FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

ÁLGEBRA LINEAL

TEORÍA y PRÁCTICA

Elizabeth Vera de Payer   Magdalena Dimitroff

Versión con ejemplos y ejercicios renovados

2023

Un especial agradecimiento al Ing. Alfredo Payer quien prestó conformidad para poner este material bajo licencia Creative Commons, convencido de que esa hubiera sido la voluntad de la Ing. Elizabeth Vera de Payer.

Índice

1

Espacios Vectoriales

Dado un sistema de coordenadas en el plano, es sabido que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los vectores libres del plano y los pares ordenados de números reales $\mathbb{R}^2$. De igual forma sucede con los vectores libres del espacio y las ternas ordenadas de números reales $\mathbb{R}^3$. Esta correspondencia se extiende a las operaciones de suma de vectores y multiplicación de un vector por un número real, que se traduce en las operaciones usuales con los elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
Nos proponemos generalizar el concepto de **vector** considerando conjuntos cuyos elementos pueden ser sumados y multiplicados por un escalar (elemento de un cuerpo) y que presenten un comportamiento similar al de los vectores geométricos respecto a dichas operaciones.

1.1 Espacios Vectoriales

Definición 1.1.1: Sea **K** un cuerpo y **V** un conjunto no vacío de objetos sobre los que están definidas dos operaciones:

- **Una operación interna** llamada **suma** o **adición**, que asigna a cada par $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ de elementos de **V**, un elemento de **V** denotado $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.
- **Una operación externa** llamada **multiplicación por un escalar**, que asigna a cada par formado por un elemento $k \in \mathbf{K}$, y un elemento $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, un elemento de **V** denotado $k.\mathbf{v}$.

Satisfaciendo los siguientes axiomas para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ y $k, k' \in \mathbf{K}$:

Para la suma o adición:

A1 : $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ **Asociatividad**

A2 : $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ **Conmutatividad**

A3 : Existe un elemento de **V** denotado $\overline{\mathbf{0}}$ y llamado **vector nulo** o **vector cero** de **V** que verifica: $\mathbf{v}+\overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}}+\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

A4 : Para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ existe un elemento de **V** denotado $-\mathbf{u}$ y llamado **opuesto de u** tal que: $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \overline{\mathbf{0}}$.

Continua….

Para la multiplicación:

M1 :	$k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\,\mathbf{u}+k\,\mathbf{v}$	**Distributividad respecto a la suma de vectores**
M2 :	$(k+k')\mathbf{u} = k\,\mathbf{u}+k'\mathbf{u}$	**Distributividad respecto a la suma de escalares**
M3 :	$(k'.k)\mathbf{u} = k'(k\,\mathbf{u})$	**Homogeneidad de la multiplicación por un escalar**
M4 :	$1.\mathbf{u} = \mathbf{u}$	**Al escalar 1 se lo llama identidad multiplicativa**

Entonces diremos: **V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K**

A los elementos de **V** les llamaremos **vectores** mientras que a los elementos del cuerpo **K** les llamamos **escalares.**

Observación: Dependiendo de la aplicación, los escalares normalmente usados son los números reales $k \in \mathbb{R}$ o complejos $k \in \mathbb{C}$, lo que en correspondencia da origen a los espacios vectoriales reales o espacios vectoriales complejos. Salvo expresa mención de lo contrario, en lo que sigue se trabajará con espacios vectoriales reales.

Nota: Debe tenerse en cuenta que en la definición de espacio vectorial no se especifica la naturaleza de los elementos de **V** ni de las operaciones con ellos realizadas. El único requisito es que cumplan con los ocho axiomas de la Definición 1.1.1.

Ejemplos

Ejemplo 1

El conjunto $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$ (pares ordenados de números reales) con las operaciones de adición y multiplicación por escalares ($k \in \mathbb{R}$) definidas en forma habitual, esto es:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$$

Constituye un espacio vectorial sobre los reales, llamado espacio vectorial real o $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Con el fin de mostrar que V es un espacio vectorial, debe comprobarse que satisface todos los axiomas de la Definición 1.1.1.. A modo de ejemplo veamos la demostración de los axiomas A_1, A_3 y M_2, quedando la comprobación del resto de axiomas a cargo del lector.

A_1. Supongamos que $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ y $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ son elementos de $\mathbb{R}^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} &= \left[(x_1,x_2)+(y_1,y_2)\right]+(z_1,z_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)+(z_1,z_2)\\ &= \left((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2\right)=\left(x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2)\right)\\ &= (x_1,x_2)+(y_1+z_1,y_2+z_2)=(x_1,x_2)+\left[(y_1,y_2)+(z_1,z_2)\right]\\ &= \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})\end{aligned}$$

A3. Sea $\overline{\mathbf{0}}=(0,0)\in\mathbb{R}^2$. Entonces, para cualquier $\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ se tiene,

$$\mathbf{x}+\overline{\mathbf{0}}=(x_1,x_2)+(0,0)=(x_1+0,x_2+0)=(x_1,x_2)=\mathbf{x}$$

M2. Sea $\mathbf{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ y sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{x} &= (\alpha+\beta)\cdot(x_1,x_2)=\left((\alpha+\beta)\,x_1,(\alpha+\beta)\,x_2\right)=\left(\alpha\,x_1+\beta\,x_1,\alpha\,x_2+\beta\,x_2\right)\\ &= (\alpha\,x_1,\alpha\,x_2)+(\beta\,x_1,\beta\,x_2)=\alpha\,(x_1,x_2)+\beta\,(x_1,x_2)\\ &= \alpha\,\mathbf{x}+\beta\,\mathbf{x}\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,/\,x_i\in\mathbb{R}\ i=1,2,\ldots n\}$ (n-uplas de números reales) con las operaciones:

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n)+(b_1,b_2,\ldots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$$
$$k\,(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(ka_1,ka_2,\ldots,ka_n)\quad con\ \ k\in\mathbb{R}$$

$\mathbf{V}=\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3

El conjunto $\mathbf{K}^{m\times n}$ (matrices $m\times n$ sobre el cuerpo **K**) con las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar definidas elemento a elemento:

$$[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]\qquad i=1,2,\ldots,m\quad j=1,2,\ldots,n$$
$$k.[a_{ij}]=[ka_{ij}]$$

Es un espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

Notar que utilizaremos la notación $[a_{ij}]$ para indicar la matriz $m\times n$, cuyos elementos son a_{ij} con $i=1,2,\ldots,m$ y $j=1,2,\ldots,n$. Es decir:

$$[a_{ij}]=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ldots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4

El conjunto $\mathbb{R}[X]=\{\mathbf{p}=p(X)=a_o+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_kX^k\,/\,a_i\in\mathbb{R}\}$ de todos los polinomios en X a coeficientes reales, con las operaciones de adición de polinomios y multiplicación de un polinomio por un número real, definidas de la forma habitual:

$$\mathbf{p} = a_o + a_1 X + \cdots + a_n X^n \ ; \ \mathbf{q} = b_o + b_1 X + \cdots + b_m X^m \quad con\ n < m$$
$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (a_o + b_o) + (a_1 + b_1) X + \cdots + (a_n + b_n) X^n + \cdots + b_m X^m$$
$$k\ \mathbf{p} = (ka_o) + (ka_1) X + \cdots + (ka_n) X^n$$

$\mathbb{R}[X]$ es un espacio vectorial real. Observar además que el "vector nulo" es el polinomio $\bar{\mathbf{0}} = 0 + 0X + \cdots + 0X^n$ mientras que el "vector opuesto" de un elemento $\mathbf{p} = a_o + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ está dado por $-\mathbf{p} = -a_o - a_1 X - \cdots - a_n X^n$.

Ejemplo 5

El conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f \,/\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ función} \}$ de todas las funciones a valores reales, con las operaciones:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(k\, f)(x) = k\, f(x) \qquad para\ k \in \mathbb{R}$$

Es un espacio vectorial real. Notar que se está viendo a cada función de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ como un elemento en el espacio vectorial y por lo tanto constituye un vector del mismo.

Observar que el "vector nulo" es la función nula $\mathbf{0} : x \to 0$ es decir $\mathbf{0}(x) = 0$, mientras que el "vector opuesto" de una función $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es $(-f)$ es decir $(-f)(x) = -f(x)$.

Ejemplo 6

Sea $\mathbb{S}$ el conjunto de todas las sucesiones de números reales de la forma:

$$\{x_k\} = (.....x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, ...)$$

Si $\{y_k\}$ es otro elemento de $\mathbb{S}$, entonces la suma $\{x_k\} + \{y_k\}$ es la sucesión $\{x_k + y_k\} \in \mathbb{S}$ obtenida sumando los términos homólogos de las dos sucesiones dato. De forma similar. La multiplicación por escalar $\alpha.\{x_k\}$ es la sucesión $\{\alpha\, x_k\} \in \mathbb{S}$

$\mathbb{S}$ con las operaciones antes definidas es un espacio vectorial. Los axiomas de la Definición 1.1.1. se verifican de forma similar que para $\mathbb{R}^n$.

Los elementos de $\mathbb{S}$ aparecen en Ingeniería por ejemplo, siempre que una señal, sea eléctrica, mecánica, óptica, etc., se mide (o "muestrea") en tiempos discretos. En este contexto, se la llama a $\mathbb{S}$ el espacio de las señales a tiempo discreto. Una señal puede visualizarse con una gráfica como la de la Figura 1.1.

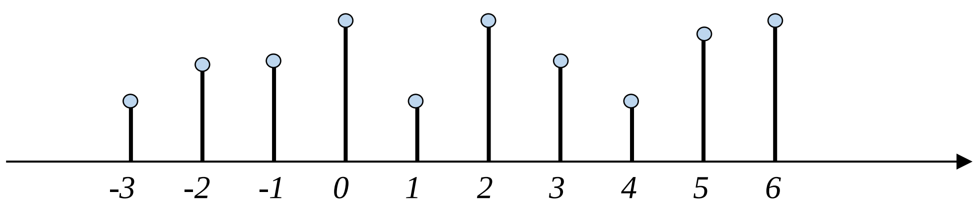


Figura 1.1: Una señal a tiempo discreto

Queda como ejercicio verificar en estos ejemplos el cumplimiento de los axiomas de la Definición 1.1.1..

Consecuencias de la Definición

De la definición de Espacio Vectorial resultan inmediatas las siguientes propiedades:

Teorema 1.1.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo **K**. Se verifica:

a) $0.\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

b) $k.\overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}}$ para todo $k \in$ K.

c) Si $k.\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$**,** entonces $\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$ ó $k = 0$ (o ambos a la vez)**.**

d) $(-1).\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Demostración:

a) Teniendo en cuenta que $0 = 0 + 0$ planteamos

$$
\begin{aligned}
&0.\mathbf{v} = (0+0).\mathbf{v} = 0.\mathbf{v} + 0.\mathbf{v} \quad \text{por axioma } M_2 \\
&\Downarrow \\
&0.\mathbf{v} = 0.\mathbf{v} + 0.\mathbf{v} \\
&\Downarrow \quad \text{(sumando a ambos miembros } -(0.\mathbf{v}) \text{ y asociando convenientemente)} \\
&-(0.\mathbf{v}) + 0.\mathbf{v} = \left[-(0.\mathbf{v}) + (0.\mathbf{v})\right] + (0.\mathbf{v}) \\
&\Downarrow \quad \text{según axioma } A_4 \\
&\overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}} + 0.\mathbf{v} \\
&\Downarrow \quad \text{según axioma } A_3 \\
&\overline{\mathbf{0}} = 0.\mathbf{v}
\end{aligned}
$$

b) Teniendo en cuenta que $\overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{0}} + \overline{\mathbf{0}}$ y según el axioma M_1 se tiene que $k.\overline{\mathbf{0}} = k.\overline{\mathbf{0}} + k.\overline{\mathbf{0}}$. La prueba sigue sumando a ambos miembros $-\left(k.\overline{\mathbf{0}}\right)$ y asociando convenientemente. Queda como ejercicio.

c) Sea $k.\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$. Si suponemos que $k \neq 0$ entonces existe su inverso k^{-1}, luego

$$
\begin{aligned}
&k.\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}} \\
&\Downarrow \\
&k^{-1}.\left(k.\overline{\mathbf{0}}\right) = k^{-1}.\overline{\mathbf{0}} \\
&\Downarrow \quad \text{por axioma } M_3 \text{ y por b)} \\
&\left(k^{-1}.k\right).\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}} \\
&\Downarrow \\
&1.\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}} \\
&\Downarrow \quad \text{por axioma } M_4 \\
&\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $k.\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}} \Rightarrow \mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$ ó $k = 0$.

d) La prueba queda como ejercicio. #

1.2 Subespacios

Definición 1.2.1.
Un subconjunto no vacío **W** de un espacio vectorial **V** se dice que es un subespacio vectorial de **V** si **W** es en sí mismo un espacio vectorial bajo las operaciones de adición y la multiplicación por escalar definidas en **V**.

En general, para verificar si un subconjunto **W** es un espacio vectorial es necesario verificar todas las condiciones exigidas a un conjunto para ser tal. Sin embargo, si **W** es parte de un conjunto más grande **V** del que se sabe es un espacio vectorial y las operaciones son las heredadas del conjunto **V**, entonces algunos axiomas se cumplen automáticamente en **W.**
Así, no hace falta verificar por ejemplo que $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ con $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W}$ porque esta relación se cumple para $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ como vectores de **V**.

A continuación, se demostrará un resultado que hace que sea relativamente sencillo determinar si un subconjunto de **V** es o no un subespacio.

Teorema 1.2.1. Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K,** $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$**;** **W** no vacío. **W** es un subespacio de **V** sí y solo sí

a) Si $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$**,** entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ (la suma de dos vectores de **W** pertenece a **W**).

b) Si $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ y $k \in \mathbf{K}$**,** entonces $k.\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ (el producto de un vector **W** por cualquier escalar de **K** pertenece a **W**).

Demostración:

⇒) Si **W** es subespacio de **V**, por la definición es un espacio vectorial en sí mismo, luego **W** es cerrado bajo la suma de vectores y bajo la multiplicación por escalares.

⇐) Para mostrar que **W** es un espacio vectorial, es necesario mostrar que se cumplen los ocho axiomas de la Definición 1.1.1. teniendo en cuenta las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en **V**. Como los vectores de **W** están en **V** los axiomas A_1, A_2, M_1, M_2, M_3 y M_4 se cumplen. Si $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$**,** entonces por b) se tiene $0.\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ y como $0.\mathbf{u} = \overline{\mathbf{0}}$ entonces $\overline{\mathbf{0}} \in \mathbf{W}$ satisfaciéndose así el axioma A_3. Finalmente, por la parte b) $(-1).\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ y como $(-1).\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ entonces $-\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ por lo que el axioma A_4 también se cumple, y con esto queda completa la demostración. #

Nota: Si se satisface la condición b) del enunciado, se tiene que:
Haciendo $k=0$ resulta: $0.\mathbf{u} = \overline{\mathbf{0}}$ luego el vector nulo pertenece a **W**.
Haciendo $k=-1$ resulta: $(-1).\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ luego todo vector de **W** tiene su opuesto en **W**. A veces resulta útil por su sencillez verificar si el vector nulo del vectorial **V** está en **W** porque en caso negativo podemos asegurar que **W no es** un subespacio vectorial de **V.**

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea **V** un espacio vectorial sobre **K**.

- **V** es un subespacio de sí mismo.
- El subconjunto $\{\ \bar{\mathbf{0}}\ \}$ cuyo único elemento es el vector cero es un subespacio de **V** pues se verifica trivialmente que $\bar{\mathbf{0}}+\bar{\mathbf{0}}=\bar{\mathbf{0}}$ y $k.\bar{\mathbf{0}}=\bar{\mathbf{0}}$ para todo escalar *k*.

El espacio vectorial **V** es el subespacio más amplio en el sentido de que incluye a cualquier otro subespacio de **V**.
$\mathbf{W}=\{\ \bar{\mathbf{0}}\ \}$ es el subespacio más pequeño, en el sentido de que está incluido en cualquier otro. Con frecuencia se le da el nombre de **subespacio trivial**.

Ejemplo 2

$\mathbf{V}=\mathbb{R}$. Los únicos subespacios son $\{\ \bar{\mathbf{0}}\ \}$ y el mismo $\mathbb{R}$.
Sea $\mathbf{W}\neq\{\bar{\mathbf{0}}\}$ un subespacio de $\mathbb{R}$. Entonces si $\alpha\neq 0$ es un elemento de **W**, luego $1=\alpha^{-1}.\alpha\in\mathbf{W}$ y en consecuencia $\beta=1.\beta\in\mathbf{W}$ para todo número real β. Por lo tanto $\mathbf{W}=\mathbb{R}$.

Ejemplo 3

Si $\mathbf{V}\neq\{\ \bar{\mathbf{0}}\ \}$ y se tiene $\mathbf{u}$ vector no nulo de **V**, entonces el conjunto $\mathbf{W_u}=\{k.\mathbf{u}\ /\ k\in K\}$ es un subespacio de **V**. En efecto:

- si k_1, k_2 son dos escalares, los vectores $k_1.\mathbf{u}$ y $k_2.\mathbf{u}$ pertenecen a $\mathbf{W_u}$ y su suma $(k_1.\mathbf{u}+k_2.\mathbf{u})=(k_1+k_2).\mathbf{u}$ es también un vector de $\mathbf{W_u}$.
- para cualquier escalar α y cualquier vector $k.\mathbf{u}$ perteneciente a $\mathbf{W_u}$ se tiene que el vector $\alpha.(k.\mathbf{u})=(\alpha.k).\mathbf{u}$ es también un vector de $\mathbf{W_u}$.

En consecuencia $\mathbf{W_u}$ es un subespacio de **V**.

Ejemplo 4

En $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$

- $\mathbf{W_u}=\{k.\mathbf{u}\ /\ k\in\mathbb{R}\text{ con }\mathbf{u}\neq(0,0)\}=\{(x,y)\ /\ y=kx\}$ que geométricamente representa el conjunto de puntos situados en una recta por el origen, **es** un **subespacio** de $\mathbb{R}^2$. Verifíquelo.
- Por otro lado, $\mathbf{W}=\{(x,y)\ /\ y=kx+b\ \text{ con }\ b\neq 0\}$ que geométricamente representa el conjunto de puntos que se encuentran sobre una recta que no pasa por el origen, **NO** es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. ¿Por qué?

Luego, los subespacios de $\mathbb{R}^2$ son: $\mathbb{R}^2$ mismo, el $\{(0,0)\}$ y cualquier recta por el origen. (Se prueba que éstos son los únicos subespacios de $\mathbb{R}^2$).

Ejemplo 5

En $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores no nulos y no paralelos entonces el conjunto $\mathbf{W}=\{\alpha\,\mathbf{u}+\beta\,\mathbf{v}\ \ /\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$, representa geométricamente un plano por el origen.
Es fácil mostrar que $\mathbf{W}$ es un subespacio (demuéstrelo!).

Luego los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son: $\mathbb{R}^3$ mismo, el conjunto $\{(0,0,0)\}$, cualquier plano por el origen y cualquier recta por el origen.

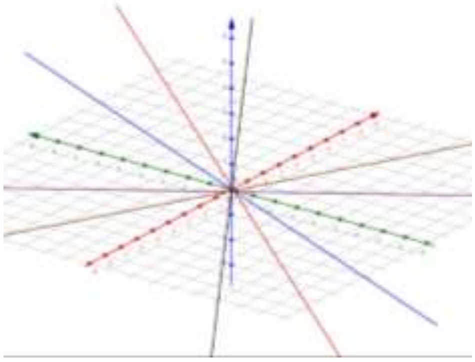


Figura **1**.2: Rectas por el origen en $\mathbb{R}^3$

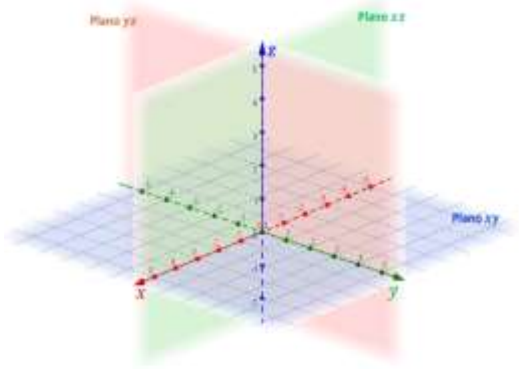


Figura **1**.3: Planos por el origen en $\mathbb{R}^3$

Nota: En $\mathbb{R}^3$, como ya se mencionó, el conjunto $\mathbf{W}=\{(s,t,0)\ \ /\ \ s,t\in\mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, pero **NO** es $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 6

Si $\mathbf{V}$ = $\mathbb{R}^{2\times 2}$ el subconjunto $\mathbf{U}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\ \ /\ \ a=1\right\}$ **no** es un subespacio de $\mathbf{V}$ ya que el elemento neutro de **V,** esto es la matriz nula $\overline{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no pertenece a **U.**

Ejemplo 7

Dada $\mathbf{A}\in\mathbf{K}^{m\times n}$ el conjunto $\mathbf{W}=\{\mathbf{X}\in\mathbf{K}^n\,/\,\mathbf{A}.\mathbf{X}=\mathbf{0}\}$ es un subespacio de $\mathbf{K}^n$ ó $\mathbf{W}=\{\mathbf{X}\in\mathbf{K}^{n\times 1}\,/\,\mathbf{A}.\mathbf{X}=\mathbf{0}\}$ es un subespacio de $\mathbf{K}^{n\times 1}$.
Es decir, <u>el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas con *"n"* incógnitas a coeficientes en el cuerpo K</u>, $\mathbf{A}.\mathbf{X}=\mathbf{0}$, es un subespacio de $\mathbf{K}^n$ si se piensa cada solución como una n-upla, ó de $\mathbf{K}^{n\times 1}$ si se piensa cada solución como una matriz columna.

Notar que estamos utilizando notación matricial al expresar $\mathbf{X}\in\mathbf{K}^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{A}.\mathbf{X}=\mathbf{0}$, esto es:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{n\times 1} \text{ tal que } \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

Verifiquemos que **W** es un subespacio, esto es:

> Sea el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbf{K}^{n\times 1}$. Dada $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m\times n}$, el conjunto $\mathbf{W} = \left\{\mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1} \,/\, \mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{0}\right\}$ es un subespacio de $\mathbf{K}^{n\times 1}$.

Demostración: consideramos que **C** y **D** son elementos de **W**, es decir matrices columna solución del sistema $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{0}$ con $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m\times n}$. Esto es, **C** y **D** satisfacen $\mathbf{A}.\mathbf{C} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{A}.\mathbf{D} = \mathbf{0}$, luego :

- $(\mathbf{C}+\mathbf{D}) \in \mathbf{W}$ pues teniendo en cuenta propiedades de matrices, planteamos $\mathbf{A}.(\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A}.\mathbf{C} + \mathbf{A}.\mathbf{D} = \mathbf{0}$ (**C**+**D** es una solución del sistema $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{0}$).

- Para cualquier escalar *k*, $k\,\mathbf{C} \in \mathbf{W}$ puesto que teniendo en cuenta propiedades de matrices $\mathbf{A}.\,(k\,\mathbf{C}) = k(\mathbf{A}.\mathbf{C}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ($k\,\mathbf{C}$ es una solución del sistema $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{0}$).

Por lo tanto, el conjunto $\mathbf{W} = \left\{\mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1} \,/\, \mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{0}\right\}$ es un subespacio al que se denomina **espacio nulo de A.**

> **Nota:** El conjunto de soluciones de un sistema no homogéneo **no** es un subespacio.
>
> ¿Por qué?

Ejemplo 8

En $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto $\mathbf{W} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(a) = 0\right\}$ de las funciones que se anulan para $x = a$, es un subespacio.

En efecto:

- Si consideramos que f y g son funciones que se anulan en $x = a$, entonces se tiene que: $(f+g)(a) = f(a) + g(a) = 0 + 0 = 0$ luego la función $f + g \in \mathbf{W}$.

- Para todo escalar $k \in \mathbb{R}$, la función $(k\,f)$ se anula en $x = a$, puesto que: $(k\,f)(a) = k.\,f(a) = k.0 = 0$ luego $(k\,f) \in \mathbf{W}$.

Ejemplo 9

En $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto $\mathbf{W} = C[a,b]$ de todas las funciones de valor real definidas y continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ es un subespacio.

¿Qué propiedades de las funciones continuas deberían verificarse para demostrar esta última afirmación?

Ejemplo 10

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]$ y $n \in \mathbb{N}$. El conjunto de todos los polinomios en X a coeficientes reales de grado menor o igual que n, no es subespacio pues el polinomio nulo no pertenece al conjunto.
Si ahora consideramos
$\mathbf{P}_n = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}[X] \,/\, p(X) = a_o + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_s X^s \text{ con } a_i \in \mathbb{R} \text{ y } s \le n \right\} \cup \left\{ \text{polinomio nulo} \right\}$ si es un subespacio.

En efecto, sean $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{P}_n$ con $\mathbf{p} = a_o + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ y $\mathbf{q} = b_o + b_1 X + \cdots + b_n X^n$

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (a_o + b_o) + (a_1 + b_1) X + \cdots + (a_n + b_n) X^n \quad \text{luego} \quad \mathbf{p} + \mathbf{q} \in \mathbf{P}_n$$
$$k\,\mathbf{p} = (ka_o) + (ka_1) X + \cdots + (ka_n) X^n \quad \text{luego} \quad k\,\mathbf{p} \in \mathbf{P}_n$$

Nota: El conjunto **U** de todos los polinomios en X a coeficientes reales de grado igual a n y el polinomio nulo, **no** es un subespacio de $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]$.

¿Por qué?

1.3 Intersección y Suma de Subespacios

Las operaciones usuales entre conjuntos son la unión "$\cup$", la intersección "$\cap$" y la suma "+".

Definición 1.3.1. Sean $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$ subconjuntos cualesquiera del vectorial **V**. Definimos:

- La unión de $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$: $\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ \mathbf{v} \in \mathbf{S}_1 \text{ ó } \mathbf{v} \in \mathbf{S}_2 \right\}$.
- La intersección de $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$: $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ \mathbf{v} \in \mathbf{S}_1 \text{ y } \mathbf{v} \in \mathbf{S}_2 \right\}$.

Veamos que sucede cuando los conjuntos tienen la estructura algebraica de subespacio y realizamos estas operaciones con ellos.

Intersección de Subespacios

Teorema 1.3.1. Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

Si **U** y **W** subespacios de un espacio vectorial **V** entonces $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ es un subespacio del espacio vectorial **V**.

Demostración:

Por definición, la intersección de **U** y **W** está dada por $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} \,/\, \mathbf{v} \in \mathbf{U} \ \wedge \ \mathbf{v} \in \mathbf{W} \right\}$.

Como **U** y **W** son subespacios de **V** se tiene que $\overline{\mathbf{0}} \in \mathbf{U}$ y $\overline{\mathbf{0}} \in \mathbf{W}$ luego $\overline{\mathbf{0}} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, es decir $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ es no vacío.

Veamos ahora que la suma de dos vectores de $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ pertenece a $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.
Sean los vectores $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ y $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, luego se tiene que:

$$\mathbf{v}_1 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W} \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{matrix}\mathbf{v}_1 \in \mathbf{U} \\ \\ \mathbf{v}_2 \in \mathbf{U}\end{matrix}} \;\; \begin{matrix}\text{y} \\ \\ \text{y}\end{matrix} \;\; \boxed{\begin{matrix}\mathbf{v}_1 \in \mathbf{W} \\ \\ \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}\end{matrix}}$$

$$\mathbf{v}_2 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W} \;\Rightarrow$$

Por hipótesis $\mathbf{U}$ es subespacio $\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ Por hipótesis $\mathbf{W}$ es subespacio

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{U} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$$

Queda como ejercicio verificar que el producto de un vector de $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ por cualquier escalar de $\mathbf{K}$ pertenece a $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. Es decir, queda verificar que si $\mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ y $k \in \mathbf{K}$ entonces $k\mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.#

Generalizando: la intersección de cualquier colección finita de subespacios es un subespacio.

Observación: la unión de subespacios no es, en general, un subespacio.

Suma de Subconjuntos de un Espacio Vectorial

Definición 1.3.2. Sean $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$ subconjuntos de un espacio vectorial $\mathbf{V}$.

El conjunto de todos los vectores que se obtienen sumando un vector de $\mathbf{S}_1$ y un vector de $\mathbf{S}_2$ se denomina suma de los subconjuntos $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$, y se denota $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$. $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \,/\, \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \text{ con } \mathbf{v}_1 \in \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S}_2\}$.

Es decir que para verificar si un vector $\mathbf{v}$ pertenece a la suma $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ es necesario encontrar o probar la existencia de un elemento $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{S}_1$ y un elemento $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{S}_2$, tal que: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y consideremos $\mathbf{S}_1 = \{(0,2)\ (-1,3)\ (0,0)\}$ y $\mathbf{S}_2 = \{(4,0)\ (1,-1)\ (4,-2)\}$ conjuntos. Observar que:

- $(3,3) = (-1,3) + (4,0)$ por consiguiente $(3,3) \in \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$
- $(0,0) \notin \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ puesto que en $\mathbf{S}_2$ no existe el opuesto de ninguno de los elementos de $\mathbf{S}_1$.
- $(4,0) = (0,0) + (4,0)$ ó $(4,0) = (0,2) + (4,-2)$ en este caso es posible expresar un elemento de $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ en más de una forma, como suma de un elemento de $\mathbf{S}_1$ y un elemento de $\mathbf{S}_2$.
- el conjunto $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ resulta: $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \{(4,2)\ (1,1)\ (4,0)\ (3,3)\ (0,2)\ (3,1)\ (1,-1)\ (4,-2)\}$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y consideremos los conjuntos $\mathbf{S}_1 = \{(2,\ 1)\}$ y $\mathbf{S}_2 = \{(x, 0)\ /\ 0 \le x \le 1\}$ luego

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \{(x,1)\ /\ 2 \le x \le 3\}$$

Observación: Cuando uno de los conjuntos se reduce a un único elemento **"p"**, con la notación $\mathbf{p}+\mathbf{S}$ se indica la suma de los conjuntos $\{\mathbf{p}\}$ y $\mathbf{S}$.

Así, escribimos $(2,1) + \{(x,0)\ /\ 0 \le x \le 1\} = \{(x,1)\ /\ 2 \le x \le 3\}$.

Nota: En los dos ejemplos precedentes, el conjunto $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, **no** es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. ¿Por qué?

El siguiente resultado establece una condición necesaria para que la suma de dos conjuntos de un vectorial sea subespacio.

Teorema 1.3.2. Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

Si **U** y **W** subespacios de un espacio vectorial **V** entonces $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ es un subespacio del espacio vectorial **V**.

Demostración:

Considerando que $\mathbf{U}+\mathbf{W} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}\ /\ \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \text{ con } \mathbf{u} \in \mathbf{U} \wedge \mathbf{w} \in \mathbf{W}\}$, notemos primero que $\mathbf{U}+\mathbf{W} \ne \{\ \}$ pues dado que **U** y **W** son subespacios de **V** se tiene que $\bar{\mathbf{0}} \in \mathbf{U}$ y $\bar{\mathbf{0}} \in \mathbf{W}$ y por lo tanto $\bar{\mathbf{0}} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ ($\bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{0}} + \bar{\mathbf{0}}$ con $\bar{\mathbf{0}} \in \mathbf{U}$ y $\bar{\mathbf{0}} \in \mathbf{W}$).

Veamos ahora que la suma de dos vectores de $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ pertenece a $\mathbf{U}+\mathbf{W}$.

Sean $\mathbf{v_1} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ y $\mathbf{v_2} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$. Entonces, $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ pues:

como $\mathbf{v_1} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ entonces $\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1} + \mathbf{w_1}$ con $\mathbf{u_1} \in \mathbf{U}$ y $\mathbf{w_1} \in \mathbf{W}$

como $\mathbf{v_2} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ entonces $\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} + \mathbf{w_2}$ con $\mathbf{u_2} \in \mathbf{U}$ y $\mathbf{w_2} \in \mathbf{W}$

Sumando miembro a miembro, aplicando propiedades del espacio vectorial y teniendo en cuenta que por hipótesis **U** y **W** son subespacios, se tiene que:

$$\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = \underbrace{(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2})}_{\in \mathbf{U}} + \underbrace{(\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2})}_{\in \mathbf{W}}$$ entonces hemos verificado que $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$.

Queda como ejercicio verificar que el producto de un vector de $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ por cualquier escalar de **K** pertenece a $\mathbf{U}+\mathbf{W}$. Es decir, queda verificar que si $\mathbf{v} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$ y $k \in \mathbf{K}$ entonces $k\mathbf{v} \in \mathbf{U}+\mathbf{W}$. #

1.4 Combinaciones Lineales

Definición 1.4.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K.** Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V** y $k_1, k_2, \ldots, k_r$ escalares de **K.** Se dice que un vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ según los escalares $k_1, k_2, \ldots, k_r$ sí y sólo sí $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$.

Ejemplos

Ejemplo 1

$\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Si consideramos $\mathbf{v}_1 = (2,1,3)$ y $\mathbf{v}_2 = (-1,4,2)$ vectores de $\mathbb{R}^3$ y $k_1 = 2$; $k_2 = -3$ se tiene que $\mathbf{v} = 2\,(2,1,3) + (-3)\,(-1,4,2) = (7,-10,0)$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ según los escalares k_1, k_2.

Ejemplo 2

$\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

¿Es **v** combinación lineal de $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$? Para que la respuesta sea afirmativa, deben existir escalares k_1 y k_2 tales que: $k_1.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + k_2.\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Queda planteado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 = -2 \\ -1k_1 + k_2 = 3 \\ 3k_1 + 5k_2 = -1 \end{cases}$$ que tiene solución única $(k_1, k_2) = (-2,1)$

Luego, el vector **v** es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ según los escalares k_1, k_2.

Ejemplo 3

$\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$. Sea $\mathbf{p} = 2 + X - 3X^2 \in \mathbf{P}_2$.

¿Es **p** combinación lineal de $\mathbf{p}_1 = 1 - X$ y $\mathbf{p}_2 = 2X + X^2$? Para que la respuesta sea afirmativa, deben existir escalares k_1 y k_2 tales que: $k_1 \cdot (1 - X) + k_2 \cdot (2X + X^2) = 2 + X - 3X^2$.

Luego, queda planteado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} k_1 = 2 \\ -k_1 + 2k_2 = 1 \\ k_2 = -3 \end{cases}$. Se puede verificar fácilmente que no tiene solución.

Por lo tanto, el vector **p** no es combinación lineal de los vectores $\mathbf{p}_1 = 1 - X$ y $\mathbf{p}_2 = 2X + X^2$.

1.5 Subespacio Generado y Generadores

Teorema 1.5.1. Sea **V** espacio vectorial sobre **K.** Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V**.
Si $\mathbf{W} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \;\;/\;\; \mathbf{v} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + k_r \mathbf{v}_r \;\; \text{con} \;\; k_i \in \mathbf{K} \;\; i = 1, 2, \ldots, r\}$
es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ se cumple:

a) **W** es un subespacio de **V.**

b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son elementos de **W.**

c) Si $\mathbf{W'}$ es cualquier subespacio de **V** que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ entonces $\mathbf{W} \subset \mathbf{W'}$.

Demostración:

a) **W** es no vacío pues $\overline{\mathbf{0}} \in \mathbf{W}$ ya que $\overline{\mathbf{0}} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + k_r \mathbf{v}_r$ con $k_i = 0 \;\; i = 1, 2, \ldots, r$.

Veamos ahora que la suma de dos vectores de $\mathbf{W}$ pertenece a $\mathbf{W}$. Y también que el producto de un vector de $\mathbf{W}$ por cualquier escalar de **K** pertenece a $\mathbf{W}$.

Sean **u** y **v** vectores pertenecientes a **W** es decir:

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_r \mathbf{v}_r \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + y_r \mathbf{v}_r$$

Entonces se tiene que:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1)\mathbf{v}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (x_r + y_r)\mathbf{v}_r$ luego $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{W}$.
- $\forall k \in \mathbf{K}$, $\quad k\mathbf{u} = (k\, x_1)\mathbf{v}_1 + (k\, x_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (k\, x_r)\mathbf{v}_r$ luego $k\mathbf{u} \in \mathbf{W}$.

Por lo tanto, **W** es un subespacio de **V**.

b) Para demostrar que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son elementos de **W** notemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_r && \text{luego} \quad \mathbf{v}_1 \in \mathbf{W} \\
\mathbf{v}_2 &= 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_r && \text{luego} \quad \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W} \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_r &= 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 1\mathbf{v}_r && \text{luego} \quad \mathbf{v}_r \in \mathbf{W}
\end{aligned}$$

c) Para demostrar esta afirmación, basta con probar que si $\mathbf{w} \in \mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{w} \in \mathbf{W'}$.

Recordemos que $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ sí y solo sí $\mathbf{w} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_r \mathbf{v}_r$.

Por hipótesis, $\mathbf{W'}$ un subespacio y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son elementos de $\mathbf{W'}$. Entonces $x_1 \mathbf{v}_1,\; x_2 \mathbf{v}_2,\; \ldots,\; x_r \mathbf{v}_r$ son elementos de $\mathbf{W'}$ y por consiguiente su suma $\mathbf{w} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_r \mathbf{v}_r$ pertenece a $\mathbf{W'}$. #

Definición 1.5.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre **K**. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V**. Sea **W** el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$. Llamaremos a **W** subespacio generado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ y lo denotaremos como $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$.

El subespacio generado por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ puede ser el mismo **V**, en este caso diremos que el conjunto $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ genera al espacio vectorial **V**, o bien que $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un generador de **V**.

Definición 1.5.2. Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**.

$\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un generador de **V** sí y solo si para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se tiene que $\mathbf{v} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + k_r \mathbf{v}_r$ donde $k_1, k_2, \ldots, k_r$ son escalares.

Notación: $\mathbf{V} = \langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$

Nota: las siguientes notaciones son equivalentes: $\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle = gen\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$.

Observación: Se han usado las palabras **generador** y **subespacio generado** cuyo significado preciso debe ser tenido en cuenta.

Un **generador** es un conjunto de vectores tales que todo vector del vectorial se puede expresar como combinación lineal de ellos.

Un **subespacio generado** es el conjunto formado por todas las combinaciones lineales que se pueden realizar con los vectores del generador.

Ejemplos

Ejemplo 1

Si **u** es un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$ ó de $\mathbb{R}^3$, el subespacio generado $\mathbf{W} = \langle \mathbf{u} \rangle$ es la recta por el origen, con vector de dirección **u**.

Si $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y por ejemplo elegimos $\mathbf{u} = (1,2)$ se tiene que:

$$\mathbf{W} = \langle (1,2) \rangle = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x,y) = \alpha(1,2) \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

¿Qué condición debe cumplir (x,y) para poder escribirse como $(x,y) = \alpha(1,2)$?

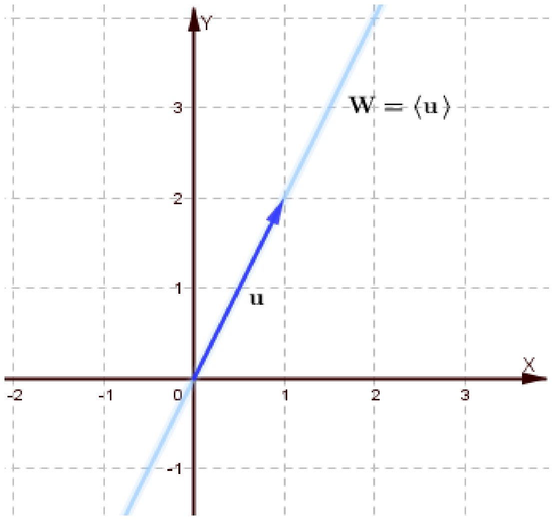
$$(x,y) = \alpha(1,2) \;\Leftrightarrow\; (x,y) = (\alpha, 2\alpha) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \alpha = x \\ 2\alpha = y \end{cases}$$

¿qué condiciones deben cumplir x e y para que el sistema sea compatible? Consideramos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas (Notación: F_i fila i)

$$\left.\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 2 & y \end{array}\right. \xrightarrow[F_2+(-2)F_1]{} \left.\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y-2x \end{array}\right. \quad \text{condición de compatibilidad}$$

Entonces podemos describir al subespacio **W** a través de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo (en este caso es una sola ecuación), estamos dando una "caracterización" de **W**:

$$\mathbf{W} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y - 2x = 0\right\}.$$



Si $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y elegimos $\mathbf{u} = (1,2,2)$ se tiene que:

$$\mathbf{W} = \langle (1,2,2) \rangle = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = \alpha(1,2,2) \quad \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

¿Qué condición debe cumplir (x, y, z) para poder escribirse como $(x, y, z) = \alpha(1,2,2)$?

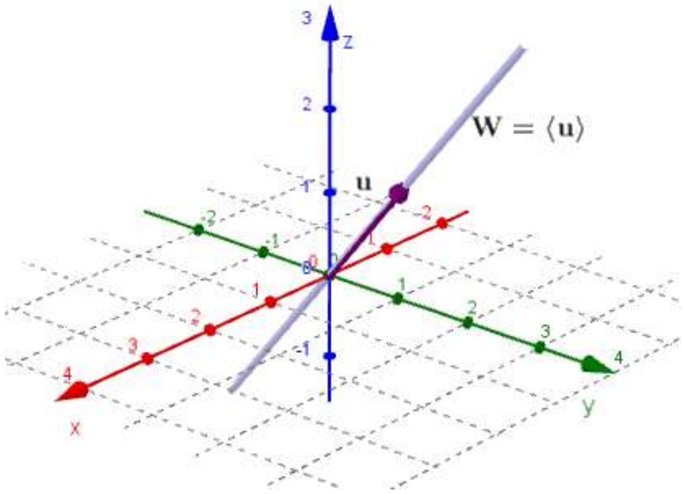
$$(x, y, z) = \alpha(1,2,2) \iff (x, y, z) = (\alpha, 2\alpha, 2\alpha) \iff \begin{cases} \alpha = x \\ 2\alpha = y \\ 2\alpha = z \end{cases}$$

¿qué condiciones deben cumplir *x*, *y*, *z* para que el sistema sea compatible? Consideramos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left.\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 2 & y \\ 2 & z \end{array}\right. \xrightarrow[F_3+(-2)F_1]{F_2+(-2)F_1} \begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y-2x \\ 0 & z-2x \end{array} \quad \text{condiciones de compatibilidad}$$

Entonces podemos describir al subespacio **W** a través de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, es decir estamos dando una "caracterización" de **W**:

$$\mathbf{W} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{cases} y - 2x = 0 \\ z - 2x = 0 \end{cases}\right\}$$



Ejemplo 2

Si **u** y **v** son dos vectores no nulos y no paralelos de $\mathbb{R}^3$, el subespacio generado por ellos $\mathbf{W} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ es un plano por el origen.

Por ejemplo: si $\mathbf{u} = (2,1,0)$ y $\mathbf{v} = (0,-1,1)$ el subespacio generado por estos vectores está dado por:

$$\mathbf{W} = \langle (2,1,0),(0,-1,1) \rangle = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y,z) = \alpha(2,1,0) + \beta(0,-1,1) \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\}$$

es un plano por el origen.

¿Qué condición debe cumplir (x,y,z) para poder escribirse como $(x,y,z) = \alpha(2,1,0) + \beta(0,-1,1)$?

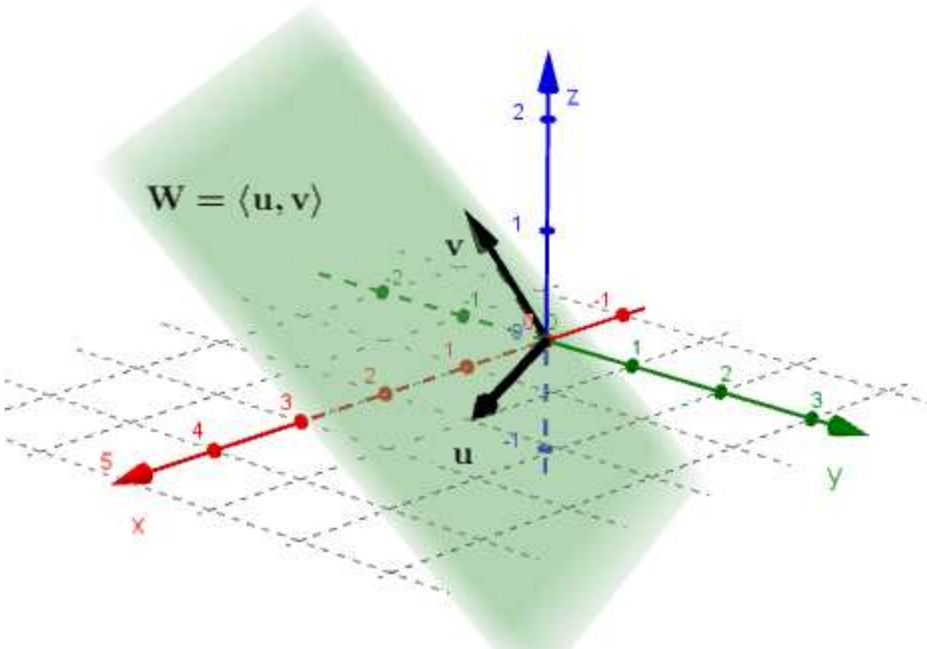
$$(x,y,z) = \alpha(2,1,0) + \beta(0,-1,1) \;\Leftrightarrow\; (x,y,z) = (2\alpha, \alpha-\beta, \alpha) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 2\alpha = x \\ \alpha - \beta = y \\ \alpha = z \end{cases}$$

¿qué condiciones deben cumplir x, y, z para que el sistema sea compatible? Consideramos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+F_3]{\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}x \\ 1 & 0 & y+z \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+(-1)F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & y+z-\frac{1}{2}x \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \quad \text{condición de compatibilidad}$$

Entonces podemos describir al subespacio **W** a través de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, es decir estamos dando una "caracterización" de **W** y podemos escribir a **W** del siguiente modo:

$$\mathbf{W} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - 2y - 2z = 0 \right\}$$



Ejemplo 3

Si **V** es un espacio vectorial arbitrario y $\mathbf{u} \neq \overline{\mathbf{0}}$ es un vector de **V.** El subespacio $\mathbf{W_u} = \{ k\,\mathbf{u} \,/\, k \in \mathbf{K} \}$ está generado por **u** y de acuerdo a la notación introducida $\mathbf{W_u} = \langle \mathbf{u} \rangle$.

Ejemplo 4

Sean $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ y $\mathbf{W} = \langle (2,1,0,0), (-1,0,1,2), (1,1,1,2), (3,1,-1,-2) \rangle$ subespacio de $\mathbf{V}$.

¿Cómo hallamos la "caracterización" de **W**?

Es decir, ¿podemos describir a **W** como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo?

$$\mathbf{W} = \left\{ k_1(2,1,0,0) + k_2(-1,0,1,2) + k_3(1,1,1,2) + k_4(3,1,-1,-2) \ \ / \ \ k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Planteamos $(x,y,z,w) \in \mathbf{W} \Leftrightarrow (x,y,z,w) = k_1(2,1,0,0) + k_2(-1,0,1,2) + k_3(1,1,1,2) + k_4(3,1,-1,-2)$

Operando tenemos $(x,y,z,w) = (2k_1 - k_2 + k_3 + 3k_4,\ k_1 + k_3 + k_4,\ k_2 + k_3 - k_4,\ 2k_2 + 2k_3 - 2k_4)$

Luego los dos vectores precedentes son iguales si y sólo si $\begin{cases} 2k_1 - k_2 + k_3 + 3k_4 = x \\ k_1 + k_3 + k_4 = y \\ k_2 + k_3 - k_4 = z \\ 2k_2 + 2k_3 - 2k_4 = w \end{cases}$

¿qué condiciones deben cumplir *x, y, z, w* para que el sistema de ecuaciones sea compatible?

Consideramos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 & x \\ 1 & 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & -1 & z \\ 0 & 2 & 2 & -2 & w \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+(-2)F_3]{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y-x \\ 2 & -1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w-2z \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+(-2)F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3x-2y \\ 0 & 1 & 1 & -1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w-2z \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z+3x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w-2z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1)F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3x+2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z+3x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w-2z \end{array}\right) \quad \text{condiciones de compatibilidad}$$

Entonces podemos describir al subespacio **W** a través de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, es decir estamos dando una "caracterización" de **W** y podemos escribir a **W** del siguiente modo: $\mathbf{W} = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ -2z + w = 0 \end{cases} \right\}$

Ejemplo 5

Dada la matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m \times n}$ $\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

- Si consideramos las matrices formadas a partir de las filas de **A,** denominadas **vectores renglón o fila de A,**

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= [a_{11} \;\; a_{12} \;\; \dots \;\; a_{1n}] \\
\mathbf{A}_2 &= [a_{21} \;\; a_{22} \;\; \dots \;\; a_{2n}] \\
&\vdots \\
\mathbf{A}_m &= [a_{m1} \;\; a_{m2} \;\; \dots \;\; a_{mn}]
\end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{W} = \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m \rangle$ subespacio de $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{1\times n}$, generado por las matrices renglón de **A,** se llama **espacio renglón (o fila) de A.**

- Análogamente, si consideramos las matrices formadas con las columnas de **A,** llamadas **vectores columna de A**,

$$\mathbf{A}^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}; \quad \dots \quad \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces $\mathbf{W} = \langle \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^n \rangle$ subespacio de $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{n\times 1}$, generado por las matrices columna de **A,** se llama **espacio columna de A.**

Ejemplo 6

¿Es $\mathbb{R}^2 = \langle (1,1),\ (2,-1) \rangle$?.

Para verificarlo, todo $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ se debe poder expresar como combinación lineal de $(1,1)$ y de $(2,-1)$. Es decir, deben existir escalares k_1 y k_2 tales que: $(x, y) = k_1(1,1) + k_2(2,-1)$

Luego, queda planteado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x = k_1 + 2k_2 \\ y = k_1 - k_2 \end{cases}$ y en consecuencia se tiene que: $k_1 = \dfrac{x+2y}{3}$, $k_2 = \dfrac{x-y}{3}$.

Entonces, para todo $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ podemos escribir

$$(x, y) = \left(\frac{x+2y}{3}\right)(1,1) + \left(\frac{x-y}{3}\right)(2,-1)$$

Por lo tanto $\mathbb{R}^2 = \langle (1,1),\ (2,-1) \rangle$.

¿Cuál sería la "caracterización" de $\langle (1,1),\ (2,-1) \rangle$?

Ejemplo 7

Todo vector $\mathbf{v} = (x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$; $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$; $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$.

En efecto $(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$. Luego se tiene que $\mathbb{R}^3 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$

Ejemplo 8

¿ $\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0),\ (0,1,0),\ (2,3,0),\ (0,0,1) \rangle$?.

En efecto, todo $\mathbf{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se expresa como:

$$(x,y,z) = (x-2k)(1,0,0) + (y-3k)(0,1,0) + k(2,3,0) + z(0,0,1) \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{R}.$$

Notar que el vector $(2,3,0)$ es combinación lineal de $(1,0,0),\ (0,1,0)$ y $(0,0,1)$. Luego resulta que $\langle (1,0,0),\ (0,1,0),\ (2,3,0),\ (0,0,1) \rangle = \langle (1,0,0),\ (0,1,0), (0,0,1) \rangle$.

El siguiente teorema generaliza lo que acabamos de ver en el Ejemplo 7. Es decir, si un vector de un generador del espacio vectorial **V**, es combinación lineal de los otros vectores del generador, puede ser eliminado y los vectores restantes también generan a **V**.

Teorema 1.5.2. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V** y $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$ subespacio de **V**.
Si $\mathbf{v}_1$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r$ entonces

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r \rangle.$$

Demostración:
Debemos probar que: $\mathbf{W} \subset \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$ y $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r \rangle \subset \mathbf{W}$.

a) Veamos que $\mathbf{W} \subset \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$.

Sea $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, luego $\mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\mathbf{v}_r$. Por hipótesis se tiene que $\mathbf{v}_1 = y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3 + \cdots + y_r\mathbf{v}_r$. Luego, reemplazando se tiene:

$$\mathbf{w} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\mathbf{v}_r = x_1(y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3 + \cdots + y_r\mathbf{v}_r) + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + \cdots + x_r\mathbf{v}_r$$
$$\mathbf{w} = (x_1y_2 + x_2)\mathbf{v}_2 + (x_1y_3 + x_3)\mathbf{v}_3 + \cdots + (x_1y_r + x_r)\mathbf{v}_r$$

o sea que **w** es combinación lineal de $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r$ es decir que $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$. Esto prueba que todo vector perteneciente a **W** es un elemento del subespacio $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$, es decir que $\mathbf{W} \subset \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$.

b) Veamos ahora que entonces $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r \rangle \subset \mathbf{W}$.

Como $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r$ son elementos de **W**, y éste es un subespacio, de la afirmación c) del **Teorema 1.5.1.** resulta que $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r \rangle \subset \mathbf{W}$. (Observación: *Al utilizar el ítem c) del Teorema 1.5.1 estamos razonando del siguiente modo: Sabemos que W es subespacio y que* $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r$ *son elementos de W entonces todas las combinaciones lineales de* $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r$ *serán elementos de W, es decir que* $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r \rangle \subset \mathbf{W}$)

Luego, de lo demostrado en (a) y (b) resulta que: $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$. #

Ejemplos

Ejemplo 1

Sean $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times2}$ y $\mathbf{W} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ subespacio de **V**.

El vector $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ya que: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Por lo tanto, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ puede ser eliminado del generador, resultando $\mathbf{W} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_4$. Sea $\mathbf{W} = \left\langle 4+2X-2X^2+2X^3,\ 1+X+X^2,\ 3+X-X^2,\ -X-2X^2,\ X+2X^3 \right\rangle$ subespacio de **V**.

El vector $\mathbf{p} = 3+X-X^2$ es combinación lineal de $\mathbf{q} = 1+X+X^2$ y de $\mathbf{r} = -X-2X^2$ ya que $3+X-X^2 = 3\left(1+X+X^2\right) + 2\left(-X-2X^2\right)$. Luego, $\mathbf{p} = 3+X-X^2$ puede ser eliminado del generador.

Asimismo, el vector $\mathbf{t} = 4+2X-2X^2+2X^3$ es combinación lineal de los demás.

Por lo tanto, resulta que $\mathbf{W} = \left\langle 1+X+X^2,\ -X-2X^2,\ X+2X^3 \right\rangle$.

Suma de Subespacios y Generadores

Sea **V** es un espacio vectorial sobre un cuerpo **K** y sean $\mathbf{W_1}$, $\mathbf{W_2}$ subespacios de **V**.
Cualquier subespacio que incluya a $\mathbf{W_1}$ y a $\mathbf{W_2}$ (es decir que incluya a $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$) incluye también a $\mathbf{W_1} + \mathbf{W_2}$, pues la suma de vectores de un subespacio pertenece al mismo. De allí resulta que $\mathbf{W_1} + \mathbf{W_2}$ es el subespacio más pequeño que incluye a $\mathbf{W_1} \cup \mathbf{W_2}$.
Además, si

$\mathbf{S}_1 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ es un generador de $\mathbf{W_1}$, esto es $\mathbf{W}_1 = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r \rangle$

$\mathbf{S}_2 = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ es un generador de $\mathbf{W_2}$, esto es $\mathbf{W}_2 = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s \rangle$

todo vector de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es suma de una combinación lineal de vectores de $\mathbf{S}_1$ y de una combinación lineal de vectores de $\mathbf{S}_2$, en consecuencia:

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s \rangle \quad \text{o sea} \quad \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle \mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2 \rangle.$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Si $\mathbf{W}_1 = \langle (1,0,0),\ (0,1,0) \rangle$ y $\mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0),\ (0,0,1) \rangle$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$.
Se tiene que $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1) \rangle$.

Si bien en este caso podemos notar fácilmente que $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0) \rangle$, no siempre se pueden dar generadores de la intersección a partir de generadores de los subespacios **W**1 y **W**2. ¿Qué hacemos entonces?.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Si $\mathbf{W}_1 = \langle (2,1,0) \rangle$ y $\mathbf{W}_2 = \langle (3,0,1) \rangle$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

Resulta que $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle (2,1,0),\ (3,0,1) \rangle$.

En este caso $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{(0,0,0)\}$. ¿Por qué?

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$. Sean $\mathbf{W}_1 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ (x,y,z,w) = (k,0,0,0)\}$ y $\mathbf{W}_2$ el espacio de soluciones del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ subespacios de **V**.

Si expresamos a $\mathbf{W}_1$ y a $\mathbf{W}_2$ como subespacios generados, tenemos que:

$$\mathbf{W}_1 = \langle (1,0,0,0) \rangle \text{ y que } \mathbf{W}_2 = \langle (2,-1,1,0),\ (-5,3,0,1) \rangle .$$

Luego, un generador del subespacio suma se obtiene uniendo los generadores, esto es:

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0,0),\ (2,-1,1,0),\ (-5,3,0,1) \rangle .$$

Por otro lado, el subespacio $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ estará dado por los vectores $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ que satisfacen la caracterización de $\mathbf{W}_1$ y la de $\mathbf{W}_2$, esto es:

$$\mathbf{W}_1 = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \right\} \qquad \mathbf{W}_2 = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Ejemplo 4

Sea el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2x2}$. Sean los subespacios $\mathbf{W}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2} \ / \ \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \right\}$ **y** $\mathbf{W}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -2k & k \\ k+t & t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2} \ / \ k,t \in \mathbb{R} \right\}$**.**

Si expresamos a **W**1 y a **W**2 como subespacios generados, tenemos que:

$$\mathbf{W}_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ y } \mathbf{W}_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Luego, un generador del subespacio suma se obtiene uniendo los generadores, esto es:

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las caracterizaciones de los subespacios $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ se tiene que:

$$\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\text{x}2} \;/\; \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

1.6 Dependencia e Independencia Lineal de Vectores

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de un espacio vectorial **V**.
Si $\mathbf{V} \neq \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$, no todo vector de **V** es combinación lineal de los vectores dados, sino solamente aquellos que pertenecen a $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$.
Pero para cualquier elección de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ (y para cualquier *r*) el vector $\bar{\mathbf{0}} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$; es decir que el vector $\bar{\mathbf{0}}$ es siempre combinación lineal de *r* vectores arbitrariamente elegidos. En efecto, basta escribir $\bar{\mathbf{0}} = 0\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{v}_r$ o sea con todos los coeficientes iguales a cero a la cual llamaremos **combinación lineal trivial.**

Nos preguntamos si es posible escribir el vector nulo $\bar{\mathbf{0}}$ como combinación lineal de los vectores dados en forma distinta a la trivial, es decir con coeficientes no todos nulos.

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ la respuesta depende de cuáles son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$. Así por ejemplo en $\mathbb{R}^3$ si:
$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0)$; $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)$; $\mathbf{v}_3 = (1, 4, 0)$

$$(0,0,0) = 0\,(1, 2, 0) + 0\,(1, 0, 0) + 0\,(1, 4, 0)$$
$$(0, 0, 0) = (-2)\,(1, 2, 0) + 1\,(1, 0, 0) + 1\,(1, 4, 0)$$

El vector $\bar{\mathbf{0}} = (0, 0, 0)$ es combinación lineal de los vectores dados en más de una forma.

Mientras que si: $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$; $\mathbf{v}_2 = (1,1,1)$ son los vectores dados, el vector $\bar{\mathbf{0}} = (0, 0, 0)$ se expresa como combinación lineal de ellos en una sola forma, ya que:

$$(0,0,0) = k_1(1,0,0) + k_2(1,1,1) = (k_1 + k_2, k_2, k_2) \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = 0\,.$$

En el primer caso diremos que los vectores dados son **linealmente dependientes**, mientras que en casos como el segundo, que los vectores son **linealmente independientes.**

Definición 1.6.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo **K**. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V.** Diremos que:
los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son **linealmente dependientes** sí y sólo si existen escalares $k_1, k_2, \ldots, k_r$ no todos nulos tal que $k_1\,\mathbf{v}_1 + k_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\,\mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{0}}$

Definición 1.6.2. Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo **K.** Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V.** Diremos que:
los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son **linealmente independientes** sí y sólo si $k_1\,\mathbf{v}_1 + k_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\,\mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{0}}$ se da únicamente con $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2}$ y sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ vectores de **V**. ¿Son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ linealmente dependientes?

Planteamos

$$\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{R}^{2\times2}} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + k_4\mathbf{v}_4 \qquad (*)$$

esto es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + k_4\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + 2k_2 - k_3 + k_4 & -k_4 \\ k_1 + k_2 & k_1 + 4k_2 - 3k_3 + 2k_4 \end{bmatrix} \text{ sí y sólo si } \begin{cases} k_1 + 2k_2 - k_3 + k_4 = 0 \\ -k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + 4k_2 - 3k_3 + 2k_4 = 0 \end{cases}$$

Consideramos la matriz ampliada del sistema y reducimos por filas:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_1(-1)]{\substack{F_2(-1) \\ F_3+F_1(-1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_3(2)]{F_1+F_3(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_2(1)]{\substack{F_1+F_2(1) \\ F_3+F_2(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego tenemos $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_2 - k_3 = 0 \\ k_4 = 0 \end{cases}$, es decir $k_1 = -k_3;\ k_2 = k_3;\ k_3 = k_3\ \ y\ \ k_4 = 0$.

Como vemos, existen infinitos escalares solución de la combinación lineal $(*)$, entonces los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ **son linealmente dependientes**.

Observar que podemos expresar a uno de ellos como combinación de los demás pues como $\overline{\mathbf{0}}_{\mathbf{R}^{2\times 2}} = k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + k_3\mathbf{v}_3 + k_4\mathbf{v_4}$ con $k_1 = -k_3;\ k_2 = k_3;\ k_3 = k_3\ \ y\ \ k_4 = 0$, elegimos $k_3 = 1$ y se tiene que $\overline{\mathbf{0}}_{\mathbf{R}^{2\times 2}} = (-1)\,\mathbf{v_1} + 1\mathbf{v_2} + 1\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4$.

Por lo tanto $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + 1.\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 2

Sea el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$. ¿Los vectores $\mathbf{p}_1 = X^2 - X$, $\mathbf{p_2} = -2X + 1$ son linealmente independientes?.

Para poder responder a la pregunta, planteamos $\overline{\mathbf{0}}_{\mathbf{P}_2} = k_1\mathbf{p_1} + k_2\mathbf{p_2}$ esto es

$$0 + 0X + 0X^2 = k_1\left(X^2 - X\right) + k_2\left(-2X + 1\right)$$

Operando tenemos $$0 + 0X + 0X^2 = k_2 + \left(-k_1 - 2k_2\right)X + k_1X^2$$

La última igualdad se verifica sí y sólo si $\begin{cases} k_2 = 0 \\ -k_1 - 2k_2 = 0 \\ k_1 = 0 \end{cases}$ sí y sólo si $k_1 = 0$ y $k_2 = 0$.

Entonces los vectores $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p_2}$ **son linealmente independientes**.

Observación: Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes, el vector nulo se expresa de una sola forma como combinación lineal de estos vectores (forma trivial), mientras que, si dichos vectores son linealmente dependientes, además de la forma trivial existen otras maneras de expresar al vector nulo como combinación lineal de ellos.

Teoremas de Caracterización

Teorema 1.6.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V.**
Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes **sí y sólo si** todo $\mathbf{v} \in \left\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \right\rangle$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ en una sola forma.

Demostración:

$\Rightarrow$) *Hipótesis:* los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes.

Tesis (debemos probar): todo $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ en una sola forma.

Sea $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$. Supongamos que podemos escribir el vector $\mathbf{v}$ como sigue:

$$\mathbf{v} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{v}_r$$
$$\mathbf{v} = y_1\,\mathbf{v}_1 + y_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + y_r\,\mathbf{v}_r$$

Restando miembro a miembro se obtiene

$$\bar{\mathbf{0}} = (x_1 - y_1)\,\mathbf{v}_1 + (x_2 - y_2)\,\mathbf{v}_2 + \cdots + (x_r - y_r)\,\mathbf{v}_r$$

$$\Downarrow \text{ por hipótesis } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \text{ son linealmente independientes}$$

$$x_i - y_i = 0 \quad \text{para} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{r})$$
$$\Downarrow$$
$$x_i = y_i \quad \text{para} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{r})$$

es decir, $\mathbf{v}$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ en una sola forma.

$\Leftarrow$) *Hipótesis:* todo $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ en una sola forma.

Tesis (debemos probar): los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes.

Si todo vector perteneciente a $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ en una sola forma, la única combinación lineal que expresa el vector nulo del espacio vectorial es $\bar{\mathbf{0}} = 0\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{v}_r$. Luego los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes. #

> **Teorema 1.6.2.** Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V** con $r \geq 2$.
> Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente dependientes **sí y sólo si** alguno de ellos es combinación lineal de los demás.

Demostración:

$\Rightarrow$) *Hipótesis:* Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente dependientes

Tesis (debemos probar): alguno los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ es combinación lineal de los demás.

Si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente dependientes, por definición se tiene:

$$k_1\,\mathbf{v}_1 + k_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\,\mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{0}} \text{ con algún coeficiente distinto de cero.}$$

Sin pérdida de generalidad, puesto que en este contexto el orden de los vectores carece de importancia, supongamos que $k_1 \neq 0$.

Entonces si $k_1 \neq 0$, k_1 tiene inverso multiplicativo k_1^{-1} en **K** y entonces:

$$\mathbf{v}_1 = \left(-k_1^{-1}k_2\right)\mathbf{v}_2 + \left(-k_1^{-1}k_3\right)\mathbf{v}_3 + \cdots + \left(-k_1^{-1}k_r\right)\mathbf{v}_r$$

Luego $\mathbf{v}_1$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r$.

⇐) *Hipótesis:* alguno de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ es combinación lineal de los demás.
Tesis (debemos probar): los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente dependientes.

Supongamos que $\mathbf{v}_1$ es combinación de $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r$ entonces podemos escribir

$$\mathbf{v}_1 = x_2\,\mathbf{v}_2 + x_3\,\mathbf{v}_3 + \cdots + x_r\,\mathbf{v}_r$$

por lo tanto

$$1\mathbf{v}_1 - x_2\,\mathbf{v}_2 - x_3\,\mathbf{v}_3 - \cdots - x_r\,\mathbf{v}_r = \overline{\mathbf{0}}$$

la combinación lineal que expresa así el vector nulo $\overline{\mathbf{0}}$ es no trivial, pues el coeficiente de $\mathbf{v}_1$ es 1.

Luego los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente dependientes. #

Nota: La prueba de los siguientes enunciados queda como ejercicio para el lector.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K.

1. Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. El vector **v** es linealmente independiente sí y sólo sí $\mathbf{v} \neq \overline{\mathbf{0}}$.
2. Dos vectores **u** y **v** no nulos son linealmente dependientes sólo sí $\mathbf{u} = k\,\mathbf{v}$.
3. Si entre los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ figura el vector nulo, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente dependientes.
4. Si entre los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ figuran dos vectores iguales entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente dependientes.
5. Si al conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ linealmente dependientes, se le agrega el vector **u**, los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}$ son linealmente dependientes.
6. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son vectores linealmente independientes, entonces los vectores $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes.
7. Si $\mathbf{V} = \mathbf{K}^n$, los vectores en “escalera” son linealmente independientes.

Ejemplos

Ejemplo 1

Los vectores de $\mathbb{R}^n: (1,0,0,0,\ldots,0);\ (0,1,0,0,\ldots,0);\ldots;(0,0,0,0,\ldots,1)$ están “en escalera” luego son linealmente independientes.

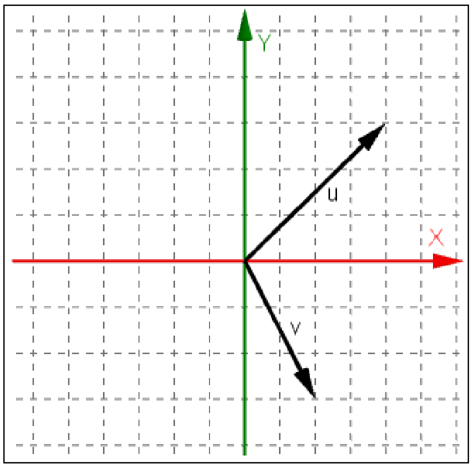
Ejemplo 2

En $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$, las matrices $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$; $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 9\\ -6 & 12\end{bmatrix}$ satisfacen: $\mathbf{B}=3.\mathbf{A}$ luego son dos vectores linealmente dependientes.

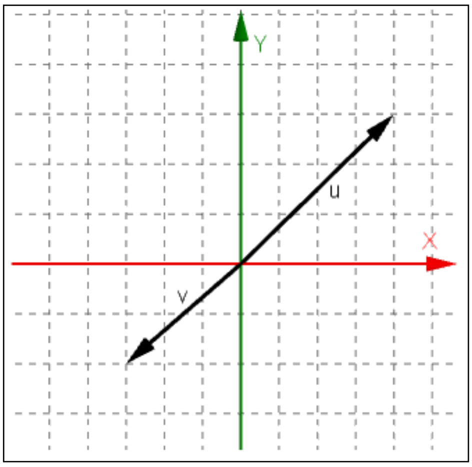
Interpretación Geométrica de la Dependencia e Independencia Lineal.

Resulta de utilidad interpretar geométricamente la dependencia e independencia lineal. Esto es factible cuando se visualizan los vectores en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$.

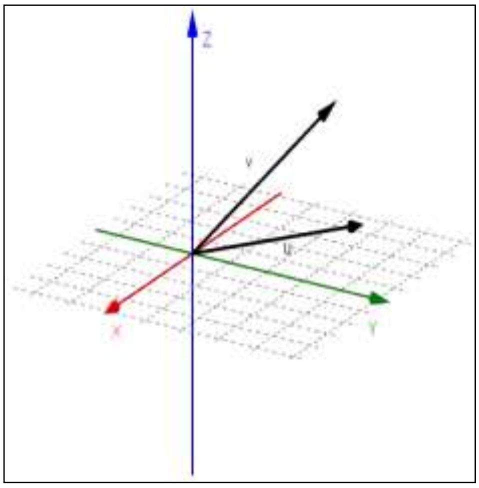
Entonces, dos vectores son linealmente independientes si al graficar los respectivos representantes con origen coincidente con el origen de coordenadas, no resultan ubicados sobre la misma recta según se observa en la Figura 1.4. ((a); (b); (c) y (d))



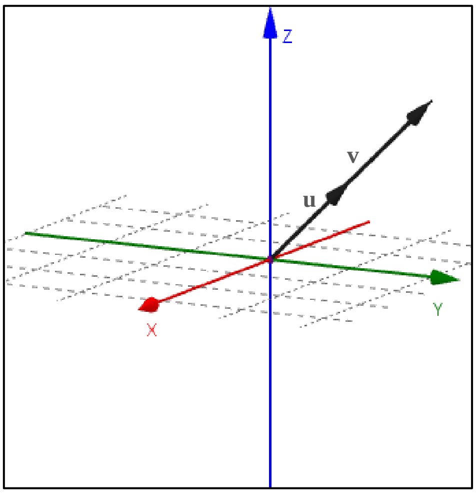
(a) vectores l.i. en $\mathbb{R}^2$.



(b) vectores l.d. en $\mathbb{R}^2$.



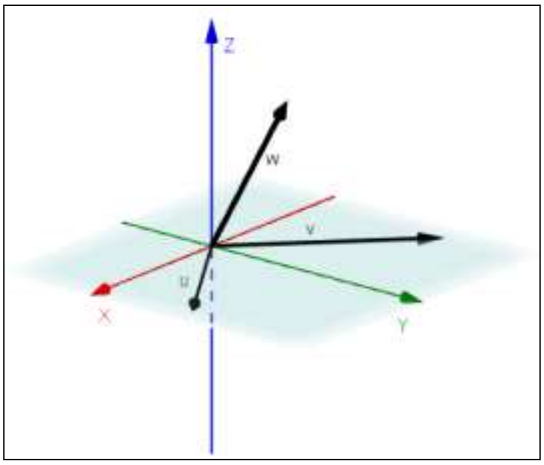
(c) vectores l.i. en $\mathbb{R}^3$.



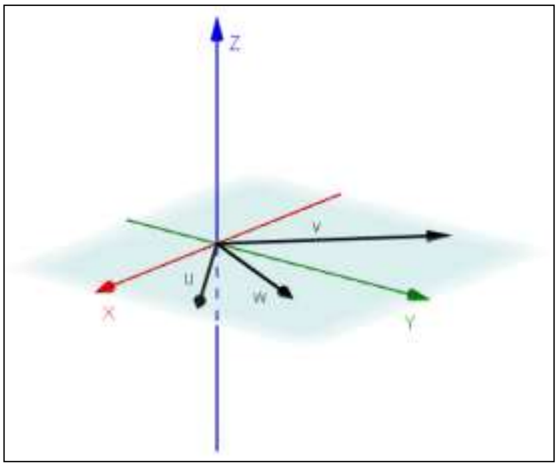
(d) vectores l.d. en $\mathbb{R}^3$.

Figura 1.4.

En el caso de tres vectores en $\mathbb{R}^3$, la independencia lineal implica que no están situados en el mismo plano (Figura 1.5. (a) y (b))



(a) vectores l.i. en $\mathbb{R}^3$.



(b) vectores l.d. en $\mathbb{R}^3$.

Figura 1.5.

1.7 Generadores y Dependencia Lineal

Teorema 1.7.1. Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**.
Sean $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$ y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ elementos arbitrarios de **V.**
Si $n > m$, entonces, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ son linealmente dependientes.

Demostración:

Dado que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ generan a **V**, entonces es posible expresar a cada uno de los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ como combinación lineal de ellos:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= a_{11}\,\mathbf{v}_1 + a_{21}\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m1}\,\mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\,\mathbf{v}_i \\ \mathbf{w}_2 &= a_{12}\,\mathbf{v}_1 + a_{22}\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m2}\,\mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\,\mathbf{v}_i \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_n &= a_{1n}\,\mathbf{v}_1 + a_{2n}\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\,\mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{in}\,\mathbf{v}_i \end{aligned} \qquad (1)$$

Se quiere mostrar que los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ son linealmente dependientes. Se plantea entonces una combinación lineal de los mismos igualada al vector nulo. Luego, los vectores serán linealmente dependientes si existen escalares no todos nulos que la satisfagan:

$$x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{w}_n = \bar{\mathbf{0}}$$

Teniendo en cuenta las relaciones establecidas para $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ en (1), obtenemos:

$$x_1 \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\,\mathbf{v}_i + x_2 \sum_{i=1}^{m} a_{i2}\,\mathbf{v}_i + \cdots + x_n \sum_{i=1}^{m} a_{in}\,\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{0}}$$

$$x_1(a_{11}\,\mathbf{v}_1 + a_{21}\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m1}\,\mathbf{v}_m) + x_2(a_{12}\,\mathbf{v}_1 + a_{22}\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m2}\,\mathbf{v}_m) + \cdots + x_n(a_{1n}\,\mathbf{v}_1 + a_{2n}\,\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\,\mathbf{v}_m) = \bar{\mathbf{0}}$$

Poniendo en evidencia los coeficientes de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ se tiene:

$$(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\mathbf{v}_1 + (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n)\mathbf{v}_2 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)\mathbf{v}_m = \bar{\mathbf{0}}$$

Una condición **suficiente** para que se cumpla esta última relación es que sean cero los coeficientes de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ es decir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Estas condiciones constituyen un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, con *m* ecuaciones y n incógnitas.
Por hipótesis $n > m,$ es decir que es mayor el número de incógnitas que el de ecuaciones, entonces este sistema admite soluciones distintas de la solución trivial.
Por lo tanto, existen escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ no todos nulos tales que:

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n = \bar{\mathbf{0}}$$

luego los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ son linealmente dependientes. #

> **Corolario 1.7.1.** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Si **V** tiene un generador de *n* elementos y se tienen *r* vectores de V que son linealmente independientes, entonces: $r \leq n$.

Demostración:
Queda como ejercicio para el lector. #

Observación: En el ejemplo 6 de la Sección 1.5., se mostró que $\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0),\ (0,1,0), (0,0,1) \rangle$.
Luego cuatro vectores de $\mathbb{R}^3$ son siempre linealmente dependientes.

> **Teorema 1.7.2.** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores de **V**. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes y $\mathbf{u} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}$ son linealmente independientes.

Demostración:

Hipótesis: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes y $\mathbf{u} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$
Tesis (debemos probar): los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}$ son linealmente independientes.

Sean $x_1, x_2, ..., x_r, x$ escalares tales que:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\mathbf{v}_r + x\mathbf{u} = \bar{\mathbf{0}} \qquad \textbf{(1)}$$

Debe ser $x = 0,$ ya que de lo contrario, **u** sería combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ en contradicción con la hipótesis que plantea que **u** no pertenece al subespacio generado por ellos.

Por lo tanto, se tiene:

$$x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{0}}$$

Por hipótesis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes, entonces $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$.

Es decir que la relación **(1)** se cumple sólo si todos los coeficientes son cero. Por lo tanto $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}$ son linealmente independientes. #

Ejemplo

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$. Los vectores $\mathbf{v}_1 = (2,0,0,0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0,1,0,0)$ son linealmente independientes.
Si consideramos el vector $\mathbf{u} = (0,0,-3,0)$, vemos que los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes pues $\mathbf{u} \notin \mathbf{W} = \langle (2,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$.

1.8 Bases y Dimensión de un Espacio Vectorial

Entre los subconjuntos que generar un espacio vectorial **V** o un subespacio, estudiaremos aquellos que lo hacen de la manera más "eficiente" posible. Por ello en esta sección, juegan un papel fundamental aquellos subconjuntos de vectores que son linealmente independientes.
Por este motivo los distinguiremos con un nombre especial, como lo expresa la siguiente definición:

Definición 1.8.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K.**

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es una base de **V** **sí y sólo si**

a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes.

b) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle = \mathbf{V}$.

Notación: $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$

Ejemplos

Ejemplo 1

Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$; $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$; $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ generan $\mathbb{R}^3$. Como están "en escalera" son linealmente independientes, luego forman una base de $\mathbb{R}^3$ la cual recibe el nombre particular de "base canónica" o "base estándar".

Ejemplo 2

Análogamente, en $\mathbb{R}^4$ el conjunto $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$

Ejemplo 3

Generalizando, en $\mathbb{R}^n$, la base estándar es el conjunto de n-uplas

$$\{(1,0,0,0,\ldots,0),(0,1,0,0,\ldots,0),(0,0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,0,\ldots,1)\}$$

Ejemplo 4

Consideremos el subespacio $\mathbf{W} = \langle (1,0,1),\ (2,1,3),\ (0,1,1),\ (1,1,2) \rangle$.

$(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, es un vector de $\mathbf{W}$ si se satisface que

$$\begin{aligned}(y_1,y_2,y_3) &= x_1(1,0,1)+x_2(2,1,3)+x_3(0,1,1)+x_4(1,1,2)\\ &= (x_1+2x_2+x_4,\ x_2+x_3+x_4,\ x_1+3x_2+x_3+2x_4)\end{aligned}$$

Luego:

$$(y_1,y_2,y_3)\in\mathbf{W} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1+2x_2+0x_3+x_4=y_1\\ 0x_1+x_2+x_3+x_4=y_2\\ x_1+3x_2+x_3+2x_4=y_3\end{cases}$$

Entonces, planteamos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & y_1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_2\\ 1 & 3 & 1 & 2 & y_3\end{array}\right) \xrightarrow{F_3+(-1)F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & y_1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_2\\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_3-y_1\end{array}\right) \xrightarrow{F_3+(-1)F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & y_1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & y_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_3-y_1-y_2\end{array}\right)$$

Los vectores de $\mathbf{W}$ resultan caracterizados por la relación: $y_3 = y_1 + y_2$.

Por consiguiente:

$$(y_1,y_2,y_3)\in\mathbf{W} \quad \text{sí y sólo sí} \quad (y_1,y_2,y_3)=k(1,0,1)\ +\ k'(0,1,1) \ \text{ con } \ k,k'\in\mathbb{R}\ .$$

Luego los vectores $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$ generan a $\mathbf{W}$. Dado que son linealmente independientes, constituyen una base de $\mathbf{W}$.

Por lo tanto: $\boldsymbol{B}_{\mathbf{W}} = \{(1,0,1);(0,1,1)\}$.

Notar que los vectores $(1,0,1)$, $(2,1,3)$, $(0,1,1)$, $(1,1,2)$ dados originalmente, generan el subespacio $\mathbf{W}$ pero NO son linealmente independientes por ello no constituyen una base.

Ejemplo 5

Sea el subespacio $\mathbf{W} = \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \ /\ 3x-y+2z+w=0\}$.

Para hallar una base de $\mathbf{W}$ consideramos que:

$$(x,y,z,w)\in\mathbf{W} \ \text{ sí y sólo si } \ (x,y,z,w)=(x,3x+2z+w,z,w) \ \text{ con } x, z \ \text{ y } \ w \ \text{ arbitrarios.}$$

Luego $(x,y,z,w)=(x,3x+2z+w,z,w)=\ x\ (1,3,0,0)\ +\ z\ (0,2,1,0)\ +\ w\ (0,0,0,1)$.

Por lo tanto $(1,3,0,0)$, $(0,2,1,0)$ y $(0,0,0,1)$ generan $\mathbf{W}$ y como resultan linealmente independientes, forman una base de $\mathbf{W}$.

Ejemplo 6

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]$, el espacio vectorial de los polinomios en **X** a coeficientes reales.
El conjunto $\{1, X, X^2, X^3, ...\}$ es una base de este espacio.

En efecto, todo polinomio de **V** se expresa de la forma: $\mathbf{p} = a_o + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Esto es, como combinación lineal de los vectores $1, X, X^2, X^3, ...$.
Además, el polinomio nulo se expresa de forma única como: $\bar{\mathbf{0}} = 01 + 0X + 0X^2 + \cdots$, lo que nos dice que los vectores $1, X, X^2, X^3, ...$ son linealmente independientes.
Luego constituyen una base de $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]$.

Teorema 1.8.1. Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

Si $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de **V** y $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, entonces existen escalares únicos $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que $\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n$.

Demostración:

Como por hipótesis $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de **V**, todo elemento del vectorial se escribe como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Supongamos que **v** puede expresarse en dos formas distintas como combinación lineal de los vectores de la base ***B***. Es decir, supongamos que:

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n$$
$$\mathbf{v} = y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + y_n \mathbf{v}_n$$

Restando miembro a miembro se obtiene $\bar{\mathbf{0}} = (x_1 - y_1)\mathbf{v}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (x_n - y_n)\mathbf{v}_n$
Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independiente, por ser base, la ecuación se satisface si $x_i = y_i$ para $(i = 1, 2, 3, ..., n)$. Luego el teorema queda demostrado. #

El siguiente teorema prueba que todas las bases de un espacio vectorial **V** tienen el mismo número de vectores.

Teorema 1.8.2. Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**. Si $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $\boldsymbol{B}' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ son bases de **V,** entonces $n = m$.

Demostración:

a) Supongamos que $m > n$. Por el **Teorema 1.7.1.**, los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ serían linealmente dependientes, en contradicción con la hipótesis de que forman una base.
b) Supongamos que $n > m$. Por el mismo teorema mencionado anteriormente, los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ serían linealmente dependientes, en contradicción con la hipótesis de que forman una base.

Por lo tanto $n = m$. #

Acabamos de demostrar que, si el espacio vectorial **V** tiene una base con *n* vectores, todas las bases de **V** tienen *n* vectores.

Definición 1.8.2. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K.**

$\boldsymbol{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ base de **V.** Se define la **dimensión** de **V** como el número (entero no negativo) de vectores de cualquiera de sus bases.

Notación: $dim\,\mathbf{V}=n.$

Asimismo, **V** recibe el nombre de **espacio vectorial de dimensión finita**. En el caso particular $\mathbf{V}=\{\bar{\mathbf{0}}\}$, se dice que **V** es de **dimensión cero**.

Ejemplos

Ejemplo 1

$\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial de dimensión dos.
Análogamente, $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial de dimensión tres y en consecuencia, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial de dimensión *n*.

Ejemplo 2

El espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times2}$ tiene dimensión cuatro, pues: $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ es una base de $\mathbb{R}^{2\times2}$. La verificación queda como ejercicio para el lector.

Ejemplo 3

Sea el espacio vectorial $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ y sea $\mathbf{W}=\{(a,b-c,-b,a+c)\in\mathbb{R}^4\ /\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$ subespacio de **V**.
Se quiere hallar una base de **W** y la dimensión de **W**.

Sabemos que $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$ sí y sólo si $\mathbf{w}=(a,b-c,-b,a+c)$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$

reescribimos y obtenemos

$$\mathbf{w}=a(1,0,0,1)+b(0,1,-1,0)+c(0,-1,0,1)$$

Es decir que, todo $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$ es combinación lineal de los vectores $(1,0,0,1)$, $(0,1,-1,0)$, $(0,-1,0,1)$. Por lo tanto, el conjunto $\{(1,0,0,1),\ (0,1,-1,0),\ (0,-1,0,1)\}$ es un generador de **W**.
Notar que hasta aquí tenemos que $\mathbf{W}=\langle(1,0,0,1),\ (0,1,-1,0),\ (0,-1,0,1)\rangle$ pero NO sabemos aún si $\{(1,0,0,1),\ (0,1,-1,0),\ (0,-1,0,1)\}$ es base del subespacio, debemos verificar si es un conjunto linealmente independiente.
Planteamos la combinación lineal nula: $(0,0,0,0)=a(1,0,0,1)+b(0,1,-1,0)+c(0,-1,0,1)$

El sistema de ecuaciones asociado es $\begin{cases}a=0\\b-c=0\\-b=0\\c=0\end{cases}$ cuya única solución es $a=b=c=0$. Por lo tanto, los vectores $(1,0,0,1)$, $(0,1,-1,0)$, $(0,-1,0,1)$ son linealmente independientes.

Entonces podemos concluir que el conjunto $\{(1,0,0,1),\ (0,1,-1,0),\ (0,-1,0,1)\}$ es una **base** de **W**, luego $dim(\mathbf{W})=3$.

Ejemplo 4

Situaciones similares a la del espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ (el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales), donde una base del mismo es $\{1, X, X^2, X^3, ...\}$ se denominan espacios vectoriales de dimensión infinita.

Nota: La prueba de los siguientes enunciados queda como ejercicio para el lector.

Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, de dimensión finita *n*. Entonces se verifica:

a) Cualquier subconjunto de **V** con más de "*n*" elementos es linealmente dependiente.
b) Ningún subconjunto de **V** con menos de "*n*" elementos, genera a **V**.
c) Todo subconjunto de "*n*" vectores linealmente independientes es una base de **V**.
d) Todo generador de **V**, con "*n*" vectores es una base.

1.8.1 Existencia de Bases

Los siguientes teoremas garantizan la existencia de bases en un espacio vectorial de dimensión finita:

Teorema 1.8.1.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, de dimensión finita "*n*". Todo subconjunto no vacío de *r* vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, linealmente independientes, es parte de una base.

Demostración:

Dado que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes entonces $r \le n$.

Si $r = n$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ forman una base y no hay nada que demostrar.

Si $r < n$, los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ no generan al vectorial **V**, luego existe $\mathbf{v}_{r+1}$ tal que $\mathbf{v}_{r+1} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$. Por el **Teorema 1.7.2.,** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}$ son linealmente independientes.

Reiterando el proceso a partir de este nuevo conjunto de vectores se llega, en un número finito de pasos, a tener "*n*" vectores linealmente independientes que constituyen una base del espacio vectorial **V**. #

Teorema 1.8.1.2. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K.**
Todo generador finito de **V**, incluye una base.

Demostración:
Queda como ejercicio para el lector. #

1.8.2 Bases y Dimensión del Subespacio de Soluciones del Sistema $\mathbf{A.X=0}$

Consideremos, el siguiente ejemplo. Queremos hallar el subespacio de vectores de $\mathbb{R}^5$ que satisfacen la ecuación $\mathbf{A.X=0}$ siendo $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 4 & -2\end{bmatrix}$.

Es decir, buscamos hallar $\mathbf{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$ talque

$$\mathbf{W}=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 \,/\, \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4+4x_5=0\\ 2x_1-x_2+x_3+x_4+5x_5=0\\ x_2+x_3+5x_4-x_5=0\\ 2x_2-x_3+4x_4-2x_5=0\end{cases}\right\}$$

Es decir, buscamos hallar $\mathbf{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$ tal que $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 5 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 4 & -2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$.

La matriz reducida de **A** es: $\mathbf{R_A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Observar que el rango de la matriz **A** es 3, luego la dimensión del espacio filas de **A** es: r = 3.

Entonces los $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$ que son solución del sistema $\mathbf{A.X=0}$ verifican:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-\alpha-2\beta,\ -3\alpha+\beta,-2\alpha,\alpha,\beta)=\alpha(-1,-3,-2,1,0)+\beta(-2,1,0,0,1)$$

Luego, toda solución $\mathbf{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$ que satisface la ecuación $\mathbf{A.X=0}$, es combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}=(-1,-3,-2,1,0)$ y $\mathbf{v}=(-2,1,0,0,1)$.

Es decir que el subespacio de soluciones es $\mathbf{W}$, está generado por los vectores **u** y **v**

$$\mathbf{W}=\langle(-1,-3,-2,1,0),\ (-2,1,0,0,1)\rangle$$

Como los vectores **u** y **v** son linealmente independientes, éstos forman una base del subespacio **W.**

La dimensión de **W** es $k=2$ ($k=n-r=$el número de incógnitas del sistema − rango de **A**).

Observar que la dimensión de **W** es el número de incógnitas no principales.

