NIVEL DE REORDEN EN LOS MODELOS DE INVENTARIO CON DEMANDA CIERTA Y CONSTANTE

MARIANA FUNES

2023

Nivel de Reorden en los modelos de inventario con demanda cierta y constante

En los modelos de inventario que hemos visto, buscamos determinar una política que responda a las preguntas de cuánto comprar y cuándo hacer el pedido, asumiendo que no se producen demoras en la entrega ($\tau = 0$, siendo τ el tiempo de reaprovisionamiento o adelanto).

Sin embargo, pueden producirse retrasos entre el momento que se gestiona el pedido y la mercadería solicitada ingresa al almacén. En estos casos, para evitar faltantes de stock, resulta útil determinar un nivel de inventario que indique el momento en el que se debe realizar el pedido, de manera que el inventario existente se agote cuando ingrese el nuevo lote.

Este nivel de inventario, que recibe el nombre de nivel reorden y simbolizamos con "X", responde a la pregunta de cuántas unidades se necesitan en inventario para cubrir la demanda en el período de reabastecimiento.

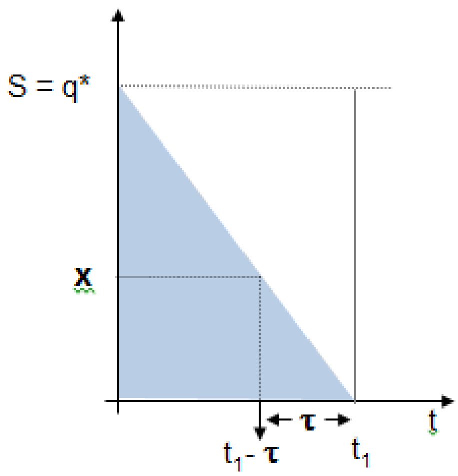
La respuesta a esta pregunta dependerá de cómo se comporte τ, el que puede ser conocido y tener un valor cierto, o pude ser una variable aleatoria con distribución conocida.

Analizaremos primero los **casos en los cuales τ es conocido y tiene un valor cierto.**

Como X representa un nivel de inventario, podemos determinarlo utilizando la función de Stock S(t). Así, para cada uno de los modelos de universo cierto (sin ruptura, con ruptura y reaprovisionamiento uniforme) determinaremos el nivel de reorden a partir de la función de stock correspondiente.

Modelo de Universo Cierto sin ruptura

Figura 1
Gráfica del comportamiento del inventario Modelo sin ruptura



En este modelo partimos de un stock máximo *S*, igual al volumen óptimo de pedido *q* que se va consumiendo en el tiempo *t* a una tasa constante *h* hasta el momento t_1 en el que el inventario llega a cero.

Por lo tanto, la función de Stock en el momento *t* estará dada por:

$$\mathbf{S(t) = q - h\,t} \qquad (1)$$

Si $\tau > 0$ y conocido, para que no se produzcan faltantes, el pedido deberá hacerse en el momento $t_1 - \tau$, y el Nivel de Reorden X será el nivel de inventario en ese momento:

$$\mathbf{X = q - h\,(t_1 - \tau)} \qquad (2)$$

A fin de reducir esta expresión realizaremos las operaciones matemáticas que se detallan a continuación.

Distribuyendo h:

$$X = q - h\,t_1 + h\,\tau \qquad (3)$$

Como $t_1 = \frac{Tq}{N} = \frac{q}{h} \quad \therefore \quad q = t_1 h$

Resulta:

$$X = q - q + h\,\tau$$

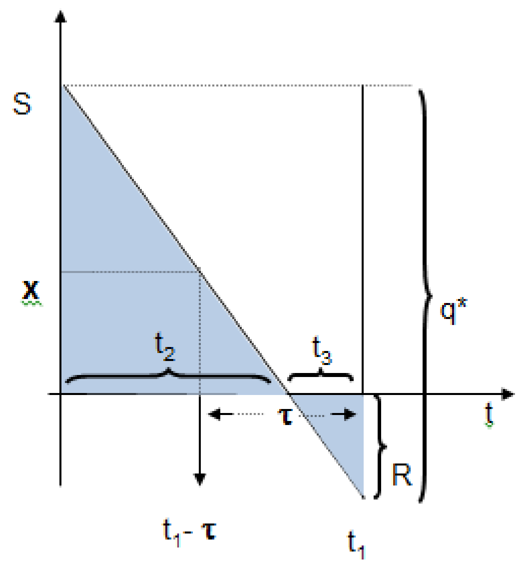
Cancelando q:

