

## **ANÁLISIS DE VIBRACIONES DE VIGAS ROTANTES UTILIZANDO LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE KANE Y EL MÉTODO DE LOS MODOS ASUMIDOS**

Gómez, Cynthia\*, Preidikman, Sergio, Roccia, Bruno

*Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.  
Departamento de Estructuras. Av. Vélez Sarsfield 1611. CP 5000. Córdoba. Argentina.  
cynthi\_ng@hotmail.com*

*CONICET – Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Av. Rivadavia 1917.  
Buenos Aires. Argentina. spreidikman@efn.uncor.edu, bruno.roccia@gmail.com*

### **RESUMEN**

Numerosos trabajos para estudiar las características de vibraciones libres de vigas sometidas a movimientos de rotación fueron motivados por el diseño de rotores de helicópteros, brazos robóticos, y turbinas eólicas, entre otros. En este trabajo, se derivan las ecuaciones de movimiento de Kane que gobiernan la dinámica de una viga libre en un extremo y empotrada en el otro a una base sometida a un movimiento de rotación con velocidad angular constante. Se considera el movimiento axial y dos movimientos transversales (edge-wise y flap-wise) de la viga y se adopta un modelo de Euler-Bernoulli con propiedades homogéneas. Las ecuaciones de movimiento se discretizan espacialmente mediante el método de Rayleigh-Ritz de los modos asumidos.

Se desarrolló una herramienta computacional que permite calcular las frecuencias y modos naturales de vibrar del sistema giroscópico en función de la velocidad angular de rotación de la base y del número de modos asumidos utilizados en la discretización espacial.

Del análisis de la dinámica del sistema en estudio se concluye que existe un acoplamiento entre los movimientos edge-wise y axial, y debido al mismo es posible captar el fenómeno de pandeo (frecuencia natural nula) de la estructura a una cierta velocidad de rotación de la base. Las simulaciones numéricas llevadas a cabo han mostrado este fenómeno y, además, han puesto en evidencia la existencia de un cruce entre las frecuencias porque cada modo evoluciona con el aumento de velocidad angular de distinta manera. Además, se analizaron las características modales del movimiento transversal flap-wise que está desacoplado y se representó gráficamente el comportamiento de las frecuencias naturales del sistema que crecen con la velocidad de rotación de la base.

**Palabras Claves:** Vigas rotantes. Ecuaciones de Kane. Modos Asumidos. Rotores de helicópteros. Rotores de turbinas eólicas.

## 1. INTRODUCCIÓN

Existen numerosos estudios relacionados con los modos y frecuencias naturales de vibrar de vigas con movimiento de rotación que se diferencian por el método empleado para la obtención de las ecuaciones de movimiento, el modelo de viga adoptado y/o el método utilizado para discretizar espacialmente las ecuaciones diferenciales de movimiento. Entre ellos se destacan los trabajos de Wright y colaboradores (1982) y de Haering y colaboradores (1994), entre otros.

En este trabajo se utiliza la metodología propuesta por Kane para obtener el conjunto de ecuaciones diferenciales lineales que gobiernan el movimiento axial y los movimientos transversales de la viga. Esa metodología fue desarrollada y propuesta por Kane y colaboradores (1987) y posteriormente utilizada en un trabajo, similar al aquí presentado, por Yoo y Shin (1998).

## 2. EL SISTEMA DINÁMICO

El sistema dinámico a estudiar (Figura 1) consiste en una viga ( $B$ ) en voladizo de longitud  $L$  que se encuentra libre en un extremo y empotrada en el otro a una base ( $A$ ) que rota a velocidad angular constante,  ${}^N\boldsymbol{\omega}^A$ , con respecto a un sistema de referencia Newtoniano ( $\mathbf{N}$ ).

Se considera un modelo de viga de Euler–Bernoulli de gran esbeltez. Además, se supone que el eje elástico de la viga coincide con el eje baricéntrico de la misma.

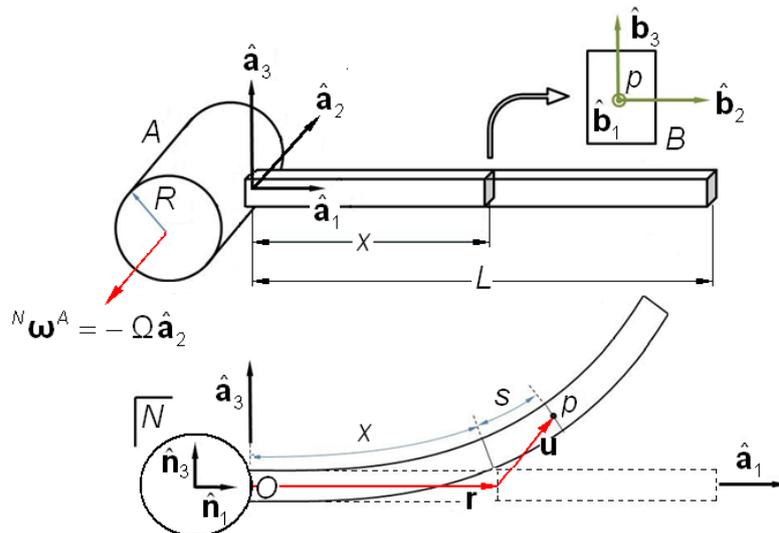


Figura 1: Viga en voladizo con su deformada

## 3. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

### 3.1. Relaciones cinemáticas

Para describir la cinemática del sistema dinámico antes descrito se introducen tres ternas de vectores ortonormales y dextrógiros:  $\mathbf{N} = (\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3)$ ,  $\mathbf{A} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$  y  $\mathbf{B} = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$ . La terna  $\mathbf{N}$  es una terna Newtoniana o inercial fija al suelo. La terna  $\mathbf{A}$  está fija al disco rígido  $A$  y la terna  $\mathbf{B}$  es paralela a la terna  $\mathbf{A}$  cuando la viga se encuentra en la configuración indeformada. La terna  $\mathbf{B}$  está fija a la sección genérica de la viga ubicada a una distancia  $x$  del origen  $O$ , de manera que  $\hat{b}_1$  es paralelo al eje baricéntrico de  $B$  y que  $(\hat{b}_2, \hat{b}_3)$  son ejes principales de inercia.

