

# Propiedades de un hilorama clásico

Sebastián Combina<sup>1</sup> y Juan Pablo Rossetti<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

<sup>2</sup>Facultad de Matemática, Astronomía y Física, CONICET

Fecha de recepción del manuscrito: 30/08/2015

Fecha de aceptación del manuscrito: 12/01/2016

Fecha de publicación: 15/03/2016

**Resumen**—Un hilorama es una figura formada mediante hilos o cuerdas que unen dos segmentos y se van cruzando entre sí. El efecto visual de estas figuras es llamativo y se utiliza en el arte, el diseño y la arquitectura. En este trabajo estudiamos varias propiedades de un hilorama clásico, entre ellas, longitudes de ciertos segmentos, áreas de polígonos, curvas secantes y tangentes; siendo algunas de éstas sorprendentes, como el arreglo triangular construido con cuadrados de longitudes de segmentos. Al final proponemos algunas generalizaciones y formulamos preguntas.

**Palabras clave**—hilorama, segmento, área, parábola.

**Abstract**— A piece of string art is made by connecting nails on two segments with strings which are crossing to each other. The visual effect of them is remarkable and it is used in art, design and architecture. In this article, we study several properties of a classic piece of string art, including lengths of certain segments, areas of polygons, secant and tangent curves; being some of these properties surprising, as the triangular array made of the squared lengths of the segments. At the end, we propose some generalizations and make some questions.

**Keywords**— String art, segment, area, parabola.

## INTRODUCCIÓN

**H**ilorama o “String art” es una técnica que permite generar distintas figuras mediante hilos, cuerdas o alambres tensados. Son representaciones formadas con varios segmentos, que fueron introducidas por Mary Everest Boole a fines del siglo XIX para ilustrar a los niños en forma sencilla algunas situaciones de la matemática y la geometría (Ver [1] y las referencias allí). Posteriormente, durante la década de 1960, tuvieron un gran desarrollo en el ámbito artístico, que se extiende hasta nuestros días.

Muchas de estas figuras, debido a la manera en que se cruzan sus segmentos, dan la apariencia de formar una curva, que en efecto, se trata de una curva cuadrática de Bézier [2, Cap. 4], que son muy utilizadas en diseños gráficos e industriales.,

Existe una obra de ingeniería notable, el Puente de Cuerdas de Jerusalén, inaugurado en 2008, que incorpora esta técnica (ver Fig. 1 y el artículo [3]).

En este trabajo, estudiamos propiedades geométricas del hilorama clásico que se ve en la Fig. 2, desde un punto de vista matemático.



Fig. 1. Puente de Jerusalén

Para obtener la figura, se toma en los ejes coordenados del plano  $xy$  dos segmentos de longitud entera  $N$  sobre los ejes, que parten del origen. Se los divide en  $N$  partes iguales y se trazan los segmentos que unen los puntos  $(j, 0)$  con  $(0, N + 1 - j)$  para  $j = 0, 1, \dots, N$ ; como muestra la Fig. 2. Observamos que la recta  $y = x$  es eje de simetría de la figura.

Dirección de contacto:

Sebastián Combina, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Córdoba. Tel: (03541) 15669134, seba\_vcp@hotmail.com

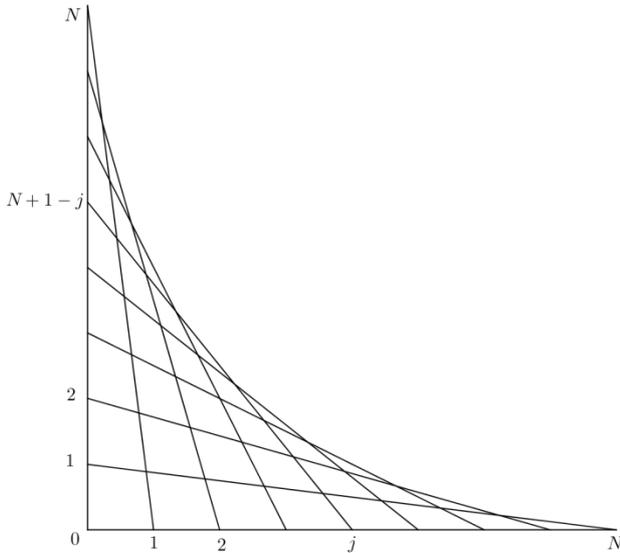


Fig. 2. Hilorama clásico

Nos preguntamos qué relaciones puede haber entre las medidas de los *segmentitos* que se observan en la Fig. 2, entre las áreas de los distintos *cuadriláteros* y *triángulos* que se generan en estas figuras, y también, si hacemos pasar una curva por los puntos de intersección entre segmentos consecutivos, de qué tipo de curva se trata. También consideramos la curva envolvente de la figura, que ya fue tratada con mayor generalidad en [4].

Al considerar longitudes, probamos en primer lugar que los segmentitos en los que se divide un segmento, son todos congruentes entre sí, salvo uno, que es igual al doble de los demás.

Además, para los distintos valores de  $N$ , construimos un *arreglo triangular* con las longitudes al cuadrado de los segmentos, y mostramos que para cualquier rectángulo con sus vértices en dicho arreglo, los valores en los vértices opuestos suman lo mismo (Fig. 5).

Mostramos que los cuadriláteros y triángulos se agrupan naturalmente en niveles donde todos tienen la misma área (Fig. 3). Además, existe una relación armoniosa entre las áreas de cuadriláteros contiguos. Finalmente, obtenemos el área total de la figura y damos una relación de recurrencia entre éstas para los distintos  $N$ .