$$\boxed{\mathbf{X = h\,\tau = m}} \qquad (4)$$

El nivel de reorden será la demanda en τ, que simbolizamos con m.

Modelo de Universo Cierto con ruptura

Figura 2
Gráfica del comportamiento del inventario Modelo con ruptura



Establecido un nivel máximo de stock *S*, éste se irá consumiendo en el tiempo a una tasa constante *h.*

Agotado el stock, las unidades demandadas se tomarán como pedidos pendientes hasta alcanzar un nivel máximo de ruptura *R*, momento en el que ingresará el volumen de pedido *q*: *R* unidades se destinarán a cubrir los pedidos pendientes y *S (q - R)* unidades se almacenarán en inventario.

La función de Stock en el momento *t* estará dada por:

$$\mathbf{S(t) = S - h\,t} \qquad (5)$$

Dado $\tau > 0$ y conocido, para que no se produzcan faltantes mayores a la ruptura máxima, el pedido deberá hacerse en el momento $t_1 - \tau$ y el Nivel de Reorden será:

$$\mathbf{X = S - h\,(t_1 - \tau)} \qquad (6)$$

Reemplazando S por su igual (q – R) y distribuyendo h:

$$X = q - R - h\,t_1 + h\,\tau$$

Reemplazando $h.t_1$ por su igual:

$$X = q - R - q + h\,\tau$$

Cancelando q y reagrupando términos:

$$\boxed{\mathbf{X = h\,\tau - R}} \qquad (7)$$

Como $\quad t_3 = \frac{R}{h} \quad \therefore \quad R = ht_3$

Resulta:

$$\boxed{\mathbf{X = h\,\tau - h\,t_3 = h\,(\tau - t_3)}} \tag{8}$$

El Nivel de Reorden será la demanda en el período $\tau - t_3$.

Dado que el ciclo del pedido se subdivide en dos partes, una en la que existe inventario (t_2) y otra en la que se produce ruptura (t_3), dependiendo de los valores de t_3 y τ, puede suceder:

- Que el momento en el que se deba realizar el pedido ($t_1 - \tau$) se encuentre dentro del período en el que hay stock ($\tau > t_3$), por lo que $X > 0$. (Situación reflejada en el gráfico de la Figura 2).
- Que el momento en el que se deba realizar el pedido ($t_1 - \tau$) se encuentre dentro del período en el que se está en ruptura ($\tau < t_3$), por lo que $X < 0$.

Modelo con Reabastecimiento uniforme

En este modelo existe un período (t_4) en el que ingresa y egresa mercadería al almacén a tasas constantes *a* y *h*, respectivamente, hasta producir el lote de *q* unidades y alcanzar un stock máximo de *S* unidades; y un período (t_5), en el que sólo se consume mercadería a una tasa *h.* Por lo tanto, existen dos funciones de stock diferentes. Durante t_4 la función crece a una tasa $a - h$ y durante t_5 la función decrece a la tasa *h*.

Para determinar el nivel de reorden, deberá tenerse en cuenta cuánto es el tiempo de reaprovisionamiento (τ) y, por consiguiente, cuándo debe realizarse el pedido (t_1-τ), y cuánto demora la producción del lote (t_4).

- **Si $t_1 - \tau > t_4$**

El pedido deberá hacerse durante el período en que sólo se consume mercadería y la gráfica del comportamiento del inventario será la que se presenta en la figura 3.