Este análisis puede generalizarse a cualquier sistema $\mathbf{A.X=0}$. Si el rango de la matriz **A** es *r*, y el número de incógnitas del sistema es *n*, el número de incógnitas no principales es $n-r$.
Por lo tanto:

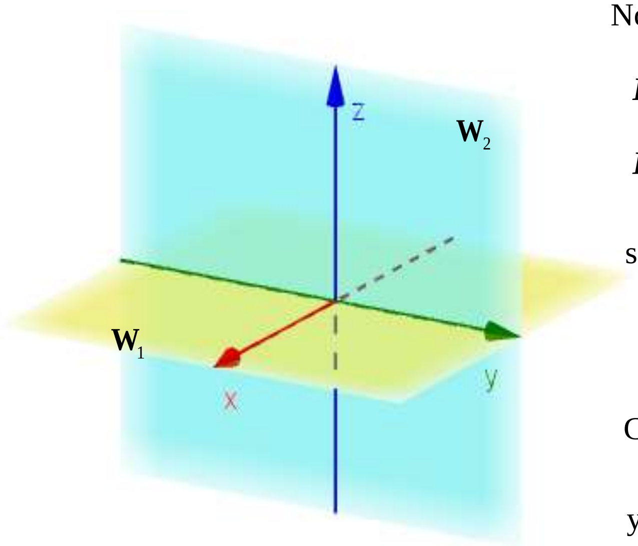
> Sea **A** es una matriz $m \times n$ sobre un cuerpo **K.** Si el rango de la matriz **A** es *r*, entonces la dimensión del espacio de soluciones del sistema $\mathbf{A.X=0}$ es $n-r$.

1.8.3 Base y Dimensión del Subespacio Suma

Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ y sean los subespacios $\mathbf{W}_1=\langle(1,0,0)\,(0,1,0)\rangle$ y $\mathbf{W}_2=\langle(0,1,0)\,(0,0,1)\rangle$.

Luego el subespacio suma resulta $\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2=\langle(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\rangle=\mathbb{R}^3$ siendo una base de dicho subespacio $\mathbf{B}_{\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2}=\boldsymbol{B}_{\mathbb{R}^3}=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ y por lo tanto $dim(\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2)=3$.



Notar que

$$\boldsymbol{B}_{\mathbf{W}_1}=\{(1,0,0),\ (0,1,0)\} \quad \text{y} \quad dim(\mathbf{W}_1)=2$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathbf{W}_2}=\{(0,1,0),\ (0,1,0)\} \quad \text{y} \quad dim(\mathbf{W}_2)=2$$

se tiene entonces que

$$dim(\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2)\neq dim(\mathbf{W}_1)+dim(\mathbf{W}_2) \qquad \text{¿Por qué?}$$

Como se puede observar, $\mathbf{W}_1\cap\mathbf{W}_2=\langle(0,1,0)\rangle$

y $\boldsymbol{B}_{\mathbf{W}_1\cap\mathbf{W}_2}=\{(0,1,0)\}$ y $dim(\mathbf{W}_1\cap\mathbf{W}_2)=1$.

Luego:

$$\underbrace{dim(\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2)}_{3}=\underbrace{dim(\mathbf{W}_1)}_{2}+\underbrace{dim(\mathbf{W}_2)}_{2}-\underbrace{dim(\mathbf{W}_1\cap\mathbf{W}_2)}_{1}.$$

A continuación, se probará que este resultado es válido si se tiene un espacio vectorial **V** y subespacios $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ de dimensión finita.

Teorema 1.8.3.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**.

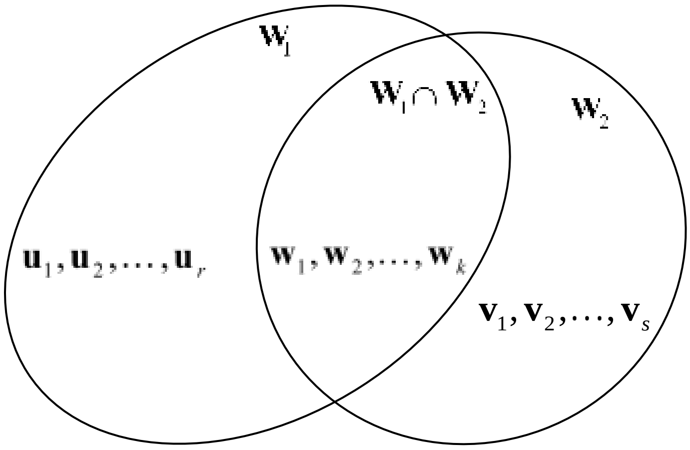
Si $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ son subespacios de dimensión finita, entonces $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es un subespacio de dimensión finita y se verifica:

$$dim\left(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2\right) = dim\left(\mathbf{W}_1\right) + dim\left(\mathbf{W}_2\right) - dim\left(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2\right).$$

Demostración:

Supongamos en primer lugar que $dim\left(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2\right) = k > 0$. Sea $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{B}_{\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2} = \left\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\right\}$ una base de $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$.

Completamos la base $\boldsymbol{B}_0$ a una base de $\mathbf{W}_1$ y a una de $\mathbf{W}_2$ respectivamente.



Sean entonces $\boldsymbol{B}_1$ base de $\mathbf{W}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ base de $\mathbf{W}_2$ que incluyen a $\boldsymbol{B}_0$

$$\boldsymbol{B}_1 = \left\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\right\}; \quad dim\left(\mathbf{W}_1\right) = k + r$$
$$\boldsymbol{B}_2 = \left\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\right\}; \quad dim\left(\mathbf{W}_2\right) = k + s$$

Para probar el teorema deberemos encontrar una base de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ que tenga $k + r + s$ vectores.

Afirmamos que:

$$\boldsymbol{B} = \left\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s\right\} \quad \text{es una base de } \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2.$$

Es inmediato que $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es generado por los elementos de $\boldsymbol{B}$.

Para ver que $\boldsymbol{B}$ es base hay que demostrar que los vectores de $\boldsymbol{B}$ son linealmente independientes.

Consideremos entonces la relación:

$$x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_k\,\mathbf{w}_k + y_1\,\mathbf{u}_1 + y_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + y_r\,\mathbf{u}_r + z_1\,\mathbf{v}_1 + z_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + z_s\,\mathbf{v}_s = \overline{\mathbf{0}} \quad \mathbf{(1)}$$

que podemos reescribir en la forma:

$$\underbrace{x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_k\,\mathbf{w}_k + y_1\,\mathbf{u}_1 + y_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + y_r\,\mathbf{u}_r}_{\in\,\mathbf{W}_1} = \underbrace{-\left(z_1\,\mathbf{v}_1 + z_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + z_s\,\mathbf{v}_s\right)}_{\in\,\mathbf{W}_2}$$

La igualdad entre el primer miembro que es un vector de $\mathbf{W}_1$ y el segundo miembro que es un vector de $\mathbf{W}_2$ significa que ambos miembros representan el mismo vector y por ende éste debe pertenecer a

$\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$. Dicho vector puede escribirse como combinación lineal de los vectores de la base del subespacio $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$, o sea:

$$-(z_1\,\mathbf{v}_1 + z_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + z_s\,\mathbf{v}_s) = \alpha_1\,\mathbf{w}_1 + \alpha_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_k\,\mathbf{w}_k$$
$$\bar{\mathbf{0}} = \alpha_1\,\mathbf{w}_1 + \alpha_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_k\,\mathbf{w}_k + z_1\,\mathbf{v}_1 + z_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + z_s\,\mathbf{v}_s$$

Como los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_s$ son linealmente independientes pues forman una base de $\mathbf{W}_2$, entonces: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = z_1 = \cdots = z_s = 0$.

Luego, la relación **(1)** se reduce a la siguiente:

$$x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_k\,\mathbf{w}_k + y_1\,\mathbf{u}_1 + y_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + y_r\,\mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{0}}$$

Y como los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ son linealmente independientes pues forman una base de $\mathbf{W}_1$, resulta: $x_1 = \cdots = x_k = y_1 = \cdots = y_r = 0$.

Entonces,

$$x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_k\,\mathbf{w}_k + y_1\,\mathbf{u}_1 + y_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + y_r\,\mathbf{u}_r + z_1\,\mathbf{v}_1 + z_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + z_s\,\mathbf{v}_s = \bar{\mathbf{0}}$$

con la única solución $x_1 = \cdots = x_k = y_1 = \cdots = y_r = z_1 = \cdots = z_s = 0$.

Entonces queda probado que los vectores de ***B*** son linealmente independientes y que ***B*** es una base de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.

Por lo tanto:

$$dim\left(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2\right) = k + r + s = \underbrace{(k+r)}_{dim\,\mathbf{W}_1} + \underbrace{(k+s)}_{dim\,\mathbf{W}_2} - \underbrace{k}_{dim\left(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2\right)}$$

O sea:

$$dim\left(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2\right) = dim\left(\mathbf{W}_1\right) + dim\left(\mathbf{W}_2\right) - dim\left(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2\right).$$

como queríamos demostrar. #

1.8.3.1 Suma Directa

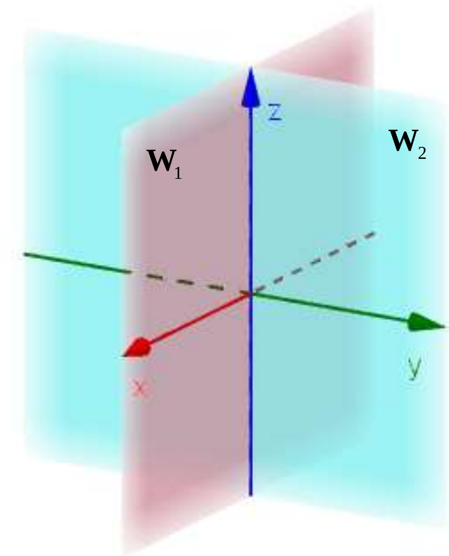
En esta sección estudiaremos qué sucede con la suma de subespacios si $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \left\{\bar{\mathbf{0}}\right\}$.

Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Si $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ son subespacios, entonces $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es también un subespacio y sabemos que todo vector de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ se expresa como suma de un vector de $\mathbf{W}_1$ y de uno de $\mathbf{W}_2$. Puede ocurrir que cada vector de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ se exprese en más de una forma como suma de un elemento de $\mathbf{W}_1$ y de uno de $\mathbf{W}_2$ o que su expresión sea única.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sean $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y los subespacios $\mathbf{W}_1 = \langle (1,0,0)\,(0,0,1) \rangle$; $\mathbf{W}_2 = \langle (0,1,0)\,(0,0,1) \rangle$ del vectorial.
El subespacio suma es $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1) \rangle = \mathbb{R}^3$.



Todo vector de $\mathbb{R}^3$ se expresa, en muchas formas como suma de un vector de $\mathbf{W}_1$ y de un vector de $\mathbf{W}_2$ pues:

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(x_1, 0, x_3)}_{\in \mathbf{W}_1} + \underbrace{(0, x_2, 0)}_{\in \mathbf{W}_2} = \underbrace{(x_1, 0, 0)}_{\in \mathbf{W}_1} + \underbrace{(0, x_2, x_3)}_{\in \mathbf{W}_2}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(x_1, 0, m)}_{\in \mathbf{W}_1} + \underbrace{(0, x_2, x_3 - m)}_{\in \mathbf{W}_2}$$ donde "m" representa un número real arbitrario.

Es decir, podemos encontrar elementos $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_2$ con $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{v}_2$ tal que $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

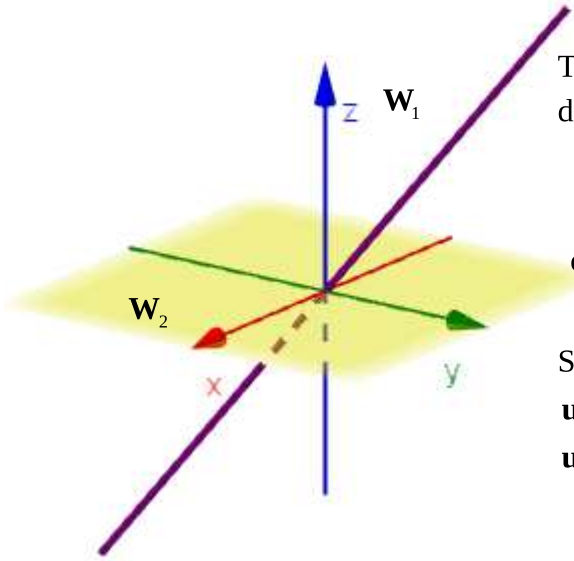
Por ejemplo:

$$(2,-1,3) = \underbrace{(2,0,3)}_{\in \mathbf{W}_1} + \underbrace{(0,-1,0)}_{\in \mathbf{W}_2} = \underbrace{(2,0,0)}_{\in \mathbf{W}_1} + \underbrace{(0,-1,3)}_{\in \mathbf{W}_2}$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y sean $\mathbf{W}_1 = \langle (0,1,1) \rangle$; $\mathbf{W}_2 = \langle (1,0,0)\,(0,1,0) \rangle$ subespacios del vectorial **V**.

Se tiene que $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \langle (0,1,1),\ (1,0,0),\ (0,1,0) \rangle = \mathbb{R}^3$



Todo vector de $\mathbb{R}^3$ se expresa como suma de un vector de $\mathbf{W}_1$ y un vector de $\mathbf{W}_2$ de una única forma.

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, x_3, x_3) + (x_1, x_2 - x_3, 0)$$

con $(0, x_3, x_3) \in \mathbf{W}_1$ y $(x_1, x_2 - x_3, 0) \in \mathbf{W}_2$

Si suponemos $(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ con $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{W}_2$, es fácil ver que $\mathbf{u}_1 = (0, x_3, x_3)$ y que $\mathbf{u}_2 = (x_1, x_2 - x_3, 0)$.

Definición 1.8.3.1.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ subespacios de **V.**

Diremos que la suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es directa **sí y sólo si** todo vector de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ se expresa en forma única como suma de un elemento de $\mathbf{W}_1$ y un elemento de $\mathbf{W}_2$.

Notación: $\mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$ indica que la suma de $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ es directa.

Esta definición es equivalente a decir que si: $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_2$

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 \text{ y } \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 .$$

Teorema 1.8.3.1.1. (Teorema de la Caracterización de la Suma Directa)
Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ subespacios de **V.**

La suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es directa **sí y sólo sí** $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Demostración:

$\Rightarrow$) *Hipótesis:* La suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es directa.
Tesis (debemos probar): $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Consideremos $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ esto es $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2$.
Luego **v** puede escribirse como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \bar{\mathbf{0}} \quad \text{con} \quad \mathbf{v} \in \mathbf{W}_1 \text{ y } \bar{\mathbf{0}} \in \mathbf{W}_2$$
$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{0}} + \mathbf{v} \quad \text{con} \quad \bar{\mathbf{0}} \in \mathbf{W}_1 \text{ y } \mathbf{v} \in \mathbf{W}_2$$

Es decir, escribimos al vector **v** de distintas formas como suma de un vector de $\mathbf{W}_1$ y de uno de $\mathbf{W}_2$.
Esto contradice la hipótesis, por lo tanto $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{0}}$. Es decir que, $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

$\Leftarrow$) *Hipótesis:* $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.
Tesis (debemos probar): La suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es directa.

Sea **v** un vector de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ y supongamos que se expresa en las siguientes formas:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \quad \text{con} \quad \mathbf{w}_1 \in \mathbf{W}_1 \text{ y } \mathbf{w}_2 \in \mathbf{W}_2$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2' \quad \text{con} \quad \mathbf{w}_1' \in \mathbf{W}_1 \text{ y } \mathbf{w}_2' \in \mathbf{W}_2$$

Resulta entonces que:

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2'$$
$$\underbrace{\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1'}_{\in \mathbf{W}_1} = \underbrace{\mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2}_{\in \mathbf{W}_2}$$

En la última igualdad se observa que los dos miembros representan al mismo vector: como elemento de $\mathbf{W}_1$ el primer miembro y como elemento de $\mathbf{W}_2$ el segundo miembro. Por lo tanto, el vector pertenece a $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ y teniendo en cuenta la hipótesis resulta que:

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_1' = \bar{\mathbf{0}} = \mathbf{w}_2' - \mathbf{w}_2$$

De donde se obtiene que: $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1'$ y $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2'$.

Por lo tanto, todo vector de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es suma de un vector de $\mathbf{W}_1$ y de un vector de $\mathbf{W}_2$ en una solo forma.

Luego la suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es directa. #

Corolario 1.8.3.1.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ subespacios de dimensión finita. Se verifica que:

a) La suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es directa sí y sólo si $dim(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = dim(\mathbf{W}_1) + dim(\mathbf{W}_2)$.

b) Si la suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ es directa y se tienen $\boldsymbol{B}_1$ base de $\mathbf{W}_1$ y $\boldsymbol{B}_2$ base de $\mathbf{W}_2$, entonces $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 \cup \boldsymbol{B}_2$ es una base de $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.

Demostración:

Queda como ejercicio para el lector. #

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y sean los subespacios $\mathbf{W}_1 = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$ y $\mathbf{W}_2 = \langle (1,2,3),\ (0,1,2) \rangle$. ¿Es la suma de $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ directa?

$\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ son subespacios de dimensión dos (planos por el origen). La intersección de dos planos en $\mathbb{R}^3$ no es nunca un punto por lo tanto la suma no es directa.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y sean los subespacios $\mathbf{W}_1 = \langle (-1,1,1) \rangle$ y $\mathbf{W}_2 = \langle (1,2,3),\ (0,1,2) \rangle$. ¿Es la suma de $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ directa?

$\mathbf{W}_1$ es una recta por el origen y $\mathbf{W}_2$ es un plano también por el origen. Dado que $\mathbf{W}_1$ no es parte de $\mathbf{W}_2$. La intersección $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{\bar{\mathbf{0}}\}$. Luego la suma es directa.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y sean $\mathbf{U} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ \begin{cases} a+b-c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \right\}$; $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} k & 2k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \ / \ k \in \mathbb{R} \right\}$

subespacios de $\mathbf{V}$. ¿Es $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ suma directa?

Dado que $\mathbf{U} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ \begin{cases} a+b-c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \right\}$ resolvemos entonces el sistema de ecuaciones que define a $\mathbf{U}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 + F_2(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \text{ entonces tenemos } \begin{cases} a=0 \\ b-c=0 \end{cases}$$

Despejando variables tenemos $a=0$ y $b=\mathrm{c}$, reemplazando en una matriz arbitraria, resulta

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & d \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir: $\mathbf{U} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Los vectores $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ no son múltiplos, entonces forman un conjunto LI y por lo tanto $\mathbf{B}_{\mathrm{U}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es base de $\mathbf{U}$. Luego, tenemos que $dim(\mathbf{U})=2$.

Continuando, buscaremos calcular un generador de $\mathbf{W}$ para poder caracterizarlo.
Todo elemento de $\mathbf{W}$ es de la forma:

$$\begin{bmatrix} k & 2k \\ -k & 0 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

entonces $\mathbf{W} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$. Ya que el subespacio $\mathbf{W}$ está generado por un único vector no nulo, luego ese generador es LI y por lo tanto $\mathbf{B}_{\mathrm{W}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ es base de $\mathbf{W}$. Tenemos que $dim(\mathbf{W})=1$.

Podemos entonces dar un generador de $\mathbf{U}+\mathbf{W}$: $\quad S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

NO sabemos aún si el conjunto es base, debemos verificar si es un conjunto linealmente independiente.

Planteamos la combinación lineal nula: $\quad k_1\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

El sistema de ecuaciones asociado es $\begin{cases} k_1 = 0 \\ 2k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 + k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$, entonces consideramos la matriz del sistema y reducimos por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3+F_1(1)]{F_2 + F_1(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 + F_2(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

, es decir $k_1=0,\ k_2=0,\ k_3=0$ por lo que los vectores del conjunto S son linealmente independientes.

Por lo tanto, el conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ y $dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})=3$.

Con esta información podemos usar el resultado que dice: “si $dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})=dim(\mathbf{U})+dim(\mathbf{W})$ entonces la suma de **U** y **W** es directa”.

En este caso $dim(\mathbf{U}+\mathbf{W})=3=2+1=dim(\mathbf{U})+dim(\mathbf{W})$ y por lo tanto la suma $\mathbf{U}+\mathbf{W}$ es directa.

1.8.3.2 Subespacios Complementarios

Definición 1.8.3.2.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sean **U** y **W** subespacios del espacio vectorial **V**.

Diremos que **U** y **W** son **subespacios complementarios** sí y sólo si se verifica que $\mathbf{U}+\mathbf{W}=\mathbf{V}$ y que $\mathbf{U}\cap\mathbf{W}=\{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Equivalentemente: **U** y **W** son **subespacios complementarios** sí y sólo sí $\mathbf{U}\oplus\mathbf{W}=\mathbf{V}$.

Si $\mathbf{U}\oplus\mathbf{W}=\mathbf{V}$ decimos que **U** es un subespacio complementario de **W** y que **W** es un subespacio complementario de **U**.

En general un subespacio puede tener muchos subespacios complementarios.

Ejemplos

Ejemplo 1

En $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$, un subespacio complementario de $\mathbf{U}=\langle(1,0)\rangle$ es el subespacio $\mathbf{W}_1=\langle(0,1)\rangle$. Pero también lo es el subespacio $\mathbf{W}_2=\langle(2,3)\rangle$ y en general $\mathbf{W}=\langle(a,b)\rangle$ con $b\neq 0$ son subespacios complementarios de **U**.

Ejemplo 2

En un vectorial cualquiera **V**, los subespacios $\{\bar{\mathbf{0}}\}$ y **V** son subespacios complementarios.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$ y sean $\mathbf{U}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ \begin{cases} a+b-c=0 \\ b-c=0 \end{cases}\right\}$; $\mathbf{W}=\left\{\begin{bmatrix} k & 2k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \ / \ k\in\mathbb{R}\right\}$ subespacios de **V**. ¿Son los subespacios **U** y **W** complementarios?

Los subespacios **U** y **W** serán complementarios si la suma es directa **y** $\mathbf{U}+\mathbf{W}=\mathbf{V}$.

En este caso, la suma de **U** y **W** si es directa (lo mostramos en la sección anterior (Ejemplo 3)) pero $\mathbf{U}+\mathbf{W}\neq\mathbf{V}$ pues $dim\left(\mathbf{U}+\mathbf{W}\right)=3\neq 4=dim\left(\mathbb{R}^{2\times 2}\right)$.

Luego **U** y **W** NO son subespacios complementarios.

> **Teorema 1.8.3.2.1.** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, de dimensión finita. Si **U** es un subespacio de **V** entonces **U** tiene un subespacio complementario.

Demostración:

Queda como ejercicio para el lector. #

1.9 Variedades Lineales

> **Definición 1.9.1** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**; $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{V}$.
>
> Diremos que **A** es una variedad lineal sí y sólo si existen $\mathbf{p}\in\mathbf{V}$ y **W** subespacio de **V** tales que $\mathbf{A}=\mathbf{p}+\mathbf{W}$

Si **V** es un espacio vectorial, $\mathbf{p}\in\mathbf{V}$ y **S** un subconjunto de **V**, el símbolo $\mathbf{p}+\mathbf{S}$ indica la suma del conjunto $\{\mathbf{p}\}$ y el conjunto **S**, esto es: $\mathbf{p}+\mathbf{S} = \left\{\mathbf{v}\in\mathbf{V} \;/\; \textit{existe } \mathbf{u}\in\mathbf{S} : \mathbf{v}=\mathbf{p}+\mathbf{u}\right\}$

Si consideramos la función $\begin{array}{l}\mathbf{T_p}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}\\ \quad\;\mathbf{u}\to\mathbf{u}+\mathbf{p}\end{array}$ se llama **traslación de vector p**.

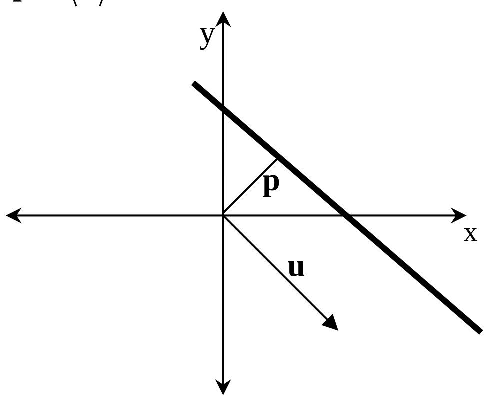
Por consiguiente $\mathbf{p}+\mathbf{S}$ puede pensarse como la imagen del conjunto **S** por la traslación de vector **p**. Luego, una variedad lineal es la imagen de un subespacio por una traslación, es decir $\mathbf{A}=\mathbf{T_p}\left(\mathbf{W}\right)$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Toda recta de $\mathbb{R}^2$ (ó de $\mathbb{R}^3$) es una variedad lineal.

En efecto, la ecuación vectorial de la recta **L**, definida por un punto **p** y el vector de dirección **u** es: $\mathbf{L}:\mathbf{x}=\mathbf{p}+\lambda\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{L}:\mathbf{x}=\mathbf{p}+\langle\mathbf{u}\rangle$



Ejemplo 2

Todo plano π de $\mathbb{R}^3$ es una variedad lineal. En efecto, la ecuación vectorial:

$$\pi: \ \mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha\,\mathbf{u} + \beta\,\mathbf{v}$$

describe a π como el conjunto de elementos de $\mathbb{R}^3$ que resultan de sumar a $\mathbf{p}$ cada uno de los vectores del subespacio $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Por lo tanto, podemos escribir:

$$\pi: \ \mathbf{x} = \mathbf{p} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Ejemplo 3

Todo subespacio **W** de un espacio vectorial, es una variedad lineal. En efecto:

$$\mathbf{W} = \overline{\mathbf{0}} + \mathbf{W} = \mathbf{T}_{\overline{\mathbf{0}}}\left(\mathbf{W}\right).$$

Ejemplo 4

Si **V** es un espacio vectorial y $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ entonces $\{\mathbf{v}\} = \mathbf{v} + \{\ \overline{\mathbf{0}}\ \}$ es una variedad lineal.

Ejemplo 5

El conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineales no homogéneo $\mathbf{A.X} = \mathbf{H}$ ***(compatible)*** es una variedad lineal.

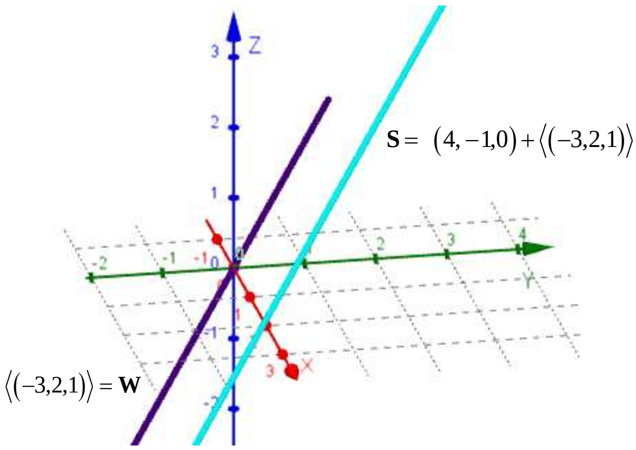
a) Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Consideremos el sistema: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$ la solución general, es decir

$\mathbf{S} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 = 9 \end{cases} \right\}$ está dada por:

$$(x_1, x_2, x_3) = (4, -1, 0) + a(-3, 2, 1) \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}$$

que podemos escribir como:

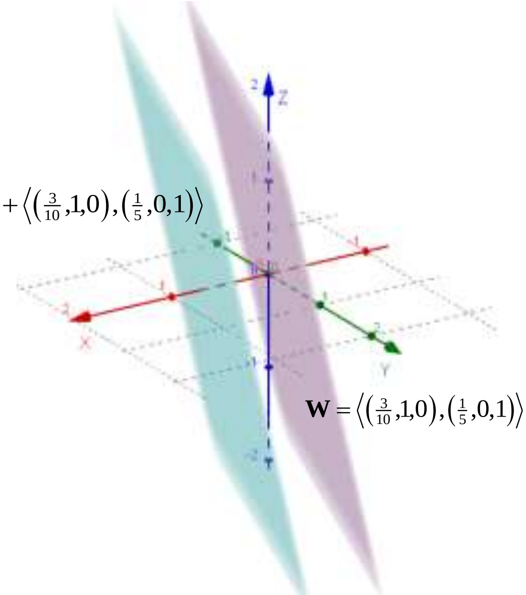
$\mathbf{S} = \ (4, -1, 0) + \langle (-3, 2, 1) \rangle$.



b) Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Consideremos $\mathbf{S} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7 \right\}$.

La solución general es: $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{10}, 0, 0\right) + a\left(\frac{3}{10}, 1, 0\right) + b\left(\frac{1}{5}, 0, 1\right)$ con $a, b \in \mathbb{R}$

Entonces **S** se puede escribir como: $\mathbf{S} = \left(\frac{7}{10}, 0, 0\right) + \left\langle \left(\frac{3}{10}, 1, 0\right), \left(\frac{1}{5}, 0, 1\right) \right\rangle$



Observación: En los ejemplos que acabamos de presentar, el subespacio **W** es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado al sistema dado.

El siguiente teorema es una generalización de los ejemplos precedentes:

> **Teorema 1.9.1.** Sean $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m \times n}$ y $\mathbf{H} \in \mathbf{K}^{m \times 1}$. Si el sistema $\mathbf{A.X = H}$ es compatible entonces su conjunto **S** de soluciones es una variedad lineal en $\mathbf{K}^{n \times 1}$ cuyo subespacio asociado es el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A.X = 0}$.

Demostración:

Por hipótesis el sistema es compatible, es decir que el conjunto **S** de soluciones es no vacío. Supongamos entonces que $\mathrm{s}_0 \in \mathbf{S}$ esto es $\mathbf{A} \,.\, \mathrm{s}_0 = \mathbf{H}$. Luego, probaremos que **S** es una variedad lineal $\mathbf{S} = \mathrm{s}_0 + \mathbf{W}$ siendo **W** el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A.X = 0}$.

a). Veamos que $\mathbf{S} \subset \mathrm{s}_0 + \mathbf{W}$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{s} \in \mathbf{S} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} \,.\, \mathrm{s} = \mathbf{H} \\ \mathrm{s}_0 \in \mathbf{S} \;\Rightarrow \mathbf{A} \,.\mathrm{s}_0 = \mathbf{H} \end{array}\right\} \Rightarrow \; \mathbf{A} \,.\left(\mathrm{s} - \mathrm{s}_0\right) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \left(\mathrm{s} - \mathrm{s}_0\right) = \mathbf{w} \in \mathbf{W} \;\Rightarrow \mathrm{s} = \mathrm{s}_0 + \mathbf{w} \Rightarrow \mathrm{s} \in \mathrm{s}_0 + \mathbf{W}$$

luego $\mathbf{S} \subset \mathrm{s}_0 + \mathbf{W}$.

b). Veamos que $\mathrm{s}_0 + \mathbf{W} \subset \mathbf{S}$.

$\mathrm{s} \in \mathrm{s}_0 + \mathbf{W} \Rightarrow \; \mathrm{s} = \mathrm{s}_0 + \mathbf{w}$ con $\mathbf{w} \in \mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{A} \,.\mathbf{s} = \mathbf{A} \,.\left(\mathrm{s}_0 + \mathbf{w}\right) = \mathbf{A} \,.\mathrm{s}_0 + \mathbf{A.w} = \mathbf{H} + \mathbf{0} = \mathbf{H} \;\Rightarrow\; \mathrm{s} \in \mathbf{S}$

luego $\mathrm{s}_0 + \mathbf{W} \subset \mathbf{S}$.

De a) y b) se tiene que $\mathbf{S} = \mathrm{s}_0 + \mathbf{W}$.#

Observación: En el capítulo de aplicaciones lineales presentaremos una demostración más sencilla del teorema precedente.

Proposición 1.9.1. (Propiedades) Sea **V** un espacio vectorial y sea $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W}$ una variedad lineal en **V**. Entonces se verifica:

1. $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$. (El vector **p** pertenece a la variedad lineal **A**)
2. Si $\mathbf{q} \in \mathbf{A}$ y $\mathbf{r} \in \mathbf{A}$ entonces $\mathbf{q} - \mathbf{r} \in \mathbf{W}$. (La diferencia entre dos vectores de la variedad lineal **A** es un vector del **W**)
3. Si $\mathbf{p} \in \mathbf{W}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{W}$.
4. Si $\mathbf{q} \in \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{q} + \mathbf{W}$. (En la expresión $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W}$, el vector **p** puede ser reemplazado por cualquier vector de **A**)
5. Hay un único subespacio **W** de **V** tal que para todo $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$ se tiene que $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W}$. Este subespacio se denomina subespacio "asociado" a la variedad lineal **A**.

Demostración:

1. $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$ pues $\mathbf{p} = \mathbf{p} + \overline{\mathbf{0}}$ con $\overline{\mathbf{0}} \in \mathbf{W}$.

2. Si $\mathbf{q},\mathbf{r} \in \mathbf{A}$ se tiene que: $\left.\begin{array}{l} \mathbf{q} \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{w} \text{ con } \mathbf{w} \in \mathbf{W} \\ \mathbf{r} \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{w'} \text{ con } \mathbf{w'} \in \mathbf{W} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{q} - \mathbf{r} = \mathbf{w} - \mathbf{w'} \in \mathbf{W}.$

3. Su demostración queda como ejercicio.

4. Si $\mathbf{q} \in \mathbf{A}$ se tiene que $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{w_0}$ con $\mathbf{w_0} \in \mathbf{W}$, luego $\mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{w_0}$. Entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W} = (\mathbf{q} - \mathbf{w_0}) + \mathbf{W} = \{\mathbf{q} - \mathbf{w_0} + \mathbf{w} / \mathbf{w} \in \mathbf{W}\} = \mathbf{q} + \{-\mathbf{w_0} + \mathbf{w} / \mathbf{w} \in \mathbf{W}\} = \mathbf{q} + \mathbf{W}.$$

5. La variedad lineal **A** es la imagen de un subespacio por una traslación, es decir $\mathbf{T_p}(\mathbf{W}) = \mathbf{p} + \mathbf{W} = \mathbf{A}$.

Teniendo en cuenta que la **traslación de vector "p"**, $\begin{array}{l}\mathbf{T_p} : \mathbf{V} \to \mathbf{V} \\ \qquad \mathbf{u} \to \mathbf{u} + \mathbf{p}\end{array}$ es una biyección (su prueba queda como ejercicio) su aplicación inversa es la **traslación de vector "-p"** es decir $(\mathbf{T_p})^{-1} = \mathbf{T_{-p}}$.

Luego el subespacio W es la imagen de A por la aplicación inversa $\mathbf{T_{-p}}(\mathbf{A}) = -\mathbf{p} + \mathbf{A} = -\mathbf{p} + \mathbf{p} + \mathbf{W} = \mathbf{W}$.

Supongamos que **A** puede expresarse en la forma $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W}$ y $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W'}$ aplicando $\mathbf{T_{-p}}$ se tiene que $\mathbf{T_{-p}}(\mathbf{A}) = -\mathbf{p} + \mathbf{A} = -\mathbf{p} + (\mathbf{p} + \mathbf{W'}) = \mathbf{W'}$. Luego, $\mathbf{W} = \mathbf{W'}$ por estar unívocamente determinada la imagen de un conjunto por una aplicación. #

Definición 1.9.2 Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo **K**; $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}$ una variedad lineal. Llamaremos dimensión de la variedad lineal **A** a la dimensión del único subespacio **W** asociado a **A**.

Observación: Las rectas en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ son variedades lineales de dimensión uno. Análogamente si se tiene un espacio vectorial **V** cualquiera, las variedades lineales de dimensión *cero* se denominan **puntos,** las de dimensión *uno* se llamarán **rectas** y las de dimensión *dos*, **planos**.
Ahora si **V** es un espacio vectorial de dimensión $\boldsymbol{n}$, las variedades lineales de **V** de dimensión $\boldsymbol{n}-1$ se llaman **hiperplanos**. Por lo tanto, un hiperplano de $\mathbb{R}$ es un punto, una recta es un hiperplano de $\mathbb{R}^2$ y un plano es un hiperplano de $\mathbb{R}^3$.

1.9.1 Ecuaciones de una Variedad Lineal

Consideremos $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ o $\left(\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbf{n}\times 1}\right)$, y recordemos que toda variedad lineal de **V** se puede expresar como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales (**Teorema 1.9.1**).

Sea $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \mathbf{W} \subseteq \mathbb{R}^{n}$ de dimensión r y sea $\mathbf{W} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r \rangle$. Por lo tanto $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ sí y sólo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ tales que

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha_1\, \mathbf{w}_1 + \alpha_2\, \mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_r\, \mathbf{w}_r \qquad \textbf{(1)}$$

La expresión **(1)** se denomina **ecuación vectorial** de la variedad lineal.

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $\mathbf{w}_{\mathrm{i}} = (w_{1i},\ w_{2i}, \ldots, w_{ni})$ para $i = 1, 2, \ldots, r.$ La ecuación **(1)** se puede escribir como:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (p_1, p_2, \ldots, p_n) + \alpha_1\,(w_{11},\ w_{21}, \ldots, w_{n1}) + \cdots + \alpha_r\,(w_{1r},\ w_{2r}, \ldots, w_{nr})$$

que es equivalente a las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + \alpha_1 w_{11} + \alpha_2 w_{12} + \cdots + \alpha_r w_{1r} \\ x_2 = p_2 + \alpha_1 w_{21} + \alpha_2 w_{22} + \cdots + \alpha_r w_{2r} \\ x_3 = p_3 + \alpha_1 w_{31} + \alpha_2 w_{32} + \cdots + \alpha_r w_{3r} \\ \quad\vdots \\ x_n = p_n + \alpha_1 w_{n1} + \alpha_2 w_{n2} + \cdots + \alpha_r w_{nr} \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

denominadas **ecuaciones paramétricas** de **A**.

Ahora, si pensamos al sistema **(2)** como un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, entonces la o las condiciones que deben cumplir los escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para que el sistema **(2)** sea compatible, constituyen un sistema de **ecuaciones cartesianas** de la variedad lineal.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ y $\mathbf{A}=(1,2,3,0)+\langle(1,-2,1,-1)\rangle$ una recta de $\mathbb{R}^4$.

La ecuación vectorial de **A** está dada por: $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,2,3,0)+\ t(1,-2,1,-1)$.

Y un sistema de ecuaciones paramétricas de **A** es: $\begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = 2-2t \\ x_3 = 3+t \\ x_4 = \ \ -t \end{cases}$.

Ahora buscamos las condiciones de compatibilidad del sistema: $\begin{cases} t = x_1 - 1 \\ -2t = x_2 - 2 \\ t = x_3 - 3 \\ -t = x_4 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r|l} 1 & x_1-1 \\ -2 & x_2-2 \\ 1 & x_3-3 \\ -1 & x_4 \end{array}\right. \xrightarrow[\substack{F_2+2F_1 \\ F_3+(-1)F_1 \\ F_4+F_1}]{} \left.\begin{array}{r|l} 1 & x_1-1 \\ 0 & x_2+2x_1-4 \\ 0 & x_3-x_1-2 \\ 0 & x_4+x_1-1 \end{array}\right.$$

entonces un sistema de ecuaciones cartesianas para la variedad lineal **A** es $\begin{cases} x_2+2x_1=4 \\ x_3-x_1=2 \\ x_4+x_1=1 \end{cases}$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^5$ y la variedad lineal $\mathbf{A}=(1,1,2,3,0)+\langle(1,2,-1,3,1),(2,-1,0,1,2)\rangle$. **A** es un plano de $\mathbb{R}^5$ y una ecuación vectorial de la variedad es:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(1,1,2,3,0)+a(1,2,-1,3,1)+b(2,-1,0,1,2).$$

Igualando componentes resulta un sistema de ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1 = 1+a+2b \\ x_2 = 1+2a-b \\ x_3 = 2-a \\ x_4 = 3+3a+b \\ x_5 = a+2b \end{cases}$.

Para obtener las ecuaciones cartesianas debemos determinar las condiciones de compatibilidad de este sistema: $\begin{cases} a+2b = x_1-1 \\ 2a-b = x_2-1 \\ -a \quad\ = x_3-2 \\ 3a+b = x_4-3 \\ a+2b = x_5 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{rr|l} 1 & 2 & x_1-1 \\ 2 & -1 & x_2-1 \\ -1 & 0 & x_3-2 \\ 3 & 1 & x_4-3 \\ 1 & 2 & x_5 \end{array}\right. \xrightarrow[\substack{F_2+2F_3 \\ F_4+3F_3 \\ F_5+(-1)F_1}]{} \left.\begin{array}{rr|l} 1 & 2 & x_1-1 \\ 0 & -1 & x_2+2x_3-5 \\ -1 & 0 & x_3-2 \\ 0 & 1 & x_4+3x_3-9 \\ 0 & 0 & x_5-x_1+1 \end{array}\right. \xrightarrow[\substack{F_1+2F_2 \\ F_4+F_2}]{} \left.\begin{array}{rr|l} 1 & 0 & x_1+2x_2+4x_3-11 \\ 0 & -1 & x_2+2x_3-5 \\ -1 & 0 & x_3-2 \\ 0 & 0 & x_4+5x_3+x_2-14 \\ 0 & 0 & x_5-x_1+1 \end{array}\right. \xrightarrow[\substack{F_3+F_1 \\ (-1)F_2}]{} \left.\begin{array}{rr|l} 1 & 0 & x_1+2x_2+4x_3-11 \\ 0 & 1 & -x_2-2x_3+5 \\ 0 & 0 & x_1+2x_2+5x_3-13 \\ 0 & 0 & x_4+5x_3+x_2-14 \\ 0 & 0 & x_5-x_1+1 \end{array}\right.$$

Por consiguiente, un sistema de ecuaciones de esta variedad es: $\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=13 \\ x_2+5x_3+x_4=14 \\ x_1-x_5=1 \end{cases}$.

Observación: Notar que las ecuaciones vectoriales, paramétricas y cartesianas de una variedad lineal **A** no son únicas, es decir podemos tener distintas ecuaciones de cada tipo para una misma variedad.

1.9.2 Paralelismo e Intersección de Variedades Lineales

Definición 1.9.2.1 Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo **K**.
Sean $\mathbf{A}=\mathbf{p}+\mathbf{W_A}$ y $\mathbf{B}=\mathbf{q}+\mathbf{W_B}$ variedades lineales en el espacio vectorial **V**. Diremos que $\mathbf{A}\,||\,\mathbf{B}$ sí y sólo si $\mathbf{W_A}\subseteq\mathbf{W_B}$ ó $\mathbf{W_B}\subseteq\mathbf{W_A}$.

Observación: Si $\mathbf{A}=\mathbf{p}+\mathbf{W_A}$ y $\mathbf{B}=\mathbf{q}+\mathbf{W_B}$ variedades lineales de la misma dimensión en el espacio vectorial **V,** entonces $\mathbf{A}\,||\,\mathbf{B}$ sí y sólo si $\mathbf{W_A}=\mathbf{W_B}$.

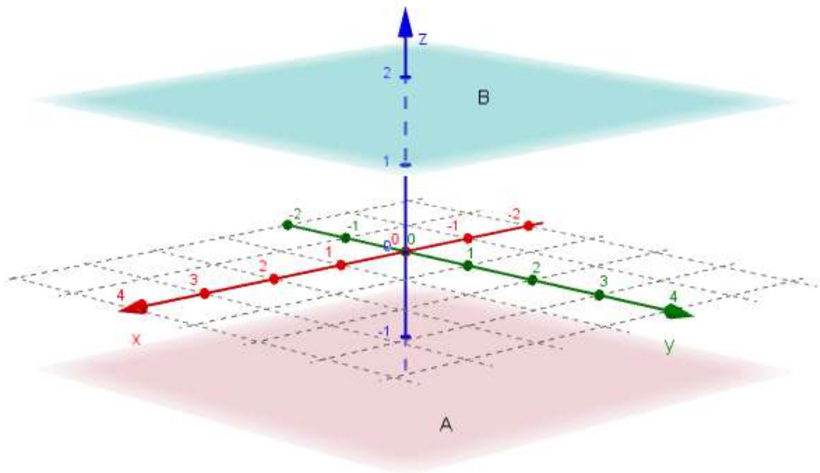
Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$. Sean las variedades siguientes: la recta $\mathbf{L:}\ (x_1,x_2,x_3,x_4)=(2,1,3,5)+\langle(1,2,3,0)\rangle$ y el plano $\pi\mathbf{:}\ (x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,1,5,8)+\langle(1,0,1,2),\ (0,1,1,-1)\rangle$.
L es paralela al plano π puesto que el vector de dirección de la recta $(1,2,3,0)$ es combinación lineal de los vectores que generan el plano $(1,0,1,2)$ y $(0,1,1,-1)$. Compruébelo!
En consecuencia, el subespacio asociado a la recta está incluido en el subespacio asociado al plano. Luego $\mathbf{L}\,||\,\pi$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$. Sean $\mathbf{A}=(0,0,-1)+\langle(1,0,0),(1,2,0)\rangle$ y $\mathbf{B}=(0,0,2)+\langle(0,1,0),(2,1,0)\rangle$ variedades lineales del vectorial. Las variedades **A** y **B** son paralelas.



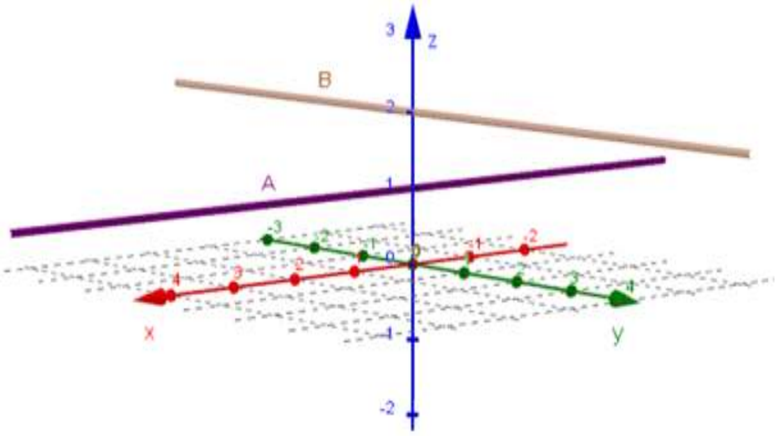
Definición 1.9.2.2 Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Sean $\mathbf{A}=\mathbf{p}+\mathbf{W_A}$ y $\mathbf{B}=\mathbf{q}+\mathbf{W_B}$ variedades lineales en el espacio vectorial $\mathbf{V}$. Diremos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son ***alabeadas*** sí y sólo si $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{\ \}$ y $\mathbf{A}\nparallel\mathbf{B}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$.
Sean las variedades lineales $\mathbf{A}=(0,0,1)+\langle(1,0,0)\rangle$ y $\mathbf{B}=(0,0,2)+\langle(0,1,0)\rangle$.

Las variedades **A** y **B** no son paralelas ni se intersectan, luego **A** y **B** son alabeadas.



Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$.
Sean las variedades lineales $\mathbf{A}=(1,2,5,0)+\langle(1,2,1,0),\ (0,1,3,1)\rangle$ y $\mathbf{B}=(0,1,1,2)+\langle(2,3,1,0)\rangle$

Como $(2,3,1,0)\notin\langle(1,2,1,0),\ (0,1,3,1)\rangle\Rightarrow\mathbf{W_B}\not\subset\mathbf{W_A}$.

Por otro lado $dim\,\mathbf{W_A}>dim\,\mathbf{W_B}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{W_A}\not\subset\mathbf{W_B}$.

Luego **A** y **B** no son paralelas.

Analizaremos si **A** y **B** se intersectan. Supongamos $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ entonces se tiene que

$$\mathbf{x}\in\mathbf{A}\iff(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,2,5,0)+a(1,2,1,0)+b(0,1,3,1)$$
$$\mathbf{x}\in\mathbf{B}\iff(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,1,1,2)+c(2,3,1,0)$$

Para que $\mathbf{x}\in\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ se debe verificar que

$$(1,2,5,0)+a(1,2,1,0)+b(0,1,3,1)=(0,1,1,2)+c(2,3,1,0)$$

ecuación vectorial que puede escribirse también:

$$a(1,2,1,0)+b(0,1,3,1)-c(2,3,1,0)=(-1,-1,-4,2)$$

de donde resulta

$$\begin{cases} a-2c=-1 \\ 2a+b-3c=-1 \\ a+3b-c=-4 \\ b=2 \end{cases}.$$

El sistema planteado es incompatible, por lo tanto $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{\ \}$.

Luego **A** y **B** son **alabeadas**.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$. Sean las variedades lineales $\mathbf{A}=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \ / \ \begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_4=0 \end{cases}\right\}$ y $\mathbf{B}=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x_1+x_2+x_3+x_4=1\right\}$. Analizaremos si las variedades se intersecan.

$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \ / \ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{A} \ \wedge \ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{B}\right\}$ es decir, los vectores de $\mathbb{R}^4$ que verifican las ecuaciones de **A** y las de **B**.

Entonces

$$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \ / \ \begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \xrightarrow[F_3+(-1)F_1]{F_2+(-1)F_1} \left.\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow[\left(\frac{1}{2}\right)F_3]{\left(-\frac{1}{3}\right)F_2} \left.\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[F_2+\left(\frac{1}{3}\right)F_3]{F_1+(1)F_3} \left.\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{matrix}\right|\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow{F_1+(-1)F_2} \left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{matrix}\right|\begin{matrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1+\frac{2}{3}x_4=\frac{2}{3} \\ x_2-\frac{1}{6}x_4=\frac{1}{3} \\ x_3+\frac{1}{2}x_4=0 \end{cases}$$

luego $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\Leftrightarrow(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x_4,\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6}x_4,\ \frac{1}{2}x_4,\ x_4\right)$

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\Leftrightarrow(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2},0\right)+x_4\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{2},1\right)$$

Por lo tanto $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2},0\right)+\left\langle\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{2},1\right)\right\rangle$ es una recta.

Observación: La intersección de las dos variedades lineales es otra variedad lineal.

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$. El plano

$$\pi_1:\ (x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,-1,0,0)+\langle(-1,0,1,0),\ (1,1,1,1)\rangle$$

no es paralelo al plano

$$\pi_2:\ (x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,2,0,1)+\langle(2,1,0,0),\ (0,1,0,2)\rangle$$

ya que los vectores que generan el plano π_1 no son combinación lineal de los vectores que generan el plano π_2.

Analicemos si los planos se intersecan. Para ello se buscan los puntos comunes a ambos:

$$(1,-1,0,0)+t(-1,0,1,0)+k(1,1,1,1)=(1,2,0,1)+a(2,1,0,0)+b(0,1,0,2)$$
$$(1-t+k,-1+k,t+k,k)=(1+2a,2+a+b,0,1+2b)$$

Queremos ver si hay valores de t,k,a,b para los que se verifique la igualdad precedente, es decir ¿tiene solución el siguiente sistema?

$$\begin{cases} -t+k-2a=0 \\ k-a-b=3 \\ \ \ t+k=0 \\ k-2b=1 \end{cases}$$

operando convenientemente (verifíquelo!) se tiene que la solución es $(t,k,a,b)=(5,-5,-5,-3)$.

Por lo tanto, reemplazando los valores de t,k o a,b en la ecuación paramétrica de alguno de los dos planos se tiene que $\pi_1 \cap \pi_2 = \{(-9,-6,0,-5)\}$

Observación: La intersección de las dos variedades lineales π_1 y π_2 es otra variedad lineal.

Este resultado es general y se expresa en el siguiente Teorema.

Teorema 1.9.2.1 Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Sean $\mathbf{A}=\mathbf{a}+\mathbf{W_A}$ y $\mathbf{B}=\mathbf{b}+\mathbf{W_B}$ variedades lineales en el espacio vectorial $\mathbf{V}$.

Si $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\neq\{\ \}$ entonces $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ es una variedad lineal con subespacio asociado $\mathbf{W}=\mathbf{W_A}\cap\mathbf{W_B}$.

Demostración:

Si $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}\neq\{\ \}$ entonces existe un vector $\mathbf{s}\in\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$.

Como $\mathbf{s}\in\mathbf{A}$ podemos escribir $\mathbf{A}=\mathbf{s}+\mathbf{W_A}$.

Como $\mathbf{s}\in\mathbf{B}$ podemos escribir $\mathbf{B}=\mathbf{s}+\mathbf{W_B}$.

Luego, basta probar que $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})-\mathbf{s}=\mathbf{W_A}\cap\mathbf{W_B}$.

Dado que $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})-\mathbf{s}=(\mathbf{A}-\mathbf{s})\cap(\mathbf{B}-\mathbf{s})$ y teniendo en cuenta que $\mathbf{A}-\mathbf{s}=\mathbf{W_A}$ y que $\mathbf{B}-\mathbf{s}=\mathbf{W_B}$ resulta entonces que $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})-\mathbf{s}=\mathbf{W_A}\cap\mathbf{W_B}$.#

A continuación, veremos qué ocurre cuando los subespacios asociados son complementarios.

Teorema 1.9.2.2 Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Sean $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{W_A}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{W_B}$ variedades lineales en el espacio vectorial $\mathbf{V}$.

Si $\mathbf{W_A}$ y $\mathbf{W_B}$ son subespacios complementarios entonces $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{p}\}$.

Demostración:

Por ser $\mathbf{W_A}$ y $\mathbf{W_B}$ son subespacios complementarios se tiene que $\mathbf{W_A} \oplus \mathbf{W_B} = \mathbf{V}$, entonces todo vector de $\mathbf{V}$ se expresa como suma de un elemento de $\mathbf{W_A}$ y uno de $\mathbf{W_B}$. Si en particular se toma el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ se tiene que:

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{w} + \mathbf{w'} \quad \text{con} \quad \mathbf{w} \in \mathbf{W_A} \quad \text{y} \quad \mathbf{w'} \in \mathbf{W_B}$$

Por consiguiente $\mathbf{p} = \underbrace{\mathbf{a} + \mathbf{w}}_{\in \mathbf{A}} = \underbrace{\mathbf{b} - \mathbf{w'}}_{\in \mathbf{B}}$ es un punto de $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

Luego $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ no es vacía y por lo tanto $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{p} + (\mathbf{W_A} \cap \mathbf{W_B}) = \mathbf{p} + \{\overline{\mathbf{0}}\} = \{\mathbf{p}\}$. #

1.10 Coordenadas

En esta sección, definiremos base ordenada de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ dimensión n sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ y veremos que dada una $\mathbf{B}$ base ordenada de $\mathbf{V}$, mediante el concepto de coordenadas de un vector en la base $\mathbf{B}$ podremos “identificar" cada elemento del espacio $\mathbf{V}$ con un vector en $\mathbf{K}^n$.

Definición 1.10.1. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo **K.** Diremos que una sucesión $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ de vectores de $\mathbf{V}$ es una **base ordenada** sí y sólo si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes y generan al vectorial $\mathbf{V}$.
Teniendo en cuenta que dos sucesiones $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ y $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ son iguales sí y sólo si $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1,\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{v}_n = \mathbf{w}_n$ entonces dos bases ordenadas son iguales sí y sólo si están formadas por los mismos vectores y en el mismo orden.
Notación: $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$

En lo que sigue y salvo expresa mención en contrario trabajaremos con bases ordenadas.

1.10.1 Coordenadas de un vector en una base

Sea $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base ordenada del espacio vectorial $\mathbf{V}$.
Todo vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se expresa como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en una sola forma (demostrado en **Teorema 1.8.1.**). Esto es, dada la base $\mathbf{B}$ todo vector $\mathbf{v}$ determina una única n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de escalares, tales que: $\mathbf{v} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n$
Los escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ son las **coordenadas del vector v respecto de la base B**.
La n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se denomina **vector coordenado** del vector $\mathbf{v}$ respecto de la base **B,** y se denota por $(\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Resumiendo, tenemos:

Definición 1.10.1.1. Sea **V** un espacio vectorial de dimensión *n* sobre un cuerpo **K.** Sea $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base ordenada de **V**. Dado $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ existen únicos escalares $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{K}$ tales que $\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + x_n \mathbf{v}_n$. El vector $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{K}^n$ se denominará vector coordenado de **v** respecto de la base **B** y se denotará $(\mathbf{v})_{\mathbf{B}}$.

También se puede representar al vector **v**, por la matriz columna cuyos elementos son sus coordenadas respecto de la base **B.** En tal caso escribiremos:

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y sea el vector $\mathbf{v} = (2, -1, 3) \in \mathbf{V}$.

a) Tomando la base $\mathbf{B}_0 = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ se tiene que: $(\mathbf{v})_{\mathbf{B}_0} = (2, -1, 3)$ y utilizando notación matricial queda $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) Tomando la base $\mathbf{B}_1 = ((0,0,1), (1,0,0), (0,1,0))$ se tiene que: $(\mathbf{v})_{\mathbf{B}_1} = (3, 2, -1)$ y utilizando notación matricial se tiene $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

c) Tomando la base $\mathbf{B}_2 = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$ se tiene que:

$$(2, -1, 3) = x_1(1,0,0) + x_2(1,1,0) + x_3(1,1,1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ -1 = x_2 + x_3 \\ 3 = x_3 \end{cases}$$

Luego $x_1 = 3$, $x_2 = -4$ *y* $x_3 = 3$ en consecuencia $(\mathbf{v})_{\mathbf{B}_2} = (3, -4, 3)$, utilizando notación matricial queda $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2

Sean $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbf{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ base de **V**.

Si consideramos $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbf{V}$, se tiene que el vector coordenado de **v** respecto de la base ordenada **B** es $(\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (-9, 2, 0, -1)$ y si lo escribimos como vector columna se tiene $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq$ 2 con coeficientes reales. Sea $\mathbf{p} = 3 + 5X + 2X^2 \in \mathbf{V}$

a) Tomando la base $\mathbf{B}_1 = \left(1,\ X,\ X^2\right)$ se tiene que el vector coordenado de $\mathbf{p}$ respecto de la base ordenada $\mathbf{B}_1$ es: $(\mathbf{p})_{\mathbf{B}_1} = (3,5,2)$; $\quad [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) Si se considera la base $\mathbf{B}_2 = \left(X^2, X, 1\right)$, el vector coordenado de $\mathbf{p}$ respecto de la base ordenada $\mathbf{B}_2$ es: $(\mathbf{p})_{\mathbf{B}_2} = (2,5,3)$; $\quad [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

c) Tomando la base $\mathbf{B}_3 = \left(1+X,\ 1+X^2,\ 1+X+X^2\right)$:

$$\mathbf{p} = 3 + 5X + 2X^2 = \alpha\left(1+X\right) + \beta\left(1+X^2\right) + \gamma\left(1+X+X^2\right) \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = 4$$

Luego el vector coordenado de $\mathbf{p}$ respecto de la base ordenada $\mathbf{B}_3$ es:

$$(\mathbf{p})_{\mathbf{B}_3} = (1,-2,4); \qquad [\mathbf{p}]_{\mathbf{B}_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

En todo **V** espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo **K**, la n-upla de coordenadas asociada al vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ queda unívocamente determinada una vez elegida la base. Entonces, para cada base **B** del espacio vectorial **V** queda definida una aplicación del espacio vectorial **V** en el espacio vectorial $\mathbf{K}^n$, en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{B}} : \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{K}^n \\ \mathbf{v} &\rightarrow (\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Análogamente, queda definida una aplicación del espacio vectorial **V** en el espacio vectorial $\mathbf{K}^{n\times 1}$ (matrices columnas de "*n*" elementos).

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{B}} : \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{K}^{n\times 1} \\ \mathbf{v} &\rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Proposición 1.10.1. Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K,** $dim\,\mathbf{V} = n.$ Sean $\mathbf{u}; \mathbf{v} \in \mathbf{V}$; $\alpha \in \mathbf{K}$ y **B** base del espacio vectorial **V.** Si $\varphi_{\mathbf{B}} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{K}^n$ es tal que $\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{v})_{\mathbf{B}}$ entonces se verifica que:

a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (\mathbf{u})_{\mathbf{B}} + (\mathbf{v})_{\mathbf{B}}$ y $(\alpha\,\mathbf{u})_{\mathbf{B}} = \alpha(\mathbf{u})_{\mathbf{B}}$

b) $\varphi_{\mathbf{B}} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{K}^n$ es una aplicación biyectiva.

Demostración:

Queda como ejercicio para el lector. #

La aplicación $\varphi_{\mathbf{B}}$ tiene la propiedad de "preservar" las operaciones vectoriales entre $\mathbf{V}$ y $\mathbf{K}^n$ (las operaciones de adición y multiplicación por escalar realizadas con vectores de **V** se traducen en operaciones análogas con los respectivos vectores coordenados).

Una aplicación biyectiva con esta propiedad se llama **isomorfismo** (*iso* viene del griego y significa *lo mismo* mientras que *morfos* es la palabra griega para *forma* o *estructura)* de los espacios vectoriales que vincula. Por lo tanto $\varphi_{\mathbf{B}}$ es un isomorfismo de los espacios vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{K}^n$ o entre **V** y $\mathbf{K}^{n\times 1}$. En definitiva, esto significa que todas las operaciones vectoriales en **V** se reproducen exactamente en $\mathbf{K}^n$.

La selección de una base $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ para el espacio vectorial **V** equivale a introducir un sistema de coordenadas en **V.** La función $\varphi_{\mathbf{B}}$ vincula el espacio **V** de dimensión *n*, con el espacio conocido $\mathbf{K}^n$ a partir de lo cual los vectores de **V** se identifican con su representación en $\mathbf{K}^n$ previa ubicación de un punto como origen de coordenadas (Figura 1.6.)

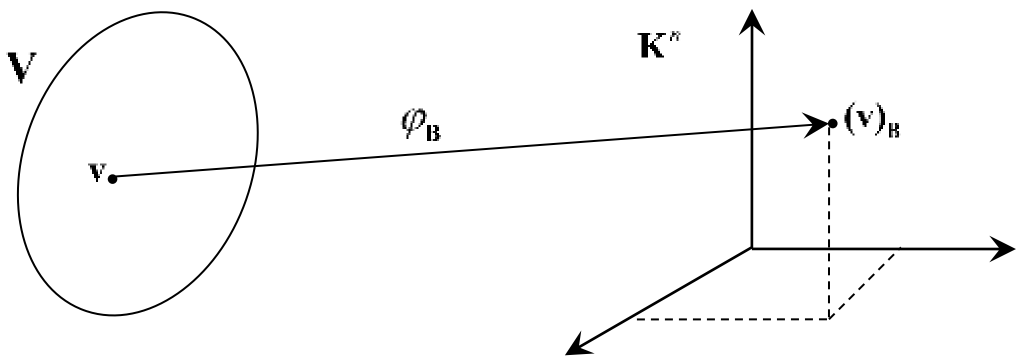


Figura 1.6: Vinculación entre los vectores del vectorial y las n-uplas.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K.** $dim\,\mathbf{V} = 3$. Sea $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ base ordenada de **V.** Los vectores coordenados de los siguientes vectores de **V**

a) $\mathbf{u} = 2\,\mathbf{v}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ *b)* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 - 6\,\mathbf{v}_3$
c) $\bar{\mathbf{0}}$ *d)* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
e) $3\mathbf{u} + 2\,\mathbf{v}$ *f)* $\mathbf{v}_1$; $\mathbf{v}_2$; $\mathbf{v}_3$

Son:

a) $[\mathbf{u}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ *b)* $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ *c)* $[\bar{\mathbf{0}}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *d)* $[\mathbf{u}+\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = [\mathbf{u}]_{\mathbf{B}} + [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$

e) $[3\mathbf{u}+2\,\mathbf{v}]_\mathbf{B} = 3[\mathbf{u}]_\mathbf{B} + 2[\mathbf{v}]_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ -15 \end{bmatrix}$ *f)* $[\mathbf{v}_1]_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $[\mathbf{v}_2]_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $[\mathbf{v}_3]_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2

Si consideramos $\mathbf{V}$ un espacio vectorial cualquiera de dimensión n y tenemos que $\mathbf{A} = \mathbf{p} + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r \rangle$ es una variedad lineal de $\mathbf{V}$, entonces todo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ se expresa de la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha_1\, \mathbf{w}_1 + \alpha_2\, \mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_r\, \mathbf{w}_r \qquad (1)$$

Si $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ es una base de $\mathbf{V}$ y tomamos vectores coordenados en (1) resulta

$$(\mathbf{x})_\mathbf{B} = (\mathbf{p} + \alpha_1\, \mathbf{w}_1 + \alpha_2\, \mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_r\, \mathbf{w}_r)_\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{x})_\mathbf{B} = (\mathbf{p})_\mathbf{B} + \alpha_1 (\mathbf{w}_1)_\mathbf{B} + \alpha_2 (\mathbf{w}_2)_\mathbf{B} + \cdots + \alpha_r (\mathbf{w}_r)_\mathbf{B}$$

Si $(\mathbf{x})_\mathbf{B} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(\mathbf{p})_\mathbf{B} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $(\mathbf{w}_i)_\mathbf{B} = (w_{1i},\ w_{2i}, \ldots, w_{ni})$ para $i = 1, 2, \ldots, r$ la ecuación (1) se puede escribir como:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (p_1, p_2, \ldots, p_n) + \alpha_1 (w_{11},\ w_{21}, \ldots, w_{n1}) + \cdots + \alpha_r (w_{1r},\ w_{2r}, \ldots, w_{nr}) \qquad (2)$$

que es la ecuación vectorial de una variedad lineal en $\mathbb{R}^\mathbf{n}$. Esta variedad lineal representa a la variedad dada en el vectorial $\mathbf{V}$, respecto a la base elegida $\mathbf{B}$. Análogamente, los sistemas de ecuaciones paramétricas y cartesianas de (2) representan también a la variedad lineal $\mathbf{A}$ respecto de la base $\mathbf{B}$.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_3$ y sea $\mathbf{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canónica de $\mathbf{V}$. Un elemento cualquiera $\mathbf{p} \in \mathbf{P}_3$ tiene la forma $\mathbf{p} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$. Por lo que: $[\mathbf{p}]_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$.

Luego la función de coordenadas $\varphi_\mathbf{B}: \mathbf{P}_3 \to \mathbb{R}^{4\times 1}$, $\mathbf{p} \to [\,\mathbf{p}\,]_\mathbf{B}$ es un isomorfismo de $\mathbf{P}_3$ y $\mathbb{R}^4$.

La identificación entre los vectores del vectorial $\mathbf{V}$ y las 4-uplas de $\mathbb{R}^4$, en este caso, permite estudiar propiedades importantes de los vectores sea en $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}^{4\times 1}$ y "traducir" los resultados al vectorial $\mathbf{V}$.

Así, para comprobar si los polinomios $\mathbf{p} = 1 + 2X^3$; $\mathbf{q} = 4 + X + 5X^3$; $\mathbf{r} = 3 + 2X$ son linealmente dependientes en $\mathbf{P}_3$, podemos utilizar la función de coordenadas:

$$[\mathbf{p}]_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{q}]_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{r}]_\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces para determinar su dependencia lineal, planteamos:

$\alpha[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} + \beta[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}} + \gamma[\mathbf{r}]_{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}4\\1\\0\\5\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}3\\2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ y podemos escribir esta última expresión como $\begin{bmatrix}1&4&3\\0&1&2\\0&0&0\\2&5&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$. Reduciendo por filas la matriz ampliada $\begin{bmatrix}1&4&3&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\\2&5&0&0\end{bmatrix}$, se tiene que es igual a $\begin{bmatrix}1&0&-5&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

Luego, los vectores coordenados $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}$; $[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}}$; $[\mathbf{r}]_{\mathbf{B}}$ son linealmente dependientes. Por lo tanto, también lo son los polinomios **p**, **q** y **r**.

Notar que considerando la reducida por filas de la matriz ampliada se tiene $\alpha = 5\gamma$ y $\beta = -2\gamma$.

Luego si $\gamma = 1$ se tiene $5[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} + (-2)[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}} + [\mathbf{r}]_{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{r}]_{\mathbf{B}} = 2[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}} - 5[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}}$.

Más precisamente, $3 + 2X = 2\left(4 + X + 5X^3\right) - 5\left(1 + 2X^3\right)$.

Generalizando, se tiene el siguiente resultado

> **Teorema 1.9.1.** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K,** de dimensión finita "*n*". Sea **B** una base del espacio vectorial **V** y sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ vectores de **V.** Se verifica que:
>
> **a)** $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ son linealmente dependientes sí y sólo si sus vectores coordenados $[\mathbf{u}_1]_{\mathbf{B}}, [\mathbf{u}_2]_{\mathbf{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_r]_{\mathbf{B}}$ lo son.
>
> **b)** $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ son linealmente independientes sí y sólo si sus vectores coordenados $[\mathbf{u}_1]_{\mathbf{B}}, [\mathbf{u}_2]_{\mathbf{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_r]_{\mathbf{B}}$ lo son.
>
> **b)** $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ generan **V** sí y sólo si $[\mathbf{u}_1]_{\mathbf{B}}, [\mathbf{u}_2]_{\mathbf{B}}, \ldots, [\mathbf{u}_r]_{\mathbf{B}}$ generan $\mathbf{K}^{n\times 1}$.

Demostración:

Queda como ejercicio para el lector. #

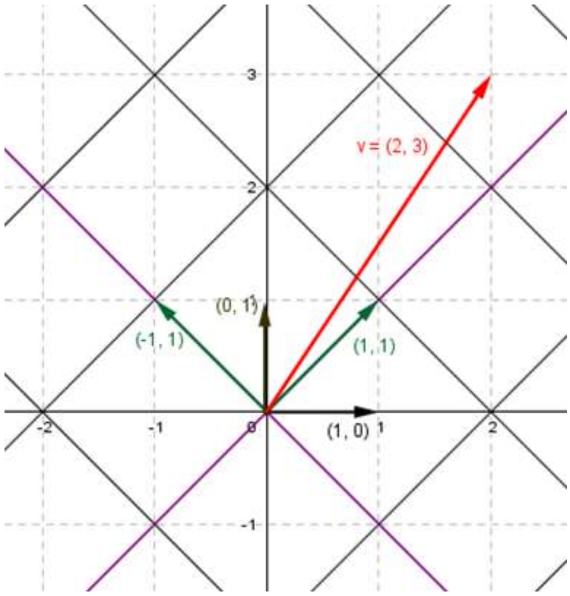
1.10.2 Cambio de Base

Como ya se mencionó con anterioridad, la representación de vectores de un espacio vectorial **V** de dimensión finita por sus vectores de coordenadas **depende de la base elegida**. A continuación, nos proponemos estudiar cómo se relacionan los vectores de coordenadas de un mismo vector respecto a distintas bases.

Veamos primero un ejemplo sencillo en $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$.

Sea el vector $\mathbf{v} = (2,3) \in \mathbf{V}$.
Si se considera la base $\mathbf{B}_1 = \big((1,0),(0,1)\big)$ y la base es $\mathbf{B}_2 = \big((1,1),(-1,1)\big)$
¿Cómo se relacionan los vectores de coordenadas $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1}$ y $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2}$?
¿Cómo se vinculan las bases $\mathbf{B}_1 = \big((1,0),(0,1)\big)$ y $\mathbf{B}_2 = \big((1,1),(-1,1)\big)$?

$\mathbf{v} = (2,3) \in \mathbb{R}^2$



Considerando $\mathbf{B}_1 = \big((1,0),(0,1)\big)$ se tiene:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1) \Rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Considerando $\mathbf{B}_2 = \big((1,1),(-1,1)\big)$ se tiene:

$$(2,3) = \tfrac{5}{2}(1,1) + \tfrac{1}{2}(-1,1) \Rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Examinando la expresión anterioridad, el vector $\mathbf{v} = (2,3) = \tfrac{5}{2}(1,1) + \tfrac{1}{2}(-1,1)$ si se toma vector coordenado respecto a la base $\mathbf{B}_1$ resulta

$$[(2,3)]_{\mathbf{B}_1} = \left[\tfrac{5}{2}(1,1) + \tfrac{1}{2}(-1,1)\right]_{\mathbf{B}_1} = \tfrac{5}{2}[(1,1)]_{\mathbf{B}_1} + \tfrac{1}{2}[(-1,1)]_{\mathbf{B}_1} = \underbrace{\Big[[(1,1)]_{\mathbf{B}_1} \quad [(-1,1)]_{\mathbf{B}_1}\Big]}\cdot\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} & = & \mathbf{P} & . & [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} \end{array}$$

Los vectores de coordenadas $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1}$ y $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2}$ que representan al mismo vector (2,3) se relacionan a través de la matriz **P**.

A continuación, tomaremos un espacio vectorial **V** de dimensión finita y estudiaremos como se relacionan los vectores de coordenadas de un mismo vector respecto a distintas bases. Esto es, dadas dos bases ordenadas del espacio vectorial **V**, cada elemento de **V** tiene asociados dos vectores coordenados, uno con respecto a cada una de las bases. Veremos que con la ayuda de cierta matriz, llamada matriz de cambio de base, se pueden obtener las coordenadas de un vector con respecto a una base de **V** a partir de las coordenadas del vector en otra base.

Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, $dim\,\mathbf{V} = n$.

Sean $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ y $\mathbf{B}_2 = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \ldots, \mathbf{v}'_n)$ bases ordenadas de **V.**

Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, luego **v** puede escribirse como combinación lineal de los vectores de las bases elegidas.

Respecto a la base $\mathbf{B}_1$: $\quad \mathbf{v} \in \mathbf{V} \;\Rightarrow\; \mathbf{v} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n \;\Rightarrow\; [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Respecto a la base $\mathbf{B}_2$: $\quad \mathbf{v} \in \mathbf{V} \;\Rightarrow\; \mathbf{v} = y_1\,\mathbf{v}'_1 + y_2\,\mathbf{v}'_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{v}'_n \;\Rightarrow\; [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

Ahora bien, considerando que: $\mathbf{v} = y_1\,\mathbf{v}'_1 + y_2\,\mathbf{v}'_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{v}'_n$ y tomando vector coordenado respecto a la base $\mathbf{B}_1$ se tiene:

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} = \left[y_1\,\mathbf{v}'_1 + y_2\,\mathbf{v}'_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{v}'_n\right]_{\mathbf{B}_1} = y_1\left[\mathbf{v}'_1\right]_{\mathbf{B}_1} + y_2\left[\mathbf{v}'_2\right]_{\mathbf{B}_1} + \cdots + y_n\left[\mathbf{v}'_n\right]_{\mathbf{B}_1}$$

Teniendo en cuenta propiedades de la multiplicación de matrices, se tiene que:

$$\underset{\displaystyle [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1}}{\underset{\Downarrow}{[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1}}} = \underset{\displaystyle \mathbf{P}}{\underset{\Downarrow}{\underbrace{\Big[\left[\mathbf{v}'_1\right]_{\mathbf{B}_1} \;\left[\mathbf{v}'_2\right]_{\mathbf{B}_1} \cdots \left[\mathbf{v}'_n\right]_{\mathbf{B}_1}\Big]}}} \cdot \underset{\displaystyle [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2}}{\underset{\Downarrow}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}}$$

Luego

$$\boxed{[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} = \mathbf{P}\;[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} \text{ con } \mathbf{P} = \Big[\left[\mathbf{v}'_1\right]_{\mathbf{B}_1} \left[\mathbf{v}'_2\right]_{\mathbf{B}_1} \cdots \left[\mathbf{v}'_n\right]_{\mathbf{B}_1}\Big] \text{ la \textbf{matriz de cambio de base} de } \mathbf{B}_1 \text{ a } \mathbf{B}_2.}$$

Si bien a veces se suele designar a **P** como la matriz de transición de $\mathbf{B}_2$ a $\mathbf{B}_1$, nosotros adoptaremos la primera denominación: **matriz de cambio de base** de $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$.

Las columnas de la matriz **P** son, en su orden, las matrices columna correspondientes a los vectores coordenados de los vectores de la base $\mathbf{B}_2$ respecto a la base $\mathbf{B}_1$**:**

$$\mathbf{P}^j = \left[\mathbf{v}'_j\right]_{\mathbf{B}_1} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Las columnas de **P** son vectores linealmente independientes del vectorial $\mathbf{K}^{n\times 1}$ (por ser vectores coordenados de vectores de una base), por lo tanto, la matriz **P** es inversible.

Entonces $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} = \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{B}_1 = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big)$; $\mathbf{B}_2 = \big((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\big)$ bases de **V**.

Sea $\mathbf{v} = (3,4,-2)$ se quiere hallar $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2}$.

Dado que se obtiene con facilidad $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, se buscará la matriz **P** de cambio de base $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$ para así hallar $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} = \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_1}$.

La matriz de cambio de base $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$ es:

$$\mathbf{P} = \Big[[\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} \;\; [\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} \;\; [\mathbf{v}'_3]_{\mathbf{B}_1} \Big] = \Big[[(1,1,1)]_{\mathbf{B}_1} \;\; [(0,1,1)]_{\mathbf{B}_1} \;\; [(0,0,1)]_{\mathbf{B}_1} \Big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

P es inversible pues sus columnas son vectores linealmente independientes del vectorial $\mathbb{R}^{3\times1}$, entonces se tiene que:

$$[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{B}_1 = \big((1,0,0), (0,1,1), (1,1,1)\big)$ base de **V**.

Se quiere hallar la base $\mathbf{B}_2$ sabiendo que la matriz de cambio de base $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$ es $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Sea $\mathbf{B}_2 = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3)$ la base buscada.

Teniendo en cuenta que la matriz de cambio de base $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$ es:

$$\mathbf{P} = \Big[[\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} \;\; [\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} \;\; [\mathbf{v}'_3]_{\mathbf{B}_1} \Big] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; [\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \;\; [\mathbf{v}'_3]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\mathbf{v}'_1 = 1.(1,0,0) + (-2).(0,1,1) + 1.(1,1,1) = (2,-1,-1)$$

$$\mathbf{v}'_2 = 3.(1,0,0) + 1.(0,1,1) + 0.(1,1,1) = (3,1,1)$$

$$\mathbf{v}'_3 = 0.(1,0,0) + 0.(0,1,1) + (-1).(1,1,1) = (-1,-1,-1)$$

Por lo tanto, la base buscada es $\mathbf{B}_2 = \big((2,-1,-1), (3,1,1), (-1,-1,-1)\big)$.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_3$ y sea $\mathbf{B}_1 = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canónica de $\mathbf{V}$. Se quiere hallar la base $\mathbf{B}_2$ tal que la matriz $\mathbf{P}$ de cambio de base $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$ sea: $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Sea $\mathbf{B}_2 = \left(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \mathbf{v}'_4\right)$. Teniendo en cuenta que $\mathbf{P} = \left[[\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} \; [\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} \; [\mathbf{v}'_3]_{\mathbf{B}_1} \; [\mathbf{v}'_4]_{\mathbf{B}_1} \right]$ entonces

$$[\mathbf{v}'_1]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}'_2]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}'_3]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}'_4]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego $\mathbf{v}'_1 = -1 + X^3$, $\mathbf{v}'_2 = 2 + X^2$, $\mathbf{v}'_3 = 2 + X + X^3$, $\mathbf{v}'_4 = 1 - X^2 + X^3$.

1.11 Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 1

Sea **V** el conjunto de las matrices de las matrices 2x2, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ con las operaciones definidas de la forma usual. Mostrar que **V** es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Ejercicio 2

Sea **V** el conjunto de pares ordenados de números reales y **K** el cuerpo de los números reales.

a) Si se definen en **V** las operaciones:

$$+ \ \mathbf{:} \ (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 - 1, x_2 + y_2 - 1)$$
$$\bullet \ \mathbf{:} \ \alpha \bullet (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

¿Es **V** con estas operaciones un espacio vectorial?

b) Ídem al caso anterior, pero definiendo al producto por escalares como:

$\alpha \bullet (x_1, x_2) = (\alpha x_1 - \alpha + 1, \alpha x_2 - 2\alpha + 2)$

¿Es **V** con estas operaciones un espacio vectorial?

Ejercicio 3

En cada uno de los casos siguientes analizar si los subconjuntos dados son subespacios del espacio vectorial **V** indicado.

1. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{W} = \left\{ (x,\ y) \in \mathbf{R^2} \ / \ x + y = 0 \right\} \qquad \mathbf{U} = \left\{ (x,\ y) \in \mathbf{R^2} \ / \ x.y \le 0 \right\}$$

2. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$

$$\mathbf{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ donde } x_1 = 3x_2 \right\}$$

$$\mathbf{C} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, 0, x_3, 1) \right\}$$

$$\mathbf{D} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ donde } x_1 \ge 0 \right\}$$

$$\mathbf{F} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ es solución de } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\mathbf{G} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ es solución de } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

3. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \ / \ x_2 = x_1^2 \right\}$$

$$\mathbf{B} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \alpha\,(1,1,1,\dots,1) \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbf{C} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \text{ donde } x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

4. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \ a \in \mathbb{R} \right\}; \quad \mathrm{U} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ b & 0 \end{bmatrix} \ a, b \in \mathbb{R} \right\}; \quad \mathbf{T} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 0 \end{bmatrix} \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbf{Y} = \left\{ \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ \mathrm{A} \text{ es simétrica} \right\}$$

$$\mathbf{Z} = \left\{ \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ \mathrm{A} \text{ es inversible} \right\}$$

5. $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]$

$$\mathbf{A} = \{ \text{polinomios de grado menor o igual a } n \text{ con térnimo independiente nulo} \}$$
$$= \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}[X] \ / \ \mathbf{p} = a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_s X^s \ \ con \ \ a_i \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ s \le n \right\}$$

$$\mathbf{B} = \{ \text{polinomios de grado igual a } n \} \cup \{ \text{polinomio nulo} \}$$

$$\mathbf{C} = \{ \text{polinomios de grado menor o igual a } n \}$$

$$\mathbf{D} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}[X] \ / \ \mathbf{p} = \left(X^2 + 2 \right) \bullet \mathbf{q} \quad \text{con} \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}[X] \right\}$$

6. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f \ / \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ función} \}$

$$\mathbf{A} = \{ f \ / \ f(x) = k = \text{cte} \quad \forall x \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathbf{B} = \{ f \ / \ f(-1) = f(1) = 0 \}$$

$$\mathbf{C} = \{ f \ / \ f(3) = 2 \}$$

$$\mathbf{C}[a,b] = \{ f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo } [a,b] \}$$

$$\mathbf{C}^1(a,b) = \{ f \ / \ f \text{ es derivable con derivada continua en el intervalo } (a,b) \}$$

Ejercicio 4

En cada caso analizar si el vector $\mathbf{u}$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

a) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$, $\mathbf{u} = (0,1,1,1)$ siendo $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,1), \mathbf{v}_2 = (0,1,1,0), \mathbf{v}_3 = (1,1,1,1)$

b) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ siendo $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{V} = \mathbf{P_2}$, $\mathbf{u} = 1 + X + X^2$ siendo $\mathbf{v_1} = 1 + X$, $\mathbf{v_2} = 1 + X^2$, $\mathbf{v_3} = X + X^2$

Ejercicio 5

En cada uno de los casos siguientes, caracterizar los vectores del subespacio **W.**

a) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ $\mathbf{W} = \langle (1,2,0), (2,4,0), (0,0,1), (2,4,-2) \rangle$

b) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ $\mathbf{W} = \langle (-1,1,0,0), (1,2,0,1), (3,0,0,-1) \rangle$

c) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\mathbf{W} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

d) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{4\times 1}$ $\mathbf{W} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

e) $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]$ $\mathbf{W} = \langle 1+X,\ 1-X,\ X^2 \rangle$

Ejercicio 6

En cada uno de los casos siguientes, analizar cuáles de los conjuntos de vectores generan el espacio vectorial **V.**

a) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$

1) $\{(1,2),\ (-1,1)\}$ 2) $\{(0,0),\ (1,1),\ (-2,-2)\}$

3) $\{(1,3),\ (2,-3),\ (0,2)\}$ 4) $\{(2,4),\ (-1,2)\}$

b) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$

1) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ 2) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$

1) $\{X^2+1,\ X^2+X,\ X+1\}$ 2) $\{X^2-1,\ X^2+2X-1\}$

3) $\{X^2+2,\ 2X^2-X+1,\ X+2,\ X^2+X+4\}$

Ejercicio 7

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{3\times 4}$ y sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Encuentre la matriz $\mathbf{R_A}$, reducida por filas de **A.**

b) Sean $\mathbf{W_f}$ **(A)** el subespacio generado por las filas de **A** y $\mathbf{W_f}\left(\mathbf{R_A}\right)$ el subespacio generado por las filas de $\mathbf{R_A}$. Muestre que $\mathbf{W_f(A) = W_f}\left(\mathbf{R_A}\right)$.

c) El resultado anterior sugiere que una matriz y su reducida tienen el mismo subespacio de filas. Dé razones que justifiquen este hecho.

d) Utilice la conclusión anterior para determinar si son iguales los siguientes subespacios

$$\mathbf{W_1} = \left\langle (1,-1,1),\ (4,-3,\ 1),\ (3,-2,0) \right\rangle$$
$$\mathbf{W_2} = \left\langle (1,-1,1),\ (-2,1,1),\ (5,-4,2) \right\rangle$$

Ejercicio 8

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Sean $\mathbf{S_1} = \{(1,-1,2),(0,1,3),(0,0,0)\}$ y $\mathbf{S_2} = \{(0,0,1),(1,1,3),(5,4,-7)\}$ conjuntos de **V.**

a) Definir el conjunto $\mathbf{S_1 + S_2}$. Analizar si $\mathbf{S_1 \subset S_1 + S_2}$ y/o $\mathbf{S_2 \subset S_1 + S_2}$.

b) Analizar si cada uno de los siguientes puntos pertenecen a $\mathbf{S_1 + S_2}$:

$$(1,-1,2);\quad (1,1,3);\quad (6,3,5)\ \text{ y }\ (0,0,0)$$

c) ¿Es $\mathbf{S_1 + S_2}$ un subespacio de **V**? Justifique su respuesta.

Ejercicio 9

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Sean $\mathbf{S_1} = \{(1,-1,2),(0,1,3),(0,0,0)\}$ y $\mathbf{S_2} = \{(0,0,1),(1,1,3),(5,4,-7)\}$ conjuntos de **V.**

a) Considerar $\mathbf{W}_1 = \langle \mathbf{S_1} \rangle$, $\mathbf{W}_2 = \langle \mathbf{S_2} \rangle$ y dar $\mathbf{W_1 + W_2}$. Analizar si $\mathbf{S_1 \subset W_1 + W_2}$ y/o $\mathbf{S_2 \subset W_1 + W_2}$.

b) Analizar si cada uno de los siguientes puntos pertenecen a $\mathbf{W_1 + W_2}$:

$$(1,-1,2);\quad (1,1,3);\quad (6,3,5)\ \text{ y }\ (0,0,0)$$

c) ¿Es $\mathbf{W_1 + W_2}$ un subespacio de **V**? Justifique su respuesta.

Ejercicio 10

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y sean $\mathbf{U} = \{(x,x,2x) / x \in \mathbb{R}\}$ $\quad \mathbf{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$ subespacios.

a) Definir los subespacios **U** por medio de sistemas de ecuaciones lineales homogéneas.
b) Dar un conjunto de generadores y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U + W}$.
c) Dar un conjunto de generadores y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U \cap W}$.

Ejercicio 11

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ y sean $\mathbf{U} = \left\langle (1,2,1,0),\ (2,-1,0,3) \right\rangle$ $\quad \mathbf{W} = \left\langle (1,-1,1,1),\ (2,-1,0,0) \right\rangle$ subespacios.

a) Definir los subespacios **U** y **W** por medio de sistemas de ecuaciones lineales homogéneas.
b) Dar un conjunto de generadores y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.
c) Dar un conjunto de generadores y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

Ejercicio 12

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y sean $\mathbf{U} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ $\quad \mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ b = 0 \right\}$ subespacios.

a) Definir el subespacio **U** por medio de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.
b) Dar un conjunto de generadores del subespacio **W.**
c) Dar un conjunto de generadores del subespacio $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.
d) Dar un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

Ejercicio 13

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ y sean $\mathbf{U} = \left\langle 1 + X^2, 1 - 2X + X^2 \right\rangle$ $\quad \mathbf{W} = \left\{ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbf{P}_2 \ / \ a_0 + 2a_1 = 0 \right\}$ subespacios de **V**.

a) Definir el subespacio **U** por medio de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.
b) Dar un conjunto de generadores del subespacio **W**.
c) Dar un conjunto de generadores y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.
d) Dar un conjunto de generadores y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

Ejercicio 14

Determinar si los siguientes vectores dados en cada espacio vectorial son linealmente independientes o linealmente dependientes.
En el caso de tener vectores linealmente dependientes, expresar un vector del conjunto como combinación lineal de los demás.

1. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$
$a)$ $\mathbf{u}_1 = (1,-2,0);\quad \mathbf{u}_2 = (-3,0,2);\quad \mathbf{u}_3 = (0,1,1)$
$b)$ $\mathbf{u}_1 = (1,-1,1);\quad \mathbf{u}_2 = (2,1,3);\quad \mathbf{u}_3 = (0,-3,5);\quad \mathbf{u}_4 = (0,0,0)$

2. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$
$a)$ $\mathbf{u}_1 = (1,-2,3,-1);\quad \mathbf{u}_2 = (-2,4,-6,2)$
$b)$ $\mathbf{u}_1 = (1,0,-1,1);\quad \mathbf{u}_2 = (2,1,1,3);\quad \mathbf{u}_3 = (0,-1,-3,5)$

3. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad a)$ $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$b)$ $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ $\quad \mathbf{v_1} = 2 + 3X - X^2$; $\mathbf{v_2} = -6 - 5X^2$

5. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\quad a)$ $f: x \to x^2$; $g: x \to sen(x)$; $h: x \to cos(x)$

$b)$ $f: x \to cos(x)$; $g: x \to sen(x)$; $h: x \to e^x$

$c)$ $f: x \to cos^2(x)$; $g: x \to sen^2(x)$; $h: x \to cos(2x)$

Ejercicio 15

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Determinar para qué valor o valores de k el conjunto $\{(1,1,k),(k,0,0),(0,k,4)\}$ resulta linealmente independiente y para cuáles linealmente dependiente.