La curva que se visualiza en la figura (Fig. 2) resulta ser una parábola. Probamos esto y consideramos varias curvas más asociadas a dicha figura, las cuales se relacionan entre sí y también resultan ser parábolas.

En las secciones finales, consideramos algunas generalizaciones de la figura analizada y dejamos planteadas preguntas, conjeturas y posibles generalizaciones de los resultados expuestos.

**PRELIMINARES**

Se dan a continuación algunos desarrollos necesarios para las posteriores observaciones y demostraciones.

**Puntos y Rectas**

Los segmentos que conforman la figura, pueden ser considerados partes de rectas, cuya ecuación en coordenadas  $(x, y)$ , para el  $j$ -ésimo, es la siguiente:

$$y = \frac{N + 1 - j}{j} (j - x) \tag{1}$$

Será de utilidad denotar con  $[j, k]$  el punto de intersección entre la recta  $j$ -ésima, que pasa por los puntos  $(j, 0)$  y  $(0, N + 1 - j)$ , y la recta  $k$ -ésima, que pasa por  $(k, 0)$  y  $(0, N + 1 - k)$ . Es claro que en esta notación  $[j, k] = [k, j]$ . Luego, las coordenadas cartesianas de este punto son:

$$[j, k] = \left( \frac{jk}{N+1}, \frac{(N+1-j)(N+1-k)}{N+1} \right) \tag{2}$$

Notemos que estas coordenadas cartesianas, con el orden invertido, corresponden al punto  $[N + 1 - j, N + 1 - k]$ , lo cual se debe a la simetría de la figura.

Las rectas con pendiente igual a uno de la forma  $y = x + b$  con  $b \in \mathbb{Z}$ , con  $-N \leq b \leq N$ , pasan por los puntos de intersección de los segmentos originales. Más precisamente si  $b = k + 1$ , entonces la recta pasa por los algunos puntos de la forma  $[j, N - j - k]$  con  $j$  variable.

Denotaremos, respectivamente, con parámetros  $c$  y  $g$  a los niveles de los puntos y polígonos, como se indican en la Fig. 3.

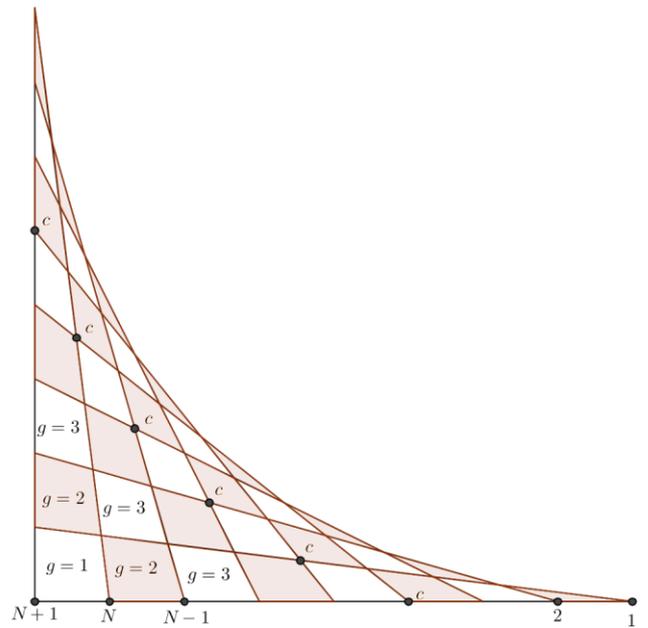


Fig. 3. Para los puntos,  $c$ , varía de  $1$  a  $N + 1$  en un sentido, mientras que para los polígonos, los niveles  $g$ , varían en el sentido opuesto, desde  $1$  hasta  $N$  ( $g = 1$  es nivel del cuadrilátero con vértice en el origen y  $g = N$  el de los triángulos).

Se cumple que todo cuadrilátero, tiene sus vértices con valores de  $c$  de modo que su nivel  $g$  es igual al promedio de los  $N + 1 - c$  correspondientes.

**SEGMENTOS**

En esta sección estudiamos dos propiedades de los segmentos de la figura. En primer lugar, consideramos las

longitudes de los *segmentitos* de la figura, que cumplen con la siguiente propiedad.

**Teorema.** *Los segmentitos dentro de un mismo segmento son congruentes entre sí, a excepción de uno, el más exterior, que es el doble que los demás. Más precisamente, la distancia al cuadrado entre los puntos  $[j, k]$  y  $[j + 1, k]$  es constantemente igual a:*

$$\frac{j^2 + (N + 1 - j)^2}{(N + 1)^2} \tag{3}$$

para  $j = 0, 1, 2, \dots, k - 2, k + 1, \dots, N - 1$ , mientras que entre los puntos de la forma  $[k - 1, k]$  y  $[k, k + 1]$  es el doble del valor de las anteriores. (Ver Fig. 4)

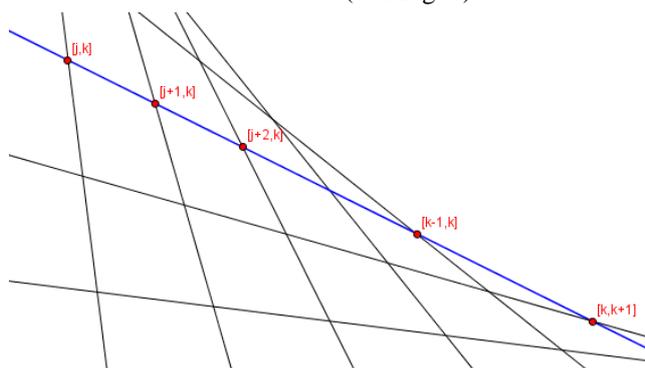


Fig. 4. Algunos segmentitos dentro del segmento que une los puntos  $(k, 0)$  y  $(0, N + 1 - k)$