Se define el vector velocidad angular del marco de referencia  $\mathbf{A}$  respecto del marco de referencia Newtoniano  $\mathbf{N}$  como:

$${}^N\boldsymbol{\omega}^A = -\Omega \hat{a}_2 \quad (1)$$

donde  $\Omega$  es la magnitud de la velocidad angular (constante) de la base (disco rígido  $A$  de radio  $R$ ).

El vector posición  ${}^N\mathbf{r}^p$  del punto  $p$  ubicado en el centroide de una sección genérica de la viga  $B$  con respecto al marco de referencia Newtoniano, está dado por:

$${}^N\mathbf{r}^p = {}^N\mathbf{r}^O + \mathbf{r} + \mathbf{u} \quad (2)$$

donde:  ${}^N\mathbf{r}^O$  es el vector posición del punto  $O$  con respecto a un sistema Newtoniano;  $\mathbf{r}$  es el vector posición de  $p$ , en la posición indeformada, medida desde el punto  $O$  y  $\mathbf{u}$  es el vector que ubica el punto  $p$  en la posición deformada, a partir de su posición en la configuración indeformada. Las expresiones algebraicas para estos tres vectores geométricos son:

$${}^N\mathbf{r}^O \triangleq R\hat{\mathbf{a}}_1, \quad \mathbf{r} \triangleq x\hat{\mathbf{a}}_1, \quad \mathbf{u} \triangleq u_1\hat{\mathbf{a}}_1 + u_2\hat{\mathbf{a}}_2 + u_3\hat{\mathbf{a}}_3 \quad (3)$$

donde  $x$  es la distancia desde  $O$  al punto  $p$ , medido a lo largo del eje indeformado de la viga, y  $u_i$  ( $i=1,2$  y  $3$ ), son las componentes del vector  $\mathbf{u}$  en los versores  $\hat{\mathbf{a}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_2$  y  $\hat{\mathbf{a}}_3$  respectivamente (Figura 1).

Teniendo en cuenta las Ecuaciones (2) y (3), se puede calcular el vector velocidad del punto  $p$  con respecto al sistema Newtoniano  $N$ :

$${}^N\mathbf{v}^p = \frac{{}^N d}{dt} {}^N\mathbf{r}^p = (\dot{u}_1 - \Omega\dot{u}_3)\hat{\mathbf{a}}_1 + \dot{u}_2\hat{\mathbf{a}}_2 + [\Omega(R+x+u_1) + \dot{u}_3]\hat{\mathbf{a}}_3 \quad (4)$$

A continuación se define una nueva variable,  $\xi$ , que resulta útil para encontrar una expresión para la velocidad  $\dot{u}_1$ :

$$\xi \triangleq x + u_1 \quad (5)$$

Luego, observando la Figura 1 y teniendo en cuenta las Ecuaciones (3) y (5), la distancia desde  $O$  al punto  $p$ , se puede re-escribir como:

$$x + s(x,t) = \int_0^\xi \left\{ 1 + \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} u_2(\sigma,t) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} u_3(\sigma,t) \right]^2 \right\}^{1/2} d\sigma \quad (6)$$

donde  $s(x,t)$  representa el alargamiento de la viga medida desde la posición  $x$  en la dirección del eje elástico (Figura 1) y  $\sigma$  es la variable de integración en el intervalo  $[0, \xi]$ .

Por simplicidad, conviene también definir el Jacobiano  $J(\sigma,t)$  como:

$$J(\sigma,t) \triangleq 1 + \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} u_2(\sigma,t) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} u_3(\sigma,t) \right]^2 \quad (7)$$

Introduciendo en la Ecuación (6) la definición del Jacobiano y derivando posteriormente con respecto al tiempo resulta:

$$\dot{s}(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^\xi [J(\sigma,t)]^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} J(\sigma,t) d\sigma + \dot{\xi} [J(\sigma,t)]^{1/2} \quad (8)$$

Despejando  $\dot{\xi}$  de la Ecuación (8) se tiene:

$$\dot{\xi} = \frac{-\frac{1}{2} \int_0^\xi [J(\sigma,t)]^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} J(\sigma,t) d\sigma + \dot{s}(x,t)}{[J(\sigma,t)]^{1/2}} \quad (9)$$

Al derivar la Ecuación (5) con respecto al tiempo y teniendo en cuenta la Ecuación (9), se tiene:

$$\dot{\xi} = \dot{u}_1 \rightarrow \dot{u}_1 = \frac{-\frac{1}{2} \int_0^\xi [J(\sigma,t)]^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} J(\sigma,t) d\sigma + \dot{s}(x,t)}{[J(\sigma,t)]^{1/2}} \quad (10)$$

### 3.2. Aproximación de los campos de movimiento empleando modos asumidos

Con el objetivo de expresar las cantidades  $\dot{u}_1$ ,  $\dot{u}_2$  y  $\dot{u}_3$  en función de un número finito de coordenadas generalizadas, se aproximan los campos de movimiento axiales,  $s(x,t)$ , y transversales,  $u_k(x,t)$ ,  $k = 2,3$ , en términos de  $n$  formas modales asumidas:

$$s(x,t) = \sum_{i=1}^n \Phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (11)$$

$$u_k(x,t) = \sum_{i=1}^n \Phi_{ki}(x) q_{ki}(t) \quad k = 2,3 \quad (12)$$

donde:

$\Phi_{1i}(x)$  son los modos axiales y  $\Phi_{ki}(x)$ , con  $k = 2,3$ , son los modos transversales de una viga empotrada-libre. El índice  $k = 2$  denota el movimiento transversal flap-wise (fuera del plano de rotación), en tanto que  $k = 3$  denota el movimiento transversal edge-wise (contenido en el plano de rotación).

$q_{1i}(t)$  y  $q_{ki}(t)$  son las coordenadas generalizadas asociadas a los modos  $\Phi_{1i}(x)$  y  $\Phi_{ki}(x)$ , respectivamente. El límite de la sumatoria,  $n$ , es el número de modos asumidos utilizados para la discretización espacial.