¿Qué interpretación geométrica puede hacer si el conjunto es linealmente independiente? y ¿qué puede decir en el caso de ser linealmente dependiente?

Ejercicio 16

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base de **V**?

$a)$ $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ $\quad \mathbf{B} = \{(1,1), (1,2)\}$

$b)$ $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ $\quad \mathbf{B} = \{(1,1), (1,2), (0,0)\}$

$c)$ $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ $\quad \mathbf{B} = \{(1,0,1,1),\ (0,1,1,-1),\ (0,0,1,1),\ (0,0,1,-1)\}$

$d)$ $\mathbf{V} = \mathbf{P_2}$ $\quad \mathbf{B} = \{1+X,\ 1-X,\ 1+X+X^2\}$

Ejercicio 17

Encontrar la o las condiciones que debe satisfacer el escalar a para que los vectores: $(1,a,1)$; $(0,1,a)$; $(a,1,0)$ formen una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 18

En cada una de las siguientes situaciones dar una base y la dimensión de los siguientes subespacios.

a) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ $\quad \mathbf{W} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \right\}$

b) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$ $\quad \mathbf{W} = \langle (1,1,0),\ (2,1,1),\ (1,2,-1),\ (6,5,1) \rangle$

c) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ $\quad \mathbf{W} = \{(a+b, 2b, -c, b+c) \ / \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$

d) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ $\qquad \mathbf{W} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle/\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

e) **W** es el subespacio de $\mathbb{R}^5$, definido como conjunto de soluciones del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

f) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times3}$ $\qquad \mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a & b \\ a+b & b & b \end{bmatrix} \;\middle/\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$

g) Dar una base y la dimensión de los subespacios **U** y **W** de los ejercicios 10, 11, 12 y 13.

Ejercicio 19

Considerar $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. En cada ítem proponer ejemplos que verifiquen la o las condiciones pedidas.

a) Un subconjunto de vectores L.I. pero no sea base de **V**.
b) Un subconjunto de vectores que genere **V** pero no sea base.
c) Una base de **V** que no sea la canónica.
d) Un subconjunto de **V** que no sea subespacio.
e) Un subespacio de **V** de dimensión 1.
f) Un subespacio de **V** de dimensión 2.
g) Un subespacio de **V** de dimensión 3.

Ejercicio 20

En cada uno de los casos siguientes dar una base del espacio vectorial que incluya a los vectores dados.

a) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ $\qquad \mathbf{v_1} = (1, 0, 2);\ \ \mathbf{v_2} = (3, -1, 0)$

b) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ $\qquad \mathbf{v_1} = (2, 1, 5, 3);\ \ \mathbf{v_2} = (0, -1, 3, 5)$

c) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times2}$ $\qquad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};\quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 21

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$. Sean $\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;/\; \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, 0) \right\}$ y $\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;/\; \mathbf{x} = (x_1, 0, 0, x_4) \right\}$ subespacios de **V.** Se pide:

a) Caracterizar los vectores de $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

b) Dar una base de $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. Extenderla a una base de **U** y a una base de **W**.

c) Mostrar que $\mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbb{R}^4$ pero que la suma no es directa.

Ejercicio 22

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Sean

a) $\mathbf{U} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = 0\}$ $\quad \mathbf{W} = \langle (1,-1,2), (2,1,1) \rangle$ subespacios de $\mathbf{V}$. Mostrar que $\mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbb{R}^3$ pero la suma no es directa.

b) $\mathbf{U} = \langle (1,-1,2), (2,1,1) \rangle$ y $\mathbf{W}$ el conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. Mostrar que $\mathbb{R}^3 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$.

Ejercicio 23

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sean $\mathbf{U} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & b \end{bmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ y $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{bmatrix} \Big/ a \in \mathbb{R} \right\}$ subespacios de $\mathbf{V}$.

a) Dar bases de $\mathbf{U}$; $\mathbf{W}$ y de $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

b) Verificar el Teorema de la dimensión de la suma de subespacios.

c) Mostrar que la suma $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ es directa.

Ejercicio 24

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sean $\mathbf{U} = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & -a \\ b & c \end{bmatrix} \Big/ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ y $\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & -a \end{bmatrix} \Big/ a \in \mathbb{R} \right\}$ subespacios de $\mathbf{V}$.

a) Mostrar que la suma $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ es directa.

b) Dar bases de $\mathbf{U}$; $\mathbf{W}$ y de $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

c) Verificar el Teorema de la dimensión de la suma de subespacios.

Ejercicio 25

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P_3}$. Sean los subespacios

$$\mathbf{W} = \langle 1 - 2X,\ X + X^2,\ 1 + 2X^2 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{U} = \left\{ a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbf{P_3} \ \Big/ \ \begin{cases} 2a - c = 0 \\ 3b + d = 0 \end{cases} \right\}$$

a) Determinar si el vector $\mathbf{v} = 1 + 2X^2$ pertenece a $\mathbf{W}$ y/o a $\mathbf{U}$.

b) Definir mediante un sistema de ecuaciones lineales homogéneo el subespacio $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

c) Obtener una base del subespacio $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

d) ¿Es $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ suma directa? Justificar la respuesta.

Ejercicio 26

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Sean $\mathbf{U} = \langle (2,2,-1),\ (-1,2,2) \rangle$ y $\mathbf{W} = \langle (2,-1,2),\ (1,0,1) \rangle$ subespacios de **V**.

a) Teniendo en cuenta consideraciones de carácter geométrico, justifique que la suma de **U** y **W** no es directa.

b) Determine las dimensiones de **U**; **W** y de $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

c) Muestre que $\mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 27

En cada uno de los siguientes casos, dar dos subespacios complementarios del subespacio dado.

a) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ $\quad \mathbf{W} = \langle (1,1,0),\ (0,1,1) \rangle$.

b) $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ $\quad \mathbf{W} = \langle (2,1,5,3),\ (0,-1,3,5) \rangle$.

Ejercicio 28

Analizar si los subespacios estudiados en los ejercicios 22 a 26 son subespacios complementarios. Justificar la respuesta

Ejercicio 29

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$. Se pide:

a) Definir la variedad lineal $\mathbf{A} = (2,0,3,-1) + \langle (1,2,0,2), (0,0,1,3) \rangle$ como conjunto solución de un adecuado sistema de ecuaciones.

b) Sea la variedad lineal $\mathbf{B} = (1,0,2,-1) + \langle (0,-1,1,0),\ (1,0,2,1) \rangle$, dar las ecuaciones paramétricas de **B**.

c) Sea la variedad lineal $\mathbf{C}$: $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$, dar el subespacio asociado a **C**.

d) Sea la variedad lineal $\mathbf{H} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4 \}$ escriba a la variedad **H** de la forma **H** = **p**+**W**.

e) En cada uno de los ítems anteriores dar la dimensión de la variedad lineal.

Ejercicio 30

Sean **A** y **B** variedades lineales de $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$, tales que:

$$\mathbf{A} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \ / \ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = \mathbf{0} \\ x_2 - x_3 = \mathbf{1} \end{cases} \right\} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = (-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + \langle (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) \rangle;$$

a) Escribir a la variedad **A** de la forma **A** = **p**+**W**.

b) Dar una ecuación vectorial de la variedad **B**.
c) Determinar si estas variedades son **paralelas, alabeadas o se intersecan**.

Ejercicio 31

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$.

a) Dar una ecuación vectorial de la recta que incluye los puntos $\mathbf{p} = (-1,0,2,3)$ y $\mathbf{q} = (0,0,1,2)$

b) Dar una ecuación vectorial del plano que incluye los puntos $\mathbf{r} = (1,0,0,0)$, $\mathbf{s} = (0,1,0,0)$ y $\mathbf{u} = (0,0,0,1)$.

c) Definir las variedades lineales anteriores por sistemas de ecuaciones lineales.

d) Verificar si las variedades lineales son paralelas, se intersecan o son alabeadas.

Ejercicio 32

Sea **V** un espacio vectorial dimensión 3. Sea $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ una base ordenada de **V**. Se pide:

a) Dar los vectores de coordenada, respecto a la base **B** de los siguientes vectores

$$\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3; \quad \mathbf{u}_2 = -\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2; \quad \mathbf{u}_3 = \bar{\mathbf{0}}$$

b) Si $[\mathbf{w}_1]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; $[\mathbf{w}_2]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$; $[\mathbf{w}_3]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dar $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ y $\mathbf{w}_3$.

c) Calcular $[\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2]_{\mathbf{B}}$; $[2\mathbf{w}_2]_{\mathbf{B}}$; $[\mathbf{w}_1 - 3\mathbf{w}_2 + 4\mathbf{w}_3]_{\mathbf{B}}$.

Ejercicio 33

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ y sea $\mathbf{B} = (1,\ 1+X,\ 1+X^2)$ base ordenada de **V**. Sean

$$\mathbf{p}_1 = 2 - 3X + 5X^2; \quad \mathbf{p}_2 = 3 + X + X^2; \quad \mathbf{p}_3 = 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2; \quad \mathbf{p}_4 = \bar{\mathbf{0}}; \quad \mathbf{p}_5 = 1 + X$$

Se pide:

a) Dar los vectores coordenados de: $\mathbf{p}_1$; $\mathbf{p}_2$; $\mathbf{p}_3$; $\mathbf{p}_4$ y $\mathbf{p}_5$ con respecto a la base **B**.

b) Dar los vectores coordenados de: $\mathbf{p}_1$; $\mathbf{p}_2$; $\mathbf{p}_3$; $\mathbf{p}_4$ y $\mathbf{p}_5$ con respecto a la base $\mathbf{B}' = (1, X, X^2)$

c) Dar los vectores coordenados de: $\mathbf{p}_1$; $\mathbf{p}_2$; $\mathbf{p}_3$; $\mathbf{p}_4$ y $\mathbf{p}_5$ con respecto a la base $\mathbf{B}'' = (1 - X^2, X - X^2, 2 - 2X + X^2)$.

d) Si $[\mathbf{q}_1]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$; $[\mathbf{q}_2]_{\mathbf{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{q}_3]_{\mathbf{B}''} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ dar $\mathbf{q}_1$; $\mathbf{q}_2$ y $\mathbf{q}_3$.

Ejercicio 34

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ y sean las siguientes bases ordenadas de **V**

$$\mathbf{B}_1 = \big((1,1,0,0),\ (1,-1,0,0),\ (0,0,1,-1),\ (0,0,1,1)\big)$$
$$\mathbf{B}_2 = \big((0,0,0,1),\ (0,1,0,0),\ (1,0,0,0),\ (0,0,1,0)\big)$$
$$\mathbf{B}_3 = \text{ base canónica}$$

a) Dar los vectores coordenados, respecto a cada una de las bases, de los siguientes vectores:

$$(-1,1,2,0);\ (0,0,1,1);\ (0,0,0,0);\ (4,-3,1,3)$$

b) Hallar los respectivos vectores $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tales que

$$[\mathbf{v}_1]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix};\quad [\mathbf{v}_2]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix};\quad [\mathbf{v}_3]_{\mathbf{B}_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 35

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

a) Si $\mathbf{W} = \langle f_1,\ f_2 \rangle$ es el subespacio generado por las funciones definidas por:

$$f_1(x) = sen(x) \qquad f_2(x) = cos(x)$$

Probar que $(f_1,\ f_2)$ es una base de **W** y dar los vectores de coordenadas de las siguientes funciones:

$$h_1 : x \to 2\ sen(x) + 3\ cos(x)$$
$$h_2 : x \to cos\left(x + \pi/2\right)$$
$$h_3 : x \to sen\left(x + \pi/4\right)$$

b) Sea $\mathbf{W'} = \langle g_1,\ g_2 \rangle$ el subespacio generado por las funciones definidas por:

$$g_1(x) = sen^2(x) \qquad g_2(x) = cos^2(x)$$

Probar que (g_1, g_2) es una base de $\mathbf{W'}$ y dar el vector de coordenadas de la función $f : x \to cos(2x)$.

c) Teniendo en cuenta las bases hallas en los ítems a) y b) ¿cuál es la función cuyo vector de coordenadas en esta base es $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

Ejercicio 36

Sea **V** un espacio vectorial de dimensión dos. Sean **B** y $\mathbf{B'}$ bases ordenadas de **V**.

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ es la matriz de cambio de base **B** a $\mathbf{B'}$. Se pide:

a) Si $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcular $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$.

b) Si $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, calcular $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}}$.

c) Si $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{B} = ((1,1),\ (1,-1))$ hallar la base $\mathbf{B'}$.

d) Si $\mathbf{V} = \mathbf{P}_1$ y $\mathbf{B} = (1+X,\ -1+X)$ hallar la base $\mathbf{B'}$.

Ejercicio 37

Sea el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{B} = ((1,1,1),\ (1,2,0),\ (0,1,-2))$ una base ordenada de **V**.

a) Encontrar $[(1,3,1)]_{\mathbf{B}}$.

b) Si $\mathbf{B'} = ((1,0,0),(1,1,0),\ (0,0,1))$ es otra base ordenada de $\mathbf{R}^3$, hallar la matriz **P** de cambio de base de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B'}$.

Ejercicio 38

Sea el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$. Sea $\mathbf{B} = (1,\ X + X^2,\ 2X)$ una base ordenada de **V** y sea $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B'}$. Se pide:

a) Dar la base $\mathbf{B'}$.

b) Si $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ utilizar la matriz **P** para hallar $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ y dar el polinomio **v.**

Ejercicio 39

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ y sean $\mathbf{B} = (1,\ 1+X,\ 1+X+X^2)$; $\mathbf{B'} = (X^2+X+1,\ X^2-X-2,\ X^2+X-1)$ bases de **V**. Hallar la matriz **P** de cambio de base $\mathbf{B}$ a base $\mathbf{B'}$.

Ejercicio 40

Sean $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbf{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$ base ordenada de **V**.

Si $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ es la matriz de cambio de base de **B** a $\mathbf{B'}$, hallar la base $\mathbf{B'}$.

Ejercicio 41

Sean $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ y sea $\mathbf{B} = \left(X^2, X, 1\right)$ base ordenada de **V**. Si $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz de cambio de base de **B** a $\mathbf{B}_1$, hallar la base $\mathbf{B}_1$.

Ejercicio 42

Analizar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

JUSTIFICAR la respuesta (Esto es: si es verdadera demostrarlo y si es falsa dar un contraejemplo o enunciar a qué teorema/s contradice).

a) Si en un conjunto de vectores linealmente dependientes se saca un vector, los vectores restantes son linealmente independientes.

b) Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K** y sean $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3$ vectores de **V**. Si $\vec{\mathbf{v}}_1 \neq \vec{0}_\mathbf{V}$, $\vec{\mathbf{v}}_2 \neq \vec{0}_\mathbf{V}$ y $\vec{\mathbf{v}}_3 \neq \vec{0}_\mathbf{V}$ entonces $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3$ son linealmente independientes.

c) Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K** y sean $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3, \vec{\mathbf{v}}_4$ vectores de **V**. Si $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3, \vec{\mathbf{v}}_4$ son linealmente dependientes entonces $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_3, \vec{\mathbf{v}}_4$ son linealmente dependientes.

d) Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Si $\mathbf{W} = \left\langle \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3, \vec{\mathbf{v}}_4 \right\rangle$ es un subespacio del vectorial **V** entonces $\mathbf{B}_\mathbf{W} = \left\{ \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3, \vec{\mathbf{v}}_4 \right\}$ es una base de **W**.

e) Sean **U** y **W** subespacios de un vectorial **V**, $\mathbf{B}_\mathbf{U}$ y $\mathbf{B}_\mathbf{W}$ bases de los mismos. Entonces $\mathbf{B}_\mathbf{U} \cup \mathbf{B}_\mathbf{W}$ es una base de $\mathbf{U} + \mathbf{W}$.

f) Si la suma de dos subespacios **U** y **W** del mismo vectorial es directa entonces $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\ \}$.

g) Sean **U** y **W** subespacios de un vectorial **V**. Entonces $\mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{U} \cup \mathbf{W}$.

h) Sean **U** y **W** subespacios de un vectorial **V**. Entonces $\mathbf{U} \cup \mathbf{W}$ es un subespacio.

i) Sea **V** un espacio vectorial de dimensión finita y sean **U** y **W** subespacios de **V**. Si $dim\left(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}\right) = 0$ entonces se cumple que $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W}$.

j) Sea **V** un espacio vectorial de dimensión finita y sean **U** y **W** subespacios de **V**. Si $dim\left(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}\right) = 0$ entonces se cumple que $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$.

k) Sea **V** un espacio vectorial de dimensión finita y sean **U** y **W** subespacios de **V**. Si $dim\left(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}\right) = 0$ entonces se cumple que $\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$.

l) Si **V** es un espacio vectorial de dimensión finita y **U** un subespacio complementario del subespacio **W** entonces: $dim\,\mathbf{U} = dim\,\mathbf{V} - dim\,\mathbf{W}$.

m) Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m \times p}$. El conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{0}$ es un subespacio de $\mathbf{K}^{p \times 1}$

n) Si **V** es un **K**-vectorial de dimensión *n*, entonces todo generador con *n* vectores es una base de **V**.

o) Sean **B** y **B'** bases de un espacio vectorial de dimensión *n* y **P** la matriz de cambio de base de **B** a **B'**. Entonces las filas de **P** son vectores linealmente independientes.

1.12 Guía de Estudio

1) Defina **espacio vectorial**.

2) Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Demuestre que:

   - $-(-\mathbf{u})=\mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$.
   - Si $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$ entonces $\mathbf{v}=\mathbf{w}$.

3) Defina **subespacio** de un **espacio vectorial.**

4) Muestre que si $\mathbf{W}=\{\text{combinaciones lineales de los vectores } \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_r\}$ es un subespacio. ¿A qué se llama **generador** del subespacio **W** ?.

5) Muestre que si $\mathbf{W}=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_r\rangle$ y $\mathbf{v}_1$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\dots,\mathbf{v}_r$ entonces $\mathbf{W}=\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\dots,\mathbf{v}_r\rangle$.

6) Defina **Suma e Intersección de Subespacios**. Muestre que la suma de subespacios es un subespacio.

7) Defina vectores **Linealmente Independientes** y **Linealmente Dependientes**.

8) Muestre que si $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_r$ son linealmente dependientes entonces uno de ellos es combinación lineal de los demás.

9) Muestre que si $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_r$ son linealmente independientes todo $\mathbf{v}\in\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_r\rangle$ se expresa como combinación lineal de ellos en una sola forma.

10) Muestre que si $\mathbf{V}=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n\rangle$ y $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_m\in\mathbf{V}$ con $m>n$ entonces $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_m$ son linealmente dependientes.

11) Muestre que si $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_r\in\mathbf{V}$ son linealmente independientes y $\mathbf{u}\notin\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_r\rangle$ entonces $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_r,\mathbf{u}$ son linealmente independientes.

12) Defina **Base**, **Base ordenada** y **Dimensión** de un espacio vectorial.

13) Muestre que si $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ son subespacios del vectorial **V**, de dimensión finita, entonces $dim(\mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2)= dim\,\mathbf{W}_1 + dim\,\mathbf{W}_2 - dim(\mathbf{W}_1\cap\mathbf{W})_2$.

14) Defina **Suma Directa.**

15) Muestre que $\mathbf{W}_1\oplus\mathbf{W}_2 \Leftrightarrow \mathbf{W}_1\cap\mathbf{W}_2=\{\bar{\mathbf{0}}\}$.

16) Defina **Subespacios Complementarios.**

17) Defina Variedad Lineal. ¿Cuándo dos variedades lineales son paralelas? Si dos variedades lineales se intersecan, ¿qué característica tiene la intersección?

18) Defina **vector coordenado.**

19) Si **B** y **B'** son bases del vectorial de dimensión finita **V**, ¿Cómo se obtiene es la **matriz de cambio de base** de **B** a **B'**?.

2

Espacios con Producto Interno

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, los conceptos de longitud de un vector, distancia entre vectores, ángulo entre vectores y perpendicularidad, se expresan en forma conveniente mediante el **producto punto**.

Estos mismos conceptos métricos pueden introducirse en cualquier espacio vectorial real a condición de que, en él, se defina un **producto interno** (también llamado **producto interior**), el cual asocia a cada par de vectores un número real, gozando de las mismas propiedades que caracterizan al producto punto.

2.1 Producto Interno

Definición 2.1.1. Sea **V** un espacio vectorial real. Diremos que **V** es un espacio con **producto interno** si se tiene una regla que asigne a cada par $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de vectores de **V,** un número real, que denotaremos $(\mathbf{u}/\mathbf{v})$ de modo que se cumplan las siguientes propiedades:

$$\left.\begin{array}{l}
\textbf{1. } \text{Simetría} \quad (\mathbf{u}/\mathbf{v}) = (\mathbf{v}/\mathbf{u}). \\
\textbf{2. } \text{Aditividad respecto de cada vector} \\
\quad ((\mathbf{u}+\mathbf{u}')/\mathbf{v}) = (\mathbf{u}/\mathbf{v}) + (\mathbf{u}'/\mathbf{v}) \\
\quad (\mathbf{u}/(\mathbf{v}+\mathbf{v}')) = (\mathbf{u}/\mathbf{v}) + (\mathbf{u}/\mathbf{v}') \\
\textbf{3. } \text{Homogeneidad respecto de cada vector} \\
\quad (k\,\mathbf{u}/\mathbf{v}) = k(\mathbf{u}/\mathbf{v}) \\
\quad (\mathbf{u}/k\,\mathbf{v}) = k(\mathbf{u}/\mathbf{v}) \\
\textbf{4. } \text{Positividad} \\
\quad (\mathbf{u}/\mathbf{u}) \geq 0 \\
\quad (\mathbf{u}/\mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \bar{\mathbf{0}}
\end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para todos los } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}', \mathbf{v}' \in \mathbf{V} \\ \quad \text{y para todos los } k \in \mathbf{K} \end{array}$$

Notación: $(\mathbf{V}, /)$ denotará a un espacio vectorial real **V** con **producto interno.**

Las propiedades (2) y (3) dicen que un producto interno es lineal con respecto a cada uno de los vectores. Este hecho se expresa diciendo que es **bilineal.**

Un producto interno puede describirse como una función

$$\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\ \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})\ \to(\mathbf{u}/\mathbf{v})$$

que tiene las propiedades de **simetría, bilinealidad** y **positividad**.

Ejemplos

Ejemplo 1

$\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con el **producto punto** son espacios con producto interno. Más generalmente, el "producto punto" puede definirse en $\mathbb{R}^n$.

Sean $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$; $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ se define

$$(\mathbf{x}/\mathbf{y})=\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

A este producto interno se lo llama usualmente **producto interno euclidiano, canónico o estándar** en $\mathbb{R}^n$.

La verificación de las propiedades de producto interno no presenta dificultad, por ello se recomienda como ejercicio.

Es posible definir otros productos internos en $\mathbb{R}^n$ ponderando sus términos de manera diferente. Sean $p_1,p_2,\dots,p_n$ números reales positivos a los que denominaremos **pesos**, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$; $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$. La expresión

$$(\mathbf{x}/\mathbf{y})=p_1x_1y_1+p_2x_2y_2+\cdots+p_nx_ny_n$$

define un producto interno en $\mathbb{R}^n$ al cual se lo llama producto **interno euclidiano pesado** o **ponderado**.

La verificación de las propiedades de producto interno no presenta dificultad, por ello se recomienda como ejercicio.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ y sean $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$; $\mathbf{y}=(y_1,y_2)$ vectores. Un caso particular de producto interno pesado es el que se define a continuación:

$$(\mathbf{x}/\mathbf{y})=\big((x_1,x_2)/(y_1,y_2)\big)=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+\frac{5}{4}x_2y_2$$

Las propiedades 1), 2) y 3) se verifican trivialmente. Mostraremos que se cumple la positividad.

$$(\mathbf{x}/\mathbf{x})=\big((x_1,x_2)/(x_1,x_2)\big)=x_1^2-2x_1x_2+\frac{5}{4}x_2^2=\underbrace{(x_1-x_2)^2+\frac{1}{4}x_2^2}_{\geq 0}$$

Esta última expresión no es nunca negativa (es una suma de cuadrados) y sólo se anula para $(x_1,x_2)=(0,0)$.

Ejemplo 3

Sea **V=** $\mathbb{R}^{2\times1}$ y sean $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ vectores de **V**.

Definimos:

$$(\mathbf{X}/\ \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + \frac{5}{4} x_2 y_2$$

Como puede observarse, este ejemplo, es en esencia igual al anterior identificando $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^{2\times1}$ en la forma natural.

Ejemplo 4

Puede mostrarse que el producto interior euclidiano y el producto interior euclidiano ponderado son casos especiales de una clase general de productos internos sobre $\mathbb{R}^n$.

Partiendo de la identificación de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{n\times1}$. El producto punto entre dos vectores de $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y}$ corresponde al producto matricial $\mathbf{X}^T\,.\,\mathbf{Y}$ de sus representaciones como matrices columna.

Sean $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$; $\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ vectores de $\mathbb{R}^{n\times1}$ y sea **A** una matriz $n\times n$ inversible. Entonces la fórmula $\mathbf{X/Y = (AX)}^T\ \mathbf{AY = X}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A\ Y}$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$ generado por la matriz **A**.

En particular:

a) Si $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ **= I** (matriz unidad), luego el producto interno resultante es el estándar.

b) Si $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ el producto interno resultante es

$$\mathbf{X/\ Y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$$

se observa que corresponde a la forma de un producto interno euclidiano ponderado con pesos $p_1 = 3$ y $p_2 = 2$.

Ejemplo 5

Sea el vectorial $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ vectores de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

La expresión

$$(\mathbf{A}/\mathbf{B}) = traza(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}.\mathbf{B}) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

define un producto interno en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Verifíquelo!

Ejemplo 6

Sea el vectorial $\mathbf{V}=\mathbf{C}[a,b]=\left\{ f \;\; / \;\; f \;\; \text{es continua en el intervalo} \, [a,b] \right\}$. Definimos:

$$(f/g) = \int_a^b f(x).g(x)\; dx$$

Las propiedades 1), 2) y 3) se verifican como consecuencia de las propiedades de la integral definida. Veamos que se cumple la positividad:

$$(f/f) = \int_a^b f(x).f(x)\; dx = \int_a^b f^2(x)\; dx \geq 0$$

Teniendo presente que

$$\text{Si } h \in \mathbf{C}[a,b], h \geq 0 \;\text{ en} \,[a,b] \;\text{ y} \int_a^b h(t)\; dt = 0, \;\text{ entonces} \; h=0 \;\text{ en} \,[a,b]$$

se verifica entonces la propiedad.

Este producto constituye el producto interno estándar o canónico del espacio $\mathbf{C}[a,b]$.

Ejemplo 7

Sea **V** un espacio vectorial de dimensión finita, con base ordenada **B,** ponemos definir:

$$(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = (\mathbf{u})_{\mathbf{B}}.(\mathbf{v})_{\mathbf{B}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

es decir, el producto interior de dos vectores se define por el producto punto de sus n-uplas de coordenadas respecto de la base **B**.

Equivalentemente, puede escribirse: $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}^{T}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ (producto matricial del vector de coordenadas de **u** transpuesto, por el vector de coordenadas de **v**).

Teniendo en cuenta lo antes mencionado:

- Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbf{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ es una base ordenada de **V**. Si se consideran $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ resulta:

$$\mathbf{(A/B)} = \mathbf{(A)_B.(B)_B} = \mathbf{(}a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\mathbf{).(}b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}\mathbf{)} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij} \ .$$

- Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$. Considerando los vectores $\mathbf{p} = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$, $\mathbf{q} = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$ y las bases ordenadas $\mathbf{B} = \left(1, X, X^2\right)$ y $\mathbf{B'} = \left(1+X, 1-X, X^2\right)$. Resulta:

$$\mathbf{(p/q)} = \mathbf{(p)_B.(q)_B} = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad \mathbf{(p/q)} = \mathbf{(p)_{B'}.(q)_{B'}} = \tfrac{1}{2} a_0 b_0 + \tfrac{1}{2} a_1 b_1 + a_2 b_2 \ .$$

Observación: En un espacio vectorial pueden definirse muchos productos internos. En particular en $\mathbb{R}^n$ pueden definirse productos internos distintos del producto punto y en $\mathbf{V} = \mathbf{C}[a,b]$ productos internos distintos del definido por la integral.

Pero, al resolver problemas en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbf{V} = \mathbf{C}[a,b]$, salvo expresa indicación en contrario, se supondrá que el producto interno es el canónico.

En todos los demás casos habrá que aclarar cuál es el producto interno considerado.

2.2 Definiciones Métricas

En cualquier espacio vectorial real **V** con producto interno se pueden definir **longitud** de un vector, **distancia** entre vectores, **ortogonalidad** y **proyección** de un vector sobre otro, mediante expresiones análogas a las obtenidas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ por medio del producto punto.

Definición 2.2.1. Sea $\left(\mathbf{V}, /\right)$ un espacio vectorial real con producto interno.
Se llama **norma, módulo o longitud** de $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y se denota $\|\mathbf{u}\|$ al número $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{(u/u)}}$
.
Además, diremos que $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ es un **vector unitario** sí y sólo si $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Observación: La positividad del producto interior garantiza que la longitud de cualquier vector esté siempre definida.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico y sea $\mathbf{v}=(1,2,-1,0)$. Se quiere hallar un vector unitario $\mathbf{u}$ paralelo a $\mathbf{v}$ ($\mathbf{u}=k\mathbf{v}$ con $k\in\mathbb{R}$).

Calculamos $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{((1,2,-1,0).(1,2,-1,0))}=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{6}$, luego para obtener lo pedido planteamos

$$\mathbf{u}=\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{v}=\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{v}=\frac{\sqrt{6}}{6}(1,2,-1,0)=\left(\tfrac{\sqrt{6}}{6},\tfrac{\sqrt{6}}{3},-\tfrac{\sqrt{6}}{6},0\right).$$

Para verificar que, $\mathbf{u}$ es un vector unitario, basta con probar que $\|\mathbf{u}\|^2=1$.

$$\|\mathbf{u}\|^2=\left(\tfrac{\sqrt{6}}{6},\tfrac{\sqrt{6}}{3},-\tfrac{\sqrt{6}}{6},0\right).\left(\tfrac{\sqrt{6}}{6},\tfrac{\sqrt{6}}{3},-\tfrac{\sqrt{6}}{6},0\right)=\left(\tfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(-\tfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^2+0^2=\tfrac{1}{6}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{6}=1.$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbf{P}_2$ con el producto interno definido por:

$$(\mathbf{p}/\mathbf{q})=(\mathbf{p})_{\mathbf{B}}.(\mathbf{q})_{\mathbf{B}}=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2 \text{ donde } \mathbf{B}=\left(1,X,X^2\right)$$

Sea $\mathbf{p}=1+2X-2X^2$. Se quiere calcular la longitud del vector $\mathbf{p}$.

$$\|\mathbf{p}\|^2=(\mathbf{p}/\mathbf{p})=(\mathbf{p})_{\mathbf{B}}.(\mathbf{p})_{\mathbf{B}}=1+2^2+(-2)^2=9 \text{ luego } \|\mathbf{p}\|=\sqrt{9}=3.$$

Definición 2.2.2. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, se define la **distancia** de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, y se denota $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$, al número

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v})=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|.$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico y sean $\mathbf{u}=(3,2,-1,1)$ y $\mathbf{v}=(1,2,-1,0)$. Se quiere hallar la **distancia** de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, para ello planteamos

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v})=d\left((3,2,-1,1),(1,2,-1,0)\right)=\|(3,2,-1,1)-(1,2,-1,0)\|=\|(2,0,0,1)\|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[0,1] = \{ f \ / \ f \ \text{ es continua en el intervalo} [0,1] \}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_0^1 f(x).g(x)\, dx$. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ elementos de **V**. Se quiere hallar la **distancia** de *f* a *g*, para ello planteamos primero $d^2(f,g) = \| f(x) - g(x) \|^2$

$$\left\| x - x^2 \right\|^2 = \int_0^1 \left(x - x^2 \right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4 \right) dx = \left[\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{2} + \tfrac{x^5}{5} \right]_0^1 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{30}$$

Luego $d(f,g) = \sqrt{\frac{1}{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30}$.

Definición 2.2.3. Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, se dice que **u** es **ortogonal** o perpendicular a **v**, y lo denotamos $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, sí y sólo si $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = 0$.

Definición 2.2.4. Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Si $\mathbf{v} \neq \overline{\mathbf{0}}$, se define la **proyección de u sobre v** y se denota $proy_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ al vector $proy_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v})}{(\mathbf{v}/\mathbf{v})} \mathbf{v}$.

Además, el vector $\mathbf{u} - proy_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ se denomina la **componente de u ortogonal a v**.

Ejemplos

Ejemplo 1

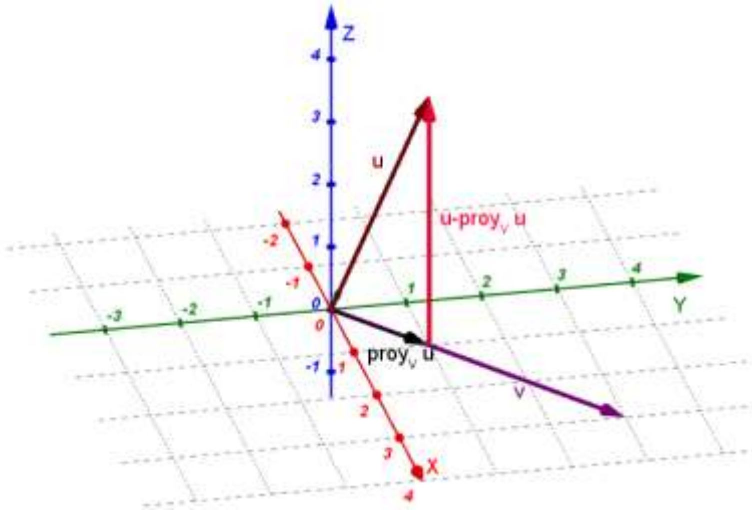
Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico y sean $\mathbf{u} = (1,1,4)$ y $\mathbf{v} = (3,3,0)$. Se quiere hallar la **proyección** de **u** sobre **v y** la **componente de u ortogonal a v**, para ello planteamos

- **Proyección** de $\mathbf{u} = (1,1,4)$ sobre $\mathbf{v} = (3,3,0)$**:**

$$\mathbf{u}_1 = proy_{(3,3,0)}(1,1,4) = \frac{((1,1,4)/(3,3,0))}{((3,3,0)/(3,3,0))}(3,3,0) = \frac{6}{18}(3,3,0) = \frac{1}{3}(3,3,0) = (1,1,0).$$

- **Componente** de $\mathbf{u} = (1,1,4)$ **ortogonal a** $\mathbf{v} = (3,3,0)$**:**

$\mathbf{u}_2 = (1,1,4) - proy_{(3,3,0)}(1,1,4) = (1,1,4) - (1,1,0) = (0,0,4)$. Se verifica que $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$:



Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico y sean $\mathbf{u}=(3,2,-1,1)$ y $\mathbf{v}=(1,2,-1,0)$. Se quiere hallar la **proyección** de **u** sobre **v y** la **componente de u ortogonal a v**, para ello planteamos

- **Proyección** de $\mathbf{u}=(3,2,-1,1)$ sobre $\mathbf{v}=(1,2,-1,0)$**:**

$$\mathbf{u}_1 = proy_{(1,2,-1,0)}(3,2,-1,1) = \frac{\big((3,2,-1,1)/(1,2,-1,0)\big)}{\big((1,2,-1,0)/(1,2,-1,0)\big)}(1,2,-1,0) = \frac{8}{6}(1,2,-1,0) = \frac{4}{3}(1,2,-1,0)\,.$$

- **Componente** de $\mathbf{u}=(3,2,-1,1)$ **ortogonal a** $\mathbf{v}=(1,2,-1,0)$**:**

$$\mathbf{u}_2 = (3,2,-1,1) - proy_{(1,2,-1,0)}(3,2,-1,1) = (3,2,-1,1) - \frac{4}{3}(1,2,-1,0) = \frac{1}{3}(5,-2,1,3)\,.$$

- Para verificar, analizaremos si $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$:

$$\left(\mathbf{u}_1/\mathbf{u}_2\right) = \left(\frac{4}{3}(1,2,-1,0)\Big/\frac{1}{3}(5,-2,1,3)\right) = \frac{4}{9}\big((1,2,-1,0)/(5,-2,1,3)\big) = \frac{4}{9}(5-4-1+0) = 0\,.$$

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V}=\mathbf{C}[0,1]=\{f\ /\ f\ \text{ es continua en el intervalo } [0,1]\}$ con el producto interno definido por: $(f/g)=\int_0^1 f(x).g(x)\,dx$. Sean $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$ elementos de **V**.

Se quiere hallar la **proyección** de *f* sobre *g* y la **componente de** *f* **ortogonal a** *g*.

Planteamos:

- **Proyección** de $f(x)=x$ sobre $g(x)=x^2$ **:**

$$f_1 = proy_{x^2}\ x = \frac{\left(x/x^2\right)}{\left(x^2/x^2\right)}x^2 = \frac{\int_0^1 x.x^2dx}{\int_0^1 x^2.x^2dx}x^2 = \frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1}{\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1}x^2 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}x^2 = \frac{5}{4}x^2 .$$

- **Componente** de $f(x)=x$ **ortogonal a** $g(x)=x^2$ **:** $\quad f_2 = x - proy_{x^2}\ x = x - \frac{5}{4}x^2 .$

- Para verificar, analizaremos si $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$:

$$\left(f_1/f_2\right) = \left(\frac{5}{3}x^2 \Big/ x - \frac{5}{4}x^2\right) = \int_0^1 \tfrac{5}{3}x^2 .\ \left(x - \tfrac{5}{4}x^2\right) dx = \left[\tfrac{5x^4}{12}\right]_0^1 - \left[\tfrac{5x^5}{12}\right]_0^1 = \tfrac{5}{12} - \tfrac{5}{12} = 0$$

Definición 2.2.5. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. Si $\mathbf{u}\neq\bar{\mathbf{0}}$ y $\mathbf{v}\neq\bar{\mathbf{0}}$, se define el ángulo entre **u** y **v** como el único número real $\alpha\in[0,\pi]$ tal que: $\mathbf{cos}(\alpha) = \dfrac{(\mathbf{u}/\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|}$.

Observación: La expresión $\dfrac{(\mathbf{u}/\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|}$ puede calcularse cualesquiera sean los vectores **u** y **v** no nulos. Sin embargo, para poder considerar a este resultado como el coseno de un ángulo, es necesario que el valor de este cociente esté comprendido entre –1 y 1, condición que está garantizada por la desigualdad de **Cauchy-Schwartz** que enunciaremos y demostraremos más adelante.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico y sean los vectores $\mathbf{u}=(1,0,1,0)$ y $\mathbf{v}=(1,1,1,-1)$. Se quiere hallar el ángulo entre **u** y **v**, para ello planteamos:

$$\mathbf{cos}(\alpha) = \frac{\left((1,0,1,0)/(1,1,1,-1)\right)}{\|(1,0,1,0)\|.\|(1,1,1,-1)\|} = \frac{2}{\sqrt{2}.\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \alpha = \mathbf{arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{2\times2}$ con el producto interno $(\mathbf{A}/\mathbf{B}) = a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}$ y sean los vectores $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ y $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$. Se quiere hallar el ángulo entre dichos vectores.

Para ello planteamos:

$$\mathbf{cos}(\alpha)=\frac{\left(\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}/\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)}{\left\|\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right\|.\left\|\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right\|}=\frac{3}{\sqrt{9}.\sqrt{4}}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\alpha=\mathbf{arccos}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

2.3 Consecuencias de la Definición

De las definiciones métricas precedentes resultan inmediatas las siguientes propiedades:

Teorema 2.3.1. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ elementos de $\mathbf{V}$ y $k\in\mathbb{R}$. Se verifica:

a) $\|\mathbf{u}\|\geq 0$ con $\|\mathbf{u}\|=0 \iff \mathbf{u}=\bar{\mathbf{0}}$.

b) $\|k\,\mathbf{u}\|=|k|.\|\mathbf{u}\|$ y en consecuencia $\|\text{-}\mathbf{u}\|=\|\mathbf{u}\|$.

c) Si $\mathbf{u}\neq\bar{\mathbf{0}}$ entonces existen dos únicos vectores unitarios paralelos a $\mathbf{u}$.

d) $d(\mathbf{u},\mathbf{v})\geq 0$ con $d(\mathbf{u},\mathbf{v})=0 \iff \mathbf{u}=\mathbf{v}$.

e) $d(\mathbf{u},\mathbf{v})=d(\mathbf{v},\mathbf{u})$.

f) $d(k\,\mathbf{u},k\,\mathbf{v})=|k|\,d(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

g) $d(\mathbf{u},\mathbf{v})=d(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w})$.

Demostración:

a) Por la positividad del producto interno $\|\mathbf{u}\|^2=(\mathbf{u}/\mathbf{u})\geq 0$. Luego $\|\mathbf{u}\|=(\mathbf{u}/\mathbf{u})=0 \iff \mathbf{u}=\bar{\mathbf{0}}$.

b) Teniendo en cuenta la definición de norma y las propiedades del producto interno, se tiene que $\|k\,\mathbf{u}\|^2=(k\,\mathbf{u}/k\,\mathbf{u})=k^2(\mathbf{u}/\mathbf{u})=k^2\|\mathbf{u}\|^2$. Luego $\|k\,\mathbf{u}\|=|k|.\|\mathbf{u}\|$, verificándose en consecuencia que el vector $\mathbf{u}$ y su opuesto tiene igual longitud.

c), d) y *e)* La prueba queda como ejercicio.

f) Teniendo en cuenta la definición de norma y las propiedades del producto interior, planteamos $d^2(k\,\mathbf{u},k\,\mathbf{v})=\|k\,\mathbf{u}-k\,\mathbf{v}\|^2=\|k(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|^2=k^2\,\|(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|^2=k^2\;d^2(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

Luego $d(k\,\mathbf{u},k\,\mathbf{v})=|k|\,d(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

g) Teniendo en cuenta la definición de distancia y las propiedades del producto interno, se tiene que $d^2(\mathbf{u},\mathbf{v})=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}+\mathbf{w}-\mathbf{w}-\mathbf{v}\|^2=\|(\mathbf{u}+\mathbf{w})-(\mathbf{v}+\mathbf{w})\|^2=d^2(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v}+\mathbf{w})$. #

Teorema 2.3.2. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial real con producto interno.

Si $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}_1,\ \mathbf{u}\perp\mathbf{v}_2,\ \ldots\ ,\mathbf{u}\perp\mathbf{v}_r$ y $\mathbf{v}\in\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\rangle$ entonces $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$.

Demostración:

Hipótesis: $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}_1,\ \mathbf{u}\perp\mathbf{v}_2,\ \ldots\ ,\mathbf{u}\perp\mathbf{v}_r$ y $\mathbf{v}\in\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\rangle$.

Tesis (debemos probar): los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ son ortogonales (es decir $(\mathbf{v}/\mathbf{u})=0$).

Si $\mathbf{v}\in\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\rangle$ entonces $\mathbf{v}$ se escribe como combinación lineal de $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r$ es decir:

$$\mathbf{v}=\alpha_1\,\mathbf{v}_1+\alpha_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_r\,\mathbf{v}_r=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,\mathbf{v}_i$$

Luego planteamos el producto interno entre los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}/\mathbf{u})&=\left(\alpha_1\,\mathbf{v}_1+\alpha_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_r\,\mathbf{v}_r/\mathbf{u}\right)\\&=\alpha_1(\mathbf{v}_1/\mathbf{u})+\alpha_2(\mathbf{v}_2/\mathbf{u})+\cdots+\alpha_r(\mathbf{v}_r/\mathbf{u})=0\end{aligned}$$

y en consecuencia $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$.#

Nota: Expresamos el hecho que **u** sea ortogonal a todo vector del subespacio $\mathbf{W}=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\rangle$ diciendo simplemente que **u** es ortogonal a **W** y lo denotamos $\mathbf{u}\perp\mathbf{W}$.

El siguiente teorema muestra que la proyección de **u** sobre **v** tiene las propiedades que caracterizan al vector proyección ortogonal definido en el plano o el espacio.

Teorema 2.3.3. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial real con producto interno. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ elementos de **V**.

Si $\mathbf{v}\neq\overline{\mathbf{0}}$ y $\mathbf{W}=\langle\mathbf{v}\rangle$ entonces:

1) $(\mathbf{u}-proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u})\perp\mathbf{W}$ en otras palabras: $(\mathbf{u}-proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u})\perp\mathbf{v}$.

2) $\mathbf{u}=k\,\mathbf{v}+\mathbf{w'}$ con $\mathbf{w'}\perp\mathbf{v}$ y $k\,\mathbf{v}=proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}$

Demostración:

1) Se verifica que $(\mathbf{u}-proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u})\perp\mathbf{v}$ pues:

$$\left((\mathbf{u}-proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u})/\mathbf{v}\right)=\left(\left(\mathbf{u}-\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v})}{(\mathbf{v}/\mathbf{v})}\mathbf{v}\right)\Big/\mathbf{v}\right)=(\mathbf{u}/\mathbf{v})-\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v})}{(\mathbf{v}/\mathbf{v})}(\mathbf{v}/\mathbf{v})=0\,.$$

2) Para demostrar que $\mathbf{u} = k\,\mathbf{v} + \mathbf{w'}$ con $\mathbf{w'} \perp \mathbf{v}$ y $k\,\mathbf{v} = proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}$

Planteamos $\mathbf{u} = \mathbf{u} - proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u} + proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}$ (a $\mathbf{u}$ le sumamos y restamos $proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}$)

$$\mathbf{u} = proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u} + \left(\mathbf{u} - proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}\right) \quad \text{(asociamos convenientemente)}$$

Luego

$$\mathbf{u} = \underbrace{\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v})}{(\mathbf{v}/\mathbf{v})}}_{=k}\mathbf{v} + \underbrace{\left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v})}{(\mathbf{v}/\mathbf{v})}\mathbf{v}\right)}_{\substack{\text{por ítem 1)} \\ \text{es ortogonal a } \mathbf{v}}} = k\,\mathbf{v} + \mathbf{w'} \quad \text{con} \quad \mathbf{w'} = \left(\mathbf{u} - proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}\right) \perp \mathbf{v} \quad \text{y} \quad k\,\mathbf{v} = proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}.$$

Acabamos de probar que todo vector de $\mathbf{V}$ se expresa en forma única como la suma de un vector paralelo a $\mathbf{v}$ y un vector ortogonal a $\mathbf{v}$. #

Ejemplos

Ejemplo 1

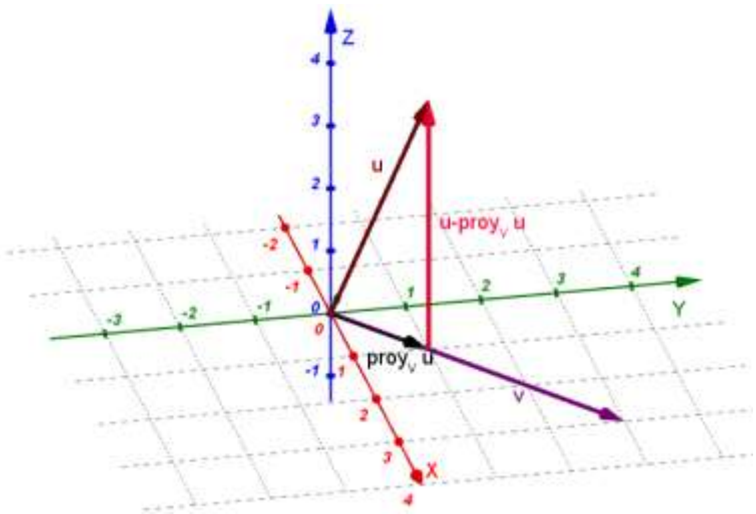
Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico y sean los vectores $\mathbf{u} = (1,1,4)$ y $\mathbf{v} = (3,3,0)$. Se quiere escribir al vector $\mathbf{u}$ como suma de un vector paralelo a $\mathbf{v}$ y un vector ortogonal a $\mathbf{v}$.

Buscamos expresar $\mathbf{u} = k\,\mathbf{v} + \mathbf{w'}$ con $\mathbf{w'} = \left(\mathbf{u} - proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}\right) \perp \mathbf{v}$ y $k\,\mathbf{v} = proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}$

Entonces se tiene que:

- Proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$: $proy_{(3,3,0)}(1,1,4) = \dfrac{\left((1,1,4)/(3,3,0)\right)}{\left((3,3,0)/(3,3,0)\right)}(3,3,0) = \dfrac{1}{3}(3,3,0)$
- Componente de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{v}$: $\mathbf{w'} = (1,1,4) - proy_{(3,3,0)}(1,1,4) = (0,0,4)$
  Se verifica fácilmente que $\mathbf{w'} \perp \mathbf{v}$

Luego $$(1,1,4) = \underbrace{proy_{(3,3,0)}(1,1,4)}_{\frac{1}{3}(3,3,0)} + \underbrace{\left((1,1,4) - proy_{(3,3,0)}(1,1,4)\right)}_{(0,0,4)} = (1,1,0) + (0,0,4)$$



Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$ con el producto interno $(\mathbf{A}/\mathbf{B})=traza(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}.\mathbf{B})$ con $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ y sean los vectores $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$. Se quiere escribir al vector $\mathbf{u}$ como suma de un vector paralelo a $\mathbf{v}$ y un vector ortogonal a $\mathbf{v}$. Es decir

$\mathbf{u}=k\,\mathbf{v}+\mathbf{w'}$ con $\mathbf{w'}=\left(\mathbf{u}-proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}\right)\perp\mathbf{v}$ y $k\,\mathbf{v}=proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$. Planteamos entonces

- Proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$: $proy_{\left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\dfrac{\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}/\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}/\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\dfrac{4}{3}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

- Componente de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\mathbf{v}$: $\mathbf{w'}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}-proy_{\left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}5 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

  Queda para el lector verificar que $\mathbf{w'}\perp\mathbf{v}$.

Luego

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\underbrace{proy_{\left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{\frac{4}{3}\left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right]}+\underbrace{\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}-proy_{\left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)}_{\frac{1}{3}\left[\begin{smallmatrix}5 & -2\\ 1 & 3\end{smallmatrix}\right]}=\frac{4}{3}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

Ejemplo 3

Sea el espacio vectorial $\mathbf{V}=\mathbf{P_2}$ con producto interno definido por:

$$\left(a_0+a_1X+a_2X^2/b_0+b_1X+b_2X^2\right)=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$$

Sean $\mathbf{u}=1-X-X^2$ y $\mathbf{v}=-1+2X+X^2$. Se quiere expresar al vector $\mathbf{u}$ como suma de un vector paralelo a $\mathbf{v}$ y un vector ortogonal a $\mathbf{v}$.

Teniendo en cuenta que $\mathbf{u}=proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}+\left(\mathbf{u}-proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\right)$, resolvemos:

$$proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\frac{\left(1-X-X^2/-1+2X+X^2\right)}{\left(-1+2X+X^2/-1+2X+X^2\right)}\left(-1+2X+X^2\right)=\frac{-4}{6}\left(-1+2X+X^2\right)=\frac{-2}{3}\left(-1+2X+X^2\right)$$

$$\mathbf{u}-proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\left(1-X-X^2\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-1+2X+X^2\right)=\left(1-X-X^2\right)+\frac{2}{3}\left(-1+2X+X^2\right)=\frac{1}{3}\left(1+X-X^2\right)$$

Antes de continuar, verifiquemos que $\mathbf{u}-proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$

$$\left(\left(\mathbf{u}-proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\right)/\,\mathbf{v}\right)=\left(\frac{1}{3}\left(1+X-X^2\right)\ /\ \frac{-2}{3}\left(-1+2X+X^2\right)\right)=\left(\frac{-2}{9}\right)(-1+2-1)=0$$

Por lo tanto $\mathbf{u}=\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-1+2X+X^2\right)}_{\text{es paralelo a }\mathbf{v}}+\underbrace{\frac{1}{3}\left(1+X-X^2\right)}_{\text{es ortogonal a }\mathbf{v}}$

2.4 Desigualdad de Cauchy-Schwarz, Desigualdad del Triángulo y Teorema de Pitágoras Generalizado.

Se ha visto que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, el ángulo α entre vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no nulos, se expresa, a través de su coseno, por la fórmula: $\mathbf{cos}(\alpha) = \dfrac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|}$.

En cualquier espacio vectorial real con producto interior, puede calcularse la expresión $\dfrac{(\mathbf{u/v})}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|}$ para vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ arbitrarios no nulos. No obstante, como ya se observó en la **Definición 2.2.5.**, para poder interpretar el resultado como el coseno de un ángulo es necesario que el valor numérico que resulte esté comprendido entre –1 y 1. Esta condición queda garantizada por el siguiente Teorema.

> **Teorema 2.4.1. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)** Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial real con producto interno. Si: $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores $\mathbf{V}$ entonces:
>
> 1) $|(\mathbf{u/v})| \le \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$.
>
> 2) $|(\mathbf{u/v})| = \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$ sí y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes.

Demostración:

1) Si $\mathbf{v} = \overline{\mathbf{0}}$, entonces $\|\mathbf{v}\| = 0$ y en consecuencia $(\mathbf{u/v}) = 0$, luego se verifica 1).

Ahora supongamos que $\mathbf{v} \neq \overline{\mathbf{0}}$ y consideremos el vector $proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \dfrac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v}$.

Planteemos:

$$\|\mathbf{u} - proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}\|^2 = \left(\left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v}\right) \Big/ \left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v}\right)\right) = \left(\mathbf{u} \Big/ \left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v}\right)\right) - \left(\frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v} \Big/ \left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u/v})}{(\mathbf{v/v})}\mathbf{v}\right)\right)$$

$$= (\mathbf{u/u}) - \left(\mathbf{u} \Big/ \frac{(\mathbf{u/\,v})}{(\mathbf{v/\,v})}\mathbf{v}\right) \quad \text{pues } 0 = \left(\frac{(\mathbf{u/\,v})}{(\mathbf{v/\,v})}\mathbf{v} \Big/ \left(\mathbf{u} - \frac{(\mathbf{u/\,v})}{(\mathbf{v/\,v})}\mathbf{v}\right)\right)$$

$$= (\mathbf{u/u}) - \frac{(\mathbf{u/\,v})}{(\mathbf{v/\,v})}(\mathbf{u/v})$$

$$= (\mathbf{u/u}) - \frac{(\mathbf{u/\,v})^2}{(\mathbf{v/\,v})}$$

Luego $0 \le \|\mathbf{u} - proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u/u}) - \dfrac{(\mathbf{u/v})^2}{(\mathbf{v/v})}$ y por lo tanto

$$0 \le \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{(\mathbf{u/v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{u/v})^2 \le \|\mathbf{u}\|^2.\|\mathbf{v}\|^2 \quad \Rightarrow \quad |(\mathbf{u/v})| \le \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$$

2) Si **u** o **v** son nulos la afirmación ve verifica trivialmente. Supongamos entonces que no lo son:

$\Rightarrow$**)** Si $|(\mathbf{u/v})| = \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$ resulta $\|\mathbf{u} - proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}\|^2 = 0$. Luego $\mathbf{u} = proy_{\mathrm{v}}\,\mathbf{u}$ por lo que **u** es un múltiplo de **v**, es decir $\mathbf{u} = k.\mathbf{v}$ y por lo tanto **u** y **v** son linealmente dependientes.

$\Leftarrow$**)** Recíprocamente, si **u** y **v** son linealmente dependientes, podemos pensar que $\mathbf{u} = k\,\mathbf{v}$. Luego

$$\left.\begin{array}{l} |(\mathbf{u/v})| = |(k\,\mathbf{v/v})| = |k|\,\|\mathbf{v}\|^2 \\ \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| = \|k\,\mathbf{v}\|.\|\mathbf{v}\| = |k|\,\|\mathbf{v}\|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow |(\mathbf{u/v})| = \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| \qquad \#$$

Observación: La desigualdad de Cauchy-Schwarz garantiza que los valores que se obtienen por esta fórmula están comprendidos entre –1 y 1, esto es $-1 \le \dfrac{(\mathbf{u/v})}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|} \le 1$.

Luego, si α es un ángulo cuya medida en radianes varía de 0 a π, entonces $\cos(\alpha)$ asume todos los valores entre –1 y 1 (inclusive) exactamente una vez. Luego existe un ángulo α único, tal que

$$\mathbf{cos}(\alpha) = \frac{(\mathbf{u/\ v})}{\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|} \text{ con } 0 \le \alpha \le \pi \ .$$

Se define α como **el ángulo entre** los vectores **u** y **v**. Se denotará $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$.

Si $(\mathbf{u/v}) = 0$ resulta $\alpha = \frac{\pi}{2}$, es decir que, si dos vectores no nulos son ortogonales, el ángulo que definen es recto.

Haciendo uso del producto interno, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el concepto de ortogonalidad, es posible generalizar a espacios vectoriales generales algunos importantes teoremas de la Geometría Elemental, entre ellos la relación de longitudes de los lados de un triángulo que expresa que un lado es menor o a lo sumo igual que la suma de los otros dos y el teorema de Pitágoras referido a los lados de un triángulo rectángulo.

Teorema 2.4.2. (Desigualdad del Triángulo) Sea $(\mathrm{V},/)$ un espacio vectorial real con producto interno. Si **u** y **v** son vectores **V** entonces: $\|\mathbf{u+v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Además: $\|\mathbf{u+v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ sí y sólo si $\mathbf{u} = k.\mathbf{v}$ o $\mathbf{v} = k.\mathbf{u}$ con $k \ge 0$

Demostración:

Si uno de los vectores es $\bar{\mathbf{0}}$, el teorema se verifica trivialmente.
Suponemos que $\mathbf{u} \ne \bar{\mathbf{0}}$; $\mathbf{v} \ne \bar{\mathbf{0}}$ y planteamos

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \big((\mathbf{u}+\mathbf{v})/(\mathbf{u}+\mathbf{v})\big) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}/\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que: $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) \le |(\mathbf{u}/\mathbf{v})| \le \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$ y reemplazando convenientemente en (1) resulta:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = \big(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|\big)^2$$

de donde se obtiene: $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ como queríamos demostrar.

Analicemos ahora el “además”.

Para que $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ se requiere el cumplimiento de las condiciones de igualdad de la expresión $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) \le |(\mathbf{u}/\mathbf{v})| \le \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$, es decir:

$$a)\quad (\mathbf{u}/\mathbf{v}) = |(\mathbf{u}/\mathbf{v})| \qquad\qquad b)\quad |(\mathbf{u}/\mathbf{v})| = \|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\|$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(\mathbf{u}/\mathbf{v}) \ge 0 \qquad\qquad (\mathbf{u} = k.\mathbf{v}) \quad \text{o} \quad (\mathbf{v} = k.\mathbf{u})$$

Supongamos que $\mathbf{v} = k.\mathbf{u}$*;* entonces resulta: $0 \le (\mathbf{u}/\mathbf{v}) = (\mathbf{u}/k.\mathbf{u}) = k(\mathbf{u}/\mathbf{u})$ como $(\mathbf{u}/\mathbf{u})$ es positivo: $k.(\mathbf{u}/\mathbf{u}) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad k \ge 0$.

Recíprocamente: si $\mathbf{v} = k.\mathbf{u}$ y $k \ge 0$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}+k.\mathbf{u}\| = |1+k|.\|\mathbf{u}\| \underset{\text{por ser } k\ge 0}{=} (1+k)\|\mathbf{u}\| \\ \\ \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|k\,\mathbf{u}\| = \big(1+|k|\big).\|\mathbf{u}\| \underset{\text{por ser } k\ge 0}{=} (1+k)\|\mathbf{u}\| \end{array}\right\} \text{Por lo tanto: } \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \#$$

Teorema 2.4.3. (Teorema de Pitágoras Generalizado) Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial real con producto interno. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores ortogonales en $\mathbf{V}$ entonces

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Demostración:

Por hipótesis se tiene que los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, esto es $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = 0$. Planteamos

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})/(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\,(\mathbf{u}/\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\underbrace{(\mathbf{u}/\mathbf{v})}_{=0} + \|\mathbf{v}\|^2 .$$

Luego $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ que era lo que se quería demostrar. #

2.5 Conjuntos Ortogonales

Definición 2.5.1. Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial con producto interno. Sea $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ un subconjunto de vectores no nulos. Diremos que **S** es un **conjunto ortogonal** si para todos los $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}$ se verifica: $(\mathbf{u} / \mathbf{v}) = 0$ siempre que $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

Si **S** es un conjunto ortogonal tal que: $(\mathbf{u} / \mathbf{u}) = 1$ para todos los $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$, diremos que **S** es un **conjunto ortonormal**.

Observación: Un conjunto ortogonal está formado por vectores (no nulos) dos a dos ortogonales, mientras que un conjunto ortonormal es un conjunto ortogonal de vectores unitarios.

De la definición se desprende que, a partir de un conjunto ortogonal se obtiene un conjunto ortonormal reemplazando cada vector **u** por el vector $\frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{u}\|}.\mathbf{u}$. Este proceso se llama **normalización** y se dice que los vectores obtenidos están **normalizados**.

Si los vectores de una base de **V** forman un conjunto ortogonal decimos que es una **base ortogonal.** Si además los vectores son unitarios, decimos que la base es **ortonormal.**

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico.

El conjunto $S = \{(-1,1,0),\ (0,0,2),\ (1,1,0)\}$ es un conjunto ortogonal pues:

$$((-1,1,0)/(0,0,2)) = 0,\ \ ((-1,1,0)/(1,1,0)) = 0 \ \text{ y } \ ((0,0,2)/(1,1,0)) = 0 .$$

En cambio, el conjunto $S = \{(1,1,0),\ (0,0,2),\ (1,-1,3)\}$ no es un conjunto ortogonal pues:

$$((1,1,0)/(0,0,2)) = 0,\ \ ((1,1,0)/(1,-1,3)) = 0 \ \text{ y } \ ((0,0,2)/(1,-1,3)) = 6$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2),\ \ \mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y se define el producto interno $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = u_1 v_1 + 3\, u_2 v_2$.

Los vectores de la base de **V**, $\mathbf{B} = \{(1,0),\ (0,1)\}$ forman un conjunto ortogonal, entonces **B** es una base ortogonal.

Pero No es ortonormal puesto que $\|(0,1)\| = \sqrt{3}$.

Normalizando se obtiene la base ortonormal $\left\{(1,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico.

El conjunto $\{(1,1,0,0),\ (0,0,2,0),\ (1,-1,0,3)\}$ claramente es ortogonal, pero No es ortonormal.

Normalizando los vectores obtenemos $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right), (0,0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}},0,\frac{3}{\sqrt{11}}\right)\right\}$ que ahora es un conjunto ortonormal de vectores.

Ejemplo 4

Sea el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbf{P_2}$ con producto interno definido por:

$$\left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 / b_0 + b_1 X + b_2 X^2\right) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

El conjunto $S = \left\{1 - X,\ 2 + 2X + X^2, 1 + X - 4X^2\right\}$ es un conjunto ortogonal pues:

$$\left(1 - X / 2 + 2X + X^2\right) = 2 - 2 + 0 = 0$$
$$\left(1 - X / 1 + X - 4X^2\right) = 1 - 1 + 0 = 0$$
$$\left(2 + 2X + X^2 / 1 + X - 4X^2\right) = 2 + 2 - 4 = 0$$

Sin embargo, el conjunto $S = \left\{1 - X,\ 1 + X, -2 + 2X + X^2\right\}$ no es un conjunto ortogonal. Verifíquelo!

Ejemplo 5

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[-1,1] = \{ f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo } [-1,1]\}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\, dx$.

Las funciones $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ forman un conjunto ortogonal.

Sin embargo, este conjunto no es ortonormal. En efecto

$$(f_1/f_2) = \int_{-1}^{1} 1.x\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0 \qquad (f_1/f_3) = \int_{-1}^{1} 1.\left(x^2 - \frac{1}{3}x^2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$(f_1/f_1) = \int_{-1}^{1} 1.1\, dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2 \qquad (f_2/f_3) = \int_{-1}^{1} x.\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{6}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$(f_2/f_2) = \int_{-1}^{1} x.x\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \qquad (f_3/f_3) = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{x}{9}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{45}$$

Ahora, el conjunto formado por las funciones $f_1^{'}(x)=\frac{1}{2}$, $f_2^{'}(x)=\frac{2}{3}x$, $f_3^{'}(x)=\frac{8}{45}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$ resulta ortonormal.

Ejemplo 6

Los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ forman un conjunto ortonormal para el producto punto o producto interno estándar.

2.5.1 Propiedades de los Conjuntos Ortogonales.

Teorema 2.5.1.1. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno. Si $\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\}$ es un conjunto ortogonal y $\mathbf{W}=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\rangle$ entonces se verifica que:

1) Los vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r$ son linealmente independientes.

2) Todo $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$ es suma de sus proyecciones sobre los vectores de **S**.

3) Para cualquier $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$, si $\mathbf{u}_1=\sum_{i=1}^{r}\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i$ entonces el vector $\mathbf{u}_2=\mathbf{u}-\mathbf{u}_1$ es ortogonal a **W**.

Demostración:

1) Queremos probar que $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r$ son linealmente independientes, entonces planteamos

$$\bar{\mathbf{0}}=x_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+x_i\,\mathbf{v}_i+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r\,.$$

Considerando el producto interno

$\left(\mathbf{v}_i/\bar{\mathbf{0}}\right)=\left(\mathbf{v}_i/\left(x_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+x_i\,\mathbf{v}_i+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r\right)\right)$ y operando convenientemente se tiene:

$$0=\left(\mathbf{v}_i/x_1\mathbf{v}_1\right)+\cdots+\left(\mathbf{v}_i/x_i\mathbf{v}_i\right)+\cdots+\left(\mathbf{v}_i/x_r\mathbf{v}_r\right)$$

$$0=x_1\left(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_1\right)+\cdots+x_i\left(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i\right)+\cdots+x_r\left(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_r\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Por hipótesis, se tiene que $\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\}$ es un conjunto ortogonal, es decir $\left(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_j\right)=0$ si $i\neq j$.

Resulta entonces que $x_j\left(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_j\right)=0$ y entonces **(1)** queda

$$0=\underbrace{x_1\left(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_1\right)}_{=0}+\cdots+\underbrace{x_i\left(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i\right)}_{\neq 0}+\cdots+\underbrace{x_r\left(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_r\right)}_{=0}$$

$$0=x_i\left(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i\right)$$

Por ser $\left(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i\right)\neq 0$ resulta $x_i=0$ para $i=1,2,...,r$. Luego los vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r$ son linealmente independientes

2) Sea $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$, como $\mathbf{W}=\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\rangle$ podemos escribir a $\mathbf{w}$ como combinación lineal de $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r$ por lo tanto: $\mathbf{w}=y_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+y_i\,\mathbf{v}_i+\cdots+y_r\,\mathbf{v}_r$.

Realizando $(\mathbf{w}/\mathbf{v}_i)$ resulta:

$$\begin{aligned}(\mathbf{w}/\mathbf{v}_i)&=(y_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+y_i\,\mathbf{v}_i+\cdots+y_r\,\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_i)\\&=y_1(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_i)+\cdots+y_i(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)+\cdots+y_r(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_i)\end{aligned}$$

Por ser $\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\}$ un conjunto ortogonal se tiene que $(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_j)=0$ si $i\neq j$.
Por lo tanto

$$(\mathbf{w}/\mathbf{v}_i)=y_i(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)\;\Rightarrow\; y_i=\frac{(\mathbf{w}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\quad \text{para}\quad i=1,2,...,r$$

Luego se tiene que: $\mathbf{w}=\dfrac{(\mathbf{w}/\mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1+\cdots+\dfrac{(\mathbf{w}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i+\cdots+\dfrac{(\mathbf{w}/\mathbf{v}_r)}{(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_r)}\mathbf{v}_r$.

Es decir $\mathbf{w}=\underbrace{\dfrac{(\mathbf{w}/\mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1}_{proy_{\mathbf{v}_1}\mathbf{w}}+\cdots+\underbrace{\dfrac{(\mathbf{w}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i}_{proy_{\mathbf{v}_i}\mathbf{w}}+\cdots+\underbrace{\dfrac{(\mathbf{w}/\mathbf{v}_r)}{(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_r)}\mathbf{v}_r}_{proy_{\mathbf{v}_r}\mathbf{w}}$

w es suma de sus proyecciones sobre los vectores del conjunto ortogonal **S** que genera a **W**.

3) Sea $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$. Consideramos $\mathbf{u_2}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_1=\mathbf{u}-\left(\sum_{i=1}^{r} proy_{\mathbf{v}_i}\,\mathbf{u}\right)=\mathbf{u}-\sum_{i=1}^{r}\dfrac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i$

$$\mathbf{u_2}=\mathbf{u}-\left(\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1+\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2/\mathbf{v}_2)}\mathbf{v}_2+\cdots+\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i+\cdots+\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_r)}{(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_r)}\mathbf{v}_r\right)$$

Para determinar que $\mathbf{u_2}$ es ortogonal a **W** basta probar que $\mathbf{u_2}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r$
Realizando $(\mathbf{u}_2/\mathbf{v}_i)$ se tiene:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u_2}/\mathbf{v}_i)&=(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)-\left(\left(\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1+\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2/\mathbf{v}_2)}\mathbf{v}_2+\cdots+\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}\mathbf{v}_i+\cdots+\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_r)}{(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_r)}\mathbf{v}_r\right)\Big/\mathbf{v}_i\right)=\\&=(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)-\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_1)}(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_i)-\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2/\mathbf{v}_2)}(\mathbf{v}_2/\mathbf{v}_i)-\cdots-\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)-\cdots-\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_r)}{(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_r)}(\mathbf{v}_r/\mathbf{v}_i)=\\&=(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)-\frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)}(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)=0\end{aligned}$$

Luego: $\mathbf{u_2}\perp\mathbf{v}_i$ para $i=1,2,...,r$ o sea $\mathbf{u_2}\perp\mathbf{W}$. #

Observaciones: El punto (1) que acabamos de demostrar, muestra que los vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r$ forman una base ortogonal de **W.**

Por otro lado, lo demostrado en el punto (2) permite expresar fácilmente y en forma directa un vector de **W** como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$.

Además, en el punto (3) demostramos que si se tiene $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r\}$ conjunto ortogonal, entonces cualquier vector $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ puede ser escrito como

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)} \mathbf{v}_i + \mathbf{u}_2 = proy_{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r \rangle} \mathbf{u} + \mathbf{u}_2 \quad \text{con } \mathrm{u}_2 \perp \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r \rangle .$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar. ¿los vectores $\mathbf{v_1} = (1,-3,0,0)$, $\mathbf{v_2} = (3,1,-7,0)$ y $\mathbf{v_3} = (0,0,0,1)$ son linealmente independientes?

Teniendo presente el ítem (1) del Teorema precedente, basta con ver que estos 3 vectores son ortogonales.

$$(\mathbf{v}_1 / \mathbf{v}_2) = ((1,-3,0,0)/(3,1,-7,0)) = 3-3+0+0=0$$
$$(\mathbf{v}_1 / \mathbf{v}_3) = ((1,-3,0,0)/(0,0,0,1)) = 0+0+0+0=0$$
$$(\mathbf{v}_2 / \mathbf{v}_3) = ((3,1,-7,0)/(0,0,0,1)) = 0+0+0+0=0$$

Así, estos vectores son linealmente independientes.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y el producto interno definido por $(\mathbf{u}/\mathbf{v}) = u_1 v_1 + 3\, u_2 v_2$. Se quiere expresar el vector $\mathbf{u} = (-1, 3)$ como combinación lineal de los vectores de la base ortogonal $\mathbf{B} = ((1,0),(0,1))$. Teniendo presente el resultado anterior, resulta:

$$(-1,3) = \frac{((-1,3)/(1,0))}{((1,0)/(1,0))}(1,0) + \frac{((-1,3)/(0,1))}{((0,1)/(0,1))}(0,1) = (-1).(1,0) + 3(0,1)$$

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico. Se quiere expresar el vector $\mathbf{u} = (-1, 2, 3)$ como combinación lineal de los vectores de la base ortogonal: $\mathbf{B} = ((1,1,0), (1,-1,0), (0,0,1))$. Teniendo presente el teorema anterior, resulta:

$$(-1,2,3) = \frac{(-1,2,3).(1,1,0)}{(1,1,0).(1,1,0)}(1,1,0) + \frac{(-1,2,3).(1,-1,0)}{(1,-1,0).(1,-1,0)}(1,-1,0) + \frac{(-1,2,3).(0,0,1)}{(0,0,1).(0,0,1)}(0,0,1)$$

$$(-1,2,3) = \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{3}{2}(1,-1,0) + 3(0,0,1) .$$

2.6 Bases Ortonormales

Trabajando en espacios vectoriales con producto interno, la solución de un problema a menudo se ve favorecida con la elección de una base adecuada. En particular, las bases ortonormales generalmente simplifican las expresiones con lo que disminuye la carga computacional.

Definición 2.6.1. Sea $\mathbf{S}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\}$ un conjunto ortonormal. Sea $\mathbf{V}=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r\rangle$. Diremos que $\mathbf{B}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r)$ es una base ortonormal de **V.**

Observar que todo vector $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ se expresa de una forma simple como combinación lineal de los vectores de la base **B:**

$$\mathbf{v}=(\mathbf{v}/\mathbf{v_1})\mathbf{v_1}+(\mathbf{v}/\mathbf{v_2})\mathbf{v_2}+\cdots+(\mathbf{v}/\mathbf{v}_r)\mathbf{v}_r$$

Otra propiedad importante de las bases ortonormales es la que desarrollada en el siguiente teorema.

Teorema 2.6.1. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno. Sea $\mathbf{B}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_r)$ una base ortonormal de **V**.

Si $\mathbf{u}=x_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+x_i\,\mathbf{v}_i+\cdots+x_n\,\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{v}=y_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+y_i\,\mathbf{v}_i+\cdots+y_n\,\mathbf{v}_n$

entonces $(\mathbf{u}/\mathbf{v})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$.

Demostración:

Planteando la expresión:

$$(\mathbf{u}/\mathbf{v})=\left((x_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+x_n\,\mathbf{v}_n)/(y_1\,\mathbf{v}_1+\cdots+y_n\,\mathbf{v}_n)\right)$$

y usando las propiedades del producto interior se tiene que:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}/\mathbf{v})=\;&x_1y_1(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_1)+x_1y_2(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_2)+\cdots+x_1y_n(\mathbf{v}_1/\mathbf{v}_\mathrm{n})+\cdots+x_iy_1(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_1)+\cdots+x_iy_n(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_n)\\&+\cdots+x_ny_1(\mathbf{v}_n/\mathbf{v}_1)+x_ny_2(\mathbf{v}_n/\mathbf{v}_2)+\cdots+x_ny_n(\mathbf{v}_n/\mathbf{v}_n)\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que: $(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_j)=0$ si $i\neq j$ y que $(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_j)=1$ si $i=j$, se obtiene:

$$(\mathbf{u}/\mathbf{v})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\ .\quad \#$$

Observación: El Teorema que acabamos de demostrar dice que el producto interno de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es igual al producto punto de sus n-uplas de coordenadas respecto de una base ortonormal, es decir

$$(\mathbf{u}/\mathbf{v})=\mathbf{(u)_B.(v)_B}$$

ó, equivalentemente, usando la representación por vectores columna se tiene que:

$$(\mathbf{u}/\mathbf{v})=[\mathbf{u}]_\mathbf{B}^\mathbf{T}.[\mathbf{v}]_\mathbf{B}$$

es decir que $(\mathbf{u}/\mathbf{v})$ se obtiene también como el producto matricial del vector coordenado de **u** transpuesto, por el vector coordenado de **v.**

2.6.1 El Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt

En cualquier espacio con producto interno de dimensión finita, se puede construir una base ortogonal a partir de una base cualquiera. Normalizando los vectores se obtiene una base ortonormal.

Teorema 2.6.1.1. (Teorema de Gram–Schmidt) Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno. Si $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,...,\mathbf{u}_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de **V** entonces existe un conjunto $\mathbf{S}=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,...,\mathbf{w}_r\}$ tal que:

1) **S** es ortogonal

2) $\langle \mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_i\rangle = \langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_i\rangle$ con $i=1,2,\dots,r$.

Siendo $\mathbf{w}_1=\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{w}_i=\mathbf{u}_i-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{(\mathbf{u}_i/\mathbf{w}_k)}{(\mathbf{w}_k/\mathbf{w}_k)}\mathbf{w}_k$ con $i=2,...,r$

Demostración:

Vamos a seguir un camino constructivo, esto es, partiendo del conjunto dato, encontraremos el conjunto **S**.

a) Tomamos $\mathbf{w}_1=\mathbf{u}_1$.

b) Hacemos $\mathbf{w}_2=\mathbf{u}_2-proy_{\mathbf{w}_1}\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_2-\frac{(\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_1/\mathbf{w}_1)}\mathbf{w}_1$. Por construcción, se tiene que $\mathbf{w}_2\perp\mathbf{w}_1$.

Además $\mathbf{w}_2\in\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle \;\Rightarrow\; \langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle\subseteq\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle$ y por ser de igual dimensión son iguales.

c) Consideramos a continuación

$$\mathbf{w}_3=\mathbf{u}_3-proy_{\mathbf{w}_1}\mathbf{u}_3-proy_{\mathbf{w}_2}\mathbf{u}_3=\mathbf{u}_3-\frac{(\mathbf{u}_3/\mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_1/\mathbf{w}_1)}\mathbf{w}_1-\frac{(\mathbf{u}_3/\mathbf{w}_2)}{(\mathbf{w}_2/\mathbf{w}_2)}\mathbf{w}_2 .$$

Por ser $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$ un conjunto ortogonal y dado que por **Teorema 2.5.1.1.** se verifica que $\mathbf{w}_3\perp\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_3\perp\mathbf{w}_2$ entonces $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\}$ es un conjunto ortogonal. Además $\mathbf{w}_3\in\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle$, luego $\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\rangle\subseteq\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\rangle$ y por tener igual dimensión, son iguales.

El proceso se repite hasta obtener $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3,\dots,\mathbf{w}_r\}$ de tal forma que:

$$\mathbf{w}_1=\mathbf{u}_1 \text{ y } \mathbf{w}_i=\mathbf{u}_i-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{(\mathbf{u}_i/\mathbf{w}_k)}{(\mathbf{w}_k/\mathbf{w}_k)}\mathbf{w}_k \text{ con } i=2,...,r . \quad \#$$

> **Corolario 2.6.1.1.** Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial con producto interno. Se verifica que:
>
> 1) Todo subespacio de dimensión finita de **V**, tiene una base ortonormal.
>
> 2) Si **V** es de dimensión finita, entonces **V** tiene una base ortonormal.

Demostración:

La prueba queda como ejercicio. #

> **Nota:** El proceso de Gram-Schmidt seguido de la normalización de los vectores obtenidos, no sólo convierte a cualquier base $\mathbf{B} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n)$ del vectorial **V** en una base ortonormal $\mathbf{B_o} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n)$ sino que también satisface para todo $k \geq 2$
>
> 1) $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_k)$ es una base ortonormal para el subespacio generado por $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$.
>
> 2) $\mathbf{w}_k$ es ortogonal a $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k-1} \rangle$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con producto punto, construiremos una base ortonormal a partir de la base $\mathbf{B} = ((1,1,0), (0,2,0), (1,0,-1))$.

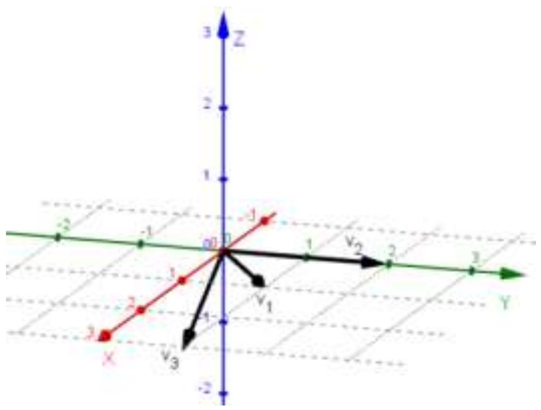
Tomamos $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,1,0)$.

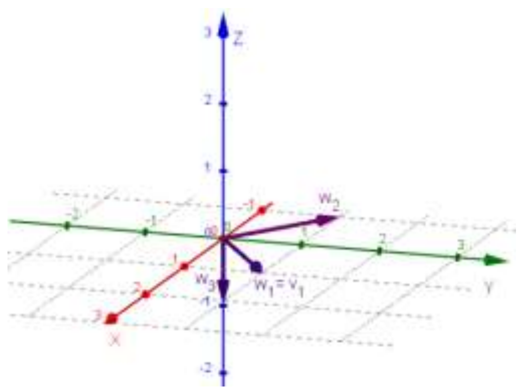
Hacemos $\mathbf{w}_2 = (0,2,0) - \dfrac{(0,2,0)(1,1,0)}{(1,1,0)(1,1,0)}(1,1,0) = (-1,1,0)$. Observar que $\mathbf{w_2} \perp \mathbf{w}_1$.

Finalmente consideramos

$$\mathbf{w}_3 = (1,0,-1) - \frac{(1,0,-1)(1,1,0)}{(1,1,0)(1,1,0)}(1,1,0) + \frac{(1,0,-1)(-1,1,0)}{(-1,1,0)(-1,1,0)}(-1,1,0) = (0,0,-1).$$

Luego $\mathbf{B'} = ((1,1,0), (-1,1,0), (0,0,-1))$ es una base ortogonal de $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$.





Normalizando los vectores de $\mathbf{B'}$ se obtiene la base ortonormal

$$\mathbf{B''} = \left(\left(1/\sqrt{2}\,, 1/\sqrt{2}\,, 0\right),\ \left(-1/\sqrt{2}\,, 1/\sqrt{2}\,, 0\right),\ \mathbf{(}0, 0, -1\mathbf{)} \right).$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ con producto interno definido por, $\left(\mathbf{x}/\mathbf{y}\right) = x_1 y_1 - \left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right) + \frac{5}{4} x_2 y_2$ donde $\mathbf{x} = \mathbf{(}x_1, x_2\mathbf{)}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{(}y_1, y_2\mathbf{)}$. Construiremos una base ortonormal a partir de $\mathbf{B} = \left(\mathbf{(}1,0\mathbf{)}, \mathbf{(}0,1\mathbf{)}\right)$.

Tomamos $\mathbf{w}_1 = \mathbf{(}1,0\mathbf{)}$.

Hacemos $\mathbf{w}_2 = (0,1) - \dfrac{\left((0,1)/(1,0)\right)}{\left((1,0)/(1,0)\right)}(1,0) = (0,1) - \dfrac{-1}{1}(1,0) = (-1,1)$.

Finalmente, considerando $\|\mathbf{w}_1\| = 1$ y $\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{1 - 2 + \frac{5}{4}} = \frac{1}{2}$ tenemos que la base ortonormal buscada es $\mathbf{B'} = \left((1,0),\ \left(-1/2, 1/2\right)\right)$.

Observación: El proceso de Gram–Schmidt puede aplicarse a conjuntos **numerables** de infinitos vectores linealmente independientes.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[-1,1]$ con el producto interno definido por: $\mathbf{(}f/g\mathbf{)} = \int_{-1}^{1} f\mathbf{(}x\mathbf{)}.g\mathbf{(}x\mathbf{)}\,dx$.

Se puede ortogonalizar el conjunto $\left\{1, X, X^2, X^3, X^4, ...\right\}$ y se obtiene el conjunto ortogonal $\left\{1,\ X, X^2 - \dfrac{1}{3},\ X^3 - \dfrac{3}{5}X,\ X^4 - \dfrac{6}{7}X^2 + \dfrac{3}{35}, \ldots\ldots\right\}$ cuyos elementos, salvo factores constantes, son los **polinomios de Legendre.**

Observación: Los polinomios de Legendre pueden ser considerados formando una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}\mathbf{[X]}$ si el producto interno está definido por $\mathbf{(}f/g\mathbf{)} = \int_{-1}^{1} f\mathbf{(}x\mathbf{)}.g\mathbf{(}x\mathbf{)}\,dx$.

2.6.2 Descomposición QR

Supongamos tener una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ cuyos vectores columna son linealmente independientes. Si **Q** es la matriz con vectores columna ortonormales obtenidos de aplicar a los vectores columna de **A** el proceso de Gram-Schmidt y posterior normalización, se pretende establecer si existe alguna relación entre las matrices **A** y **Q**.

Llamando $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n$ a las columnas de la matriz **A**, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ a las columnas de la matriz **Q**, luego

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_n \end{bmatrix}$$

Pero como por construcción $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$ y $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n)$ es un conjunto ortonormal resulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= (\mathbf{u}_1/\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{u}_1/\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{u}_1/\mathbf{w}_n)\mathbf{w}_n \\
\mathbf{u}_2 &= (\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_n)\mathbf{w}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_n &= (\mathbf{u}_n/\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{u}_n/\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{u}_n/\mathbf{w}_n)\mathbf{w}_n
\end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} . \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{u}_1/\mathbf{w}_1) & (\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_1) & \cdots & (\mathbf{u}_n/\mathbf{w}_1) \\ (\mathbf{u}_1/\mathbf{w}_2) & (\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_2) & \cdots & (\mathbf{u}_n/\mathbf{w}_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\mathbf{u}_1/\mathbf{w}_n) & (\mathbf{u}_2/\mathbf{w}_n) & \cdots & (\mathbf{u}_n/\mathbf{w}_n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

Esto es: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}.\mathbf{R}$

Pero de la aplicación del proceso de Gram-Schmidt, se tiene que $\mathbf{w}_k$ es ortogonal a $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}$. Luego los elementos debajo de la diagonal de la matriz **R** son nulos y por lo tanto **R** es una matriz triangular superior. Además, se demuestra que los elementos de su diagonal son distintos de cero, por lo que **R** es una matriz inversible.

Lo arriba mencionado, puede sintetizarse en el siguiente teorema.

Teorema 2.6.2.1. (Descomposición QR) Sea **A** una matriz $m \times n$ con vectores columna linealmente independientes. Entonces **A** se puede factorizar como $\mathbf{A} = \mathbf{Q}.\mathbf{R}$ con **Q** una matriz $m \times n$ con vectores columna ortonomales y **R** una matriz triangular superior $n \times n$ inversible.

Observación: La condición de que los vectores columna de **A** sean linealmente independientes implica que debe ser $m \geq n$.

La descomposición **QR** es muy importante porque en ella se basan numerosos algoritmos relacionados con métodos numéricos del Álgebra Lineal.

2.7 Complemento Ortogonal

Definición 2.7.1. Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial con producto interno, $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$.
Se llama complemento ortogonal de **S** al conjunto denotado $\mathbf{S}^{\perp}$ formado por todos los vectores de **V** que son ortogonales a cada uno de los vectores de **S**.

$$\mathbf{S}^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} / \mathbf{v} \perp \mathbf{u} \ \ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{S}\}$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico. Sea el conjunto de vectores $\mathbf{S} = \{(1,-1,0), (1,0,1)\}$.
Queremos hallar el complemento ortogonal de **S**.

Teniendo en cuenta la definición planteamos:

$$\mathbf{S}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x,y,z) \perp (1,-1,0) \ \wedge \ (x,y,z) \perp (1,0,1)\}$$

Es decir

$$\mathbf{S}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x-y=0 \ \wedge \ x+z=0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \Big/ \ \begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases}\right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneas se tiene que:
(queda como ejercicio verificarlo)

$$\mathbf{S}^{\perp} = \langle(-1,-1,1)\rangle$$

Notar que en este ejemplo **S** es un conjunto, mientras que $\mathbf{S}^{\perp}$ es un subespacio.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico.
a) Sea el conjunto $\mathbf{S} = \{(1,1,0,2), (-1,0,1,0)\}$. Queremos hallar el complemento ortogonal de **S**.

Teniendo en cuenta la definición planteamos:

$$\mathbf{S}^{\perp} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ (x,y,z,w) \perp (1,1,0,2) \ \wedge \ (x,y,z,w) \perp (-1,0,1,0)\}$$

Es decir

$$\mathbf{S}^{\perp} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+2w=0 \ \wedge \ -x+z=0\} = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ \Big/ \ \begin{cases} x+y+2w=0 \\ -x+z=0 \end{cases}\right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneas se tiene que:
(queda como ejercicio verificarlo)

$$\mathbf{S}^{\perp} = \langle(1,-1,1,0),(0-2,0,1)\rangle$$

Notar que en este ejemplo **S** es un conjunto, mientras que $\mathbf{S}^{\perp}$ es un subespacio.

b) Sea ahora el subespacio $\mathbf{W} = \langle (1,1,0,2),\ (-1,0,1,0) \rangle$. Queremos hallar el complemento ortogonal de **W**.

Teniendo en cuenta la definición, deseamos hallar $\mathbf{W}^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \ / \ \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \ \ \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}\}$

Teniendo presente que $\mathbf{w} \in \mathbf{W} = \langle (1,1,0,2),\ (-1,0,1,0) \rangle \Leftrightarrow \mathbf{w} = k_1(1,1,0,2) + k_2(-1,0,1,0) \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ y recordando el resultado demostrado en el **Teorema 2.3.2** resulta:

$$\mathbf{W}^{\perp} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ (x,y,z,w) \perp (1,1,0,2) \ \wedge \ (x,y,z,w) \perp (-1,0,1,0)\}$$

$$= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \begin{cases} x + y + 2w = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}\right\}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{W}^{\perp} = \langle (1,-1,1,0), (0-2,0,1) \rangle$$

Notar que en este ejemplo **W** es un subespacio y $\mathbf{W}^{\perp}$ también lo es.

