

ANÁLISIS DE VIGAS DE SECCIÓN ARBITRARIA SOMETIDAS A TENSIONES DE CORTE CAUSADAS POR ESFUERZOS DE TORSIÓN Y CORTE: PARTE 1–FORMULACIÓN TEÓRICA

A. T. Brewer^a, C. N. Gómez^{a,b}, y S. Preidikman^{a,b}

^aDepartamento de Estructuras– Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, CP 5000, Córdoba, Argentina.

^bCONICET – Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Av. Rivadavia 1917, Buenos Aires, Argentina.

Email: alejtulbrewer@gmail.com

RESUMEN

En este trabajo se presenta, en primer lugar, la formulación de la teoría de Saint Venant aplicada a esfuerzos de torsión, según lo presentado en [6]. En segundo lugar, siguiendo al mismo autor, se describe la teoría presentada para determinar las tensiones de corte producidas por cargas transversales al eje longitudinal de la estructura. La formulación hace uso de la teoría de la elasticidad y se particulariza al caso de una viga en voladizo. No obstante, los resultados obtenidos pueden ser aplicados a secciones transversales de cualquier forma. Los resultados de ambas formulaciones permiten caracterizar los valores de las tensiones de corte, del momento de inercia polar para secciones de forma arbitraria y la posición del centro de corte.

Palabras clave: Vigas. Torsión. Tensiones de Corte por Corte. Elementos Finitos.

INTRODUCCIÓN

El diseño de vigas utilizando elementos unidimensionales formulados en el marco del Método de Elementos Finitos (MEF) requiere la caracterización de la rigidez de la sección, que depende del material, de las propiedades geométricas de la misma y del tipo de esfuerzo a que se encuentra sometida la estructura. Entre las propiedades geométricas de la sección se encuentran el área, los momentos de inercia, el momento de inercia polar y el área de corte y se corresponden con los esfuerzos normales, de flexión, torsión y corte respectivamente. Además, de la mano de estos objetivos se encuentra la determinación de estado tensional de la pieza.

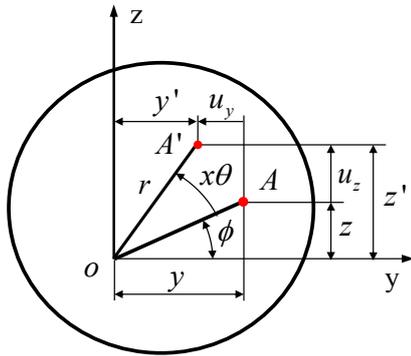
En estructuras aeronáuticas son de particular interés las secciones de pared delgada y las configuraciones de una o varias celdas. El enfoque utilizado en los primeros trabajos, con el objeto de resolver las cuestiones de secciones sometidas a torsión y corte, se relaciona con los conocidos como métodos de las fuerzas, [1, 2, 3, 4, 5]. La teoría se particulariza según la sección sea sólida, delgada abierta, de una celda, o de varias celdas. A su vez, se consideran separadamente los comportamientos bajo cargas de torsión y de corte. En este trabajo, en primer lugar, se muestra la formulación de la teoría de Saint Venant aplicada a esfuerzos de torsión, según lo presentado en [6]. En segundo lugar, siguiendo al mismo autor, se describe la teoría presentada para determinar las tensiones de corte producidas por cargas transversales al eje de la estructura. La formulación hace uso de la teoría de la elasticidad y se particulariza al caso de una viga en voladizo. No obstante, los resultados obtenidos pueden ser aplicados a secciones transversales de cualquier forma. Los resultados de ambas formulaciones permiten caracterizar los valores de las tensiones de corte, del momento de inercia polar para secciones de forma arbitraria y la posición del centro de corte. Conocidas las tensiones de corte, se pueden calcular los coeficientes para ponderar las áreas de corte, coeficientes que resultan necesarios si se quiere modelar vigas siguiendo la teoría de Timoshenko [7].

Este trabajo, es un paso preliminar hacia la cuantificación de las características seccionales que determinan las rigideces en vigas de una o más celdas construidas con materiales compuestos, lo que permitirá modelar estructuras de palas de aerogeneradores y alas de aviones. En estas estructuras, la configuración de apilado y la disposición de las fibras en las diferentes capas de material definen las deformaciones de flexión y torsión.