Al derivar con respecto al tiempo la Ecuación (7) y teniendo en cuenta la Ecuaciones (11) y (12), resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\sigma,t) = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\Phi'_{2i}(\sigma) \Phi'_{2j}(\sigma) \dot{q}_{2i}(t) q_{2j}(t) + \Phi'_{3i}(\sigma) \Phi'_{3j}(\sigma) \dot{q}_{3i}(t) q_{3j}(t)] \quad (13)$$

donde  $\Phi'(\sigma)$  es la derivada del modo natural de vibrar con respecto a la variable  $\sigma$ .

Luego, teniendo en cuenta la Ecuación (10),  $\dot{u}_1$  se puede reescribir como:

$$\dot{u}_1 = [J(\xi,t)]^{-1/2} \sum_{i=1}^n \{ \Phi_{1i}(x) \dot{q}_{1i}(t) - \sum_{j=1}^n \int_0^\xi [J(\sigma,t)]^{-1/2} [\Phi'_{2i}(\sigma) \Phi'_{2j}(\sigma) \dot{q}_{2i}(t) q_{2j}(t) + \Phi'_{3i}(\sigma) \Phi'_{3j}(\sigma) \dot{q}_{3i}(t) q_{3j}(t)] d\sigma \} \quad (14)$$

Al tener en cuenta las Ecuaciones (11) (12) y(14), la velocidad  ${}^N \mathbf{v}^p$  se reescribe como:

$$\begin{aligned} {}^N \mathbf{v}^p = & \left\{ [J(\xi,t)]^{-1/2} \sum_{i=1}^n \{ \Phi_{1i}(x) \dot{q}_{1i}(t) - \sum_{j=1}^n \int_0^\xi [J(\sigma,t)]^{-1/2} [\Phi'_{2i}(\sigma) \Phi'_{2j}(\sigma) \dot{q}_{2i}(t) q_{2j}(t) + \right. \\ & \left. \Phi'_{3i}(\sigma) \Phi'_{3j}(\sigma) \dot{q}_{3i}(t) q_{3j}(t)] d\sigma - \Omega \sum_{i=1}^n \Phi_{3i}(x) q_{3i}(t) \right\} \hat{\mathbf{a}}_1 + \\ & \left\{ \sum_{i=1}^n \Phi_{2i}(x) \dot{q}_{2i}(t) \right\} \hat{\mathbf{a}}_2 + \left\{ \Omega(R + \xi) + \sum_{i=1}^n \Phi_{3i}(x) \dot{q}_{3i}(t) \right\} \hat{\mathbf{a}}_3 \end{aligned} \quad (15)$$

Para continuar con la formulación de las ecuaciones de movimiento es necesario introducir la velocidad parcial del punto  $p$  en el marco de referencia  $\mathbf{N}$ , denotada por el símbolo  ${}^N \mathbf{v}_i^p$  y cuya definición es:

$${}^N \mathbf{v}_i^p \triangleq \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} {}^N \mathbf{v}^p, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (16)$$

donde  $\dot{q}_i$  es la  $i$ -ésima velocidad generalizada.

Debido a que se tomaron tres conjuntos de coordenadas generalizadas, se tienen tres velocidades parciales correspondientes a cada conjunto de ellas. Por lo tanto:

$${}^N \mathbf{v}_{ki}^p \triangleq \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{ki}} {}^N \mathbf{v}^p, \quad (k = 1, 2, 3) \text{ y } (i = 1, \dots, n) \quad (17)$$

donde  $\dot{q}_{ki}$  es la  $i$ -ésima velocidad generalizada asociada al conjunto  $k$  de coordenadas.

Las velocidades parciales correspondientes al movimiento axial, flap-wise y edge-wise se obtienen derivando la Ecuación (15) con respecto a  $\dot{q}_{1i}$ ,  $\dot{q}_{2i}$  y  $\dot{q}_{3i}$  respectivamente:

$${}^N \mathbf{v}_{1i}^p = J(\xi, t)^{-1/2} \Phi_{1i}(x) \hat{\mathbf{a}}_1, \quad (18)$$

$${}^N \mathbf{v}_{2i}^p = \left\{ -J(\xi, t)^{-1/2} \sum_{j=1}^n \int_0^\xi [J(\sigma, t)]^{-1/2} [\Phi'_{2i}(\sigma) \Phi'_{2j}(\sigma) q_{2i}(t)] d\sigma \right\} \hat{\mathbf{a}}_1 + \Phi_{2i}(x) \hat{\mathbf{a}}_2 \quad (19)$$

$${}^N \mathbf{v}_{3i}^p = \left\{ -J(\xi, t)^{-1/2} \sum_{j=1}^n \int_0^\xi [J(\sigma, t)]^{-1/2} [\Phi'_{3i}(\sigma) \Phi'_{3j}(\sigma) q_{3i}(t)] d\sigma \right\} \hat{\mathbf{a}}_1 + \Phi_{3i}(x) \hat{\mathbf{a}}_3, \quad (20)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n$

### 3.3. Linealización de las ecuaciones de movimiento

Debido a que se buscan las ecuaciones de movimiento de una viga para pequeños desplazamientos  $s(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  y  $u_3(x, t)$  se procede a la linealización de las magnitudes cinemáticas en las variables  $q_1, \dots, q_n$ , y  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ .

En lo que continúa del análisis, las cantidades que han sido linealizadas se representan con una tilde sobre la cantidad en cuestión. El jacobiano  $J(x, t)$  linealizado es:

$$\tilde{J}(x, t) = 1 \quad (21)$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (21), la Ecuación (6) se puede escribir como:

$$x + s(x, t) = \xi \quad (22)$$

Linealizando ambos miembros de la Ecuación (22), se tiene:

$$x + \tilde{s}(x, t) = \tilde{\xi} \quad (23)$$

Luego, considerando las Ecuaciones (5) y (23), se obtiene:

$$\tilde{u}_1(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (24)$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (21) se pueden linealizar las Ecuaciones (18), (19) y (20), que resultan:

$${}^N \tilde{\mathbf{v}}_{1i}^p = \Phi_{1i}(x) \hat{\mathbf{a}}_1, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (25)$$

$${}^N \tilde{\mathbf{v}}_{2i}^p = \left\{ -\sum_{j=1}^n \int_0^\xi [\Phi'_{2i}(\sigma) \Phi'_{2j}(\sigma)] d\sigma q_{2i}(t) \right\} \hat{\mathbf{a}}_1 + \Phi_{2i}(x) \hat{\mathbf{a}}_2, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (26)$$

$${}^N \tilde{\mathbf{v}}_{3i}^p = \left\{ -\sum_{j=1}^n \int_0^\xi [\Phi'_{3i}(\sigma) \Phi'_{3j}(\sigma)] d\sigma q_{3i}(t) \right\} \hat{\mathbf{a}}_1 + \Phi_{3i}(x) \hat{\mathbf{a}}_3, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (27)$$