> **Proposición 2.7.1.** Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial con producto interno, $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$. Se verifica que:
>
> 1) $\mathbf{S}^{\perp}$ es un subespacio.
>
> 2) Si **W** es el subespacio generado por **S** (esto es $\mathbf{W} = \langle \mathbf{S} \rangle$) entonces $\mathbf{W}^{\perp} = \mathbf{S}^{\perp}$ (todo vector de $\mathbf{S}^{\perp}$ es también ortogonal a todo vector de **W**)

Demostración:

1) Probaremos que $\mathbf{S}^{\perp}$ es un subespacio.

Notemos primero que $\mathbf{S}^{\perp}$ es no vacío pues $\bar{\mathbf{0}} \in \mathbf{S}^{\perp}$.

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{S}^{\perp}$ y $k \in \mathbf{K}$. Por la bilinealidad y homogeneidad del producto interno definido en **V** se tiene que

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 / \mathbf{u}) = (\mathbf{v}_1 / \mathbf{u}) + (\mathbf{v}_1 / \mathbf{u}) = 0 \quad \text{y} \quad (k\mathbf{v}_1 / \mathbf{u}) = k(\mathbf{v}_1 / \mathbf{u}) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{u} \in \mathbf{S}$$

Luego $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ y $k\mathbf{v}_1$ también son elementos de $\mathbf{S}^{\perp}$.

2) Queda como ejercicio. #

Teorema 2.7.1. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Si **W** es un subespacio de **V** entonces $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp}$. (**V** es suma directa de $\mathbf{W}$ y $\mathbf{W}^{\perp}$)

Demostración:

Sea $\mathbf{B} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_r)$ una base ortogonal de **W**.

Para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ (por Teorema 2.5.1.1.) se tiene:

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{w}_i)}{(\mathbf{w}_i/\mathbf{w}_i)} \mathbf{w}_i \in \mathbf{W} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \perp \mathbf{W}.$$

Por lo tanto, todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ se expresa en la forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \underbrace{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)}_{\mathbf{u}_2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 \in \mathbf{W} \\ \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{W} \quad \text{(es decir } \mathbf{u}_2 \in \mathbf{W}^{\perp}) \end{cases}$$

luego, todo vector del vectorial se escribe como suma de un vector de $\mathbf{W}$ y uno de $\mathbf{W}^{\perp}$.

Por lo tanto, tenemos que **V** es suma de $\mathbf{W}$ y $\mathbf{W}^{\perp}$.

Probaremos que la suma es directa mostrando que $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^{\perp} = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Sea $\mathbf{w} \in \mathbf{W} \cap \mathbf{W}^{\perp}$, entonces se verifica $(\mathbf{w}/\mathbf{w}) = 0$ luego se tiene que $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{0}}$.

Por lo tanto $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp}$. #

Acabamos de demostrar que

Si $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita.
Si **W** es un subespacio de **V** entonces $\mathbf{W}$ y $\mathbf{W}^{\perp}$ **son subespacios complementarios**

Corolario 2.7.1. Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. **W** subespacio de **V**. Se verifica:

1) Para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, la expresión $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ con $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{W}$ y $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{W}^{\perp}$ es única.

2) $dim\,\mathbf{V} = dim\,\mathbf{W} + dim\,\mathbf{W}^{\perp}$.

3) $(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{W}$

Demostración:

La prueba queda como ejercicio. #

Observación: Según lo visto en el **Teorema 2.7.1.** para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ se tiene que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 \in \mathbf{W} \\ \mathbf{u}_2 \in \mathbf{W}^{\perp} \end{cases}$$

Notar que el vector $\mathbf{u}_1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{w}_i)}{(\mathbf{w}_i/\mathbf{w}_i)} \mathbf{w}_i$ es suma de las proyecciones de **u** sobre los vectores de una base ortogonal de **W**.

Luego, llamaremos a $\mathbf{u}_1$ **proyección de u sobre el subespacio W** y lo denotaremos $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\, \mathbf{u}$. Mientras que al vector $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$ lo llamaremos **componente de u ortogonal a W**.

Ejemplos

Ejemplo 1

$\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ con el producto interno producto canónico. Si $\mathbf{W} = \langle (1,0) \rangle$ entonces

$$\mathbf{W}^{\perp} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y).(1,0) = 0 \right\}$$

Luego $\mathbf{W}^{\perp} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \right\} = \langle (0,1) \rangle$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico y sea **W** el plano $2x + y - 3z = 0$, entonces $\mathbf{W}^{\perp}$ es un subespacio de dimensión 1.

En efecto, observar que: $\mathbf{W} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 2x + y - 3z = 0 \right\}$ teniendo en cuenta el producto interno canónico de $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ resulta

$$\mathbf{W} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x,y,z).(2,1,-3) = 0 \right\}$$

vemos que todos los vectores de **W** son ortogonales a $(2,1,-3)$ y a $k(2,1,-3)$ $\forall k \in \mathbb{R}$.

Luego, $\mathbf{W}^{\perp}$ es la recta por el origen con vector de dirección $(2,1,-3)$, es decir $\mathbf{W}^{\perp} = \langle (2,1,-3) \rangle \Rightarrow dim\left(\mathbf{W}^{\perp}\right) = 1$.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico y sea el subespacio $\mathbf{W} = \langle (1,1,3,4), (2,1,1,5) \rangle$.

El complemento ortogonal de **W** ($\mathbf{W}^{\perp}$) es el espacio de soluciones del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$.

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual.

Sea el subespacio $\mathbf{W} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \ / \ x+y-z=0 \ \wedge \ x-y=0\}$.

El complemento ortogonal del subespacio **W** es $\mathbf{W}^{\perp} = \langle (\mathbf{1},\mathbf{1},-\mathbf{1}), (\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0}) \rangle$. (Queda como ejercicio para el lector verificarlo).

Si ahora consideramos el vector $\mathbf{u} = (\mathbf{1},\mathbf{0},-\mathbf{2}) \in \mathbf{V}$ ¿Cómo expresamos dicho vector como suma de un vector de **W** y uno de $\mathbf{W}^{\perp}$?

Recordemos que los subespacios **W** y $\mathbf{W}^{\perp}$ son complementarios, luego todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ se puede escribir como $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ con $\begin{cases} \mathbf{u}_1 \in \mathbf{W} \\ \mathbf{u}_2 \in \mathbf{W}^{\perp} \end{cases}$.

El vector $\mathbf{u}_1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{w}_i)}{(\mathbf{w}_i/\mathbf{w}_i)} \mathbf{w}_i$ es suma de las proyecciones de **u** sobre los vectores de una base ortogonal de **W**. (por **Teorema 2.5.1.1.**). Por lo tanto, debemos contar con una base ortogonal de $\mathbf{W} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R^3} \ / \ x+y-z=0 \ \wedge \ x-y=0\}$.

Hallemos entonces el conjunto solución de $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2+F_1(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1+F_2(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

luego $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x-\frac{1}{2}z=0 \\ y-\frac{1}{2}z=0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{W} = \langle (1,1,2) \rangle$. Siendo $\mathbf{B} = ((1,1,2))$ la base buscada.

Por lo tanto, tenemos en este caso que $\mathbf{u} = (\mathbf{1},\mathbf{0},-\mathbf{2}) \in \mathbf{V}$ se podrá escribir como $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ donde

$$\mathbf{u}_1 = proy_{(1,1,2)}(1,0,-2) = \frac{(1,0,-2).(1,1,2)}{(1,1,2).(1,1,2)}(1,1,2) = \frac{-1}{2}(1,1,2) = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right) \text{ y } \mathbf{u}_2 = \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1\right).$$

Observemos que se verifica que: $\mathbf{u}_2 = \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1\right)$ es ortogonal a (1,1,2) y por otro lado que $\mathbf{u_1}$ satisface la caracterización de **W**.

Luego:

$$\underbrace{(1,0,-2)}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)}_{\mathbf{u}_1} + \underbrace{\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1\right)}_{\mathbf{u}_2}.$$

2.8 Distancia

Ayudados con nuestros conocimientos de Geometría elemental, es posible encontrar con el uso de regla y escuadra, el punto de una recta o un plano, más próximo a un punto dado y a partir de nuestra idea intuitiva de distancia, por simple medición determinar la distancia del punto a la recta o al plano. Nos plantearemos ahora el mismo problema a fin de implementar mecanismos que nos permitan resolverlo en forma analítica en un espacio **V** con producto interno.

Definición 2.8.1. Sea $(\mathbf{V}, /)$ espacio vectorial con producto interno. Definimos la función distancia en **V**

$$d : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Observación: De la definición, la función distancia *d* resulta ser no negativa, simétrica e invariante frente a traslaciones. Es decir:

1) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$ y $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ sí y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
2) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
3) $d(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

Definición 2.8.2. Sea $(\mathbf{V}, /)$ espacio vectorial con producto interno; *d* la función distancia definida en **V**. Sean $\mathbf{v_o} \in \mathbf{V}$ y $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$. Definimos la distancia de $\mathbf{v_o}$ a S como $d(\mathbf{v_o}, \mathbf{S}) = \textit{ínfimo}\{d(\mathbf{v_o}, \mathbf{v}) \ / \ \mathbf{v} \in \mathbf{S}\}$.

Definición 2.8.3. Sea $(\mathbf{V}, /)$ espacio vectorial con producto interno; *d* la función distancia definida en **V**. Sean $\mathbf{v_o} \in \mathbf{V}$ y $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$. Diremos que $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$ es el punto de **S** más próximo de $\mathbf{v_o}$ sí y sólo si $d(\mathbf{v_o}, \mathbf{u}) \leq d(\mathbf{v_o}, \mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$ o equivalentemente $d(\mathbf{v_o}, \mathbf{u}) = d(\mathbf{v_o}, \mathbf{S})$.

Observación: Siempre existe la distancia de un punto a un subconjunto, pero no siempre existe un punto de **S** más próximo del punto $\mathbf{v_o}$ dado, y en caso de existir puede no ser único, como lo muestran los siguientes ejemplos.

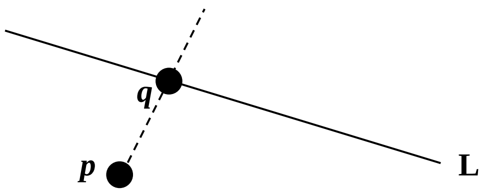
Ejemplos

Ejemplo 1

$$d\left(\boldsymbol{p},]a,b[\right) = a - \boldsymbol{p}$$

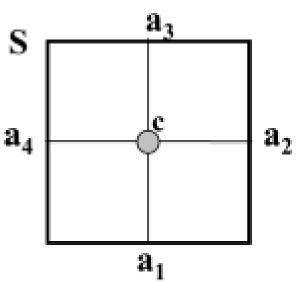
no existe en $]a,b[$ ningún punto que esté más próximo de ***p***.

Ejemplo 2



El punto de la recta **L** más próximo del punto ***p*** es el punto ***q*,** pie de la perpendicular a **L** trazada por ***p***.

Ejemplo 3



Sea **S** el borde de un cuadrado y **c** el centro del mismo

Los puntos medios $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ y $\mathbf{a_4}$ de los lados del cuadrado, son todos puntos más cercanos al centro **c**, luego el punto más próximo no es único:

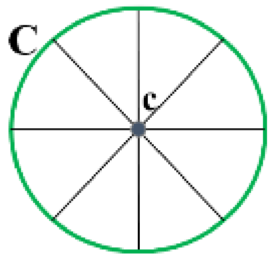
$$d(\mathbf{c},\mathbf{S}) = d(\mathbf{c},\mathbf{a}_1) = d(\mathbf{c},\mathbf{a}_2) = d(\mathbf{c},\mathbf{a}_3) = d(\mathbf{c},\mathbf{a}_4)\,.$$

Ejemplo 4

Sea **C** el borde del círculo y **c** el centro del mismo.

Todos los puntos de la circunferencia **C**, son todos puntos más cercanos al centro **c** (están a la misma distancia).

El punto más próximo no es único.



Observación: Los ejemplos anteriores, muestran que el punto de un conjunto **S** más próximo a un punto dado, puede no existir, ser único o haber varios puntos que cumplan la condición. Sin embargo, si **S** es un subespacio, entonces el punto más próximo es único tal como lo muestra el siguiente teorema:

Teorema 2.8.1. Sea $(\mathbf{V}, /)$ espacio vectorial con producto interno. Sea **W** subespacio de **V** de dimensión finita ($dim\,\mathbf{W} = r$) y sea $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$.

Si $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{u}$ entonces $d(\mathbf{u}, \mathbf{u_1}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ para todo $\mathbf{z} \in \mathbf{W}$.

Demostración:

Sea $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$ base ortogonal de **W**.

Si $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\mathbf{u}/\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_i/\mathbf{v}_i)} \mathbf{v}_i$, por **Teorema 2.5.1.1.** el vector $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$ es ortogonal a **W**.

Sea $\mathbf{z} \in \mathbf{W}$, por ser **W** subespacio $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{z}) \in \mathbf{W}$ y entonces se tiene que $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) \perp (\mathbf{u}_1 - \mathbf{z})$.

Luego, por el Teorema de Pitágoras

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{z}\|^2 = \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1) + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{z})\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{z}\|^2 .$$

De aquí resulta $\|\mathbf{u} - \mathbf{z}\|^2 \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1\|^2 \Rightarrow d(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \geq d(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$.#

Observación: Se demuestra fácilmente que $\mathbf{u}_1$ es el único vector de **W** con esta propiedad. Diremos que $\mathbf{u}_1$ es la **mejor aproximación** de **u** por vectores del subespacio **W**.

Ejemplos

Ejemplo 1

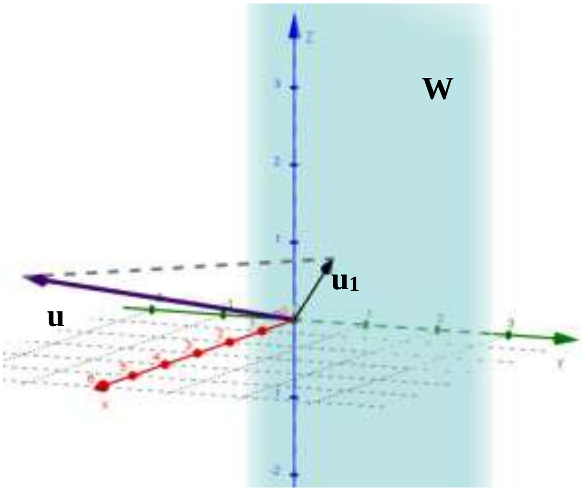
Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con producto punto. Sea $\mathbf{u} = (4, -2, 1)$. Se quiere encontrar la mejor aproximación de **u** por vectores del subespacio $\mathbf{W} = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$.

Como el conjunto $\{(1,1,0), (0,0,1)\}$ es una base ortogonal de **W**, consideramos $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{u}$, esto es:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{(4,-2,1).(1,1,0)}{(1,1,0).(1,1,0)}(1,1,0) + \frac{(4,-2,1).(0,0,1)}{(0,0,1).(0,0,1)}(0,0,1) = (1,1,1)$$

Luego, la mejor aproximación de **u** por vectores de **W** es $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$ y la distancia de **u** a **W** es la longitud del vector $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{W}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1\| = \|(3, -3, 0)\| = \sqrt{18} .$$



Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ con producto punto. Sea $\mathbf{u} = (2,0,1,2)$. Se quiere encontrar la mejor aproximación de **u** por vectores del subespacio $\mathbf{W} = \langle(-1,0,2,1),\ (2,3,2,-2)\rangle$ y la distancia de **u** a **W**.

Como el conjunto $\{(-1,0,2,1),\ (2,3,2,-2)\}$ es una base ortogonal de **W**, planteamos $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{u}$, esto es:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{(2,0,1,2).(-1,0,2,1)}{(-1,0,2,1).(-1,0,2,1)}(-1,0,2,1) + \frac{(2,0,1,2).(2,3,2,-2)}{(2,3,2,-2).(2,3,2,-2)}(2,3,2,-2) = \frac{1}{7}(-1,2,6,1)$$

Luego, la mejor aproximación de **u** por vectores de **W** es $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{7}(-1,2,6,1)$ y la distancia de **u** a **W** es la longitud del vector $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)$

$$d(\mathbf{u},\mathbf{W}) = d(\mathbf{u},\mathbf{u}_1) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1\| = \left\|\frac{1}{7}(15,-2,1,13)\right\| = \frac{1}{7}\sqrt{399}\,.$$

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con producto punto. Sea $\mathbf{u} = (2,0,1)$. Se quiere encontrar la mejor aproximación de **u** por vectores del subespacio $\mathbf{W} = \langle(-1,1,0),\ (1,0,1)\rangle$.

Como el conjunto $\{(-1,1,0),\ (1,0,1)\}$ no es ortogonal, aplicamos Gram–Schmidt para obtener una base ortogonal de **W**.

Tomamos $\mathbf{w}_1 = (-1,1,0)$.

Hacemos $\mathbf{w}_2 = (1,0,1) - \dfrac{(1,0,1).(-1,1,0)}{(-1,1,0).(-1,1,0)}(-1,1,0) = (1,0,1) - \left(-\dfrac{1}{2}\right)(-1,1,0) = \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)$.

Tenemos entonces que una base ortogonal de **W** es $\mathbf{B}=\left(\left(-1,1,0\right),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\right)$.

Ahora, la mejor aproximación de **u** por vectores de **W** es $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{u}$ esto es:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{(2,0,1)\mathbf{.}(-1,1,0)}{(-1,1,0)\mathbf{.}(-1,1,0)}(-1,1,0)+\frac{(2,0,1)\mathbf{.}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)}{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\mathbf{.}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)=(1,-1,0)+\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}(5,-1,4)\,.$$

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico.

Sea $\mathbf{W}=\left\{(x,y,z,x)\in\mathbb{R}^4\ /\ \begin{cases}x+z-w=0\\ y=0\end{cases}\right\}$ subespacio de **V**. Si $\mathbf{v}=(0,1,-1,0)$ es un vector de **V**, se desea hallar el vector de **W** más próximo a **v** y calcular la distancia de **v** a **W**.

Operando se tiene que $\mathbf{W}=\left\langle(-1,0,1,0),(1,0,0,1)\right\rangle$ y dado que los vectores que generan **W** son linealmente independientes, una base del subespacio es: $\mathbf{B_W}=\left\{(-1,0,1,0),(1,0,0,1)\right\}$, pero no es ortogonal.
Aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt

$$\mathbf{w}_1=\left(-1,0,1,0\right)$$

$$\mathbf{w}_2=\left(1,0,0,1\right)-\frac{\left(-1,0,1,0\right)\mathbf{.}\left(1,0,0,1\right)}{\left(-1,0,1,0\right)\mathbf{.}\left(-1,0,1,0\right)}\left(-1,0,1,0\right)=\left(1,0,0,1\right)-\left(\frac{-1}{2}\right)\left(-1,0,1,0\right)=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{w}'_2=\left(1,0,1,2\right)$$

Ahora $\mathbf{B'_W}=\left\{(-1,0,1,0),(1,0,1,2)\right\}$ es una base ortogonal de **W**.

Entonces el vector de **W** más próximo a **v** es: $\mathbf{u}_1 = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \frac{(0,1,-1,0)\mathbf{.}(-1,0,1,0)}{(-1,0,1,0)\mathbf{.}(-1,0,1,0)}(-1,0,1,0)+\frac{(0,1,-1,0)\mathbf{.}(1,0,1,2)}{(1,0,1,2)\mathbf{.}(1,0,1,2)}(1,0,1,2)\\ &=\left(\frac{-1}{2}\right)(-1,0,1,0)+\frac{-1}{6}(1,0,1,2)\\ &=\left(\frac{1}{3},0,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto, la mejor aproximación de **v** por vectores de **W** es $\mathbf{u}_1=\left(\frac{1}{3},0,-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

La distancia de **v** a **W** resulta igual a $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Observación: más adelante veremos una forma alternativa de hallar el vector más próximo.

Ejemplo 5

Definido en el espacio de las funciones continuas $\mathbf{V} = \mathbf{C}[-1,1]$ con el producto interno canónico $(f/g) = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\, dx$, es posible resolver el problema de aproximar una función dada por otra más simple. Si $\mathbf{W} = \left\langle 1, X, X^2 - \frac{1}{3} \right\rangle$, se desea aproximar la función $f(x) = e^x$ por una función del subespacio **W**.

Dado que los vectores que generan **W** forman un conjunto ortogonal, la mejor aproximación de f por vectores de **W** esta dada por:

$$f_1 = \frac{\int_{-1}^{1} e^x.1\, dx}{\int_{-1}^{1} 1.1\, dx} 1 + \frac{\int_{-1}^{1} e^x.x\, dx}{\int_{-1}^{1} x.x\, dx} x + \frac{\int_{-1}^{1} e^x.\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx}{\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\left(e - \frac{1}{e}\right)}{2} 1 + \frac{-2/e}{2/3} x + \frac{4/e}{8/45}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

siendo f_1 una función polinómica de segundo grado.

2.9 Distancia de un punto a una Variedad Lineal

Sea $(\mathbf{V}, /)$ un espacio vectorial con producto interno.

Sean **W** un subespacio de V de dimensión finita y $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{W}$ una variedad lineal asociada a **W**.

Dado $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ ¿existe a "mejor aproximación" por vectores de **A**? De existir ¿es única?.

Para poder responder a estas preguntas, analicemos el siguiente esquema

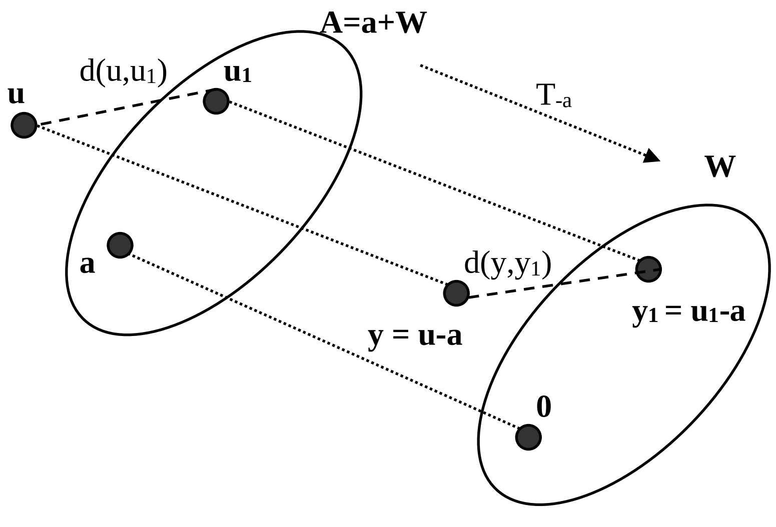


Figura 2.1

Considerando la traslación $\mathbf{T}_{-\mathbf{a}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y teniendo en cuenta que $\mathbf{T}_{-\mathbf{a}}(\mathbf{A}) = -\mathbf{a} + \mathbf{A} = \mathbf{W}$ y que la distancia es invariante por traslaciones (**Teorema 2.3.1** ítem (g)) se tiene que:

Sea $\mathbf{y}_1 \in \mathbf{W}$ el vector que es el "más próximo" a $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{a}$ (**Teorema 2.8.1**) entonces

$$\underbrace{d(\mathbf{u}-\mathbf{a},\mathbf{z}-\mathbf{a})}_{= d(\mathbf{u},\mathbf{z})} \geq \underbrace{d(\mathbf{u}-\mathbf{a},\mathbf{y}_1)}_{= d(\mathbf{u},\mathbf{y}_1+\mathbf{a})} \qquad \forall(\mathbf{z}-\mathbf{a}) \in \mathbf{W}$$

por ser la distancia invariante por traslaciones

$$\Downarrow$$

$$d(\mathbf{u},\mathbf{z}) \geq d(\mathbf{u},\mathbf{y}_1+\mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{A}$$

Por lo tanto $\mathbf{u}_1 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{a}$ es el vector de **A** "más próximo" a **u**.

Además, la distancia de **u** a **A** es igual a la distancia de $\mathbf{u} - \mathbf{a}$ al subespacio **W**.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto punto.
Sean $\mathbf{u} = (2,1,-1,0)$ y $\mathbf{A} = (1,1,1,1) + \langle (1,2,-1,0), (0,1,2,1) \rangle$. Se quiere hallar el vector de **A** "más próximo" de **u** y la distancia de **u** a la variedad.

Planteamos $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{a} = (2,1,-1,0) - (1,1,1,1) = (1,0,-2,-1)$.

Como $(1,2,-1,0) \perp (0,1,2,1)$ entonces $\mathbf{B} = \{(1,2,-1,0), (0,1,2,1)\}$ es una base ortogonal de **W** y entonces $\mathbf{y}_1$ puede obtenerse como $\mathbf{y}_1 = proy_{\mathbf{W}}\mathbf{y}$

$$\mathbf{y}_1 = \frac{(1,0,-2,-1).(1,2,-1,0)}{(1,2,-1,0).(1,2,-1,0)}(1,2,-1,0) + \frac{(1,0,-2,-1).(0,1,2,1)}{(0,1,2,1).(0,1,2,1)}(0,1,2,1) = \frac{1}{6}(3,1,-13,-5)$$

Luego el vector de **A** "más próximo" de **u** es:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{a} = \frac{1}{6}(3,1,-13,-5) + (1,1,1,1) = \frac{1}{6}(9,7,-7,1)$$

Además $d(\mathbf{u},\mathbf{A}) = d(\mathbf{y},\mathbf{W}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1\| = \left\|\frac{1}{6}(3,1,-3,-15)\right\| = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con el producto interno estándar. Buscamos hallar la "mejor aproximación" al punto $(1,0,2)$ por puntos de la variedad $\mathbf{A}: \ x + y - z = 1$ (plano que no pasa por el origen).

En este caso $\mathbf{u} = (1,0,2)$ y escribimos a la variedad lineal de la forma $\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{W}$:

$$(x,y,z) \in \mathbf{A} \Leftrightarrow (x,y,z) = \left(x, y, (x+y-1)\right) = (0,0,-1) + \left(x, \ y, \ (x+y)\right)$$
$$= (0,0,-1) + x\left(1,\ 0,\ 1\right) + y\left(0,\ 1,\ 1\right)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \mathbf{W} = (0,0,-1) + \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$$

Planteamos $\mathbf{y}=\mathbf{u}-\mathbf{a}=(1,0,2)-(0,0,-1)=(1,0,3)$.

Ahora bien, si bien los vectores que generan **W** son linealmente independientes no son ortogonales $\left((1,0,1)/(0,1,1)\right)=1\neq 0$. Luego $\mathbf{B}=\left\{(1,0,1),(0,1,1)\right\}$ NO es base ortogonal de **W.**
Por lo tanto debemos aplicar el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt para obtener una base ortogonal de **W**.

$$\mathbf{w}_1=(1,0,1)$$

$$\mathbf{w}_2=(0,1,1)-\frac{(1,0,1).(0,1,1)}{(1,0,1).(1,0,1)}(1,0,1)=(0,1,1)-\left(\frac{1}{2}\right)(1,0,1)=\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow \mathbf{w}'_2=(-1,2,1)$$

Ahora $\mathbf{B'}_{\mathbf{W}}=\{(1,0,1),(-1,2,1)\}$ es una base ortogonal de **W** y entonces $\mathbf{y}_1$ puede obtenerse como $\mathbf{y}_1 = proy_{\mathbf{W}}\mathbf{y}$

$$\mathbf{y}_1=\frac{(1,0,3).(1,0,1)}{(1,0,1).(1,0,1)}(1,0,1)+\frac{(1,0,3).(1,2,1)}{(1,2,1).(1,2,1)}(1,2,1)=\frac{4}{2}(1,0,1)+\frac{4}{6}(1,0,1)=\frac{1}{3}(5,2,7)$$

Luego el vector de **A** "más próximo" de **u** es: $\mathbf{u}_1=\mathbf{y}_1+\mathbf{a}=\frac{1}{3}(5,2,7)+(0,0,-1)=\frac{1}{3}(5,2,4)$

Observación: Las consideraciones hechas con anterioridad permiten resolver el problema de encontrar la distancia de un punto a una variedad reduciéndolo al caso de distancia de un punto a un subespacio. Sin embargo, es posible resolver esto mediante otro camino más ágil que a menudo brinda excelentes resultados.

Recordemos que en el Capítulo 1 (**Sección 1.9 Variedades Lineales**) hemos visto que la intersección de dos variedades lineales, si no es vacío, es otra variedad lineal cuyo subespacio asociado es la intersección de los subespacios asociados a las dos variedades lineales. Además, vimos en el **Teorema 1.9.2.2** qué ocurría cuando los subespacios asociados a las variedades era subespacios complementarios. El teorema mencionado permite asegurar el siguiente resultado.

Teorema 2.9.1 Sea $(\mathbf{V},/)$ un espacio vectorial con producto interno. Sea $\mathbf{b}\in\mathbf{V}$. Si $\mathbf{A}=\mathbf{a}+\mathbf{W}$ es una variedad lineal de **V** de dimensión finita entonces existe un único punto de **A** más próximo a **b**.

Demostración:

a) Existencia.

Dado $\mathbf{b}\in\mathbf{V}$ se construye $\mathbf{B}=\mathbf{b}+\mathbf{W}^{\perp}$ (ver Figura 2.2).

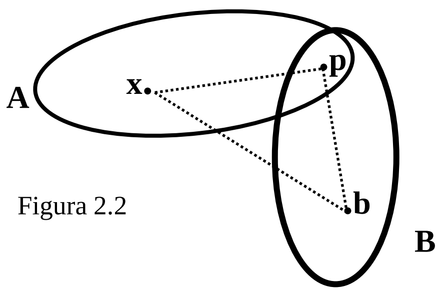


Figura 2.2

Como $\mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp} = \mathrm{V}$ entonces por **Teorema 1.9.2.2.** existe un único $\mathbf{p} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$

Vamos a mostrar que **p** es el único punto de **A** más próximo al punto **b**.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ y planteamos $d^2(\mathbf{b},\mathbf{x}) = \|\mathbf{b}-\mathbf{x}\|^2 = \|(\mathbf{b}-\mathbf{p})+(\mathbf{p}-\mathbf{x})\|^2$

$(\mathbf{b}-\mathbf{p}) \in \mathbf{W}^{\perp}$ (por ser diferencia de dos elementos de la variedad lineal **B**)

$(\mathbf{p}-\mathbf{x}) \in \mathbf{W}$ (por ser diferencia de dos elementos de la variedad lineal **A**)

Luego $(\mathbf{b}-\mathbf{p}) \perp (\mathbf{p}-\mathbf{x})$ y en consecuencia por el teorema de Pitágoras resulta:

$$d^2(\mathbf{b},\mathbf{x}) = \|\mathbf{b}-\mathbf{x}\|^2 = \|(\mathbf{b}-\mathbf{p})+(\mathbf{p}-\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{b}-\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{p}-\mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{b}-\mathbf{p}\|^2 = d^2(\mathbf{b},\mathbf{p}) \qquad (1)$$

Lo cual prueba que **p** es un punto de **A**, más próximo de **b**.

b) Unicidad.

Si **q** es otro punto de **A** que está a la misma distancia de **b** que **p**, remplazando en (1) $\mathbf{x} = \mathbf{q}$ resulta:

$$d^2(\mathbf{b},\mathbf{q}) = \|\mathbf{b}-\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{b}-\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^2 = d^2(\mathbf{b},\mathbf{p}) = \|\mathbf{b}-\mathbf{p}\|^2$$

en consecuencia $\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{q}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ con el producto punto. Sea **A** el hiperplano definido por la ecuación

$$6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 56.$$

Se quiere encontrar el punto $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$ "más próximo" a $\mathbf{b} = (1,2,4,3)$ y calcular la distancia de **b** a **A**.

Para hallar el punto de **A** más próximo a **b**, construiremos primero la variedad lineal $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{W}^{\perp}$ para lo cual consideramos el subespacio **W** asociado a **A** que está definido por la ecuación

$$6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0.$$

De allí que $\mathbf{W}^{\perp} = \langle (6,2,-2,2) \rangle$ y por lo tanto

$$\mathbf{B} = (1,2,4,3) + \langle (6,2,-2,2) \rangle.$$

Ahora debemos encontrar $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ (recordar que por **Teorema 1.9.2.2** sabemos que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{p}\}$) para ello plantemos que:

$$\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{B} \quad \text{sí y sólo si} \quad (x_1,x_2,x_3,x_4) = (1+6t,\ 2+2t,\ 4-2t,\ 3+2t)$$

Luego reemplazando en la ecuación de **A** se obtiene:

$$6(1+6t)+2(2+2t)-2(4-2t)+2(3+2t)=56 \Rightarrow 48t=48 \Rightarrow t=1$$

Por lo tanto $\mathbf{p}=(7,4,2,5)$ es el punto de **A** "más próximo" de **b**.

Además, $d(\mathbf{b},\mathbf{A})=\|\mathbf{b}-\mathbf{p}\|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ con el producto interno estándar. Buscamos la "mejor aproximación" al punto $(1,0,2)$ por puntos de la variedad $\mathbf{A}:\ x+y-z=1$ (plano que no pasa por el origen).

Para hallar el punto de **A** más próximo a $\mathbf{b}=(1,0,2)$, construiremos primero la variedad lineal $\mathbf{B}=\mathbf{b}+\mathbf{W}^{\perp}$ en este caso tenemos

$$\mathbf{B}=\mathbf{b}+\mathbf{W}^{\perp}=(1,0,2)\ +\langle(1,1,-1)\rangle$$

Ahora debemos encontrar $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ (recordar que por **Teorema 1.9.2.2** sabemos que $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{\mathbf{p}\}$) para ello plantemos que:

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{B}\Leftrightarrow(x_1,x_2,x_3)=(1+t,\ t,\ 2-t)$$

Si reemplazamos en la ecuación de **A** obtenemos $(1+t)+t-(2-t)=1 \quad\Rightarrow\quad t=\dfrac{2}{3}$

Por lo tanto $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{\mathbf{p}\}=\left\{\dfrac{1}{3}(5,2,4)\right\}$ es el punto de **A** "más próximo" de $(1,0,2)$.

Notar que se ha obtenido el mismo resultado que en el Ejemplo 2 de pag.120 pero en este caso se aplicaron los **Teoremas 1.9.2.2 y 2.9.1**..

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^{\mathbf{4}}$ con el producto punto. Sea la variedad lineal

$$\mathbf{A}=(1,1,1,1)+\langle(1,2,-1,0),\ (0,1,2,1)\rangle.$$

Se desea encontrar el punto de **A** "más próximo" del punto $\mathbf{b}=(2,1,-1,0)$ y calcular además la $d(\mathbf{b},\mathbf{A})$.

Construiremos primero la variedad lineal $\mathbf{B}=\mathbf{b}+\mathbf{W}^{\perp}$ para lo cual consideramos el subespacio **W** asociado a **A** que está dado por

$$\mathbf{W}=\langle(1,2,-1,0),\ (0,1,2,1)\rangle$$

por consiguiente $\mathbf{W}^{\perp}$ es el subespacio formado por los vectores que verifican el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \quad\quad = 0 \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Luego $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{W}^{\perp}$ es el conjunto de soluciones que se obtiene valuando en **b** los primeros miembros del sistema que define a $\mathbf{W}^{\perp}$, esto es

$$\mathbf{B}: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}.$$

Ahora debemos encontrar $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ (recordar que por **Teorema 1.9.2.2** sabemos que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{p}\}$) para ello plantemos que:

$$\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{A} \quad \text{sí y sólo si} \quad \mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) = (1+a,\ 1+2a+b,\ 1-a+2b,\ 1+b)$$

y reemplazando en el sistema de ecuaciones que define a **B** resulta:

$$\begin{cases} (1+a) + 2(1+2a+b) - (1-a+2b) = 5 \\ (1+2a+b) + 2(1-a+2b) + (1+b) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a = 3 \\ 6b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{-5}{6} \end{array}$$

Por lo tanto $\mathbf{p} = \left(1+\frac{1}{2},\ 1+2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{-5}{6}\right),\ 1-\frac{1}{2}+2\left(\frac{-5}{6}\right),\ 1+\left(\frac{-5}{6}\right)\right) = \frac{1}{6}(9,7,-7,1)$ es el punto de **A** “más próximo” de **b**.

Además $d(\mathbf{b},\mathbf{A}) = \|\mathbf{b}-\mathbf{p}\| = \frac{1}{6}\|(3,-1,1,-1)\| = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Notar que se ha obtenido el mismo resultado que en el Ejemplo 1 de pag.120 pero en este caso se aplicaron los **Teoremas 1.9.2.2 y 2.9.1**..

2.10 Algunas Aplicaciones. Mínimos Cuadrados

En las distintas áreas de la Ingeniería y de la Ciencia en general, un problema básico es analizar y comprender las relaciones entre diversas cantidades que varían.
La relación más sencilla entre dos variables x e y es la ecuación lineal $y = \beta_0 + \beta_1 x$.

Los datos experimentales a menudo producen puntos $(x_1,y_1), (x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ que al graficarse parecen quedar cerca de una recta **L**

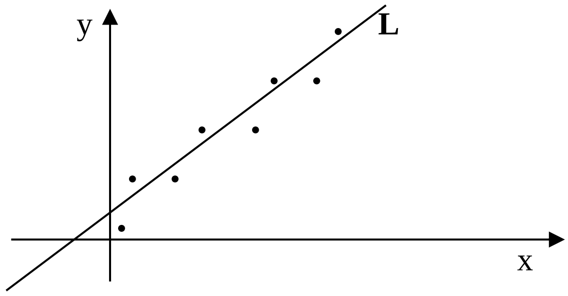


Figura 2.3

Se pretende determinar los parámetros β_0 y β_1 que hagan a la recta "**tan cercana**" de los puntos como sea posible.
Supongamos que β_0 y β_1 están fijos y consideremos la recta $y = \beta_0 + \beta_1 x$ como se muestra en la Figura 2.4.

Para cada punto de los datos, hay un punto correspondiente $(x_j, \beta_0 + \beta_1 x_j)$ sobre la recta con la misma coordenada x_j.

Llamamos y_j al valor observado de *y*, e $\hat{y}_j = \beta_0 + \beta_1 x_j$ al valor predicho de *y* (determinado por la recta). La diferencia $e_j = \hat{y}_j - y_j$ se llama error.

Hay varias maneras de medir que tan "cercana" está la recta **L** de los datos. La opción usual es considerar la suma de los cuadrados de los errores $\sum_{j=1}^{n} (e_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} (\hat{y}_j - y_j)^2$.   (1)

La recta de mínimos cuadrados es $y = \beta_0 + \beta_1 x$ cuyos coeficientes son tales aquellos que minimizan la expresión (1).

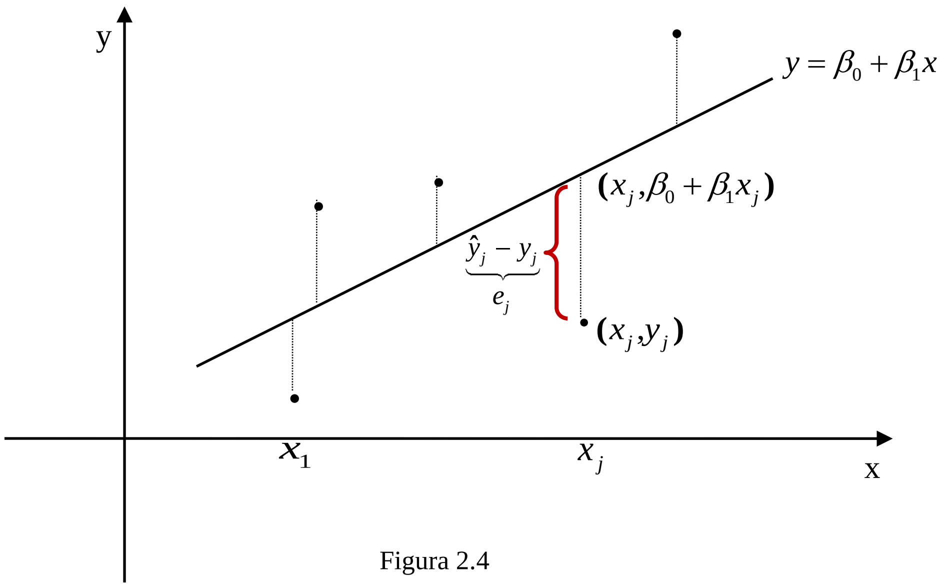


Figura 2.4

Si los puntos dato estuvieran sobre la recta **L**, los parámetros β_0 y β_1 satisfacerían las ecuaciones:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Valor predicho} & & \text{Valor observado} \\
\hat{y}_j = \beta_0 + \beta_1 x_j & & y_j \\
\hline
\beta_0 + \beta_1 x_1 & = & y_1 \\
\beta_0 + \beta_1 x_2 & = & y_2 \\
\vdots & & \vdots \\
\beta_0 + \beta_1 x_n & = & y_n
\end{array}
$$

que puede escribirse en forma matricial

$$\mathbf{A.X} = \mathbf{b} \qquad (2)$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Por supuesto, si los puntos dato no están sobre la recta, entonces no hay parámetros β_0, β_1 que satisfagan la ecuación (2) y el sistema es incompatible.

Lo que se pretende es encontrar la recta **L** que **mejor aproxima** al conjunto de datos. Consideremos entonces

$$\mathbf{e} = \mathbf{A.X} - \mathbf{b} \ \text{ el } \textbf{vector error} \qquad \mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

Se busca minimizar el error, esto es se desea que $\|\mathbf{e}\|^2 = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2$ sea mínimo.

El vector **X** que satisfaga esta condición, se llama solución por mínimos cuadrados.

Para resolver el problema consideremos que **W** es el espacio generado por las columnas de la matriz **A**. Para toda $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, el producto $\mathbf{A.X}$ es una combinación lineal de los vectores columna de **A**, luego para toda **X**, el vector $\mathbf{A.X} \in \mathbf{W}$.

Geométricamente, el resolver este problema de mínimos cuadrados equivale a encontrar un vector $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $\mathbf{A.X}_0$ sea el vector de **W** más próximo a **b**.
Por el **Teorema 2.8.1**, el vector de **W** más próximo a **b** es la proyección ortogonal de **b** sobre **W** (Figura 2.5).

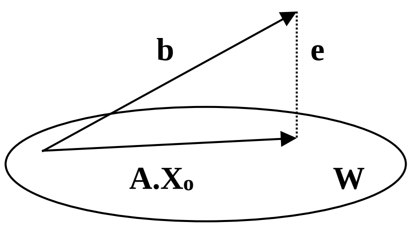


Figura 2.5

Ejemplos

Ejemplo 1

La Ley de Hooke establece que la longitud *x* de un resorte uniforme es una función lineal de la fuerza *y* que se aplica al resorte, respondiendo a la expresión $y = \beta_0 + \beta_1 x$ siendo β_1 la constante del resorte que depende del material del que está hecho el mismo (Figura 2.6)

Figura 2.6. Resorte (se supone amortiguamiento nulo)

Supongamos un resorte que sin estirar mide 6.1 cm de longitud (es decir cuando y =0). Luego al resorte se le aplican fuerzas de 2, 4 y 6 kilogramos, encontrándose que las longitudes correspondientes son 7.6; 8.7 y 10.4 cm respectivamente.

Se busca determinar la constante del resorte.

x_j	6.1	7.6	8.7	10.4
y_j	0	2	4	6

Se tiene

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 6.1\\ 1 & 7.6\\ 1 & 8.7\\ 1 & 10.4\end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\2\\4\\6\end{bmatrix}$$

Las columnas de la matriz **A** generan el subespacio **W**. (Por comodidad trabajamos como si fueran n-uplas en vez de matrices columna)

Luego

$$\mathrm{W}=\left\langle (1,\ 1,1,1),\ (6.1,7.6,8.7,10.4)\right\rangle .$$

Vamos a construir una base ortogonal para **W**.
Tomando

$$\mathbf{w}_1=(1,1,1,1)$$

$$\mathbf{w}_2=(6.1,7.6,8.7,10.4)-\frac{(6.1,7.6,8.7,10.4).(1,1,1,1)}{(1,1,1,1).(1,1,1,1)}(1,1,1,1)=(-2.1,-0.6,0.5,2.2)$$

de donde

$$\hat{\mathbf{b}}=\mathit{proy}_{\mathrm{W}}\,\mathbf{b}=\frac{\mathbf{b}\,.\,\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1\,.\,\mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1+\frac{\mathbf{b}\,.\,\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2\,.\,\mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+1.47\begin{bmatrix}-2.1\\-0.6\\0.5\\2.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.08\\3.88\\2.26\\-1.52\end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema: $\mathbf{A.X} = \hat{\mathbf{b}}$ de donde resulta $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -8.6 \\ 1.4 \end{bmatrix}$

Así el valor estimado de la constante del resorte es β_1 = 1.4 *Kg/cm*

Se ha resuelto el problema calculando primero la proyección de **b** en **W** : $\hat{\mathbf{b}} = proy_{\mathbf{W}}\,\mathbf{b}$ y luego resolviendo el sistema $\mathbf{A.X} = \hat{\mathbf{b}}$.

Sin embargo, es usual para la resolución de este tipo de situaciones hacer las siguientes consideraciones:

Por el Teorema de la proyección $\mathbf{b} - proy_{\mathbf{W}}\mathbf{b} = \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{A.X_0}$ es un vector ortogonal a **W** luego $\left(\mathbf{A}^j\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{.}\, (\mathbf{b} - \mathbf{A.X_0}) = 0$ con $\mathbf{A}^j$ columna *j* de la matriz **A** y $\mathbf{X_0}$ solución del sistema $\mathbf{A.X} = \hat{\mathbf{b}}$.

Pero $\left(\mathbf{A}^j\right)^{\mathrm{T}}$ es una fila de $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, luego $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{b} - \mathbf{A.X_0}) = 0$ de donde:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{.A.X_0} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{.b}$$

Esta última expresión se denomina sistema normal asociado con $\mathbf{A.X} = \mathbf{b}$ y el problema de mínimos cuadrados se reduce a encontrar una solución exacta del mismo, esto es despejar $\mathbf{X_0}$.

Cabe señalar que en algunas aplicaciones es necesario ajustar los puntos dato a una curva distinta a una recta esto es, podría ser adecuado pretender alguna otra relación funcional entre *x* e *y*.

Así en general puede considerarse el problema de cómo ajustar los datos por medio de curvas que tienen la forma:

$$y = \beta_0\, f_0(x) + \beta_1\, f_1(x) + \cdots + \beta_k\, f_k(x) \qquad (3)$$

donde $f_0(x),\ f_1(x), \ldots, f_k(x)$ son funciones conocidas y los $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ son parámetros que deben determinarse.

Nótese que éste es un problema lineal, porque es lineal en los parámetros desconocidos.

Como antes, *y* de la ecuación (3) es el valor predicho. La diferencia entre el valor observado y el predicho es el error, de tal manera que los parámetros $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ se determinarán de forma tal que minimicen la suma de los cuadrados de los errores.

Ejemplo 2

Para medir el desempeño durante el despegue de un aeroplano, se midió la posición horizontal del avión cada segundo desde t = 0 a t = 12. Las posiciones (en pies) fueron:

tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
posición	0	8.8	29.9	62.0	104.7	159.1	222.0	294.5	380.4	471.1	571.7	686.8	809.2

Se desea encontrar la curva cúbica de mínimos cuadrados $y = \beta_0 + \beta_1\ t + \beta_2\ t^2 + \beta_3\ t^3$ para los datos consignados.

Teniendo en cuenta los datos y la ecuación propuesta, escribimos las matrices **A**, **b**, **X**:

$$\begin{array}{c} \quad\ \ t^0 \quad t^1 \quad t^2 \quad\ t^3 \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \\ 1 & 8 & 64 & 512 \\ 1 & 9 & 81 & 729 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 1 & 11 & 121 & 1331 \\ 1 & 12 & 144 & 1728 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.8 \\ 29.9 \\ 62.0 \\ 104.7 \\ 159.1 \\ 222.0 \\ 294.5 \\ 380.4 \\ 471.1 \\ 571.7 \\ 686.8 \\ 809.2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

que nos permite escribir el sistema $\mathbf{A.X=b}$ y su sistema asociado $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{.A}\right)\mathbf{.X=A}^{\mathrm{T}}\mathbf{.b}$.

Para encontrar **X** se operó con las matrices usando el programa MATLAB

```
>>M = A´ * A;
>>K = M^(-1);
>>X = (K* A´)*b;
```

```
>> A = [1 0 0 0 ;1 1 1 1 ;1 2 4 8 ;1 3 9 27;1 4 16 64; 1 5 25 125;1 6 36 216;
    1 7 49 334;1 8 64 512;1 9 81 729;1 10 100 1000;1 11 121 1331;1 12 144 1728];
>> % la transpuesta se encuentra haciendo A'
>>  A' ;
```

```
> > M = A'* A
M   =
          13        78        650       6075
          78        650       6084      60647
          650       6084      60710     630267
          6075      60647     630267    6729857
```

```
>> %  para encontrar la inversa de  M  se indica  :  M^(-1)
>>  K = M^(-1)

K   =
           0.7286  -0.4304   0.0683  -0.0032
          -0.4304   0.4100  -0.0777   0.0040
           0.0683  -0.0777   0.0160  -0.0009
          -0.0032   0.0040  -0.0009   0.0000
```

```
>> %   luego  X  resulta de multiplicar K  por  A transpuesta por  b
```

```
>>  b = [0;8.8;29.9;62.0;104.7;159.1;222.0;294.5;380.4;471.1;571.7;686.8;809.2]
```

$>> \boldsymbol{X = (K^* A')^* b}$

$\boldsymbol{X} \;=\; $ -0.8672

4.7267

5.5473

-0.0268

Con lo cual la ecuación pedida toma la forma $y = -0.8672 + 4.7267\ t + 5.5473\ t^2 - 0.0268\ t^3$

```
>> t = 0 : 0.1 : 14;
>> y = -0.8672 + 4.7267*t + 5.5473*(t.^2) - 0.02268*(t.^3);
>> plot(t, y)
>> xlabel(' tiempo en segundos')
>> ylabel(' posicion horizontal del aeroplano en pies')
>> title(' Ajuste de datos con parabola cubica') (Figura 2.7)
```

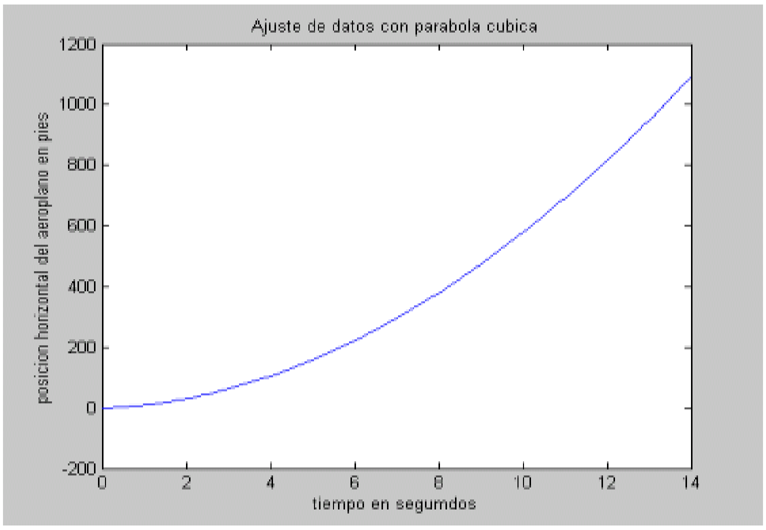


Figura 2.7

A partir de ella puede estimarse la velocidad del avión en un instante determinado, por ejemplo 4.5 segundos.

En efecto, recordando que $\mathbf{v} = \dfrac{dy}{dt}$ $\quad \hat{\mathbf{v}} = 4.72 + 11.09\ t - 0.08\ t^2 \ \Rightarrow\ \hat{\mathbf{v}}(4.5) = 53.02\ {}^{pies}\!/_{seg}$

Observar que construida la matríz **A** y **b** a partir de los datos, se ha resuelto el problema planteando el sistema asociado $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{b}$. Dado que en el ejemplo $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}\right)$ era inversible, fue posible despejar **X** y así encontrar la solución

$$\mathbf{X} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}\right)^{-1}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{b} \qquad (4)$$

La matriz $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}\right)^{-1}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{+}$ se denomina **matriz seudoinversa** de **A**.

Observar que $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}\right)$ es inversible sólo si las columnas de la matriz **A** son linealmente independientes, en cuyo caso el problema tiene una única solución por mínimos cuadrados dada por la ecuación (4).

2.11 Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$. Considere definida la regla $(\mathbf{x}/\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$ donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ vectores de **V**. Sean además, los vectores $\mathbf{u} = (1,0)$, $\mathbf{v} = (0,1)$ y $\mathbf{w} = (3,-1)$.
Se pide:

a) Probar que la regla dada define un producto interno en **V**.

b) Calcular $(\mathbf{u}/\mathbf{v})$, $\|\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{u}\|$ y $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$.

c) Calcular $proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ y la componente de **u** ortogonal a **v**.

d) Verificar que los vectores obtenidos en el punto c) son ortogonales.

e) Analizar si $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$.

Ejercicio 2

Sea el espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$, con producto interno canónico. Sean $\mathbf{u} = (2,1,3,-1)$ y $\mathbf{v} = (-3,0,2,1)$ vectores de **V**. Se pide:

a) Calcular $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$.

b) Expresar el vector **v**, como suma de un vector paralelo a **u** y un vector ortogonal a **u.**

c) Encontrar un vector **w**, tal que $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ y $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$.

Ejercicio 3

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ con el producto interno definido por

$$(\mathbf{A}/\mathbf{B}) = \sum_{ij} a_{ij}\ b_{ij} \quad \text{siendo } \mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \text{ y } \mathbf{B} = \left[b_{ij}\right].$$

Dadas $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ calcular: $\|\mathbf{A}\|$, $\|\mathbf{B}\|$, $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$ y $d(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

Ejercicio 4

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales. Sea la base $\mathbf{B} = \left(1, X, X^2\right)$ y el producto interno definido de la siguiente manera

$$(\mathbf{p_1}/\mathbf{p_2}) = (\mathbf{p_1})_{\mathbf{B}} \cdot (\mathbf{p_2})_{\mathbf{B}} \quad \text{con } \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbf{V}\ .$$

Dados $\mathbf{p} = -1 + 2X + X^2$ y $\mathbf{q} = 3 - 4X^2$ calcular $\|\mathbf{p}\|$, $\|\mathbf{q}\|$, $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v})$, $proy_{\mathbf{q}}\ \mathbf{p}$ y $d(\mathbf{p},\mathbf{q})$.

Ejercicio 5

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[-1,1] = \{ f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo } [-1,1] \}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\, dx$. Sean $f(x) = 1 + x$ y $g(x) = 1 - x$ elementos de $\mathbf{V}$

a) Calcular (f/g).

b) Dar $proy_g f$.

c) Analizar si las funciones $h_1(x) = x$ y $h_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ son ortogonales.

Ejercicio 6

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[0,\pi] = \{ f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo } [0,\pi] \}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_{0}^{\pi} f(x).g(x)\, dx$.

Verificar que las siguientes funciones son ortogonales $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos(x)$ y $f_3(x) = \cos(2x)$.

Ejercicio 7

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[0,1] = \{ f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo } [0,1] \}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_{0}^{1} f(x).g(x)\, dx$. Encuentre la longitud de cada uno de los vectores $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = e^x$ y $h(x) = \mathbf{sen}(2\pi x)$.

Ejercicio 8

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con el producto interno estándar. Encuentre los escalares k tal que $\|k.\mathbf{v}\| = 3$ siendo $\mathbf{v} = (1,2,4)$.

Ejercicio 9

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar. Encuentre dos vectores unitarios, ortogonales a $(2,1,-4,0)$ y $(1,-1,2,2)$.

Ejercicio 10

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ con el producto interno estándar. Analice los siguientes conjuntos de vectores y decida si son conjuntos ortogonales.

a) $\{(4,2,-5),(-1,2,0),(2,1,2)\}$.

b) $\{(3,1,-1),(-1,2,1),(2,-2,4)\}$.

c) $\{(3,1,-1),(0,0,0)\}$.

d) $\{(1,1,-1),(-1,1,0),(0,-1,1),(0,2,-1)\}$

Ejercicio 11

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar. Dados los vectores

$$\mathbf{u_1} = (3,4,0,0),\ \mathbf{u_2} = (0,0,1,1),\ \mathbf{u_3} = (4,-3,0,0),\ \ \mathbf{u_4} = (0,0,-1,1).$$

a) Verifique que el conjunto $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$ es un conjunto ortogonal y encuentre el conjunto ortonormal asociado a él.

b) ¿Es $\mathbf{B} = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4})$ una base de **V** ?. Justifique.

c) Hallar de ser posible $\left[(4,-2,2,4)\right]_{\mathbf{B}}$.

Ejercicio 12

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar. Sea $\mathbf{W} = \langle (2,2,1,0),\ (1,0,1,0),\ (5,-1,1,0) \rangle$.

a) Encontrar una base ortogonal de **W** y extenderla a una base ortogonal de **V**.

b) Dar la base ortonormal asociada a la base hallada de **V**.

Ejercicio 13

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[-1,1] = \{ f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo} [-1,1] \}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)\, dx$.

Sea el subespacio $\mathbf{W} = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ donde $f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t$ y $f_3(t) = t^2$.

a) Encuentre una base ortogonal de **W**.

b) Dar el coordenado de f_3 respecto a esa base.

Ejercicio 14

En los siguientes ítems considere el correspondiente espacio vectorial con el producto interno usual. En cada caso se dará un subespacio **W** y un vector **v** y se deberá

- hallar el correspondiente complemento ortogonal ($\mathbf{W}^{\perp}$)
- escribir al vector v como suma de un vector $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}$ y otro $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}^{\perp}$

a) $\mathbf{W} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 0\}, \quad \mathbf{v} = (-1,2)$

b) $\mathbf{W} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - y + 2z = 0\}, \quad \mathbf{v} = (3,-1,2)$

c) $\mathbf{W} = \langle (1,-1,0,2), (2,0,1,1) \rangle, \quad \mathbf{v} = (1,-1,2)$

Ejercicio 15

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar.
Encontrar el complemento ortogonal de cada uno de los siguientes subespacios:

a) $\mathbf{H:}\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

b) $\mathbf{U} = \langle (2,-1,1,1),\ (3,0,-1,-2),\ (0,-1,0,-1) \rangle$.

c) $\mathbf{W:}\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Ejercicio 16

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar. Sea $\mathbf{u} = (2,-1,1,0)$.
En cada uno de los casos siguientes dar la "mejor aproximación" de **u** por vectores del subespacio **W** y la distancia de **u** a **W**.

a) $\mathbf{W} = \langle (1,1,2,1),\ (1,0,0,-1) \rangle$.

b) $\mathbf{W} = \langle (1,1,2,1), (2,0,0,1) \rangle$.

c) $\mathbf{W:}\ \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

d) $\mathbf{W:}\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.

Ejercicio 17

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ con el producto interno estándar. Para cada una de las siguientes variedades lineales encontrar su "mejor aproximación" a **b** y calcular la distancia de **b** a cada una de ellas.

a) $\mathbf{A} = (1,1,1,1) + \langle (1,1,2,1) \rangle$; $\mathbf{b} = (3,2,0,1)$

b) $\mathbf{B:}\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 5$; $\mathbf{b} = (3,2,0,1)$

c) $\mathbf{C:}\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -2 \end{cases}$; $\mathbf{b} = (3,2,0,1)$

d) $\mathbf{A} = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \right\}$; $\mathbf{b} = (1,1,-1,0)$

e) $\mathbf{A} = \{ (x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 /\ 2x - y + 3z - w = 12 \}$; $\mathbf{b} = (1,0,-1,2)$

Ejercicio 18

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[0,1] = \{ f\ /\ f \text{ es continua en el intervalo } [0,1] \}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_0^1 f(x).g(x)\,dx$. Encontrar la función de primer grado que mejor aproxima a $g(x) = x^2 + 2$.

Ejercicio 19

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}[0,1] = \{ f \ / \ f \text{ es continua en el intervalo } [0,1] \}$ con el producto interno definido por: $(f/g) = \int_0^1 f(x).g(x)\,dx$.

a) Si $\mathbf{W} = \langle f \rangle$ con $f(x) = 1 + x$ encuentre la función de $\mathbf{W}$ más próxima de $g(x) = 3 + x - x^2$.

b) Encuentre la función cuadrática que mejor aproxima a $h(x) = \sqrt{x}$.

Ejercicio 20

Encuentre la recta que da el mejor ajuste para los datos: $(1,4), (-2,5), (3,-1)$ y $(4,1)$.

Ejercicio 21

Encuentre el mejor ajuste cuadrático para los datos del ejercicio 20.

Ejercicio 22

Analice si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. JUSTIFIQUE su respuesta (Esto es: si es verdadera demuéstrela y si es falsa de un contraejemplo o enuncie a qué teorema contradice).

a) Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ espacio vectorial. Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ y sean los vectores de $\mathbf{V}$ $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. La expresión $x_1(u_1.v_1) + x_2(u_2.v_2) + x_3(u_3.v_3)$ determina un producto interno.

b) Sea $\mathbf{V}$ un espacio con producto interno y $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ entonces se verifica que $(\mathbf{u}/\bar{\mathbf{0}}) = 0$.

c) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ con producto interno, entonces se verifica que $\|\mathbf{u}\|.\|\mathbf{v}\| = |(\mathbf{u}/\mathbf{v})|$.

d) Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial con producto interno. Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y φ representa el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ entonces $\cos\varphi < \dfrac{\mathbf{u}/\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$.

e) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ elementos de un espacio vectorial con producto interno y sea $k \in \mathbb{R}$. Si d es la función distancia entonces $d(k\,\mathbf{u}, k\,\mathbf{v}) = k\,d(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

f) En un espacio vectorial con producto interno, se cumple que $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

g) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ elementos de un vectorial con producto interno. Si $\mathbf{u} = k\,\mathbf{v}$ entonces $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

h) Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial con producto interno. Si $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \rangle$ y $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ entonces $\mathbf{u}$ se expresa como suma de sus proyecciones sobre $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.

i) Sea **V** un espacio con producto interno. Si $\mathbf{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ es una base de **V** entonces **B** es una base ortogonal de **V**.

j) Sea **V** un espacio vectorial con producto interno. Sea **B** una base ortonormal de **V**. Si **u** y **v** elementos arbitrarios de **V** entonces $(\mathbf{u}/\mathbf{v})=[\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}^{T}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$.

k) Si **W** un subespacio de un espacio vectorial **V** con producto interno. Entonces $\mathbf{W}\cap\mathbf{W}^{\perp}=\{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Ejercicio 23

Se conocen los siguientes datos sobre consumo de combustible en mpg (millas por galón) para vehículos de pasajeros:

año	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
mpg	29.5	30.4	33.3	34.2	34.9	36.2	37.8	39.2	40.0

a) Encuentre una recta de ajuste por mínimos cuadrados y grafíquela ($x=0$ representa 2010, $x=8$ representa 2018, etc). Analice si la recta parece un ajuste razonable para los datos.

b) Suponiendo que la tendencia continúa, utilice la ecuación de la recta para predecir el año en que el promedio de mpg será de 43.

Ejercicio 24

Un diseñador industrial está interesado en saber que efecto tiene la temperatura sobre la resistencia de un producto. Como los costos involucrados son altos, se dispone de una cantidad reducida de datos:

temperatura	600	600	700	700	700	900	950	950
Nivel de resistencia	40	44	48	46	50	48	46	45

Encuentre una recta de mínimos cuadrados que se ajuste y una curva cuadrática de mínimos cuadrados que se ajuste. Grafique ambas.
A partir de este análisis argumente si cree que hay evidencia de que la temperatura tiene algún efecto sobre la resistencia y, si es así, diga qué temperatura recomendaría para fabricar el producto más fuerte. (Valores mayores de nivel de resistencia indican un producto más fuerte).

Guía de Estudio

1) Defina **producto interno** y de las Definiciones Métricas referidas a: distancia, ortogonalidad y proyección.

2) Muestre que dado $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ con **V**: vectorial con producto interno y $\mathbf{v} \neq \bar{\mathbf{0}}$ entonces todo $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ se expresa de forma única como suma de un vector paralelo a **v** y otro ortogonal a **v**.

3) ¿Cuál es la ecuación del hiperplano que pasa por **p** y es ortogonal al vector **a**?.

4) Enuncie y demuestre la **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**. ¿Cómo se la vincula al concepto de ángulo entre dos vectores?.

5) Enuncie y demuestre la **Desigualdad del Triángulo**.

6) ¿Qué dice el **Teorema de Pitágoras Generalizado**? Demuéstrelo.

7) ¿Qué entiende por **conjunto ortogonal**? Enuncie y demuestre propiedades de los conjuntos ortogonales.

8) ¿Qué es una **base ortonormal**? ¿Qué ventajas tiene tomar como referencia una base ortonormal?.

9) Describa el **proceso de ortogonalización de Gram – Schmidt**.

10) ¿A que se llama **descomposición QR** de una matriz?.

11) Defina **complemento ortogonal**. Muestre que $\mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp} = \mathbf{V}$ **.**

12) ¿Cómo se determina la **distancia** entre un vector y un subespacio?

13) ¿Cómo se puede determinar el **punto más próximo** de una variedad lineal a un punto dado? ¿por qué?.

3

Vectores y Valores Propios

3.1 La Función Determinante

Algunas características de una matriz pueden expresarse mediante un escalar, tal como sucede, por ejemplo, con su rango. En particular, si se considera el conjunto de las matrices cuadradas pueden definirse otros dos escalares: la traza y el determinante.
Este último permite algunas aplicaciones importantes tanto geométricas como algebraicas. Así es posible,

- Cuando se trabaja en $\mathbb{R}^3$ dar fórmulas para el cálculo del área de un paralelogramo y el volumen de un paralelepípedo**.**

- Dar un nuevo criterio para caracterizar matrices inversibles y obtener una fórmula para la inversa. Expresar el valor de cada incógnita en la solución de un sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas cuando la solución es única.

Definición 3.1.1 Sea **K** un cuerpo. Sea $\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}^1, \ldots, \mathbf{A}^j, \ldots, \mathbf{A}^n\right] \in \mathbf{K}^{n\times n}$ y $k \in \mathbf{K}$.
Llamaremos función determinante a una función

$$\begin{aligned} det\colon \mathbf{K}^{n\times n} &\to \mathbf{K} \\ \mathbf{A} &\to det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

sí y sólo si satisface

1) $det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}_1^j+\mathbf{A}_2^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right] = det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}_1^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right] + det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}_2^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right].$

2) $det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathrm{k}\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right] = k\ det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right].$

3) Si $\mathbf{A}^j = \mathbf{A}^r$ entonces $det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^r,\ldots,\mathbf{A}^n\right] = 0.$

4) $det\,(\mathbf{I}_n) = 1$ siendo $\mathbf{I}_n$ la matriz identidad $n\times n$.

Observación: Las propiedades 1) y 2) expresan que la función determinante, mirada como función de una cualquiera de sus columnas, es una función lineal. Así, si **A** tiene *n* columnas, se dice que $det(\mathbf{A})$ es *n-lineal*.

Los ejemplos siguientes muestran el significado de estas propiedades en una matriz 2x2.

$$det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$$

$$det\begin{bmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$det\begin{bmatrix} k\,a_{11} & a_{12} \\ k\,a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} a_{11} & k\,a_{12} \\ a_{21} & k\,a_{22} \end{bmatrix} = k\ det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Es importante destacar que, como función de $\mathbf{K}^{n\times n}$ en $\mathbf{K}$, la función determinante **no es lineal**. Esto es, si **A** y **B** son matrices $n\times n$ y k es un escalar, en general:

$$det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \text{ no es igual a } det(\mathbf{A})+det(\mathbf{B})$$

$$det(k\,\mathbf{A}) \text{ no es igual a } k\ det(\mathbf{A})$$

Son consecuencia de la definición las propiedades que se enuncian a continuación.

Proposición 3.1.1 Sea **K** un cuerpo y sean $\mathbf{A}=\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right]\in\mathbf{K}^{n\times n}$ y $k\in\mathbf{K}$. Si

$\begin{array}{rl} det:\mathbf{K}^{n\times n} & \to \mathbf{K} \\ \mathbf{A} & \to det(\mathbf{A}) \end{array}$ es la función determinante se verifica que:

1. Si **A** tiene una columna nula, entonces: $det\ (\mathbf{A})=0$.
2. Si **B** se obtiene intercambiando dos columnas de **A**, entonces: $det(\mathbf{B})=-det(\mathbf{A})$.
3. Si **B** se obtiene sumando a una columna de **A** un múltiplo escalar de otra columna, entonces: $det(\mathbf{B})=det(\mathbf{A})$.

Demostración:

1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la columna nula es la j-ésima y consideremos el punto 2) de la definición de función determinante

$$det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\underset{}{\overset{\text{columna } j}{\mathbf{0}}},\ldots,\mathbf{A}^n\right] = det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,0.\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right] = 0\ .\,det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{A}^j,\ldots,\mathbf{A}^n\right] = 0.$$

2. Supongamos que B se obtiene de A intercambiando las columnas $\mathbf{A}^j=\mathbf{H}$ y $\mathbf{A}^r=\mathbf{L}$. Consideremos la matriz $\mathbf{M}=\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\overset{\text{columna } j}{\mathbf{H}+\mathbf{L}},\ldots,\overset{\text{columna } r}{\mathbf{H}+\mathbf{L}},\ldots,\mathbf{A}^n\right]$. **M** tiene dos columnas iguales, entonces por propiedad 3) de la definición de determinante se tiene que $det(\mathbf{M})=0$.

Luego, se tiene que:

$$det(\mathbf{M}) = 0 = det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\overset{columna\ j}{\mathbf{H}+\mathbf{L}},\ldots,\overset{columna\ r}{\mathbf{H}+\mathbf{L}},\ldots,\mathbf{A}^n\right] =$$

$$= \underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{=0} + det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right] +$$

$$+\ det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{A}^n\right] + \underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{=0}$$

$$= det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right] + det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{A}^n\right]$$

Por lo tanto $\underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{det(\mathbf{B})} = -\underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{det(\mathbf{A})}$.

3. Supongamos que **B** se obtiene de **A**, sumando a la columna j-ésima un múltiplo escalar de la columna *r*. Si consideramos las columnas $\mathbf{A}^j = \mathbf{H}$ y $\mathbf{A}^r = \mathbf{L}$. Se tiene entonces que la matriz $\mathbf{B} = \left[\mathbf{A}^1,\ldots,\overbrace{\mathbf{H}+k\mathbf{L}}^{\text{columna } j},\ldots,\overset{\text{columna } r}{\mathbf{L}},\ldots,\mathbf{A}^n\right]$. Luego, se tiene que:

$$det(\mathbf{B}) = det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\overbrace{\mathbf{H}+k\mathbf{L}}^{columna\ j},\ldots,\overset{columna\ r}{\mathbf{L}},\ldots,\mathbf{A}^n\right] =$$

$$= \underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{det(\mathbf{A})} + k.\underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{=0}$$

Por lo tanto $\underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{det(\mathbf{B})} = \underbrace{det\left[\mathbf{A}^1,\ldots,\mathbf{H},\ldots,\mathbf{L},\ldots,\mathbf{A}^n\right]}_{det(\mathbf{A})}$. #

3.1.1. Existencia y Unicidad

La definición de la función determinante en base a las propiedades que requerimos para la misma deja abiertas las siguientes cuestiones:

a) ¿**Existe** alguna función de $\mathbf{K}^{n\times n}$ en $\mathbf{K}$ que satisfaga los requisitos?

b) Si la respuesta al ítem a) es afirmativa, entonces ¿hay una **única** función determinante ó más de una?

En la teoría de determinantes se prueba que, en todos los casos, es decir para todo número natural *n*, la definición de función determinante caracteriza como tal a una **única** función.
Si bien admitiremos sin prueba esta afirmación, analizaremos en detalle el caso cuando se tiene $\mathbf{K}^{2\times 2}$
.

Existencia: Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} det\!: \mathbf{K}^{2\times 2} &\to \mathbf{K} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &\to det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Dicha aplicación es una función determinante, pues se verifica sin dificultad el cumplimiento de los ítems 1), 2), 3) y 4) de la **Definición 3.1.1**. (la prueba queda a cargo del lector).

Unicidad: Supongamos que se tiene $D\!: \mathbf{K}^{2\times 2} \to \mathbf{K}$ una función determinante y sean $\mathbf{E}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$**.** Entonces resulta $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \left[a_{11}\mathbf{E}^1 + a_{21}\mathbf{E}^2,\, a_{12}\mathbf{E}^1 + a_{22}\mathbf{E}^2 \right]$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} D(\mathbf{A}) &= D\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = D\left[a_{11}\mathbf{E}^1 + a_{21}\mathbf{E}^2,\, a_{12}\mathbf{E}^1 + a_{22}\mathbf{E}^2 \right] \\ &= (a_{11}a_{12}) \,.\, D\left[\mathbf{E}^1,\mathbf{E}^1\right] + (a_{11}a_{22}) \,.\, D\left[\mathbf{E}^1,\mathbf{E}^2\right] + (a_{21}a_{12}) \,.\, D\left[\mathbf{E}^2,\mathbf{E}^1\right] + (a_{21}a_{22}) \,.\, D\left[\mathbf{E}^2,\mathbf{E}^2\right] \\ &= (a_{11}a_{12}) \,.\, 0 + (a_{11}a_{22}) \,.\, D\left[\mathbf{E}^1,\mathbf{E}^2\right] + (a_{21}a_{12}) \,.\left(-D\left[\mathbf{E}^1,\mathbf{E}^2\right]\right) + (a_{21}a_{22}) \,.\, 0 \\ &= (a_{11}a_{22}) \,.\, 1 + (a_{21}a_{12}) \,.(-1) \end{aligned}$$

luego $D(\mathbf{A}) = D\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$,es decir la función determinante es única para matrices en $\mathbf{K}^{2\times 2}$.

3.1.2. Otras Propiedades de la Función Determinante

Aceptaremos también, sin demostrarlas, las dos propiedades que enunciaremos a continuación:

a). Determinante de la Transpuesta.

La matriz que se obtiene escribiendo como filas las columnas de **A**, en su orden, se llama **matriz transpuesta** de **A** y se denota: $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.
Esto es

$$\mathbf{A} = \begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & \text{columna } j & & \phantom{a_{1n}} \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \end{array} \qquad \text{traspuesta de } \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & \text{columna } i & & \phantom{a_{n1}} \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

(fila $i \to$ marks the row $a_{i1} \cdots a_{ij} \cdots a_{in}$ of $\mathbf{A}$; fila $j \to$ marks the row $a_{1j} \cdots a_{ij} \cdots a_{nj}$ of $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$)

Luego se verifica: $det(\mathbf{A}) = det\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)$.

En virtud de esta igualdad, las propiedades 1) a 7) que verifica la función determinante, que se refieren a las columnas de la matriz, son válidas para las filas. Así, por ejemplo, es válido afirmar que si **A** tiene *dos filas iguales* su determinante es nulo. Si se intercambian *dos filas* el determinante cambia de signo, etc.

b). Determinante de un Producto.

Si $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbf{K}^{n\times n}$ se verifica: $det(\mathbf{A}\,.\mathbf{B}) = det(\mathbf{A})\ .\ det(\mathbf{B})$.

3.1.3. Cálculo de Determinante

3.1.3.1 Regla de Sarrus.

Como ya se dijo con anterioridad puede mostrarse fácilmente que para una matriz 2x2 el número que se obtiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow (ad - bc)$$

cumple las exigencias de la función determinante.

De igual forma, para una matriz 3x3 la aplicación

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow\ aei + bfg + dhc - ceg - afh - bdi$$

Cumple con las exigencias de la función determinante. Sin embargo, esta fórmula parece difícil de recordar. Para simplificar este problema, se tiene en cuenta la llamada **Regla de Sarrus**: que consiste en agregar a la matriz **A** sus dos primeras columnas como se ilustra a continuación. El producto de los elementos que están en las diagonales descendentes de izquierda a derecha se suman y las que están en las diagonales ascendentes se restan:

columnas

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \end{array} \qquad\qquad\qquad\qquad$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{array}{ccc} - & - & - \end{array}$$

$$det\,(A) = \quad \left(aei + bfg + cdh\right) \quad + \quad \left(-gec - hfa - idb\right)$$

3.1.3.2 Cofactores

Definición 3.1.3.2 Sea **K** un cuerpo. Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{n \times n}$. Denotaremos $\mathbf{A}_{ij} \in \mathbf{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ a la matriz que se obtiene suprimiendo de **A** la fila *i* y la columna *j*, esto es:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & \text{columna } j & & \phantom{a_{1n}} \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{fila } i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

El escalar: $\qquad C_{ij} = (-1)^{(i+j)}.det\left(\mathbf{A}_{ij}\right)$

se denomina **cofactor** del lugar (i,j) (o también **cofactor del elemento** a_{ij}**)**

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, consideramos $\mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ la matriz que se obtuvo a partir de **A** al suprimir la fila 2 y la columna 3. El cofactor del lugar (2,3) es $\mathbf{C}_{23} = (-1)^{(2+3)}.det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 5$.

Observación: El cofactor del lugar (i,j) no depende de los elementos de la fila *i* ni de los elementos de la columna *j*. Si en la matriz **A** se cambia la fila *i* y la columna *j* el cofactor de la nueva matriz es igual al cofactor C_{ij} de la matriz **A**.

Ejemplo 2

Si en $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, se cambia la fila **2** y la columna **3,** se obtiene $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Notar que $\mathbf{C}_{23}$ no cambia, pues $\mathbf{B}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y por lo tanto $\mathbf{C}_{23} = (-1)^{(2+3)}.det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 5$.

3.1.3.3 Desarrollo por Cofactores

Teorema 3.1.3.3 Sea **K** un cuerpo. Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{n \times n}$. El determinante de la matriz **A** se puede calcular como suma de los elementos de una fila (ó de una columna) multiplicados por sus respectivos cofactores C_{ij}, esto es:

- El desarrollo del determinante de **A** por la fila *i* está dado por:

$$det(\mathbf{A}) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (1)$$

- El desarrollo del determinante de **A** por la columna *j* está dado por:

$$det(\mathbf{A}) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (2)$$

Observación: Puesto que cada cofactor incluye el determinante de una matriz de orden $(n-1)$, las fórmulas (1) y (2) permiten calcular el determinante de una matriz de orden *n* si se saben calcular determinantes de matrices de orden $(n-1)$. A su vez, cada uno de estos determinantes puede desarrollarse en la misma forma. El proceso conduce finalmente a expresar $det(\mathbf{A})$ por medio de determinantes de matrices 2×2 (ó si se quiere, 1×1).

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Desarrollaremos el $det(\mathbf{A})$ por la tercera fila, esto es:

$$det(\mathbf{A}) = 4.(-1)^{(3+2)}.det\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} + 1.(-1)^{(3+4)}.det\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}}$$

$$det(\mathbf{B}) = det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.(-1)^{(1+2)}.det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1.(-1)^{(3+2)}.det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

$$det(\mathbf{C}) = det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.(-1)^{(1+3)}.det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1.(-1)^{(3+3)}.det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -3.$$

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A}) &= 4.(-1)^{(3+2)}.det(\mathbf{B}) + 1.(-1)^{(3+4)}.det(\mathbf{C}) \\ &= 4.(-1)^{(3+2)}.3 + 1.(-1)^{(3+4)}.(-3) \\ &= -9 \end{aligned}$$

Observación: El determinante de una matriz puede calcularse desarrollando por los cofactores de cualquiera de sus filas o columnas; la unicidad de la función determinante garantiza que, en todos los casos, el resultado que se obtiene es el mismo.

Propiedad importante de los cofactores de una fila (ó columna).

Hemos visto que la suma de los elementos de una fila (ó columna) por sus cofactores es igual al determinante de la matriz. Veremos ahora que ocurre si se suma el producto de los elementos de una fila (ó columna) por los correspondientes cofactores de otra fila (ó columna).

Proposición 3.1.3.3 Sea **K** un cuerpo. Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{n\times n}$. Si C_{ij} es el cofactor del lugar (i,j), entonces

$$a_{i1}C_{r1} + a_{i2}C_{r2} + \cdots + a_{in}C_{rn} = 0 \quad (\text{si} \quad r \neq i) \qquad (3)$$

Demostración:

Si en la matriz **A** se reemplaza la fila *r* por la fila *i*, los cofactores de la fila *r* no cambian. Luego, el primer miembro de (3) es el desarrollo por la fila *r* del determinante de esta nueva matriz que como tien la fila *r* igual a la fila *i*, resulta igual a cero. #

3.1.3.4 Cálculo de Determinante por Triangulación

Si **T** es una matriz triangular superior (es decir que son iguales a cero los elementos que están debajo de la diagonal principal), la aplicación del desarrollo por la primera columna muestra que $det(\mathbf{T})$ se obtiene multiplicando los elementos de esta diagonal.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow det(\mathbf{A}) = \prod_{j=1}^{n} a_{jj} \ .$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Si $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ entonces $det(\mathbf{T}) = det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= 2.3.det\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.3.(-5).1 = -30 \, .$$

El resultado precedente sugiere que podrían usarse las operaciones elementales de filas para transformar una matriz **A** en una triangular **T** para facilitar el cálculo del determinante de **A** por medio de $det(\mathbf{T})$. Por tal motivo, analizaremos los cambios introducidos en el determinante al aplicar a la matriz operaciones elementales de filas. Las propiedades de la función determinante muestran lo siguiente

I. $\mathbf{A} \xrightarrow{e_i(k)} \mathbf{B}$ la matriz **B** se obtiene a partir de **A** multiplicando la fila r por un escalar k, luego $det(\mathbf{B}) = k\ det(\mathbf{A})$.

II. $\mathbf{A} \xrightarrow{e_{ir}(k)} \mathbf{B}$ la matriz **B** se obtiene a partir de **A** multiplicando sumando a la fila i la fila r multiplicada por el escalar k, luego $det(\mathbf{B}) = det(\mathbf{A})$.

III. $\mathbf{A} \xrightarrow{e_{ir}} \mathbf{B}$ la matriz **B** se obtiene a partir de **A** intercambiando la fila i por la fila r, luego $det(\mathbf{B}) = -det(\mathbf{A})$.

En los ejemplos siguientes, pasamos de **A** a **T** por operaciones de filas, calculamos $det(\mathbf{T})$ y lo corregimos, teniendo en cuenta los factores introducidos por las operaciones de tipo I y tipo III, para obtener $det(\mathbf{A})$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, queremos hallar la matriz triangular **T** que se obtiene a partir de **A** por aplicaciones de operaciones por fila.

$$\begin{array}{ccccccl}
 & (1) & 0 & 2 & 2 & & \\
\mathbf{A} & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\
 & 2 & 1 & 3 & 2 & & \\
 & 0 & 2 & 1 & 1 & e_{21}(-1);\ e_{31}(-2) & \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & 2 & & \\
\mathbf{B} & 0 & 0 & -2 & -1 & & det(\mathbf{B}) = det(\mathbf{A}) \\
 & 0 & (1) & -1 & -2 & & \\
 & 0 & 2 & 1 & 1 & e_{43}(-2);\ e_{23} & \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & 2 & & \\
\mathbf{C} & 0 & 1 & -1 & -2 & & det(\mathbf{C}) = (-1)\ det(B) = (-1)det(\mathbf{A}) \\
 & 0 & 0 & -2 & (-1) & & \\
 & 0 & 0 & 3 & 5 & e_4(2);\ e_{43}(3) & \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & 2 & & \\
\mathbf{T} & 0 & 1 & -1 & -2 & & det(\mathbf{T}) = 2.det(\mathbf{C}) = 2.(-1)det(\mathbf{A}) \\
 & 0 & 0 & -2 & -1 & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 7 & & \\
\hline
\end{array}$$

Luego, como $det(\mathbf{T}) = 1.1.(-2).7 = -14$ se tiene que $det(\mathbf{A}) = \dfrac{det(\mathbf{T})}{(-1)\cdot 2} = \dfrac{-14}{-2} = 7$.

Ejemplo 2

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, queremos hallar la matriz triangular $\mathbf{T}$ que se obtiene a partir de $\mathbf{A}$ por aplicaciones de operaciones por fila.

$$\begin{array}{llll}
 & \begin{array}{ccc} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} & & \\
\mathbf{A} & & e_3\left(\frac{1}{2}\right) & \\
\hline
 & \begin{array}{ccc} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} & & \\
\mathbf{B} & & e_{13} & det(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} det(\mathbf{A}) \\
\hline
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{array} & & \\
\mathbf{C} & & e_{21}(-3);\ e_{31}(-4) & det(\mathbf{C}) = (-1).det(B) = (-1).\left(\frac{1}{2}\right).det(\mathbf{A}) \\
\hline
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{array} & & \\
\mathbf{D} & & e_{32}\left(\frac{-5}{8}\right) & det(\mathbf{D}) = det(\mathbf{C}) = (-1).\left(\frac{1}{2}\right).det(\mathbf{A}) \\
\hline
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} \end{array} & & \\
\mathbf{T} & & & det(\mathbf{T}) = det(\mathbf{D}) = (-1).\left(\frac{1}{2}\right).det(\mathbf{A})
\end{array}$$

Luego, como $det(\mathbf{T}) = 1.(\text{-}8).\left(\text{-}\frac{15}{2}\right) = 60$ se tiene que $det(\mathbf{A}) = \dfrac{det(\mathbf{T})}{(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)} = -120$.

3.2 Aplicaciones Algebraicas de la Función Determinante

3.2.1. Criterio para la Inversibilidad de una Matriz

La realización de operaciones elementales de filas sólo puede modificar el determinante de una matriz multiplicándolo por factores no nulos, por lo tanto si $\mathbf{R}$ es la reducida por filas de $\mathbf{A}$ se tiene:

$$det(\mathbf{A}) \neq 0 \text{ sí y sólo si } det(\mathbf{R}) \neq 0$$

Recordando que

- la reducida por filas de una matriz cuadrada es la identidad o tiene una fila nula

y que

- **A** es inversible sí y sólo si su reducida es la matriz identidad, resulta: $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \iff \det(\mathbf{R}) \neq 0 \iff \mathbf{R} = \mathbf{I} \iff \mathbf{A}$ es inversible .

Por lo tanto

> **A** es **inversible** sí y sólo si $det(\mathbf{A}) \neq 0$

Teniendo en cuenta que una matriz es inversible sí y sólo si sus columnas son linealmente independientes, resulta también el siguiente criterio para la independencia lineal de *n* vectores de $\mathbf{K}^{n\times 1}$

> $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes sí y sólo si $det\left(\left[\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\right]\right) \neq 0$

3.2.2. Inversa de una Matriz

> **Definición 3.2.2** Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{n\times n}$. Llamaremos **matriz adjunta** de **A** a la matriz
>
> $adj(\mathbf{A}) = \left[C_{ij}\right]^{\mathbf{T}}$ donde C_{ij} es el cofactor de lugar (i,j) .

Por lo tanto, para obtener la matriz adjunta debemos construir la matriz de los cofactores de la matriz **A** y transponerla.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ de donde al calcular los cofactores se tiene: $C_{11} = 0$; $C_{12} = 4$; $C_{13} = -2$

$C_{21} = -1$; $C_{22} = -4$; $C_{23} = 3$; $C_{31} = 1$; $C_{32} = -2$; $C_{33} = 1$. Luego la adjunta de **A** es:

$$adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} .$$

Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{n\times n}$ si se realiza el producto de **A** por $adj(\mathbf{A})$, el elemento (i, j) del producto es la suma de los elementos de la fila *i* de la matriz **A** multiplicados por los elementos de la columna *j* de $adj(\mathbf{A})$, es decir:

$$\left[\mathbf{A}\,.\,adj(\mathbf{A})\right]_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$$

- Cuando $j = i$ se tiene el desarrollo por cofactores por la fila *i* de $det(\mathbf{A})$; por lo tanto los elementos de la diagonal principal de la matriz $\mathbf{A}\,.\,adj(\mathbf{A})$ son iguales a $det(\mathbf{A})$.

- Cuando $j \neq i$ se tiene la suma de los elementos de la fila *i* multiplicados por los cofactores de otra fila; por lo tanto, el correspondiente elemento de la matriz producto es igual a cero.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{i1} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{1i} & \cdots & C_{ii} & \cdots & C_{ni} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{in} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} = adj(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} det(\mathbf{A}) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & det(\mathbf{A}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & det(\mathbf{A}) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot adj(\mathbf{A})$$

Resulta $\mathbf{A} \,.\, adj(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}) \,.\, \mathbf{I}$.