VIGAS EN TORSION

Cuando una sección está sometida a torsión, se puede asumir la hipótesis de Saint Venant [6], según la cual la sección de la viga sujeta a torsión pura, sin restricción al alabeo, rota alrededor del eje de giro de tal forma que si bien los puntos de dicha sección puede desplazarse en la dirección del eje x , su proyección sobre el plano original retiene su forma original. El eje de giro pasa por el centro de giro de la sección, punto que no sufre desplazamientos en las direcciones y, z . El giro es $x\theta$ donde x es la distancia desde una sección que no gira a la sección considerada y θ el ángulo de giro por unidad de longitud (constante). A partir de estas hipótesis, para pequeños giros, los desplazamientos de un punto A de la sección, ver fig. 1, resultan:

$$u_y = -xz\theta \quad ; \quad u_z = xy\theta \quad (1)$$



$$u_y = y' - y = r [\cos(\phi + x\theta) - \cos(\phi)]$$

$$u_z = z' - z = r [\sin(\phi + x\theta) - \sin(\phi)]$$

Figura 1. Desplazamientos de la sección sometida a torsión.

Para el desplazamiento de los puntos de la sección según la dirección x , asumiendo una sección de forma arbitraria, existe evidencia experimental que indica que el desplazamiento axial de cada sección a lo largo de la barra es prácticamente la misma y en consecuencia se adopta la siguiente expresión:

$$u_x = \theta\omega(y, z) \quad (2)$$

es decir que el desplazamiento es proporcional al giro por unidad de longitud θ y a la función $\omega(y, z)$ que es desconocida y recibe el nombre de función de alabeo. Bajo la condición de torsión pura, se asume que $\theta = cte$ y las componentes del tensor de deformaciones resultan

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_{xy} = \theta(-z + \omega_{,y}) \quad ; \quad \gamma_{xz} = \theta(y + \omega_{,z}) \quad (3)$$

donde: $\varepsilon_i = u_{i,j} = \partial u_i / \partial j$ con $(i = x, y, z)$ y $\gamma_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ con $(i, j = x, y, z \wedge i \neq j)$.

Las correspondientes tensiones se escriben como

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \quad \text{y} \quad \tau_{xy} = G\theta(-z + \omega_{,y}) \quad ; \quad \tau_{xz} = G\theta(y + \omega_{,z}) \quad (4)$$

Y las ecuaciones de equilibrio resultan,

$$\sigma_{x,x} + \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} + f_x = 0 \quad ; \quad \tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{zy,z} + f_y = 0 \quad ; \quad \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + f_z = 0 \quad (5)$$

Que conducen a (siendo las fuerzas por unidad de volumen $f_x = f_y = f_z = 0$)

$$\nabla^2 \omega(y, z) = 0 \quad ; \quad \tau_{xy,x} = 0 \quad \text{y} \quad \tau_{xz,x} = 0 \quad (6)$$

La primera ecuación establece que la función de alabeo satisface la ecuación de Laplace en todo punto de la sección y las dos últimas, indican que la distribución de las tensiones (τ_{xy}, τ_{xz}) es la misma en todas las secciones transversales.

Las condiciones de borde se establecen a partir de las siguientes relaciones entre el tensor de tensiones en la superficie y las componentes de las fuerzas por unidad de superficie (p_x, p_y, p_z) actuando en la misma:

$$n_x \sigma_x + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx} = p_x \quad ; \quad n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{zy} = p_y \quad ; \quad n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z = p_z \quad (7)$$

Reemplazando (4) en (7), y teniendo en cuenta que en la cara lateral $(n_x = 0 \text{ y } p_x = p_y = p_z = 0)$, las dos últimas ecuaciones (7) se satisfacen idénticamente, y de la primera resulta

$$n_y (\omega_{,y} - z) + n_z (\omega_{,z} + y) = 0 \quad (8)$$

Cuando se consideran las superficies asociadas con las caras anterior y posterior, $(n_x = \pm 1)$ y $(n_y = n_z = 0)$, de lo cual resulta en las ecuaciones (7)

$$\pm \tau_{xy} = p_y \quad \text{y} \quad \pm \tau_{xz} = p_z \quad (9)$$

Es decir que las fuerzas por unidad de superficie que generan la torsión tienen la misma distribución que las tensiones en todas las secciones. En consecuencia se debe satisfacer