El vector aceleración del punto  $p$  con respecto al marco de referencia  $\mathbf{N}$ ,  ${}^N\mathbf{a}^p$  se obtiene derivando la Ecuación (15) con respecto al tiempo. Seguidamente se linealiza dicha expresión y se obtiene:

$${}^N\tilde{\mathbf{a}}^p = \left\{ \sum_{i=1}^n \Phi_{1i}(x) \ddot{q}_{1i}(t) - 2\Omega \sum_{i=1}^n \Phi_{3i}(x) \dot{q}_{3i}(t) - \Omega^2 [R+x] - \Omega^2 \sum_{i=1}^n \Phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \right\} \hat{\mathbf{a}}_1 + \sum_{i=1}^n \Phi_{2i}(x) \ddot{q}_{2i}(t) \hat{\mathbf{a}}_2 + \left\{ \sum_{i=1}^n \Phi_{3i}(x) \ddot{q}_{3i}(t) + 2\Omega \sum_{i=1}^n \Phi_{1i}(x) \dot{q}_{1i}(t) - \Omega^2 \sum_{i=1}^n \Phi_{3i}(x) q_{3i}(t) \right\} \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (28)$$

### 3.4. Ecuaciones de movimiento de Kane

Para encontrar la versión linealizada de las ecuaciones de movimiento que gobiernan la dinámica del sistema considerado en este trabajo se utilizaron las ecuaciones de Kane:

$$\tilde{F}_i^* + \tilde{F}_i = 0, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (29)$$

donde:  $\tilde{F}_i^*$  y  $\tilde{F}_i$  son respectivamente la  $i$ -ésima fuerza de inercia generalizada linealizada y la  $i$ -ésima fuerza activa generalizada linealizada del sistema. La fuerza de inercia generalizada linealizada  $\tilde{F}_i^*$  puede ser escrita como:

$$\tilde{F}_i^* = -\int_0^L \rho(x) {}^N\tilde{\mathbf{v}}_i^p \cdot {}^N\tilde{\mathbf{a}}^p dx, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (30)$$

donde:  $\rho(x)$  es la masa por unidad de longitud,  ${}^N\tilde{\mathbf{v}}_i^p$  es la  $i$ -ésima velocidad parcial linealizada del punto  $p$  con respecto al marco  $\mathbf{N}$  y  ${}^N\tilde{\mathbf{a}}^p$  es la aceleración linealizada del mismo punto  $p$ .

La fuerza activa generalizada linealizada  $\tilde{F}_i$  se expresa como:

$$\tilde{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (31)$$

donde  $U$  es la energía potencial elástica del sistema y  $q_i$  es la  $i$ -ésima coordenada generalizada. La energía potencial  $U$  se puede escribir como:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^L E(x) A(x) \Phi'_{1i}(x) \Phi'_{1j}(x) dx q_{1i}(t) q_{1j}(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^L E(x) I_3(x) \Phi''_{2i}(x) \Phi''_{2j}(x) dx q_{2i}(t) q_{2j}(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^L E(x) I_2(x) \Phi''_{3i}(x) \Phi''_{3j}(x) dx q_{3i}(t) q_{3j}(t) \quad (32)$$

donde los tres términos del miembro derecho corresponden, respectivamente, a la energía potencial elástica debida a la deformación axial, transversal flap-wise y transversal edge-wise. Las cantidades  $E(x)$  y  $A(x)$  representan el módulo de elasticidad y el área transversal de la viga, respectivamente. Además  $I_k(x)$  es el segundo momento de área de la sección respecto al eje principal de inercia  $\hat{\mathbf{b}}_k$ ,  $k = 2$  y  $3$ .

Aplicando las ecuaciones dinámicas de Kane para cada grupo de vectores velocidades parciales generalizadas se pueden formular las siguientes ecuaciones:

$$\tilde{F}_{1i}^* + \tilde{F}_{1i} = 0, \quad \tilde{F}_{2i}^* + \tilde{F}_{2i} = 0, \quad \tilde{F}_{3i}^* + \tilde{F}_{3i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (33)$$

Luego, las ecuaciones de movimiento linealizadas que gobiernan el comportamiento axial, flap-wise y edge-wise resultan, respectivamente:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left( \int_0^L \rho \Phi_{1i} \Phi_{1j} dx \right) \ddot{q}_{1j} - 2\Omega \left( \int_0^L \rho \Phi_{1i} \Phi_{3j} dx \right) \dot{q}_{3j} - \Omega^2 \left( \int_0^L \rho \Phi_{1i} \Phi_{1j} dx \right) q_{1j} + \left( \int_0^L EA \Phi'_{1i} \Phi'_{1j} dx \right) q_{1j} \right] = \Omega^2 \int_0^L (R+x) \rho \Phi_{1i} dx \quad (34)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left( \int_0^L \rho \Phi_{2i} \Phi_{2j} dx \right) \ddot{q}_{2j} + \left( \int_0^L EI_3 \Phi''_{2i} \Phi''_{2j} dx \right) q_{2j} + \Omega^2 \left\{ R \left( \int_0^L \rho (L-x) \Phi'_{2i} \Phi'_{2j} dx \right) q_{2j} + \left( \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \Phi'_{2i} \Phi'_{2j} dx \right) q_{2j} \right\} \right] = 0 \quad (35)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left( \int_0^L \rho \Phi_{3i} \Phi_{3j} dx \right) \ddot{q}_{3j} + 2\Omega \left( \int_0^L \rho \Phi_{3i} \Phi_{1j} dx \right) \dot{q}_{1j} - \Omega^2 \left( \int_0^L \rho \Phi_{3i} \Phi_{3j} dx \right) q_{3j} + \left( \int_0^L EI_2 \Phi''_{3i} \Phi''_{3j} dx \right) q_{3j} + \Omega^2 \left\{ R \left( \int_0^L \rho (L-x) \Phi'_{3i} \Phi'_{3j} dx \right) q_{3j} + \left( \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \Phi'_{3i} \Phi'_{3j} dx \right) q_{3j} \right\} \right] = 0 \quad (36)$$

donde  $\rho$  es la masa por unidad de longitud. Para simplificar las ecuaciones de movimiento no se explicitó de qué variables depende cada cantidad. Además, debido a que los índices  $i$  y  $j$  van de 1 hasta  $n$ , se tienen  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas para cada una de las Ecuaciones (34), (35) y (36).