**Demostración.** Considerando el segmento que pasa por  $[k, 0]$ , planteamos la diferencia en la primera coordenada de dos puntos consecutivos sobre el mismo, teniendo en cuenta la ec.(2):

$$\frac{(j + 1)k}{N + 1} - \frac{jk}{N + 1} = \frac{k}{N + 1} \tag{4}$$

Se puede ver que este valor no depende de  $j$ , por lo tanto, fijado  $k$ , vale siempre lo mismo para todo  $j = 0, 1, 2, \dots, k - 2, k + 1, \dots, N - 1$ , mientras que es igual al doble cuando los puntos consecutivos son de la forma  $[k - 1, k]$  y  $[k, k + 1]$ , pues  $\frac{k(k+1)}{N+1} - \frac{(k-1)k}{N+1} = \frac{2k}{N+1}$ .

En cuanto a la diferencia de la segunda coordenada, es claro que es proporcional a la primera, debido a que todos los puntos se ubican sobre la misma recta.

Por Pitágoras, el cuadrado de la longitud del segmento completo es  $j^2 + (N + 1 - j)^2$ , luego se obtiene la expresión del enunciado. □

En segundo lugar, consideramos los segmentos completos, desde el punto  $[j, 0]$  al  $[0, N + 1 - j]$ , cuya longitud al cuadrado es  $j^2 + (N + 1 - j)^2$ . Construimos un arreglo triangular, de manera que cada fila corresponde a un determinado  $N$ , mientras que los cuadrados de las longitudes son colocados en orden creciente de  $j$  para  $j$  que varía desde 1 hasta  $N$  en cada fila (Ver Fig. 5). Podemos denotar la ubicación de cada valor en este arreglo de dos maneras distintas, ambas naturales. Por un lado, determinando el  $N$  y el  $j$  como recién, y por otro, tomando las *coordenadas cartesianas*  $(a, b)$ , donde  $a$  y  $b$  comienzan valiendo ambas 1 en el vértice superior del triángulo. En

estas coordenadas, el valor correspondiente a  $(a, b)$  es  $a^2 + b^2$ .

Consideramos que este triángulo es lo suficientemente interesante como para ser estudiado en sí mismo, aquí solo damos la siguiente propiedad.

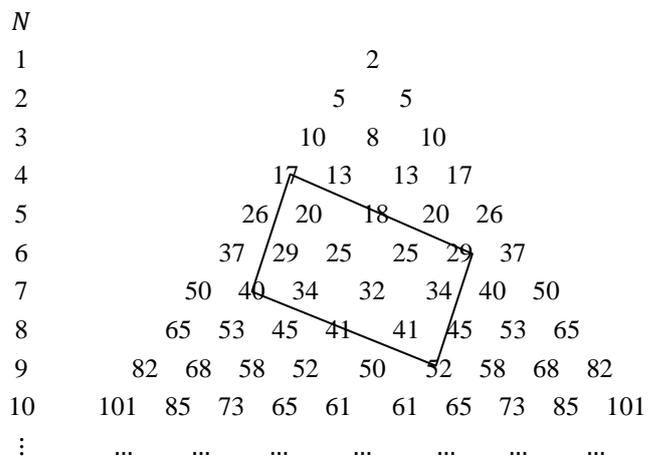


Fig. 5. Arreglo triángulo hasta  $N = 10$ . Se indican los vértices de un rectángulo, en donde:  $17 + 52 = 40 + 29$

**Teorema.** *Para cualquier rectángulo con sus vértices en puntos del triángulo se cumple que las sumas de los valores en los vértices opuestos son iguales.*

**Demostración.** Consideramos un rectángulo con vértices en el triángulo, entonces, sus coordenadas diagonales se pueden escribir de la forma  $(a, b)$ ,  $(a + c, b + d)$ ,  $(a + c + rd, b + d - rc)$  y  $(a + rd, b - rc)$ . Ahora, los valores correspondientes a dichos vértices son, respectivamente,  $a^2 + b^2$ ,  $(a + c)^2 + (b + d)^2$ ,  $(a + c + rd)^2 + (b + d - rc)^2$  y  $(a + rd)^2 + (b - rc)^2$ , luego, una cuenta directa nos muestra que la suma de los vértices opuestos es la misma, como queríamos probar. □

La sucesión formada con los números del triángulo aparece en [5] con el nombre A048147 donde se hace notar solo la propiedad de que si dos números aparecen en la sucesión entonces su producto también.

**Observaciones**

La relación entre las longitudes de estos segmentitos para los segmentos  $k$  y  $k + 1$  es:

$$1 + \frac{2(N - 2k)}{(k + 1)^2 + (N - k)^2} \tag{5}$$

Se puede ver que esta es mayor a uno mientras  $k$  sea menor a la mitad de  $N$ , mientras que la proporción da menor a uno cuando la situación se invierte, es decir cuando  $k$  es mayor a la mitad de  $N$ .

En el caso de que  $N$  sea par y  $k = N/2$  la proporción es igual a 1, lo que es evidente debido a que las rectas son simétricas con respecto al eje de simetría.