Si **A** es inversible entonces $det(\mathbf{A}) \neq 0$, por lo tanto se tiene:

$$\mathbf{A} \,.\, adj(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}) \,.\, \mathbf{I} \quad \text{multiplicamos por } \frac{\mathbf{1}}{det(\mathbf{A})} \text{ y asociamos convenientemente}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{det(\mathbf{A})} \,.\, \left(\mathbf{A} \,.\, adj(\mathbf{A})\right) = \mathbf{A} \,.\left(\frac{\mathbf{1}}{det(\mathbf{A})} \,.\, adj(\mathbf{A})\right) = \mathbf{I}$$

Esta expresión muestra que la matriz $\left(\frac{\mathbf{1}}{det(\mathbf{A})} \,.\, adj(\mathbf{A})\right)$ es la inversa de **A**. Luego

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\frac{\mathbf{1}}{det(\mathbf{A})} \,.\, adj(\mathbf{A})\right).$$

Hemos obtenido así una fórmula que expresa $\mathbf{A}^{-1}$. Debe observarse que el interés de la fórmula es esencialmente teórico pues su aplicación es muy laboriosa para matrices de orden $n > 3$. En el ejemplo siguiente la emplearemos para calcular la inversa de una matriz 3×3.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, la matriz adjunta es $adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $det(\mathbf{A}) = 2$ luego la matriz inversa de **A** está dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \,.\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2.3. Regla de Cramer

Teorema 3.2.3 Sea $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{n\times n}$. El sistema $\mathbf{A.X=H}$ de *n* ecuaciones con *n* incógnitas tiene solución única para todo **H**

sí y sólo si **A** es inversible

sí y sólo si $det(\mathbf{A}) \neq 0$

siendo la única solución la *n-upla* $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ con:

$$\overline{x}_j = \frac{det\left[\mathbf{A^1}, ..., \mathbf{A}^{j-1}, \mathbf{H}, \mathbf{A}^{j+1}, ..., \mathbf{A}^n\right]}{det(\mathbf{A})} \quad \text{para} \quad j = 1, 2, ..., n$$

Demostración:

Si $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ es la solución del sistema, se verifica:

$$\overline{x}_1 . \mathbf{A^1} + \cdots + \overline{x}_j . \mathbf{A}^j + \cdots + \overline{x}_n \mathbf{A}^n = \mathbf{H} \qquad \text{Por lo tanto:}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{lugar } j}}{det\left[\mathbf{A^1}, ..., \mathbf{H}, ..., \mathbf{A}^n\right]} = det\left[\mathbf{A^1}, ..., \underbrace{\left(\overline{x}_1 \mathbf{A^1} + \cdots + \overline{x}_j \mathbf{A}^j + \cdots + \overline{x}_n \mathbf{A}^n\right)}_{\substack{\downarrow \\ \text{lugar } j}}, ..., \mathbf{A}^n\right]$$

Por las propiedades 1) y 2) de la definición de función determinante resulta:

$$det\left[\mathbf{A^1}, \ldots, \mathbf{H}, \ldots, \mathbf{A}^n\right] =$$

$$= \overline{x}_1\ det\left[\mathbf{A^1}, \ldots, \mathbf{A^1}, \ldots, \mathbf{A}^n\right] + \cdots + \overline{x}_j\ det\left[\mathbf{A^1}, \ldots, \mathbf{A}^j, \ldots, \mathbf{A}^n\right] + \cdots + \overline{x}_n\ det\left[\mathbf{A^1}, \ldots, \mathbf{A}^n, \ldots, \mathbf{A}^n\right]$$

El único término que no se anula es el de orden *j*, en los restantes aparecen determinantes de matrices con dos columnas iguales. Por lo tanto:

$$det\left[\mathbf{A^1}, \ldots, \mathbf{H}, \ldots, \mathbf{A}^n\right] = \overline{x}_j\ det\left[\mathbf{A^1}, \ldots, \mathbf{A}^j, \ldots, \mathbf{A}^n\right] = \overline{x}_j\ det(\mathbf{A})$$

Por ser $det(\mathbf{A}) \neq 0$ se puede despejar $\overline{x}_j$ y se obtiene: $\overline{x}_j = \dfrac{det\left[\mathbf{A^1}, ..., \mathbf{H}, ..., \mathbf{A}^n\right]}{det(\mathbf{A})}$.#

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea el sistema $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} . \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}}$

$$\bar{x}_1 = \frac{det\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{11}{1} = 11; \qquad \bar{x}_2 = \frac{det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}{det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{7}{1} = 7.$$

Observación: Igual que la fórmula para la matriz inversa, la Regla de Cramer es de importancia esencialmente teórica. Para $n > 3$ su aplicación resulta excesivamente laboriosa, por la cantidad de multiplicaciones y divisiones que importa, muy superior a los que se requieren con otros métodos de cálculo.

3.3 Valores y Vectores Propios de una Matriz

3.3.1. Transformaciones en $\mathbb{R}^n$

En esta subsección, veremos que una matriz puede usarse para transformar vectores y actuar como un tipo de "función" de la forma **w** =T(**v**), donde la variable independiente **v** y la variable dependiente **w** son vectores. Ahora esta noción se hará más precisa y se observarán varios ejemplos de tales transformaciones matriciales, lo que conduce al concepto de *transformación (aplicación) lineal*, que veremos en el capítulo 4.

La ecuación matricial $\mathbf{A.X=b}$ se puede interpretar como que la matriz **A** actúa sobre el vector **X** (por multiplicación) produciendo un nuevo vector **b**.

Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. La correspondencia $\mathbf{X} \to \mathbf{A.X}$ define una función o **transformación** entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^{n\times 1}$ y $\mathbb{R}^{m\times 1}$, y se indica:

$$\begin{array}{l} \mathbf{T_A} : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1} \\ \quad\ \ \mathbf{X} \quad \to \mathbf{T_A(X)} \end{array} \qquad \text{donde} \quad \mathbf{T_A(X)} = \mathbf{A.X} = \mathbf{b}$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Para la matriz **A** y los vectores **X** y **b** dados, la expresión $\mathbf{A.X=b}$

$$\underset{\mathbf{A}}{\underset{\uparrow}{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}}} . \underset{\mathbf{X}}{\underset{\uparrow}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}} = \underset{\mathbf{b}}{\underset{\uparrow}{\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}}}$$

puede ser vista como la imagen de **X** por una transformación.

Esto es, al multiplicar el vector $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{4x1}$ por la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ éste se transforma en el vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2x1}$. Desde este punto de vista, resolver el sistema $\mathbf{A.X=b}$ equivale a encontrar todos los vectores $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{4x1}$ que se transformen en el vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2x1}$ bajo la acción de multiplicar por **A**.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Se define la función:

$$\begin{aligned} \mathbf{T_A} : \mathbb{R}^{3x1} &\to \mathbb{R}^{2x1} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &\to \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Considerando la identificación entre los vectores de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ y $\mathbb{R}^n$ puede definirse equivalentemente

$$\begin{aligned} \mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{X} &\to \mathbf{A.X} \end{aligned}$$

a la cual también llamamos transformación o mapeo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Se sobre-entiende que el vector **X** se expresa como una matriz columna.

En el caso particular en que $m = n$, la matriz **A** es cuadrada y permite establecer una correspondencia entre vectores de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{X} &\to \mathbf{A.X} \end{aligned}$$

en cuyo caso $\mathbf{T_A}$ se llama **operador** sobre $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Consideramos $\begin{aligned} \mathbf{T_A} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{X} &\to \mathbf{A.X} \end{aligned}$ $\mathbf{T_A}$ transforma los vectores de $\mathbb{R}^2$ en nuevos vectores de $\mathbb{R}^2$.

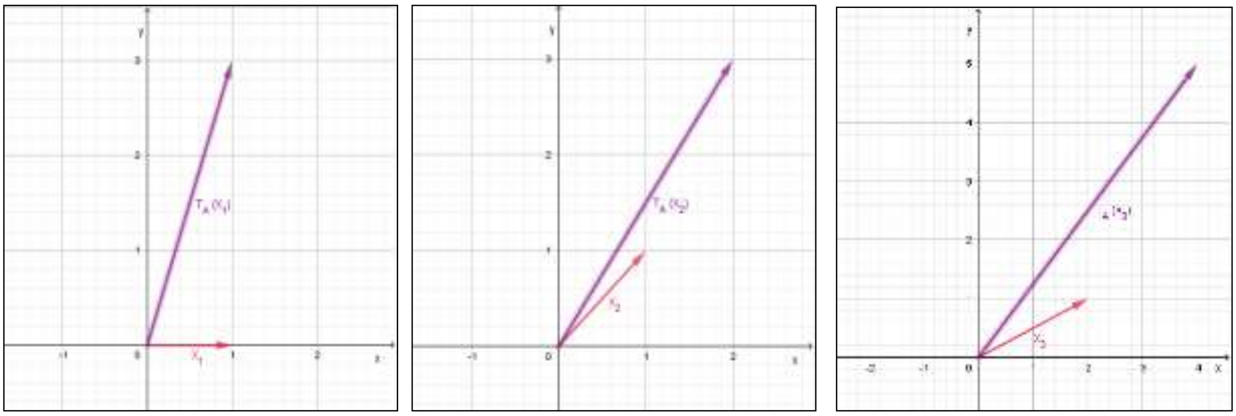
Podemos analizar el efecto geométrico de esta transformación:

Sean: $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ entondes para obtener $\mathbf{T_A}(\mathbf{X}_1)$; $\mathbf{T_A}(\mathbf{X}_2)$ y $\mathbf{T_A}(\mathbf{X}_3)$

plantemos:

$$\mathbf{T_A}\left(\mathbf{X}_1\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix};\ \mathbf{T_A}\left(\mathbf{X}_2\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}\ \text{ y }\ \mathbf{T_A}\left(\mathbf{X}_3\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}$$

Graficando se tiene:



Observación: En las figuras precedentes, se tiene que al multiplicar el vector dato (línea roja) por la matriz **A**, éste se transforma en otro vector (línea lila) que en general está rotado y dilatado o contraído respecto al original.

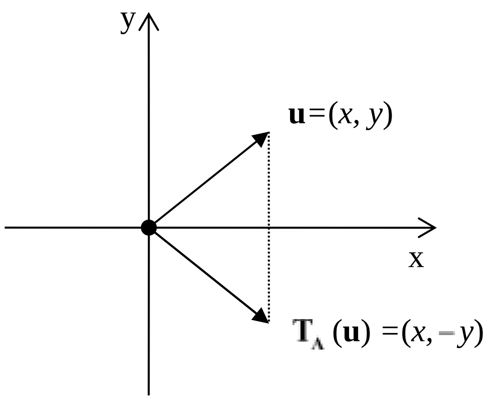
Teniendo en cuenta lo manifestado en la observación para los vectores del ejemplo 4, podemos señalar de manera general que:

Si a $\mathbf{u}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ lo representamos por sus coordenadas $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2x1}$, entonces si $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ se

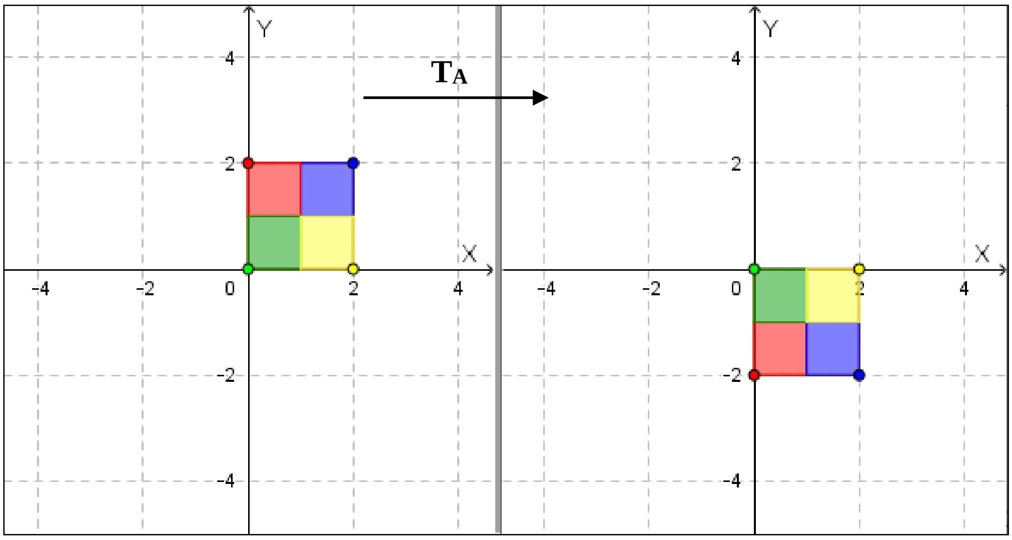
tiene que $\mathbf{T_A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ donde $\mathbf{T_A}(\mathbf{u})$ será la "Reflexión respecto al eje x del vector **u**"
$\qquad\qquad\mathbf{u}\to\mathbf{T_A}(\mathbf{u})$

$$\mathbf{T_A}(\mathbf{u})=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ -y\end{bmatrix}$$

que puede ser representado gráficamente por:

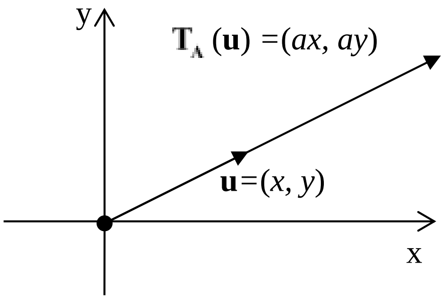


Así, por ejemplo, si consideramos el cuadrado de vértices $(0,0),(0,2),(2,2)$ y $(0,2)$ podemos observar que ocurre si aplicamos $\mathbf{T_A}$

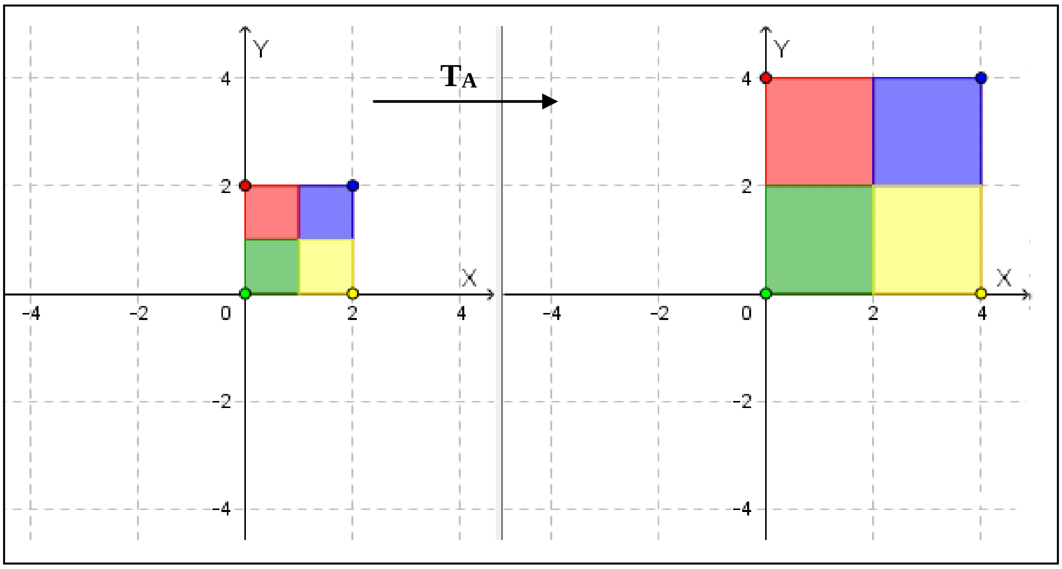


Ahora bien, si en lugar de tener la matriz **A**=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ consideramos la matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ tendremos una dilatación o una contracción según sea el valor de *a*. Más concretamente,

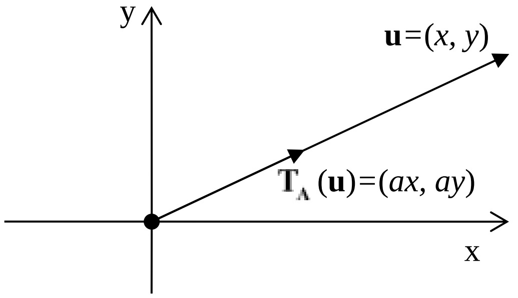
Dilatación: $\mathbf{T_A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ si $a > 0$



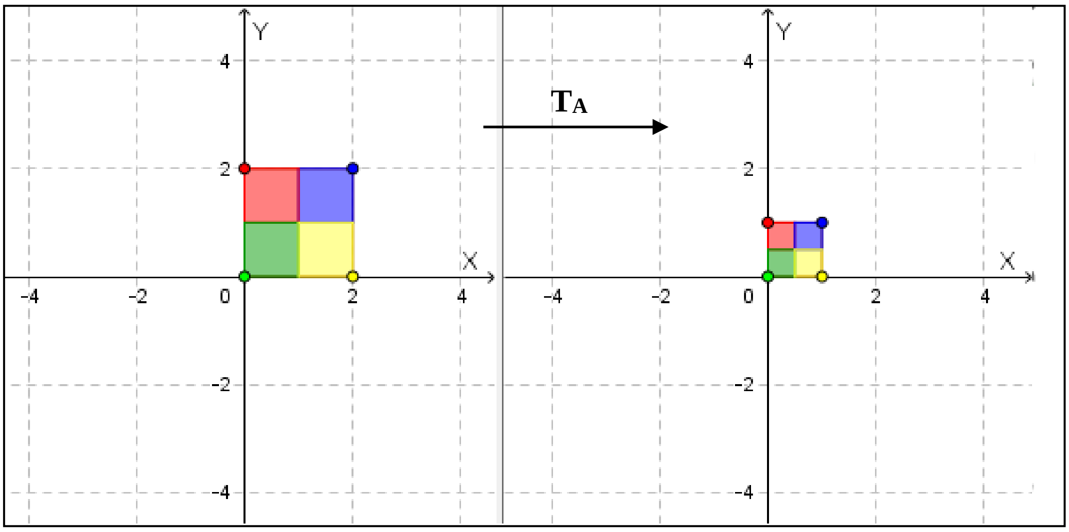
Así, por ejemplo, si consideramos nuevamente el cuadrado de vértices $(0,0), (0,2), (2,2)$ y $(0,2)$ podemos observar qué ocurre si aplicamos **TA** siendo **A**=$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



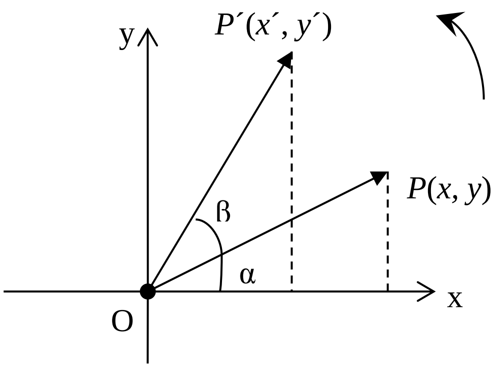
Contracción: $\mathbf{T_A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ si $0 < a < 1$



Entonces si por ejemplo consideramos nuevamente el cuadrado de vértices $(0,0),(0,2),(2,2)$ y $(0,2)$ podemos observar qué ocurre si aplicamos **TA** siendo **A**=$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$



Rotación: Del mismo modo que lo hicimos anteriormente, si ahora a cada punto de $\mathbb{R}^2$ lo rotamos en sentido antihorario según un ángulo β, con vértice en el origen, tenemos según se aprecia en la figura



Si denotamos con r la longitud del segmento OP (que es igual a la del segmento OP') tenemos que:

$$x = r\cos(\alpha) \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\alpha) \tag{1}$$

y entonces

$$x' = r\cos(\alpha+\beta) \qquad y' = r\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta) \tag{2}$$

Teniendo en cuenta las fórmulas para el seno y el coseno de una suma de ángulos se tiene que:

$$x' = r\cos(\alpha)\ \cos(\beta) - r\ \mathrm{sen}(\alpha)\ \mathrm{sen}(\beta)$$
$$y' = r\ \mathrm{sen}(\alpha)\ \cos(\beta) + r\ \cos(\alpha)\ \mathrm{sen}(\beta)$$

Sustituyendo en (1) obtenemos

$$x' = x\cos(\beta) - y\ \mathrm{sen}(\beta) \qquad y' = x\ \mathrm{sen}(\beta) + y\ \cos(\beta)$$

Esta última expresión puede escribirse matricialmente del siguiente modo:

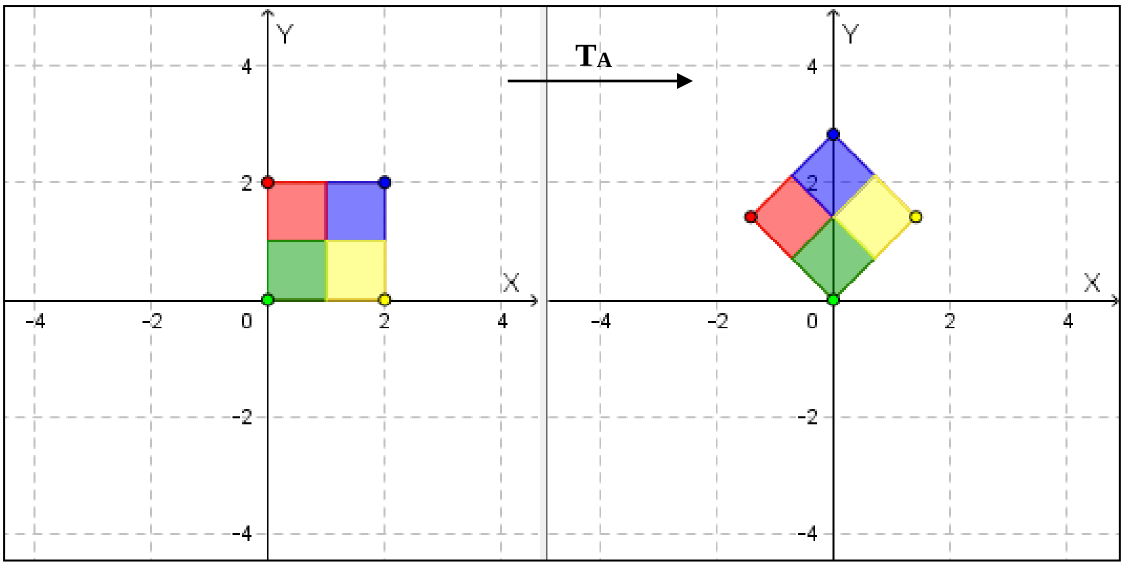
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\mathrm{sen}(\beta) \\ \mathrm{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Notar que el determinante de la matriz **A** (giro en sentido antihorario) es igual a 1.

Luego, si suponemos que $\beta = \frac{\pi}{4}$ resulta $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$ y por lo tanto la se tiene que

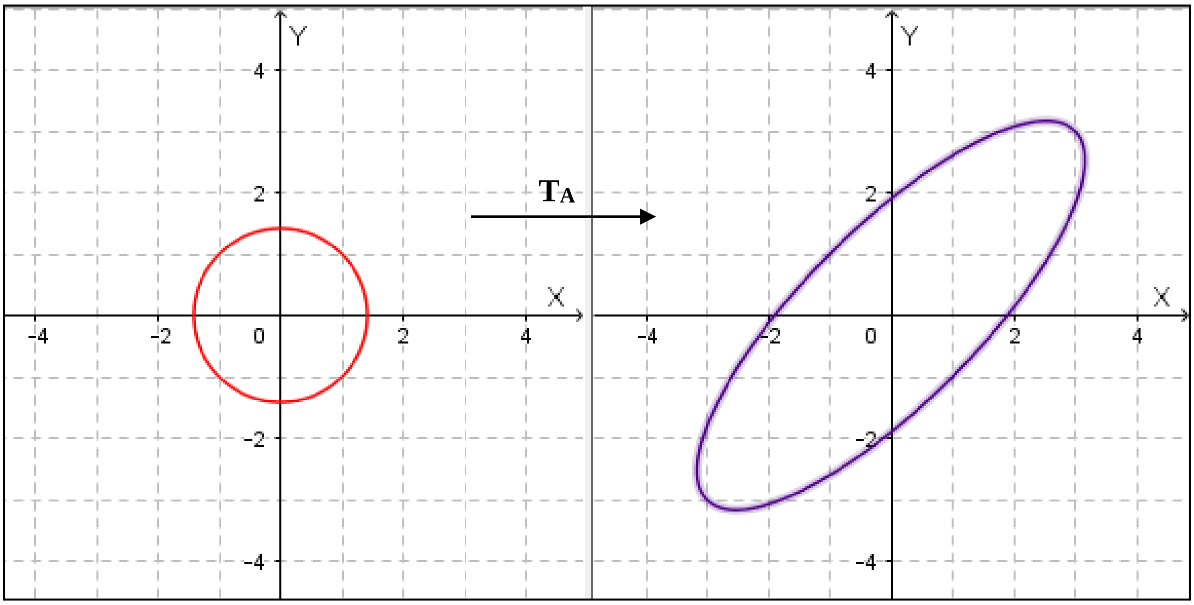
$$\mathbf{T_A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, considerando nuevamente el cuadrado de vértices $(0,0), (0,2), (2,2)$ y $(0,2)$ podemos observar qué ocurre si aplicamos **TA** siendo **A**= $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$



Ejemplo 5

Sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. Consideramos $\mathbf{T_A}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{X} \to \mathbf{A.X}$ y queremos ver el efecto geométrico de esa transformación en los elementos de la Circunferencia de centro (0,0) y radio $\sqrt{2}$.



Sean, por ejemplo, $\mathbf{X}_1=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$; $\mathbf{X}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$; $\mathbf{X}_3=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ y obtengamos $\mathbf{A.X}_1$; $\mathbf{A.X}_2$; $\mathbf{A.X}_3$

$$\mathbf{A.X}_1=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix} \quad \mathbf{A.X}_2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix} \quad \mathbf{A.X}_3=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

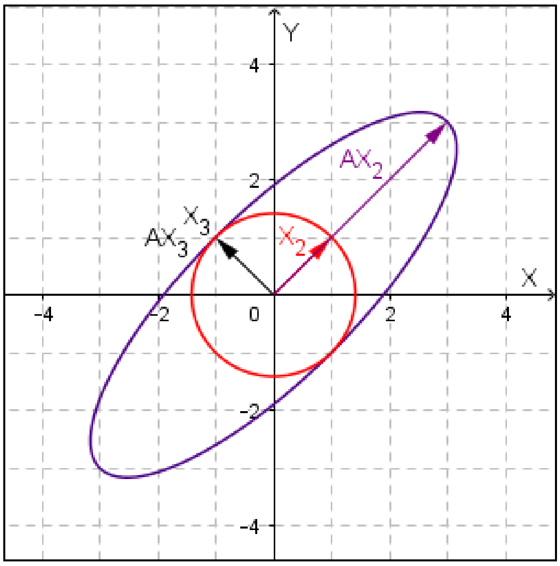
Observar que:

- En el caso de $\mathbf{X}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ se tiene que $\mathbf{A.X}_2=3\mathbf{X}_2$

- En el caso de $\mathbf{X}_3=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ se tiene que $\mathbf{A.X}_3=1\mathbf{X}_3$

¿Para qué $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ se verifica $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$?

¿Siempre es posible hallar un vector que al transformarlo mediante la multiplicación por **A** se obtenga un vector que mantiene la dirección? ¿mantendrá su longitud y/o sentido o se modificarán?



En la próxima sección estudiaremos si existen estos vectores para una matriz $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ dada.

3.3.2. Valores y Vectores Propios

Interesa estudiar si dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existen vectores $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n}$ ($\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$) tal que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{A.X}$ sean múltiplos escalares entre si.

Definición 3.3.2.1 Sea la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1) Un vector no nulo $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ se llama **vector propio** de la matriz **A** si existe algún escalar λ tal que: $\mathbf{A.X} = \lambda.\mathbf{X}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) En caso de existir un vector $\mathbf{X} \neq \bar{\mathbf{0}}$ tal que $\mathbf{A.X} = \lambda.\mathbf{X}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces al escalar λ de lo llama **valor propio** de la matriz **A**.

Nota: Los vectores propios también se llaman **vectores característicos** o **eigenvectores** de la matriz **A**. De la misma forma, a los valores propios también se los designa como **valores característicos** o **eigenvalores** de la matriz **A**.

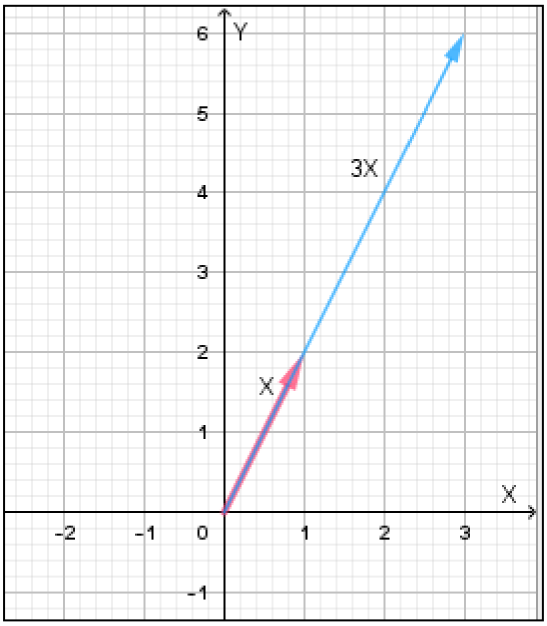
Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. El vector $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un vector propio de la matriz **A** asociado al valor propio $\lambda = 3$.

En efecto $$\mathbf{A.X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3.\mathbf{X}$$

Geométricamente se tiene:

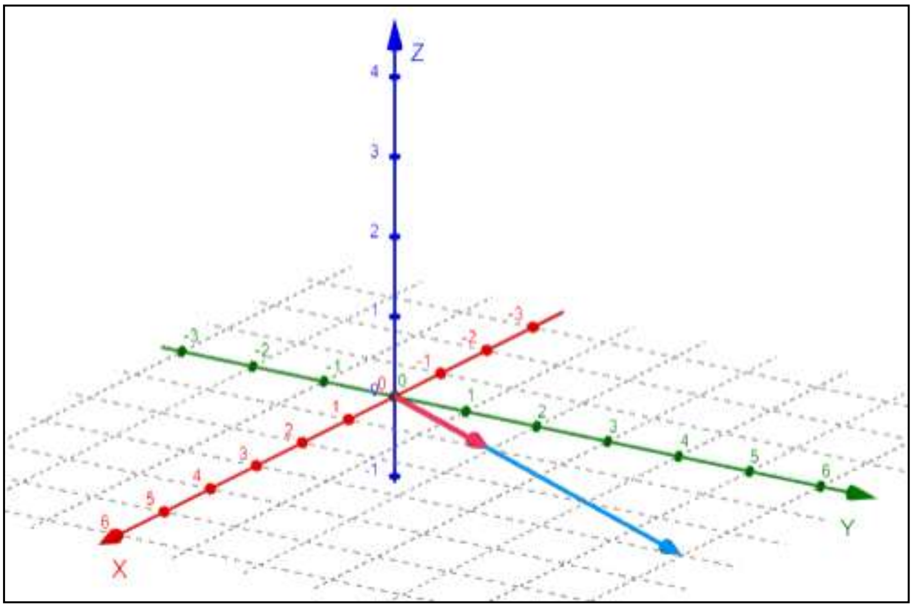


Ejemplo 2

Sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 8 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. El vector $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$ es un vector propio de la matriz **A** asociado al valor propio $\lambda = 3$.

En efecto $\mathbf{A}.\mathbf{X}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 8 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\\ 0\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}=3.\mathbf{X}$

Geométricamente se tiene:



Ejemplo 3

Sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$.

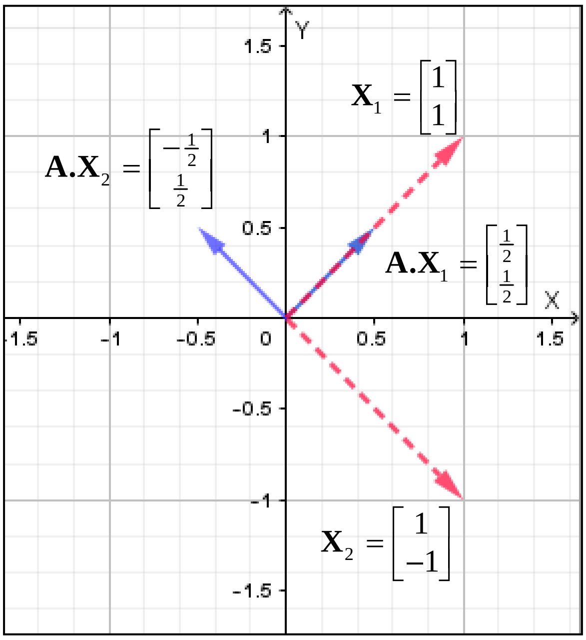
Los vectores $\mathbf{X}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ y $\mathbf{X}_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ son vectores propios de la matriz **A** asociados a los valores propios $\lambda_1=\frac{1}{2}$ y $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ respectivamente.

En efecto

$$\mathbf{A}.\mathbf{X}_1=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}.\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}.\mathbf{X}_1$$

$$\mathbf{A}.\mathbf{X}_2=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\left(-\frac{1}{2}\right).\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\left(-\frac{1}{2}\right).\mathbf{X}_2$$

Geométricamente se tiene:



Observación: En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ la multiplicación por la matriz **A**, mapea a sus vectores propios en vectores ubicados sobre la misma recta que pasa por el origen en la que se ubica **X.**

Dependiendo de la magnitud y signo del valor propio asociado λ, la acción de la matriz **A** sobre **X** hace que éste se comprima o se alargue por un factor λ, con un cambio de sentido si λ es negativo.

3.3.3. Determinación de los Valores Propios de la Matriz A

Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y teniendo en cuenta la sección 3.3.2 surgen las siguientes preguntas:

- ¿Tiene esta matriz valores propios?
- En caso de existir, ¿cómo se determinan los valores propios de **A**?

Comenzaremos por responder el segundo de estos interrogantes.

Teorema 3.3.3.1 Sea la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

λ es valor propio de **A** sí y sólo si $det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$.

Demostración:

De la definición de valor propio, debe existir algún vector **X** no nulo, tal que

$$\mathbf{A.X} = \lambda.\mathbf{X} \tag{1}$$

Recordando que la matriz unidad **I** es elemento neutro para la multiplicación de matrices se tiene que $\mathbf{X} = \mathbf{I}.\mathbf{X}$, entonces la expresión (1) puede escribirse:

$$\mathbf{A}.\mathbf{X} = \lambda.\mathbf{I}.\mathbf{X}$$

Operando se tiene:

$$\left(\lambda.\mathbf{I}.\mathbf{X} - \mathbf{A}.\mathbf{X}\right) = \mathbf{0}$$

$$\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

Para que λ sea un valor propio de la matriz **A** debe existir un vector $\mathbf{X} \neq \bar{\mathbf{0}}$ que satisfaga la ecuación (2). Como se trata de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de igual número de incógnitas que de ecuaciones, para que existan soluciones distintas de la trivial es necesario que la matriz de los coeficientes sea no inversible lo que equivale a decir que su determinante debe ser igual a cero. Esto es:

Existe $\mathbf{X} \neq \bar{\mathbf{0}}$ tal que $\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0}$ sí y sólo si $\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)$ es no inversible sí y sólo si $det\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = 0$. #

Definición 3.3.3.1 Sea la matriz $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
El determinante

$$p(\lambda) = det\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = det\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

se denomina **polinomio característico** de la matriz **A**.

Mientras que la ecuación

$$p(\lambda) = det\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = 0$$

es la llamada **ecuación característica** de la matriz **A**.

Observación: La ecuación característica $p(\lambda) = det\left(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = 0$ es una ecuación algebraica de grado n con coeficiente conductor igual a uno, es decir, una ecuación de la forma:

$$p(\lambda) = \lambda^n + C_{n-1}\,\lambda^{n-1} + C_{n-2}\,\lambda^{n-2} + \cdots + C_1\,\lambda + C_0 = 0$$

Los coeficientes $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1} \in \mathbf{K}$ son funciones de los elementos a_{ij} de la matriz **A.** En particular:

$$C_{n-1} = -\left(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}\right) = -\ Traza(\mathbf{A}) \qquad\qquad C_0 = (-1)^n\, det(\mathbf{A})$$

Si n =2, se tiene $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz 2x2 con ecuación característica:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + C_{2-1}\,\lambda^{2-1} + C_0 = 0 \quad \text{con } C_1 = -(a+d) \quad \text{y } C_0 = (ad\ -\ cb) = det(\mathbf{A})\,.$$

Sustituyendo resulta:

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - cb) = 0$$

Cuando $n > 2$, las funciones que expresan los restantes coeficientes de la ecuación característica no son tan sencillas.

Además, si la ecuación característica carece de soluciones en el cuerpo de trabajo, la matriz **A** no tiene valores propios.

Podemos resumir lo hasta aquí analizado de la búsqueda de los valores propios de una matriz **A** en el siguiente teorema:

Teorema 3.3.3.2 Sean $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz y $\lambda \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- λ es un valor propio de la matriz **A**.
- El sistema de ecuaciones lineales $(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}).\mathbf{X} = \mathbf{0}$ tiene soluciones distintas
- de la trivial.
- Existe $\mathbf{X} \neq \bar{\mathbf{0}}$ tal que $(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}).\mathbf{X} = \mathbf{0}$ es decir tal que $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \lambda.\mathbf{X}$.
- λ es solución de la ecuación característica $p(\lambda) = det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Para investigar la existencia de valores propios de la matriz **A** construimos la matriz $\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda-2) & -1 \\ 0 & (\lambda-2) \end{bmatrix}$ y obtenemos el polinomio característico

$$p(\lambda) = det\,(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 2).(\lambda - 2)\,.$$

Luego la ecuación característica $0 = (\lambda - 2).(\lambda - 2) = (\lambda - 2)^2$ tiene una raíz real doble.

Entonces $\lambda = 2$ es valor propio de **A**.

Ejemplo 2

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Para investigar la existencia de valores propios de la matriz **A** construimos la matriz $\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$ y entonces el polinomio característico resulta:

$$p(\lambda) = det\ (\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 + 1.$$

La ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.

Como el campo de trabajo es $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ diremos entonces que la matriz **A no tiene valores propios**.

Observación: Si se tomara la misma matriz **A** sobre el cuerpo $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ de los números complejos, entonces se obtiene la misma ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$. En este caso, la ecuación sí tiene raíces en el cuerpo: $\lambda_1 = i \quad y \quad \lambda_2 = -i$, que valores propios de **A**.

Ejemplo 3

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Deseaos investigar la existencia de valores propios de la matriz **A** por eso construimos la matriz $\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda - 1) & 0 & 0 \\ -1 & (\lambda - 2) & -1 \\ -1 & 0 & (\lambda - 4) \end{bmatrix}$.

Luego el polinomio característico está dado por:

$$p(\lambda) = det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4).$$

En consecuencia, la ecuación característica es $0 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$ y las raíces de dicha ecuación son: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$. Luego son los valores propios de la matriz **A**.

3.3.4. Determinación de los Vectores Propios de la Matriz A

Conocidos los valores propios de la matriz **A** resta encontrar los vectores propios correspondientes.

Recordando la **Definición 3.3.2.1** se deduce que **X** $(\mathbf{X} \neq \bar{0})$ es vector propio de la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sí y sólo si $(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}).\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}$.

Es decir, que los vectores propios **X** son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogénea cuya matriz de coeficientes es $(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Esto es, los vectores propios son los vectores del subespacio nulo de la matriz $(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A})$.

Luego, para cada λ_i valor propio de **A** tendremos un subespacio $\left\{\mathbf{X} / \ (\lambda_i.\mathbf{I} - \mathbf{A}).\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}\right\}$ asociado a dicho valor propio.

> **Definición 3.3.4.1** Sea la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea λ valor propio de **A**. El conjunto de soluciones de $(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}).\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}$ se denomina **subespacio propio asociado** al valor propio λ y lo denotaremos
>
> $$\mathbf{V}_\lambda = \left\{\mathbf{X} / \ (\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}).\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}\right\}.$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ cuyos valores propios (obtenidos en el Ejemplo 3 de la sección anterior) son $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$.

Nos proponemos hallar los subespacios propios correspondientes a cada uno de dichos valores propios.

Consideremos la matriz $\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda - 1) & 0 & 0 \\ -1 & (\lambda - 2) & -1 \\ -1 & 0 & (\lambda - 4) \end{bmatrix}$ y busquemos para cada valor propio (λ_i) de **A,** los vectores $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ tal que

$$(\lambda_i.\mathbf{I} - \mathbf{A}).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} (\lambda_i - 1) & 0 & 0 \\ -1 & (\lambda_i - 2) & -1 \\ -1 & 0 & (\lambda_i - 4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

a) Para *i*=1, $\lambda_1 = 1$, reemplazando λ_i por 1 en (*) se obtiene el sistema

$$(1.\mathbf{I} - \mathbf{A}).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolviéndolo, hallamos que el conjunto de soluciones es $\mathbf{V}_{\lambda_1=1} = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$\mathbf{V}_1$ es el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$.

b) Para *i*=2, $\lambda_2 = 2$, reemplazando λ_i por 2 en (*) se obtiene el sistema

$$\left(2.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviéndolo, hallamos que el conjunto de soluciones es $\mathbf{V}_{\lambda_2=2} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$\mathbf{V}_2$ es el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 2$.

c) Para *i*=3, $\lambda_3 = 4$, reemplazando λ_i por 4 en (*) se obtiene el sistema

$$\left(4.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviéndolo, hallamos que el conjunto de soluciones es $\mathbf{V}_{\lambda_3=4} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$\mathbf{V}_4$ es el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_3 = 4$.

Ejemplo 2

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$.

Construimos la matriz $\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1) \end{bmatrix}$ y obtenemos que el polinomio característico de $\mathbf{A}$ es $p(\lambda) = det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda(\lambda-1)^2$.

En consecuencia, la ecuación característica de la matríz **A** resulta $0 = \lambda(\lambda-1)^2$.

Luego los valores propios de **A** son $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 1$. Como se puede observar $\lambda_2 = 1$ es un valor propio de multiplicidad 2.

Ahora, nos proponemos hallar los subespacios propios correspondientes a cada uno de los valores propios.

a) Para $\lambda_1 = 0$, reemplazando λ por 1 se obtiene el sistema

$$(0.\mathbf{I} - \mathbf{A}).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema está dada por el subespacio propio asociado al valor propio 0: $\mathbf{V}_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

b) Para $\lambda_2 = 1$, reemplazando λ por 1 se obtiene el sistema

$$(1.\mathbf{I} - \mathbf{A}).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El subespacio propio asociado al valor propio 1 está dado por: $\mathbf{V}_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Teorema 3.3.4.1 Sea la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_r$ son vectores propios que corresponden a valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ de la matriz **A**, entonces el conjunto $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_r\}$ es linealmente independiente.

Demostración:

Supongamos que $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_r\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Entonces podemos pensar que hay un índice mínimo *p* tal que $\mathbf{X}_{p+1}$ es una combinación lineal de los vectores precedentes (que son linealmente independientes) y que existen escalares $c_1, c_2, ..., c_p$ tales que

$$c_1\,\mathbf{X}_1 + c_2\,\mathbf{X}_2 + \cdots + c_p\,\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_{p+1} \qquad (1)$$

Multiplicando a ambos lados de (1) por **A** y recordando el hecho de que $\mathbf{A}.\mathbf{X}_k = \lambda_k.\mathbf{X}_k$ para todo *k*, obtenemos:

$$c_1\,\mathbf{A}.\mathbf{X}_1 + c_2\,\mathbf{A}.\mathbf{X}_2 + \cdots + c_p\,\mathbf{A}.\mathbf{X}_p = \mathbf{A}.\mathbf{X}_{p+1}$$

$$c_1\lambda_1.\mathbf{X}_1 + c_2\lambda_2.\mathbf{X}_2 + \cdots + c_p\lambda_p.\mathbf{X}_p = \lambda_{p+1}.\mathbf{X}_{p+1} \qquad (2)$$

Por otro lado, multiplicando a ambos miembros de (1) por λ_{p+1} y restando ese resultado a (2), se tiene

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1}).\mathbf{X}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{p+1}).\mathbf{X}_2 + \cdots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1}).\mathbf{X}_p = \bar{\mathbf{0}}$$

Dado que $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_p\}$ es linealmente independiente, entonces $c_i = 0$ ó $(\lambda_i - \lambda_{p+1}) = 0 \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, p$.

Pero como los valores propios son distintos se tiene que $c_i = 0 \ \forall i = 1,2,\ldots,p$, luego (1) indica que $\mathbf{X}_{p+1} = \bar{\mathbf{0}}$, lo cual contradice el hecho de que sea vector propio. Por lo tanto, $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_r\}$ no puede ser linealmente dependiente como se supuso y por ende $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_r\}$ debe ser linealmente independiente. #

3.4 Diagonalización de una Matriz

Definición 3.4.1 Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Diremos que la matriz **A** es diagonalizable si existe una matriz inversible **P** tal que $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (matriz diagonal).

Se expresa que la matriz **P** diagonaliza a la matriz **A**.

Observar que el hecho que una matriz **A** sea diagonalizable, permite que dicha matriz pueda escribirse con una factorización útil de la forma $\mathbf{A} = \mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{-1}$. Esta factorización nos permite, por ejemplo, calcular rápidamente $\mathbf{A}^k$ para valores grandes de *k*.

Los valores y vectores propios de una matriz y el hecho que ésta sea diagonalizable están íntimamente vinculados. En el siguiente teorema se establece una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea diagonalizable.

Teorema 3.4.1 Sea la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

A es diagonalizable
sí y sólo si
A tiene "*n*" vectores propios linealmente independientes.

Demostración:

$\Rightarrow$) Supondremos que **A** es **diagonalizable** y probaremos que **A** tiene "*n*" vectores propios linealmente independientes.

Como **A** es diagonalizable, entonces existe una matriz invertible $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ tal que

$\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ matriz diagonal.

De la expresión $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$ multiplicando a ambos miembros por **P**, tenemos que $\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{P}.\mathbf{D}$. Esto es:

$$\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{P}.\mathbf{D}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Si se denotan con $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, ..., \mathbf{p}_n$ a los vectores columna de la matriz **P**, esto es

$$\mathbf{P}=[\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{p}_n]=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & & \mathbf{p}_n \end{array} \end{array}$$

y se considera el algoritmo de la multiplicación de matrices, se tiene que:

$$\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{A}.[\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{p}_n]=[\mathbf{A}.\mathbf{p}_1\ \mathbf{A}.\mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{A}.\mathbf{p}_n]. \qquad (2)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el último miembro de la expresión (1), la matriz $\mathbf{A}.\mathbf{P}$ puede ser expresada en función de sus sucesivas columnas, esto es:

$$\mathbf{A}.\mathbf{P}=[\lambda_1.\mathbf{p}_1\ \lambda_2.\mathbf{p}_2\ \cdots\ \lambda_n.\mathbf{p}_n]. \qquad (3)$$

Luego teniendo en cuenta (2) y (3) se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}.\mathbf{p_1} &= \lambda_1.\mathbf{p_1} \\ \mathbf{A}.\mathbf{p_2} &= \lambda_2.\mathbf{p_2} \\ &\vdots \\ \mathbf{A}.\mathbf{p}_n &= \lambda_n.\mathbf{p}_n \end{aligned} \qquad (4)$$

Como **P** es una matriz inversible entonces

- sus vectores columna no son cero,
- sus columnas $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, ..., \mathbf{p}_n$ son linealmente independientes.

Entonces de (4) se tiene que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son valores propios de la matriz **A** y que $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, ..., \mathbf{p}_n$ son sus vectores propios asociados.

Luego concluimos que **A** tiene "*n*" vectores propios linealmente independientes, que es lo que queríamos demostrar.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que **A** tiene "*n*" vectores propios linealmente independientes, probaremos que **A** es diagonalizable.

Por hipótesis **A** tiene "*n*" vectores propios linealmente independientes, sean $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, ..., \mathbf{p}_n$ dichos vectores y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios correspondientes.

Consideremos la matriz **P** que tiene como columnas los vectores $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, ..., \mathbf{p}_n$. Luego, $\mathbf{A.P}$ es la matriz cuyas columnas son $\mathbf{A.p}_1$, $\mathbf{A.p}_2$,…, $\mathbf{A.p}_n$.

Pero $\mathbf{A.p_1} = \lambda_1 .\mathbf{p_1}$, $\mathbf{A.p_2} = \lambda_2 .\mathbf{p_2}$,……, $\mathbf{A.p}_n = \lambda_n .\mathbf{p}_n$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A.P} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A.p}_1 & \mathbf{A.p}_2 & \cdots & \mathbf{A.p}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 .\mathbf{p}_1 & \lambda_2 .\mathbf{p}_2 & \cdots & \lambda_n .\mathbf{p}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{P.D}
\end{aligned}
$$

Donde:

- La matriz **D** es una matriz diagonal que tiene a los valores propios λ_1, λ_2 ,…, λ_n de **A** como los elementos de su diagonal principal.

- Los vectores columna de **P** son vectores propios, entonces son linealmente independientes (**Teorema 3.3.4.1**). Luego **P** es una matriz invertible.

Por lo tanto, la expresión $\mathbf{A.P} = \mathbf{P.D}$ se puede escribir como $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A.P} = \mathbf{D}$ lo cual implica **A es diagonalizable**. #

El teorema que acabamos de ver, brinda un camino para investigar si una matriz es o no diagonalizable.

Los pasos a seguir para diagonalizar una matriz son:

1. Encontrar "n" vectores propios linealmente independientes de la matriz **A,** sean estos $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, ..., \mathbf{p}_n$.

2. Formar la matriz **P** con $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, ..., \mathbf{p}_n$ como sus matrices columna.

3. El producto $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A.P}$ dará por resultado una matriz diagonal donde los elementos de su diagonal principal son los valores propios de la propia matriz.

El problema básico es entonces el encontrar "n" vectores propios linealmente independientes.

Los siguientes enunciados, que no demostraremos, son importantes cuando se analiza esa posibilidad:

Teorema 3.4.2 Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se verifican las afirmaciones siguientes:

1) Si λ un valor propio de **A**. La dimensión del subespacio propio asociado $\mathbf{V}_\lambda$ es menor o igual que la multiplicidad de λ como raíz de la ecuación característica.

2) Si $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_r$ son subespacios propios, asociados a valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ de **A** y $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_r$ son las respectivas bases de $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_r$ entonces $\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2 \cup \cdots \cup \mathbf{B}_r$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

3) La suma de subespacios propios es directa, es decir $\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_r$.

El siguiente teorema caracteriza las matrices diagonalizables:

Teorema 3.4.3 Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

A es diagonalizable

sí y sólo si

se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) La ecuación característica de **A** tiene todas sus raíces en $\mathbb{R}$.

2) La multiplicidad de cada valor propio, como raíz de la ecuación característica, es igual a la dimensión del subespacio propio asociado.

Demostración:

$\Leftarrow$) De la **Definición 3.3.3.1** de la ecuación característica de una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se observó que ésta resulta ser una ecuación de grado *n*. Entonces:

a) Si todas las raíces son reales y distintas, sean éstas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Es decir:

$$0 = p(\lambda) = det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n) .$$

Los vectores propios asociados $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \dots, \mathbf{p}_n$ forman un conjunto de "*n*" vectores linealmente independiente (**Teorema 3.3.4.1**). Luego por el **Teorema 3.4.1**, **A** es una matriz diagonalizable.

b) Supongamos que todas las raíces de la ecuación característica están en el cuerpo $\mathbb{R}$**,** sean éstas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ con multiplicidades $d_1, d_2, \dots, d_r$ es decir:

$$0 = p(\lambda) = det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2}\dots(\lambda - \lambda_r)^{d_r} \quad \text{con} \quad d_1 + d_2 + \cdots + d_r = n$$

Si se satisface 2), entonces $\dim \mathbf{V}_{\lambda_i} = d_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, r$ entonces teniendo en cuenta el enunciado 3) del **Teorema 3.4.2**:

$$dim \left(\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_r \right) = d_1 + d_2 + \cdots + d_r = n$$

y además, por el enunciado 2) del mismo teorema, la unión de las bases de los subespacios propios nos provee de *n* vectores propios linealmente independientes, de donde resulta que **A** es diagonalizable.

$\Rightarrow$) Veremos que si no se satisfacen las condiciones 1) ó 2), la matriz **A** resulta no diagonalizabe.

a) Si no se cumple 2) entonces algún subespacio propio supongamos $\mathbf{V}_{\lambda_i}$ es tal que tiene dimensión menor que la multiplicidad de λ_i como raíz de la ecuación característica. Es decir: $\dim \mathbf{V}_{\lambda_i} < d_i$. Luego $dim\left(\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_r\right) < n$ y no tenemos suficientes vectores propios linealmente independientes para armar la matriz **P**. Por lo tanto, la matriz **A** no es diagonalizable.

b) Si la ecuación característica tiene raíces fuera del cuerpo $\mathbb{R}$**,** éstos por la **Definición 3.3.2** no son valores propios de la matriz **A**. Luego la suma de las multiplicidades de los valores propios λ_i como raíces de la ecuación característica resulta $d_1 + d_2 + \cdots + d_r < n$. En consecuencia, no contamos con suficientes vectores propios linealmente independientes para armar la matriz **P** y por lo tanto **A** no es diagonalizable. #

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

En el ejemplo 3 de la Sección **3.3.3**, obtuvimos la ecuación característica $0 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$ y los valores propios de **A**: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$ los tres son raíces simples de la ecuación característica.

En el ejemplo 1 de la Sección **3.3.4** se obtuvieron los correspondientes subespacios propios asociados, de dimensión 1.

$$\mathbf{V}_{\lambda_1=1} = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad , \quad \mathbf{V}_{\lambda_2=2} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_{\lambda_3=4} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Dado que se satisfacen los ítems 1) y 2) del **Teorema 3.4.3**, se tiene que **A** es diagonalizable.

Se construye la matriz **P** -cuyas columnas son los generadores de los respectivos subespacios propios-

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego se verifica con facilidad que $\mathbf{P}^{-1}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{P} = \mathbf{D}$**,** en efecto:

$$\mathbf{P}^{-1}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-\tfrac{1}{3} & 0 & 0\\ \tfrac{1}{2} & 1 & -\tfrac{1}{2}\\ \tfrac{1}{6} & 0 & \tfrac{1}{2}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\mathbf{D}.$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$.

La ecuación característica de **A** es:

$$0=det\left(\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)=det\left(\begin{bmatrix}\lambda-1 & -4\\ -1 & \lambda-1\end{bmatrix}\right)=\left(\lambda-1\right)^2-4=\lambda^2-2\lambda-3$$

Los valores propios de **A** son: $\lambda_1=-1 \;\; y \;\; \lambda_2=3$.

Los subespacios propios correspondientes son:

a) Para $\lambda_1=-1$ se plantea $\left((-1).\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X}=\bar{\mathbf{0}}$ es decir

$$\left(\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & -4\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

de donde se obtiene que $\mathbf{V}_{\lambda_1=-1}=\left\langle\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}\right\rangle$.

b) Para $\lambda_2=3$ se plantea $\left(3.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X}=\bar{\mathbf{0}}$ es decir

$$\left(\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

de donde se obtiene que $\mathbf{V}_{\lambda_2=3}=\left\langle\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}\right\rangle$.

La ecuación característica tiene dos raíces reales y distintas cumpliéndose las condiciones del **Teorema 3.4.3** luego es posible formar una matriz **P** cuyas columnas sean vectores propios linealmente independientes:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ siendo } \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

luego se verifica que: $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\,.\,\mathbf{P} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}$.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Se desea analizar si **A** es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar matrices **P** y **D** (diagonal) tales que $\mathbf{P}^{-1}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

1. Determinación de la ecuación característica y de los valores propios de **A**:

$$0 = det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}\right)$$

$$0 = (\lambda-2).(\lambda-3)^2$$

Las raíces de esta ecuación son los escalares $\lambda_1 = 2 \;\; y \;\; \lambda_2 = 3$. Siendo λ_1 una raíz simple y λ_2 es raíz doble.

2. Determinación de los subespacios propios:

a) Para $\lambda_1 = 2$ se plantea $\left(2.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ obteniéndose el subespacio propio

$$\mathbf{V}_{\lambda_1=2} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \;\; dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_1=2}\right) = 1$$

b) Para $\lambda_2 = 3$ se plantea $\left(3.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ obteniéndose el subespacio propio

$\mathbf{V}_{\lambda_2=3} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, dado que los vectores generadores son LI se tiene que $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_2=3}\right) = 2$

3. Por cumplirse las condiciones del **Teorema 3.4.3**, **A** es diagonalizable y la matriz **P** no es sino la que tiene por columnas los vectores propios hallados en 2).

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \text{ obteniéndose } \mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Luego resulta que:

$$\mathbf{P^{-1}.A.P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{.}\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\mathbf{.}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\mathbf{D}.$$

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$. Se desea analizar si **A** es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar matrices **P** y **D** (diagonal) tales que $\mathbf{P^{-1}.A.P}=\mathbf{D}$.

1. Determinación de la ecuación característica y de los valores propios de **A**:

$$0=det(\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A})=det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\right) \quad\Rightarrow\quad 0=(\lambda-2).(\lambda^2+1)$$

la ecuación característica tiene una sola raíz real $\lambda_1=2$ y dos raíces complejas conjugadas $\lambda_2=i$ y $\lambda_3=-i$. Luego, por no tener todas las raíces en $\mathbb{R}$, **A** no es diagonalizable.

Ejemplo 5

Sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ -4 & -6 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$. Se desea analizar si **A** es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar matrices **P** y **D** (diagonal) tales que $\mathbf{P^{-1}.A.P}=\mathbf{D}$.

1. Determinación de la ecuación característica y de los valores propios de **A**:

$$0=det(\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A})=det\left(\begin{bmatrix}\lambda-2 & -4 & -3\\ 4 & \lambda+6 & 3\\ -3 & -3 & \lambda-1\end{bmatrix}\right)$$

$$0=(\lambda-1).(\lambda+2)^2$$

Las raíces de esta ecuación son: $\lambda_1=1$ raíz simple y $\lambda_2=-2$ raíz doble.

2. Determinación de los subespacios propios:

a) Para $\lambda_1=1$ se plantea $(1.\mathbf{I}-\mathbf{A}).\mathbf{X}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -3\\ 4 & 7 & 3\\ -3 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ obteniéndose el subespacio propio

$$\mathbf{V}_{\lambda_1=1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle,\ dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_1=1}\right) = 1$$

b) Para $\lambda_2 = -2$ se plantea $\left(\mathbf{(}\text{-}2\mathbf{).I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{.X} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -3 \\ 4 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ obteniéndose el subespacio propio

$$\mathbf{V}_{\lambda_2=-2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle,\ dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_2=-2}\right) = 1.$$

Observar que $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_2=-2}\right) = 1 < 2$ (multipliciad de $\lambda_2 = -2$ como raiz de la ecuación característica). Luego como no se satisface el ítem 2) del **Teorema 3.4.3**, **A** no es diagonalizable.

Ejemplo 6

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Se desea analizar si **A** es diagonalizable.

1. Determinación de la ecuación característica y de los valores propios de **A**:

$$0 = det\mathbf{(}\lambda\mathbf{.I} - \mathbf{A)} = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}\right)$$

$$0 = \mathbf{(}\lambda + 2\mathbf{).(}\lambda - 4\mathbf{).(}\lambda + 1\mathbf{)}$$

Las raíces (simples) de esta ecuación son: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ y $\lambda_3 = -1$.

2. Determinación de los subespacios propios:

Planteando $\left(\lambda_i\mathbf{.I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{.X} = \bar{\mathbf{0}}$ para $i = 1, 2, 3$ se obtiene que:

$$\left(\lambda_i\mathbf{.I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{.X} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{(}\lambda_i + 2\mathbf{)} & 0 \\ 2 & 0 & \mathbf{(}\lambda_i - 3\mathbf{)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ✓ Para $\lambda_1 = -2$, se tiene que $\mathbf{V}_{\lambda_1=-2} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ y $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_1=-2}\right) = 1$.

- ✓ Para $\lambda_2 = 4$, se tiene que $\mathbf{V}_{\lambda_2=4} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ y $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_2=4}\right) = 1$.
- ✓ Finalmente, para $\lambda_3 = -1$, se tiene que $\mathbf{V}_{\lambda_3=-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ y $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_3=-1}\right) = 1$.

Como $dim\,\mathbf{V}_{\lambda_j} =$ multipliciad de λ_j como raiz de la ecuación característica, **A** es diagonalizable.

Ejemplo 7

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, se desea analizar si **A** es una matriz diagonalizable.

1. Determinación de la ecuación característica y de los valores propios de **A**:

La ecuación característica está dada por: $0 = det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda+2 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}\right)$

Calculamos el determinando haciendo el desarrollo por cofactores por 3er columna (o por 3er fila):

$$0 = (\lambda-1)\left[(\lambda+2)^2 - 9\right] = (\lambda-1)\left[\lambda^2 + 4\lambda - 5\right] = (\lambda-1)^2(\lambda+5)$$

Entonces los valores propios de **A** son: $\lambda = 1$ raíz doble y $\lambda = -5$ raíz simple.

2. Determinación de los subespacios propios:

Para $\lambda = 1$ se plantea:

$\left(1.\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ obteniéndose el subespacio propio $\mathrm{V}_{\lambda=1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. Luego una base del subespacio propio es $B_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ y por lo tanto $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda=1}\right) = 2$.

Para $\lambda = -5$ se plantea:

$\left((-5).\mathbf{I} - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ obteniéndose el subespacio propio $\mathbf{V}_{\lambda=-5} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$. Luego una base del subespacio propio es $B_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ y por lo tanto $dim\left(\mathbf{V}_{\lambda=-5}\right) = 1$.

Como $dim\,\mathbf{V}_{\lambda_j} =$ multipliciad de λ_j como raiz de la ecuación característica, **A** es diagonalizable.

3.5 Diagonalización Ortogonal de una Matriz

Definición 3.5.1 Una matriz no singular **P** (o invertible), es una **matriz ortogonal** si $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}$.

Observación: De la definición anterior se deduce que **P** es una matriz ortogonal si $\mathbf{P}\,.\,\mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}\,.\,\mathbf{P} = \mathbf{I}$ (Siendo $\mathbf{I} = \mathbf{I}_n$ la matriz identidad $n \times n$).

Teorema 3.5.1 Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) **P** es una matriz ortogonal.
2) Los vectores filas de **P** forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$ con el producto interno estándar.
3) Los vectores columna de **P** forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$ con el producto interno estándar.

Demostración:

Si bien no nos detendremos en la demostración completa de este teorema, mostraremos a modeo de ejemplo 1) $\Leftrightarrow$ 2). Por hipótesis se tiene que P es una matriz ortogonal, esto es $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}$ y además $\mathbf{P}\,.\,\mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}\,.\,\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Si consideramos que $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n\end{bmatrix}$ siendo $\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{p}_n$ los vectores fila, luego

$$\mathbf{P}\,.\,\mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n\end{bmatrix} \boldsymbol{.} \begin{bmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n\end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \boldsymbol{.} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$1 = p_{i1}^2 + p_{i2}^2 + \cdots + p_{in}^2 = \mathbf{p}_i \boldsymbol{\cdot} \mathbf{p}_i$$

$$0 = p_{i1}\, p_{j1} + p_{i2}\, p_{j2} + \cdots + p_{in}\, p_{jn} = \mathbf{p}_i \boldsymbol{\cdot} \mathbf{p}_j$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{p}_i \boldsymbol{\cdot} \mathbf{p}_j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Luego los vectores fila $\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{p}_n$ forman una conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$ con el producto interno estándar.#

NOTA: Las propiedades enunciadas parecen sugerir nombrar a **P** "matriz ortonormal" en lugar de "matriz ortogonal". Sin embargo, siguiendo la mayoría de la bibliografía se la designará "matriz ortogonal".

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$.

La matriz **P** resulta ortogonal para cualquier valor de β pues:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}} &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \text{sen}(\beta) \\ -\text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\beta) + \text{sen}^2(\beta) & \cos(\beta)\text{sen}(\beta) - \text{sen}(\beta)\cos(\beta) \\ \text{sen}(\beta)\cos(\beta) - \cos(\beta)\text{sen}(\beta) & \cos^2(\beta) + \text{sen}^2(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

y además define, como ya se mencionó anteriormente, en $\mathbb{R}^2$ el operador $\begin{aligned} \text{T}_{\mathbf{P}} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{X} &\to \mathbf{P}.\mathbf{X} \end{aligned}$.

El efecto geométrico de esta transformación es realizar una rotación en sentido antihorario en un ángulo β.

Ejemplo 2

Sea la matriz $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Se verifica con facilidad que la matriz **P** resulta ortogonal, pues:

$$\mathbf{P}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ del ejemplo 6 del ítem anterior. El conjunto de vectores propios obtenidos $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ resulta un conjunto ortogonal.

Si dichos vectores son normalizados se tiene un conjunto ortonormal de vectores propios de **A**: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}$.

Luego la matriz $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ es una matriz ortogonal pues:

$$\mathbf{P.P^T} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

Sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ del ejemplo 7 del ítem anterior.

El conjunto de vectores propios obtenidos $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ resulta un conjunto ortogonal.

Si dichos vectores son normalizados se tiene un conjunto ortonormal de vectores propios de **A**: $\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Luego la matriz $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz ortogonal pues:

$$\mathbf{P.P^T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición 3.5.2 Sea $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Diremos que **A** es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz **P** ortogonal tal que $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{D}$ siendo **D** una matriz diagonal.

Se expresa que la matriz **P** diagonaliza ortogonalmente a la matriz **A**.

El siguiente Teorema asegura que, dada una matriz simétrica, ella es diagonalizable ortogonalmente.

Teorema 3.5.2 Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1) **A** es diagonalizable ortogonalmente

2) **A** tiene un conjunto ortonormal de "n" vectores propios.

3) **A** es simétrica.

Demostración:
Si bien no nos detendremos en la demostración completa de este teorema, mostraremos ciertas implicaciones cuya demostración es sencilla.

$2) \Rightarrow 3)$ **A** diagonaliza ortogonalmente si existe una matriz **P** ortogonal tal que $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$. Por ser **P** ortogonal se tiene que $\mathbf{P}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}.\mathbf{P} = \mathbf{I}$ resultando:

$\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$ multiplicamos a izuiqerda por **P** y a derecha por $\mathbf{P}^{\mathbf{T}}$

$\mathbf{A} = \mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}}$ tomando transpuesta, se tiene que

$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \left(\mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}}\right)^{\mathbf{T}} = \mathbf{P}.\mathbf{D}^{\mathbf{T}}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}}$ por ser D diagonal, $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\mathbf{T}}$ luego

$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}$

Luego **A** es una **matriz simétrica**.

$1) \Rightarrow 2)$ Por hipótesis el ser **A** diagonalizable ortogonalmente implica que existe una matriz **P** tal que $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}}$ *y* $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$. Por **Teorema 3.4.1**, **A** tiene "*n*" vectores propios linealmente independientes los que constituyen las columnas de la matriz de **P**. Pero al ser **P** ortogonal, sus columnas, y por ende, los vectores propios de **A** forman un conjunto ortonormal (**Teorema 3.5.1**). #

También son importantes las siguientes propiedades de las matrices simétricas.

Proposición 3.5.1 Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si **A** es una matriz simétrica, entonces:

1) Todos sus valores propios son reales

2) Los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

Demostración: Sólo demostraremos el ítem 2).

Supongamos que $\mathbf{u}$ es un vector propio de **A** asociado al valor propio λ_1 y $\mathbf{v}$ lo sea al valor propio asociado λ_2. Recordando propiedades del producto interno estándar de $\mathbb{R}^{n \times 1}$ y teniendo en cuenta que $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ por ser matriz simétrica, planteamos:

$$\left(\mathbf{Au}/\mathbf{v}\right) = \left(\mathbf{Au}\right)\bullet\mathbf{v} = \left(\mathbf{Au}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{v} = \left(\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{v} = \left(\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{A}\mathbf{v}\right) = \mathbf{u}^{\mathbf{T}}.\left(\mathbf{A}\mathbf{v}\right) = \left(\mathbf{u}/\mathbf{A}\mathbf{v}\right)$$

Entonces $\left(\mathbf{Au}/\mathbf{v}\right) = \left(\mathbf{u}/\mathbf{A}\mathbf{v}\right)$.

Luego resulta:

Por ser **u** vector propio de **A**

$$\left(\mathbf{Au}/\mathbf{v}\right)=\left(\lambda_1\,\mathbf{u}/\mathbf{v}\right)=\left(\lambda_1\,\mathbf{u}\right)\bullet\mathbf{v}=\left(\lambda_1\,\mathbf{u}\right)^{\mathbf{T}}\,\mathbf{v}=\left(\lambda_1\,\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{v}=\lambda_1\,\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{v}=\lambda_1\left(\mathbf{u}/\mathbf{v}\right)$$

Por ser **v** vector propio de **A**

$$\left(\mathbf{u}/\mathbf{A}\,\mathbf{v}\right)=\left(\mathbf{u}/\lambda_2\,\mathbf{v}\right)=\mathbf{u}\bullet\left(\lambda_2\,\mathbf{v}\right)=\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\left(\lambda_2\,\mathbf{v}\right)=\lambda_2\,\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{v}=\lambda_2\left(\mathbf{u}/\mathbf{v}\right)$$

Restando miembro a miembro se tiene $\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\left(\mathbf{u}/\mathbf{v}\right)=0$.

Como $\lambda_1\neq\lambda_2$ debe ser $\left(\mathbf{u}/\mathbf{v}\right)=0$, luego **u** y **v** son ortogonales. #

3.5.1. Procedimiento a tener en cuenta en la diagonalización ortogonal de una matriz

Sea $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica a la cual se quiere diagonalizar ortogonalmente mediante una matriz **P**. Para ello, se proponen los siguientes pasos:

1) Determinación de la ecuación característica $det(\lambda\,\mathbf{I}\text{-}\,\mathbf{A})=0$ y de sus raíces. Las raíces serán todas reales.

2) Para cada valor propio λ_j de $\mathbf{A}$, de multiplicidad d_j, se establece una base de d_j vectores propios para el subespacio propio $\left(\lambda_j\,.\mathbf{I}-\mathbf{A}\right).\mathbf{X}=\overline{\mathbf{0}}$.

3) Para cada subespacio propio, se ortonormaliza mediante el proceso de Gram- Schmidt la base obtenida en el paso 2). Por **Teorema 3.4.2 ítem 2)**, la unión de dichas bases determinan un conjunto de vectores linealmente independientes de **A** que en este caso además son ortonormales.

4) Se forma la matriz **P** con los "*n*" vectores propios linealmente independientes determinados en el paso 3). La matriz **P** así construida es una matriz ortogonal tal que $\mathbf{P}^{-1}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{P}=\mathbf{D}$ es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de **A**.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$. Como **A** es simétrica, sabemos que diagonaliza ortogonalmente.

Entonces se quiere hallar la matriz **P** ortogonal que diagonaliza a **A**.

1 Determinación de la ecuación característica y obtención de los valores propios de **A**:

$$0 = det\left(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

Ecuación característica $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$.

Valores propios $\lambda_1 = -1$ (raíz doble)
$\lambda_2 = 2$ (raíz simple)

2 Determinación de los subespacios propios y obtención de una base de cada uno de ellos:

$$\mathbf{V}_{\lambda_1=-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad B_{\mathbf{V}_{\lambda_1}} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \quad dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_1}\right) = 2$$

$$\mathbf{V}_{\lambda_2=2} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad B_{\mathbf{V}_{\lambda_2}} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad dim\left(\mathbf{V}_{\lambda_2}\right) = 1$$

3 Aplicando a la base de $\mathbf{V}_{\lambda_1}$ el proceso de ortogonalización de Gram- Schmidt y posterior normalizado obtenemos $\mathbf{B}_1$ una base ortonormal para dicho subespacio propio.

$$\mathbf{B}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

Por otro lado, una base ortonormal de $\mathbf{V}_{\lambda_2}$ es $\mathbf{B}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

4 Construcción de la matriz ortogonal **P**:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ verificándose que } \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

luego $\mathbf{P}^{\mathbf{T}} . \mathbf{A} . \mathbf{P} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3.5.2. Algunas Aplicaciones

Los vectores y valores propios de una matriz proporcionan una herramienta sumamente valiosa para la solución e interpretación de muchos problemas de matemática aplicada que se presentan no sólo en Ingeniería, sino también en Ciencias tan disímiles como la Biología, Ecología, Geología y Economía

El profesional o científico debe interiorizarse profundamente del fenómeno a analizar, plantear sus hipótesis, modelarlo matemáticamente, usar los algoritmos disponibles y luego interpretar los resultados. El Álgebra Lineal le provee no sólo de una metodología de cálculo, sino que también conceptualmente le puede ayudar a realizar una visualización correcta de los fenómenos estudiados.

1. Ecuaciones en Diferencias.

En campos como ecología e ingeniería entre otros, surge la necesidad de modelar matemáticamente un sistema dinámico que cambia con el tiempo.

Algunas características del sistema se miden en tiempos discretos, produciéndose una secuencia de vectores $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ donde $\mathbf{x}_k$ proporciona información del sistema en el momento de la *k*-ésima medición.

Si existe una matriz **A** tal que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2, \ldots$ se tiene de manera general

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Esta última expresión se denomina *ecuación lineal en diferencias*.

Asimismo, si consideramos la señal a tiempo discreto $z[n] = \{z_n\}$ y escalares $a_0, a_1, \ldots, a_n$ Encontrar la señal $y[n] = \{y_n\}$ tal que la expresión

$$a_0 y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_n y_k = z_k \quad \forall k \tag{1}$$

se llama *ecuación lineal en diferencias de orden n.*

Se muestra que dada una ecuación lineal en diferencias homogénea (segundo miembro igual a cero) de orden *n*, es posible expresar lo anterior, por un sistema equivalente de ecuaciones en la forma:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A} . \mathbf{X}_k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{con} \quad \mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^{n\times 1} \ \text{ y } \ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

En general, dada la ecuación $y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0$ puede re-escribirse como $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A} . \mathbf{X}_k$ con

$$\mathbf{X_k} = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+n} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Cualquiera sea la matriz $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, formalmente la ecuación $\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{A}.\mathbf{X}_k$ es fácil de resolver. La solución $\mathbf{X}_k$ está relacionada con el valor inicial $\mathbf{X}_0$. En efecto

$$\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{A}.\mathbf{X}_k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{X_1}=\mathbf{A}.\mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X_2}=\mathbf{A}.\mathbf{X_1}=\mathbf{A^2}.\mathbf{X}_0 \\ \quad \vdots \\ \mathbf{X}_k=\mathbf{A}.\mathbf{X}_{k\text{-}1}=\mathbf{A}^k.\mathbf{X}_0 \end{cases}$$

El problema está en encontrar una manera rápida de calcular $\mathbf{A}^k$.

Si la matriz **A** es diagonalizable, entonces existe **P** tal que $\mathbf{A}=\mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{-1}$ con **D** matriz diagonal. Luego

$$\mathbf{X}_k=\mathbf{A}^k.\mathbf{X}_0=\underbrace{\left(\mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{-1}\right)}_{\mathbf{A}}.\underbrace{\left(\mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{-1}\right)}_{\mathbf{A}}\cdots\underbrace{\left(\mathbf{P}.\mathbf{D}.\mathbf{P}^{-1}\right)}_{\mathbf{A}}.\mathbf{X}_0$$

Haciendo uso de la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices, resulta:

$$\mathbf{X}_k=\left(\mathbf{P}.\mathbf{D}^k.\mathbf{P}^{-1}\right).\mathbf{X}_0$$

Recordando que las columnas de **P** son los vectores propios de la matriz **A**, se tiene:

$$\mathbf{X}_k=\underbrace{\left[\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\cdots\mathbf{v}_n\right]}_{\mathbf{P}}.\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^k}.\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{X}_0$$

$$\mathbf{X}_k=c_1\lambda_1^k\,\mathbf{v}_1+c_2\lambda_2^k\,\mathbf{v}_2+\cdots+c_n\lambda_n^k\,\mathbf{v}_n$$

donde:

λ_i son los valores propios de la matriz **A** (se los ha supuesto reales y distintos).

$\mathbf{v}_i$ son los vectores propios de la matriz **A**.

c_i son coeficientes que dependen de las condiciones iniciales $\left([c_i]=\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{X}_0\right)$.

Entonces, si tenemos en cuenta lo anteriormente expuesto y suponemos que por ejemplo se plantea

$$y_{k+3}-2y_{k+2}-5y_{k+1}+6y_k=0$$

Entonces se tiene que $y_{k+3}=2y_{k+2}+5y_{k+1}-6y_k$.

Haciendo $\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ y_{k+3} \end{bmatrix}$.

Se tiene

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ y_{k+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{bmatrix} . \mathbf{X}_k$$

Analizaremos, si la matriz **A** es diagonalizable. Para ello:

- Determinamos la ecuación característica y los valores propios de **A**:

  Ecuación característica $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.
  Valores propios $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = 3$.

- Vectores propios de **A**: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Entonces, la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$\mathbf{X}_k = c_1 1^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 (-2)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 3^k \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

En definitiva, con esta expresión obtenemos que:

$$y_k = c_1.1^k + c_2.(-2)^k + c_3.3^k \qquad (2)$$

2. Filtrado Lineal.

En el procesamiento digital de señales, una ecuación en diferencias lineal de orden n como la indicada en (1) describe un filtro lineal y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se llaman los coeficientes del filtro.

Se toma $y[n]$ como la señal de entrada y $z[n]$ como la señal de salida. En particular, si $z[n]$ es la señal nula, la ecuación (1) se dice homogénea y las soluciones corresponden a las señales que se eliminan por filtración ya que se convierten al paso por el filtro en la señal nula.

Sea una señal de audio a la que se hace pasar por un filtro. Se quiere analizar qué componentes de la misma serán eliminadas. Supongamos que el filtro lineal viene representado por la ecuación en diferencias

$$y_{k+3} - 2y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = z_k$$

Las componentes de la señal que serán eliminadas son las que al pasar por el filtro nos da la señal nula, esto es $y_{k+3} - 2y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0$.

Teniendo en cuenta que la solución que hemos encontrado en (2), $y_k = c_1.1^k + c_2.(-2)^k + c_3.3^k$ podemos concluir que serán eliminadas las combinaciones lineales de las señales:

$$x_1[n] = 1^n; \quad x_2[n] = (-2)^n; \quad x_3[n] = 3^n.$$

Observaciones:

- Las soluciones de la ecuación en diferencias homogénea de orden n forman un subespacio $\mathbf{W} \subset \mathbf{S}$. Se muestra que $dim\,\mathbf{W} = n$.

  Del ejemplo anterior $\mathbf{W} = \langle x_1[n], x_2[n], x_3[n] \rangle$. Se muestra que ellas son linealmente independientes luego $dim\,\mathbf{W} = 3$.
- Los valores y vectores propios también proporcionan la clave para entender el comportamiento a largo plazo o evolución de un sistema dinámico descrito por medio de una ecuación en diferencias del tipo $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}.\mathbf{X}_k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$.
- El planteo de estos problemas se presenta, como ya se mencionó, no sólo en Ingeniería, sino también en Economía, Biología y Ecología.
- Se puede interpretar que el vector $\mathbf{X}_k$ da información sobre el sistema con el paso del tiempo (indicado por *k*), por lo que su formulación se adapta para describir tanto un modelo de crecimiento de población en Biología, como la respuesta de estado estable de un sistema de control que es el equivalente en Ingeniería de lo que usualmente se llama comportamiento a largo plazo del sistema dinámico.

Sea la expresión $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}.\mathbf{u}_k$ que representa un sistema del cual queremos averiguar su comportamiento cuando $k \to \infty$. Suponiendo que **A** puede diagonalizarse, la solución $\mathbf{u}_k$ será del tipo:

$$\mathbf{u}_k = c_1\lambda_1^k\,\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\,\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\,\mathbf{v}_n.$$

El crecimiento de $\mathbf{u}_k$ está gobernado por los factores λ_i y por lo tanto, la estabilidad depende de los valores propios de **A**.

La ecuación en diferencias $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}.\mathbf{u}_k$ es:

- estable y $\mathbf{u}_k \to \mathbf{0}$ si todos los valores propios satisfacen $|\lambda_i| < 1$;
- es neutralmente estable y $\mathbf{u}_k$ está acotado si todo $|\lambda_i| \leq 1$, y
- es inestable ($\mathbf{u}_k$ no está acotado) cuando al menos un valor propio de $\mathbf{A}$ es $|\lambda_i| > 1$.

3. Un Sistema Depredador – Presa.

Alrededor del año 1910, un grupo de biólogos presentó un informe en el cual advertían de que la población de peces del Adriático superior cambiaba considerablemente.

Durante la Primera Guerra Mundial la pesca fue suspendida. Después de la Guerra, los tiburones y otras especies voraces se hicieron más numerosas con relación a los tipos herbívoros de peces. Se concluyó que la suspensión de la pesca había permitido que creciera la población de peces y que esto daba a las especies predadoras una ventaja sobre las otras especies-presa. Esta observación provocó un modelo matemático sobre la dinámica de población para el caso en que una especie llamada predadora se alimentara de otras especies llamadas presas.

En lo que sigue suponemos que la población presa encuentra suficiente alimento en todo momento, pero que la reserva de alimentos de la población predadora depende enteramente de la población presa. También se parte de la hipótesis de que durante el proceso el entorno no cambia a favor de una de las especies, y que la adaptación genética es suficientemente lenta. Las hipótesis simplificativas se hacen a los fines de permitir un primer modelado del problema a partir de lo cual pueden ir agregándose limitaciones.

Consideremos la población de tiburones (T) y peces herbívoros (P) en un tiempo k representado por

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} T_k \\ P_k \end{bmatrix} \qquad \text{donde} \begin{cases} k \text{ es el tiempo en meses} \\ T_k \text{ es el número de tiburones en la región estudiada} \\ P_k \text{ es el número de peces herbívoros (medidos en ciento de mil)} \end{cases}$$

Si suponemos

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= 0{,}5\ T_k + 0{,}4\ P_k \\ P_{k+1} &= -0{,}104\ T_k + 1{,}1\ P_k \end{aligned}$$

La primera ecuación dice que sin peces “presa” sobrevivirán sólo la mitad de los tiburones “predador” cada mes, mientras que la segunda ecuación dice que, sin tiburones, la cantidad de peces herbívoros aumentará el 10% cada mes. Si hay abundancia de peces el término $(0,4\ P_k)$ hará que el número de tiburones aumente, mientras que el término negativo $(-0,104\ T_k)$ mide las muertes de peces debidas a la depredación de los tiburones.

Se quiere determinar la evolución del sistema. Teniendo en cuenta que el sistema es del tipo

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A.X}_k \quad \text{con} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix}$$

Los valores y vectores propios de **A** son:

$$\lambda_1 = 1,02 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 0,58 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$\mathbf{X}_k = c_1(1,02)^k\,\mathbf{v_1} + c_2(0,58)^k\,\mathbf{v_2}$ con c_1 y c_2 que dependen de las condiciones iniciales ($\mathbf{X}_0$).

Entonces $\begin{bmatrix} T_k \\ P_k \end{bmatrix} = c_1(1,02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} + c_2(0,58)^k \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Observar que cuando $k \to \infty$, $(0,58)^k \to 0$.

Supongamos $c_1 \neq 0$, entonces para toda k suficientemente grande, el segundo término del segundo miembro tiende a cero de donde: $\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} T_k \\ P_k \end{bmatrix} \approx c_1(1,02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$

Para $k+1$ se tiene:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} T_{k+1} \\ P_{k+1} \end{bmatrix} \approx c_1(1,02)^{k+1} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = c_1(1,02)(1,02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = (1,02)\,\underbrace{c_1(1,02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}}_{\approx \mathbf{X}_k} \approx 1,02 \begin{bmatrix} T_k \\ P_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{k+1} \approx 1,02\ \mathbf{X}_k$$

Esta expresión nos permite concluir que: sin la intervención del hombre, a largo plazo tanto los tiburones como los peces herbívoros crecerán cada mes en un factor 1,02 el que corresponde a un índice de crecimiento del 2%.

Por ser 1,02 ~ 1,0 se tiene que $\mathbf{X}_k$ es aproximadamente un múltiplo de (10, 13). Esto es cada 10 tiburones hay aproximadamente 1.300.000 peces.

3.6 Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 1

Verifique que cada una de las siguientes funciones **no** es una función determinante. Indique qué propiedades no cumple.

a) $f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a$ b) $f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad$ c) $f\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad + bc$

Ejercicio 2

Calcular los determinantes siguientes, utilizando el desarrollo por cofactores:

a) $det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}\right)$ b) $det\left(\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right)$ b) $det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}\right)$

Ejercicio 3

Calcular el determinante de cada una de las matrices siguientes, por triangulación:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4

Calcular los siguientes determinantes:

a) $det\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}\right)$ b) $det\left(\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ c) $det\left(\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}\right)$

Ejercicio 5

Teniendo en cuenta que $det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = 4$, calcular:

a) $det\left(\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}\right)$ b) $det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ (d-3a) & (e-3b) & (f-3c) \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}\right)$ c) $det\left(\begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right)$

Ejercicio 6

Sea **A** una matriz 3x3, sabiendo que $det\,(\mathbf{A}) = 7$, encuentre:

a) $det(3\mathbf{A})$ b) $det(\mathbf{A}^{-1})$ c) $det(2\mathbf{A}^{-1})$ d) $det\left((2\mathbf{A})^{-1}\right)$

Ejercicio 7

En cada uno de los casos siguientes se pide: calcular $adj(\mathbf{A})$ y usarla para calcular $\mathbf{A}^{-1}$.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Ejercicio 8

Aplicar la Regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -5x + 4y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + 2z = 1 \\ 2x + 4y + 8z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ -x + 2z = 2 \\ 3x + y + 3z = -2 \end{cases}$

Ejercicio 9

Encuentre los valores de λ para los cuales $det(\mathbf{A}) = 0$.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda-1) & -2 \\ 1 & (\lambda-4) \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda-6) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & (\lambda-4) \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\lambda-1) & 1 & 0 \\ 4 & (\lambda-4) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2) \end{bmatrix}$

Ejercicio 10

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Se pide analizar:

a) ¿Cuáles de los siguientes vectores son vectores propios de **A**?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b) ¿Cuáles son sus valores propios correspondientes?.

Ejercicio 11

Para cada una de las siguientes matrices se pide hallar:

1) La ecuación característica y los valores propios.
2) Los subespacios propios.
3) Si es posible, dar una matriz **P** que diagonalice a **A** (es decir, tal que: $\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$).

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

g) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 12

En los siguientes casos, encontrar una matriz **P** y una matriz diagonal a **D** tal que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{P}$.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 13

En cada uno de los casos siguientes encuentre una matriz **P** que diagonalice **ortogonalmente** a la matriz **A**.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 14

Encontrar la matriz **A** (2x2) sabiendo que $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ son vectores propios de **A** siendo sus respectivos valores propios 1 y 4.

Ejercicio 15

Encontrar una matriz **A** 3×3 que tenga a $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -1$ como valores propios y siendo sus vectores propios correspondientes: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 16

Probar que los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 17

Probar que si λ es un valor propio de la matriz **A**, entonces λ^2 es valor propio de $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}.\mathbf{A}$ y que los vectores propios de **A** son también vectores propios de $\mathbf{A}^2$. Generalizar a $\mathbf{A}^k$.

Ejercicio 18

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Se pide hallar:

a) los valores propios de **A** y los correspondientes subespacios propios;

b) los valores propios de $\mathbf{A}^8$;

c) la matriz $\mathbf{A}^8$.

Ejercicio 19

Probar las siguientes afirmaciones:

a) $\lambda = 0$ es valor propio de **A** sí y sólo si **A** es no inversible.

b) $\lambda \neq 0$ es valor propio de **A** sí y sólo si λ^{-1} es valor propio de $\mathbf{A}^{-1}$ (Se supone **A** inversible).

Ejercicio 20

En Álgebra Lineal avanzada, se demuestra el **Teorema de Cayley-Hamilton**, éste establece que una matriz cuadrada **A** satisface su ecuación característica.
Es decir,

Si $x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0 = 0$ es la ecuación característica de **A**, entonces

$$\mathbf{A}^n + C_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + C_1\mathbf{A} + C_0\mathbf{I} = 0.$$

Comprobar este resultado para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Observación: Esta propiedad proporciona un método eficiente para calcular las potencias de una matriz.

Si **A** es 2x2 con ecuación característica $x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ entonces $\mathbf{A}^2 + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I} = \mathbf{0}$ de donde $\mathbf{A}^2 = -c_1\mathbf{A} - c_0\mathbf{I}$.

Luego multiplicando esta expresión por **A** se tiene $\mathbf{A}^3 = -c_1\mathbf{A}^2 - c_0\mathbf{A}$. Multiplicándola por $\mathbf{A}^2$ se tiene $\mathbf{A}^4 = -c_1\mathbf{A}^3 - c_0\mathbf{A}^2$.

Este procedimiento muestra cómo es posible calcular las potencias sucesivas de **A** basándonos en las potencias anteriores.

Aplique esta propiedad para encontrar $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \mathbf{A}^4$ para la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 21

Determinar si las siguientes afirmaciones son <u>verdaderas o falsas</u>. Justificar claramente.

a) Si **u** es un vector propio de **A** asociado al valor propio λ, entonces $k\mathbf{u}$ también es vector propio de **A** asociado a λ.

b) Si **v** y **w** son vectores propios de la matriz cuadrada **A**, que corresponden a los valores propios λ_1 y λ_2 respectivamente, entones $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ es vector propio de **A** con valor propio $\lambda_1 + \lambda_2$.

c) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor propio de la matriz A entonces el sistema de ecuaciones $(\alpha\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \overline{\mathbf{0}}$ admite sólo la solución trivial.

d) Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable, entonces **A** tiene *n* valores propios distintos.

e) Toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonaliza sólo si tiene una base ortonormal de vectores propios.

f) Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable, entonces **A** es diagonalizable ortogonalmente.

g) Si todas las raíces de la ecuación característica son reales, entonces **A** es diagonalizable.

h) Sea **A** una matriz simétrica, **u** y **v** vectores propios de **A** asociados a valores propios distintos. Entonces $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es un conjunto ortonormal.

i) Los vectores propios asociados a un mismo valor propio son siempre linealmente dependientes.

