional de la viga.

$K_{ij}^{G22} \triangleq \int_0^1 \left[ \bar{R}(1-\bar{x}) + \frac{1}{2}(1-\bar{x}^2) \right] \Psi'_{2i} \Psi'_{2j} d\bar{x}$ , ( $i, j=1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la matriz de rigidez geométrica flap-wise.

Se define la frecuencia adimensional de vibrar  $\bar{\omega}_i$  en el movimiento flap-wise como:

$$\bar{\omega}_i = T \omega_i \quad (16)$$

donde  $\omega_i$  es la frecuencia natural dimensional.

### Movimientos acoplados: axial y transversal edge-wise

Las Ecuaciones (12) y (14) muestran que el movimiento axial y edge-wise, están acoplados, salvo cuando la viga no rota ( $\bar{\Omega} = 0$ ). Matricialmente, estas ecuaciones, se pueden representar como sigue:

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \hline \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{M}^{33} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_1 \\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_3 \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{n \times n} & -2\bar{\Omega}\mathbf{M}^{13} \\ \hline 2\bar{\Omega}\mathbf{M}^{31} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}_3 \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \hline \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{K}^{33} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{q}}_1 \\ \bar{\mathbf{q}}_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} \end{array} \right\} \quad (17)$$

donde :

$M_{ij}^{11} \triangleq \int_0^1 \Psi_{1i} \Psi_{1j} d\bar{x}$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la masa generalizada asociada a  $\bar{\mathbf{q}}_1$ .

$M_{ij}^{33} \triangleq \int_0^1 \Psi_{3i} \Psi_{3j} d\bar{x}$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la masa generalizada asociada a  $\bar{\mathbf{q}}_3$ .

$M_{ij}^{31} \triangleq \int_0^1 \Psi_{3i} \Psi_{1j} d\bar{x}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la masa generalizada por acoplamiento  $\mathbf{M}^{31}$ .

$M_{ij}^{13} \triangleq \int_0^1 \Psi_{1i} \Psi_{3j} d\bar{x}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la masa generalizada por acoplamiento  $\mathbf{M}^{13}$ .

$\mathbf{K}^{11} \triangleq \bar{\alpha}^2 \mathbf{K}^{S11} - \bar{\Omega}^2 \mathbf{K}^{G11}$ , es la matriz de rigidez generalizada asociada a las coordenadas  $\bar{\mathbf{q}}_1$ .

$K_{ij}^{S11} \triangleq \int_0^1 \Psi_{1i}' \Psi_{1j}' d\bar{x}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la rigidez axial asociada a  $\bar{\mathbf{q}}_1$ .

$K_{ij}^{G11} \triangleq \int_0^1 \Psi_{1i} \Psi_{1j} d\bar{x}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la rigidez geométrica axial asociada a  $\bar{\mathbf{q}}_1$ .

$\mathbf{K}^{33} \triangleq \mathbf{K}^{B33} + \bar{\Omega}^2 \mathbf{K}^{G33}$ , es la matriz de rigidez generalizada asociada a las coordenadas  $\bar{\mathbf{q}}_3$ .

$K_{ij}^{B33} \triangleq \int_0^1 \Psi_{3i}'' \Psi_{3j}'' d\bar{x}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la matriz de rigidez flexional asociada a  $\bar{\mathbf{q}}_3$ .

$K_{ij}^{G33} \triangleq \bar{R} \int_0^1 (1 - \bar{x}) \Psi_{3i}' \Psi_{3j}' d\bar{x} + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \bar{x}^2) \Psi_{3i}' \Psi_{3j}' d\bar{x} - \int_0^1 \Psi_{3i} \Psi_{3j} d\bar{x}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la matriz de rigidez geométrica asociada a las coordenadas  $\bar{\mathbf{q}}_3$ .

Cuando la viga no rota los modos están desacoplados. Cuando la viga está rotando el movimiento axial dado por  $\bar{\mathbf{q}}_1$  esta acoplado con el movimiento transversal edge-wise  $\bar{\mathbf{q}}_3$ . Se define la  $i$ -ésima frecuencia adimensional  $\bar{\omega}_i$  del movimiento acoplado para  $\bar{\Omega} > 0$  como:

$$\bar{\omega}_i = T \omega_i \quad (18)$$

donde  $\omega_i$  es la  $i$ -ésima frecuencia natural dimensional de vibración.