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = G\theta \int_A [(\omega_{,z} + y)y - (\omega_{,y} - z)z] dA = GJ\theta \quad (10)$$

de la que se desprende que

$$J = \int_A [(\omega_{,z} + y)y - (\omega_{,y} - z)z] dA \quad (11)$$

Las tensiones se calculan a partir de las ecuaciones (4) y (10)

$$\tau_{xy} = M_x (\omega_{,y} - z) / J \quad ; \quad \tau_{xz} = M_x (\omega_{,z} + y) / J \quad (12)$$

VIGAS SOMETIDAS A ESFUERZOS DE CORTE Y FLEXION

En la figura 2 se muestra una viga prismática y homogénea en voladizo cuya sección ubicada en la posición x está sometida a esfuerzos de corte y flexión, [6]. Las fuerzas de corte actúan en el centro de corte. Los resultados que se presentan en esta sección, si bien deducidos a partir de esta estructura en particular, se pueden utilizar para secciones de cualquier forma, y vigas de cualquier carga y condición de borde.

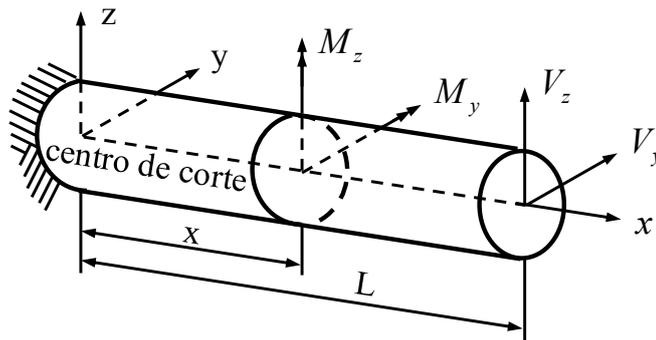


Figura 2. Viga sometida a esfuerzos de corte y flexión.

La expresión que permite encontrar las tensiones normales a partir de los momentos flectores aplicados, [4], es:

$$\sigma_x = \left[\frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - (I_{yz})^2} \right] z - \left[\frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - (I_{yz})^2} \right] y \quad (13)$$

Y en la cual las coordenadas y , z , como así también los momentos y productos de inercia se calculan respecto del centroide de la sección.

Análisis bajo la carga V_z

Cuando se considera solamente la carga V_z la anterior se reduce a

$$\sigma_x = \left[\frac{M_y I_z}{I_y I_z - (I_{yz})^2} \right] z - \left[\frac{M_y I_{yz}}{I_y I_z - (I_{yz})^2} \right] y = B(L-x)(I_{yz} y - I_z z) \quad (14)$$

donde, $B = V_z / (I_y I_z - I_{yz}^2)$. Las ecuaciones de equilibrio (5), asumiendo que no existen fuerzas por unidad de volumen y que las tensiones que garantizan el equilibrio son σ_x , τ_{xy} , y τ_{xz} resultan:

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy,x} = 0 \quad ; \quad \tau_{xz,x} = 0 \quad (15)$$

Reemplazando la ecuación (14) en la primera de las ecuaciones (15), se tiene:

$$\tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = B(I_{yz} y - I_z z) \quad (16)$$

Las dos últimas ecuaciones en (15) indican que la distribución de las tensiones de corte en las secciones no varían con la coordenada x , es decir que dichas tensiones sólo son funciones de las coordenadas y y z . Las ecuaciones constitutivas permiten escribir las deformaciones en términos de las tensiones, esto es:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \quad ; \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad ; \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (17)$$

Estas deformaciones satisfacen idénticamente las ecuaciones de compatibilidad, salvo las dos siguientes:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad \text{y} \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) \quad (18)$$

Reemplazando las ecuaciones (17) en las (18) y luego utilizando la (14), resultan

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\nu}{(1+\nu)} I_z B \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\nu}{(1+\nu)} I_{yz} B \quad (19)$$

El próximo paso es proponer que las tensiones τ_{xy} y τ_{xz} se expresen en término de una función $\Phi(y, z)$, con derivadas terceras continuas, esto es, $\Phi(y, z) \in C^3$, y elegida de tal modo que se satisfagan idénticamente las ecuaciones (19):

$$\tau_{xy} = \frac{V_z}{\Delta} (\Phi_{,y} - h_y) \quad \text{y} \quad \tau_{xz} = \frac{V_z}{\Delta} (\Phi_{,z} - h_z) \quad (20)$$

donde,

$$\Delta = 2(1+\nu) \left[I_y I_z - (I_{yz})^2 \right] \quad ; \quad h_y = \nu \left(I_z y z - I_{yz} \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \quad \text{y} \quad h_z = -\nu \left(I_{yz} y z + I_z \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \quad (21)$$