Ejercicio 22

En una población animal la edad máxima alcanzada por sus individuos es de doce años y la población se clasifica en cuatro grupos:

Pequeños	Jóvenes	Adultos	Ancianos
[0,3)	[3,6)	[6,9)	[9,12)

Además, se ha observado que la relación existente entre la población que hay en un período k con respecto a la que había en el período anterior (k-1) es la que se recoge en la siguiente tabla, expresada en porcentaje, y entendiéndose que un periodo es un trienio. (TABLA 1)

		PERIODO (k-1)			
		pequeños	jóvenes	adultos	ancianos
PERIODO k	pequeños	0.25	0.25	0.25	0.25
	jóvenes	0.25	0	0.5	0.25
	adultos	0.25	0.5	0.25	0
	ancianos	0.25	0.25	0	0.5

TABLA 1

Se pide:

a) Formular un modelo que represente la evolución temporal de la población.

b) ¿Cuál es la distribución de la población a largo plazo ($k \to \infty$) si en la actualidad ($k=0$) la proporción de individuos en cada uno de los cuatro grupos es de 20%, 20%, 20% y 40% respectivamente?

3.7 Guía de Estudio

1) ¿Cuáles son las propiedades que definen a la **función determinante**?

2) Enuncie algunas de las propiedades que se deducen de la definición de la función determinante.

3) ¿Cómo está vinculado $det\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\right)$ y $det\left(\mathbf{A}\right)$?

4) ¿Cómo está vinculado $det\left(\mathbf{A}.\mathbf{B}\right)$ con $det\left(\mathbf{A}\right)$ y $det\left(\mathbf{B}\right)$?

5) ¿A qué se llama **cofactor** del lugar (i, j)? ¿Para que se usa?.

6) ¿En que consiste el método de triangulación para el cálculo de determinantes?

7) ¿Por qué $\mathbf{A}$ matriz inversible $\Leftrightarrow$ $det\,(\mathbf{A}) \neq 0$?

8) ¿A qué se llama **adjunta** de **A?** ¿Cuál es la expresión de la inversa de **A** referida a la $adj\left(\mathbf{A}\right)$?

9) **¿**Qué dice la **Regla de Cramer?** ¿Cuáles son las limitaciones para su aplicación?

10) Defina **valor propio**, **vector propio**, **subespacio propio** de la matriz **A**.

11) Enuncie y demuestre el **Teorema de Caracterización** de los valores propios.

12) Muestre que λ es valor propio de la matriz **A** sí y sólo si λ es raíz de la ecuación $det(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}) = 0$

13) ¿A qué se llama **ecuación característica** de la matriz **A?**

14) ¿Cómo se determinan los subespacios propios?

15) ¿Cuándo se dice que una matriz es **diagonalizable**?

16) ¿Cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que una matriz sea diagonalizable?

17) En una matriz simétrica, los vectores propios asociados a valores propios distintos ¿son ortogonales?

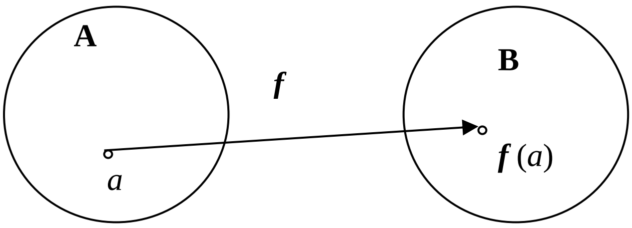
18) Defina **matriz ortogonal**. ¿Qué significa “la matriz **A diagonaliza ortogonalmente**”?

4

Aplicaciones Lineales

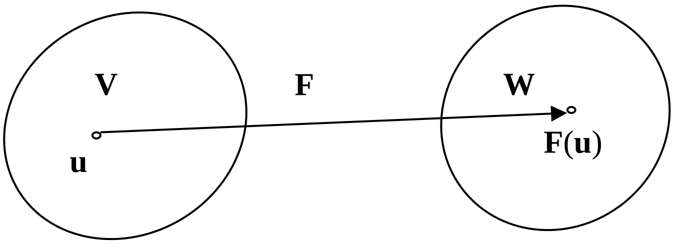
4.1. Aplicaciones Lineales

Se ha visto en los cursos de Análisis Matemático que una **función** o **aplicación** es una regla ***f*** que asocia a cada elemento de un conjunto **A** uno y sólo un elemento del conjunto **B**. Decimos entonces que para todo $a \in \mathbf{A}$, existe $b \in \mathbf{B}$ tal que $b = \boldsymbol{f}(a)$. **A** es el **conjunto dominio**, **B** es el **conjunto de llegada**, *b* se llama la **imagen** de *a* por ***f*** y el subconjunto de **B** que consta de todos los valores de ***f*** cuando *a* varía sobre **A** es el **conjunto imagen** de la función ***f***.



Hasta ahora, el énfasis se ha puesto en los casos en que tanto **A** como **B** son conjuntos de números reales y se las llama **funciones a valores reales de variable real**, pero las mismas consideraciones pueden ser hechas cuando **A** y **B** son conjuntos más generales.

En lo que sigue, se centrará la atención en funciones donde tanto **A** como **B** son espacios vectoriales cumpliendo, además, propiedades especiales. Estas propiedades están vinculadas al hecho que la estructura de espacio vectorial se basa en la existencia de dos operaciones: la suma y la multiplicación por escalar, las cuales se pretende "se preserven" a través de la función, esto es, a la suma de elementos en el dominio se corresponda la suma de las imágenes respectivas y de igual forma en la multiplicación por escalar. Este tipo de funciones reciben una denominación especial, se las llama **aplicaciones lineales** o **transformaciones lineales**.



Definición 4.1.1 Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Diremos que $\mathbf{F}\colon\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ es una **aplicación lineal** sí y sólo si se satisface

a) $\mathbf{F(u + v) = F(u) + F(v)}$
b) $\mathbf{F}(k\,\mathbf{v}) = k\,\mathbf{F(v)}$

para todo $\mathbf{u};\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ y $k\in\mathbf{K}$

En particular, si $\mathbf{V}=\mathbf{W}$ las aplicaciones lineales $\mathbf{F}\colon\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ se llaman **operadores lineales**.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**. $dim\mathbf{V}=n$. La elección de una base ordenada **B** del vectorial, permite definir la aplicación "Vector Coordenado respecto a la base **B**":

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{B}}\colon\mathbf{V}&\to\ \mathbf{K}^n\\ \mathbf{v}&\to\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})=(\mathbf{v})_{\mathbf{B}}\end{aligned}$$

Por la **Proposición 1.9.1** se tiene que:

$$\begin{aligned}&\varphi_{\mathbf{B}}\,(\mathbf{u}+\mathbf{v})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})_{\mathbf{B}}=(\mathbf{u})_{\mathbf{B}}+(\mathbf{v})_{\mathbf{B}}=\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{u})+\varphi_{\mathbf{B}}\,(\mathbf{v})\\ &\varphi_{\mathbf{B}}\,(k\,\mathbf{v})=(k\,\mathbf{v})_{\mathbf{B}}=k\,(\mathbf{v})_{\mathbf{B}}=k\,\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})\end{aligned}\qquad \text{para todo } \mathbf{u};\mathbf{v}\in\mathbf{V} \text{ y } k\in\mathbf{K}.$$

Luego la aplicación $\varphi_{\mathbf{B}}$ es una aplicación lineal.

Análogamente, también es lineal la aplicación

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{B}}\colon\mathbf{V}&\to\mathbf{K}^{n\times 1}\\ \mathbf{v}&\to\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})=[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}\end{aligned}$$

En particular, como ya se mencionó en la **Proposición 1.9.1**, una vez fijada la base **B** en el vectorial, existe una correspondencia biunívoca entre el vector **v** y su vector coordenado, lo que indica que $\varphi_{\mathbf{B}}$ es una biyección.
Las aplicaciones lineales biyectivas se llaman **isomorfismos** entre los espacios vectoriales que vincula. Luego $\varphi_{\mathbf{B}}$ es un isomorfismo entre los espacios vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{K}^{n\times 1}$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{A}\in\mathbf{K}^{m\times n}$. Para toda matriz $\mathbf{X}\in\mathbf{K}^{n\times 1}$ el producto $\mathbf{A.X}$ está definido y es una matriz columna de "m" elementos. De aquí que la matriz **A** define una aplicación entre los espacios $\mathbf{K}^{n\times 1}$ y $\mathbf{K}^{m\times 1}$, en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{T_A}:\mathbf{K}^{n\times 1}&\to\mathbf{K}^{m\times 1}\\ \mathbf{X}\ &\to\mathbf{T_A(X)}\end{aligned}\qquad \text{donde}\quad \mathbf{T_A(X)}=\mathbf{A.X}$$

Las propiedades de la multiplicación de matrices permiten mostrar que esta aplicación es lineal. En efecto:

$$\mathbf{T_A(X+Y) = A.(X+Y) = A.X + A.Y = T_A(X) + T_A(Y)}$$
$$\mathbf{T_A}\ (k\ \mathbf{X}) = \mathbf{A}.(k\ \mathbf{X}) = k\ (\mathbf{A}.\mathbf{X}) = k\ \mathbf{T_A(X)}$$

Como caso particular, si consideramos $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{T_A} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{X} &\to \mathbf{Y} = \mathbf{A}.\mathbf{X} \end{aligned}$$

define un operador lineal en $\mathbb{R}^n$ (ya se había mencionado en la Sección **3.3.1**).

Se sobre entiende que el vector $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ viene expresado como una matriz columna, es decir $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$\mathbf{T_A}$ también se lo llama transformación de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo.

Ejemplo 3

Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre el cuerpo **K**.

La aplicación $\mathbf{F}:\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tal que $\mathbf{F(v)} = \overline{\mathbf{0}}_{\mathbf{W}}\ \ \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ es una aplicación lineal y se la denomina "aplicación nula".

Ejemplo 4

Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

La "aplicación identidad" $id:\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida por $id(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ es una aplicación lineal.

Ejemplo 5

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}$.

a) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\quad x \to m\,x\quad (m \in \mathbb{R})$ es una aplicación lineal.

b) La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\quad x \to m\,x + b\quad (m,b \in \mathbb{R};\ b \neq 0)$ **no** es una aplicación lineal. ¿Por qué?

Ejemplo 6

Sean $\mathbf{V} = \mathbf{P}_n$. La aplicación: $\mathbf{D}:\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ que asigna a cada $\mathbf{p} \in \mathbf{V}$ su derivada primera $\mathbf{p}'$ es decir:

$$\mathbf{D}:\mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_n$$
$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \to \mathbf{D(p)} = \mathbf{p}' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$$

es una aplicación lineal.

De manera más general, si $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la aplicación: $\mathbf{D}:\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ que asigna a cada $f \in \mathbf{V}$ su derivada primera f' es una aplicación lineal.

Ello resulta de las propiedades: “la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de sus derivadas” y “la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función”.

Propiedades de las Aplicaciones Lineales

Teorema 4.1.1 Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Si $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ es una aplicación lineal entonces

a) $\mathbf{F}\left(\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\right)=\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$

b) $\mathbf{F}(-\mathbf{v})=-\mathbf{F}(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

c) $\mathbf{F}\left(x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r\right)=x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)+x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)+\cdots+x_r\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$ con $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\in\mathbf{V}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_r\in\mathbf{K}$.

Demostración:

a) Demostraremos que la imagen por una aplicación lineal del vector nulo de **V** es el vector nulo de **W**.

$$\mathbf{F}\left(\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\right)=\mathbf{F}(0.\mathbf{v})=0.\mathbf{F}(\mathbf{v})=\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}\,.$$

b) La demostración de que **F** aplica el opuesto de un vector $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ en el opuesto de $\mathbf{F(v)}$ queda como ejercicio para el lector.

c) Demostremos que la imagen de una combinación lineal de vectores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_r\in\mathbf{V}$ es la combinación lineal con los mismos coeficientes de $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1),\mathbf{F}(\mathbf{v}_2),\ldots,\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$.

Teniendo en cuenta la asociatividad de la suma de vectores de **V**, planteamos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}\left(x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+x_3\,\mathbf{v}_3+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r\right)&=\mathbf{F}\left(x_1\,\mathbf{v}_1+\left(x_2\,\mathbf{v}_2+x_3\,\mathbf{v}_3+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r\right)\right)\\
&=\mathbf{F}\left(x_1\,\mathbf{v}_1\right)+\mathbf{F}\left(x_2\,\mathbf{v}_2+x_3\,\mathbf{v}_3+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r\right) \quad \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal}\\
&=x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)+\mathbf{F}\left(x_2\,\mathbf{v}_2+\left(x_3\,\mathbf{v}_3+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r\right)\right) \quad \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal}\\
&=x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)+x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)+\mathbf{F}\left(x_3\,\mathbf{v}_3+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r\right) \quad \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal}\\
&\ \vdots \qquad\qquad \text{repitiendo el proceso}\\
&=x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)+x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)+\cdots+x_r\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)
\end{aligned}$$

quedando demostrado el ítem. #

Consideremos ahora el siguiente ejemplo:

Sea $\mathrm{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $\mathrm{F}\big((1,0)\big)=(1,2,3)$ y $\mathrm{F}\big((0,1)\big)=(3,4,1)$.

Se quiere hallar $\mathrm{F}\big((4,-3)\big)$.

Dado que los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$, el vector $(4,-3)$ es combinación lineal de ellos

$$(4,-3)=4(1,0)+(-3)(0,1)$$

Luego por se **F** aplicación lineal, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\big((4,-3)\big)&=\mathrm{F}\big(4(1,0)+(-3)(0,1)\big)\\&=4\mathrm{F}\big((1,0)\big)+(-3)\mathrm{F}\big((0,1)\big)\\&=4(1,2,3)+(-3)(3,4,1)\\&=(-5,-4,9)\end{aligned}.$$

Este ejemplo sugiere que una aplicación lineal queda determinada por el conocimiento de las imágenes de los vectores de una base.

Si $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ son espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbf{K}$, es siempre posible dar **aplicaciones** de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$ que asignen a los vectores de una base del vectorial **V**, vectores arbitrariamente elegidos en el vectorial **W**.

Por ejemplo, sean $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{W}=\mathbb{R}^3$ y se buscan aplicaciones que asignen a los vectores de la base $\mathbf{B}=\big((1,0);\,(0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$, los vectores $\mathbf{w}_1=(1,0,3)$ y $\mathbf{w}_2=(2,1,5)$ de **W**.

Una de las aplicaciones queda definida mediante la asignación:

$$\begin{aligned}&(1,0)\ \to\ (1,0,3)\\&(0,1)\ \to\ (2,1,5)\\&(x,y)\ \to\ (0,0,0)\ \text{ si } (x,y)\neq(1,0)\ \text{ y }\ (x,y)\neq(0,1)\end{aligned}$$

De hecho, pueden elegirse muchas otras asignaciones para $(x,y)\neq(1,0)$ y $(x,y)\neq(0,1)$ lo que dará origen a otras aplicaciones.

Nos preguntamos si entre tales aplicaciones, alguna es **lineal.** El teorema siguiente da la respuesta a esta pregunta.

> **Teorema 4.1.2.** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**.
> Si $\mathbf{B}=\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\right)$ es una base ordenada de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_n$ son vectores arbitrarios de **W**, entonces: existe una única aplicación lineal $\mathbf{F}\!:\!\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$ para $i=1,2,\ldots,n.$

Demostración:

- Probaremos primero **la existencia**.

Si $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ es una base ordenada de **V**, todo vector $\mathbf{v}$ que pertenece al vectorial **V**, es combinación lineal de los vectores de la base.

Sea entonces $\mathbf{v} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_n$ son vectores de **W**, el vector $\mathbf{w} = x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{w}_n$ pertenece al vectorial **W**.

Consideremos la aplicación:

$$\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$$
$$x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n \to x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{w}_n$$

Teniendo en cuenta la definición anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{F}\left(1\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{v}_n\right) = 1\mathbf{w}_1 + 0\,\mathbf{w}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_1 \\
\mathbf{F}(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{F}\left(0\,\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{v}_n\right) = 0\,\mathbf{w}_1 + 1\mathbf{w}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{F}(\mathbf{v}_n) &= \mathbf{F}\left(0\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \cdots + 1\mathbf{v}_n\right) = 0\,\mathbf{w}_1 + 0\,\mathbf{w}_2 + \cdots + 1\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_n
\end{aligned}$$

Es decir que la aplicación **F** cumple la condición de que: $\mathbf{F}\,(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

- Probaremos ahora la **linealidad** de **F**.

Sean $\mathbf{v} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{v'} = y_1\,\mathbf{v}_1 + y_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{v}_n$ vectores de **V**.
Queremos ver que se verifica que a) $\mathbf{F}(\mathbf{v} + \mathbf{v'}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}) + \mathbf{F}(\mathbf{v'})$ y b) $\mathbf{F}(k\,\mathbf{v}) = k\,\mathbf{F}(\mathbf{v})$.

a) $\mathbf{F}(\mathbf{v} + \mathbf{v'}) = \mathbf{F}(\underbrace{x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n}_{\mathbf{v}} + \underbrace{y_1\,\mathbf{v}_1 + y_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{v}_n}_{\mathbf{v'}})$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{F}\left((x_1 + y_1)\,\mathbf{v}_1 + (x_2 + y_2)\,\mathbf{v}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\,\mathbf{v}_n\right) \\
&= (x_1 + y_1)\,\mathbf{w}_1 + (x_2 + y_2)\,\mathbf{w}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\,\mathbf{w}_n \qquad \text{por definición de } \mathbf{F} \\
&= (x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{w}_n) + (y_1\,\mathbf{w}_1 + y_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + y_n\,\mathbf{w}_n) \\
&= \mathbf{F}(\mathbf{v}) + \mathbf{F}(\mathbf{v'})
\end{aligned}$$

b) $\mathbf{F}(k\,\mathbf{v}) = \mathbf{F}(k\,\underbrace{\left(x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n\right)}_{\mathbf{v}})$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{F}\left((kx_1)\,\mathbf{v}_1 + (kx_2)\,\mathbf{v}_2 + \cdots + (kx_n)\,\mathbf{v}_n\right) \\
&= (kx_1)\,\mathbf{w}_1 + (kx_2)\,\mathbf{w}_2 + \cdots + (kx_n)\,\mathbf{w}_n \qquad \text{por definición de } \mathbf{F} \\
&= k(x_1\,\mathbf{w}_1 + x_2\,\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{w}_n) \\
&= k\mathbf{F}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Luego $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ es una aplicación lineal.

- Finalmente probaremos que **F** es la **única** aplicación lineal de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$ que cumple con la condición solicitada.

Supongamos que $\mathbf{G}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ es una aplicación lineal tal que satisface $\mathbf{G}(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$ para $i=1,2,\ldots,n$.

Se tiene que para todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(\mathbf{v}) &= \mathbf{G}\left(x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_n\,\mathbf{v}_n\right)\\
&= x_1\mathbf{G}(\mathbf{v}_1)+x_2\mathbf{G}(\mathbf{v}_2)+\cdots+x_n\mathbf{G}(\mathbf{v}_n) \quad \text{por ser } \mathbf{G} \text{ aplicacion lineal}\\
&= x_1\,\mathbf{w}_1+x_2\,\mathbf{w}_2+\cdots+x_n\,\mathbf{w}_n \qquad \text{porque } \mathbf{G}(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i \text{ para } i=1,2,\ldots,n\\
&= \mathbf{F}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\mathbf{G}=\mathbf{F}$ ya que $\mathbf{G}$ y $\mathbf{F}$ asignan la misma imagen a todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

Queda así completada la demostración del teorema. #

4.2. Imagen y Núcleo de una Aplicación Lineal

Definición 4.2.1 Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una aplicación lineal.

Se denomina **imagen de F** al conjunto:

$$\mathbf{I}_{\mathrm{F}}=\left\{\mathbf{w}\in\mathbf{W}/\text{existe } \mathbf{v}\in\mathbf{V}: \mathbf{F}(\mathbf{v})=\mathbf{w}\right\}$$

Definición 4.2.2 Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una aplicación lineal.

Se denomina **núcleo de F** al conjunto:

$$\mathbf{N}_{\mathrm{F}}=\left\{\mathbf{v}\in\mathbf{V}/\ \mathbf{F}(\mathbf{v})=\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}\right\}.$$

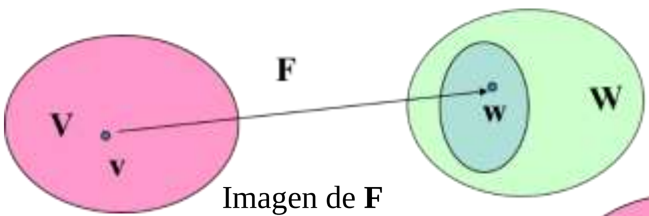
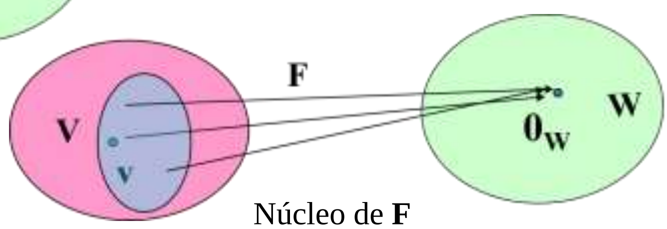


Imagen de **F**



Núcleo de **F**

Teorema 4.2.1 Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una aplicación lineal. Se verifica que:

a) $\mathbf{I}_\mathrm{F}=\{\mathbf{w}\in\mathbf{W}/\text{existe } \mathbf{v}\in\mathbf{V}:\ \mathbf{F(v)=w}\}$ es un subespacio de **W**.

b) Si $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_r$ generan $\mathbf{V}$ entonces $\mathbf{F(v_1)}, \mathbf{F(v_2)},\dots, \mathbf{F(v}_r\mathbf{)}$ generan $\mathbf{I}_\mathrm{F}$.

c) Si $dim\,\mathbf{V}=n$ entonces $dim\,\mathbf{I}_\mathrm{F}\le n$.

Demostración:

a) Veamos que $\mathbf{I}_\mathrm{F}=\{\mathbf{w}\in\mathbf{W}/\text{existe } \mathbf{v}\in\mathbf{V}:\ \mathbf{F(v)=w}\}$ es un subespacio de **W**.

$\mathbf{I}_\mathrm{F}$ no es vacío pues $\bar{\mathbf{0}}_\mathrm{W}\in\mathbf{I}_\mathrm{F}$ dado que $\mathbf{F}\left(\bar{\mathbf{0}}_\mathrm{V}\right)=\bar{\mathbf{0}}_\mathrm{W}$ (por ser **F** aplicación lineal).

Si $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ son vectores de $\mathbf{I}_\mathrm{F}$, entonces existen $\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2\in\mathbf{V}$ tales que $\mathbf{F(v_1)=w_1}$ y $\mathbf{F(v_2)=w_2}$. Por lo tanto

$$\mathbf{w_1+w_2=F(v_1)+F(v_2)=F(v_1+v_2)}\quad \text{(por ser } \mathbf{F} \text{ lineal)}$$

o sea que $\mathbf{w_1+w_2}\in\mathbf{I}_\mathrm{F}$ por ser imagen de $\mathbf{v_1+v_2}$.

Por otra parte $k\,\mathbf{w}_1=k\ \mathbf{F(v_1)=F(}k\ \mathbf{v_1)}$ es decir que para todo $k\in\mathbf{K}$ se tiene que $k\,\mathbf{w}_1\in\mathbf{I}_\mathrm{F}$.

Luego $\mathbf{I}_\mathrm{F}$ es un subespacio de **W**.

b) Sea $\mathbf{w}\in\mathbf{I}_\mathrm{F}$ entonces existe un vector $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ tal que $\mathbf{F(v)=w}$.

Por ser $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_r\}$ un conjunto generador de **V**, se tiene que: $\mathbf{v}=x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{w}=\mathbf{F(v)}&=\mathbf{F}\left(x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_r\,\mathbf{v}_r\right)\\ &=x_1\mathbf{F(v_1)}+x_2\mathbf{F(v_2)}+\cdots+x_r\mathbf{F(v}_r\mathbf{)}\quad \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal}\end{aligned}.$$

Es decir: cualquier vector de $\mathbf{I}_\mathrm{F}$ es combinación lineal de $\mathbf{F(v_1)}, \mathbf{F(v_2)},\dots, \mathbf{F(v}_r\mathbf{)}$, por lo tanto

$$\mathbf{I}_\mathrm{F}\subseteq\left\langle\mathbf{F(v_1)}, \mathbf{F(v_2)},\dots, \mathbf{F(v}_r\mathbf{)}\right\rangle \tag{1}$$

Por otra parte $\mathbf{F(v_1)}, \mathbf{F(v_2)},\dots, \mathbf{F(v}_r\mathbf{)}$ pertenecen a la $\mathbf{I}_\mathrm{F}$ que es un subespacio; por lo tanto

$$\left\langle\mathbf{F(v_1)}, \mathbf{F(v_2)},\dots, \mathbf{F(v}_r\mathbf{)}\right\rangle\subseteq\mathbf{I}_\mathrm{F} \tag{2}$$

Luego de (1) y (2) se tiene que

$$\mathbf{I}_\mathrm{F}=\left\langle\mathbf{F(v_1)}, \mathbf{F(v_2)},\dots, \mathbf{F(v}_r\mathbf{)}\right\rangle.$$

c) La proposición (b) que acabamos de demostrar, indica en particular, que $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es generado por las imágenes de los vectores de una base del vectorial **V**.

Si $dim\,\mathbf{V} = n$ las bases de **V** tienen "*n*" vectores.

Puesto que más vectores que los de un conjunto de generadores son linealmente dependientes, las bases de $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ tienen a lo sumo "*n*" vectores. Luego, resulta que $dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} \le n$.#

Se llama **rango** de una aplicación lineal **F**, a la dimensión del subespacio $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$.
Es decir:

$$dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \textbf{rango de F}$$

Sea una aplicación lineal $\mathbf{F}:\mathbf{V} \to \mathbf{W}$. Acabamos de demostrar que $\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}} \in \mathbf{I}_{\mathrm{F}}$. Por consiguiente, siempre existe su imagen inversa, esto es, el conjunto de vectores de **V** que por **F** tienen como imagen al $\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$

Este conjunto tiene gran importancia en el estudio de las aplicaciones lineales y por este motivo lo definimos y denominamos con un nombre especial: **núcleo** de la aplicación lineal. Veamos algunas propiedades que satisface este conjunto.

Teorema 4.2.2 Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una aplicación lineal. Se verifica que:

a) $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ es un subespacio de **V**.

b) Si $dim\,\mathbf{V} = n$ entonces $dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} \le n$.

c) Si $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ entonces la imagen inversa de $\mathbf{w}_0$ es una variedad lineal cuyo subespacio asociado es el $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$.

Demostración:

a) Veamos que $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ \mathbf{F(v)} = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}} \right\}$ es un subespacio de **V**.

$\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ es no vacío pues $\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}} \in \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ dado que $\mathbf{F}\left(\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\right) = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$ (por ser **F** aplicación lineal).

Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores de $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$, entonces $\mathbf{F(v}_1\mathbf{)} = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$ y $\mathbf{F(v}_2\mathbf{)} = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$. Veamos que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{F(v}_1 + \mathbf{v}_2\mathbf{)} &= \mathbf{F(v}_1\mathbf{)} + \mathbf{F(v}_2\mathbf{)} \quad \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal} \\ &= \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}} \end{aligned}$$

luego $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ es cerrado para la suma de vectores.

Por otra parte, para todo $k \in \mathbf{K}$ se tiene que $k\,\mathbf{v}_1 \in \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ pues $\mathbf{F(}k\,\mathbf{v}_1\mathbf{)} = k\,\mathbf{F(v}_1\mathbf{)} = k\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}} = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$.

Luego $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ es un subespacio de $\mathbf{V}$.

b) Queda como ejercicio para el lector.

c) Probaremos ahora que: Si $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ entonces la imagen inversa de $\mathbf{w}_0$ es una variedad lineal cuyo subespacio asociado es el $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$.

Tengamos presente que la imagen inversa del vector $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es el conjunto $\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}_0 \right\}$
Dado que $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{I}_{\mathrm{F}}$, el conjunto **A** no es vacío. Sea entonces $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{A}$.

El enunciado afirma que $\mathbf{A} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$.
Para probar esta igualdad debemos mostrar que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ y que $\mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_{\mathrm{F}} \subseteq \mathbf{A}$.

1. Veamos que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$

Para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{A}$ se tiene que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$.
Por otro lado $\mathbf{F}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{v}_0) = \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0 = \overline{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$ luego $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \in \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$.
En consecuencia, $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ y por lo tanto $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$.

2. Veamos que $\mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_{\mathrm{F}} \subseteq \mathbf{A}$

Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$. Luego $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$ con $\mathbf{u} \in \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$.
Planteando $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}_0) + \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{w}_0 + \overline{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}} = \mathbf{w}_0$ se tiene entonces que $\mathbf{v} \in \mathbf{A}$.
Por lo tanto $\mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_{\mathrm{F}} \subseteq \mathbf{A}$.

De 1. y 2. resulta que $\mathbf{A} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$.#

Se llama **nulidad** de una aplicación lineal **F**, a la dimensión del subespacio $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$. Es decir:

$$dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \text{nulidad de } \mathbf{F} .$$

Corolario 4.2.1 Sean $\mathbf{M} \in \mathbf{K}^{m \times n}$ y $\mathbf{H} \in \mathbf{K}^{m \times 1}$.
Si el sistema $\mathbf{M.X} = \mathbf{H}$ es compatible, entonces el conjunto $\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n \times 1} / \mathbf{M.X} = \mathbf{H} \right\}$ de sus soluciones es una variedad lineal con subespacio asociado $\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n \times 1} / \mathbf{M.X} = \overline{\mathbf{0}} \right\}$ que es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado.

Demostración:

Consideremos la aplicación lineal $\mathbf{L}_{\mathbf{M}} : \mathbf{K}^{n \times 1} \to \mathbf{K}^{m \times 1}$ definida por $\mathbf{L}_{\mathbf{M}}(\mathbf{X}) = \mathbf{M.X}$.

El núcleo de esta aplicación lineal es el conjunto $\mathbf{N}_{\mathbf{L_M}} = \left\{\mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1} / \ \mathbf{L_M}(\mathbf{X}) = \overline{\mathbf{0}}\right\}$, esto es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $\mathbf{M.X} = \overline{\mathbf{0}}$.

Decir que el sistema $\mathbf{M.X} = \mathbf{H}$ es compatible equivale a afirmar que **H** es un elemento de la imagen de $\mathbf{L_M}$ y por consiguiente, por el **ítem c) del Teorema 4.2.2** su imagen inversa es una variedad lineal cuyo subespacio asociado es $\mathbf{N}_{\mathbf{L_M}} = \mathbf{W} = \left\{\mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1} / \mathbf{M.X} = \overline{\mathbf{0}}\right\}$. Pero la imagen inversa de **H** es el conjunto:

$$\mathbf{A} = \left\{\mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1} / \mathbf{L_M}(\mathbf{X}) = \mathbf{H}\right\} = \left\{\mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1} / \mathbf{M.X} = \mathbf{H}\right\}$$

esto es, el conjunto de soluciones del sistema planteado. #

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la aplicación lineal $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{F}\left((x,y)\right) = (x,x)$. Se desea hallar $\mathbf{N}_\mathrm{F}$ e $\mathbf{I}_\mathrm{F}$.

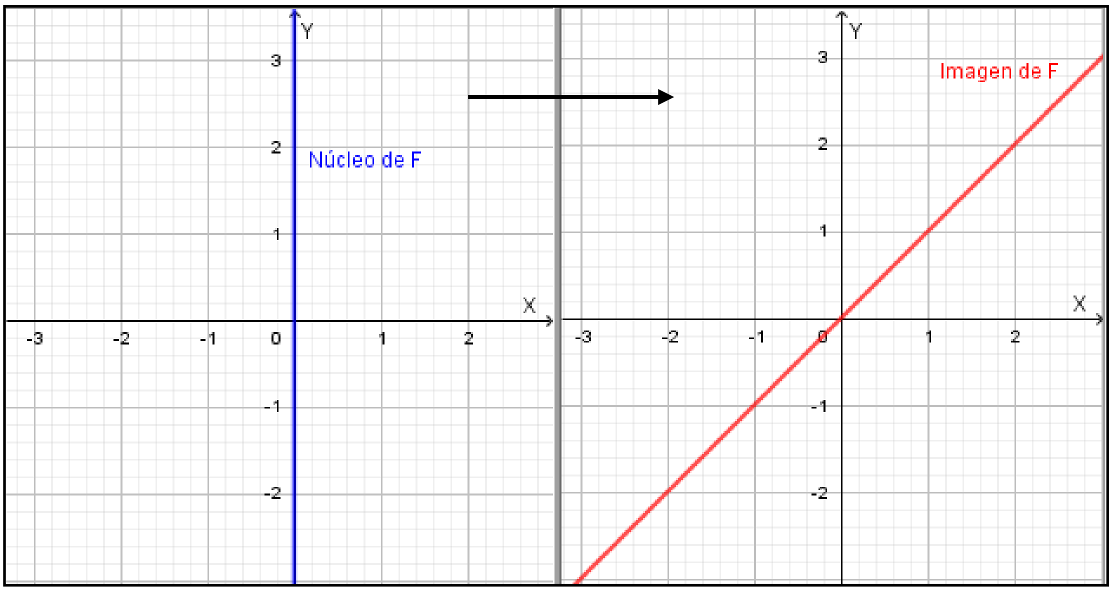
- En este caso $\mathbf{N}_\mathrm{F} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \mathrm{F}\left((x,y)\right) = (0,0)\right\}$.

Entonces $(x,y) \in \mathbf{N}_\mathrm{F}$ sí y sólo si $(0,0) = \mathrm{F}\left((x,y)\right) = (x,x) \Leftrightarrow x = 0$.

Luego el $\mathbf{N}_\mathrm{F}$ es el conjunto de los pares ordenados de la forma $(0,y)$ es decir es el eje “y” (si se identifica $\mathbb{R}^2$ con el plano cartesiano).

- $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pertenecerá a $\mathbf{I}_\mathrm{F}$ si existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{F}\left((x,y)\right) = (x,x)$.

Es decir, todo vector de $\mathbf{I}_\mathrm{F}$ es de la forma (x,x) $\Rightarrow$ $\mathbf{I}_\mathrm{F} = \left\langle(1,1)\right\rangle$.



Ejemplo 2

Sea **V** espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

El núcleo de la aplicación "identidad" $id\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida por $id(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ es $\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{V}}\}$.

Ejemplo 3

Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre el cuerpo **K**.

El núcleo de la "aplicación nula" $\mathbf{F}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tal que $\mathrm{F}(\mathbf{v}) = \bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{W}} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ es el vectorial **V**.

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{V} = \{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f \text{ tiene derivada de todo orden}\}$ y sea $\mathbf{D}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ el operador derivada definido por $\mathbf{D}(f) = \dfrac{df}{dx}$.

Entonces $\mathbf{N_D} = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \big/ \mathbf{D}(f) = \dfrac{df}{dx} = 0 \right\} = \{\text{funciones constantes}\}$.

Ejemplo 5

Sea la aplicación lineal $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que: $\mathbf{F}\big((x,y,z)\big) = (x - 2y,\, x + y + z)$. Se quiere caracterizar el Núcleo y hallar generadores de la Imagen de esta aplicación lineal.

➢ $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \mathrm{F}\big((x,y,z)\big) = (0,0)\}$, es el conjunto de las ternas (x,y,z) tales que: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. Luego $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Resulta $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \langle(-2/3, -1/3, 1)\rangle = \langle(-2, -1, 3)\rangle$.

➢ Veamos ahora $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$.

Teniendo en cuenta que $\mathbf{F}\big((x,y,z)\big) = (x - 2y,\, x + y + z)$, todo vector de la imagen $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es de la forma $(x - 2y,\, x + y + z) = (x, x) + (-2y, y) + (0, z)$.

Se tiene entonces que $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \langle(1,1), (-2,1), (0,1)\rangle = \mathbb{R}^2$

Notar que: $(1,1) = \mathbf{F}\big((1,0,0)\big)$, $(-2,1) = \mathbf{F}\big((0,1,0)\big)$ y $(0,1) = \mathbf{F}\big((0,0,1)\big)$. Por lo visto en el **Teorema 4.2.1** si consideramos la base $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ el subespacio $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ estará generado por las imágenes por **F** de dichos vectores, es decir $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \big\langle \mathbf{F}\big((1,0,0)\big),\ \mathbf{F}\big((0,1,0)\big),\ \mathbf{F}\big((0,0,1)\big) \big\rangle$

Ejemplo 6

Sea la aplicación lineal $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{F}\big((x_1,x_2,x_3)\big) = (x_1 + x_2 - x_3,\ -2x_1 + x_2 + x_3,\ -x_1 + 2x_2)$$

Se quiere la caracterización y una base del Núcleo y de la Imagen de **F**.

- $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ es el conjunto de las ternas $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\mathbf{F}\big((x_1,x_2,x_3)\big) = (x_1 + x_2 - x_3,\ -2x_1 + x_2 + x_3,\ -x_1 + 2x_2) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Entonces $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \right\}$

Luego $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas, que corresponde a las ternas de la forma: $k(2/3, 1/3, 1)$ con $k \in \mathbb{R}$.
Es decir $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \langle (2/3, 1/3, 1) \rangle = \langle (2, 1, 3) \rangle$. Luego, **nulidad** de $\mathbf{F} = dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = 1$.

- Veamos la Imagen de **F**

Por definición $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \mathrm{F}\big((x_1,x_2,x_3)\big) = (a,b,c) \right\}$ o sea que $(a,b,c) \in \mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ si existe $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ talque $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = a \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = b \\ -x_1 + 2x_2 = c \end{cases}$

$$\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -1 & a \\ -2 & 1 & 1 & b \\ -1 & 2 & 0 & c \end{array} \quad \mathrm{e}_{21}(2);\ \mathrm{e}_{31}(1)$$

$$\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 3 & -1 & b+2a \\ 0 & 3 & -1 & c+a \end{array} \quad \mathrm{e}_{32}(-1)$$

$$\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 3 & -1 & b+2a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array} \qquad \Rightarrow \ \mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a+b-c=0 \right\}$$

Luego se tiene que $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle$, y $\mathrm{B} = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$ es una base de $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$. Por lo tanto $dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = 2$.

¿Se podría haber hallado un conjunto de vectores generadores de la Imagen de **F**, trabajando de otra manera? La respuesta es SI, se podría haber aplicado **Teorema 4.2.1** esto es:

Consideramos la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es decir $\mathrm{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Sabemos que $\mathbf{I}_\mathrm{F} = \langle \mathbf{F}((1,0,0)),\ \mathbf{F}((0,1,0)),\ \mathbf{F}((0,0,1)) \rangle$ entonces teniendo en cuenta la definición de la aplicación $\mathbf{F}((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 + x_2 - x_3,\ -2x_1 + x_2 + x_3,\ -x_1 + 2x_2)$ se tiene que:

$$\mathbf{F}((1,0,0)) = (1,-2,-1) \qquad \mathbf{F}((0,1,0)) = (1,1,2) \qquad \mathbf{F}((0,0,1)) = (-1,1,0)$$

Luego, $\mathbf{I}_\mathrm{F}$ está generada por los vectores $(1,-2,-1), (1,1,2), (-1,1,0)$. Eliminando $(1,1,2)$ pues es combinación lineal de los demás ($(-2)(1,-2,-1) + (-3)(-1,1,0) = (1,1,2)$), se tiene que $\mathbf{I}_\mathbf{F} = \langle (1,-2,-1), (-1,1,0) \rangle$.

Nota: Observar que, considerando la definición de **F**, resulta también lo escrito previamente

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}((x_1,x_2,x_3)) &= (x_1 + x_2 - x_3,\ -2x_1 + x_2 + x_3,\ -x_1 + 2x_2) \\
&= (x_1, -2x_1, -x_1) + (x_2, x_2, 2x_2) + (-x_3, x_3, 0) \\
&= \underbrace{x_1(1,-2,-1) + x_2(1,1,2) + x_3(-1,1,0)}
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{I}_\mathbf{F} = \langle (1,-2,-1), (1,1,2), (-1,1,0) \rangle$$

Ejemplo 7

Determinar el Núcleo y la Imagen de la siguiente aplicación lineal

$$\mathrm{F}: \mathbf{P}_2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{F}(a + bX + cX^2) = (a + b + 2c,\ 3a + 3b + 6c)$$

- $\mathbf{N}_\mathrm{F} = \{ a + bX + cX^2 \in \mathbf{P}_2 \,/\, \mathbf{F}(a + bX + cX^2) = (0,0) \}$ es el conjunto de polinomios $a + bX + cX^2 \in \mathbf{P}_2$ tales que $\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 3a + 3b + 6c = 0 \end{cases}$.

Entonces $\mathbf{N}_\mathrm{F}$ es un subespacio de $\mathbf{P}_2$ formado por polinomios cuyos coeficientes son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas esto es $\mathbf{N}_\mathrm{F} = \{ a + bX + cX^2 \in \mathbf{P}_2 \ / \ a + b + 2c = 0 \}$.

Luego un polinomio que pertenece al núcleo de **F** podrá escribirse como:

$$a + bX + cX^2 = (-b - 2c) + bX + cX^2 = -b - 2c + bX + cX^2 = b\,(-1 + X) + c\,(-2 + X^2)$$

$\mathbf{N}_\mathrm{F} = \langle -1 + X,\ -2 + X^2 \rangle$. Luego, **nulidad** de $\mathbf{F} = dim\,\mathbf{N}_\mathrm{F} = 2$.

- Veamos la Imagen de **F**

Por definición $(x, y) \in \mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ si existe $a+bX+cX^2 \in \mathbf{P}_2$ talque $\mathbf{F}\left(a+bX+cX^2\right)=(x, y)$.

Entonces, todo vector de la imagen $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es de la forma

$$(a+b+2c,\ 3a+3b+6c)=(a,\ 3a)+(b,\ 3b)+(2c,\ 6c)$$

Luego, $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ está generada por los vectores $(1,3), (1,3), (2,6)$. Eliminando los vectores que son combinación lineal de los demás, se tiene que $\mathbf{I}_{\mathbf{F}} = \langle (1,3) \rangle$. Luego, **rango** de $\mathbf{F} = dim\, \mathbf{I}_{\mathrm{F}} = 1$.

Notar que: Si se considera la base canónica de $\mathbf{P}_2$, es decir $\mathrm{B}=\left\{1, X, X^2\right\}$ por el **Teorema 4.2.1** se tiene que $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \left\langle \mathbf{F}(1),\ \mathbf{F}(X),\ \mathbf{F}\left(X^2\right)\right\rangle$.

Como $\mathbf{F}(1)=(1,3)$; $\mathbf{F}(X)=(1,3)$ y $\mathbf{F}\left(X^2\right)=(2,6)$, se tiene que $\mathbf{I}_{\mathbf{F}} = \langle (1,3) \rangle$.

Ejemplo 8

Determinar el Núcleo y la Imagen de la aplicación lineal $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbf{P}_3$ definida por:

$$\mathrm{F}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b-c) + (2a+b)\, X + (a+c)X^2 + (-a-b+c)X^3$$

- $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2} \Big/ \mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0+0X+0X^2+0X^3 \right\}$ es el conjunto de matrices

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2}$ tales que $\begin{cases} a+b-c=0 \\ 2a+b=0 \\ a+c=0 \\ -a-b+c=0 \end{cases}$.

Resolviendo se tiene:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{e_{21}(-2) \\ e_{31}(-1) \\ e_{41}(1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{e_{12}(1) \\ e_{32}(-1)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{e_2(-1)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Entonces $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2} \Big/ \begin{cases} a+3c=0 \\ b-2c=0 \end{cases} \right\}$. Luego una vector que pertenece al núcleo de **F** podrá escribirse como:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3c & 2c \\ c & d \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\langle \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$. Luego, **nulidad** de $\mathbf{F} = dim\, \mathbf{N}_{\mathrm{F}} = 2$.

- Veamos la Imagen de **F**

Todo vector perteneciente a $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es de la forma $(a+b-c) + (2a+b)\,X + (a+c)X^2 + (-a-b+c)X^3$
Agrupando convenientemente esta última expresión, se tiene que:

$$\begin{aligned}(a+b-c) + (2a+b)\,X + (a+c)X^2 + (-a-b+c)X^3 =&\\ &= (a+2aX+aX^2-aX^3) + (b+bX-bX^3) + (-c+cX^2+cX^3)\\ &= a\,(1+2X+X^2-X^3) + b\,(1+X-X^3) + c\,(-1+X^2+X^3)\end{aligned}$$

Entonces se tiene que $\mathbf{I}_{\mathbf{F}} = \left\langle 1+2X+X^2-X^3, 1+X-X^3, -1+X^2+X^3 \right\rangle$

Como $1+2X+X^2-X^3 = 2\left(1+X-X^3\right)+\left(-1+X^2+X^3\right)$, una base del subespacio imagen de **F** es $\mathrm{B} = \left\{1+X-X^3,\ -1+X^2+X^3\right\}$. Luego, **rango** de **F** $= dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = 2$.

En los teoremas anteriores, hemos visto que si $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ es una aplicación lineal y el espacio vectorial **V** es de dimensión "n", este número acota el **rango** y la **nulidad** de **F**. El siguiente teorema nos brinda más información de cómo se relaciona rango, nulidad y dimensión del dominio.

> **Teorema 4.2.3 (**Teorema de la Dimensión para aplicaciones lineales**)**
> Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una aplicación lineal.
>
> Si **V** es de dimensión finita entonces $dim\left(\mathbf{N}_{\mathrm{F}}\right)+dim\left(\mathbf{I}_{\mathrm{F}}\right)=dim\left(\mathbf{V}\right)$.

Demostración:

Por ser **V** de dimensión finita, existe un subespacio **U**, complementario de $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$, tal que

$$\mathbf{V} = \mathbf{N}_{\mathrm{F}}\oplus\mathbf{U} \quad \text{donde} \quad dim\left(\mathbf{V}\right)=dim\left(\mathbf{N}_{\mathrm{F}}\right)+dim\left(\mathbf{U}\right).$$

Para probar el teorema bastará con demostrar que $dim\left(\mathbf{I}_{\mathrm{F}}\right)=dim\left(\mathbf{U}\right)$.

Supongamos que $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} \neq \left\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\right\}$ y $\mathbf{U} \neq \left\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\right\}$.

Sean

$\mathbf{B}_{\mathbf{N}_{\mathrm{F}}} = \left\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\right\}$ base del núcleo de **F**, $dim\left(\mathbf{N}_{\mathrm{F}}\right)=m$.

$\mathbf{B}_{\mathbf{U}} = \left\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\right\}$ base de **U**, $dim\left(\mathbf{U}\right)=r$.

Por ser $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ y $\mathbf{U}$ subespacios complementarios se tiene que $\mathbf{B}=\mathbf{B}_{\mathbf{N}_{\mathrm{F}}}\cup\mathbf{B}_{\mathbf{U}}$ es una base de **V** y por lo tanto $dim(\mathbf{V})=m+r$.

Por ser **F** una aplicación lineal (**Teorema 4.2.1** propiedades de la imagen) se tiene que:

$$\mathbf{I}_{\mathrm{F}}=\langle\mathbf{F(v_1)},\mathbf{F(v_2)},\ldots,\mathbf{F(v}_m\mathbf{)},\mathbf{F(u_1)},\mathbf{F(u_2)},\ldots,\mathbf{F(u}_r\mathbf{)}\rangle.$$

Puesto que $\mathbf{F(v_1)}=\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}},\mathbf{F(v_2)}=\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}},\ldots,\mathbf{F(v}_m\mathbf{)}=\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$ entonces $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}=\langle\mathbf{F(u_1)},\mathbf{F(u_2)},\ldots,\mathbf{F(u}_r\mathbf{)}\rangle$.

Vamos a mostrar que $\mathbf{F(u_1)},\mathbf{F(u_2)},\ldots,\mathbf{F(u}_r\mathbf{)}$ son linealmente independientes.

Sean $x_1,x_2,\ldots,x_r$ escalares tales que $x_1\mathbf{F(u_1)}+x_2\mathbf{F(u_2)}+\cdots+x_r\mathbf{F(u}_r\mathbf{)}=\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$.

Por la linealidad de $\mathbf{F}$, esta última expresión es equivalente a: $\mathbf{F}\left(x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+\cdots+x_r\mathbf{u}_r\right)=\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$

Por lo tanto $x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+\cdots+x_r\mathbf{u}_r\in\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$, pero por otro lado $x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+\cdots+x_r\mathbf{u}_r\in\mathbf{U}$ luego pertenece a $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}\cap\mathbf{U}$. Teniendo en cuenta que la suma de $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ y $\mathbf{U}$ es directa resulta:

$$x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+\cdots+x_r\mathbf{u}_r=\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}$$

Dado que $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_r$ son linealmente independientes (por formar base) resulta que $x_1=0,x_2=0,\ldots,x_r=0$ es la única solución posible.

En consecuencia $\mathbf{B}'=\{\mathbf{F(u_1)},\mathbf{F(u_2)},\ldots,\mathbf{F(u}_r\mathbf{)}\}$ es una base de $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ y por lo tanto $dim(\mathbf{I}_{\mathrm{F}})=r$.

Luego $dim(\mathbf{N}_{\mathrm{F}})+dim(\mathbf{I}_{\mathrm{F}})=dim(\mathbf{V})$ y el teorema queda probado. #

Observaciones: Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una aplicación lineal. Si $dim(\mathbf{V})=n$ se verifica que:

a) Si $dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}}=n\Rightarrow\mathbf{N}_{\mathrm{F}}=\mathbf{V}\Rightarrow\mathbf{F}$ es la aplicación nula. Por lo tanto $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}=\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}\}\Rightarrow dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}}=0$.

b) Si $\mathbf{N}_{\mathbf{F}}=\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\}\Rightarrow$ el complementario $\mathbf{U}$ es todo el vectorial $\mathbf{U}=\mathbf{V}$ entonces $dim(\mathbf{U})=dim(\mathbf{V})=n$. Por lo tanto $dim(\mathbf{I}_{\mathrm{F}})=n$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Considerar los ejemplos 5, 6, 7 y 8 vistos anteriormente y verificar el cumplimiento del **Teorema 4.2.3** que se acaba de demostrar.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}\left((x_1,x_2,x_3)\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$. Se quiere hallar el Núcleo y la Imagen de **F**.

- Núcleo de **F**: $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ pertenecerá a $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ si $\mathrm{F}\left((x_1,x_2,x_3)\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ (*)

Se busca hallar la solución de (*):

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{e_{21}(-1)} \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{e_{32}(-1)} \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \langle(-2,2,1)\rangle$ en consecuencia la **nulidad** de $\mathbf{F} = dim\left(\mathbf{N}_{\mathrm{F}}\right) = 1$

- Imagen de **F**:

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ pertenecerá a $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ si existe $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{F}\left((x_1,x_2,x_3)\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$.

Es decir, todo vector de $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es de la forma $\begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 - 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ -2x_3 \end{bmatrix}$.

Entonces $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{¿por qué?}}}{=} \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ de modo que **rango** de $\mathrm{F} = dim\left(\mathbf{I}_{\mathrm{F}}\right) = 2$.

Observar que se verifica que $dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3 = dim\left(\mathbf{N}_{\mathrm{F}}\right) + dim\left(\mathbf{I}_{\mathrm{F}}\right) = 1 + 2$.

Ejemplo 3

Sea $\mathrm{F}: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_1$ la aplicación lineal definida por $\mathrm{F}\left(aX^2 + bX + c\right) = (a + 2b)X + (b + c)$. Se quiere caracterizar el Núcleo y la Imagen de $\mathbf{F}$.

- Núcleo de **F**

$aX^2 + bX + c \in \mathbf{P}_2$ pertenecerá a $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ si $\mathrm{F}\left(aX^2 + bX + c\right) = 0X^2 + 0X + 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \xrightarrow{e_{12}(-2)} \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

Entonces $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ aX^2 + bX + c \in \mathbf{P}_2 \ \middle/ \ \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \right\}$

Luego, $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \langle 2X^2 - X + 1 \rangle$ y en consecuencia **nulidad** de $\mathbf{F} = dim(\mathbf{N}_{\mathrm{F}}) = 1$

- Imagen de **F**

Todo vector perteneciente a $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es de la forma $(a+2b)X + (b+c)$, por lo tanto, los vectores $\mathbf{p} = X$ y $\mathbf{q} = 1$ generan la imagen de **F**.

Entonces, $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \langle X, 1 \rangle$ en consecuencia **rango** de $\mathbf{F} = dim(\mathbf{I}_{\mathrm{F}}) = 2$.

Observar que se verifica el **Teorema 4.2.3** puesto que $dim(\mathbf{P}_2) = 3 = dim(\mathbf{N}_{\mathrm{F}}) + dim(\mathbf{I}_{\mathrm{F}}) = 1 + 2$.

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{F}: \mathbf{P}_2 \to \mathbb{R}^{\mathbf{2x1}}$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}(a + bX + cX^2) = \begin{bmatrix} b \\ a+b-c \end{bmatrix}$. Se quiere caracterizar el Núcleo y la Imagen de $\mathbf{F}$.

Para hallar el núcleo de **F**, planteamos

$$\mathbf{N}_{\mathbf{F}} = \left\{ a+bX+cX^2 \in \mathbf{P}_2 \ / \ \mathbf{F}(a+bX+cX^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ a+bX+cX^2 \in \mathbf{P}_2 \ / \ \begin{cases} b=0 \\ a+b-c=0 \end{cases} \right\}$$

Teniendo en cuenta que $\begin{cases} b=0 \\ a+b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=0$ y $a=c$, entonces $\mathbf{N}_{\mathbf{F}} = \langle 1+X^2 \rangle$. Luego $\mathbf{B}_{\mathbf{N}_{\mathrm{F}}} = \{1+X^2\}$ y en consecuencia **nulidad** de $\mathbf{F} = dim(\mathbf{N}_{\mathrm{F}}) = 1$.

Para hallar la imagen de esta aplicación, tomamos la base de **P₂**, $\mathbf{B} = \{1, X, X^2\}$ y aplicamos **F** a cada uno de los vectores de esta base obteniendo así un conjunto generador de $\mathbf{I_F}$.

Por lo tanto $\mathbf{I}_{\mathbf{F}} = \langle \mathbf{F}(1), \mathbf{F}(X), \mathbf{F}(X^2) \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

Considerando sólo los vectores LI tenemos que una posible base de la imagen es $\mathbf{B}_{\mathbf{I}_{\mathbf{F}}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

En consecuencia **rango** de $\mathbf{F} = dim(\mathbf{I}_{\mathrm{F}}) = 2$

Notar que se verifica el **Teorema 4.2.3** puesto que $dim(\mathbf{P}_2) = 3 = dim(\mathbf{N}_{\mathrm{F}}) + dim(\mathbf{I}_{\mathrm{F}}) = 1 + 2$.

Observación: Recordar que una manera alternativa de hallar la imagen de **F** es considerar que todo vector de $\mathbb{R}^{2\times1}$ pertenecerá a $\mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ si existe $a+bX+cX^2 \in \mathbf{P}_2$ tal que $\mathbf{F}(a+bX+cX^2) = \begin{bmatrix} b \\ a+b-c \end{bmatrix}$.

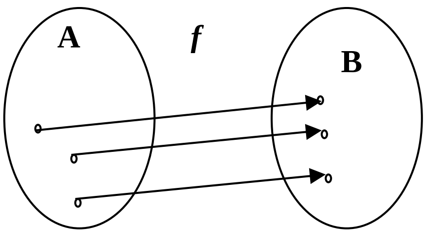
Es decir, todo vector de $\mathbf{I_F}$ es de la forma $\begin{bmatrix} b \\ a+b-c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Entonces, $\mathbf{I_F} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$. Considerando sólo los vectores LI tenemos que una posible base de la imagen es $\mathbf{B}_{\mathbf{I_F}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Aplicación Inyectiva, Suryectiva y Biyectiva

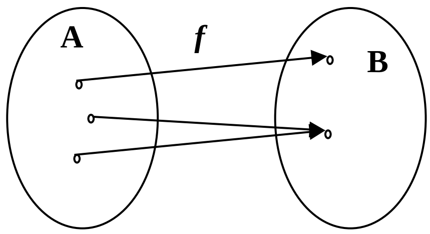
Antes de avanzar con las próximas secciones, recordemos cuándo una aplicación (arbitraria) $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es inyectiva y cuándo es suryectiva.

La aplicación $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es **inyectiva** (uno a uno) cuando elementos distintos de **A** tienen por imagen elementos distintos de **B**.

Es decir, $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es inyectiva sí y sólo si $\forall a_1, a_2 \in \mathbf{A},\ \ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$



Aplicación Inyectiva

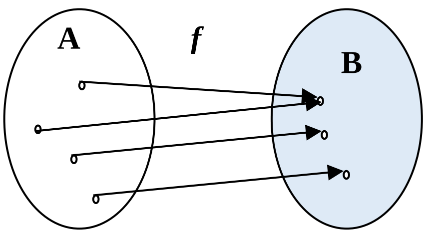


Aplicación no Inyectiva

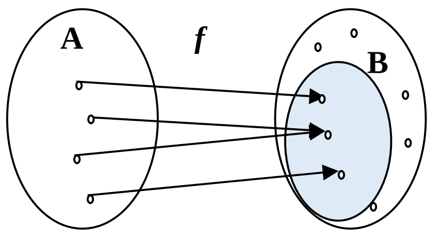
En otras palabras, f es inyectiva sí y sólo si la imagen inversa de todo elemento de la imagen incluye un sólo elemento del dominio.

La aplicación $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es **suryectiva** (sobreyectiva) si todo elemento de **B** es imagen de al menos un elemento de **A**.

Es decir, $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es suryectiva sí y sólo si $\forall b \in \mathbf{B}\ \ \exists a \in \mathbf{A}$ tal que $b = f(a)$



Aplicación Suryectiva



Aplicación no Suryectiva

Luego, una **biyección** es una aplicación $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ que es a la vez **inyectiva** y **suryectiva**.

4.3 Aplicaciones Lineales Inyectivas

Retomemos ahora el trabajo con $\mathbf{F}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ aplicación lineal entre los vectoriales **V** y **W**. A continuación, enunciaremos y demostraremos una condición necesaria y suficiente que debe verificar una aplicación lineal para ser inyectiva.

> **Teorema 4.3.1** Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**.
> Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ una aplicación lineal.
>
> **F** es **inyectiva** sí y sólo si $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}} \right\}$

Demostración:

Recordemos que una aplicación (arbitraria) **F** es inyectiva sí y sólo si la imagen inversa de todo elemento de la imagen incluye un sólo elemento del dominio.

Supongamos ahora que tenemos una aplicación $\mathbf{F}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{W}$ lineal. Por **Teorema 4.2.2** se tiene que la imagen inversa de $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{I}_{\mathrm{F}}$ es una variedad lineal con subespacio asociado $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$. Por consiguiente,

F es inyectiva sí y sólo si estas variedades lineales son "puntos", o sea

sí y sólo si $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}} \right\}$. #

Luego, para determinar si una aplicación lineal **F** es inyectiva basta analizar su Núcleo. Si éste se reduce al vector nulo entonces **F** será inyectiva, caso contrario no lo será.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2\times 1}$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}\left(\left(x_1,x_2\right)\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$. Se quiere analizar si la aplicación **F** es inyectiva.

Teniendo en cuenta el teorema que se acaba de demostrar, analizaremos si $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{(0,0)\right\}$.

- $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ pertenecerá a $\mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ si $\mathbf{F}\left(\left(x_1,x_2\right)\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Luego

$$\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

entonces $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{(0,0)\right\}$ y por lo tanto **F** es inyectiva.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}\left(\mathbf{(}x_1, x_2, x_3\mathbf{)}\right) = \mathbf{(}x_1 - 2x_2,\, x_1 + x_2 + x_3\mathbf{)}$. Se desea analizar si la aplicación $\mathbf{F}$ es inyectiva.

Con anterioridad se obtuvo que $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\langle \mathbf{(}-2, -1, 3\mathbf{)} \right\rangle$. Por lo tanto, como $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} \neq \left\{ \mathbf{(}0,0,0\mathbf{)} \right\}$ la aplicación F **no** es inyectiva.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{F} : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_1$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}\left(aX^2 + bX + c\right) = \mathbf{(}a + 2b\mathbf{)}X + \mathbf{(}b + c\mathbf{)}$. Se desea analizar si la aplicación $\mathbf{F}$ es inyectiva.

Con anterioridad se obtuvo que $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\langle 2X^2 - X + 1 \right\rangle$.

Luego, **F no** es inyectiva pues $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} \neq \left\{ \bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{P}_2} \right\}$.

4.3.2. Aplicaciones Lineales e Independencia Lineal

Las imágenes por una aplicación lineal de vectores linealmente independientes, no son necesariamente vectores linealmente independientes (considere, por ejemplo, el efecto de la aplicación nula).
El siguiente teorema caracteriza las aplicaciones que preservan la independencia lineal.

Teorema 4.3.2.1 Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**.

Sea $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una aplicación lineal.

La imagen de todo subconjunto linealmente independiente de **V** es un subconjunto linealmente independiente de **W** sí y sólo si **F** es inyectiva

Demostración:

$\Rightarrow)$ *Hipótesis:* la imagen por **F** de todo subconjunto linealmente independiente de **V** es un subconjunto linealmente independiente de **W**.

Tesis (a probar): la aplicación **F** es inyectiva.

Sea un conjunto linealmente independiente, la imagen de un vector no nulo (linealmente independiente) de **V**, no puede ser $\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{W}}$ (que es linealmente dependiente); por lo tanto: $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ \bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{V}} \right\}$ o sea que **F** es inyectiva.

$\Leftarrow)$ *Hipótesis:* la aplicación **F** es inyectiva

Tesis (a probar): la imagen por **F** de todo subconjunto linealmente independiente de **V** es un subconjunto linealmente independiente de **W**.

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vectores linealmente independientes de $\mathbf{V}$ queremos ver que $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1), \mathbf{F}(\mathbf{v}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$ son vectores linealmente independientes de $\mathbf{W}$. Planteamos

$$x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1) + x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2) + \cdots + x_r\mathbf{F}(\mathbf{v}_r) = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}}$$

$$\mathbf{F}\left(x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{v}_r\right) = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{W}} \quad \text{por la linealidad de } \mathbf{F}$$

Luego, $x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{v}_r \in \mathbf{N}_{\mathrm{F}}$ pero por hipótesis $\mathbf{F}$ es inyectiva, esto es $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{ \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}} \right\}$ por lo tanto $x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_r\,\mathbf{v}_r = \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}$.

Luego, por ser $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ linealmente independientes, resulta que $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_r = 0$ lo que prueba que $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1), \mathbf{F}(\mathbf{v}_2), \ldots, \mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$ son linealmente independientes. #

4.4. Aplicaciones Lineales entre Espacios Vectoriales de Igual Dimensión

Si consideramos aplicaciones lineales, vemos que las propiedades de inyectividad y suryectividad no dependen una de la otra. Es fácil dar ejemplos de aplicaciones lineales que tienen sólo una de las dos propiedades.

$\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $\mathbf{F}\big((x,y)\big) = (x,y,0)$ es inyectiva y no suryectiva.

$\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $\mathbf{G}\big((x,y,z)\big) = (x,y)$ es suryectiva y no inyectiva.

En el siguiente teorema se demuestra que, entre espacios vectoriales de igual dimensión, "inyectividad" y "suryectividad" se dan siempre en forma simultánea.

Teorema 4.4.1 Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Sea $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una aplicación lineal.

Si $dim\,\mathbf{V} = dim\,\mathbf{W} = n$ entonces $\mathbf{F}$ inyectiva $\Leftrightarrow$ $\mathbf{F}$ suryectiva .

Demostración:

La demostración es inmediata a partir de la igualdad $dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} + dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = dim\,\mathbf{V} = n$

$\mathbf{F}$ es inyectiva $\Leftrightarrow \mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\right\} \Leftrightarrow dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = 0 \Leftrightarrow dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = n \Leftrightarrow \mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \mathbf{W} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ es suryectiva .#

Corolario 4.4.1 Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$. Si $dim\,\mathbf{V} = dim\,\mathbf{W} = n$ y $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es una aplicación lineal se verifica que:

- Toda aplicación lineal $\mathbf{F}$ inyectiva es una biyección.
- Toda aplicación lineal $\mathbf{F}$ suryectiva es una biyección.

Demostración: queda como ejercicio para el lector.

Además,

$$\mathbf{F} \text{ es biyectiva si se verifica que} \begin{cases} \mathbf{F} \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\right\} \Leftrightarrow dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = n \\ \mathbf{F} \text{ es suryectiva} \Leftrightarrow \mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \mathbf{W} \end{cases}$$

luego $dim\,\mathbf{W} = n = dim\,\mathbf{V}$.

De donde las biyecciones sólo pueden presentarse entre espacios de igual dimensión.

Entonces si $\mathbf{F}\!:\!\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de la misma dimensión, la biyectividad de **F** es equivalente a que $\mathbf{N}_{\mathrm{F}} = \left\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\right\}$ o bien $\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = \mathbf{W}$. #

4.4.1. Aplicaciones Lineales Inversibles

Sea $\mathbf{F}\!:\!\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ es una aplicación biyectiva se verifica:

a) Esta definida la aplicación **"inversa"**:

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}^{-1} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V} \\ &\qquad \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{v} \quad \text{siendo } \mathbf{v} \text{ el único elemento de } \mathbf{V} \text{ tal que } \mathbf{F(v)} = \mathbf{w} \end{aligned}$$

b) $\mathbf{F}^{-1}$ es una biyección y su aplicación inversa es **F**.

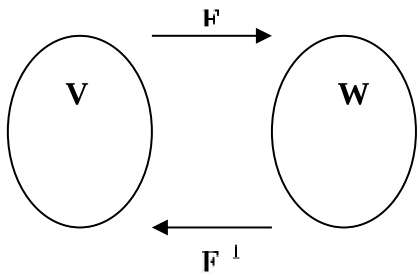
$$\left(\mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F}\right)\mathbf{(v)} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{(F(v))} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{(w)} = \mathbf{v}$$

$$\left(\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^{-1}\right)\mathbf{(w)} = \mathbf{F(F^{-1}(w))} = \mathbf{F(v)} = \mathbf{w}$$

o sea

$\mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F} = id_{\mathbf{V}}$ (aplicación identidad de $\mathbf{V}$)

$\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^{-1} = id_{\mathbf{W}}$ (aplicación identidad de $\mathbf{W}$)



En el siguiente teorema vamos a mostrar que si en particular, **F** es una aplicación lineal biyectiva, $\mathbf{F}^{-1}$ también lo es.

Teorema 4.4.1.1 Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Si $\mathbf{F}\!:\!\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ es una aplicación lineal biyectiva entonces su aplicación inversa $\mathbf{F}^{-1}\!:\!\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ es también una aplicación lineal.

Demostración:

Veamos que $\mathbf{F}^{-1}$ es una aplicación lineal.

Sean $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ elementos de **W**.

Por ser **F** una biyección, existe un único elemento $\mathbf{v}_1$ y un único $\mathbf{v}_2$ tales que: $\mathbf{F(v_1)} = \mathbf{w}_1$ y $\mathbf{F(v_2)} = \mathbf{w}_2$ (recordar que $\mathbf{F}^{-1} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ está definida por $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{(w)} = \mathbf{v}$ siendo $\mathbf{v}$ el único elemento de $\mathbf{V}$ tal que $\mathbf{F(v)} = \mathbf{w}$).

Por lo tanto, $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w}_1) = \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w}_2) = \mathbf{v}_2$.

- $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{F}(\mathbf{v}_1) + \mathbf{F}(\mathbf{v}_2)\right)$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{F}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\right) && \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal} \\ &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 && \text{pues } \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F} = id_{\mathbf{V}} \\ &= \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w}_1) + \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w}_2) \end{aligned}$$

- $\mathbf{F}^{-1}(k\,\mathbf{w}_1) = \mathbf{F}^{-1}\left(k\,\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)\right)$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{F}(k\,\mathbf{v}_1)\right) && \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal} \\ &= k\,\mathbf{v}_1 && \text{pues } \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F} = id_{\mathbf{V}} \\ &= k\,\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w}_1) \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{F}^{-1}$ es una aplicación lineal . #

4.4.2 Espacios Vectoriales Isomorfos

Definición 4.4.2.1 Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Diremos que $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es un **isomorfismo** de $\mathbf{V}$ sobre $\mathbf{W}$ sí y sólo si **F** es una aplicación lineal **biyectiva**.

En ese caso decimos que **V** es isomorfo a **W**.

Observación: Al ser $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una aplicación lineal biyectiva existe la aplicación inversa $\mathbf{F}^{-1}$, que es también un isomorfismo, por lo que resulta que **W** es isomorfo a **V**. Por este motivo diremos que los espacios vectoriales **V** y **W** son "isomorfos" cada vez que estén vinculados por una aplicación lineal biyectiva.

Con el siguiente teorema se muestra que cuando los vectoriales son de dimensión finita, los únicos espacios vectoriales que son "isomorfos" son los que tiene igual dimensión.

Teorema 4.4.2.1 Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K** de dimensión finita.

V y **W** son "isomorfos" sí y sólo si $dim\,\mathbf{V} = dim\,\mathbf{W}$.

Demostración:

$\Rightarrow)$ **V** y **W** son "isomorfos" , entonces sea $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una aplicación lineal biyectiva. Por lo tanto, se verifica que: $dim\,\mathbf{V} = dim\,\mathbf{N}_{\mathrm{F}} + dim\,\mathbf{I}_{\mathrm{F}} = 0 + dim\,\mathbf{W} = dim\,\mathbf{W}$.

$\Leftarrow)$ Supongamos $dim\,\mathbf{V} = dim\,\mathbf{W} = n$.

Sean $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de **V** y $\mathbf{B'} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ una base de **W**.

La aplicación lineal $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ definida por $\mathbf{v}_1 \to \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 \to \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \to \mathbf{w}_n$ es una biyección (su demostración queda como ejercicio para el lector) y por lo tanto **V** y **W** son isomorfos. #

4.5. Operaciones con Aplicaciones Lineales

Definición 4.5.1 Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sean $k \in \mathbf{K}$, $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ y $\mathbf{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ aplicaciones arbitrarias. Definimos

1. $\mathbf{F} + \mathbf{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$; $(\mathbf{F} + \mathbf{T})(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \mathbf{T}(\mathbf{u})$

La aplicación $\mathbf{F} + \mathbf{T}$ es suma de las aplicaciones **F** y **T**.

2. $k\,\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$; $(k\,\mathbf{F})(\mathbf{u}) = k\,\mathbf{F}(\mathbf{u})$

La aplicación $k\,\mathbf{F}$ es el producto del escalar *k* por la aplicación **F**.

Definición 4.5.2 Sean **U,** **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**. Sean $\mathbf{F}: \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ y $\mathbf{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ aplicaciones arbitrarias. Se define la aplicación

$$\mathbf{T} \circ \mathbf{F}: \mathbf{U} \to \mathbf{W}; \quad (\mathbf{T} \circ \mathbf{F})(\mathbf{u}) = \mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}))$$

La aplicación $\mathbf{T} \circ \mathbf{F}$ es la compuesta de **T** con **F**.

Ejemplos

Ejemplo 1

Si **F** y **T** son aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tales que:

$$\mathbf{F}((1,0,0)) = (2,1) \qquad \mathbf{T}((1,0,0)) = (3,2)$$

Se tendrá entonces que:

- $(\mathbf{F} + \mathbf{T})((1,0,0)) = \mathbf{F}((1,0,0)) + \mathbf{T}((1,0,0)) = (2,1) + (3,2) = (5,3)$

- $(3\mathbf{F} - 2\mathbf{T})((1,0,0)) = (3\mathbf{F})((1,0,0)) + (-2\mathbf{T})((1,0,0))$

$$\begin{aligned} &= 3\mathbf{F}((1,0,0)) + (-2)\mathbf{T}((1,0,0)) \\ &= 3(2,1) + (-2)(3,2) \\ &= (0,-1) \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Sean las aplicaciones lineales

$$\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad \mathbf{F}\big((x,y,z)\big) = (x+y,\, y-z)$$
$$\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad \mathbf{T}\big((x,y,z)\big) = (x+z,y)$$

Definimos $(\mathbf{F}+\mathbf{T}):\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ como sigue:

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}+\mathbf{T})\big((x,y,z)\big) &= \mathbf{F}\big((x,y,z)\big) + \mathbf{T}\big((x,y,z)\big)\\ &= (x+y,\, y-z) + (x+z,y)\\ &= (x+y+x+z,\, y-z+y)\\ &= (2x+y+z,\, 2y-z)\end{aligned}$$

Notar que la aplicación definida $(\mathbf{F}+\mathbf{T}):\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ resulta lineal.

Definimos $(2\mathbf{F}+3\mathbf{T}):\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ como sigue:

$$\begin{aligned}(2\mathbf{F}+3\mathbf{T})\big((x,y,z)\big) &= (2\mathbf{F})\big((x,y,z)\big) + (3\mathbf{T})\big((x,y,z)\big)\\ &= 2\mathbf{F}\big((x,y,z)\big) + 3\mathbf{T}\big((x,y,z)\big)\\ &= 2(x+y,\, y-z) + 3(x+z,y)\\ &= \big(2(x+y)+3(x+z),\, 2(y-z)+3y\big)\\ &= (5x+2y+3z,\, y-2z)\end{aligned}$$

Notar que la aplicación definida $(2\mathbf{F}+3\mathbf{T}):\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ resulta lineal.

Ejemplo 3

Sean las aplicaciones lineales

$$\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad \mathbf{F}\big((x,y,z)\big) = (x+y,\, y-z,\, x-z)$$
$$\mathbf{T}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad \mathbf{T}\big((x,y,z)\big) = (x+z,y)$$

Definimos $(\mathbf{T}\circ\mathbf{F}):\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ como sigue:

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})\big((x,y,z)\big) &= \mathbf{T}\Big(\mathbf{F}\big((x,y,z)\big)\Big)\\ &= \mathbf{T}\big((x+y,\, y-z,\, x-z)\big)\\ &= (2x+y-z,\, y-z)\end{aligned}$$

Notar que la aplicación definida $(\mathbf{T}\circ\mathbf{F}):\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ resulta lineal.

Teorema 4.5.1 Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$.
Si $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ y $\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ son aplicaciones lineales y $k\in\mathbf{K}$, entonces:

a) $\mathbf{F}+\mathbf{T}$ es una aplicación lineal.

b) $k\mathbf{F}$ es una aplicación lineal.

Demostración:

a) Queremos probar que $\mathbf{F}+\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\ \mathbf{W};\ \ (\mathbf{F}+\mathbf{T})(\mathbf{u})=\mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{T}(\mathbf{u})$ es una aplicación lineal, para ello planteamos:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}+\mathbf{T})(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && \text{por definición de suma de aplicaciones}\\
&= \mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{F}(\mathbf{v})+\mathbf{T}(\mathbf{u})+\mathbf{T}(\mathbf{v}) && \text{por linealidad de } \mathbf{F} \text{ y } \mathbf{T}\\
&= \big(\mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{T}(\mathbf{u})\big)+\big(\mathbf{F}(\mathbf{v})+\mathbf{T}(\mathbf{v})\big) && \text{por propiedades de la suma de vectores en } \mathbf{W}\\
&= (\mathbf{F}+\mathbf{T})(\mathbf{u})+(\mathbf{F}+\mathbf{T})(\mathbf{v}) && \text{por definición de suma de aplicaciones}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}+\mathbf{T})(k\,\mathbf{u}) &= \mathbf{F}(k\,\mathbf{u})+\mathbf{T}(k\,\mathbf{u}) && \text{por definición de suma de aplicaciones}\\
&= k\mathbf{F}(\mathbf{u})+k\,\mathbf{T}(\mathbf{u}) && \text{por linealidad de } \mathbf{F} \text{ y } \mathbf{T}\\
&= k\big(\mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{T}(\mathbf{u})\big) && \text{por propiedad de la multiplicación por un escalar en } \mathbf{W}\\
&= k(\mathbf{F}+\mathbf{T})(\mathbf{u}) && \text{por definición de suma de aplicaciones}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{F}+\mathbf{T}$ es una aplicación lineal.

b) Queremos probar que $k\,\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W};\ \ (k\,\mathbf{F})(\mathbf{u})=k\,\mathbf{F}(\mathbf{u})$ es una aplicación lineal. Para ello planteamos:

$$\begin{aligned}
(k\mathbf{F})(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= k\,\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && \text{por definición de la aplicación } k\mathbf{F}\\
&= k\big(\mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{F}(\mathbf{v})\big) && \text{por linealidad de } \mathbf{F}\\
&= k\ \mathbf{F}(\mathbf{u})+k\,\mathbf{F}(\mathbf{v}) && \text{por propiedades de la suma de vectores en } \mathbf{W}\\
&= (k\,\mathbf{F})(\mathbf{u})+(k\,\mathbf{F})(\mathbf{v}) && \text{por definición de la aplicación } k\mathbf{F}
\end{aligned}$$

Queda como ejercicio para el lector probar que $(k\mathbf{F})(a\,\mathbf{u})=a\big((k\,\mathbf{F})(\mathbf{u})\big)$ con $a\in\mathbf{K}$. #

Teorema 4.5.2 Sean $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$.

Si $\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ y $\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ son aplicaciones lineales entonces la aplicación $\mathbf{T}\circ\mathbf{F}$ también lo es.

Demostración:

Para probar que $\mathbf{T}\circ\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\ \mathbf{W};\ \ (\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u})=\mathbf{T}\big(\mathbf{F}(\mathbf{u})\big)$ es una aplicación lineal, planteamos:

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v})) && \text{por definición de aplicación compuesta}\\ &= \mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u})+\mathbf{F}(\mathbf{v})) && \text{por linealidad de } \mathbf{F}\\ &= \mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}))+\mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{v})) && \text{por linealidad de } \mathbf{T}\\ &= (\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u})+(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{v}) && \text{por definición de aplicación compuesta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(k\,\mathbf{u}) &= \mathbf{T}(\mathbf{F}(k\,\mathbf{u})) && \text{por definición de aplicación compuesta}\\ &= \mathbf{T}(k\,\mathbf{F}(\mathbf{u})) && \text{por linealidad de } \mathbf{F}\\ &= k\,\mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u})) && \text{por linealidad de } \mathbf{T}\\ &= k\,(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u}) && \text{por definición de aplicación compuesta}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aplicación $\mathbf{T}\circ\mathbf{F}$ es lineal. #

4.5.1 Propiedades de la Composición de Aplicaciones Lineales

a) **Asociatividad:** La composición de aplicaciones es asociativa (no se requiere que sean lineales). Esto es, dadas las aplicaciones

$\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$, $\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ y $\mathbf{H}:\mathbf{W}\to\mathbf{Z}$ se verifica que: $\mathbf{H}\circ(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})=(\mathbf{H}\circ\mathbf{T})\circ\mathbf{F}$.

b) **Distributividad:** Entre aplicaciones lineales, la composición distribuye a izquierda y a derecha sobre la suma, es decir que si

$\mathbf{F}_1:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$, $\mathbf{F}_2:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$, $\mathbf{T}_1:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ y $\mathbf{T}_2:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ son aplicaciones lineales, entonces se verifica que:

a) $\mathbf{T}_1\circ(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2)=\mathbf{T}_1\circ\mathbf{F}_1+\mathbf{T}_1\circ\mathbf{F}_2$ b) $(\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2)\circ\mathbf{F}_1=\mathbf{T}_1\circ\mathbf{F}_1+\mathbf{T}_2\circ\mathbf{F}_1$

c) Además, se verifica $k(\mathbf{T}_1\circ\mathbf{F}_1)=(k\,\mathbf{T}_1)\circ\mathbf{F}_1=\mathbf{T}_1\circ(k\,\mathbf{F}_1)$ con $k\in\mathbf{K}$.

Queda como ejercicio para el lector la demostración de las propiedades enunciada en 1.), 2.) y 3.).

d) Sean $\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ y $\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ aplicaciones lineales inversibles. La aplicación $\mathbf{T}\circ\mathbf{F}$ es inversible y su inversa es $\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{T}^{-1}$.
Basta verificar que: $(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})\circ(\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{T}^{-1})=id_{\mathbf{W}}$ y $(\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{T}^{-1})\circ(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})=id_{\mathbf{U}}$.

- $(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})\circ(\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{T}^{-1})=\mathbf{T}\circ(\mathbf{F}\circ\mathbf{F}^{-1})\circ\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{T}\circ id_{\mathbf{V}}\circ\mathbf{T}^{-1}=(\mathbf{T}\circ id_{\mathbf{V}})\circ\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{T}\circ\mathbf{T}^{-1}=id_{\mathbf{W}}$.

- La segunda relación se verifica de la misma forma, quedando como ejercicio para el lector.

4.6. El Vectorial $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$

Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**.

Se denota con $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$. Esto es

$$\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})=\{\ \mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}/\ \mathbf{F} \text{ es una aplicación lineal}\}.$$

Si se consideran las operaciones de adición y multiplicación por un escalar que definimos (**Definición 4.5.1 y Teorema 4.5.1**) en el conjunto $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo **K**. En efecto,

- El vector nulo de $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ es la aplicación nula: $\mathbf{0}:\mathbf{V}\to\mathbf{W};\quad \mathbf{v}\to\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{W}}$.
- La aplicación opuesta a $\mathbf{F}\in\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ es $-\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W};\ \mathbf{v}\to-\mathbf{F}(\mathbf{v})$ la cual pertenece a $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$.
- La asociatividad y conmutatividad de la adición en $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ son consecuencia de las propiedades de la adición en **W**.
  Si $\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}$ son aplicaciones lineales de **V** en **W** se tiene:
  $$(\mathbf{F}+\mathbf{G})+\mathbf{H}=\mathbf{F}+(\mathbf{G}+\mathbf{H})$$
  $$\mathbf{F}+\mathbf{G}=\mathbf{G}+\mathbf{F}$$
- Análogamente, la definición de las operaciones en $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ y las propiedades de las operaciones vectoriales en **W**, permiten probar las propiedades siguientes:
  $$\left.\begin{array}{c} k(\mathbf{F}+\mathbf{G})=k\,\mathbf{F}+k\,\mathbf{G} \\ (k_1+k_2)\mathbf{F}=k_1\mathbf{F}+k_2\mathbf{F} \\ (k_1k_2)\mathbf{F}=k_1(k_2\mathbf{F}) \\ 1\mathbf{F}=\mathbf{F}\end{array}\right\}\quad \text{para } \mathbf{F},\mathbf{G}\in\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W}) \text{ y } k_1,k_2\in\mathbf{K}$$

Un cuerpo **K** es un espacio vectorial sobre si mismo (de dimensión 1), por lo tanto, pueden definirse aplicaciones lineales de **V** en **K** las cuales reciben el nombre de **formas** o **funcionales lineales**.

El espacio vectorial $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{K})=\{\ \mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{K}/\ \mathbf{F} \text{ es una aplicación lineal}\}$ se lo denota $\mathbf{V^*}$ y se lo llama "**espacio dual**" de **V**.

4.6.1. Operadores Lineales

> **Definición 4.6.1.1** Sea **V** un espacio vectorial sobre un cuerpo **K**.
>
> Diremos que $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ es un **operador lineal** sobre **V** si **F** es una aplicación lineal de **V** en **V**.

Denotaremos $\mathbf{L}(\mathbf{V})=\{\ \mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}/\ \mathbf{F} \text{ es una aplicación lineal}\}$ al conjunto de los operadores lineales sobre **V** que, con la adición y la multiplicación por escalar definidas en **Definición 4.5.1 y Teorema 4.5.1**, es un espacio vectorial sobre el cuerpo **K**.

La composición de operadores lineales sobre **V** está siempre definida y da por resultado otro operador lineal en **V**, o sea que es también una operación interna en $\mathbf{L}(\mathbf{V})$.

La aplicación **identidad** es elemento neutro para esta operación. En efecto, para cualquier operador lineal $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}(id_{\mathbf{V}}\circ\mathbf{F})(\mathbf{v})=id_{\mathbf{V}}(\mathbf{F}(\mathbf{v}))=\mathbf{F}(\mathbf{v})\\ (\mathbf{F}\circ id_{\mathbf{V}})(\mathbf{v})=\mathbf{F}(id_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}))=\mathbf{F}(\mathbf{v})\end{array}\right\}\ \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{V}$$

es decir que $id_{\mathbf{V}}\circ\mathbf{F}=\mathbf{F}\circ id_{\mathbf{V}}=\mathbf{F}$.

Debe observarse que si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ son operadores lineales sobre **V**, en general, $\mathbf{F}\circ\mathbf{G}\neq\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$**,** es decir que la operación "composición" no es conmutativa.

Las propiedades de la composición de aplicaciones lineales permiten afirmar que $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ con las operaciones de adición y composición, tiene estructura de **anillo** (no conmutativo).

Además, si se considera la operación externa de multiplicación por escalar, $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ es un **Álgebra Lineal** sobre **K**.

Ejemplo

Sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ operadores lineales definidos sobre $\mathbb{R}^3$ por:

$$\mathbf{F}((x,y,z))=(x,0,z),\quad \mathbf{G}((x,y,z))=(y,x,z)\,.$$

Observar que $\mathbf{F}\circ\mathbf{G}\neq\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}\circ\mathbf{G})((x,y,z))&=\mathbf{F}(\mathbf{G}((x,y,z)))\\ &=\mathbf{F}((y,\,x,\,z))\\ &=(y,\ 0,\,z)\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})((x,y,z))&=\mathbf{G}(\mathbf{F}((x,y,z)))\\ &=\mathbf{G}((x,0,\,z))\\ &=(0,\,x,\,z)\end{aligned}$$

4.7. Aplicaciones Lineales y Matrices

4.7.1 Aplicaciones Lineales entre Vectoriales de Matrices Columna

Sea **A** una matriz $m \times n$ con elementos en el campo **K**. Vimos al comienzo de este capítulo (**Ejemplo 2**) que la "multiplicación por **A**" define una aplicación lineal entre los vectoriales $\mathbf{K}^{n\times 1}$ y $\mathbf{K}^{m\times 1}$, que asigna a cada $\mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1}$ el vector $\mathbf{A}.\mathbf{X} \in \mathbf{K}^{m\times 1}$.

1. Consideremos, por ejemplo, la aplicación lineal $\mathbf{L_A} : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ dada por $\mathbf{L_A}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}.\mathbf{X}$

con $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. La aplicación asigna al vector $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ la imagen:

$$\mathbf{L_A}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}.$$

Para los vectores $\mathbf{E}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sus imágenes correspondientes son:

$$\mathbf{L_A}(\mathbf{E}^1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_A}(\mathbf{E}^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L_A}(\mathbf{E}^3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Notar que las imágenes de los vectores de la base $\mathbf{B} = \left(\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2, \mathbf{E}^3\right)$ de $\mathbb{R}^{3\times 1}$ son las columnas de la matriz **A**.

2. Sea ahora $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ la aplicación lineal definida por la asignación:

$$\mathbf{E}^1 \to \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^2 \to \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^3 \to \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{B} = \left(\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2, \mathbf{E}^3\right)$ base canónica de $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Si consideramos un vector cualquiera $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ su imagen correspondiente será:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) &= \mathbf{F}\left(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \mathbf{F}\left(x_1\,\mathbf{E}^1 + x_2\,\mathbf{E}^2 + x_3\,\mathbf{E}^3\right) \\
&= x_1\,\mathbf{F}\left(\mathbf{E}^1\right) + x_2\,\mathbf{F}\left(\mathbf{E}^2\right) + x_3\,\mathbf{F}\left(\mathbf{E}^3\right) \\
&= x_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{F(X)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Es decir que la aplicación **F** puede realizarse mediante la multiplicación por la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^1 \ \mathbf{A}^2 \ \mathbf{A}^3 \end{bmatrix}$$

cuyas columnas son las imágenes por **F** de los vectores de la base $\mathbf{B} = \left(\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2, \mathbf{E}^3\right)$ de $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Ésta es la única matriz que realiza la aplicación **F**.

En efecto, si se tuviera $\mathbf{F(X)} = \mathbf{M}\,.\,\mathbf{X}$ con $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 \ \mathbf{M}^2 \ \mathbf{M}^3 \end{bmatrix}$ resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A}^1 = \mathbf{F}(\mathbf{E}^1) = \mathbf{M}\,.\,\mathbf{E}^1 = \mathbf{M}^1 \\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{F}(\mathbf{E}^2) = \mathbf{M}\,.\,\mathbf{E}^2 = \mathbf{M}^2 \\ \mathbf{A}^3 = \mathbf{F}(\mathbf{E}^3) = \mathbf{M}\,.\,\mathbf{E}^3 = \mathbf{M}^3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = \mathbf{A}.$$

Lo que hemos observado en los dos ejemplos anteriores, se puede generalizar sin dificultad al caso de una aplicación lineal $\mathbf{F}:\mathbf{K}^{n\times 1} \rightarrow \mathbf{K}^{m\times 1}$ arbitraria.

Si **A** es la matriz cuyas columnas son las imágenes por **F** de los vectores de la base canónica de $\mathbf{K}^{n\times 1}$ es decir $\mathbf{A}^{\mathrm{j}} = \mathbf{F}(\mathbf{E}^{\mathrm{j}})$ para $\mathrm{j} = 1,2,\ldots,n$ resulta: $\mathbf{F(X)} = \mathbf{A}\,.\,\mathbf{X}$ siendo **A** la única matriz que realiza **F**.