Para encontrar los modos de vibrar del sistema giroscópico se resuelve el problema de autovalores dado por la Ecuación (17). Hay que remarcar que la matriz que multiplica a las velocidades es antisimétrica y eso requiere un tratamiento numérico especial distinto al que se utiliza en el caso habitual donde las matrices son simétricas.

### Movimiento axial restringiendo los movimientos transversales

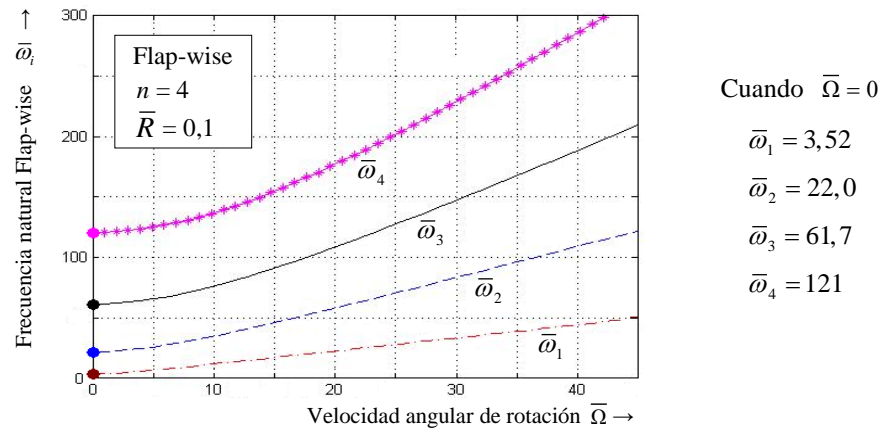
Para ganar sentido físico, se pueden calcular los modos del sistema rotante en la dirección axial, cuando se restringen artificialmente los movimientos transversales. Para ello se recurre a la ecuación (17) donde se hace  $\bar{\mathbf{q}}_3 = 0$  para no considerar el movimiento edge-wise. Luego, resolviendo el problema de autovalores se calculan las frecuencias naturales adimensionales en esa situación hipotética.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Sobre la base de la formulación anterior, se desarrolló una herramienta computacional que permite encontrar las características modales del sistema en estudio, en función de la velocidad adimensional de rotación de la base ( $\bar{\Omega}$ ), y del número de modos asumidos adoptados para la discretización espacial ( $n$ ). A continuación se presentan algunos resultados obtenidos con la herramienta computacional que ayudan a entender el fenómeno estudiado en este trabajo.

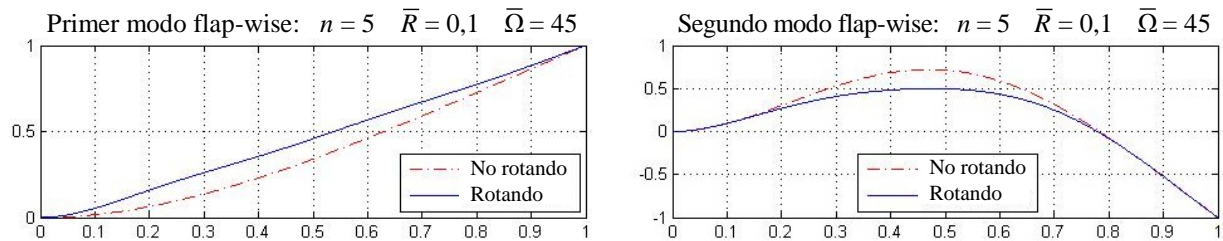
### Movimiento transversal flap-wise de la viga rotante

En la **Figura 2**, donde se graficó la variación de las primeras cuatro frecuencias naturales de vibración flap-wise, se puede observar que crecen monótonamente con la velocidad de rotación, lo que indica que hay una rigidización transversal de la viga con la velocidad angular de rotación de la base. Estos resultados se compararon con los presentados en [4] y se observó total concordancia.