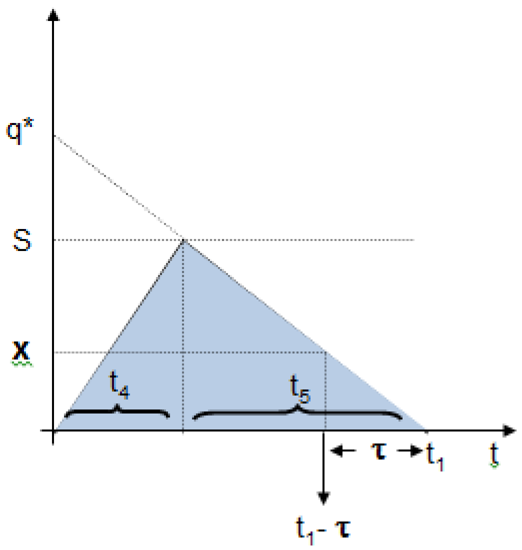
La función de Stock en el momento *t* estará dada por:

$$\mathbf{S(t) = q - h\,t} \tag{9}$$

Dado $\tau > 0$ y conocido, para que no se produzcan faltantes el pedido deberá hacerse en el momento $t_1 - \tau$ y el Nivel de Reorden será:

$$\mathbf{X = q - h\,(t_1 - \tau)} \tag{10}$$

Figura 3
Gráfica del comportamiento del inventario
Modelo con reabastecimiento uniforme
$t_1 - \tau > t_4$



Operando matemáticamente como en el caso del Modelo cierto sin ruptura:

$$X = q - h\,t_1 + h\,\tau$$

$$X = q - q + h\,\tau$$

$$\boxed{\mathbf{X = h\,\tau = m}} \qquad (11)$$

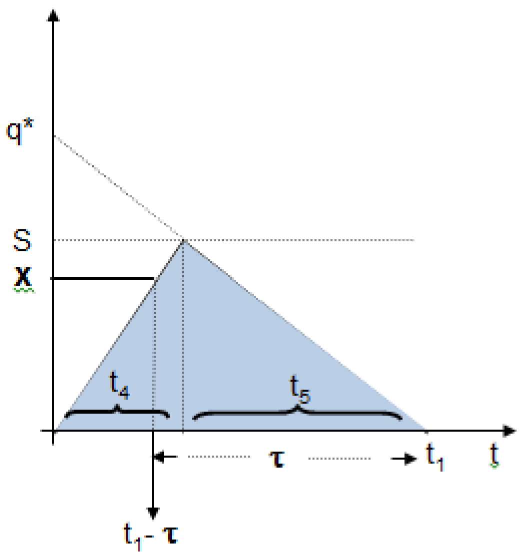
El nivel de reorden será la demanda en τ, m.

Como puede observarse en el gráfico de la Figura 3, existen dos momentos en los que se registra el nivel de inventario X, por lo que será importante aclarar que el pedido deberá hacerse cuando se alcance ese nivel de inventario en el período en el que sólo se atiende la demanda.

- **Si $t_1 - \tau < t_4$**

El pedido deberá hacerse durante el período en que se produce el lote.

Figura 4
Gráfica del comportamiento del inventario
Modelo con reabastecimiento uniforme
$t_1 - \tau < t_4$



Durante t_4 el lote se produce a una tasa *a* y se consume a una tasa *h*, por lo que el stock se genera a una tasa *a-h* y el nivel de Stock en el momento *t* estará dado por:

$$\mathbf{S(t) = (a - h)\ t} \qquad (12)$$

Dado $\tau > 0$ y conocido, para que no se produzcan faltantes el pedido deberá hacerse en el momento $t_1 - \tau$ y el Nivel de Reorden será:

$$\mathbf{X = (a - h)\ (t_1 - \tau)} \qquad (13)$$

Es decir, será el inventario acumulado al momento $t_1 - \tau$ durante el período en el que se produce el lote.

Cuando **τ es una variable aleatoria con distribución de probabilidad conocida**, dada la demanda constante, la demanda en τ, m = h τ, también será una variable aleatoria con la misma distribución de probabilidad de τ.