Proposición 4.7.1.1 Sean $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbf{K}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbf{K}$. Se verifican las siguientes propiedades:

a) $\mathbf{L_A} + \mathbf{L_B} = \mathbf{L_{A+B}}$
b) $\mathbf{L_A} \circ \mathbf{L_B} = \mathbf{L_{A.B}}$
c) $\alpha\,\mathbf{L_A} = \mathbf{L}_{\alpha\mathbf{A}}$

Demostración:

a) Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{L_A}:\mathbf{K}^{n\times 1} \rightarrow \mathbf{K}^{n\times 1}, \quad \mathbf{L_A}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\,.\,\mathbf{X}$$
$$\mathbf{L_B}:\mathbf{K}^{n\times 1} \rightarrow \mathbf{K}^{n\times 1}, \quad \mathbf{L_B}(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\,.\,\mathbf{X}$$

Planteamos:

$$\left(\mathbf{L_B} + \mathbf{L_A}\right)(\mathbf{X}) = \mathbf{L_A}(\mathbf{X}) + \mathbf{L_B}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\,.\,\mathbf{X} + \mathbf{B}\,.\,\mathbf{X} = \left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\right).\,\mathbf{X} = \mathbf{L_{A+B}}(\mathbf{X}) \quad \forall\,\mathbf{X} \in \mathbf{K}^{n\times 1}$$

y por lo tanto $\mathbf{L_A} + \mathbf{L_B} = \mathbf{L_{A+B}}$.

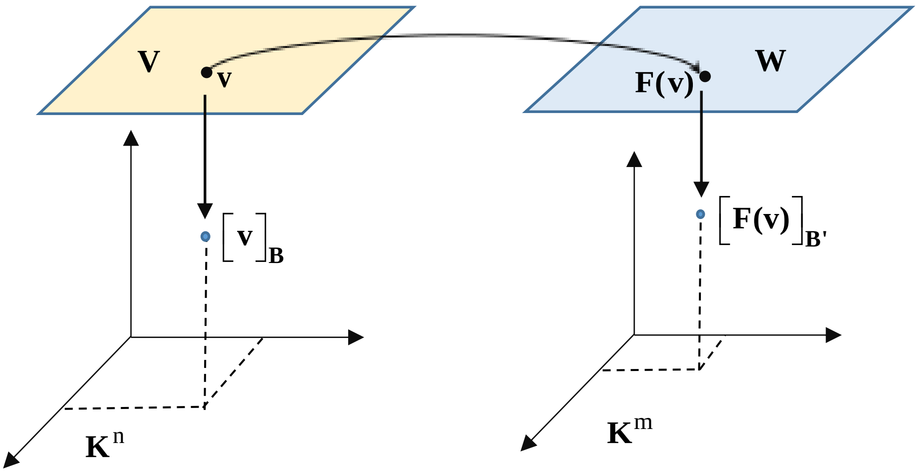
b) y c) quedan como ejercicio para el lector.

4.7.2 Matriz de una Aplicación Lineal

Veremos a continuación como cualquier aplicación lineal entre vectoriales de dimensión finita puede realizarse en cierta forma a través de una multiplicación matricial.
La idea básica es trabajar con las matrices de coordenadas de los vectores en vez de hacerlo con los vectores mismos.

> **Teorema 4.7.2.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, con $dim\,\mathbf{V} = n$ y $dim\,\mathbf{W} = m$. Sea $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una aplicación lineal.
>
> Si $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ es una base de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{B'} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ una base de $\mathbf{W}$ entonces existe una única matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m \times n}$ tal que $[\mathbf{F}(\mathbf{v})]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$

Demostración:



Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, teniendo en cuenta que $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ es una base de $\mathbf{V}$ se tiene que:

$$\mathbf{v} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n$$

Queremos hallar la imagen por $\mathbf{F}$ de $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{v}_n)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1) + x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2) + \cdots + x_n\mathbf{F}(\mathbf{v}_n) \qquad \text{por ser } \mathbf{F} \text{ lineal}$$

Tomando vectores de coordenadas, se tiene:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{F}(\mathbf{v})]_{\mathbf{B'}} &= [x_1\mathbf{F}(\mathbf{v}_1) + x_2\mathbf{F}(\mathbf{v}_2) + \cdots + x_n\mathbf{F}(\mathbf{v}_n)]_{\mathbf{B'}} \\
&= x_1[\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)]_{\mathbf{B'}} + x_2[\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)]_{\mathbf{B'}} + \cdots + x_n[\mathbf{F}(\mathbf{v}_n)]_{\mathbf{B'}} \\
&= \underbrace{\Big[[\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)]_{\mathbf{B'}}\ [\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)]_{\mathbf{B'}} \cdots [\mathbf{F}(\mathbf{v}_n)]_{\mathbf{B'}}\Big]}_{\mathbf{A}} . \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left[\mathbf{F(v)}\right]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}} \qquad \text{donde: } \mathbf{A} = \left[\left[\mathbf{F(v_1)}\right]_{\mathbf{B'}} \left[\mathbf{F(v_2)}\right]_{\mathbf{B'}} \cdots \left[\mathbf{F(v_{\mathit{n}})}\right]_{\mathbf{B'}}\right].$$

A es la matriz cuyas columnas son las coordenadas respecto a la base $\mathbf{B'}$ de las imágenes por **F**, de los vectores de la base **B**. En símbolos: $\mathbf{A}^{\mathrm{j}} = \left[\mathbf{F(v_j)}\right]_{\mathbf{B'}}$ $\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, n$.

Para probar la unicidad, supongamos que existe $\mathbf{C} \in \mathbf{K}^{m\times n}$, tal que $\left[\mathbf{F(v)}\right]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{C}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}}$.
Luego

$$\mathbf{A}^1 = \left[\mathbf{F(v_1)}\right]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{C}.\left[\mathbf{v}_1\right]_{\mathbf{B}} = \mathbf{C}.\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \mathbf{C}^1 \quad \Rightarrow \mathbf{A}^1 = \mathbf{C}^1$$

De forma similar, se prueba la igualdad para las restantes columnas:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{j}} = \left[\mathbf{F(v_j)}\right]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{C}.\left[\mathbf{v}_{\mathrm{j}}\right]_{\mathbf{B}} = \mathbf{C}.\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{array}{l}\\\\ \leftarrow \text{lugar j}\\\\\\\end{array} \quad \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{j}} = \mathbf{C}^{\mathrm{j}}.$$

Por lo tanto $\mathbf{A} = \mathbf{C}$. #

> **Definición 4.7.2.1** La matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m\times n}$ tal que
>
> $$\mathbf{A} = \left[\left[\mathbf{F(v_1)}\right]_{\mathbf{B'}} \left[\mathbf{F(v_2)}\right]_{\mathbf{B'}} \cdots \left[\mathbf{F(v_{\mathit{n}})}\right]_{\mathbf{B'}}\right]$$
>
> donde: $\mathbf{F}:\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es una aplicación lineal.
> Con $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ base de **V** y $\mathbf{B'} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ base de **W**.
>
> Se denomina **Matriz de la Aplicación F** con respecto a las bases $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$.
> Se denota por: $\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$.

Observación: La matriz de la aplicación lineal **F**, depende de las bases ordenadas $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$. La misma aplicación es representada por distintas matrices respecto a pares de bases distintas.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 - x_3)$. Se quiere determinar la matriz de **F** con respecto a las bases:

$$\mathbf{B} = ((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)) \text{ y } \mathbf{B'} = ((1,0), (1,1)).$$

Para ello, planteamos:

$$\mathbf{F}\big((1,1,1)\big)=(3,0)=3.(1,0)+0.(1,1) \quad \Rightarrow \quad \big[\mathbf{F}\big((1,1,1)\big)\big]_{\mathbf{B'}}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}\big((0,1,1)\big)=(2,0)=2.(1,0)+0.(1,1) \quad \Rightarrow \quad \big[\mathbf{F}\big((0,1,1)\big)\big]_{\mathbf{B'}}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}\big((0,0,1)\big)=(1,-1)=2.(1,0)+(-1).(1,1) \Rightarrow \big[\mathbf{F}\big((0,0,1)\big)\big]_{\mathbf{B'}}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

Luego

$$\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}\left(\mathbf{F}\right)=\Big[\big[\mathbf{F}\big((1,1,1)\big)\big]_{\mathbf{B'}}\ \big[\mathbf{F}\big((0,1,1)\big)\big]_{\mathbf{B'}}\ \big[\mathbf{F}\big((0,0,1)\big)\big]_{\mathbf{B'}}\Big]=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2

Si en el ejemplo anterior consideramos las bases: $\mathbf{B}_1=\big((1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\big)$ base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{B'}_1=\big((0,1),\ (1,0)\big)$base de $\mathbb{R}^2$. Resulta:

$$\mathbf{F}(e_1)=\mathbf{F}\big((1,0,0)\big)=(1,0)=0.(0,1)+1.(1,0) \Rightarrow \big[\mathbf{F}(e_1)\big]_{\mathbf{B'}_1}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(e_2)=\mathbf{F}\big((0,1,0)\big)=(1,1)=1.(0,1)+1.(1,0) \Rightarrow \big[\mathbf{F}(e_2)\big]_{\mathbf{B'}_1}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(e_3)=\mathbf{F}\big((0,0,1)\big)=(1,-1)=(-1).(0,1)+1.(1,0) \Rightarrow \big[\mathbf{F}(e_3)\big]_{\mathbf{B'}_1}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

Luego

$$\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}_1}^{\mathbf{B}_1}\left(\mathbf{F}\right)=\Big[\big[\mathbf{F}(e_1)\big]_{\mathbf{B'}_1}\ \big[\mathbf{F}(e_2)\big]_{\mathbf{B'}_1}\ \big[\mathbf{F}(e_3)\big]_{\mathbf{B'}_1}\Big]=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Observar que la misma aplicación es representada por una matriz distinta dado que el par de bases considerado es diferente al del ejemplo 1.

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{F}$: $\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_2$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}\left(aX+b\right)=X(aX+b)=aX^2+bX$. Se quiere determinar la matriz de $\mathbf{F}$ con respecto a las bases $\mathbf{B}=\left(X,1\right)$ y $\mathbf{B'}=\left(X^2,X,1\right)$ de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ respectivamente. Tenemos que:

$$\mathrm{F}(X)=X^2=1.X^2+0.X+0 \quad \Rightarrow \big[\mathrm{F}(X)\big]_{\mathbf{B'}}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{F}(1)=X=0.X^2+1.X+0 \quad \Rightarrow \big[\mathrm{F}(X)\big]_{\mathbf{B'}}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Luego

$$\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\left[[\mathbf{F}(X)]_{\mathbf{B}'}\,[\mathbf{F}(1)]_{\mathbf{B}'}\right]=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4

Si en el ejemplo anterior consideramos las bases $\mathbf{B}=(X,1)$ y $\mathbf{B'}_1=(X^2, X-1, X+1)$ de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ respectivamente.

Tenemos:

$\mathbf{F}(X)=X^2=a.X^2+b.(X-1)+c.(X+1)$ con $a=1$ y $b=c=0$ entonces $[\mathbf{F}(X)]_{\mathbf{B'}_1}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\mathbf{F}(1)=X=a.X^2+b.(X-1)+c.(X+1)$ con $a=0$ y $b+c=1$ entonces $[\mathbf{F}(1)]_{\mathbf{B'}_1}=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

Luego $\quad \mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}_1}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\left[[\mathbf{F}(X)]_{\mathbf{B'}_1}\,[\mathbf{F}(1)]_{\mathbf{B'}_1}\right]=\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$

Ejemplo 5

Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal y sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0\\3&7\end{bmatrix}$ la matriz de $\mathbf{F}$ respecto de las bases $\mathbf{B}=\mathbf{B'}=((1,2),(0,1))$. Se quiere hallar:

a) $\mathbf{F}((2,5))$.

b) Definición de $\mathbf{F}$, dando $\mathbf{F}((x,y))$.

Resolvamos lo pedido

a) $(2,5)=2.(1,2)+1.(0,1)\ \Rightarrow\ [(2,5)]_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

$$[\mathbf{F}((2,5))]_{\mathbf{B'}}=\begin{bmatrix}2&0\\3&7\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\13\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{F}((2,5))=4.(1,2)+13.(0,1)=(4,21)$$

b) $(x,y)=x.(1,2)+(y-2x).(0,1)\ \Rightarrow\ [(x,y)]_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}x\\y-2x\end{bmatrix}$

$$[\mathbf{F}((x,y))]_{\mathbf{B'}}=\begin{bmatrix}2&0\\3&7\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y-2x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\7y-11x\end{bmatrix}$$

Entonces $\mathbf{F}((x,y))=(2x).(1,2)+(7y-11x).(0,1)=(2x,7y-7x)$.

Ejemplo 6

Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal y sea $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ la matriz de $\mathbf{F}$ respecto de las bases $\mathbf{B}=\big((1,2),(0,1)\big)$ y $\mathbf{B'}=\big((0,1),(1,0)\big)$. Se quiere hallar: $\mathbf{F}\big((x,y)\big)$.

Teniendo en cuenta que $[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ planteamos:

$$\mathbf{v} = (x,y) = x.(1,2) + (y-2x).(0,1) \quad \Rightarrow \quad [(x,y)]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y-2x \end{bmatrix}$$

Luego se tiene $[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} \quad \Rightarrow \quad \big[\mathbf{F}\big((x,y)\big)\big]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y-2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ -11x+7y \end{bmatrix}$

Finalmente

$$\mathbf{F}\big((x,y)\big) = 2x.(0,1) + (-11x+7y).(1,0) = \big(-11x+7y,\ 2x\big)$$

Ejemplo 7

Sea $\mathbf{F}:\ \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_2$ la aplicación lineal cuya matriz con respecto a las bases $\mathbf{B}=\big(1, X\big)$ y $\mathbf{B'}=\big(X-1, X+1, X^2\big)$ está dada por $\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Se quiere determinar $\mathrm{F}\big(aX+b\big)$.

Consideramos $\mathbf{p} = aX+b \in \mathbf{P}_1$ y hallamos el vector coordenado $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$.

Luego (teniendo en cuenta que $[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$) planteamos:

$$\big[\mathrm{F}\big(aX+b\big)\big]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.\big[aX+b\big]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ -2a \\ b+\frac{1}{2}a \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mathrm{F}\big(aX+b\big) = (-b).(X-1) + (-2a).(X+1) + \big(b+\tfrac{1}{2}a\big).X^2$$
$$= \big(b+\tfrac{1}{2}a\big).X^2 + \big(-b-2a\big).X + \big(b-2a\big)$$

Observación: Si se conoce la **Matriz de la Aplicación F** con respecto a las bases $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$, esto es $\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$, y se desea obtener la imagen por **F** de un vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se procede de la siguiente forma:

a) Se obtiene el vector coordenado de **v** en la base **B**.

b) Se multiplica **A** por $[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$, obteniéndose así $[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}}$.

c) Conocido $[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}}$ se reconstruye el vector $\mathbf{F(v)}$.

4.7.3 Cambio de Base

Nos interesa plantear y resolver el problema de cómo se modifican las matrices de una aplicación lineal cuando cambian las bases.

> **Teorema 4.7.3.1** Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ de dimensión finita. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ una aplicación lineal.
> Sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B_1}$ bases de $\mathbf{V}$, y sea $\mathbf{P}$ la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B_1}$.
> Sean $\mathbf{B'}$ y $\mathbf{B_2}$ bases de $\mathbf{W}$, y sea $\mathbf{Q}$ la matriz de cambio de base de $\mathbf{B'}$ a $\mathbf{B_2}$.
> Si $\mathbf{A}=\mathbf{M_{B'}^{B}}(\mathbf{F})$ es la matriz de la aplicación $\mathbf{F}$ con respecto a las bases $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$ entonces la matriz que representa a $\mathbf{F}$ con respecto a las bases $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$ está dada por $\mathbf{Q^{-1}.A.P}=\mathbf{M_{B_2}^{B_1}}(\mathbf{F})=\mathbf{C}$.

Demostración:

Si $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ se tiene que:

$$\left[\mathbf{F(v)}\right]_{\mathbf{B'}}=\mathbf{M_{B'}^{B}}(\mathbf{F}).\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}}=\mathbf{A}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}} \qquad (1)$$

$$\left[\mathbf{F(v)}\right]_{\mathbf{B_2}}=\mathbf{M_{B_2}^{B_1}}(\mathbf{F}).\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B_1}}=\mathbf{C}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B_1}} \qquad (2)$$

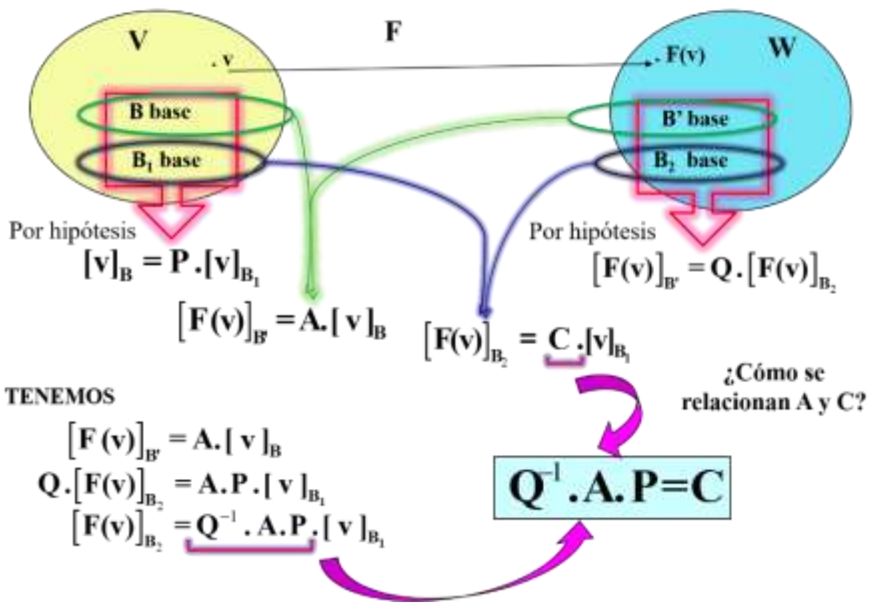
Por otro lado, considerando que:

- ✓ $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B_1}$ son bases de $\mathbf{V}$ con $\mathbf{P}$ la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B_1}$ se tiene $\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}}=\mathbf{P}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B_1}}$.
- ✓ $\mathbf{B'}$ y $\mathbf{B_2}$ son bases de $\mathbf{W}$ con $\mathbf{Q}$ la matriz de cambio de base de $\mathbf{B'}$ a $\mathbf{B_2}$ se tiene $\left[\mathbf{F(v)}\right]_{\mathbf{B'}}=\mathbf{Q}.\left[\mathbf{F(v)}\right]_{\mathbf{B_2}}$.

Reemplazando en (1), obtenemos $\mathbf{Q}.\left[\mathbf{F(v)}\right]_{\mathbf{B_2}}=\mathbf{A.P}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B_1}}$.

Luego $\left[\mathbf{F(v)}\right]_{\mathbf{B_2}}=\mathbf{Q^{-1}.A.P}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B_1}}$. Comparando esta última igualdad con (2) tenemos $\mathbf{Q^{-1}.A.P}=\mathbf{M_{B_2}^{B_1}}(\mathbf{F})=\mathbf{C}$. #

Esquema de lo demostrado



Nota Importante: Cuando se trabaja con operadores lineales $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ y se adopta la misma base para el vectorial **V** como espacio de partida y de llegada, se usa la notación $\mathbf{M_B}(\mathbf{F})$.
En particular si se cambia la base en el vectorial de una base **B** a una base $\mathbf{B'}$, resulta

$$\mathbf{M_{B'}}(\mathbf{F}) = \mathbf{P}^{-1}\,.\mathbf{M_B}(\mathbf{F})\mathbf{.P}$$

con **P** matriz de cambio de base de **B** a $\mathbf{B'}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ el operador lineal definido por $\mathbf{F}\left(\mathbf{(}x_1,x_2\mathbf{)}\right)=\mathbf{(}x_1+x_2,\,x_1-2x_2\mathbf{)}$. La matriz del operador con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ está dada por: $\mathbf{A}=\mathbf{M_B}(\mathbf{F})=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$.

Si ahora se considera la base $\mathbf{B}_1=\left(\mathbf{(}1,-1\mathbf{)},\,\mathbf{(}2,1\mathbf{)}\right)$ de $\mathbb{R}^2$, se quiere hallar $\mathbf{M_{B_1}}(\mathbf{F})$.

La matriz **P** de cambio de base de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}_1$ está dada por: $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ y en consecuencia $\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & -2/3\\ 1/3 & 1/3\end{bmatrix}$ es la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}$.

Entonces $$\mathbf{M_{B_1}}(\mathbf{F})=\underbrace{\begin{bmatrix}1/3 & -2/3\\ 1/3 & 1/3\end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{P}}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz es $\mathbf{M_{B'}^{B}}(\mathbf{F})=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, donde las respectivas bases son: $\mathbf{B}=\left(\mathbf{(}1,1,1\mathbf{)},\,\mathbf{(}0,1,1\mathbf{)},\,\mathbf{(}0,0,1\mathbf{)}\right)$ y $\mathbf{B'}=\left(\mathbf{(}1,0\mathbf{)},\,\mathbf{(}1,1\mathbf{)}\right)$.

Si ahora la base **B** cambia por $\mathbf{B}_1=\left(\mathbf{(}1,0,0\mathbf{)},\,\mathbf{(}0,1,0\mathbf{)},\,\mathbf{(}0,0,1\mathbf{)}\right)$ y la base $\mathbf{B'}$ cambia por $\mathbf{B'}_1=\left(\mathbf{(}0,1\mathbf{)},\,\mathbf{(}1,0\mathbf{)}\right)$, encontrar la $\mathbf{M_{B'_1}^{B_1}}(\mathbf{F})$.

- La matriz **P** de cambio de base de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}_1$ está dada por: $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$
- La matriz **Q** de cambio de base de $\mathbf{B'}$ a $\mathbf{B'}_1$ está dada por: $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

Luego $\mathbf{M_{B'_1}^{B_1}}(\mathbf{F})=\mathbf{Q}^{-1}\,\mathbf{.A.P}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

4.7.4 Aplicación Lineal definida por una Matriz

Hemos visto que toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m\times n}$ define una aplicación lineal entre los vectoriales $\mathbf{K}^{n\times 1}$ y $\mathbf{K}^{m\times 1}$ dada por

$$\mathbf{L_A}:\ \mathbf{K}^{n\times 1} \to \mathbf{K}^{m\times 1}, \quad \mathbf{L_A(X) = A.X}$$

Veremos que la misma matriz **A** define también una aplicación lineal entre los espacios vectoriales **V** y **W** de dimensiones *n* y *m* respectivamente a condición de elegir bases $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$ en **V** y $\mathbf{W}$.

> **Teorema 4.7.4.1** Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre un cuerpo **K**, con $dim\,\mathbf{V} = n$ y $dim\,\mathbf{W} = m$. Sean $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base de **V** y $\mathbf{B'} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$ una base de **W**.
>
> Si $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m\times n}$ entonces existe una aplicación lineal $\mathbf{F_A}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tal que $[\mathbf{F_A(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$.

Demostración:

Sean los isomorfismos definidos por las bases $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$

$$\varphi_{\mathbf{B}}: \mathbf{V} \to \mathbf{K}^{n\times 1}, \quad \varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$$

$$\varphi_{\mathbf{B'}}: \mathbf{W} \to \mathbf{K}^{m\times 1}, \quad \varphi_{\mathbf{B'}}(\mathbf{w}) = [\mathbf{w}]_{\mathbf{B'}}$$

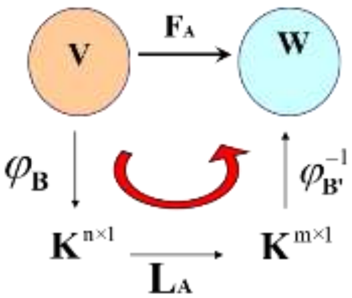
La matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m\times n}$ define una aplicación lineal entre los vectoriales $\mathbf{K}^{n\times 1}$ y $\mathbf{K}^{m\times 1}$ dada por

$$\mathbf{L_A}:\ \mathbf{K}^{n\times 1} \to \mathbf{K}^{m\times 1}, \quad \mathbf{L_A(X) = A.X}$$

Definimos la aplicación lineal entre **V** y **W** por:

$$\mathbf{F_A}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$$

$$\mathbf{F_A} = \varphi_{\mathbf{B'}}^{-1} \circ \mathbf{L_A} \circ \varphi_{\mathbf{B}}$$



FA verifica la relación $[\mathbf{F_A(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$, pues si $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se tiene:

$$\mathbf{F_A(v)} = \left(\varphi_{\mathbf{B'}}^{-1} \circ \mathbf{L_A} \circ \varphi_{\mathbf{B}}\right)(\mathbf{v}) = \varphi_{\mathbf{B'}}^{-1}\left(\mathbf{L_A}\left(\varphi_{\mathbf{B}}(\mathbf{v})\right)\right) = \varphi_{\mathbf{B'}}^{-1}\left(\mathbf{L_A}\left([\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}\right)\right) = \varphi_{\mathbf{B'}}^{-1}\left(\mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}\right)$$

lo que equivale a decir:

$$\varphi_{\mathbf{B'}}\left(\mathbf{F_A(v)}\right) = [\mathbf{F_A(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}. \ \#$$

Observación: Es inmediato que $\mathbf{M_{B'}^{B}}\left(\mathbf{F_A}\right) = \mathbf{A}$.

4.7.5 Isomorfismo entre $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ y $\mathbf{K}^{m\times n}$

Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, con $dim(\mathbf{V}) = n$ y $dim(\mathbf{W}) = m$.

La elección de bases $\mathbf{B}$ en $\mathbf{V}$ y $\mathbf{B'}$ en $\mathbf{W}$ permite asignar a cada aplicación lineal $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una matriz bien determinada.

Queda así definida una aplicación entre los espacios vectoriales $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ (conjunto de aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$) y $\mathbf{K}^{m\times n}$ que denotaremos: $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}$

Esto es $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}} : \mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W}) \to \mathbf{K}^{m\times n}$, $\mathbf{F} \to \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$.

Teorema 4.7.5.1 Sean $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, con $dim\,\mathbf{V} = n$ y $dim\,\mathbf{W} = m$. Sean $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ es una base de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{B'} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ una base de $\mathbf{W}$. La aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}} : \mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W}) &\to \mathbf{K}^{m\times n} \\ \mathbf{F} &\to \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración:
Para demostrar el teorema, se procederá a probar que la aplicación $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}$ es una aplicación lineal biyectiva.

1. Probaremos que la función $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}$ es una aplicación lineal. Para ello debemos verificar que:

a) $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}+\mathbf{T}) = \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{T})$
b) $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(k\,\mathbf{F}) = k\,\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$

para todo $\mathbf{F}, \mathbf{T} \in \mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$; $k \in \mathbf{K}$.

Veamos a)

Sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{T}$ aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$ y sea $k \in \mathbf{K}$. Sabemos que las aplicaciones $\mathbf{F}+\mathbf{T}$ y $k\mathbf{F}$ son lineales.

Sean $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \mathbf{A}$ y $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{T}) = \mathbf{C}$ que verifican $[\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ y $[\mathbf{T(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{C}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ (*)

Para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, se tiene que $(\mathbf{F}+\mathbf{T})\mathbf{(v)} = \mathbf{F(v)} + \mathbf{T(v)}$ (por definición de $\mathbf{F}+\mathbf{T}$)

Tomando vectores de coordenadas, se tiene:

$$[(\mathbf{F}+\mathbf{T})\mathbf{(v)}]_{\mathbf{B'}} = [\mathbf{F(v)}]_{\mathbf{B'}} + [\mathbf{T(v)}]_{\mathbf{B'}}$$

Reemplazando (*) en la expresión anterior resulta:

$$[(\mathbf{F}+\mathbf{T})\mathbf{(v)}]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} + \mathbf{C}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$$

la propiedad distributiva de la multiplicación de matrices permite escribir:

$$\left[(\mathbf{F}+\mathbf{T})(\mathbf{v})\right]_{\mathbf{B'}} = (\mathbf{A}+\mathbf{C}).\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}}$$

Esta última igualdad muestra que $(\mathbf{A}+\mathbf{C})$ es la matriz de la aplicación $(\mathbf{F}+\mathbf{T})$ o sea:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}+\mathbf{T}) = \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) + \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{T}).$$

c) La prueba queda como ejercicio para el lector.

2. Probaremos que la aplicación $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}$ es una biyección o sea: $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}$ es suryectiva e inyectiva.

- Teniendo en cuenta el **Teorema 4.7.4.1** toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m\times n}$ define una aplicación lineal $\mathbf{F_A}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tal que $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \mathbf{A}$. Esto muestra que $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}$ es suryectiva.

- Para ver que $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}$ es una aplicación inyectiva mostraremos que su núcleo se reduce a $\left\{\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{L(V,W)}}\right\}$ (es decir el único vector del núcleo de $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}$ es la aplicación nula).

Sea **F** una aplicación lineal perteneciente al núcleo de $\mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}$. Por lo tanto, su matriz es la matriz nula, es decir $\mathbf{0} = \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$.

Entonces, para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se tiene $\left[\mathbf{F(v)}\right]_{\mathbf{B'}} = \mathbf{0}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Luego $\mathbf{F(v)} = \mathbf{0_W}$ y por consiguiente **F** es la aplicación nula.

De lo probado en **1.** y **2.** se tiene que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}} : \mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W}) &\to \mathbf{K}^{m\times n} \\ \mathbf{F} &\to \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) \end{aligned}$$ es un isomorfismo. #

> **Observación:** Por ser isomorfos los espacios vectoriales $\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ y $\mathbf{K}^{m\times n}$, éstos tienen igual dimensión y, por lo tanto:
>
> $$dim(\mathbf{L}(\mathbf{V},\mathbf{W})) = dim(\mathbf{K}^{m\times n}) = m\times n = dim(\mathbf{W}).\ dim(\mathbf{V}).$$

4.7.6 Matriz de la Compuesta de Aplicaciones Lineales

Teorema 4.7.6.1 Sean $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbf{K}$, de dimensión finita. Sea $\mathbf{B}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n)$ una base de $\mathbf{U}$, $\mathbf{B'}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_p)$ una base de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{B''}=(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_m)$ una base de $\mathbf{W}$. Si se tiene las aplicaciones lineales

$$\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\mathbf{V} \quad \text{con} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\mathbf{A}$$

$$\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{W} \quad \text{con} \quad \mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B'}}(\mathbf{T})=\mathbf{C}$$

Entonces la matriz de la aplicación compuesta $\mathbf{T}\circ\mathbf{F}:\ \mathbf{U}\to\mathbf{W}$ está dada por:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})=\mathbf{C}.\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B'}}(\mathbf{T}).\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$$

Demostración:

Para todo $\mathbf{u}\in\mathbf{U}$ se tiene, por definición de aplicación compuesta, que:

$$(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u})=\mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}))$$

Tomando vectores de coordenadas, tenemos:

$$\left[(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u})\right]_{\mathbf{B''}}=\left[\mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}))\right]_{\mathbf{B''}}$$

Pero se sabe que $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\mathbf{A}$ y $\mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B'}}(\mathbf{T})=\mathbf{C}$, por lo tanto, se tiene:

$$\left[\mathbf{T}(\mathbf{F}(\mathbf{u}))\right]_{\mathbf{B''}}=\mathbf{C}.\left[\mathbf{F}(\mathbf{u})\right]_{\mathbf{B'}} \quad \text{y} \quad \left[\mathbf{F}(\mathbf{u})\right]_{\mathbf{B'}}=\mathbf{A}.[\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}.$$

Reemplazando en (*), obtenemos:

$$\left[(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})(\mathbf{u})\right]_{\mathbf{B''}}=\mathbf{C}.\mathbf{A}.[\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}$$

Luego:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{T}\circ\mathbf{F})=\mathbf{C}.\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B'}}(\mathbf{T}).\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}).\ \#$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sean las aplicaciones lineales $\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ y $\mathbf{L}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$ tales que

$$\mathbf{A}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&0&4\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{D}=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{L})=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{bmatrix}.$$

- La matriz de la aplicación lineal $(\mathbf{F}+\mathbf{L})$ es:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}+\mathbf{L})=\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})+\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{L})=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&0&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&6\\5&-1&4\end{bmatrix}$$

- La matriz de la aplicación lineal $(2\,\mathbf{F})$ es:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}(2\mathbf{F}) = 2.\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = 2.\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Sean las aplicaciones lineales $\mathbf{F}:\ \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ y $\mathbf{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tales que

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \mathbf{M}_{\mathbf{B}''}^{\mathbf{B}'}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- La matriz de la aplicación lineal compuesta $(\mathbf{T} \circ \mathbf{F})$ es:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}''}^{\mathbf{B}}(\mathbf{T} \circ \mathbf{F}) = \mathbf{M}_{\mathbf{B}''}^{\mathbf{B}'}(\mathbf{T}).\mathbf{M}_{\mathbf{B}'}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 13 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

4.7.7 Matriz del Operador Identidad

Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, con $dim\,\mathbf{V} = n$ y sea $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base de **V**. Consideremos el operador identidad $id_{\mathrm{V}}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $id_{\mathrm{V}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

$$id_{\mathrm{V}}(\mathbf{v}_1) = 1.\mathbf{v}_1 + 0.\mathbf{v}_2 + \cdots + 0.\mathbf{v}_n \quad \Rightarrow \quad [id_{\mathrm{V}}(\mathbf{v}_1)]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$id_{\mathrm{V}}(\mathbf{v}_2) = 0.\mathbf{v}_1 + 1.\mathbf{v}_2 + \cdots + 0.\mathbf{v}_n \quad \Rightarrow \quad [id_{\mathrm{V}}(\mathbf{v}_2)]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{etc.}$$

Luego

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(id_{\mathrm{V}}) = \mathbf{M}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{B}}(id_{\mathrm{V}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_n \ \textbf{matriz identidad}.$$

IMPORTANTE: Si se adoptan bases distintas para el vectorial **V** como espacio de partida y de llegada, la matriz que representa al operador identidad deja de ser la matriz identidad.

4.7.8 Isomorfismo entre las Estructuras de Álgebra de $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ y $\mathbf{K}^{n\times n}$

Sean **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, con $dim(\mathbf{V}) = n$.

Sea la base **B** en **V**, ésta permite asignar a cada operador lineal $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ una matriz bien determinada.

Entonces, la aplicación

$$\mathcal{M}_{\mathbf{B}}: \mathbf{L(V)} \to \mathbf{K}^{n\times n}$$
$$\mathbf{F} \to \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$$

no es sino un caso particular del **Teorema 4.7.5.1**, luego $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ es un isomorfismo entre los vectoriales $\mathbf{L(V)}$ y $\mathbf{K}^{n\times n}$.

Además, si **F** y **T** son operadores lineales sobre **V**, la compuesta siempre está definida y resulta (**Teorema 4.7.6.1**):

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{T}\circ\mathbf{F}) = \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{T}).\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$$

Estonces, la biyección $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ no sólo preserva la estructura vectorial de $\mathbf{L(V)}$ y $\mathbf{K}^{n\times n}$ sino que transforma la composición de operadores en multiplicación de sus correspondientes matrices y hace corresponder el elemento neutro de la composición de operadores en el elemento neutro de la multiplicación de matrices.

Luego decimos es un **isomorfismo de álgebra** entre $\mathbf{L(V)}$ y $\mathbf{K}^{n\times n}$.

Resulta también que

> **Teorema 4.7.8.1** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, de dimensión finita y sea **B** una base de **V**.
>
> El operador lineal $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ con $\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \mathbf{A}$ es inversible sí y sólo si la matriz que lo representa lo es.

Demostración:

Si **F** es inversible, existe $\mathbf{F}^{-1}$ tal que $\mathbf{F}\circ\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{F} = id_{\mathbf{V}}$. Luego

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(id_{\mathbf{V}}) = \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F}\circ\mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F}).\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F}^{-1}) \quad \mathbf{I}_n = \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(id_{\mathbf{V}}) = \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{F}) = \mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F}^{-1}).\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$$

De donde

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F}^{-1}) = (\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F}))^{-1}$$

Esto es, si **A** es la matriz del operador inversible **F**, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ es la matriz correspondiente al operador $\mathbf{F}^{-1}$. #

Se ha establecido una correspondencia entre aplicaciones lineales y matrices la cual depende de las bases elegidas en los respectivos espacios vectoriales de partida y llegada. Esto permite agilizar los cálculos al transformar, por ejemplo, la composición de aplicaciones en una multiplicación matricial, o la búsqueda de la inversa de una aplicación lineal con la de la inversa de una matriz, con el agregado que se han desarrollado software como el MATLAB sumamente aptos para el manipuleo de las matrices.

El paso siguiente, será ver la posibilidad de elegir bases convenientes para que la matriz que representa la aplicación lineal sea lo más sencilla posible.

En particular, se estudiará el caso de un operador lineal y las condiciones para que pueda ser representado en alguna base por una matriz diagonal.

4.8. Valores y Vectores Propios de un Operador Lineal

Sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{T}$ operadores lineales del espacio vectorial **V**.

Nos planteamos el siguiente problema: ¿Qué vectores de **V** tienen la misma imagen por **F** y por **T**?

Esto es, para que $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se verifica que $\mathbf{F(v) = T(v)}$.

Entonces $$\mathbf{F(v) - T(v) = \bar{0}_V} \Leftrightarrow \mathbf{(F-T)(v) = \bar{0}_V}$$

Es decir, que el conjunto de vectores $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ para los cuales $\mathbf{F(v) = T(v)}$ es el núcleo del operador diferencia $\mathbf{(F-T)}$.

Por lo tanto, el conjunto de vectores de $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ para los cuales $\mathbf{F(v) = T(v)}$ es un subespacio:

$$\mathbf{N_{F-T}} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ \mathbf{F(v) = T(v)} \right\}.$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sean los operadores lineales

$$\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{F}\left(\mathbf{(}x_1, x_2\mathbf{)}\right) = \mathbf{(}x_1 + 4x_2,\ x_1 + x_2\mathbf{)}$$
$$\mathbf{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{T}\left(\mathbf{(}x_1, x_2\mathbf{)}\right) = \mathbf{(}\text{-}x_1 + 5x_2, \text{-}3x_1 + 3x_2\mathbf{)}$$

El operador diferencia está definido por:

$$\left(\mathbf{F-T}\right)\left(\mathbf{(}x_1, x_2\mathbf{)}\right) = \mathbf{(}2x_1 - x_2, 4x_1 - 2x_2\mathbf{)}$$

El núcleo de $\mathbf{(F-T)}$ es el subespacio $\mathbf{N_{F\text{-}T}} = \left\langle \mathbf{(}1, 2\mathbf{)} \right\rangle$.

Entonces para todos los vectores de $\mathbf{N_{F\text{-}T}}$ se verifica que $\mathbf{F(w) = T(w)}$.

Las consideraciones anteriores son de particular utilidad en el caso que la acción de **T** sobre los elementos de **V** sea más simple que analizar la acción de **F**.

En especial se tomará en cuenta el caso en que **T** es un múltiplo escalar del operador identidad, es decir:

$$\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V} \quad \text{y} \quad \mathbf{T} = \lambda.id:\mathbf{V}\to\mathbf{V} \quad \text{con} \quad \lambda\in \mathrm{K}$$
$$\mathbf{v}\to\lambda\,\mathbf{v}$$

Buscar el conjunto de vectores para los cuales $\mathbf{F(v)} = (\lambda.id)\mathbf{(v)} = \lambda\,\mathbf{v}$ es estudiar qué vectores tienen como imagen por **F** un múltiplo escalar (fijo) del mismo vector.

Denotaremos $\mathbf{V}_\lambda$ al conjunto de estos vectores, es decir: $\mathbf{V}_\lambda = \{\mathbf{v}\in\mathbf{V}/\ \mathbf{F(v)} = \lambda\,\mathbf{v}\}$

De acuerdo al análisis realizado resulta: $\mathbf{V}_\lambda$ = Núcleo de $(\mathbf{F}-\lambda.id)$.

Definición 4.8.1 Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ operador lineal.

Diremos que $\lambda\in\mathbf{K}$ es **valor propio** del operador **F** sí y sólo si existe algún vector $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\mathbf{v}\neq\bar{\mathbf{0}}$ tal que $\mathbf{F(v)} = \lambda\,\mathbf{v}$.

Definición 4.8.2 Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ operador lineal.

Si $\lambda\in\mathbf{K}$ es valor propio del operador **F**, el subespacio $\mathbf{V}_\lambda = \{\mathbf{v}\in\mathbf{V}/\ \mathbf{F(v)} = \lambda\,\mathbf{v}\}$ se llama **subespacio propio** asociado a λ.

Definición 4.8.3 Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ operador lineal.

Si $\lambda\in\mathbf{K}$ es valor propio del operador **F**, todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\mathbf{v}\neq\bar{\mathbf{0}}_\mathbf{V}$ perteneciente a $\mathbf{V}_\lambda$ se llama **vector propio** del operador **F** asociado a λ.

4.8.1 Caracterización de los Valores Propios de un Operador Lineal

Teorema 4.8.1.1 Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**. Sea $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ operador lineal.

λ es valor propio de **F** sí y sólo si Núcleo de $(\mathbf{F}-\lambda.id)\neq\{\bar{\mathbf{0}}_\mathbf{V}\}$.

Demostración:

$\lambda \in \mathbf{K}$ es valor propio del operador **F** sí y sólo si existe $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{v} \neq \bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}$ tal que $\mathbf{F(v)} = \lambda\,\mathbf{v}$ sí y sólo si el subespacio $\mathbf{V}_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ \mathbf{F(v)} = \lambda\,\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} / \ (\mathbf{F} - \lambda.id)(\mathbf{v}) = \bar{\mathbf{0}}\}$ tiene algún vector no nulo sí y sólo si $\mathbf{V}_\lambda$ = Núcleo de $(\mathbf{F} - \lambda.id_{\mathrm{V}}) \neq \{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\}$. #

Nota: Del teorema anterior resulta que

λ es valor propio de **F** sí y sólo si $(\mathbf{F} - \lambda.id)$ **no es inyectivo**.

Teorema 4.8.1.2 Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K** de dimensión finita.
Sea $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ operador lineal. $\mathbf{M_B}(\mathbf{F}) = \mathbf{A}$, $\lambda \in \mathbf{K}$.

λ es valor propio de **F** sí y sólo si $det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$.

Demostración:

Sabemos que λ es valor propio de **F** sí y sólo si Núcleo de $(\mathbf{F} - \lambda.id) \neq \{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\}$.

V es de dimensión finita, por **Teorema 4.4.1**, **inyectividad** del operador **F** equivale a **suryectividad**. Luego un operador lineal inyectivo es también **biyectivo** y por consiguiente, **inversible**.

Por lo tanto, se verifica que:

$$\text{Núcleo de } (\mathbf{F} - \lambda.id) \neq \{\bar{\mathbf{0}}_{\mathrm{V}}\} \Leftrightarrow (\mathbf{F} - \lambda.id) \text{ no es inversible}.$$

Sea **B** una base de **V** y sean las matrices $\mathbf{M_B}(\mathbf{F}) = \mathbf{A}$ e $\mathbf{M_B}(id) = \mathbf{I}$ (matriz identidad).

Resulta entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{M_B}(\mathbf{F} - \lambda.id) &= \mathbf{M_B}(\mathbf{F}) - \mathbf{M_B}(\lambda.id)\\ &= \mathbf{M_B}(\mathbf{F}) - \lambda.\mathbf{M_B}(id)\\ &= \mathbf{A} - \lambda.\mathbf{I}\end{aligned}$$

Recordando que:

- un operador lineal es inversible sí y sólo si la matriz que lo representa, en cualquier base, es inversible (**Teorema 4.7.8.1**) y que
- una matriz es inversible sí y sólo si su determinante es distinto de cero, podemos escribir:

$$(\mathbf{F} - \lambda.id) \text{ no es inversible} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda.\mathbf{I}) \text{ no es inversible} \Leftrightarrow det(\mathbf{A} - \lambda.\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

Por lo tanto λ es valor propio de **F** sí y sólo si $det(\lambda.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. #

Teniendo en cuenta este teorema, resulta algo muy importante: los valores propios de un operador lineal no son sino los valores propios de la matriz **A** que lo representa respecto a alguna base.

Luego, todos los mecanismos implementados para obtención de los valores y vectores propios de una matriz pueden ser usados para el cálculo de los valores y vectores propios de un operador lineal con sólo fijar una base en el espacio vectorial y determinar la matriz **A** del operador respecto de esa base.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{P}_2$ y sea el operador lineal $\mathbf{F}:\ \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ definido por

$$\mathbf{F}\left(a+bX+cX^2\right)=a+\mathbf{(}a+2b+c\mathbf{)}X+\mathbf{(}a+4c\mathbf{)}X^2$$

Se quieren determinar los valores propios de **F**, así como los correspondientes vectores propios y subespacios propios asociados.

Consideramos $\mathbf{B}=\left(1,\ X,\ X^2\right)$ base de $\mathbf{P}_2$.

Luego: $$\mathbf{M_B}\left(\mathbf{F}\right)=\mathbf{A}=\left[\left[\mathbf{F}(1)\right]_\mathbf{B}\left[\mathbf{F}\left(X\right)\right]_\mathbf{B}\left[\mathbf{F}\left(X^2\right)\right]_\mathbf{B}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&1\\1&0&4\end{bmatrix}$$

- Obtención de la ecuación característica

$$\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-1\\-1&0&\lambda-4\end{bmatrix}\Rightarrow\ det\,\mathbf{(}\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A)}=\mathbf{(}\lambda-1\mathbf{)(}\lambda-2\mathbf{)(}\lambda-4\mathbf{)}=0$$

- Determinación de los Valores propios de **F**

$\mathbf{(}\lambda-1\mathbf{)(}\lambda-2\mathbf{)(}\lambda-4\mathbf{)}=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=4$ son los valores propios de **F**.

- Determinación de los subespacios propios

- Subespacio propio para $\lambda_1=1$:

$$1.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-1&-1\\-1&0&-3\end{bmatrix}\ \Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-1&-1\\-1&0&-3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad(1)$$

El subespacio de soluciones del sistema (1), como subespacio de $\mathbb{R}^{3\times1}$, resulta: $\mathbf{S}_1=\left\langle\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}\right\rangle$.

Importante!! $\mathbf{S}_1$ es el subespacio propio de la matriz **A** y corresponde a los vectores coordenados de los vectores propios correspondientes al operador **F** respecto a la base **B**.

El polinomio $\mathbf{p}\in\mathbf{P}_2$ tal que $\left[\mathbf{p}\right]_\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}$ es $\mathbf{p}=-3+2X+X^2$. Luego $\underline{\mathbf{V}_1=\left\langle-3+2X+X^2\right\rangle}$.

- Subespacio propio para $\lambda_2 = 2$:

$$2.\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

El subespacio de soluciones del sistema (2), como subespacio de $\mathbb{R}^{3\times1}$, resulta: $\mathbf{S}_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

El polinomio $\mathbf{p} \in \mathbf{P}_2$ tal que $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es $\mathbf{p} = X$. Por lo tanto, $\underline{\mathbf{V}_2 = \langle X \rangle}$.

- Subespacio propio para $\lambda_3 = 4$:

$$4.\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

El subespacio de soluciones del sistema (3), como subespacio de $\mathbb{R}^{3\times1}$, resulta: $\mathbf{S}_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$.

El polinomio $\mathbf{p}$ tal que $[\mathbf{p}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es $\mathbf{p} = X + 2X^2$. En consecuencia $\underline{\mathbf{V}_4 = \langle X + 2X^2 \rangle}$.

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{2\times2}$ y sea el operador lineal $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$ definido por

$$\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2a & b \\ b & c+d \end{bmatrix}$$

Se quieren determinar los valores propios de $\mathbf{F}$, así como los correspondientes vectores propios y subespacios propios asociados.

Consideramos $\mathbf{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ base de $\mathbb{R}^{2\times2}$.

Luego:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{F}) = \mathbf{A} = \left[\left[\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right]_{\mathbf{B}} \left[\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right]_{\mathbf{B}} \left[\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right]_{\mathbf{B}} \left[\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right]_{\mathbf{B}} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Obtención de la ecuación característica

$$\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & -1 & \lambda-1\end{bmatrix} \Rightarrow \ det\,(\lambda.\mathbf{I}-\mathbf{A})=\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$$

- Determinación de los Valores propios de **F**

$\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0 \ \Rightarrow \ \lambda_1=0,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=1$ son los valores propios de **F**.

- Determinación de los subespacios propios

- Subespacio propio para $\lambda_1=0$

$$0.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (1)$$

$\mathbf{S}_0=\left\langle\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\right\rangle$ es el subespacio de soluciones del sistema (1).

Entonces la matriz $\mathbf{D}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ tal que $\left[\mathbf{D}\right]_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$ resulta $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$. Luego $\underline{\mathbf{V}_0=\left\langle\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right\rangle}$.

- Subespacio propio para $\lambda_2=2$

$$2.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (2)$$

$\mathbf{S}_2=\left\langle\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right\rangle$ es el subespacio de soluciones del sistema (2).

Entonces la matriz $\mathbf{E}\in\mathbb{R}^{2\times2}$ tal que $\left[\mathbf{E}\right]_{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ resulta $\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. Luego $\underline{\mathbf{V}_2=\left\langle\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\rangle}$.

- Subespacio propio para $\lambda_3=1$

$$1.\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (3)$$

$\mathbf{S}_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ es el subespacio de soluciones del sistema (3).

Entonces la matriz $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $[\mathbf{G}]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces $\underline{\mathbf{V}_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle}$.

4.8.2 Operadores Diagonalizables

> **Definición 4.8.2.1** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K** de dimensión finita. Sea $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ operador lineal.
>
> Decimos que **F** es **diagonalizable** sí y sólo si existe una base de **V** formada por vectores propios de **F**.

Supongamos que **V** es de dimensión finita "*n*" y que $\mathbf{B'} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base de **V** formada por vectores propios del operador lineal **F** asociados respectivamente a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Resulta, $\mathbf{F}(\mathbf{v}_i) = \lambda_i\, \mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Luego

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{F}(\mathbf{v}_1) = \lambda_1\, \mathbf{v}_1 \Rightarrow [\mathbf{F}(\mathbf{v}_1)]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}(\mathbf{v}_2) = \lambda_2\, \mathbf{v}_2 \Rightarrow [\mathbf{F}(\mathbf{v}_2)]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \mathbf{F}(\mathbf{v}_n) = \lambda_n\, \mathbf{v}_n \Rightarrow [\mathbf{F}(\mathbf{v}_n)]_{\mathbf{B'}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \end{array}\right\} \text{entonces } \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{D}\,(\text{matriz diagonal}).$$

Por consiguiente:

> **Definición 4.8.2.1** Sea **V** espacio vectorial sobre un cuerpo **K**, $dim\,\mathbf{V} = n$.
> Sea $\mathbf{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ operador lineal.
>
> **F** es **diagonalizable** sí y sólo si existe una base $\mathbf{B'}$ de **V** tal que $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}(\mathbf{F}) = \mathbf{D}$ (matriz diagonal).

Teniendo en cuenta la forma en que están vinculadas las matrices del operador cuando se cambia de una base **B** a una base $\mathbf{B'}$, se puede concluir:

> **F** es diagonalizable si lo es la matriz **A** que representa al operador respecto a alguna base **B**, esto es, si existe **P** inversible tal que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{P}$.

Los vectores columna de la matriz **P** son los vectores coordenados respecto a la base **B** de los vectores que forman la nueva base $\mathbf{B'}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

En el ejemplo 1 de la sección anterior, trabajamos con el operador lineal $\mathbf{F}:\ \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_2$ definido por

$$\mathbf{F}\left(a+bX+cX^2\right)=a+\mathbf{(}a+2b+c\mathbf{)}X+\mathbf{(}a+4c\mathbf{)}X^2$$

Obtuvimos $\mathbf{B'}=\left(\mathbf{-}3+2X+X^2,\, X,\, X+2X^2\right)$ una base de $\mathbf{P}_2$ formada por vectores propios de **F**.

La matriz que representa al operador respecto a dicha base resulta: $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}\left(\mathbf{F}\right)=\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$

Se puede verificar fácilmente que $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-3&0&0\\2&1&1\\1&0&2\end{bmatrix}$ cumpliéndose que: $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{P}$.

Ejemplo 2

En el ejemplo 2 de la sección anterior, consideramos el operador lineal

$\mathbf{F}: \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$ definido por

$$\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2a&b\\b&c+d\end{bmatrix}$$

El operador F no es diagonalizable pues $\mathbf{M}_{\mathbf{B}}\left(\mathbf{F}\right)=\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ (B base canónica de $\mathbb{R}^{2\times2}$) no es una matriz diagonalizable.

4.9. Algunas Aplicaciones

4.9.1. Ecuaciones Diferenciales

Muchas leyes de la Física, Química, Biología y Economía están descriptas en términos de ecuaciones diferenciales, esto es, ecuaciones en las que aparecen funciones y sus derivadas.

Una de las ecuaciones diferenciales más simples es $y' = a\,y$ donde $y = \boldsymbol{f}(x)$ es la función desconocida a determinar y a es una constante.

Esta ecuación se resuelve muy fácilmente:

$$\frac{dy}{dx} = ay \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = a.dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = ax + c \;\Rightarrow\; y = C.e^{ax}\,.$$

Indicamos: $\mathbf{C}[a,b]$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas en $[a,b]$.

Sea $\mathbf{C}^1(a,b) \subset \mathbf{C}[a,b]$ el subconjunto de las funciones continuas y con derivadas primeras continuas en el intervalo (a,b). Es fácil mostrar que $\mathbf{C}^1(a,b)$ es un subespacio.

Sea $\mathbf{D}: \mathbf{C}^1(a,b) \to \mathbf{C}[a,b]$ tal que $\boldsymbol{f}(x) \to \mathbf{D}(\boldsymbol{f}(x)) = \boldsymbol{f}\,'(x)$.

De las propiedades de la derivada:

1) $\mathbf{D}(\boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{g}(x)) = \mathbf{D}(\boldsymbol{f}(x)) + \mathbf{D}(\boldsymbol{g}(x))$
2) $\mathbf{D}(k\,\boldsymbol{f}(x)) = k\,.\mathbf{D}(\boldsymbol{f}(x))$

Luego **D** es una **aplicación lineal**.

Por ser suma, producto por escalar y composición (también llamada multiplicación) de aplicaciones lineales resulta que:

$\mathbf{D}^2 = \mathbf{D} \circ \mathbf{D}$, $\mathbf{D}^n = \underbrace{\mathbf{D} \circ \mathbf{D} \circ \cdots \circ \mathbf{D}}_{n}$, $5\,\mathbf{D}^2 + 3\mathbf{D}$ son aplicaciones lineales de $\mathbf{C}^1(a,b) \to \mathbf{C}[a,b]$.

Por lo tanto $\mathbf{L} = a_n\,\mathbf{D}^n + a_{n-1}\,\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + a_1\,\mathbf{D} + a_0\,\mathbf{I}$ con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ también lo es.

Sea: $y = \boldsymbol{f}(x) \in \mathbf{C}^1(a,b)$

$$\mathbf{L}(y) = a_n\,\mathbf{D}^n(y) + a_{n-1}\,\mathbf{D}^{n-1}(y) + \cdots + a_1\,\mathbf{D}(y) + a_0\,\mathbf{I}(y)$$

Esta expresión se puede escribir:

$$\mathbf{L}(y) = a_n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

donde

$y^{(n)}$ indica la derivada de orden *n* de la función $y = \boldsymbol{f}(x)$,

$y^{(n-1)}$ indica la derivada de orden *n*-1 de la función $y = \boldsymbol{f}(x)$ etc.

La expresión

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \boldsymbol{h}(x)$$

constituye una ecuación diferencial lineal de orden n a coeficientes constantes. En particular si $\boldsymbol{h}(x) = 0$ la ecuación se dice homogénea.

Resolver una ecuación diferencial es encontrar todas las soluciones, esto es, todas las funciones que la satisfacen.

Vamos a analizar el caso

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (1)$$

con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$.
Con esta última condición, sin quitar generalidad, podemos hacer $a_n = 1$.

La ecuación (1) puede escribirse $\mathbf{L}(y) = 0$ con

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^n + a_{n\text{-}1}\, \mathbf{D}^{n\text{-}1} + \cdots + a_1\, \mathbf{D} + a_0\, \mathbf{I} \ : \ \mathbf{C}^1(a,b) \to \mathbf{C}\left[a,b\right] \text{ aplicación lineal.}$$

Luego, resolver la ecuación (1) no es sino encontrar el núcleo de la aplicación lineal **L**.

Sabemos entonces que el conjunto de soluciones es un subespacio. Luego, habremos resuelto el problema si encontramos un generador del mismo.

L tiene la forma de un polinomio en **D**, entonces puede ser factorizado y esto nos ayudará a encontrar las soluciones.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{L} = \mathbf{D}^2 + \mathbf{D} - 6\,\mathbf{I}$ entonces $\mathbf{L} = (\mathbf{D} - 2\,\mathbf{I}).(\mathbf{D} + 3\mathbf{I})$.

En efecto

$$\mathbf{L}(y) = (\mathbf{D} - 2\,\mathbf{I}).(\mathbf{D} + 3\mathbf{I})(y) = (\mathbf{D} - 2\,\mathbf{I})(y' + 3y) = \mathbf{D}(y' + 3y) - 2\,\mathbf{I}(y' + 3y)$$
$$= y'' + 3y' - 2y' - 6y = y'' + y' - 6y = (\mathbf{D}^2 + \mathbf{D} - 6\,\mathbf{I})(y)$$

Nota: La factorización se efectúa de la misma forma que si se tratara de polinomios

$$\mathbf{p} \in \mathbb{R}\left[X\right], \quad \mathbf{p} = X^2 + X - 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \text{ tiene raíces } x_1 = 2,\ x_2 = -3 \qquad (2)$$

Luego $X^2 + X - 6 = (X - 2)(X + 3)$.

La ecuación (2) se llama ecuación auxiliar o ecuación característica de la ecuación diferencial dada.
Dada la ecuación diferencial $y'' + y' - 6\,y = 0$ corresponde a la forma $\mathbf{L}(y) = 0$ con:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^2 + \mathbf{D} - 6\,\mathbf{I} \;\Rightarrow\; (\mathbf{D}^2 + \mathbf{D} - 6\,\mathbf{I})(y) = 0 \;\Rightarrow\; (\mathbf{D} - 2\mathbf{I}).(\mathbf{D} + 3\mathbf{I})(y) = 0$$

Las soluciones serán las funciones $y = f(x)$ que anulan sea a $(\mathbf{D} - 2\mathbf{I})$ como al operador $(\mathbf{D} + 3\mathbf{I})$. Si tomamos

$$(\mathbf{D} - 2\mathbf{I})(y) = 0 \;\Rightarrow\; y' = 2y \quad \text{tiene una solución del tipo:} \quad y_1(x) = e^{2x}.$$

$$(\mathbf{D} + 3\mathbf{I})(y) = 0 \;\Rightarrow\; y' = -3y \quad \text{tiene una solución del tipo:} \quad y_2(x) = e^{-3x}.$$

Como el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial homogénea es un subespacio, es solución de la misma toda combinación lineal de y_1 y de y_2. Luego

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \;\Rightarrow\; y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

Se demuestra que la dimensión del subespacio de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden *n*, es justamente *n*. Siendo e^{2x} y e^{-3x} linealmente independientes (verifíquelo!), ellas forman la base del conjunto de soluciones de la ecuación diferencial planteada con lo cual hemos resuelto el problema.

Luego los pasos a seguir para resolver una ecuación diferencial de la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{con} \quad a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad a_n = 1.$$

Son los siguientes:

1. Construir la ecuación auxiliar $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$.
2. Calcular las raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
3. Si éstas son todas reales y distintas, entonces la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1.e^{x_1 x} + c_2.e^{x_2 x} + \cdots + c_n.e^{x_n x}. \qquad (*)$$

La solución (*) es válida, como se mencionó, si todas las raíces de la ecuación característica son reales y distintas. Sin embargo, a menudo se presentan raíces múltiples o raíces complejas. Vamos a analizar esta situación, sea

$$y'' + a_1 y' + a_0 = 0 \qquad (3)$$

Con ecuación auxiliar consideramos $x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.

Sabemos que para una ecuación algebraica a coeficientes reales, las raíces complejas, si existen, vienen de a pares, esto es si $x_1 = \alpha + i\omega$ es raíz, también lo es $x_2 = \alpha - i\omega$.

Luego $e^{(\alpha+i\omega)x}$ y $e^{(\alpha-i\omega)x}$ son ambas soluciones de la ecuación diferencial, por lo tanto también lo son: $y_1 = e^{(\alpha+i\omega)x} + e^{(\alpha-i\omega)x}$, $\quad y_2 = e^{(\alpha+i\omega)x} - e^{(\alpha-i\omega)x}$.

Operando se tiene

$$y_1 = e^{(\alpha+i\omega)x} + e^{(\alpha-i\omega)x} = e^{\alpha x}\left(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}\right) \;\Rightarrow\; y_1 = \tfrac{1}{2} e^{\alpha x} cos(\omega x)$$
$$y_2 = e^{(\alpha+i\omega)x} - e^{(\alpha-i\omega)x} = e^{\alpha x}\left(e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}\right) \;\Rightarrow\; y_2 = \tfrac{1}{2i} e^{\alpha x} sen(\omega x)$$

Nota: Se demuestra que $\dfrac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} = cos(\omega x)$, $\dfrac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} = sen(\omega x)$.

Luego la solución de la ecuación planteada es:

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1 cos(\omega x) + c_2 sen(\omega x)\right) \qquad (4)$$

Las funciones $e^{\alpha x} cos(\omega x)$ y $e^{\alpha x} sen(\omega x)$ son linealmente independientes, de donde forman una base del espacio de soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden dada (3) y por lo tanto (4) es la solución general.

Ejemplo 2

Sea un resorte suspendido verticalmente de un soporte fijo. En el extremo inferior del resorte se sujeta un cuerpo de masa *m* la cual se supone lo suficientemente grande como para que pueda despreciarse la masa del resorte. Si se tira del cuerpo hacia abajo una cierta distancia y a continuación se deja en libertad, éste se mueve. Suponemos que lo hace estrictamente en el sentido vertical.

Se desea determinar el movimiento de este sistema mecánico. Para ello vamos a considerar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo durante el movimiento. Se elige la dirección hacia abajo como positiva y por lo tanto se consideran como positivas a las fuerzas que actúan hacia abajo y como negativas las que actúan hacia arriba (Figura 4.1).

Figura 4.1: Sistema Mecánico

La fuerza que actúa sobre el cuerpo es la atracción de la gravedad

$$\mathbf{F}_1 = m.g \quad \text{con} \quad g = 980 cm/s^2 \quad \text{(Aceleración de la gravedad)}$$

Otra fuerza que debe considerarse es la del resorte, ejercida por este último si se encuentra deformado. Los experimentos indican que esta fuerza es proporcional a la deformación, (Ley de Hooke) esto es

$$\mathbf{F} = k.s \quad \text{con} \quad k\text{: módulo del resorte,} \quad s\text{: deformación .}$$

Cuando el cuerpo se encuentra en reposo, su posición se llama de equilibrio estático. En esa situación el resorte está deformado en una cantidad s_0 de tal manera que la resultante de la fuerza correspondiente del resorte y gravitatoria es cero:

$$k.s_0 = m.g$$

Sea $y = y(t)$ el desplazamiento del cuerpo respecto de su posición de equilibrio estático.
De la Ley de Hooke $\mathbf{F}_2 = -k.s_0 - k.y$.
La fuerza total que actúa sobre el sistema es $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m.g - k.s_0 - k.y$.
O sea $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -k.y$.

Si el amortiguamiento del sistema es tan pequeño que se puede descartar, entonces $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$ es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Aplicando la segunda Ley de Newton: *Fuerza = masa* x *aceleración* donde por *Fuerza* se entiende la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en cualquier instante, y la aceleración viene dada por $y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ resulta $m.y'' = -k.y$

El movimiento del sistema se rige por la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$m.y'' + k.y = 0$$

con ecuación auxiliar $m.x^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\dfrac{k}{m}} = \pm\, i\omega_0$.

La solución general de la ecuación diferencial resulta:

$$y(t) = c_1 cos(\omega_o t) + c_2 sen(\omega_o t) \qquad \text{con} \quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \ .$$

Este movimiento se conoce como oscilación armónica. Se trata de un movimiento periódico de período $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ siendo ω_0 la frecuencia angular.

Haciendo uso de identidades trigonométricas la solución general también puede ser escrita:

$$y(t) = C\ cos(\omega_o t - \varphi)$$

donde tanto C como φ dependen de las condiciones iniciales.

En la gráfica se muestran dos situaciones para valores distintos de C y φ . (Figura 4.2).

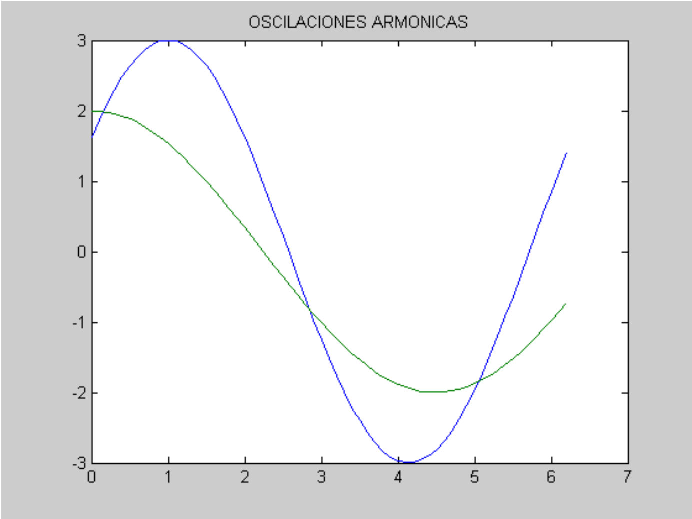


Figura 4.2

4.10. Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 1

Analizar cuáles de estas siguientes aplicaciones son lineales:

a) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{F}\big((x,y)\big)=(x,0)$.

b) $\mathbf{G}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{G}\big((x,y)\big)=(x,2)$.

c) $\mathbf{L}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{L}\big((x,y,z)\big)=(x,2y+3z)$.

d) $\mathbf{H}:\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{H}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=(a+d)+X$.

e) $\mathbf{M}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{M}\big((x,y,z)\big)=x^2$

f) $\mathbf{T}:\mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3, \quad \mathbf{T}(\mathbf{p})=X.\mathbf{p}$ siendo $\mathbf{p}=a+bX+cX^2$

g) $\mathbf{D}:\mathbf{C}^1(a,b) \to \mathbf{C}[a,b], \quad \mathbf{D}(f(x))=f'(x)$ (función derivada).

Ejercicio 2

a) Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal.

Sabiendo que: $\mathbf{F}\big((1,3,0)\big)=(-4,5)$ y $\mathbf{F}\big((-1,2,0)\big)=(1,3)$, encontrar las imágenes de cada uno de los siguientes vectores:

$$-(1,3,0), \quad 3(-1,2,0), \quad 2(1,3,0)+4(-1,2,0), \quad (0,0,0), \quad (0,1,0), \quad (1,0,0)$$

Con los datos del caso a). ¿es posible determinar las imágenes del vector $(0,0,1)$?

b) Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ una aplicación lineal tal que: $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Encontrar $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ y $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

Ejercicio 3

Sea el operador lineal $\mathbf{L_A}:\mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}, \quad \mathbf{L_A}(\mathbf{X})=\mathbf{A}.\mathbf{X}$. Analice geométricamente los efectos de las siguientes transformaciones:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, d) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, e) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, f) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$

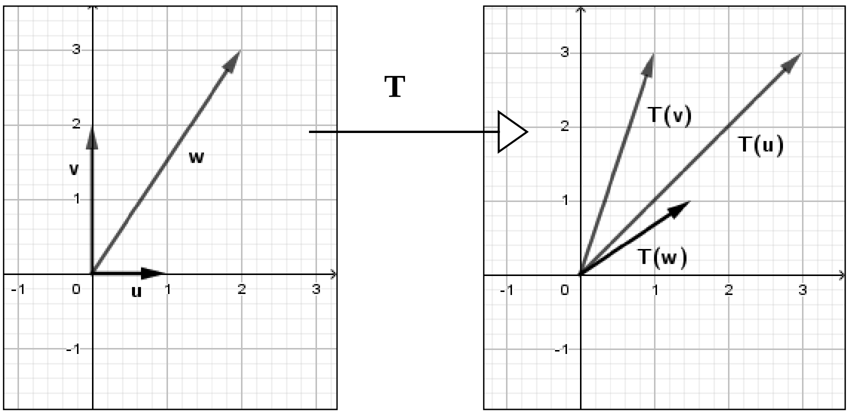
Ejercicio 4

a) Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $\mathbf{F}\big((1,2)\big) = (2,1)$, $\mathbf{F}\big((1,3)\big) = (3,1)$. Encuentre $\mathbf{F}\big((x,y)\big)$. Describa geométricamente esta aplicación.

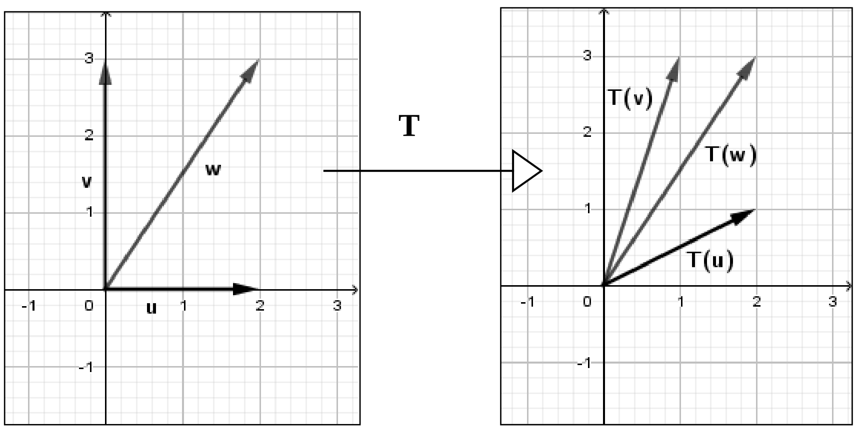
b) Sean $\mathbf{u}_1 = (1,-1)$; $\mathbf{u}_2 = (0,1)$; $\mathbf{u}_3 = (1,0)$; $\mathbf{w}_1 = (1,3)$; $\mathbf{w}_2 = (-2,1)$; $\mathbf{w}_3 = (1,-4)$.
¿Existe una transformación lineal $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{T}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i$ para $i = 1,2,3$? Justifique su respuesta.

Ejercicio 5

Indique la opción que mejor describe (debe elegir una sola opción) la posible **aplicación lineal T** (de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) que se muestra en la figura:



a) **Sí** es posible que exista una aplicación lineal así.
b) **No** es posible que exista una aplicación lineal así.
c) La imagen no da información suficiente para determinar si existe o no una aplicación lineal **T** que satisfaga lo que se observa.



a) **Sí** es posible que exista una aplicación lineal así.
b) **No** es posible que exista una aplicación lineal así.
c) La imagen no da información suficiente para determinar si existe o no una aplicación lineal **T** que satisfaga lo que se observa.

Ejercicio 6

Para cada una de las aplicaciones lineales siguientes analizar cuáles de los vectores dados pertenecen al núcleo y cuáles a la imagen.

a) $\mathbf{F}\big((x,y)\big) = (2x - y, -8x + 4y,\ 0)$

$$\mathbf{u} = (5,10),\quad \mathbf{v} = (1,-4,0),\quad \mathbf{w} = (1,1),\quad \mathbf{z} = (0,0,1),\quad \overline{\mathbf{0}}_{\mathbf{R}^2} = (0,0),\quad \overline{\mathbf{0}}_{\mathbf{R}^3} = (0,0,0)$$

b) $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1},\quad \mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \overline{\mathbf{0}}_{\mathbf{R}^{3x1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{w'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7

Para cada una de las siguientes aplicaciones lineales se pide:

a) Caracterizar la imagen y el núcleo.
b) Dar, si es posible, una base de cada uno de dichos subespacios.
c) Dar rango y nulidad.

I) $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\quad \mathbf{F}\big((x,y)\big) = (2x - y, -8x + 4y,\ 0)$.

II) $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad \mathbf{F}\big((x,y)\big) = (x - y,\ x - y)$.

III) $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\quad \mathbf{F}\big((x,y,z)\big) = \big(2x - 4y + z,\ -3y + 2z\big)$

IV) $\mathbf{F}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ \mathbf{F}\big((x,y,z,w)\big) = (x + 2y, y + 3z, z - 2w)$

V) $\mathbf{G}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\quad \begin{cases} (1,0) \to (1,0,0) \\ (0,1) \to (1,0,0) \end{cases}$

VI) $\mathbf{G}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\quad \begin{cases} (1,0) \to (1,0,0,1) \\ (0,1) \to (1,0,1,0) \end{cases}$

VII) $\mathbf{H}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\quad \mathbf{H}\big((x,y,z)\big) = (2x - y - 2z,\ x + y - 2z)$

VIII) $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\quad \mathbf{F} = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

IX) $\mathbf{T}: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\quad \mathbf{T}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ a+d & b+d \end{bmatrix}$.

X) $\mathbf{J}: \mathbf{P}_2 \to \mathbb{R}^2,\quad \mathbf{J}(a_0 + a_1 X + a_2 X^2) = (a_1, a_2)$

XI) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2x2}$, $\quad \mathbf{F}\big((x,y,z,w)\big)=\begin{bmatrix}(x+y) & (y-z+2w)\\ (x-y-z) & (x-2y+z)\end{bmatrix}$**.**

XII) $\mathbf{S}:\mathbb{R}^{3\times1}\to\mathbb{R}^{3\times1}$, $\quad \mathbf{S} = \left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -2\\ -3 & 3 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

XIII). $\mathbf{L}:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_3$, $\quad \mathbf{L(}a_0+a_1X+a_2X^2\mathbf{)}=a_0+a_2X^2+a_0X^3$.

XIV) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{3x2}\to\mathbf{P}_3$, $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}\right)=(a_{11}+a_{12})+(a_{31}+2a_{32})X-(a_{21}+a_{12})X^3$.

Ejercicio 8

Dada la aplicación lineal $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)=(2,-1,3),\quad \mathbf{F}\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)=(-1,2,0),\quad \mathbf{F}\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)=(0,0,0)\ \text{ y }\ \mathbf{F}\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=(2,-4,0)$$

Se pide:

a) Hallar $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\right)$.

b) Caracterizar la imagen y el núcleo.

Ejercicio 9

a) Sea $\mathbf{T}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$\mathbf{T(}e_1\mathbf{)}=\mathbf{(}1,3,2\mathbf{)},\ \mathbf{T(}e_2\mathbf{)}=\mathbf{(}1,0,0\mathbf{)},\ \mathbf{T(}e_3\mathbf{)}=\mathbf{(}2,3,2\mathbf{)},\ \mathbf{T(}e_4\mathbf{)}=\mathbf{(}4,3,2\mathbf{)}$$

con $\mathbf{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Dar las bases de la imagen y del núcleo. Asimismo, dar rango y nulidad de **T**.

b) Sea $\mathbf{T}:\mathbb{R}^{3\times1}\to\mathbb{R}^{3\times1}$ definida por $\mathbf{T(X)}=\begin{bmatrix}1&3&4\\3&4&7\\-2&2&0\end{bmatrix}\mathbf{.X}$.

Caracterizar imagen y núcleo de **T**.

Mostrar que (si se identifica $\mathbb{R}^{3\times1}$con el espacio geométrico $\mathbb{R}^3$) $\mathbf{I_T}$ es un plano y dar una ecuación cartesiana del mismo. Igualmente mostrar que $\mathbf{N_T}$ es una recta y dar una ecuación vectorial de la misma.

Ejercicio 10

Analizar inyectividad, suryectividad y biyectividad en las aplicaciones del ejercicio 7.

Ejercicio 11

Estudiar núcleo e imagen de las siguientes aplicaciones lineales. Dar bases de los mismos y decir si las aplicaciones son inyectivas o suryectivas.

a) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad \mathbf{F}\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (4x_1 - 2x_3,\ 2x_1 - x_3,\ 0)$.

b) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{4\times1} \to \mathbb{R}^{2\times1},\quad \mathbf{F(X)} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.\mathbf{X}$.

c) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad \mathbf{F}\big((x_1, x_2, x_3)\big) = (x_1 - x_2 + 3x_3,\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3,\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3)$.

d) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{3\times1} \to \mathbb{R}^{4\times1},\quad \mathbf{F(X)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.\mathbf{X}$

Ejercicio 12

Sea $\mathbf{V} = \mathbf{C}^{\infty}[a,b]$ el vectorial de las funciones $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tienen derivada de todo orden en el intervalo $[a,b]$.

$$\mathbf{D}:\mathbf{V} \to \mathbf{V} \text{ operador derivada}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{D}^2 - 4\mathbf{D} + 5 : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

a) ¿Es **L** una aplicación lineal? Justifique su respuesta.

b) Determine si las siguientes funciones pertenecen al núcleo de **L**.

$$\boldsymbol{f_1}(x) = e^{2x}\cos x,\quad \boldsymbol{f_2}(x) = 2^{2x}\, sen\, x,\quad \boldsymbol{f_3}(x) = e^{2x}\, sen\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

c) ¿Es posible encontrar una función $\boldsymbol{h} \in \mathbf{N_L}$ tal que $\boldsymbol{h}(0) = 2$ y $\boldsymbol{h}'(0) = 3$? ¿Cuál?.

Ejercicio 13

Por simple observación de la matriz **A** determinar el rango y nulidad de la aplicación

$$\mathbf{L_A}:\mathbb{R}^{n\times1} \to \mathbb{R}^{m\times1},\quad \mathbf{L_A(X) = A.X}$$

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 14

a) Sea $\mathbf{V} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2x2}$; $\quad \mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbf{V},\quad \mathbf{F}\big((x,y)\big) = \begin{bmatrix} x+y & x \\ -x & x+y \end{bmatrix}$.

Se pide:

1. Mostrar que **F** es inversible.

2. Calcular $\mathbf{F}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\right)$.

3. Definir $\mathbf{F}^{-1}$ dando a la imagen de un elemento arbitrario de **V**.

b) Sea $\mathbf{T}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{cases} \mathbf{T}\big((1,1)\big) = (1,0) \\ \mathbf{T}\big((1,\text{-}1)\big) = (0,1) \end{cases}$. ¿Es **T** inversible?. Justifique.

Ejercicio 15

Sean **F** y **G** operadores lineales definidos por: $\mathbf{F}\big((x,y)\big) = (x,0)$, $\mathbf{G}\big((x,y)\big) = (y,x)$.

a) Calcular la imagen del vector $(-1,2)$ por cada una de las aplicaciones siguientes:

$$\mathbf{F}+\mathbf{G},\quad 2\mathbf{G},\quad 3\mathbf{F}+2\mathbf{G},\quad \mathbf{G}\circ\mathbf{F},\quad \mathbf{F}\circ\mathbf{G},\quad \mathbf{G}^2,\quad \mathbf{F}^2$$

b) De reglas semejantes a las que definen **F** y **G** para cada uno de los operadores definidos en el caso a).

Ejercicio 16

Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{2\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1}$ la aplicación lineal definida por: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ se pide:

a) Determinar $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

b) Dar una matriz **A** tal que $\mathbf{F(X) = A\,.\,X}$.

Ejercicio 17

a) Sean **V** y **W** espacios vectoriales sobre el campo **K**. Sean $\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ base de de **V** y $\mathbf{B'} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ base de **W**. Considerar $\mathbf{F}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ la aplicación lineal definida por:

$$\mathbf{F(v_1)} = 2\mathbf{w_1} + 4\mathbf{w_2},\quad \mathbf{F(v_2)} = -\mathbf{w_1} + 5\mathbf{w_2},\quad \mathbf{F(v_3)} = 3\mathbf{w_1}$$

Encontrar $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$.

b) Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ la matriz de una aplicación $\mathbf{G}:\ \mathbf{V}\to\mathbf{W}$ respecto de las bases **B** y **B'**.

Si $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} - 3\,\mathbf{v_3}$ encontrar $[\mathbf{G(v)}]_{\mathbf{B'}}$ y $\mathbf{G(v)}$.

Ejercicio 18

En cada uno de los casos siguientes encontrar la matriz de la aplicación lineal dada respecto de las bases que indican:

a) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}\big((x,y)\big)=(x,0)$. $\mathbf{B}=\big((2,1),(3,4)\big)$, $\mathbf{B'}=\big((1,1),(0,3)\big)$.

b) $\mathbf{F}$ como en a), pero con $\mathbf{B}=\mathbf{B'}=$ base canónica de $\mathbb{R}^2$.

c) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{F}=\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. $\mathbf{B}=\mathbf{B'}=\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

d) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbf{P}_2$, $\mathbf{F}\big((a,b,c)\big)=(a-b)+2(a+b)X+(c-b)X^2$
$\mathbf{B}=\big((1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\big)$ base de $\mathbb{R}^3$ **y** $\mathbf{B'}=\left(1,X,X^2\right)$ base de $\mathbf{P}_2$.

d) $\mathbf{F}:\mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^2$, $\mathrm{F}\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right)=\left(x+y+w,\ x+y-z\right)$. Con $\mathbf{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2x2}$ y la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{B'}=\big((1,1),\ (-2,0)\big)$.

e) $\mathbf{V}=\langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$, $\begin{cases} \boldsymbol{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, & \boldsymbol{f}(x)=sen\ x \\ \boldsymbol{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, & \boldsymbol{g}(x)=cos\ x \end{cases}$. $\mathbf{B}=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=\mathbf{B'}$

$\mathbf{D}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ es la aplicación **derivada** que asigna a cada función su “función derivada”.

Ejercicio 19

a) Sea $\mathbf{B}=\big((2,1),(0,1)\big)$, $\mathbf{B'}=\big((0,2),(1,1)\big)$ bases de $\mathbb{R}^2$. $\mathbf{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que

$\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Encontrar $[\mathbf{F}(2,1)]_{\mathbf{B'}}$, $\mathbf{F}(2,1)$.

b) $\mathbf{F}$: $\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_2$ la aplicación lineal tal que: $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ siendo: $\mathbf{B}=\left(1,X,X^2\right)$ y

$\mathbf{B'}=\left(1+X,1-X,1+X+X^2\right)$. Encontrar

1. $\left[\mathbf{F}\left(2+3X-5X^2\right)\right]_{\mathbf{B'}}$ y $\mathbf{F}\left(2+3X-5X^2\right)$
2. $\left[\mathbf{F}\left(a+bX+cX^2\right)\right]_{\mathbf{B'}}$ y $\mathbf{F}\left(a+bX+cX^2\right)$

Ejercicio 20

Sean $\mathbf{F}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$, $\mathbf{G}:\mathbf{U}\to\mathbf{V}$, $\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ aplicaciones lineales. Sean $\mathbf{B},\mathbf{B'}$ y $\mathbf{B''}$ bases de $\mathbf{U},\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ respectivamente.

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{G})=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{M}_{\mathbf{B''}}^{\mathbf{B'}}(\mathbf{T})=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar las matrices que representan a las aplicaciones lineales siguientes (indicando en cada caso las bases).

$$\mathbf{F}+\mathbf{G},\quad 2\mathbf{F},\quad \mathbf{T}\circ\mathbf{F},\quad \mathbf{T}\circ\mathbf{G},\quad \mathbf{T}\circ(2\mathbf{F}+\mathbf{G})$$

b) Verificar si $\mathbf{T}$ es inversible y en caso afirmativo encontrar la matriz $\mathbf{T}^{-1}$ indicando las bases.

c) Si $\mathbf{U}=\mathbf{P}_2$, $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{W}=\mathbf{P}_1$ con $\mathbf{B}=(1, X, X^2)$, $\mathbf{B'}=((1,0),(0,1))$ y $\mathbf{B''}=(1, 1+X)$
Encontrar la imagen de $\mathbf{p}=1-3X+5X^2$ por la aplicación $\mathbf{T}\circ(2\mathbf{F}+\mathbf{G})$.

d) Encontrar $\left[\mathbf{T}^{-1}(-3+2X)\right]_{\mathbf{B}}$ y $\mathbf{T}^{-1}(-3+2X)$ con los $\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{W},\mathbf{B},\mathbf{B'},\mathbf{B''}$ dados en c).

Ejercicio 21

Sean $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & 4 & 2\end{bmatrix}$.

a) Si la base $\mathbf{B'}$ se cambia por la base $\mathbf{B'}_1$ con matriz de cambio $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$. Encontrar $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}_1}^{\mathbf{B}}(\mathbf{F})$.

b) Si se cambia la base $\mathbf{B}$ por la base $\mathbf{B_1}$ con matriz de cambio $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Encontrar $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{B_1}}(\mathbf{F})$.

c) Hallar $\mathbf{M}_{\mathbf{B'}_1}^{\mathbf{B_1}}(\mathbf{F})$.

Ejercicio 22

Sea $\mathbf{F}:\mathbf{P}_2\to\mathbf{P}_2$ operador lineal definido por $\mathbf{F}(a+bX+cX^2)=(a-2c)+(2a-c)X+(b+2c)X^2$

a) Dar la matríz de $\mathbf{F}$ respecto a la base $\mathbf{B}=(1, X^2, X)$.

b) Sabiendo que $\mathbf{p}=-1+2X-3X^2$, utilice la matríz $\mathbf{M}_{\mathrm{B}}(\mathbf{F})$ para hallar $[\mathbf{F}(\mathbf{p})]_{\mathbf{B}}$ y $\mathbf{F}(\mathbf{p})$.

Ejercicio 23

Para cada uno de los operadores lineales que se dan a continuación:

a) Elegir una base y dar la matriz del operador.
b) La ecuación característica.
c) Los valores propios. y los subespacios propios.
d) Si es posible, dar una base de vectores propios para el espacio vectorial y la matriz del operador lineal en esta base.
e) Dar la matriz de cambio de base.

(1)- $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{2\times1} \to \mathbb{R}^{2\times1}$, $\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

(2)- $\mathbf{F}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}\left((x_1, x_2)\right) = (-2x_1 - 7x_2, x_1 + 2x_2)$.

(3)- $\mathbf{F}$: $\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_1$, $\mathbf{F}\left((a+bX)\right) = (3a-b) + (8a-b)X$

(4)- $\mathbf{F}: \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}$, $\mathbf{F}\left(a + bX + cX^2\right) = -a + (a+3b+2c)X + (-a-b)X^2$.

(5)- $\mathbf{F}: \mathbf{P_2} \to \mathbf{P_2}$, $\mathbf{F}\left(a + bX + cX^2\right) = (a-b+c) + (2b-4c)X + 4cX^2$.

Ejercicio 24

En la figura se muestra el **pandeo de una varilla** bajo una fuerza vertical constante **F**, la cual se aplica en el extremo superior de la misma.

En Mecánica se muestra que la curva $y(x)$ cuya forma adquiere la varilla bajo la carga, es una solución de la ecuación: $E.I.y'' = -\mathbf{F}.y$ donde E es el módulo de elasticidad del material de la varilla; I es el momento de inercia de la sección transversal (supuesta circular) respecto a un eje que pasa por el centro del círculo.

Se supone que E, I son constantes; que el extremo inferior de la varilla está sujeto a las coordenadas que se indican en la Figura 4.3 lo cual conduce a las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$ donde l es la longitud de la varilla y se supone que y es pequeño.

Una solución es $y = 0$, pero se sabe que si **F** es mayor que cierto valor crítico, el equilibrio de la Figura 4.3.(a) ya no es estable, es decir, si se desplaza ligeramente, la varilla no se recuperará sino que se curvará.

Demuestre que la fuerza crítica es $\mathbf{F}_{\text{crit}} = \left(\pi/2\right)^2 E.I$ y la $y(x)$ correspondiente a la Figura 4.3.(b) es una porción de una curva senoidal.

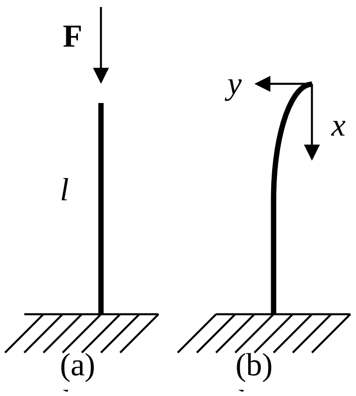


Figura 4.3: Pandeo de Varilla delgada

4.11. Guía de Estudio

1) Defina **aplicación lineal**. Enuncie algunas propiedades.

2) Muestre que si Si $\mathbf{B}=\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\right)$ es una base de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,...,\mathbf{w}_n$ son vectores arbitrarios de $\mathbf{W}$, entonces: existe una única aplicación lineal $\mathbf{F}\colon\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$ para $i=1,2,\ldots,n.$

3) Defina **imagen** de una aplicación lineal y enuncie sus propiedades.

4) Defina **núcleo** de una aplicación lineal y enuncie sus propiedades.

5) Si $\mathbf{L}:\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ es una aplicación lineal ¿Cómo están relacionados el núcleo y la imagen de la misma?

6) ¿Cómo quedan caracterizadas las aplicaciones lineales inyectivas? ¿Por qué?

7) Muestre que todo conjunto $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\ \mathbf{v}_r\in\mathbf{V}$ de vectores linealmente independientes, resultan $\mathbf{F}(\mathbf{v}_1),\mathbf{F}(\mathbf{v}_2),\ldots,\mathbf{F}(\mathbf{v}_r)$ linealmente independientes si y sólo si **F** es inyectiva.

8) ¿Cuáles son las condiciones para que una aplicación lineal sea **inversible**? Muestre que si **F** es una aplicación lineal inversible, su inversa es también una aplicación lineal.

9) ¿A qué se llaman espacios vectoriales **isomorfos**?

10) Muestre que la suma, el producto por escalar y la composición de aplicaciones lineales da por resultado una aplicación lineal.