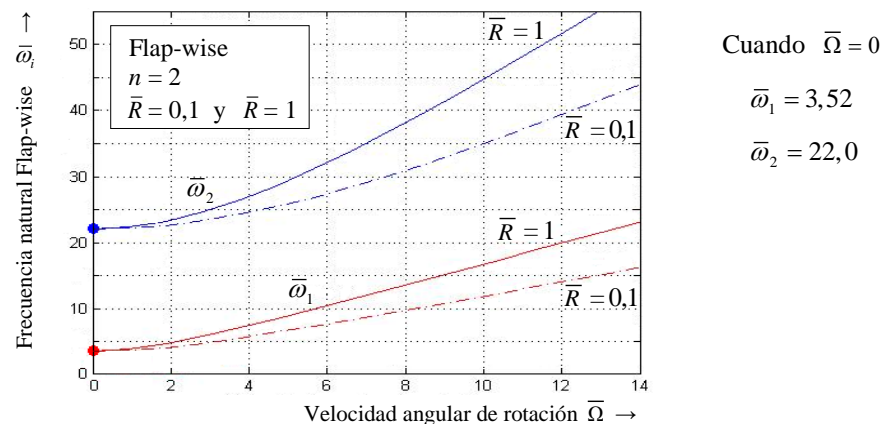
**Figura 2:** Frecuencias naturales flexionales flap-wise ( $\bar{\omega}_i$ ) vs. velocidad de rotación ( $\bar{\Omega}$ )

En la **Figura 3** se graficaron las formas modales de los primeros dos modos flap-wise de la viga rotando junto con las modales de una viga empotrada-libre no rotando. Se observan diferencias importantes.



**Figura 3:** 1° y 2° modo de vibrar flap-wise de una viga empotrada-libre rotando y no rotando

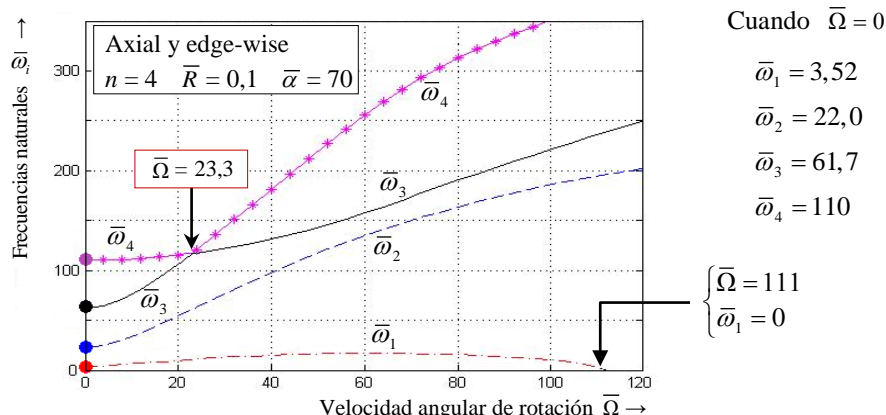
Las frecuencias naturales del movimiento flap-wise  $\bar{\omega}_i$  además de cambiar con la velocidad de rotación, lo hacen con el radio adimensional de la base  $\bar{R}$  como se muestra en la **Figura 4**.



**Figura 4:** 1° y 2° frecuencia natural flap-wise ( $\bar{\omega}_1$  y  $\bar{\omega}_2$ ) vs. velocidad de rotación ( $\bar{\Omega}$ )

### Movimientos acoplados: axial y transversal edge-wise de la viga rotante

En la **Figura 5** se graficaron las cuatro primeras frecuencias naturales adimensionales del sistema acoplado en función de la velocidad de rotación adimensional, se consideró  $n = 4$ ,  $\bar{R} = 0,1$  y  $\bar{\alpha} = 70$ . El valor asignado a  $\bar{\alpha}$  garantiza la vigencia del modelo de viga adoptado y se pueden ignorar los efectos del corte y de la inercia rotacional.