**ÁREAS**

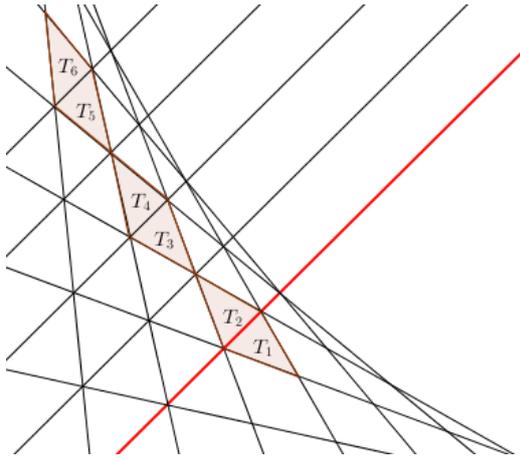
A continuación, estudiamos las propiedades de las áreas de los polígonos formados con los segmentos al intersectarse unos con otros y la del área total de la figura. Se ve rápidamente que en una figura con  $N$  segmentos, se

forman  $N$  triángulos y  $N(N - 1)/2$  cuadriláteros, por lo que en total, son  $N(N + 1)/2$  polígonos.

**Teorema.** En la figura con  $N$  segmentos, los polígonos de un mismo nivel  $g$  tienen la misma área, siendo ésta:

$$A_g = \frac{N + 1 - g}{N + 1} \quad (6)$$

**Demostración.** Teniendo en cuenta el eje de simetría  $y = x$  que presenta la figura, trazamos rectas paralelas a ella, de pendiente uno, y sabemos, por lo visto en los Preliminares, que pasan por los puntos de intersección de los segmentos (ver Fig. 6).



**Fig. 6:** Figura con su eje de simetría (recta  $y = x$ ), rectas paralelas a esta y algunos polígonos de un mismo nivel  $g$ .

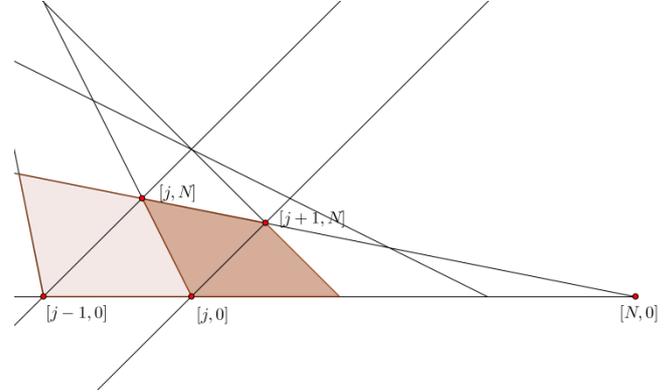
Con estas rectas, los polígonos quedan divididos en triángulos. Si comenzamos con un triángulo  $T_1$  con un lado sobre la diagonal principal  $y = x$ , claramente es congruente a su simétrico  $T_2$ . Ahora bien, el triángulo  $T_3$ , tiene con  $T_2$  un ángulo igual (por ser opuestos por el vértice) y los dos pares de lados que forman este ángulo son respectivamente congruentes. Luego, ambos triángulos son congruentes (por el criterio llamado Lado-Angulo-Lado) y en consecuencia tienen la misma área.

Al comparar  $T_3$  con  $T_4$ , si bien no son congruentes, se puede ver que comparten un lado y sus alturas con respecto a dicho lado son iguales, por lo que sus áreas también lo son. Continuando de este modo, se prueba que todos los polígonos en un mismo nivel  $g$ , fijo, tienen la misma área.

Para conocer el valor de esta área, teniendo en cuenta lo demostrado en el punto anterior, procedemos a comparar las áreas de dos cuadriláteros contiguos que tienen cada uno un lado sobre el eje  $x$ .

A dichos cuadriláteros, los partimos en triángulos, como en la Fig. 7. y vemos que los cuatro triangulitos tienen la misma altura con respecto a sus bases paralelas a la diagonal principal. Por lo tanto, sus áreas son directamente proporcionales a las longitudes de sus bases. Si miramos los dos triángulos formados por dichas bases y el vértice de la figura, es decir, el triángulo con vértices en los puntos  $[N, 0]$ ,  $[j, 0]$  y  $[j + 1, N]$  y el otro en los puntos  $[N, 0]$ ,  $[j - 1, 0]$  y  $[j, N]$  (ver Fig. 7), vemos que estos triángulos son semejantes, ya que poseen un ángulo en común y otro congruente (el correspondiente al vértice  $[j, 0]$  en el primero y al vértice  $[j - 1, 0]$  en el segundo). Por lo tanto,

la proporción entre sus lados correspondientes es  $(N - j)/(N + 1 - j)$ . Esta proporción resulta ser la misma que entre las áreas de los triangulitos que forman los cuadriláteros, y por lo tanto la de las áreas de los dos cuadriláteros considerados. Notemos que el nivel  $g$  de los cuadriláteros, es  $j + 1$  el del menor y  $g = j$  el mayor, por lo que la proporción entre las áreas de dos cuadriláteros cualesquiera de nivel  $g + 1$  y  $g$  es  $(N - g)/(N + 1 - g)$ .