#### 4. CARACTERÍSTICAS DE VIBRACIÓN LIBRE DE UNA VIGA DE PROPIEDADES CONSTANTES

Como caso de estudio se considera una viga de propiedades constantes donde  $I_3 = I_2$ . De esa manera se puede analizar y comparar como la rotación de la viga modifica a las frecuencias de los movimientos transversales: flap-wise (fuera del plano de rotación) y edge-wise (contenido en el plano de rotación).

$$\rho(x) = \rho, \quad A(x) = A, \quad E(x) = E, \quad I_3(x) = I, \quad I_2(x) = I \quad (37)$$

Para independizar el análisis del tipo de material y de las características geométricas de la viga, se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$\tau \triangleq \frac{t}{T}, \quad \xi \triangleq \frac{x}{L}, \quad \theta_j \triangleq \frac{q_j}{L}, \quad \delta \triangleq \frac{R}{L}, \quad \gamma \triangleq T\Omega, \quad \alpha \triangleq \left( \frac{AL^2}{I} \right)^{1/2} \quad \text{siendo} \quad T \triangleq \left( \frac{\rho L^4}{EI} \right)^{1/2} \quad (38)$$

En la Ecuación (38) se definen de izquierda a derecha 6 variables adimensionales: el tiempo  $\tau$ , la variable espacial  $\xi$ , la coordenada generalizada  $\theta_j$ , el radio  $\delta$ , la velocidad angular  $\gamma$  y la variable  $\alpha$ . El tiempo característico  $T$  es una variable dimensional medida en segundos que se utiliza para adimensionalizar al tiempo y a la velocidad de rotación.

Al utilizar las variables adimensionales, las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio (vibraciones libres) pueden escribirse como:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left( \int_0^1 \Psi_{1i} \Psi_{1j} d\xi \right) \ddot{\theta}_{1j} - 2\gamma \left( \int_0^1 \Psi_{1i} \Psi_{3j} d\xi \right) \dot{\theta}_{3j} - \gamma^2 \left( \int_0^1 \Psi_{1i} \Psi_{1j} d\xi \right) \theta_{1j} + \alpha^2 \left( \int_0^1 \Psi'_{1i} \Psi'_{1j} d\xi \right) \theta_{1j} \right] = 0 \quad (39)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left( \int_0^1 \Psi_{2i} \Psi_{2j} d\xi \right) \ddot{\theta}_{2j} + \left( \int_0^1 \Psi''_{3i} \Psi''_{3j} d\xi \right) \theta_{2j} + \left( \delta \gamma^2 \int_0^1 (1-\xi) \Psi'_{2i} \Psi'_{2j} d\xi + \frac{\gamma^2}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \Psi'_{2i} \Psi'_{2j} d\xi \right) \theta_{2j} \right] = 0 \quad (40)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left( \int_0^1 \Psi_{3i} \Psi_{3j} d\xi \right) \ddot{\theta}_{3j} + 2\gamma \left( \int_0^1 \Psi_{3i} \Psi_{1j} d\xi \right) \dot{\theta}_{1j} - \gamma^2 \left( \int_0^1 \Psi_{3i} \Psi_{3j} d\xi \right) \theta_{3j} + \left( \int_0^1 \Psi''_{3i} \Psi''_{3j} d\xi + \delta \gamma^2 \int_0^1 (1-\xi) \Psi'_{3i} \Psi'_{3j} d\xi + \frac{\gamma^2}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \Psi'_{3i} \Psi'_{3j} d\xi \right) \theta_{3j} \right] = 0 \quad (41)$$

donde  $\Psi_{kl}$ , ( $k = 1, 2, 3$ ;  $l = i, j$ ) son los modos de vibrar en función de la variable adimensional  $\xi$  y toman el mismo valor que los modos  $\Phi_{kl}$ , ( $k = 1, 2, 3$ ;  $l = i, j$ ), estos últimos funciones de  $x$ .

Utilizando la formulación que precede se desarrolló una herramienta computacional que permite encontrar las características modales del sistema en estudio, en función de la velocidad adimensional  $\gamma$  de rotación de la base, y del número  $n$  de modos asumidos adoptados para la discretización espacial. Los resultados se muestran a continuación.

#### 4.1. Movimiento desacoplado flap-wise

La ecuación de movimiento que gobierna la vibración libre transversal flap-wise se encuentra desacoplada de los movimientos (axial y edge-wise). Matricialmente, la Ecuación (40) se puede expresar como:

$$[\mathbf{M}^{22}] \{\ddot{\boldsymbol{\theta}}_2\} + [\mathbf{K}^{22}] \{\boldsymbol{\theta}_2\} = \{\mathbf{0}_{n \times n}\} \quad (42)$$

donde:

$M_{ij}^{22} \triangleq \int_0^1 \Psi_{2i} \Psi_{2j} d\xi$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la matriz de masa generalizada asociada a las coordenadas generalizadas  $\boldsymbol{\theta}_2$ .

$\mathbf{K}^{22} \triangleq \mathbf{K}^{B22} + \gamma^2 \mathbf{K}^{G22}$ , es la matriz de rigidez generalizada flapwise asociada a las coordenadas generalizadas  $\boldsymbol{\theta}_2$ .

$K_{ij}^{B22} \triangleq \int_0^1 \Psi_{2i}'' \Psi_{2j}'' d\xi$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la matriz de rigidez flexional flap-wise de la viga.