**Figura 5:** Evolución de las frecuencias naturales ( $\bar{\omega}_i$ ) de los modos acoplados al crecer la velocidad de rotación ( $\bar{\Omega}$ )

#### Caso desacoplado: $\bar{\Omega} = 0$

Si la viga no rota el sistema está desacoplado y las tres primeras frecuencias naturales ( $\bar{\omega}_1=3,5$ ;  $\bar{\omega}_2=22$  y  $\bar{\omega}_3=62$ ) corresponden a modos flexionales siendo  $\bar{q}_1 = 0$  y  $\bar{q}_3 \neq 0$  y coinciden con las frecuencias del caso flap-wise por tratarse de un viga donde  $I_3=I_2$ . La cuarta frecuencia ( $\bar{\omega}_4=110$ ) corresponde a un modo axial donde  $\bar{q}_1 \neq 0$  y  $\bar{q}_3 = 0$ . Esa frecuencia es menor que la cuarta frecuencia de flexión  $\bar{\omega}_4=121$ .

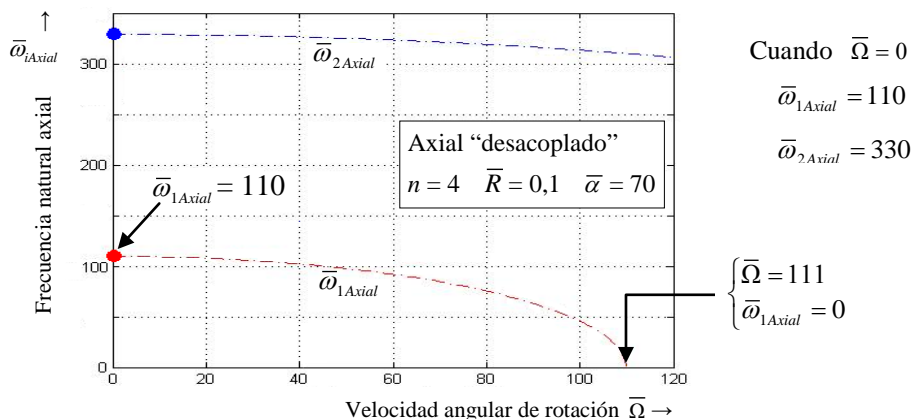
#### Caso acoplado: $\bar{\Omega} > 0$

Cuando la viga está rotando todos los modos tiene componente axial y flexional ( $\bar{q}_1 \neq 0$  y  $\bar{q}_3 \neq 0$ ) porque el sistema está acoplado. En la Figura 5 se observa que las frecuencias crecen cuando crece la velocidad, aunque no de la misma manera que lo hacen en el caso flap-wise. Además la primera frecuencia natural ( $\bar{\omega}_1$ ) se anula a una velocidad de giro elevada ( $\bar{\Omega} \approx 111$ ).

Es interesante seguir la evolución del modo que inicialmente era el tercer modo flexional desacoplado cuando  $\bar{\Omega} = 0$ ; su frecuencia crece con la velocidad de rotación más rápidamente que la frecuencia del modo 4. Para velocidades mayores a 23,3 el modo 3 pasa a ser el modo 4 porque su frecuencia es la mayor.

#### Movimiento axial “desacoplado” ( $\bar{q}_2 = 0$ ; $\bar{q}_3 = 0$ )

Para ganar sentido físico, en la **Figura 6** se graficó la variación de las dos primeras frecuencias naturales de vibración axial con la velocidad de rotación, cuando se restringen arbitrariamente los movimientos transversales haciendo:  $\bar{q}_2 = 0$  y  $\bar{q}_3 = 0$ . La primera frecuencia natural axial se anula para una elevada velocidad de rotación de la base, a esa velocidad ( $\bar{\Omega} \approx 111$ ), se anula la matriz de rigidez generalizada,  $\mathbf{K}^{11}$ , asociada a la coordenada generalizada,  $\bar{q}_1$  dada en la Ecuación (17):  $\mathbf{K}^{11} = \bar{\alpha}^2 \mathbf{K}^{S11} - \bar{\Omega}^2 \mathbf{K}^{G11}$ . Esto se debe a la presencia de la matriz geométrica y explica porque la primera frecuencia del sistema acoplado se anula para la frecuencia  $\bar{\Omega} \approx 111$  como se observa en la **Figura 5**.