**Fig. 7.** Sección de una figura.

Así, con la proporción entre todas las áreas de los polígonos de la figura completa, calculamos explícitamente solo el área del único cuadrilátero en el nivel  $g = 1$ , que es que posee uno de sus vértices en el origen. Es fácil ver que su área es  $\frac{N}{N+1}$ . Luego, el área de un cuadrilátero de nivel 2 es  $\frac{N}{N+1} \cdot \frac{N-1}{N} = \frac{N-1}{N+1} = \frac{N+1-2}{N+1}$ . Siguiendo de este modo, se obtiene que todos los polígonos de un determinado nivel  $g$  tienen el área expuesta en el enunciado.  $\square$

**Área total**

Teniendo en cuenta el teorema anterior, podemos calcular el área total de la figura, la cual estará dada por la suma de todas las áreas de los polígonos que la componen. Debido a que para cada nivel  $g$  hay exactamente  $g$  polígonos, podemos establecer, mediante una simple cuenta, que el área total está dada por:

$$A_N = \sum_{g=1}^N \frac{g(N + 1 - g)}{N + 1} = \frac{N(N + 2)}{6} \quad (7)$$

En base a esta ecuación, se puede confeccionar la siguiente tabla.

**TABLA 1:** ÁREA TOTAL DE FIGURAS CON VALORES DE  $N$  ENTRE 1 Y 10

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A_N$	1/2	4/3	5/2	4	35/6	8	21/2	40/3	33/2	20

**Propiedad**

Por otra parte, si denotamos con  $A_N$  al área total de la figura de  $N$  segmentos, vemos que se cumple la siguiente relación de recurrencia:

$$A_{N+1} = 2A_N - A_{N-1} + \frac{1}{3} \quad (8)$$

Demostrar esta expresión resulta sencillo a partir de la ec. (7).

## CURVAS

Al observar una figura de este tipo, surge naturalmente la pregunta de cuáles son las curvas asociadas a la misma, es decir, la curva envolvente, las curvas que pasan por los puntos “más exteriores” de la figura, por lo puntos de determinado nivel, entre otras ¿Son estos puntos parte de alguna curva especial, en particular, de alguna cónica? Para los puntos exteriores, en un principio, la forma que se aprecia podría inducir a pensar que se trata de una hipérbola, sin embargo, la curva resulta ser en realidad una parábola, lo cual demostraremos en esta sección. Incluso, veremos que estos puntos no son los únicos que generan una parábola, pues analizaremos otras curvas, que también resultaran parábolas, entre ellas, las que son tangentes a todos los segmentos.

### Parábolas Secantes

Veremos que las cónicas que pasan por todos los puntos de un mismo nivel  $c$  resultan ser todas parábolas. Estos puntos, son de la forma  $[j, j + c]$  con  $c = 1, 2, \dots, N + 1$ . La Fig. 8 muestra, a modo de ejemplo, las curvas para dos valores de  $c$ .

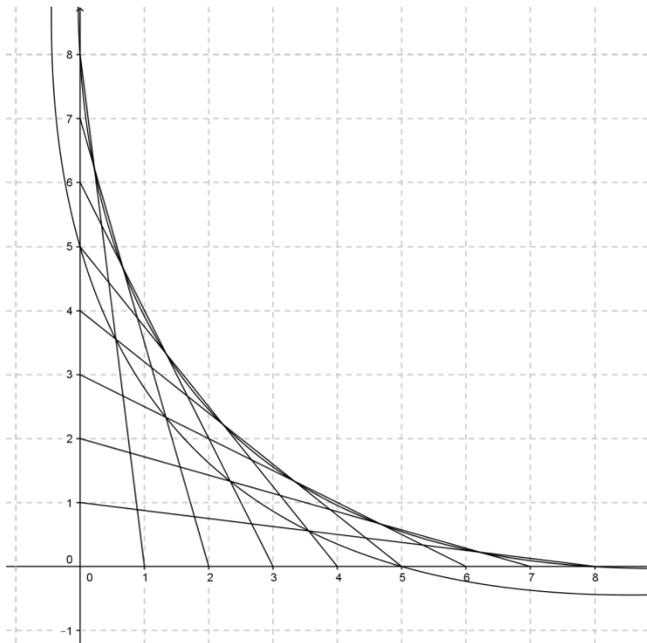


Fig. 8. Figura con  $N = 8$ , donde se aprecian las curvas secantes para  $c = 1$  y  $c = 4$ .

**Teorema.** Para cada  $c = 1, 2, \dots, N + 1$  los puntos de la forma  $[j, j + c]$  con  $j$  variable, son parte de una parábola, definida por la ecuación:

$$(x - y)^2 - 2(N + 1)(x + y) + N(N + 2) = c^2 - 1 \quad (9)$$

**Demostración.** En primer lugar, los puntos de la forma  $[j, j + c]$ , considerando la ec. (2) corresponden a:

$$(x, y) = \left( \frac{j(j + c)}{N + 1}, \frac{(N + 1 - j)(N + 1 - j - c)}{N + 1} \right) \quad (10)$$

Teniendo en cuenta la simetría que presenta esta curva respecto a la recta  $y = x$ , conviene considerar las expresiones de  $x - y$  y  $x + y$ :

$$x + y = (N + 1) + 2j + c \quad (11)$$

$$x - y = \frac{(N + 1)^2 + 2j(j + c) - (N + 1)(2j + c)}{N + 1} \quad (12)$$

Luego, considerando estas dos expresiones, podemos plantear:  $(x - y)^2 - 2(N + 1)(x + y)$  y de este modo, llegamos a la ecuación del enunciado.

Es claro que todos los puntos de la forma  $[j, j + c]$  satisfacen esta ecuación. Además, esta expresión corresponde a la de una cónica que verifica la condición de ser una parábola, ya que su discriminante  $B^2 - 4AC$  es igual a cero.  $\square$

Finalmente podemos hacer un cambio de coordenadas de tal modo que  $z = x - y$  y  $w = x + y$  con lo que la ec. (9) nos queda:

$$z^2 - 2w(N + 1) + N(N + 2) = c^2 - 1 \quad (13)$$

### Observación

Estas parábolas, difieren entre sí en su expresión solo en el término que no depende de  $z$  y  $w$ , lo cual implica que en realidad, todas responden a la misma curva trasladada a lo largo del eje de simetría de la figura.