$K_{ij}^{G22} \triangleq \delta \int_0^1 (1-\xi) \Psi_{2i}' \Psi_{2j}' d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \Psi_{2i}' \Psi_{2j}' d\xi$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la matriz de rigidez geométrica flap-wise.

Se define la frecuencia adimensional de vibrar  $\omega_i$  en el movimiento flap-wise como:

$$\omega_i = T \beta_i \quad (43)$$

donde  $\beta_i$  es la  $i$ -ésima frecuencia natural dimensional de vibrar.

La variación de la frecuencia natural de vibrar adimensional  $\omega_i$  con la velocidad de rotación adimensional  $\gamma$  se ha graficado en la Figura 2.

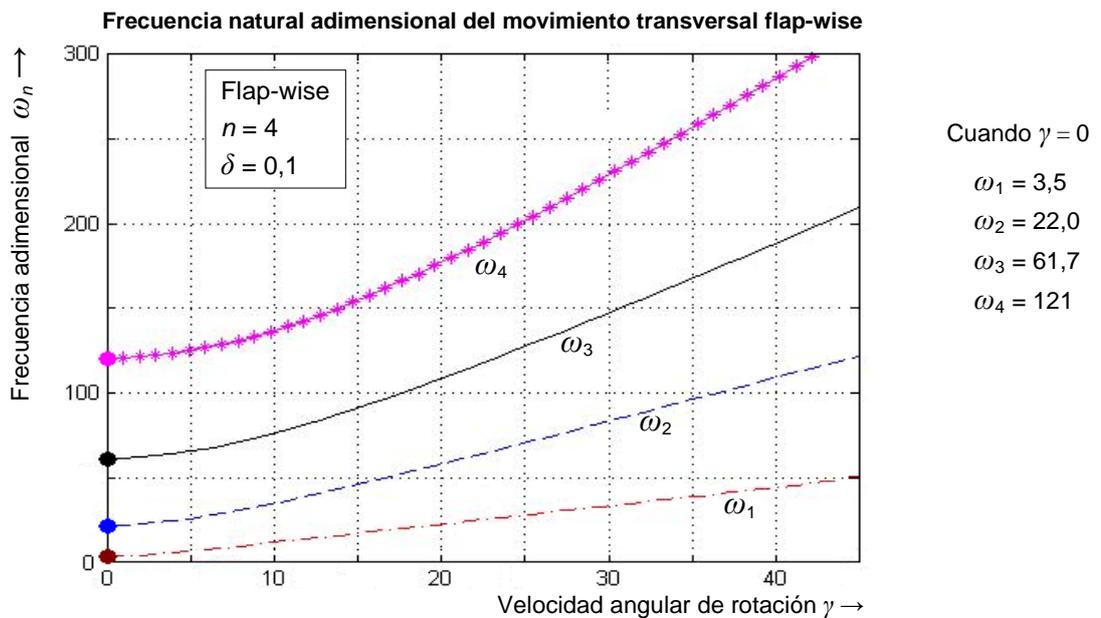
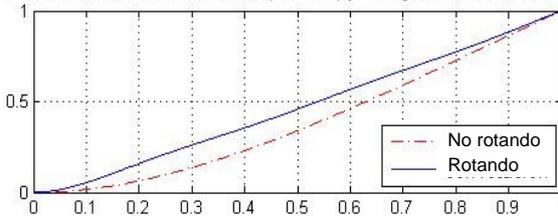


Figura 2: Frecuencia natural adimensional flap-wise vs. velocidad de rotación adimensionalizada

Las formas modales y las curvaturas de los primeros dos modos de vibración transversal flap-wise del sistema en estudio se pueden graficar junto con las dos primeras formas modales y curvaturas de una viga empotrada-libre; esto se puede visualizar en las Figuras 3 y 4.

1º modo flap-wise,  $\delta = 0,1$ ;  $\gamma = 45$  y 5 modos asumidos



2º modo flap-wise,  $\delta = 0,1$ ;  $\gamma = 45$  y 5 modos asumidos

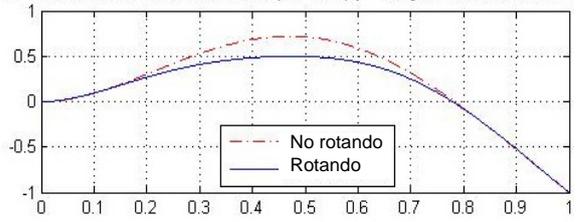
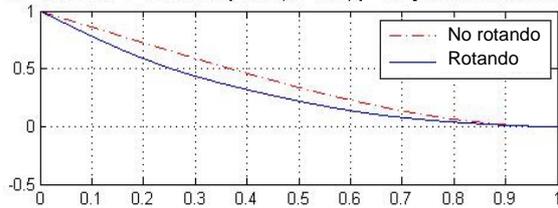


Figura 3: Primer y segundo modo de vibrar flap-wise de una viga empotrada-libre rotando y no rotando

Curvatura del 1º modo flap-wise,  $\delta = 0,1$ ;  $\gamma = 45$  y  $n = 5$



Curvatura del 2º modo flap-wise,  $\delta = 0,1$ ;  $\gamma = 45$  y  $n = 5$

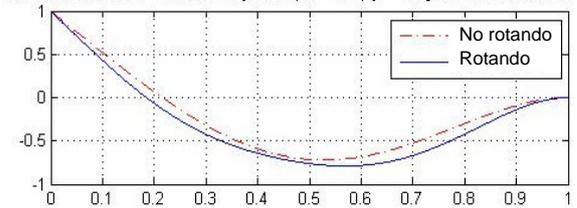


Figura 4: Curvaturas del 1º y 2º modo de vibrar flap-wise de una viga empotrada-libre rotando y no rotando

La frecuencia natural adimensional del movimiento flap-wise además de cambiar con la velocidad de rotación adimensional, lo hace con el radio adimensional  $\delta$  como se muestra en la Figura 5.