Entonces, reemplazando la (20) en (16) resulta la ecuación diferencial que gobierna a $\Phi(y, z)$:

$$\nabla^2 \Phi(y, z) = 2(I_{yz} y - I_z z) \quad (22)$$

La condición de borde es idéntica a la primera de las presentadas en la ecuación (7) en la cara lateral

$$n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx} = 0 \quad \text{ó} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi(y, z) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h} \quad \text{con} \quad \mathbf{h} = [h_y, h_z] \quad (23)$$

La solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales dada en (22) con las condiciones de borde dadas por (23), permite encontrar la relación entre la fuerza de corte y las tensiones de corte mostradas en (20). Si bien el resultado se obtuvo a partir de un caso particular, el mismo es completamente general para secciones homogéneas de forma arbitraria.

Análisis bajo la carga V_y

Para esta carga, los pasos son idénticos a los seguidos en el caso de la carga V_z y conducen a las siguientes relaciones entre la carga y la tensión

$$\tau_{xy} = \frac{V_y}{\Delta} (\Psi_{,y} - d_y) \quad \text{y} \quad \tau_{xz} = \frac{V_y}{\Delta} (\Psi_{,z} - d_z) \quad (24)$$

donde,

$$d_y = \nu \left(I_y \frac{y^2 - z^2}{2} - I_{yz} yz \right) \quad ; \quad d_z = \nu \left(I_y yz + I_{yz} \frac{y^2 - z^2}{2} \right) \quad (25)$$

La ecuación diferencial en la sección Ω , y las condiciones en el borde en Γ que gobiernan a la función $\Psi(y, z)$ tienen la forma:

$$\nabla^2 \Psi(y, z) = 2(I_{yz} z - I_y y) \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \quad \text{en } \Gamma \quad (26)$$

FORMA DÉBIL DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Torsión

La ecuación en residuos ponderados para la función de alabeo resulta

$$\int_{\Omega} W(y, z) \nabla^2 \omega(y, z) d\Omega = 0 \quad (27)$$

en la que W es una función de peso definida en el dominio Ω de tal modo de no anularse en los puntos del plano en que ω es desconocida. Aplicando el Teorema de Green, la (27) puede escribirse como

$$\int_{\Omega} W \nabla^2 \omega d\Omega = - \int_{\Omega} (W_{,y} \omega_{,y} + W_{,z} \omega_{,z}) d\Omega + \int_{\Gamma} W (\omega_{,y} n_y + \omega_{,z} n_z) d\Gamma = 0 \quad (28)$$

En donde Γ es el contorno del dominio Ω , y $\mathbf{n} = (n_y, n_z)$ es el vector normal al contorno. Teniendo en cuenta la condición de borde establecida en la ec. (8), se puede reescribir la integral de contorno en (28):

$$\int_{\Gamma} W (\omega_{,y} n_y + \omega_{,z} n_z) d\Gamma = \int_{\Gamma} W (z n_y - y n_z) d\Gamma = \int_{\Gamma} W \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div}(W \mathbf{v}) d\Omega \quad (29)$$

La ec. (29) permite expresar la integral sobre el contorno Γ como una integral sobre el dominio Ω . En la ec. (29) se definió el vector $\mathbf{v} = (z, -y)$, y se hizo uso del Teorema de la divergencia. Por último,

$$\int_{\Omega} \text{div}(W \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} [W \text{div}(\mathbf{v}) + \text{grad}(W) \cdot \mathbf{v}] d\Omega = \int_{\Omega} \text{grad}(W) \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (30)$$

ya que $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$.