La curva más ‘exterior’ de la figura, es decir, aquella que corresponde a  $c = 1$  y que resulta ser la de mayor interés y la más obvia de la familia de curvas, responde a la ecuación:

$$(x - y)^2 - 2(N + 1)(x + y) + N(N + 2) = 0 \quad (14)$$

### Parábolas Tangentes

Consideramos ahora otras curvas asociadas a estas figuras. Buscamos la curva tangente a todos los segmentos que la conforman, es decir, se trata de la envolvente a todas las rectas que definen los segmentos. Esta parábola, ya ha sido tratada en otros trabajos, ya sea como curva generada con el método de Bézier [3], o bien como envolvente de la familia de rectas [4]. Sin embargo, en este trabajo llegaremos a la misma curva desde un punto de vista distinto, puesto que consideraremos tangentes para cada valor de  $N$  y no solo para el caso *continuo* y haremos observaciones nuevas.

**Teorema.** La envolvente a todas las rectas de una figura es tangente a estas en los puntos medios de los segmentos cuyos extremos son los puntos  $[j - 1, j]$  y  $[j, j + 1]$ , y su expresión es la siguiente:

$$(x - y)^2 - 2(N + 1)(x + y) + (N + 1)^2 = 0 \quad (15)$$

**Demostración.** Planteamos una parábola a partir de su foco y recta directriz y se demostrará que cumple con las propiedades expuestas. En primer lugar, podemos plantear que la recta directriz será  $y = -x$ , mientras que el foco de esta parábola, será el punto  $(a, b) = \left( \frac{N+1}{2}, \frac{N+1}{2} \right)$ .

Ahora bien, teniendo en cuenta las propiedades de las parábolas, se tiene que la distancia  $D$  desde el foco a un

punto de la misma, es igual a la distancia de éste a la directriz (E). Ver Fig. 10.

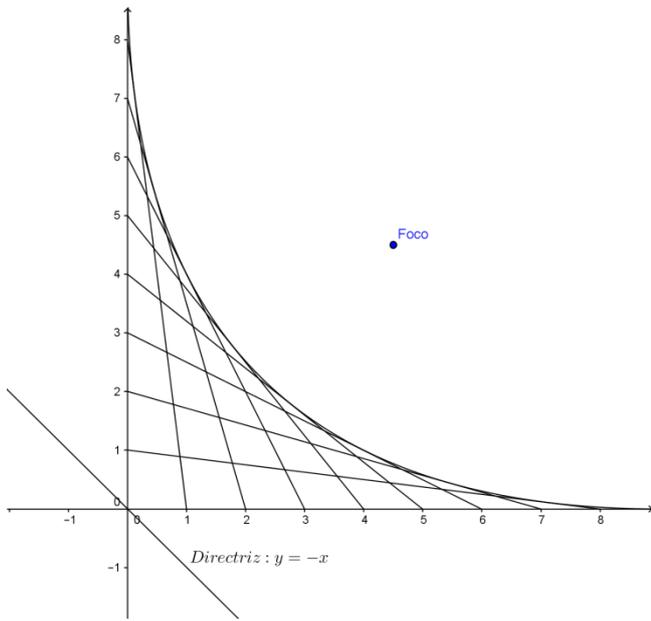


Fig. 9. Parábola tangente a una figura con su foco y directriz correspondiente.

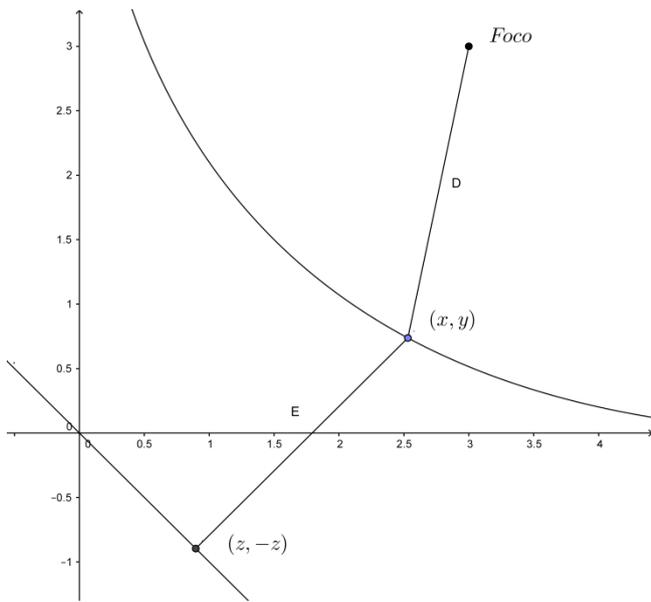


Fig. 10. Parábola definida a partir de su foco y directriz.

El punto  $(z, -z)$  es el punto más cercano de la directriz al punto genérico de la curva  $(x, y)$ . Por lo tanto, la recta que une estos puntos, es perpendicular a la directriz. Teniendo en cuenta esto, no es difícil ver que  $z = \frac{x-y}{2}$ . Luego, podemos afirmar, teniendo en cuenta que  $a = b$ :

$$(x - y)^2 - 2a(x + y - a) = 0 \tag{16}$$

Por otro lado, reemplazando el valor de  $a$  en esta expresión obtenemos la ecuación de la curva expuesta en el enunciado del teorema. Esta ecuación, que claramente

corresponde a la de una cónica, verifica la condición de ser una parábola, ya que su discriminante es igual a cero.