En este caso, se busca establecer un Nivel de Reorden que limite la probabilidad de que la demanda en τ lo supere. Es decir:

$$\mathbf{X \,/\, P\,(m > X) = \alpha}$$

Que podemos expresar, también, como fijar un nivel de reorden con una probabilidad de 1-α de que ese nivel no sea excedido por la demanda:

$$\mathbf{X \;/\; P\,(m \leq X) = 1- \alpha} \tag{14}$$

Si τ se distribuye Normal con media $\mu(\tau)$ y desviación estándar σ_τ, la demanda en τ se distribuye Normal con media $\mu(m)$ y desvío σ_m, con $\mu(m) = h\ \mu(\tau)$ y $\sigma_m = h\sigma_\tau$.

A efectos prácticos, para calcular el nivel de reorden, se puede estandarizar la variable para trabajar con la distribución Normal Estándar, a través de la expresión:

$$z_{(1-\alpha)} = \frac{X - \mu_{(m)}}{\sigma_m}$$

En consecuencia:

$$\boxed{\mathbf{X = \mu(m) + z_{(1-\alpha)}\,\sigma_m}} \tag{15}$$

En este caso el nivel de reorden queda determinado por la demanda media ($\bar{m}$) más una cantidad $z_{(1-\alpha)}\delta_m$ que recibe el nombre de stock de seguridad.

Dado que la demanda en τ se distribuye Normal, si se fijara el nivel de reorden igual a la demanda media, en el 50% de los casos ese nivel de inventario no alcanzaría para cubrir la demanda.

El **stock de seguridad** representa un **nivel de inventario que tiene la función de cubrir los excesos de la demanda real respecto a la demanda media**. Este nivel de inventario depende de la variabilidad de la demanda y del nivel de probabilidad que se desee de que el nivel de reorden alcance a cubrir la demanda en τ. Cuanto mayor sea la variabilidad de la demanda y el nivel de confianza fijado, mayor será el stock de seguridad a mantener.

Gráficamente, el nivel de reorden X para una probabilidad 1-α de poder satisfacer la demanda en τ se presenta en la Figura 5 a); y en la Figura 5 b) se presenta la gráfica de la distribución normal estandarizada para el valor $z_{(1-\alpha)}$ correspondiente.

Figura 5 a)
Gráfica del nivel de reorden para una probabilidad 1-α de cubrir la demanda en τ

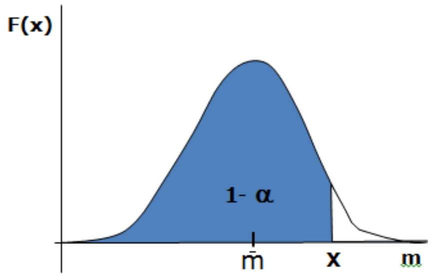
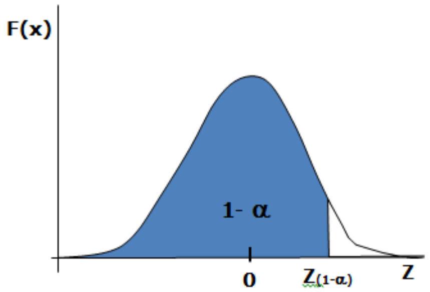


Figura 5 b)
Gráfica del valor de z de la distribución Normal estándar para una probabilidad 1-α



Dada la demanda en τ aleatoria y asumiendo que se distribuye Normal con media $\mu(m)$ ($\mu(m)=h\ \mu(\tau)$) y y desvío σ_m ($\sigma_m = h\sigma_\tau$), analizaremos cómo calcular el **nivel de reorden** para cada uno de los modelos de universo cierto:

- **Modelo de Universo cierto sin ruptura:**
  - Para τ cierto, según (4): $\mathbf{X = h.\tau = m}$
  - Para $\tau \sim$ Normal ($\mu(\tau)$, σ_τ); m $\sim$ Normal ($\mu(m) = h.\mu(\tau)$, $\sigma_m = h.\sigma_\tau$) y P (m ≤ X) = 1- α:

$$\boxed{\mathbf{X = \mu(m) + z_{(1-\alpha)}\ \sigma_m}} \qquad (15)$$

- **Modelo de Universo cierto con ruptura:**
  - Para τ cierto, según (7): $\mathbf{X = h.\tau - R}$
  - Para $\tau \sim$ Normal ($\mu(\tau)$, σ_τ); m $\sim$ Normal ($\mu(m) = h.\mu(\tau)$, $\sigma_m = h.\sigma_\tau$) y P (m ≤ X) = 1- α:

$$\boxed{\mathbf{X = \mu(m) + z_{(1-\alpha)}\ \sigma_m - R}} \qquad (16)$$

- **Modelo de Universo cierto con reaprovisionamiento uniforme:**
  - Para τ cierto, si $t_1 - \tau > t_4$, según (11): $\mathbf{X = h.\tau = m}$
  - Para $\tau \sim$ Normal ($\mu(\tau)$, σ_τ); m $\sim$ Normal ($\mu(m) = h.\mu(\tau)$, $\sigma_m = h.\sigma_\tau$) y P (m ≤ X) = 1- α:

$$\boxed{\mathbf{X = \mu(m) + z_{(1-\alpha)}\ \sigma_m}} \qquad (17)$$

  - Para τ cierto, si $t_1 - \tau < t_4$, según (13): $\mathbf{X = (a - h)\ (t_1 - \tau)}$
  - Para $\tau \sim$ Normal ($\mu(\tau)$, σ_τ):

    Si se quiere establecer un valor para τ tal que la probabilidad de tener stock durante ese tiempo sea 1- α, es decir, P ($\tau \le \tau_0$) = 1- α, a efectos prácticos, se puede estandarizar la variable para trabajar con la distribución Normal Estándar, a través de la expresión:

$$z_{(1-\alpha)} = \frac{\tau - \mu(\tau)}{\sigma_\tau}$$

    Desestandarizando:

$$\tau = \mu(\tau) + z_{(1-\alpha)}\sigma_\tau \qquad (17)$$

    Reemplazando en (13) a τ por su igual en (17):

$$\mathbf{X} = (a-h)\left(t_1 - \mu(\tau) - z_{(1-\alpha)}\sigma_\tau\right)$$

    Aplicando distributiva convenientemente:

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{(a-h)\left(t_1 - \mu(\tau)\right) - (a-h)}\, z_{(1-\alpha)}\sigma_\tau} \qquad (18)$$

Resumiendo, en el siguiente cuadro comparativo presentamos las fórmulas de cálculo del nivel de reorden para cada uno de los casos analizados:

Modelo de Universo Cierto	**τ cierto**	**τ aleatorio con distribución Normal**
Sin ruptura	$X = h.\tau$	$X = \mu(m) + z_{(1-\alpha)}\ \sigma_m$
Con ruptura	$X = h.\tau - R$	$X = \mu(m) + z_{(1-\alpha)}\ \sigma_m - R$
Con reabastecimiento uniforme Si $t_1 - \tau > t_4$ Si $t_1 - \tau < t_4$	 $X = h.\tau$ $X = (a-h)(t_1 - \tau)$	 $X = \mu(m) + z_{(1-\alpha)}\ \sigma_m$ $X = (a-h)\left(t_1 - \mu(\tau)\right) - (a-h)z_{(1-\alpha)}\sigma_\tau$

Bibliografía

1. ANDERSON, SWENEY, WILLIAMS, CAMM y MARTIN: "METODOS CUANTITATIVOS PARA LOS NEGOCIOS" 11ª Ed. Cengage Learning. Méjico, 2011.
2. CARIGNANO, C. y ALBERTO, C.: "APOYO CUANTITATIVO A LAS DECISIONES", 5ª Ed. Asociación Cooperadora de la Fac. de Cs. Es. Argentina, 2019.
3. FUNES, M.: "NIVEL DE REORDEN EN LOS MODELOS DE INVENTARIO CON DEMANDA CIERTA Y CONSTANTE", mimeo 2016.
4. LIZIO, M.: "LECTURAS COMPLEMENTARIAS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA". Asociación Cooperadora de la Fac. de Cs. Es. Argentina, 2008.
5. MATHUR, K. y SOLOW, D.: "INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES". Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. Méjico, 1996.