Llevando la (30) a (29) y ésta a la (28) se obtiene la forma débil para la ecuación diferencial que gobierna el alabeo en un problema de torsión, incluyendo la condición de borde:

$$\int_{\Omega} (W_{,y} \omega_{,y} + W_{,z} \omega_{,z}) d\Omega - \int_{\Omega} (W_{,y} z - W_{,z} y) d\Omega = 0 \quad (31)$$

o en forma compacta

$$\int_{\Omega} \nabla W \cdot \nabla \omega d\Omega - \int_{\Omega} \nabla W \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0 \quad (32)$$

Corte: carga V_z

La ecuación en residuos ponderados para la ecuación diferencial que gobierna la distribución de las tensiones de corte cuando actúa una carga en la dirección z se escribe

$$\int_{\Omega} W(y, z) \left[\nabla^2 \Phi(y, z) - 2(I_{yz}y - I_z z) \right] d\Omega = 0 \quad (33)$$

El primer integrado, Teorema de Green mediante se escribe

$$\int_{\Omega} W \nabla^2 \Phi d\Omega = - \int_{\Omega} (W_{,y} \Phi_{,y} + W_{,z} \Phi_{,z}) d\Omega + \int_{\Gamma} W (\Phi_{,y} n_y + \Phi_{,z} n_z) d\Gamma = 0 \quad (34)$$

Utilizando las condiciones de borde (ec. (23)), la integral sobre el contorno queda

$$\int_{\Gamma} W (\Phi_{,y} n_y + \Phi_{,z} n_z) d\Gamma = \int_{\Gamma} W \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} W \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \text{div}(W\mathbf{h}) d\Omega \quad (35)$$

La última integral en la (35) se puede desarrollar

$$\int_{\Omega} \text{div}(W\mathbf{h}) d\Omega = \int_{\Omega} W \text{div}(\mathbf{h}) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla W \cdot \mathbf{h} d\Omega \quad (36)$$

Y la primer integral en (36)

$$\int_{\Omega} W \text{div}(\mathbf{h}) d\Omega = -2 W \nu (I_{yz}y - I_z z) \quad (37)$$

Reemplazando (37) en (36), (36) en (34) y ésta en (33) se obtiene

$$\int_{\Omega} \nabla W \cdot \nabla \Phi d\Omega - \int_{\Omega} \nabla W \cdot \mathbf{h} d\Omega + \int_{\Omega} W 2(1+\nu)(I_{yz}y - I_z z) d\Omega = 0 \quad (38)$$

Que es la forma débil de la ecuación diferencial que gobierna la distribución de las tensiones de corte para una carga actuando en la dirección del eje z , incluyendo las condiciones de contorno.

Corte: carga V_y

La ecuación en residuos ponderados para la ecuación diferencial que gobierna la distribución de las tensiones de corte cuando actúa una carga en la dirección y se escribe

$$\int_{\Omega} W(y, z) \left[\nabla^2 \Psi(y, z) - 2(I_{yz}z - I_z y) \right] d\Omega = 0 \quad (39)$$

Operando en forma similar, resulta la siguiente forma débil cuando la carga es V_y

$$\int_{\Omega} \nabla W \cdot \nabla \Psi d\Omega - \int_{\Omega} \nabla W \cdot \mathbf{d} d\Omega + \int_{\Omega} W 2(1+\nu)(I_{yz}z - I_z y) d\Omega = 0 \quad (40)$$

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan las formulaciones teóricas relacionadas, en primer lugar, con la obtención del estado tensional de vigas sometidas a esfuerzos de torsión según las hipótesis de desplazamientos planteadas por Saint Venant, según el trabajo de Pilkey [6]. En segundo lugar, siguiendo al mismo autor, se describe la teoría presentada para determinar las tensiones de corte producidas por cargas transversales al eje de la estructura. Posteriormente se obtienen las formas débiles de las ecuaciones diferenciales con el propósito de formular la aproximación por Elementos Finitos que se desarrolla en la segunda parte de este trabajo. Los resultados de ambas formulaciones permiten caracterizar los valores de las tensiones de corte, del momento de inercia polar para secciones de forma arbitraria y la posición del centro de corte.

REFERENCIAS

1. N. W. Murray: Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures, 1986, Clarendon Press Oxford.
2. A.P. Boresi and K. P. Chong: Elasticity in Engineering Mechanics, 1987, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
3. A. E. Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 1944, Dover, New York.
4. R. M. Rivello: Theory and Analysis of Flight Structures, 1969, McGraw-Hill, New York.
5. I. S. Sokolnikoff: Mathematical Theory of Elasticity, 1956, McGraw-Hill, New York.
6. W. D. Pilkey: Analysis and Design of Elastic Beams—Computational Methods, 2002, John Wiley & Sons, New York.
7. M. A. Bhatti: Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures, 2006, John Wiley & Sons, New York.