A continuación, analizaremos si esta parábola es tangente a todos los segmentos en los puntos planteados. Para ello, derivamos la ecuación obtenida de la parábola y calculamos el vector gradiente:

$$(2(x - y) - 2(N + 1), 2(x - y) - 2(N + 1)) \tag{17}$$

Para demostrar que esta parábola pasa por los puntos medios mencionados, teniendo en cuenta la ec. (2), tomamos tres segmentos consecutivos, que pasan por los puntos  $[j - 1, 0]$ ,  $[j, 0]$  y  $[j + 1, 0]$ . Los puntos medios de los segmentos menores que surgen de la unión de los puntos de intercepción de estos tres segmentos tienen coordenadas:

$$\left( \frac{j^2}{N + 1}, \frac{(N + 1 - j)^2}{N + 1} \right) \tag{18}$$

Si introducimos estos puntos en la ecuación de esta parábola, se puede ver que la verifican. Basta ahora ver que la curva es tangente en estos puntos. Para ello obtenemos un vector  $(u, v)$  ortogonal al vector gradiente. Debido a que los puntos que nos interesan cumplen, teniendo en cuenta la expresión de sus coordenadas, que  $x - y = 2j - (N + 1)$ , nos queda la ecuación  $(u - v)(x - y) = (u + v)(N + 1)$ . Tomando  $u = j$  y  $v = j - (N + 1)$ , se verifica que este vector es ortogonal al gradiente, por lo cual es tangente a la parábola.

Otra manera de demostrar la tangencia, es obtener la pendiente de la parábola en estos puntos, la cual resulta ser la misma que la de los segmentos de la figura, luego, son tangentes. □

A continuación, exponemos una breve comparación entre los resultados de otros autores (ver [3] y [4]) con respecto a esta curva, y la dada en este artículo.

En [3] se encara el problema en base a la definición de una curva cuadrática de Bézier, mientras que en [4] se lleva a cabo considerando la definición de curva envolvente. Este último autor, ha tratado estas parábolas desde un punto vista más general que el tratado aquí, demostrando que mediante los hiloramas, se pueden generar otras cónicas, además de las parábolas, como hipérbolas o círculos, dependiendo de la forma en que se distribuyen los segmentos. Ambos autores consideran la figura generada en un segmento de longitud 1, el cual es dividido en  $N$  partes.

En el artículo [3] el autor utiliza una parábola de este tipo, para describir la curva que parecen formar las ‘cuerdas’ del ya mencionado puente de Jerusalén.

**Observaciones**

Las parábolas descriptas, se relacionan de una manera interesante entre ellas. Si en lugar de considerar los segmentos principales, de longitud  $N$ , lo hacemos fijando su longitud en 1 y dividiéndolos en  $N$  partes, se puede ver que para todo  $N$ , las curvas secantes y tangentes responden a las mismas ecuaciones. Además, se puede ver con claridad que las curvas secantes, conforme disminuye  $c$ , convergen a la tangente. Si en este caso, tomamos el límite de  $N \rightarrow \infty$ , se puede comprobar fácilmente que la parábola

secante con  $c = 1$ , responde a la misma ecuación que la parábola tangente.

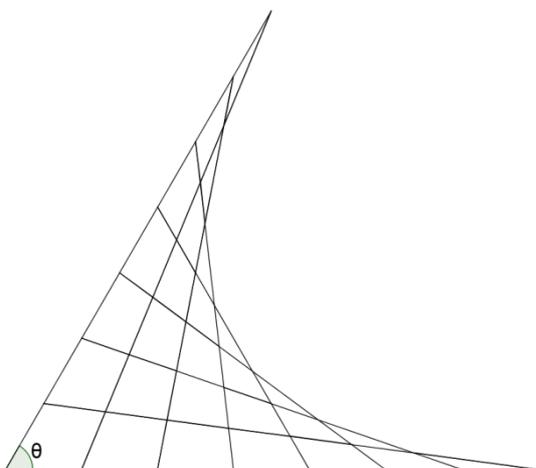
**GENERALIZACIONES**

En esta sección, exponemos dos generalizaciones de la figura analizada. Por un lado, estudiamos como cambian algunas propiedades al variar el ángulo entre los dos segmentos de longitud  $N$  y la manera de dividir a estos. Por otro estudiamos la figura clásica, extendida a otros cuadrantes en el plano  $xy$ .

Con respecto al cambio en el ángulo entre los lados de longitud  $N$  (Ver Fig. 11) y al cambio en el factor por el cual se dividen los mismos (en el caso analizado hasta ahora, este factor era  $N$ ), mediante sencillas transformaciones lineales, no es difícil mostrar que los teoremas referidos a la igualdad de áreas de polígonos para un mismo nivel  $g$  y la igualdad de los segmentitos ‘interiores’ de la figura, se siguen cumpliendo. Por otro lado, no es difícil demostrar además, que el área total para este tipo de figuras estará dada por la misma ecuación ya expuesta, multiplicada por el *seno* del ángulo  $\theta$  entre los lados principales y el cuadrado de la distancia máxima entre dos segmentos consecutivos,  $d$ . De este modo:

$$A_{N,\theta,d} = \frac{1}{6} d^2 N(N + 2) \text{sen}(\theta) \tag{19}$$

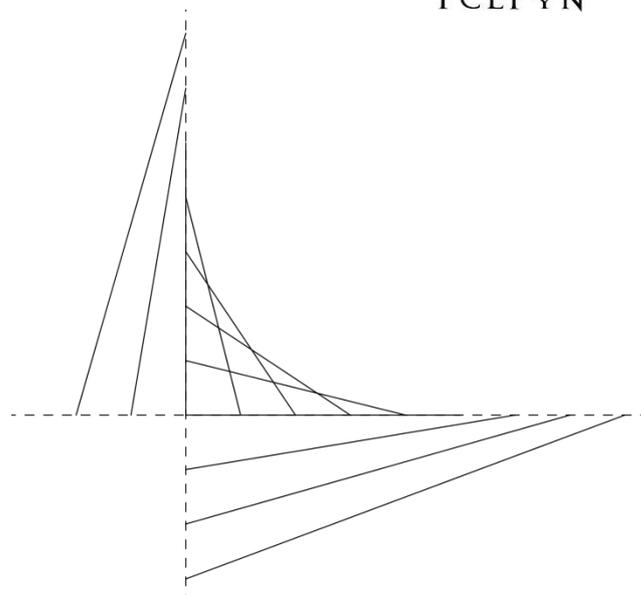
Se puede ver que si  $d = 1$  y  $\theta = \pi/2$ , la ecuación responde al caso principal estudiado en este trabajo.



**Fig. 11.** Figura con un ángulo agudo entre los lados principales.

Como se aprecia en la Fig. 11, estas figuras también poseen la apariencia de curvas que, en efecto, responden a ecuaciones similares a la ya descritas con un leve cambio debido a una transformación lineal. Solo para el caso de la parábola tangente, estas generalizaciones son tratadas en [4].

Además de esta generalización, existe otra digna de ser tratada. Es posible tomar a la figura clásica analizada en este artículo, como una parte de una infinita (Ver Fig. 12), considerando la serie completa de segmentos, es decir, en lugar de tomar a  $j$  dentro del rango considerado (de 0 a  $N$ ), tomar un valor entero entre  $-\infty$  e  $\infty$ .

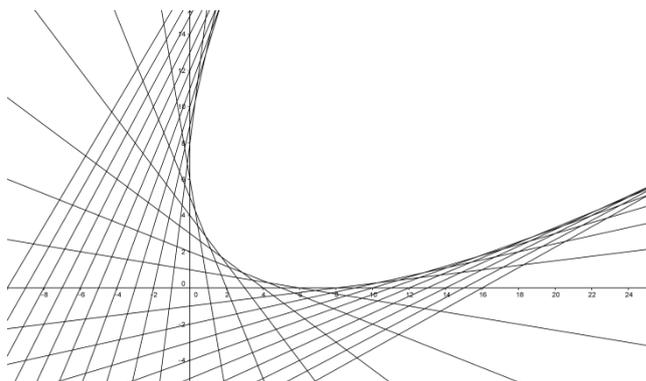


**Fig. 12.** Figura con  $N = 4$  extendida con valores de  $j$  desde -2 a 8. Los ejes se muestran como rectas discontinuas.

Lo interesante de esta extensión, es que las longitudes al cuadrado de los segmentos que se forman, también responden al segundo teorema tratado en este artículo, de tal manera que en lugar de conformarse un arreglo triangular de valores, se forma un arreglo cuadrado infinito en todas las direcciones, respondiendo a la misma propiedad descrita en dicho teorema.

Algo interesante sucede también al tomar estos segmentos como rectas, como se muestra en la Fig. 13. En este caso, se puede demostrar de manera análoga a lo expuesto en el artículo, que los teoremas referidos a los segmentitos y áreas de los cuadriláteros y triángulos, se siguen verificando.

Además, es importante notar que en esta segunda figura extendida, las infinitas rectas continúan generando todas las parábolas tratadas. En [4] son tratadas las parábolas tangentes ante esta generalización.



**Fig. 13.** Figura con  $N = 6$  donde se aprecia claramente como las rectas van generando la parábola tangente.

**CONCLUSIONES**

Se encontraron varias relaciones entre longitudes de los segmentos, entre áreas de polígonos y entre curvas asociadas a esta figura. Se trata de una figura muy interesante, no solo desde lo visual, sino también desde lo

matemático y hasta en diseños, decoración y construcciones.

Creemos que otras figuras análogas a ésta, otros hiloramas, deberían presentar propiedades dignas de ser estudiadas también, y que la mayoría de las analizadas aquí se podrían llegar a extender a estos casos.

Además, confiamos en que para el arreglo triangular de la Fig. 5 (o en el caso extendido) existen otros polígonos con propiedades similares a las de los rectángulos que se expusieron aquí, como por ejemplo hexágonos.

Por otro lado, pensamos que al considerar otras configuraciones regulares de puntos en estas figuras, las curvas que pasan por los puntos en dichas configuraciones también serán parábolas.

## AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece a la profesora Alejandra Radjondjopulo por alentarle a continuar con este trabajo en sus inicios.

## REFERENCIAS

- [1] Barbarán, J., “Everest Boole, Mary (1832-1916)”, DivulgaMAT (2008).
- [2] Farin, G.; Hoschek, J.; Kim, M. (editors). “Handbook of computer aided geometric design”, (2002). Elsevier. Amsterdam.
- [3] Renan G. “Bridges, string art and Bézier curves”, Plus Magazine (2012). <http://plus.maths.org/>
- [4] Quenell, G., “Envelopes and string art.” Math. Mag. 82, No. 3, 174-185 (2009).
- [5] A048147, “The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.” <https://oeis.org/A048147>
- [6] Todd, Philip From string art to caustic curves: Envelopes in symbolic geometry. Electron. J. Math. Technol. 1, No. 3, 196-211, electronically (2007).