**Figura 6:** Evolución de las frecuencias naturales axiales  $\bar{\omega}_{iAxial}$  con la velocidad de rotación  $\bar{\Omega}$

## CONCLUSIONES

En este trabajo se derivaron las ecuaciones de movimiento que gobiernan la dinámica de una viga en voladizo empotrada en uno de sus extremos a una base que está sometida a un movimiento de rotación con velocidad angular constante. Para ello:

- se adoptó un modelo de viga de Euler-Bernoulli con propiedades homogéneas y uniformes,
- se consideró el movimiento axial y los movimientos transversales (edge-wise y flap-wise) del sistema,
- se discretizó el sistema continuo mediante el método de los modos asumidos y
- se derivaron las ecuaciones de movimiento utilizando las ecuaciones dinámicas de Kane.

A partir de la formulación desarrollada se implementó una herramienta computacional que permite determinar las características modales de una viga rotante en función de la velocidad de rotación de la base y del número de modos asumidos. Los resultados obtenidos con la herramienta computacional en el caso de una viga rotatoria con propiedades constantes, donde además  $I_3=I_2$ , ayudan a entender el fenómeno estudiado y permiten establecer lo siguiente:

### Conclusiones referidas al movimiento desacoplado flap-wise

1. El movimiento flap-wise resulta desacoplado y sus frecuencias naturales crecen monotonamente con la velocidad de rotación, lo que indica que hay una rigidización transversal de la viga con la velocidad angular de rotación de la base (ver **Figura 2**). Los resultados obtenidos con la herramienta computacional se compararon con los presentados en [4] y se observó total concordancia.
2. Al comparar las formas modales obtenidas para los modos flap-wise de la viga en rotación con la forma de los modos de la viga no giratoria se observan diferencias importantes (ver **Figura 3**).
3. Se comprobó que, para una dada velocidad de giro, al aumentar el radio de la base, las frecuencias naturales flap-wise se incrementan. Esto es de esperarse, ya que la viga al estar más alejada del eje de rotación aumenta la aceleración centrífuga y esto aumenta la rigidez flexional. Cuando la velocidad de rotación es pequeña ese incremento es insignificante (ver **Figura 4**).

### Conclusiones referidas al movimiento acoplado axial y edge-wise

4. Las frecuencias naturales de los movimientos acoplados axial y edge-wise, varían con la velocidad de manera distinta al caso del movimiento flap-wise, aunque para  $\bar{\Omega} = 0$  las tres primeras frecuencias coinciden por ser una viga donde  $I_3=I_2$ . Se encontró que la primera frecuencia natural no sólo no crece monótonamente sino que, tiene un valor nulo para una cierta velocidad adimensional suficientemente elevada (ver **Figura 5**). Este fenómeno se denomina pando y se produce debido a que los efectos centrífugos logran anular la rigidez axial elástica de la viga. También se encontró que al crecer la velocidad angular, los modos y las frecuencias de los diferentes modos de vibración evolucionan de una manera diferente y que la gráfica de las frecuencias en algunos casos se “cruzan”.
5. Para ganar sentido físico se restringieron arbitrariamente los movimientos transversales y se estudió la variación de las primeras frecuencias naturales de vibración axial con la velocidad de rotación (ver **Figura 6**). Se encontró que las frecuencias naturales axiales decrecen, lentamente al principio y más rápido después, cuando crece la velocidad de rotación de la base, hasta que finalmente se alcanza una velocidad de giro lo suficientemente elevada para la cual se anula la matriz de rigidez generalizada asociada a la coordenada generalizada axial. Esta inestabilidad elástica se denomina en general “pando” en la literatura y se debe a la presencia de la matriz geométrica y explica porque la primera frecuencia del sistema acoplado se anula para esa frecuencia.

## REFERENCIAS

1. A.D. Wright, C.E. Smith, R.W. Thresher and J.L. Wang: Vibration modes of centrifugally stiffened beams, *ASME*, 1982, Vol. **49**(1) pp. 197-202.
2. W.J. Haering, R.R. Ryan and R.A. Scott: New formulation for flexible beams undergoing large overall plane motion, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1994, Vol. **17**(1), pp. 76-83.
3. T.R. Kane, R.R. Ryan and A.K. Banerjee: *Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base*, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1987, Vol. **10**, pp. 139-151.
4. H.H. Yoo and S. H. Shin: Vibrations analysis of rotating cantilever beams, *Journal of Sound and Vibration*, 1998, Vol. **212**(5), pp. 807-828.