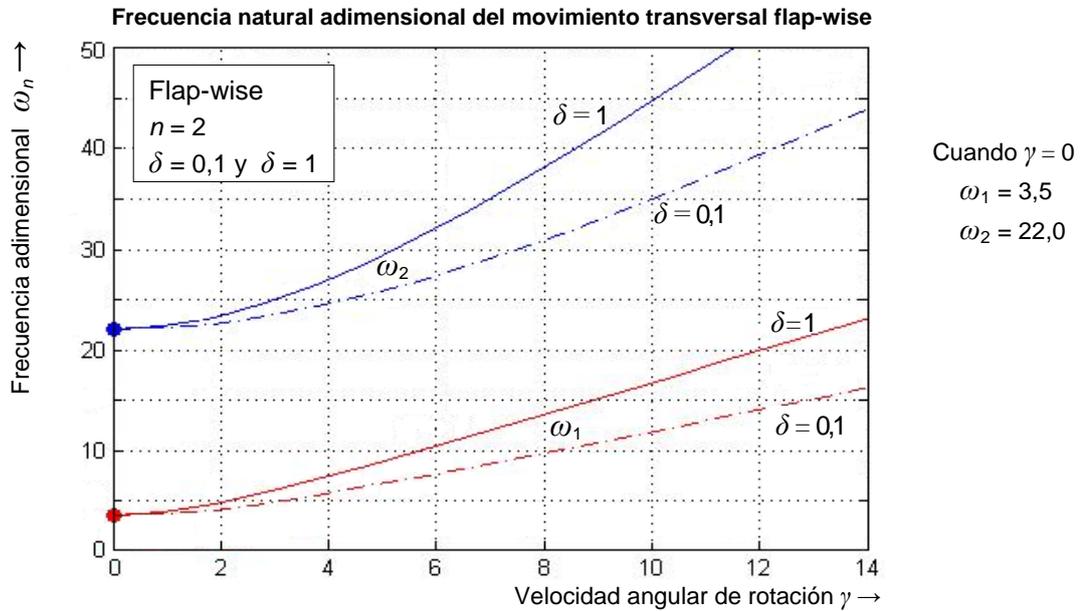


Figura 5: 1º y 2º frecuencia natural adimensional flap-wise vs. velocidad de rotación adimensional

#### 4.2. Movimientos acoplados axial y transversal edge-wise

Como se puede ver en las Ecuaciones (39) y (41), el movimiento axial y edge-wise, están acoplados. Matricialmente, estas ecuaciones, se pueden representar como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{M}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & -2\gamma\mathbf{M}^{13} \\ 2\gamma\mathbf{M}^{31} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{K}^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

donde:

$M_{ij}^{11} \triangleq \int_0^1 \psi_{1i} \psi_{1j} d\xi$  y  $M_{ij}^{33} \triangleq \int_0^1 \psi_{3i} \psi_{3j} d\xi$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ), son respectivamente los elementos  $ij$  de la masa generalizada asociada a las coordenadas  $\boldsymbol{\theta}_1$  y  $\boldsymbol{\theta}_3$ .

$M_{ij}^{31} \triangleq \int_0^1 \psi_{3i} \psi_{1j} d\xi$  y  $M_{ij}^{13} \triangleq \int_0^1 \psi_{1i} \psi_{3j} d\xi$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), son los elementos  $ij$  de las matrices giroscópicas asociadas a las velocidades  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_1$  y  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_3$ .

$\mathbf{K}^{11} \triangleq \alpha^2 \mathbf{K}^{S11} - \gamma^2 \mathbf{K}^{G11}$ , es la matriz de rigidez generalizada asociada a las coordenadas  $\theta_1$ .

$K_{ij}^{S11} \triangleq \int_0^1 \Psi_{1i}' \Psi_{1j}' d\xi$  y  $K_{ij}^{G11} \triangleq \int_0^1 \Psi_{1i} \Psi_{1j} d\xi$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), son respectivamente los elementos  $ij$  de la matriz de rigidez axial y la matriz axial geométrica.

$\mathbf{K}^{33} \triangleq \mathbf{K}^{B33} + \gamma^2 \mathbf{K}^{G33}$ , es la matriz de rigidez generalizada asociada a las coordenadas  $\theta_3$ .

$K_{ij}^{B33} \triangleq \int_0^1 \Psi_{3i}'' \Psi_{3j}'' d\xi$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la matriz de rigidez a la flexión asociada a las coordenadas  $\theta_3$ .

$K_{ij}^{G33} \triangleq \delta \int_0^1 (1-\xi) \Psi_{3i}' \Psi_{3j}' d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\xi^2) \Psi_{3i}' \Psi_{3j}' d\xi - \int_0^1 \Psi_{3i} \Psi_{3j} d\xi$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), es el elemento  $ij$  de la matriz de rigidez geométrica asociada a las coordenadas  $\theta_3$ .

Se define la  $i$ -ésima frecuencia adimensional de vibrar  $\omega_i$  del movimiento acoplado axial-edge-wise como:

$$\omega_i = T \lambda_i \quad (45)$$

donde  $\lambda_i$  es la  $i$ -ésima frecuencia natural dimensional de vibración axial-edge-wise.

Para encontrar los modos de vibrar del sistema giroscópico se resuelve el problema de autovalores representado por la Ecuación (44). En la Figura 6 se grafican las primeras cuatro frecuencias naturales adimensionales de vibración del sistema acoplado donde se consideró  $n = 4$ ,  $\delta = 0.1$  y  $\alpha = 70$ . El valor asignado a  $\alpha$  garantiza la vigencia del modelo de viga adoptado y por lo tanto se ignoran los efectos de corte y de inercia rotacional.

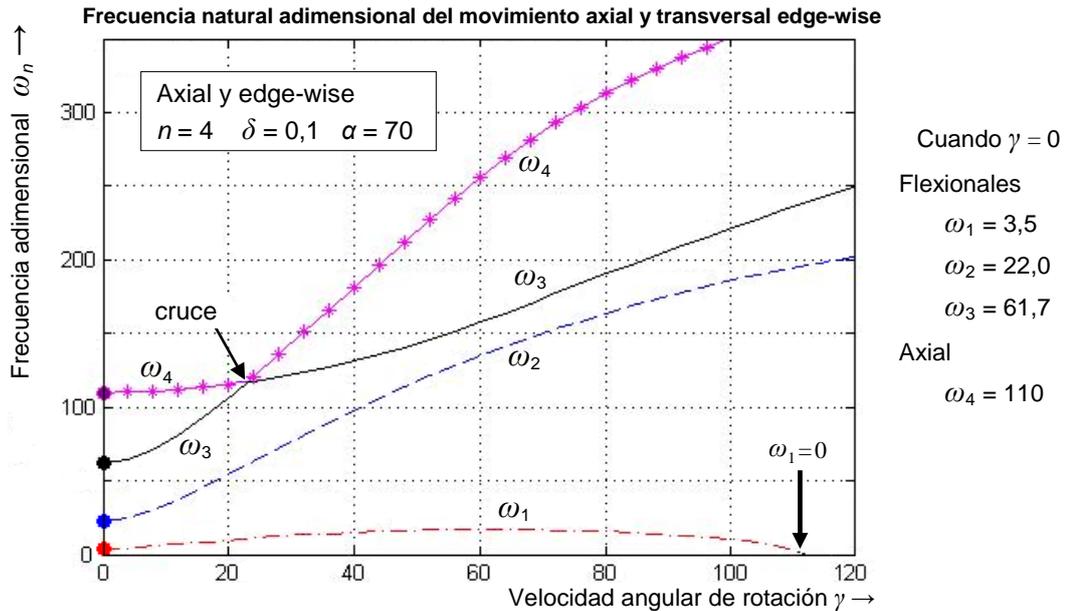


Figura 6: Evolución de las frecuencias naturales adimensionales con la velocidad de rotación adimensional

Como se puede observar en la Figura 6, los modos del movimiento acoplado axial/edge-wise no evolucionan con la velocidad de la misma manera que en el caso flap-wise. Cuando la viga no rota ( $\gamma = 0$ ) los modos son desacoplados, los tres primeros ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ) son de flexión y el cuarto ( $\omega_4$ ) es axial. Cuando la viga rota todos los modos tiene componente axial y flexional. Al crecer la velocidad los modos modifican su forma y su frecuencia, la cual se incrementa a medida que aumenta la velocidad de giro. Como la frecuencia del modo 3 crece más rápido que la frecuencia del modo 4 al llegar a  $\gamma = 23,3$  el gráfico de  $\omega_3$  corta al gráfico de  $\omega_4$  y a partir de esa velocidad el modo 3 pasa a ser el modo 4 porque es el que tiene mayor frecuencia. Para velocidades mayores las frecuencias crecen más lentamente y más adelante comienzan a disminuir por el efecto de la pérdida de rigidez axial originada en la evolución de la matriz geométrica axial. Hay que destacar que para la velocidad  $\gamma = 111$  la primer frecuencia se anula por la pérdida de rigidez causada por la matriz geométrica axial.

## 5. CONCLUSIONES

Se derivaron las ecuaciones de movimiento de Kane que gobiernan la dinámica de una viga libre en un extremo y empotrada en el otro a una base sometida a un movimiento de rotación con velocidad angular constante. Se consideró el movimiento axial y dos movimientos transversales (edge-wise y flap-wise) de una viga de Euler-Bernoulli con propiedades constantes a lo largo de la misma. Las ecuaciones de movimiento fueron discretizadas espacialmente mediante el método de Rayleigh-Ritz de los modos asumidos.

A partir de la formulación desarrollada se implementó una herramienta computacional que permite determinar los modos y frecuencias de una viga rotante en función de la velocidad de rotación de la base y del número de modos asumidos. Los resultados obtenidos con la herramienta computacional en el caso de una viga de propiedades constantes ayudan a entender el fenómeno estudiado y permiten establecer lo siguiente:

### Conclusiones referidas al movimiento desacoplado flap-wise

1. El movimiento flap-wise resulta desacoplado y sus frecuencias naturales crecen monótonamente con la velocidad de rotación, lo que indica que hay una rigidización transversal de la viga con la velocidad de rotación de la base. Los resultados obtenidos con la herramienta computacional se compararon con los presentados por Yoo y Shin (1998) y se observó total concordancia.
2. Al comparar las formas modales obtenidas para los modos flap-wise de la viga en rotación con la forma de los modos de la viga no giratoria se observan diferencias importantes. Esas diferencias crecen con la velocidad.
3. Se comprobó que, para una dada velocidad de giro, al aumentar el radio de la base, las frecuencias naturales flap-wise se incrementan. Esto es de esperarse, ya que la viga al estar más alejada del eje de rotación aumenta la aceleración centrífuga y esto aumenta la rigidez flexional. Cuando la velocidad de rotación es pequeña ese incremento es insignificante.

### Conclusiones referidas al movimiento acoplado axial y edge-wise

4. Las frecuencias naturales de los movimientos acoplados axial y edge-wise, varían con la velocidad de manera distinta a lo que ocurre en el caso del movimiento flap-wise. Se encontró que la primera frecuencia natural no sólo no crece monótonamente sino que, tiene un valor nulo para una cierta velocidad de rotación suficientemente elevada. Este fenómeno se denomina "pandeo" y se produce debido a que los efectos centrífugos logran anular la rigidez axial elástica de la viga. También se encontró que al crecer la velocidad angular, cada modo y su frecuencia evoluciona de una manera diferente y que la gráfica de las frecuencias en algunos casos se "cruzan".

## 6. REFERENCIAS

- Haering, W.J.; Ryan, R.R. and Scott, R.A. (1994). "New formulation for flexible beams undergoing large overall plane motion". *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. Vol. 17(1), pp. 76-83.
- Kane, T.R.; Ryan R.R. and Banerjee A.K. (1987). "Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base". *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. Vol. 10, pp. 139-151.
- Wright, A.D.; Smith, C.E.; Thresher, R.W. and Wang, J.L. (1982). "Vibration modes of centrifugally stiffened beams". *ASME*. Vol. 49(1), pp. 197-202.
- Yoo, H.H. and Shin, S.H. (1998). "Vibration analysis of rotating cantilever beams". *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 212(5), pp. 807-828.

### Agradecimientos

Los autores agradecen a los Profesores. Julio C. Massa y Marcos L. Verstraete por sus aportes a este trabajo.