11) Muestre que dada $\mathbf{L}\colon\mathbf{V}\to\mathbf{W}$ aplicación lineal. Si **B** es una base de **V** y **B'** es una base de **W**, existe una única matriz **A** tal que $\left[\mathbf{L}(\mathbf{v})\right]_{\mathbf{B}'}=\mathbf{A}.\left[\mathbf{v}\right]_{\mathbf{B}}$.

12) La matriz de una aplicación lineal depende de las bases fijadas en los vectoriales. ¿Cómo cambia la matriz de la aplicación cuando cambian las bases de los vectoriales?

13) ¿Cuál es la matriz de la compuesta de dos aplicaciones lineales? ¿Por qué?.

14) ¿Cómo se establece el isomorfismo de Álgebra entre $\mathbf{L(V)}$ y $\mathbf{K}^{n\times n}$?.

15) Defina **valor propio**, **vector propio** y **subespacio propio** de un operador lineal **F**.

16) ¿Cuándo se dice que un operador lineal es **diagonalizable**?.

17) ¿Cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que un operador lineal sea diagonalizable?.

5

Formas Bilineales y Cuadráticas

5.1. Formas Lineales

Recordemos, en primer lugar, que el cuerpo $\mathbb{R}$ puede ser considerado como un espacio vectorial (de dimensión uno) sobre sí mismo, si se toman como operaciones vectoriales la adición y la multiplicación en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto, si **V** es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, tiene sentido hablar de aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbb{R}$. Estas aplicaciones se llaman **formas lineales** o **funcionales lineales.**

Definición 5.1.1. Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Diremos que la aplicación $\mathbf{L}:\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ que satisface las condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \mathbf{L(u+v)=L(u)+L(v)} \\ 2)\ \mathbf{L}(k\,\mathbf{u})=k\,\mathbf{L(u)} \end{array}\right\}\text{para todo } \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V},\ \ k\in\mathbb{R}$$

es una **forma lineal** sobre **V**.

Ejemplos

Ejemplo 1

La aplicación que asigna a cada matriz $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ su **traza** (suma de los elementos de la diagonal principal) es una forma lineal sobre $\mathbb{R}^{n\times n}$.

$$\mathbf{Tr}:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R},\quad \mathbf{Tr\,(A)}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

Pues:

1) Sean $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$; $\quad \mathbf{Tr\,(A+B)}=\sum_{i=1}^{n}(a+b)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\mathbf{Tr\,(A)}+\mathbf{Tr\,(B)}$.

2) Sean $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y $k\in\mathbb{R}$; $\quad \mathbf{Tr}\,(k\,\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{n}(ka)_{ii}=k\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=k\,\mathbf{Tr\,(A)}$.

Ejemplo 2

La expresión $\mathbf{L}(\boldsymbol{f}) = \int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,dx$ define una forma lineal sobre el espacio vectorial $\mathbf{C}[a,b]$, de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continuas en el intervalo $[a,b]$.

Pues:

1) Sean $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \mathbf{C}([a,b])$; $\mathbf{L}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}) = \int_a^b (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(x)\,dx = \int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,dx + \int_a^b \boldsymbol{g}(x)\,dx = \mathbf{L}(\boldsymbol{f}) + \mathbf{L}(\boldsymbol{g})$

2) Sean $\boldsymbol{f} \in \mathbf{C}([a,b])$ y $k \in \mathbb{R}$; $\mathbf{L}(k\,\boldsymbol{f}) = \int_a^b (k\,\boldsymbol{f})(x)\,dx = \int_a^b k\,\boldsymbol{f}(x)\,dx = k\int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,dx = k\,\mathbf{L}(\boldsymbol{f})$

Ejemplo 3

En el vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$), la valuación en $x = a$ es una forma lineal sobre $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{f} &\to \boldsymbol{f}(a) \end{aligned}$$

Pues:

1) Sean $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; $\mathbf{T}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(a) = \boldsymbol{f}(a) + \boldsymbol{g}(a) = \mathbf{T}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{f}) + \mathbf{T}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{g})$.

2) Sean $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $k \in \mathbb{R}$; $\mathbf{T}_{\boldsymbol{a}}(k\,\boldsymbol{f}) = (k\,\boldsymbol{f})(a) = k\,\boldsymbol{f}(a) = k\,\mathbf{T}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{f})$.

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La aplicación

$$\mathbf{L}_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{L}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \qquad (1)$$

es una forma lineal sobre $\mathbb{R}^n$.

Sea $\mathbf{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ resulta $\mathbf{L}_{\mathbf{a}}(e_i) = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Es decir que la matriz $[a_1\ a_2 \ldots a_n]$ representa a la forma lineal respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y la base $\{1\}$ de $\mathbb{R}$.

Se verifica fácilmente que toda forma lineal sobre $\mathbb{R}^n$ es del tipo (1). En efecto, sea **L** la forma lineal definida por las imágenes de los vectores de la base canónica

$$\mathbf{L}_{\mathbf{a}}(e_i) = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

resulta

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = x_1\,\mathbf{L}(e_1) + x_2\,\mathbf{L}(e_2) + \cdots + x_n\,\mathbf{L}(e_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n\,.$$

En forma más general, si **V** es un espacio vectorial real de dimensión finita "*n*" y $\mathbf{B}=\left(\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v}_n\right)$ es una base de **V,** la forma lineal **L** tal que $\mathbf{L}(\mathbf{v}_i)=a_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$ puede expresarse en la forma (1).

En efecto, para todo $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\quad \mathbf{v}=x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_n\,\mathbf{v}_n$ resulta

$$\mathbf{L}(\mathbf{v})=\mathbf{L}(x_1\,\mathbf{v}_1+x_2\,\mathbf{v}_2+\cdots+x_n\,\mathbf{v}_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\mathbf{a}\,.\,\mathbf{x}$$

con $\mathbf{a}=(a_1,\,a_2,\ldots,a_n)\,;\,\mathbf{x}=(\mathbf{v})_\mathbf{B}$.

5.2. Formas Bilineales

Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Una forma bilineal sobre **V** es también una función que toma sus valores en $\mathbb{R}$ pero está definida sobre pares ordenados de vectores de **V** y es lineal con respecto a cada vector.

Definición 5.2.1 Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Una función $\mathbf{b}:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ que asigna a cada par $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ de vectores de **V** un escalar $\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ que cumple las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ \mathbf{b}(\mathbf{u}+\mathbf{u'},\mathbf{v})=\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})+\mathbf{b}(\mathbf{u'},\mathbf{v})\\ 2)\ \mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{v'})=\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})+\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v'})\\ 3)\ \mathbf{b}(k\,\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{b}(\mathbf{u},k\,\mathbf{v})=k\,\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})\end{array}\right\}\text{para todos los }\mathbf{u},\mathbf{u'},\mathbf{v},\mathbf{v'}\in\mathbf{V};\ k\in\mathbb{R}$$

es una **forma bilineal** sobre **V**.

Ejemplos

Ejemplo 1

Todo producto interior es una forma bilineal. En particular, son formas bilineales:

a) El producto punto en $\mathbb{R}^n$.

b) La función definida por $\int_a^b \boldsymbol{f}(x).\boldsymbol{g}(x)\,dx$ en el vectorial $\mathbf{C}\left[a,b\right]$ de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continuas en el intervalo $\left[a,b\right]$.

Ejemplo 2

La función $f:\,\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\quad f\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right)=x_1^2y_1+x_2y_2+2$ no es una forma bilineal.

Ejemplo 3

La función $\mathbf{b}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{b}\big((x_1, x_2),(y_1, y_2)\big) = x_1 y_2 - y_1 x_2$ es una forma bilineal en $\mathbb{R}^2$.

Observar que es justamente el determinante de $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$ (considerada como función de las filas (o columnas) de la matriz).

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definimos una forma bilineal sobre $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{n\times 1}$ por la expresión:

$$\mathbf{b}\colon \mathbb{R}^{n\times 1} \times \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{b(X, Y) = X^T . A . Y}$$

La linealidad respecto de cada vector es consecuencia de las propiedades de la multiplicación y de la transposición de matrices.

$$\left(\begin{array}{lll} \text{Recordar que:} & \text{Si} & \mathbf{C = A + B} \Rightarrow \mathbf{C^T = A^T + B^T} \\ & \text{Si} & \mathbf{C = A . B} \Rightarrow \mathbf{C^T = B^T . A^T} \end{array}\right)$$

1. $\mathbf{b(X + X', Y)} = \left(\mathbf{X + X'}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{. A . Y} = \left(\mathbf{X^T} + \left(\mathbf{X'}\right)^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{. A . Y} = \mathbf{X^T . A . Y} + \left(\mathbf{X'}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{. A . Y}$

   $= \mathbf{b(X, Y)} + \mathbf{b(X', Y)}$

2. $\mathbf{b(X, Y + Y') = X^T . A .}\left(\mathbf{Y + Y'}\right) = \mathbf{X^T . A . Y} + \mathbf{X^T . A . Y'} = \mathbf{b(X, Y)} + \mathbf{b(X, Y')}$.

3. $\mathbf{b}(k\,\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left(k\,\mathbf{X}\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{. A . Y} = k\,\mathbf{X^T . A . Y} = \mathbf{X^T . A .}\, k\,\mathbf{Y} = k\,\mathbf{b(X, Y)}$.

5.2.1 Formas Bilineales sobre $\mathbb{R}^n$

Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Sean $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ los vectores de coordenadas en base canónica de $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ respectivamente.

La expresión $\mathbf{X^T . A . Y}$ define una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^n$ para toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

En el caso $n = 2$ se tiene

$$\mathbf{b}\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

efectuando el producto

$$\mathbf{b}\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 \qquad (2)$$

Diremos que en (1) la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$ está expresada en forma matricial y en (2) en forma polinomial.

Veremos, a continuación, que toda forma bilineal **b** sobre $\mathbb{R}^2$ puede expresarse en las formas (1) y (2).

Sea $\mathbf{B} = (e_1, e_2)$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces $\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2$, $\mathbf{y} = y_1 e_1 + y_2 e_2$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{b}\,(x_1 e_1 + x_2 e_2,\ y_1 e_1 + y_2 e_2)$$

por las propiedades de la forma bilineal resulta

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1\, \mathbf{b}(e_1, e_1) + x_1 y_2\, \mathbf{b}(e_1, e_2) + x_2 y_1\, \mathbf{b}\,(e_2, e_1) + x_2 y_2\, \mathbf{b}(e_2, e_2)\,.$$

Es decir que **b** queda determinada por los valores que toma sobre los pares de vectores de la base.

Llamando $a_{11} = \mathbf{b}(e_1, e_1)$, $a_{12} = \mathbf{b}(e_1, e_2)$, $a_{21} = \mathbf{b}\,(e_2, e_1)$, $a_{22} = \mathbf{b}(e_2, e_2)$ se obtiene que

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$$

que es la forma polinomial de **b**.

En forma matricial resulta $\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y}$

Expresiones análogas a (1) y (2) se obtienen cuando $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$.

La generalización a $\mathbb{R}^n$ se verifica de manera similar. (Se deja como ejercicio para el lector)

Ejemplos

Ejemplo 1

La forma bilineal **b** sobre $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{b}(e_1, e_1) = 3, \quad \mathbf{b}(e_1, e_2) = 1, \quad \mathbf{b}\,(e_2, e_1) = 6, \quad \mathbf{b}(e_2, e_2) = -4$$

siendo $\mathbf{B} = (e_1, e_2)$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Si consideramos $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces **b** se expresa en forma matricial como

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

y en forma polinomial como

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1 y_1 + x_1 y_2 + 6x_2 y_1 - 4x_2 y_2\,.$$

Ejemplo 2

Sea la forma bilineal **b** sobre $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{b(x, y)} = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - 6x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 + 4x_3y_3$$

b puede expresarse en forma matricial como: $\mathbf{b(x, y)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

5.2.2. Formas Bilineales sobre un Espacio de Dimensión Finita

Sea **V** un espacio vectorial de dimensión finita. Una forma bilineal sobre **V** admite descripciones similares a las que obtuvimos para $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ a condición de representar los vectores de **V** por sus vectores de coordenadas respecto de una base elegida.

Sea $\mathbf{B} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ una base de **V**. Sea $\mathbf{b}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{(u, v)} \to \mathbf{b(u, v)}$ forma bilineal sobre **V**.
Para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se tiene que $\mathbf{u} = x_1\, \mathbf{v}_1 + x_2\, \mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\, \mathbf{v}_n$ y $\mathbf{v} = y_1\, \mathbf{v}_1 + y_2\, \mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\, \mathbf{v}_n$.
Luego **b** se puede escribir:

$$\mathbf{b(u, v)} = \mathbf{b}\,(x_1\, \mathbf{v}_1 + x_2\, \mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\, \mathbf{v}_n,\; y_1\, \mathbf{v}_1 + y_2\, \mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\, \mathbf{v}_n)$$

teniendo en cuenta que **b** es una forma bilineal, resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{b(u, v)} = {} & x_1y_1\, \mathbf{b}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + \cdots + x_1y_n\, \mathbf{b}\,(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n) + \\ & + x_2y_1\, \mathbf{b}\,(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) + \cdots + x_2y_n\, \mathbf{b}\,(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n) + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + x_ny_1\, \mathbf{b}(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1) + \cdots + x_ny_n\, \mathbf{b}(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

es decir que la forma bilineal **b** queda determinada por los valores que toma sobre los pares de vectores de la base.

Haciendo $a_{i\,j} = \mathbf{b}\,(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ se tiene:

$$\mathbf{b(u, v)} = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + \cdots + a_{2n}x_2y_n + \cdots\cdots + a_{n1}x_ny_1 + \cdots + a_{nn}x_ny_n \quad (*)$$

Entonces:

> $\mathbf{b}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ forma bilineal sobre **V**. $\mathbf{B} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ base de **V**.
>
> Para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, **b** puede ser escrita como
>
> $$\mathbf{b(u, v)} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \quad \text{con} \quad a_{i\,j} = \mathbf{b}\,(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$$ **<u>Forma polinómica de b</u>**

Considerando (*), ésta puede ser expresada en forma matricial

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}.\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \mathbf{....} & x_n \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Entonces

> $\mathbf{b}:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ forma bilineal sobre $\mathbf{V}$. $\mathbf{B} = (\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v}_n)$ base de $\mathbf{V}$.
>
> Para $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\mathbf{b}$ puede ser escrita como
>
> $\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}.\left[a_{ij}\right].[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ con $a_{ij} = \mathbf{b}(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)$ **Forma matricial de b**

Recíprocamente, toda matriz $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ define una forma bilineal sobre **V** por medio de esta última fórmula.

5.2.3. Matriz de una Forma Bilineal

> **Definición 5.2.3.1** Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de dimensión finita, con $\mathbf{B} = (\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v}_n)$ una base de **V**.
>
> Sea la forma bilineal $\mathbf{b}:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$, $(\mathbf{u},\mathbf{v})\to\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})$.
>
> La matriz $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ donde $a_{ij} = \mathbf{b}(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)$ con $i,j = 1,2,\ldots,n$ se denomina **matriz de la forma bilineal b en la base B**.
>
> Notación: $[\mathbf{b}]_{\mathbf{B}} = \mathbf{A}$.

Como ya se vio previamente, para esta matriz se verifica que $\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = [\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y la forma bilineal $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$ (producto punto).

- Con respecto a $\mathbf{B}_0 = (e_1,e_2)$ base canónica de $\mathbb{R}^2$, resulta que:

$$a_{11} = \mathbf{b}(e_1,e_1) = 1, \quad a_{12} = \mathbf{b}(e_1,e_2) = 0, \quad a_{21} = \mathbf{b}(e_2,e_1) = 0, \quad a_{22} = \mathbf{b}(e_2,e_2) = 1$$

Por lo tanto $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Con respecto a la base $\mathbf{B}_1 = ((1,2), (3,4))$ resulta:

$$a_{11} = \mathbf{b}\big((1,2),\,(1,2)\big) = (1,2)\mathbf{.}(1,2) = 5$$
$$a_{12} = \mathbf{b}\big((1,2),\,(3,4)\big) = (1,2)\mathbf{.}(3,4) = 11$$
$$a_{21} = \mathbf{b}\big((3,4),\,(1,2)\big) = (3,4)\mathbf{.}(1,2) = 11$$
$$a_{22} = \mathbf{b}\big((3,4),\,(3,4)\big) = (3,4)\mathbf{.}(3,4) = 25$$

Por lo tanto $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_1}} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 2

Sea la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{b(x,y)} = \frac{1}{2}x_1y_1 + 3x_2y_2 - x_2y_1 + 5\,x_2y_2$.

Con respecto a $\mathbf{B_0} = (e_1, e_2)$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$, resulta que:

$$a_{11} = \mathbf{b(}e_1, e_1\mathbf{)} = \frac{1}{2}, \quad a_{12} = \mathbf{b(}e_1, e_2\mathbf{)} = 3, \quad a_{21} = \mathbf{b\,(}e_2, e_1\mathbf{)} = -1, \quad a_{22} = \mathbf{b(}e_2, e_2\mathbf{)} = 5$$

por lo tanto $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 3

Sea la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{b(x,\,y)} = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - 6x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 + 4x_3y_3\,.$$

- Con respecto a $\mathbf{B_0}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, resulta: $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

- Con respecto a $\mathbf{B_1} = \big(\mathbf{(}1,1,1\mathbf{)},\,\mathbf{(}0,1,1\mathbf{)},\,\mathbf{(}0,0,1\mathbf{)}\big)$ base de $\mathbb{R}^3$, resulta:

$$a_{11} = \mathbf{b}\big((1,1,1),\,(1,1,1)\big) = -1; \quad a_{12} = \mathbf{b}\big((1,1,1),\,(0,1,1)\big) = 4; \quad a_{13} = \mathbf{b}\big((1,1,1),\,(0,0,1)\big) = 4$$
$$a_{21} = \mathbf{b}\big((0,1,1),\,(1,1,1)\big) = -4; \quad a_{22} = \mathbf{b}\big((0,1,1),\,(0,1,1)\big) = 2; \quad a_{23} = \mathbf{b}\big((0,1,1),\,(0,0,1)\big) = 1$$
$$a_{31} = \mathbf{b}\big((0,0,1),\,(1,1,1)\big) = 4; \quad a_{32} = \mathbf{b}\big((0,0,1),\,(0,1,1)\big) = 4; \quad a_{33} = \mathbf{b}\big((0,0,1),\,(0,0,1)\big) = 4$$

Por lo tanto, $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

5.2.4 Cambio de Base

Como se vio en la sección anterior la matriz de $\mathbf{b}:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$ forma bilineal sobre **V** ($dim\,\mathbf{V}<\infty$) depende de la base elegida.
A continuación, analizaremos cómo se transforma la matriz de la forma bilineal **b** cuando se cambia la base en el vectorial.

Teorema 5.2.4.1 Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de dimensión finita. Sea la forma bilineal $\mathbf{b}:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}$, $(\mathbf{u},\mathbf{v})\to\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})$.
Si $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$ son bases de **V** entonces

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{B'}}=\mathbf{P}^{\mathbf{T}}.[\mathbf{b}]_{\mathbf{B}}.\mathbf{P}.$$

Demostración:

Consideramos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B'}$ son bases de $\mathbf{V}$ y sean $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.
Con respecto a la base **B** se tiene:

$$\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})=[\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}.[\mathbf{b}]_{\mathbf{B}}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B}} \qquad (1)$$

Si **P** es la matriz de cambio de la base $\mathbf{B}$ a la base $\mathbf{B'}$, entonces:

$$[\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}=\mathbf{P}.[\mathbf{u}]_{\mathbf{B'}} \qquad \text{y} \qquad [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}=\mathbf{P}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}}$$

Reemplazando en (1) resulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})&=\left(\mathbf{P}.[\mathbf{u}]_{\mathbf{B'}}\right)^{\mathbf{T}}.[\mathbf{b}]_{\mathbf{B}}.\left(\mathbf{P}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}}\right)\\&=[\mathbf{u}]_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{T}}.\mathbf{P}^{\mathbf{T}}.[\mathbf{b}]_{\mathbf{B}}.\mathbf{P}.[\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}}\\&=[\mathbf{u}]_{\mathbf{B'}}^{\mathbf{T}}.\left(\mathbf{P}^{\mathbf{T}}.[\mathbf{b}]_{\mathbf{B}}.\mathbf{P}\right).[\mathbf{v}]_{\mathbf{B'}}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la última igualdad, se verifica que:

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{B'}}=\mathbf{P}^{\mathbf{T}}.[\mathbf{b}]_{\mathbf{B}}.\mathbf{P}. \ \#$$

Observación: La matriz de una forma bilineal se transforma por cambio de base según una regla distinta a la que sigue un operador lineal. Recordar que si **T** es un operador lineal de **V**

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B'}}(\mathbf{T})=\mathbf{P}^{-1}.\mathbf{M}_{\mathbf{B}}(\mathbf{T}).\mathbf{P}$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2} x_1y_1 + 3x_2y_2 - x_2y_1 + 5\, x_2y_2$.

Vimos que con respecto a $\mathbf{B_0} = (e_1, e_2)$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{b}$ está representada por la matriz

$$\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbf{B_1} = ((1,2), (1,-3))$ otra base de $\mathbb{R}^2$.

La matriz de cambio de base de $\mathbf{B_0}$ a $\mathbf{B_1}$ esta dada por $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Luego resulta

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_1}} = \mathbf{P^T} . [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}} . \mathbf{P}$$

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{29}{2} & -\frac{81}{2} \\ -\frac{41}{2} & \frac{79}{2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Sea la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - 6x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 + 4x_3y_3 .$$

Vimos que con respecto a $\mathbf{B_0}$, la base canónica de $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{A} = [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Si ahora consideramos $\mathbf{B_1} = ((1,1,1), (0,1,1), (0,0,1))$ otra base de $\mathbb{R}^3$ y la matriz de cambio de base $\mathbf{B_0}$ a $\mathbf{B_1}$ es $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, resulta:

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_1}} = \mathbf{P^T} . [\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}} . \mathbf{P}$$

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.3. Formas Bilineales Simétricas

Definición 5.3.1 Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sea la forma bilineal $\mathbf{b}:\mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R},\ (\mathbf{u},\mathbf{v})\to\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})$.
Diremos que **b** es una **forma bilineal simétrica** sí y sólo si $\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{b}(\mathbf{v},\mathbf{u})$ para todos los $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$.

Ejemplos

Ejemplo 1

a) Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ y sea la forma bilineal dada por $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y})=x_1y_1-5x_2y_2$.
b es una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^2$.

b) Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$ y sea la forma bilineal dada por $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y})=x_1y_1-2x_1y_2+x_2y_2$.
b NO es una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2

a) Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ y sea la forma bilineal dada por

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y})=3x_1y_1+2x_1y_2-x_1y_3+2x_2y_1-x_3y_1+4x_3y_3.$$

b es una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^3$.

b) Sea $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$ y sea la forma bilineal dada por

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y})=3x_1y_1+2x_1y_2-x_1y_3+3x_2y_1-x_3y_1+4x_3y_3.$$

b NO es una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^3$.

Observación: En el ejemplo 1a) $\mathbf{A}=[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-5\end{bmatrix}$, mientras que en el ejemplo 1b) $\mathbf{A}=[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}}=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}$ ($\mathbf{B_0}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$).

En el ejemplo 2a) $\mathbf{A}=[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}}=\begin{bmatrix}3&2&-1\\2&0&0\\-1&0&4\end{bmatrix}$, mientras que en el ejemplo 2b) $\mathbf{A}=[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_0}}=\begin{bmatrix}3&2&-1\\3&0&0\\-1&0&4\end{bmatrix}$ ($\mathbf{B_0}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

¿Nota alguna relación entre la forma bilineal simétrica y la matriz de la forma bilineal?

Teorema 5.3.1 Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de dimensión finita y $\mathbf{B} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v}_n)$ es una base de **V**.
Sea la forma bilineal $\mathbf{b}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.
b es una forma bilineal simétrica sí y sólo si $[\mathbf{b}]_{\mathbf{B}} = \mathbf{A}$ es una matriz simétrica.

Demostración:

$\Rightarrow$**)** Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ donde $a_{ij} = \mathbf{b}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ con $i, j = 1,2,\dots,n$ la matriz de la forma bilineal **b** en la base **B**.

Por ser **b** simétrica se tiene que:

$$\underbrace{\mathbf{b}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)}_{a_{ij}} = \underbrace{\mathbf{b}(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i)}_{a_{ji}}$$

El resultado precedente muestra que la matriz **A** es igual a su transpuesta $(\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}})$ es decir que **A** es una **matriz simétrica**.

$\Leftarrow$**)** Supongamos ahora que la matriz **A**, de la forma bilineal **b**, es simétrica.

Sean $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ los vectores de coordenadas de $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ respecto a la base **B**.

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{X}^{\mathbf{T}} . \mathbf{A} . \mathbf{Y}$$

Puesto que $(\mathbf{X}^{\mathbf{T}} . \mathbf{A} . \mathbf{Y})$ es una matriz 1x1, es igual a su transpuesta. Teniendo en cuenta además que por hipótesis **A** es una matriz simétrica $(\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}})$ resulta

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{X}^{\mathbf{T}} . \mathbf{A} . \mathbf{Y} = (\mathbf{X}^{\mathbf{T}} . \mathbf{A} . \mathbf{Y})^{\mathbf{T}} = \mathbf{Y}^{\mathbf{T}} . \mathbf{A}^{\mathbf{T}} . \mathbf{X} = \mathbf{Y}^{\mathbf{T}} . \mathbf{A} . \mathbf{X} = \mathbf{b}(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Por lo tanto, **b** es una forma bilineal simétrica. #

5.4. Formas Cuadráticas

Las aplicaciones más simples de las formas bilineales se presentan en el estudio de las cónicas y cuádricas. Para establecer la vinculación entre estos lugares geométricos y las formas bilineales introduciremos el concepto de “forma cuadrática”.

Definición 5.4.1 Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.
Sea la forma bilineal $\mathbf{b}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \mathbf{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

La función $\mathbf{q}: \mathbf{V} \to \mathbb{R}$
$\qquad \mathbf{v} \to \mathbf{b}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$

se denomina **forma cuadrática** asociada a la forma bilineal **b**.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b}$ la forma bilineal definida por $\mathbf{b}\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 6x_2y_1 + 6x_1y_2$.

La forma cuadrática asociada a **b** es

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2x_1x_1 + 2x_1x_2 + 6x_2x_1 + 6x_2x_2 = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 6x_2^2\,.$$

Observación: El valor de **q** en el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ se expresa por medio de un polinomio homogéneo de segundo grado en x_1, x_2, coordenadas de **x** respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2

Sea la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_1y_3 - 6x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 + 4x_3y_3\,.$$

La forma cuadrática asociada a **b** es

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{x}) &= x_1x_1 - x_1x_2 + 3x_1x_3 - 6x_2x_1 + x_2x_2 - 3x_2x_3 + 4x_3x_3\\ &= x_1^2 - 7x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 - 3x_2x_3 + 4x_3^2\end{aligned}$$

Observación: El valor de **q** en el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ se expresa por medio de un polinomio homogéneo de segundo grado en x_1, x_2, x_3, coordenadas de **x** respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

5.4.1 Matriz de la Forma Cuadrática

Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de dimensión "*n*" y sea $\mathbf{b}: \mathbf{V}\times\mathbf{V} \to \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por

$$\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\,.\,\mathbf{A}\,.\,\mathbf{Y} \qquad (1)$$

con

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\mathbf{X} = [\mathbf{u}]_{\mathbf{B}}$ e $\mathbf{Y} = [\mathbf{v}]_{\mathbf{B}}$ los vectores de coordenadas de **u** y **v** respecto de una base **B**.

Si $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$, se mostró con anterioridad que desarrollando (1), se tenía la forma polinómica

$$\mathbf{b}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1y_3 + \cdots + a_{nn}x_ny_n = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

Luego, la forma cuadrática asociada es

$$\mathbf{q(u)} = \mathbf{b(u,u)} = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{nn}x_nx_n = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Cada término (no nulo) de esta suma es de segundo grado en las coordenadas del vector **u**, es decir, el valor de la forma cuadrática **q** en el vector **u** se expresa por medio de un polinomio homogéneo de segundo grado en las coordenadas de **u** con respecto de la base **B**.

Cabe preguntarse si dado un polinomio homogéneo de segundo grado en *n* variables es posible encontrar una forma bilineal sobre el vectorial **V** de dimensión "*n*", cuya forma cuadrática asociada sea precisamente el polinomio dado.

Analicemos un ejemplo sencillo, considerando $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$.
Sea

$$\mathbf{q(x)} = \mathbf{q}\big((x_1, x_2)\big) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 4\,x_2^2 .$$

Es evidente que **q** es la forma cuadrática asociada a cualquier forma bilineal del tipo:

$$\mathbf{b(x,y)} = 2x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + 4x_2y_2 \quad \text{con} \quad a_{12} + a_{21} = 6$$

es decir, que **hay muchas formas bilineales asociadas a la misma forma cuadrática**.

La matriz de **b**, en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & a_{12} \\ a_{21} & 4 \end{bmatrix}$.

Entre todas las matrices de este tipo hay una sola que es simétrica. Es la que se obtiene haciendo $a_{12} = a_{21} = 3$, esto es $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Teniendo en cuenta esta última matriz, definimos entonces la forma bilineal $\mathbf{b_s}$

$$\mathbf{b_s(x,y)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2 .$$

La forma bilineal $\mathbf{b_s}$ es simétrica y su forma cuadrática asociada es **q**. Es más, es la única forma bilineal simétrica entre todas las que están asociadas a **q**.

Lo que hemos observado en el ejemplo se generaliza sin dificultad, a cualquier espacio vectorial **V** de dimensión finita "*n*", trabajando en coordenadas respecto de una base.

En todos los casos, un polinomio homogéneo de segundo grado en *n* variables se presenta como una forma cuadrática asociada a una única forma bilineal simétrica sobre **V**.

La correspondencia uno a uno entre formas bilineales simétricas y formas cuadráticas permite definir matriz de una forma cuadrática.

Definición 5.4.1.1 Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de dimensión finita y **B** una base de **V**. Sea la forma bilineal $\mathbf{b}$ y su forma cuadrática asociada **q**.

Diremos que la **matriz de la forma cuadrática q** en la base **B**, es la matriz que representa, en dicha base, a la forma bilineal simétrica asociada a la forma cuadrática. Esto es: $[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}} = [\mathbf{b_s}]_{\mathbf{B}}$

Observación: Por su definición, la matriz de una forma cuadrática $\mathbf{q}$ en cualquier base, es la matriz que representa, en dicha base, a la forma bilineal simétrica asociada a $\mathbf{q}$, entonces por el **Teorema 5.3.1** dicha matriz es una matriz simétrica.

Ejemplos

Ejemplo 1

Se quiere hallar la matriz, con respecto a la base canónica, de la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^2$ dada por:

$$\mathbf{q(x)} = \mathbf{q}\big((x_1, x_2)\big) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5\,x_2^2$$

"Desdoblando" el termino mixto en la forma $-4x_1x_2 = -2x_1x_2 - 2x_2x_1$, podemos escribir

$$\mathbf{q(x)} = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 5\,x_2^2 .$$

Luego, la forma bilineal simétrica asociada a **q** es

$$\mathbf{b_s(x,y)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$

Con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ representa a $\mathbf{b_s}$ y por lo tanto a la forma cuadrática **q**.

Ejemplo 2.

Se busca dar la matriz, con respecto a la base canónica, de la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{q}\big((x_1, x_2, x_3)\big) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 4\,x_2^2 - 2x_2x_3 - 5x_3^2$$

Reescribiendo (desdoblando) los términos mixtos en la siguiente forma

$$2x_1x_2 = x_1x_2 + x_2x_1, \quad -3x_1x_3 = -\tfrac{3}{2}x_1x_3 - \tfrac{3}{2}x_3x_1, \quad -2x_2x_3 = -x_2x_3 - x_3x_2$$

Luego, podemos escribir

$$\mathbf{q(x)} = -x_1x_1 + x_1x_2 + x_2x_1 - \frac{3}{2}x_1x_3 - \frac{3}{2}x_3x_1 + 4x_2x_2 - x_2x_3 - x_3x_2 - 5x_3x_3$$

Reordenando los términos se obtiene:

$$\mathbf{q(x)} = -x_1x_1 + x_1x_2 - \frac{3}{2}x_1x_3 + x_2x_1 + 4x_2x_2 - x_2x_3 - \frac{3}{2}x_3x_1 - x_3x_2 - 5x_3x_3$$

La forma bilineal simétrica asociada a **q** es

$$\mathbf{b_s(x,y)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 4 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 4 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -5 \end{bmatrix}$ representa a la forma bilineal $\mathbf{b_s}$ y por lo tanto es también la matriz de **q**.

Ejemplo 3

Supongamos tener $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ del tipo $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ una matriz diagonal, entonces la forma bilineal simétrica asociada es de la forma

$$\mathbf{b_S(x,y)} = \mathbf{X^T.A.Y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b_S(x,y)} = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n$$

y por lo tanto, la forma cuadrática asociada es de la forma

$$\mathbf{q(x)} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 .$$

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior y dado que las matrices diagonales son las matrices simétricas más simples, es natural preguntarse si, en alguna base, la matriz de una forma cuadrática es diagonal. Esto equivale a plantearse, si la matriz de la forma bilineal simétrica asociada es diagonalizable.

Teorema 5.4.1.1 Sea **V** un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de dimensión finita. Si $\mathbf{b_s}$ es una forma bilineal simétrica en **V** entonces existe una base ortonormal de **V** en la cual la forma cuadrática asociada puede ser escrita como $\mathbf{q(u)} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz de la forma cuadrática y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las coordenadas de **u** respecto de la base ortonormal.

Demostración:

Sea $\mathbf{B_1}$ una base cualquiera de **V**.

Sabemos que $[\mathbf{q}]_{\mathbf{B_1}} = [\mathbf{b_s}]_{\mathbf{B_1}} = \mathbf{A}$ es una matriz simétrica.

Por el **Teorema 3.5.2** si **A** es una matriz simétrica, entonces existe una matriz **P** ortogonal, tal que: $\mathbf{P^T . A . P = D}$ matriz diagonal.

Esto es, existe $\mathbf{B}_2$ una base ortonormal formada por vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de **A** talque

$$\mathbf{P^T}.[\mathbf{b}]_{\mathbf{B_1}}.\mathbf{P} = [\mathbf{b_s}]_{\mathbf{B_2}} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$ siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de **A**

Luego, si $\mathbf{B}_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ se tiene que $\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$ y entonces, desarrollando

$$\mathbf{q(u)} = [\mathbf{u}]_{\mathbf{B_2}}^{\mathbf{T}}.\mathbf{D}.[\mathbf{u}]_{\mathbf{B_2}}$$

$$\mathbf{q(u)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q(u)} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

Por lo tanto, la forma cuadrática asociada $\mathbf{q(u)} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ es una suma de múltiplos de cuadrados donde no aparecen "términos mixtos". #

Ejemplos

Ejemplo 1

Encuentre un cambio de variable de manera la forma cuadrática dada por

$$\mathbf{q(x)} = \mathbf{q}((x_1, x_2)) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$$

se transforme en una forma cuadrática sin "término mixto" (o término cruzado).

Con respecto a la base canónica $\mathbf{B_0}$ de $\mathbb{R}^2$, la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B_0}} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ y podemos escribir $\mathbf{q(x)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, esto es $\mathbf{q(x)} = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{T}} .\mathbf{A}. [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}$.

Como **A** es una matriz simétrica, diagonaliza ortogonalmente.

Planteamos entonces

$$0 = det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow 0 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

Luego los valores propios de **A** son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 1$. Los correspondientes vectores propios unitarios son $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, considerando $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ (matriz cambio de base canónica a base de vectores propios) y $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ se tiene que $\mathbf{P^T} . \mathbf{A} . \mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \mathbf{P}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}$ donde $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ resulta:

$$\mathbf{q}((y_1,y_2)) = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{T}} .\mathbf{D}. [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 6y_1^2 + y_2^2 \ .$$

Ejemplo 2

Encuentre un cambio de variable de manera la forma cuadrática dada por

$$\mathbf{q(x)} = \mathbf{q}((x,y,z)) = x^2 + y^2 + 2xy + 2z^2$$

se transforme en una forma cuadrática sin "término mixto" (o término cruzado).

Con respecto a la base canónica $\mathbf{B_0}$ de $\mathbb{R}^3$, la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B_0}} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y podemos escribir $\mathbf{q(x)} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, esto es $\mathbf{q(x)} = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{T}} .\mathbf{A}. [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}$.

Como **A** es una matriz simétrica, diagonaliza ortogonalmente.

Planteamos entonces

$$0 = det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow 0 = (\lambda-2)\left((\lambda-1)^2+1\right) = \lambda(\lambda-2)^2$$

Luego los valores propios de **A** son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$ (multiplicidad 2). Los correspondientes vectores propios unitarios son $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, considerando $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (matriz cambio de base canónica a base de vectores propios) y $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ se tiene que $\mathbf{P}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

Luego, teniendo en cuenta que $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \mathbf{P}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}$ donde $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ resulta:

$$\mathbf{q}((x',y',z')) = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{T}}.\mathbf{D}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 2(y')^2 + 2(z')^2 .$$

5.5. Ecuaciones Cuadráticas

En lo que sigue supondremos que $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$ con el producto punto.

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea **q** una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^n$. La elección de un número real c permite plantear la ecuación cuadrática

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = c .$$

Resolver esta ecuación, es encontrar el conjunto $\boldsymbol{C}$ de todos los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que la satisfacen, es decir $\boldsymbol{C} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{q}(\mathbf{x}) = c,\ c \in \mathbb{R} \right\}$. Cuando este conjunto $\boldsymbol{C}$ no es vacío, recibe el nombre de **cuádrica** de $\mathbb{R}^n$.

En particular en $\mathbb{R}^2$ las gráficas de ecuaciones cuadráticas se denominan **cónicas**. Las más importantes son la **elipse**, **circunferencia**, **hipérbola** y **parábola** a las que se las suele llamar cónicas ordinarias o regulares. Las demás cónicas se llaman degeneradas e incluye a **pares de rectas** y **puntos simples**.

5.5.1 Secciones Cónicas en $\mathbb{R}^2$

En esta sección realizaremos una breve revisión del tema secciones cónicas. Definiremos cada una de las secciones cónicas como lugares geométricos, esto es, como conjuntos de puntos del plano que satisfacen una determinada condición.

Las secciones cónicas se obtienen como intersección de un plano con un cono recto circular de dos hojas, esto es, que se extiende indefinidamente a ambos lados del vértice. El cono circular recto, es una superficie en el espacio tridimensional generada por el movimiento de una recta llamada *generatriz*, que corta a una recta fija eje del cono, en un punto fijo, denominado *vértice* del cono, con un ángulo constante θ, siendo $0<\theta<\pi/2$.

Según cuál sea la inclinación del plano respecto al eje del cono, resultan las distintas curvas (secciones cónicas) como se observa en la siguiente figura.

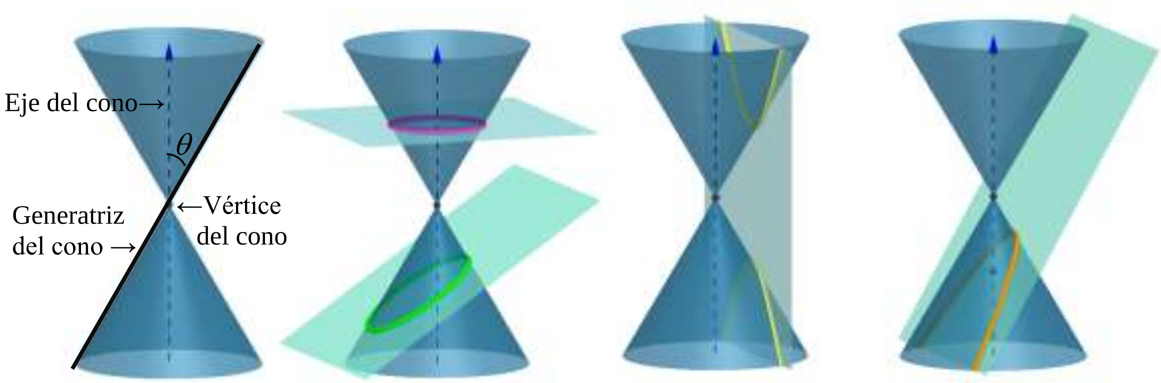


Figura 5.1

I. Si el plano interseca sólo a una de las hojas y no es paralelo a ninguna generatriz del cono, la curva obtenida se denomina **elipse**. Como caso particular, si el plano fuera perpendicular al eje del cono, se tendrá una **circunferencia**.

II. Si el plano corta a las dos hojas del cono, siendo paralelo al eje y no pasa por el vértice, la curva que se obtiene se denomina **hipérbola**.

III. Si el plano corta sólo una de las hojas y es paralelo a una generatriz del cono, lo que se obtiene recibe el nombre de **parábola**.

Por otra parte, las secciones cónicas degeneradas se obtienen cuando se considera la intersección de un cono circular recto de dos hojas con un plano que pasa por su vértice. Se clasifican en tres tipos: **punto**, **recta** y **par de rectas**.

A continuación, veremos las principales características de las cónicas no degeneradas.

5.5.1.1. Circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a igual distancia de un punto fijo llamado **centro** (**P** en la Figura 5.2). Esta distancia recibe el nombre de **radio** de la circunferencia y la denotaremos "*r*".

En el sistema de coordenadas mostrado en la Figura 5.2, se tiene el centro $\mathbf{P} = (x_0, y_0)$ y el punto genérico de la circunferencia $\mathbf{Q} = (x, y)$.

Luego, la distancia entre los puntos **P** y **Q** es: $d(\mathbf{P},\mathbf{Q}) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$

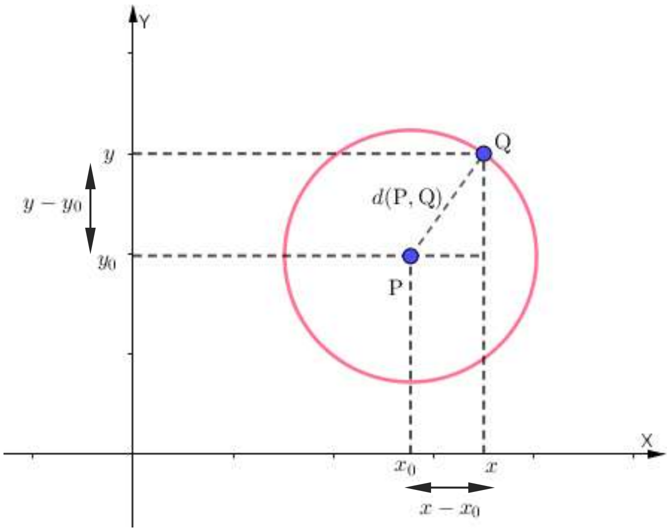


Figura 5.2

Elevando al cuadrado, se obtiene la **ecuación canónica de la circunferencia** de centro (x_0, y_0) y radio *r*.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r \qquad \textbf{(1)}$$

Desarrollando la última expresión, se tiene:

$$x^2 - 2x_0 x + x_0^2 + y^2 - 2y_0 y + y_0^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y = r^2 - x_0^2 - y_0^2$$

Luego se ontiene la **ecuación general de la circunferencia** de centro (x_0, y_0) y rado *r*:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey = F \qquad \textbf{(2)}$$

donde $D = -2x_0 \quad E = -2y_0 \quad F = r^2 - x_0^2 - y_0^2$

Ejemplos

Ejemplo 1

Se desea dar la ecuación de la circunferencia con centro en **P** = (–2, 3) y radio r = 4.

De acuerdo con la ecuación **(1)** escribimos: $(x+2)^2+(y-3)^2=16$.

Equivalentemente la ecuación general de la misma es: $x^2+y^2+4x-6y=3$.

Ejemplo 2

Se quiere hallar el centro y el radio de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2+8x-5y=6$.

Usando las expresiones **(2)**

$$D=-2x_0=8 \Rightarrow x_0=-4$$

$$E=-2y_0=-5 \Rightarrow y_0=-\tfrac{5}{2}$$

$$C=r^2-x_0^2-y_0^2=6 \Rightarrow r^2=4+\tfrac{5}{2}+9 \Rightarrow r^2=\tfrac{31}{2} \Rightarrow r=\sqrt{\tfrac{31}{2}}$$

Consecuentemente:

$$\text{Centro: } \mathbf{P}=\left(-4,-\tfrac{5}{2}\right); \quad \text{radio: } r=\sqrt{\tfrac{31}{2}}\ .$$

5.5.1.2 Elipse

La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos del plano, llamados **focos**, es una magnitud constante mayor que la distancia entre los focos.

Para deducir la expresión matemática que vincula las coordenadas de un punto que pertenezca a la elipse, en su forma más simple, llamada **ecuación canónica,** ubicaremos un sistema de coordenadas en una posición, especialmente conveniente para nuestro fin.

Con este objeto, construimos el eje **x**, de forma tal que contenga a los focos de la elipse, mientras que el eje **y**, perpendicular al eje **x**, pasa por el punto medio del segmento determinado por los focos (Figura 5.3).

La distancia entre los focos es una cantidad fija, que la llamaremos 2 c.

Sea $\mathbf{P}=(x,y)$ un punto genérico de la elipse. De acuerdo a la definición, la suma de las distancias de **P** a los focos, $\mathbf{F}_1=(c,0)$ y $\mathbf{F}_2=(-c,0)$, debe ser una constante que la llamaremos $2a$, es decir: $d(\mathrm{P},\mathrm{F}_1)+d(\mathrm{P},\mathrm{F}_2)=2a$. (Observar que $a>c>0$)

Si denominamos a las distancias de **P** a los focos, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, r_1 y r_2 respectivamente, resulta:

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad \textbf{(1)}$$

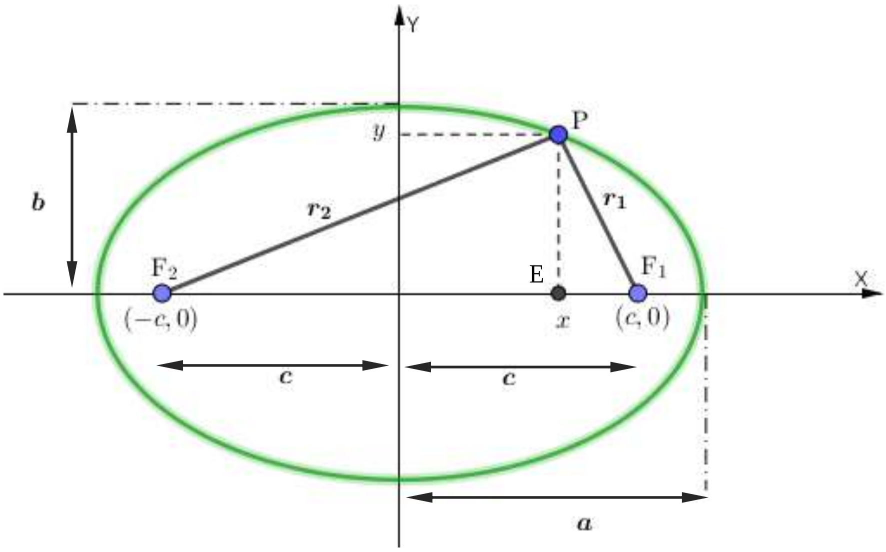


Figura 5.3

Observando la Figura 5.3, vemos que r_1 y r_2 son, respectivamente las hipotenusas de los triángulos rectángulos: $\overset{\Delta}{F_1EP}$ y $\overset{\Delta}{F_2EP}$. Aplicando Pitágoras:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Reemplazando estas expresiones en (1):

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

Elevando nuevamente al cuadrado y operando:

$$a^2x^2 - 2c\,x\,a^2 + c^2a^2 + a^2y^2 = a^4 - 2c\,x\,a^2 + c^2x^2$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = \left(a^2 - c^2\right)a^2$$

Luego dividiendo por $\left(a^2 - c^2\right)a^2$ se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(a^2-c^2\right)}=1$$

Obtenemos entonces la **ecuación canónica de la elipse** con centro $(0,0)$:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ donde } b^2=a^2-c^2 \qquad \textbf{(2)}}$$

Observaciones:

- El punto medio del segmento definido por los focos, es centro de simetría de la figura, en adelante lo llamaremos simplemente **centro**. Debe notarse que en el caso de la Figura 5.3, dicho centro coincide con el origen del sistema, por lo que sus coordenadas serán (0,0). Observar que, si (x,y) pertenece a la elipse, entonces $(-x,-y)$ también pertenece a ella, por verificar ambos la ecuación **(2)**.

- En la ecuación **(2)**, podemos analizar el significado geométrico de las constantes *a* y *b*. En efecto, para $y=0$, se tiene: $x=\pm a$ (Figura 5.4). Es decir, los puntos en que la elipse corta al eje **x**, denominados **vértices**, tienen abscisa $\pm\ a$. Luego las coordenadas de los vértices son: $\mathbf{V}=\left(a,0\right)$; $\mathbf{V'}=\left(-a,0\right)$.

- El segmento que une los vértices, tiene longitud $2a$ y se denomina **eje mayor**.

- En forma similar, para $x=0$, resulta: $y=\pm b$. Esto nos muestra que los puntos donde la elipse corta al eje **y**, tienen ordenada $\pm b$ (Figura 5.4). Luego: $\mathbf{M}=\left(0,b\right)$; $\mathbf{M'}=\left(0,-b\right)$.

- La longitud del segmento $\overline{\mathbf{MM'}}$ es $2b$ y es llamado **eje menor**.

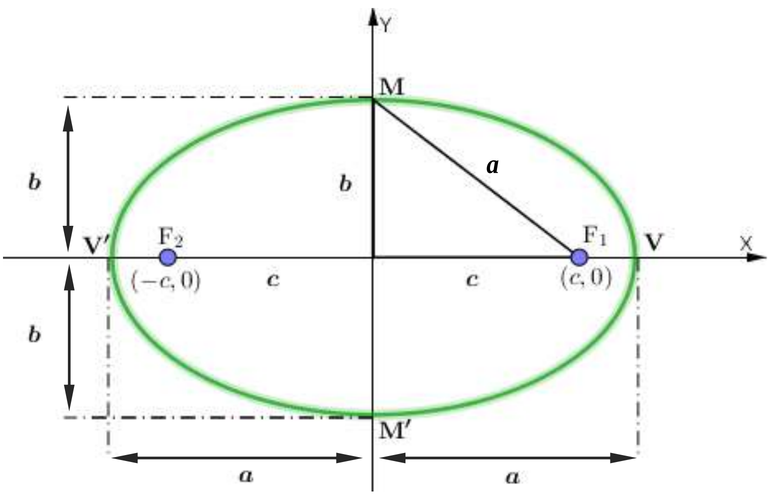


Figura 5.4

- Las coordenadas de los focos son: $\mathbf{F_1} = (c,0)$; $\mathbf{F_2} = (-c,0)$ donde se verifica $c < a$. En el caso de ser $c = a$, se tendrá un segmento de recta que es uno de los casos de cónicas degeneradas.

- Como **M** pertenece a la elipse, se debe cumplir: $\overline{\mathbf{MF_1}} + \overline{\mathbf{MF_2}} = 2a$ pero además, por simetría: $\overline{\mathbf{MF_1}} = \overline{\mathbf{MF_2}} = a$ siendo: $\overline{\mathbf{M0}} = b$ y $\overline{\mathbf{0F_1}} = c$.

  Si se considera el triángulo $\overset{\Delta}{\mathbf{M0F_1}}$, rectángulo en **0**, aplicando Pitágoras se tiene $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ según puede apreciarse, *a* corresponde a la longitud de la hipotenusa del triángulo, en tanto que *b* y *c* son las longitudes de los catetos. Como consecuencia, en todo este análisis, se tiene: $a > b$.

- Si en una expresión, tal como la **(2)**, fuera: $b > a$, la elipse tendría sus vértices y focos sobre el eje **y**, en consecuencia el eje mayor estará sobre el eje **y**.

- Cuando $a = b = r$, se tiene el caso particular de la **circunferencia**.

  Multiplicando ambos miembros de la ecuación de la elipse por r^2, resulta:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \textbf{(3)}$$

  que es la ecuación de una circunferencia de radio " r " y centro en el origen.

- Si el centro de la elipse estuviera desplazado del origen, ocupando el punto de coordenadas: (x_0, y_0), pero con los ejes mayor y menor paralelos a los ejes coordenados del sistema, la ecuación **(2)** se modifica, presentando la forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(4)}$$

Ecuación de la elipse con centro (x_0, y_0)

- Desarrollando la ecuación **(4)**, se obtiene una expresión de la forma:

$$A x^2 + C y^2 + D x + E y = F \qquad \textbf{(5)}$$

Donde $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2 x_0$, $E = -2a^2 y_0$, $F = a^2 b^2 - 2b^2 x_0{}^2 - 2a^2 y_0{}^2$

- Si, como caso particular, en la expresión **(5)** se tiene *A*=*C*, con muy poco trabajo algebraico, es posible llegar a una ecuación de la forma **(3)**, es decir, se trata de una circunferencia.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la ecuación de una elipse, dada en la forma:

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y = -51 \qquad \text{(I)}$$

Se quieren hallar las coordenadas del centro y el valor de los semiejes a y b.

En la ecuación (I), los términos en x^2 y x, pueden pensarse como ***parte del desarrollo de un cuadrado***, esto es:

$$6x^2 - 24x = 6(x^2 - 4x)$$

si: $x^2 - 4x$ son los dos primeros términos del desarrollo de: $(x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha\, x + \alpha^2$ entonces debe cumplirse que: $-2\alpha = -4$ o equivalentemente $\alpha = 2 \Rightarrow \alpha^2 = 4$.

Luego, reescribiendo adecuadamente en (I), resulta:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y &= -51 \\ 6x^2 - 24x + 9y^2 - 54y &= -51 \\ 6(x^2 - 4x) + 9y^2 - 54y &= -51 \\ 6(x^2 - 4x + 4 - 4) + (9y^2 - 54y) &= -51 \\ 6(x^2 - 4x + 4) + (9y^2 - 54y) - 24 &= -51 \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

En la expresión obtenida, procedemos de manera similar con el segundo paréntesis:

$$9y^2 - 54y = 9(y^2 - 6y)$$

si $y^2 - 6y$ como los dos primeros términos del desarrollo de $(y-\beta)^2 = y^2 - 2\,y\beta + \beta^2$ se tendrá que $\beta = 3 \Rightarrow \beta^2 = 9$.

Ahora (II) toma el aspecto:

$$\begin{aligned} 6(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9 - 9) - 24 &= -51 \\ 6(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) - 24 - 81 &= -51 \\ 6(x-2)^2 + 9(y-3)^2 - 105 &= -51 \end{aligned}$$

O lo que es igual: $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{6} = 1$

En esta ecuación se pone de manifiesto que las coordenadas del centro son: $centro = (x_0, y_0) = (2,3)$ y los cuadrados de los semiejes: $a^2 = 9$; $b^2 = 6$.

Ejemplo 2

Dada la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, se busca hallar la distancia entre los focos.

Como $a^2 = 5^2$ y $b^2 = 4^2 \Rightarrow c = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$. Luego, la distancia entre los focos es $2c$ = 6.

5.5.1.3 Hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos del plano, llamados **focos**, tomada en valor absoluto, es una cantidad constante, menor que la distancia entre los focos.

Para deducir la ecuación canónica de la hipérbola, se trabaja de manera análoga al caso de la elipse.

Se construye un sistema de coordenadas tal que el eje **x** contenga a los focos, el eje **y** sea perpendicular al eje **x**, y pase por el punto medio del segmento determinado por los focos.

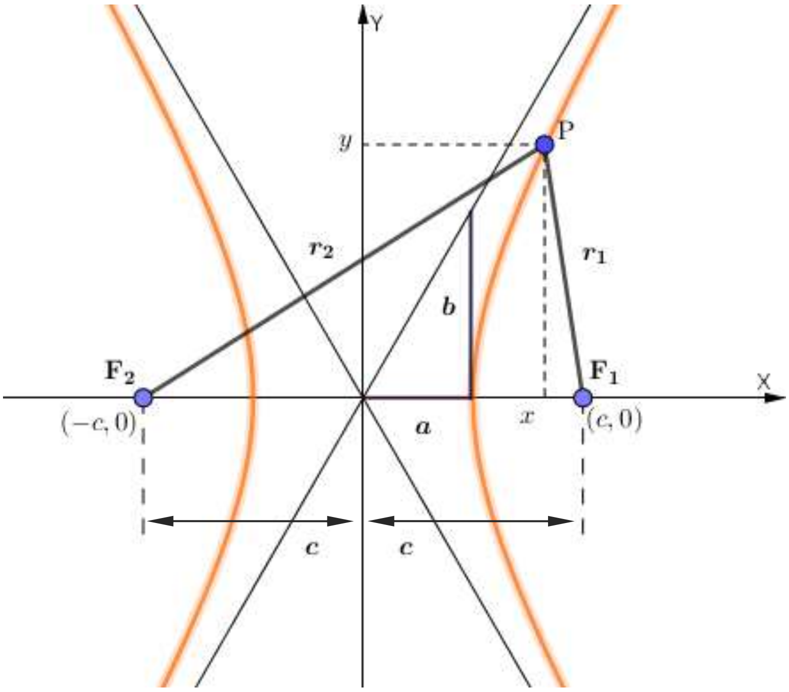


Figura 5.5

La distancia entre los focos la llamamos nuevamente $2c$.

Sea $\mathbf{P} = (x,y)$ un punto genérico de la hipérbola. De acuerdo a la definición, la resta de las distancias de **P** a los focos, $\mathbf{F}_1 = (c,0)$ y $\mathbf{F}_2 = (-c,0)$, debe ser en valor absoluto una constante que llamaremos $2a$, es decir:

$$d(\mathrm{P},\mathrm{F}_1) - d(\mathrm{P},\mathrm{F}_2) = |2a|.$$

Teniendo en cuenta la Figura 5.5, denominamos a las distancias de **P** a los focos, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, r_1 y r_2 respectivamente, entonces podemos escribir: $r_1 - r_2 = \pm\, 2a$.

De acuerdo a la Figura 5.5: $r_1 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$ y $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, luego se tiene:

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(c-x)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(c-x)^2+y^2} + (c-x)^2+y^2$$

desarrollando los cuadrados y simplificando

$$cx-a^2 = \pm a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

elevando nuevamente al cuadrado y con algo de trabajo algebraico

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$
$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2-a^2)a^2$$

Luego, dividiendo por $\left(a^2-c^2\right)a^2$ se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2-a^2)} = 1$$

Obtenemos entonces la **ecuación canónica de la hipérbola** con centro en (0,0) y focos sobre el eje x:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{donde } b^2 = a^2 - c^2 \qquad \textbf{(1)}}$$

Teniendo en cuenta esta última expresión, se puede despejar: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

Puede apreciarse que, cuando $x >> a$ entonces: $y \approx \pm\frac{b}{a}x$.

La última expresión, considerada como una igualdad, contiene las ecuaciones de dos rectas que se denominan **asíntotas** de la hipérbola: $y = \frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$.

Éstas son rectas a las que se aproximan los puntos de la hipérbola a medida que $x \to \pm\infty$ (Figura 5.6).

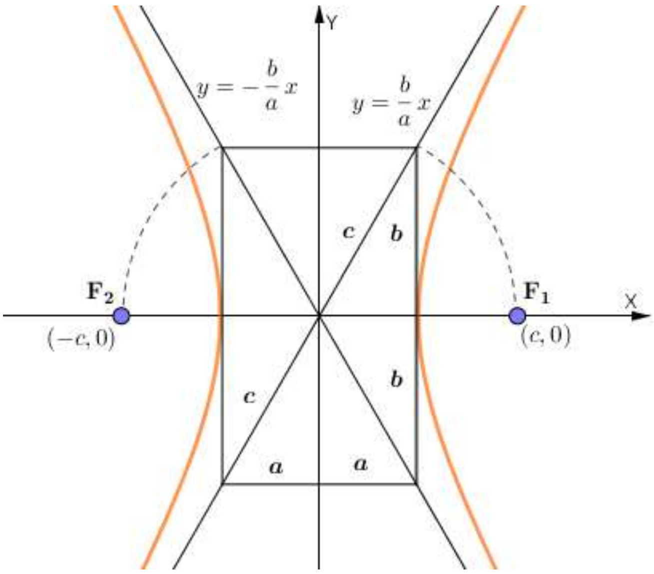


Figura 5.6

Observaciones:

- La hipérbola es una curva que tiene **centro de simetría**, es decir, si (x, y) pertenece a la curva, entonces $(-x, -y)$ también pertenece a ella, hecho que se verifica inmediatamente en la ecuación **(1)**. En el caso que se ha estudiado, el eje de simetría coincide con el origen del sistema de coordenadas.
- Se conviene en llamar **eje transversal** de la hipérbola, al segmento determinado por los vértices (puntos $(a,0)$ y $(-a,0)$ en este caso); en tanto que se denomina **eje conjugado**, al determinado por $(0,b)$ y $(0,-b)$.
- Los puntos (a,b), $(-a,b)$, $(-a,-b)$ y $(a,-b)$ definen lo que se denomina **rectángulo principal** de la hipérbola. Las diagonales del mismo, son parte de las **asíntotas** de la hipérbola.
- La distancia de uno de los focos al origen del sistema, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de base *a* y altura *b*, de modo que: $c^2 = a^2 + b^2$.
- Los puntos donde la hipérbola corta al eje **x**, se denominan **vértices** de la hipérbola. De la ecuación, surge fácilmente que: $y = 0 \Rightarrow x = \pm a$, por lo que las coordenadas de los vértices son: $\mathbf{V_1} = (a,0)$ y $\mathbf{V_2} = (-a,0)$. Para $x = 0$, no existe el correspondiente valor de *y*, lo cual nos indica que esta curva "*no corta*" al eje **y**.
- En el caso particular en que $a = b = r$, se tiene una **hipérbola equilátera**, cuya ecuación es: $x^2 - y^2 = r^2$.

- Si los focos de la hipérbola se encuentran sobre el eje **y**, la ecuación de la curva toma la forma: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. En este caso, los vértices se encuentran sobre el eje **y** y la curva no corta al eje **x**.

- Cuando la hipérbola tiene sus asíntotas coincidentes con los ejes de coordenadas, la ecuación es: $x.y = k$ con $k \in \mathbb{R}$. En este caso, el aspecto de la curva se muestra en la Figura 5.7

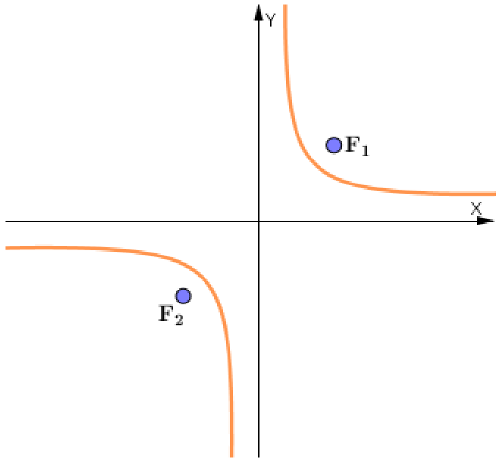


Figura 5.7

- Cuando el centro de simetría de la hipérbola, se encuentra desplazado al punto de coordenadas (x_0, y_0), la ecuación **(1)** toma la forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(2)}$$

- Desarrollando (2), se obtiene una expresión que presenta el aspecto:

$$A x^2 + C y^2 + D x + E y = F \qquad \textbf{(3)}$$

$$Donde \quad A = b^2, \quad C = -a^2 \ \ (\text{se cumple que } A.C < 0)$$

$$D = -2b^2 x_0 \ , \ E = -2a^2 y_0 \ , \ F = a^2 b^2 - 2b^2 {x_0}^2 - 2a^2 {y_0}^2$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Dada la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, se quiere calcular la distancia focal y la ecuación de las asíntotas.

Dado que $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, planteamos $c = \sqrt{16+9} = 5 \quad \Rightarrow \quad$ distancia focal: $2c = 10$

$$\left.\begin{array}{l} a=\sqrt{16}=4 \\ b=\sqrt{9}\ =\ 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{asíntotas:} \quad \left\{\begin{array}{ll} L: & y=\frac{3}{4}x \\ L': & y=-\frac{3}{4}x \end{array}\right.$$

Ejemplo 2

Se quiere analizar la curva correspondiente a la ecuación:

$$9x^2-4y^2-18x-16y+29=0 \qquad \text{(I)}$$

Vamos a proceder de manera similar a lo realizado en el ejemplo 1 de elipse, donde, el método aplicado fue **completar cuadrados**.

Re-escribimos (I):

$$9\left(x^2-2x\right)-4\left(y^2+4y\right)=-29$$

Completando cuadrados y operando:

$$9\left(x^2-2x+1-1\right)-4\left(y^2+4y+4-4\right)=-29$$

$$9\left(x^2-2x+1\right)-4\left(y^2+4y+4\right)-9+16=-29$$

$$9\left(x-1\right)^2-4\left(y+2\right)^2=-36$$

Finalmente se tiene que la ecuación se puede escribir:

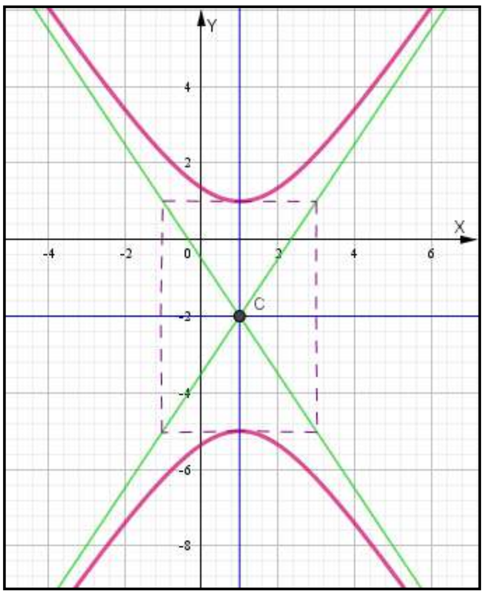
$$\frac{(y+2)^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{4}=1$$

Centro: $centro=\left(1,-2\right)$

Asíntotas: $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{2}; \quad y=-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$

Vértices: $\mathbf{V}_1=\left(1,1\right)$; $\mathbf{V}_2=\left(1,-5\right)$

Focos: $\mathbf{F}_1=\left(1,-2+\sqrt{13}\right)$; $\mathbf{F}_2=\left(1,-2-\sqrt{13}\right)$



5.5.1.4. Parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos $\mathbf{P}=(x,y)$ que equidistan de una recta ***r***, llamada **directriz** y de un punto que no pertenece a ella, denominado **foco** de la parábola.

Fijados estos dos elementos, siempre es posible determinar la distancia entre el foco **F** y la directriz ***r***, magnitud que denotaremos *p*.

De manera similar a lo realizado en las secciones anteriores, introducimos un sistema de coordenadas donde, el eje **y** sea perpendicular a la directriz y contenga al foco; el eje **x** pasa por el punto medio del segmento del eje **y** que une al foco con la directriz (Figura 5.8).

Un punto genérico $\mathbf{P}=\left(x,y\right)$ pertenece a la parábola si: $\overline{\mathbf{PF}}=d(\mathbf{P},\mathbf{F})=d(\mathbf{P},r)$.

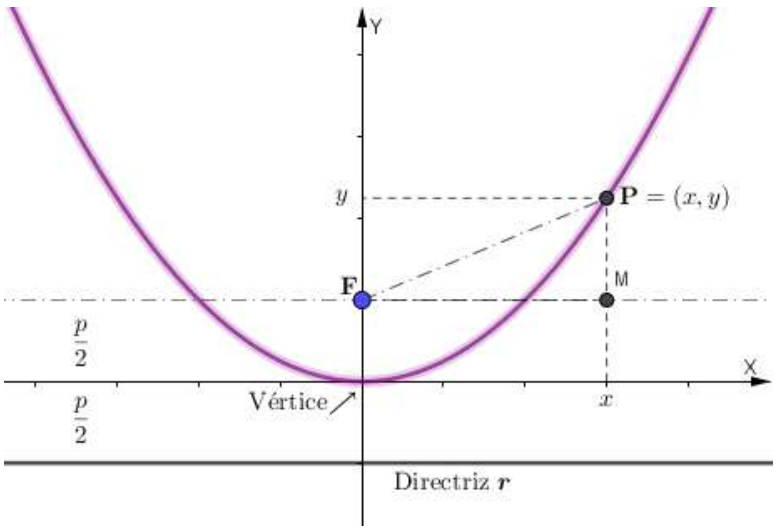


Figura 5.8

Considerando, además, que $\overline{\mathbf{PF}}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{\mathbf{FMP}}$ se tiene:

$$\overline{\mathbf{PF}}=d(\mathbf{P},\mathbf{F})=d(\mathbf{P},r)=y+\frac{p}{2}=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}$$

elevando al cuadrado y operando:

$$y^2+py+\left(\frac{p}{2}\right)^2=x^2+y^2-py+\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$2py=x^2$$

$$y=\frac{1}{2p}x^2$$

Haciendo: $\dfrac{1}{2p} = a$ se tiene la **ecuación canónica de la parábola.**

$$y = a\,x^2 \qquad \textbf{(1)}$$

La ecuación de la directriz es: $y = -\dfrac{p}{2}$.

Observaciones:

- La recta que contiene al foco y es perpendicular a la directriz es el **eje de la parábola**.
- El punto medio entre el foco y la directriz, esto es, el punto donde la curva corta al eje de la parábola, se denomina **vértice**.
- En el caso considerado, el vértice coincide con el origen del sistema, por lo que sus coordenadas son: $\mathbf{V} = (0,0)$; en tanto que las del foco son: $\mathbf{F} = \left(0, \dfrac{p}{2}\right)$.
- Cuando el foco está situado sobre el eje **y** (como vimos en la Figura 5.8), la parábola se llama a eje vertical.
- Si se invierten los roles de x e y, se obtiene como ecuación canónica de la parábola a eje horizontal:

$$x = a\,y^2 \qquad \textbf{(2)}$$

- Cuando la parábola se desplaza paralelamente, de forma tal que el vértice no coincide con el origen del sistema, siendo ahora sus coordenadas: $\mathbf{V} = (x_0, y_0)$, la ecuación **(1)** toma la forma:

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \qquad \textbf{(a)}$$

Desarrollando el cuadrado y reordenando los términos, se obtiene:

$$A\,x^2 + D\,x + y = F \qquad \textbf{(3)}$$

$$\textit{Donde}\quad A = -a^2,\quad C = -2ax_0\ ,\ F = y_0 + ax_0^{\,2}$$

Frecuentemente suele también despejarse "*y*" en la ecuación **(a)**, y haciendo:

$$b = -2ax_0 \qquad \text{y} \qquad c = a\,x_0^{\,2} + y_0 \qquad \textbf{(b)}$$

Se obtiene la más conocida expresión:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad \textbf{(4)}$$

Donde $b = -2ax_0$ y $c = ax_0^{\;2} + yx_0$

Si el coeficiente a es positivo, las ramas de la parábola a eje vertical, son hacia arriba; si fuera negativo, hacia abajo. En la parábola a eje horizontal, las ramas serían hacia la derecha, o la izquierda respectivamente, según el caso.

En la expresión **(4)**, las abscisas de los puntos donde la curva corta al eje **x**, $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ son las raíces de la ecuación: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

La ordenada del punto donde la curva corta al eje **y**, es *c*. (Figura 5.9)

Las coordenadas del vértice $\mathbf{V}$, surgen inmediatamente de las fórmulas **(3)**:

$$x_{\text{V}} = h = \frac{-b}{2a}; \qquad y_{\text{V}} = k = \frac{-b^2}{4a} + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \Rightarrow \mathbf{V} = \left(-\frac{b}{2a},\; c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

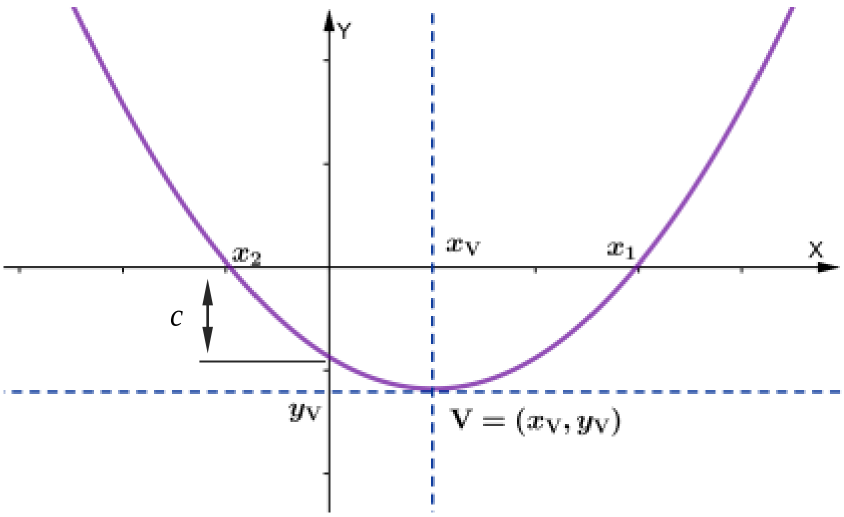


Figura 5.9

Ejemplos

Ejemplo 1

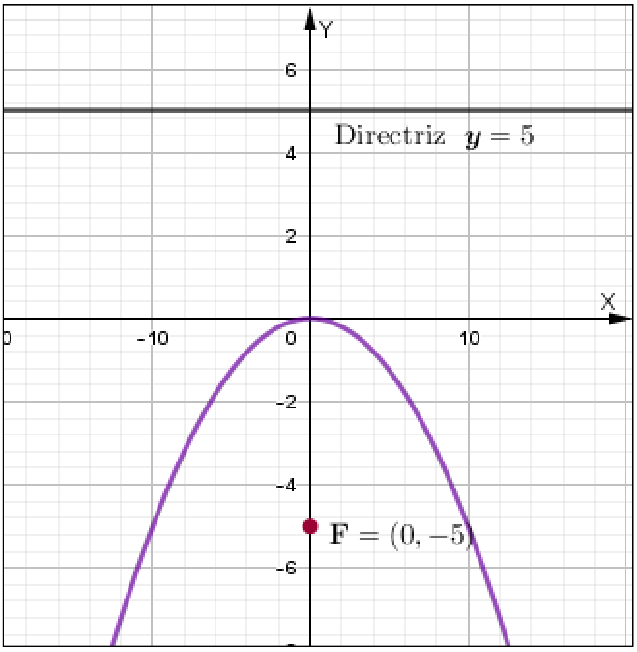
Se busca dar la ecuación de una parábola que tiene su foco en: $\mathbf{F} = (0, -5)$ y como directriz la recta: $y = 5$. Se quiere, además, graficarla.

Como el foco está situado debajo de la directriz y sobre el eje y, resulta que:

$$\mathbf{F} = \left(0, \frac{p}{2}\right) = (0, -5) \;\Rightarrow\; p = -10 < 0\,,$$

la parábola tiene sus ramas hacia abajo.

$$a = \frac{1}{2p} = -\frac{1}{20} \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{20}x^2$$



Ejemplo 2

Dada la parábola de ecuación: $y = x^2 - 4x + 3$

Se quiere determinar: a) puntos de corte con los ejes coordenados; b) coordenadas del vértice y c) gráfico.

Solución:

a) La parábola corta al eje y en: $x = 0 \Rightarrow y = 3$.
Los puntos de corte con el eje x:

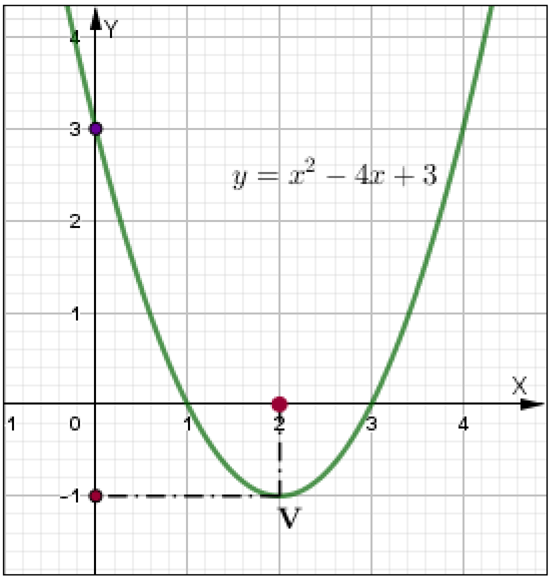
.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \;\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \;\text{ y }\; x_2 = 1$$

Rta: puntos de corte con los ejes coordenados (0,3); (1,0) y (3,0).

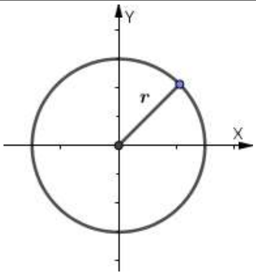
b)
$$\left.\begin{aligned} x_{Vértice} &= -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2} = 2 \\ y_{Vértice} &= c - \frac{b^2}{4a} = 3 - \frac{16}{4} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{V} = (2, -1)$$



Resumen Secciones Cónicas (estándar y/o trasladadas)

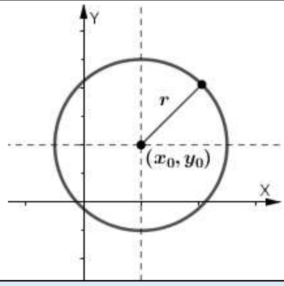
<table>
<tr><th colspan="2">Circunferencia</th></tr>
<tr><td>Centro $(0,0)$ Radio r</td><td>Centro (x_0,y_0) Radio r</td></tr>
<tr><td>

$x^2+y^2=r$



</td><td>

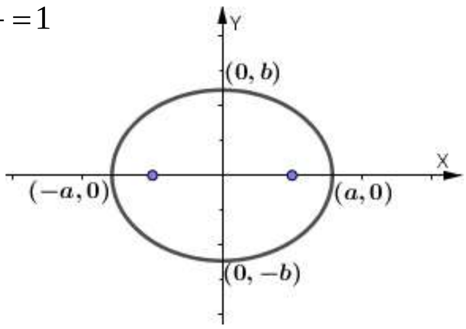
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r$



</td></tr>
<tr><th colspan="2">Elipse</th></tr>
<tr><td>

Centro $(0,0)$
Focos sobre el eje x: $\mathbf{F_1}=(c,0)$; $\mathbf{F_2}=(-c,0)$
Corte con eje x: $(a,0)$ y $(-a,0)$
Corte con eje y: $(0,b)$ y $(0,-b)$
Se verifica que: $b^2=a^2-c^2$

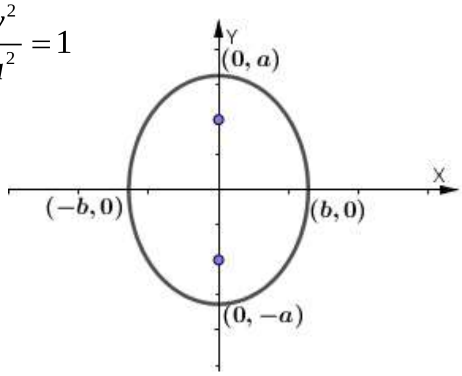
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



</td><td>

Centro $(0,0)$
Focos sobre el eje y: $\mathbf{F_1}=(0,c)$; $\mathbf{F_2}=(0,-c)$
Corte con eje x: $(b,0)$ y $(-b,0)$
Corte con eje y: $(0,a)$ y $(0,-a)$
Se verifica que: $b^2=a^2-c^2$

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

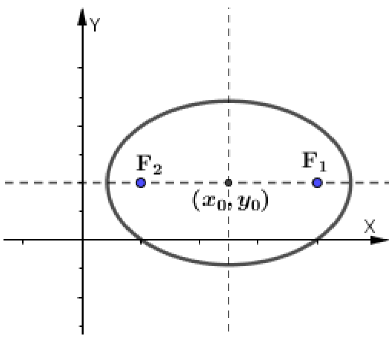


</td></tr>
<tr><td>

Centro (x_0,y_0)

Eje mayor (o eje focal) es <u>paralelo al eje x.</u>

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

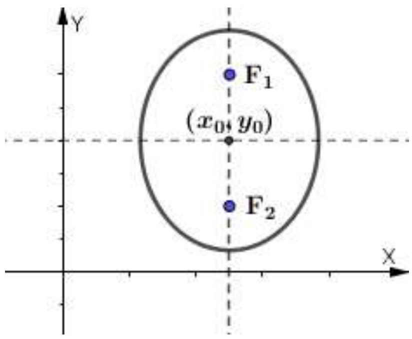


</td><td>

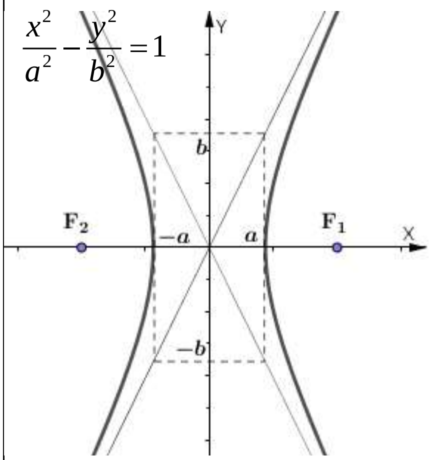
Centro (x_0,y_0)

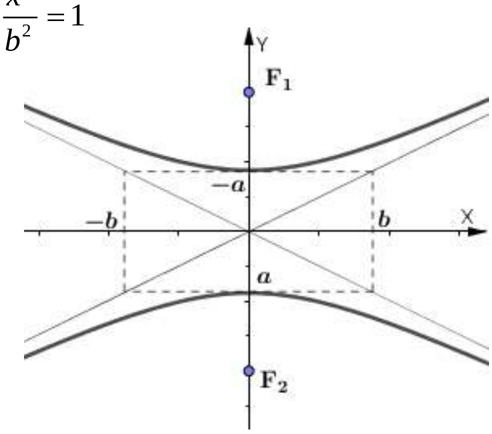
Eje mayor (o eje focal) es <u>paralelo al eje y</u>.

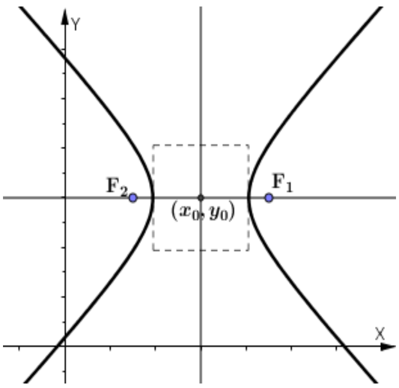
$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

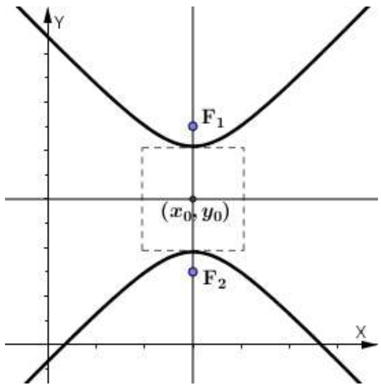


</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Hipérbola</th></tr>
<tr>
<td>
Centro $(0,0)$
Eje focal: <u>eje x</u>
Corte con eje x: $\mathbf{V_1} = (a,0)$ y $\mathbf{V_2} = (-a,0)$
Corte con eje y: -----
Asíntotas: $y = \frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$
Eje transversal: $\overline{(-a,0)(a,0)}$
Eje conjugado: $\overline{(0,-b)(0,b)}$
Se verifica que: $c^2 = a^2 + b^2$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$


</td>
<td>
Centro $(0,0)$
Eje focal: <u>eje y</u>
Corte con eje y: -----
Corte con eje y: $\mathbf{V_1} = (0,a)$ y $\mathbf{V_2} = (0,-a)$
Asíntotas: $y = \frac{a}{b}x$; $y = -\frac{a}{b}x$
Eje transversal: $\overline{(0,-a)(0,a)}$
Eje conjugado: $\overline{(-b,0)(b,0)}$
Se verifica que: $c^2 = a^2 + b^2$
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$


</td>
</tr>
<tr>
<td>
Centro (x_0, y_0)
Eje focal <u>paralelo al eje x.</u>
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$


</td>
<td>
Centro (x_0, y_0)
Eje focal <u>paralelo al eje y.</u>
$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$


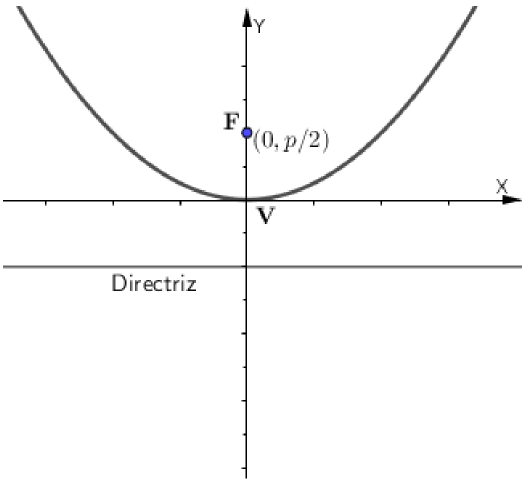
</td>
</tr>
</table>

Parábola

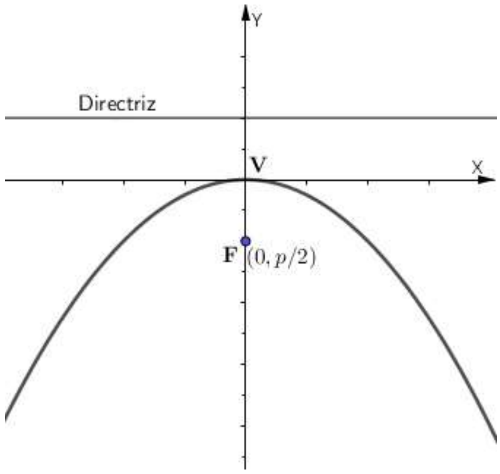
Vértice: $\mathbf{V} = (0, 0)$ Foco: $\mathbf{F} = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ Recta Directriz: $x = -\frac{p}{2}$

$$y = \left(\frac{1}{2p}\right) x^2$$

Si $p > 0$



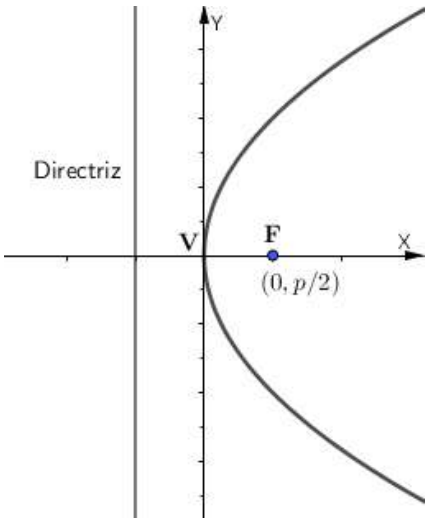
Si $p < 0$



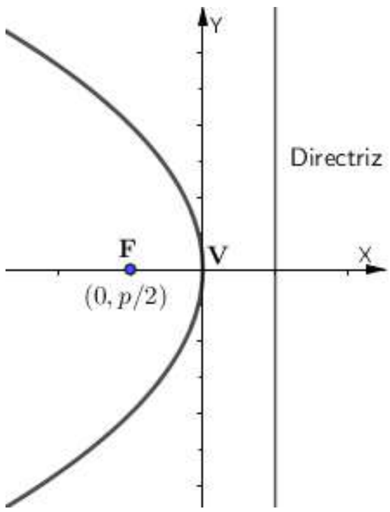
Vértice: $\mathbf{V} = (0, 0)$ Foco: $\mathbf{F} = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ Recta Directriz: $y = -\frac{p}{2}$

$$x = \left(\frac{1}{2p}\right) y^2$$

Si $p > 0$



Si $p > 0$



Si el Vértice es: $\mathbf{V} = (x_0, y_0)$ las respectivas ecuaciones resultan:

$$(y - y_0) = a(x - x_0)^2 \qquad \text{ó} \qquad (x - x_0) = a(y - y_0)^2 \quad \text{siendo } a = \left(\frac{1}{2p}\right)$$

5.6. Identificación de Cuádricas

Una ecuación general completa de segundo grado en dos variables *x* e *y*, se puede expresar de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ donde } A, B \text{ y } C \text{ no son simultáneamente nulos } \textbf{(I)}$$

Los tres primeros términos de **(I)** constituyen los *términos cuadráticos*. En particular, al término Bxy se lo denomina *término rectangular* o de producto cruzado. Los dos términos siguientes Dx, Ey son los *términos lineales*. Y finalmente, el término *F*, se lo denomina término independiente.

En la sección anterior vimos que toda circunferencia, elipse, hipérbola y parábola (las tres últimas con ejes focales o directriz paralelas a los ejes coordenados) pueden ser descriptas por una ecuación como (I). Se debe notar que en cada uno de los casos la ecuación cuadrática trabajada no presentaba témino rectangular $B = 0$.

De manera general se puede analizar la relación entre estas posibles posiciones de la cónica en el sistema coordenado **xy**, y los coeficientes de la ecuación cuadrática (**I**), esto es:

- ***Cónica en posición canónica o estándar***: cuando la sección cónica tiene *centro* (o *vértice* según corresponda), coincidente con el origen de coordenadas y sus ejes coinciden con los ejes coordenados.
    - En relación a la ecuación (I): no figura el término rectangular Bxy, (es decir $B=0$) y los términos lineales Dx; Ey no aparecen (esto es, $D=E=0$).

- ***Cónica trasladada:*** cuando la cónica tiene *centro* (o *vértice*, según corresponda) en un punto distinto del origen de coordenadas y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados.
    - En relación a la ecuación (I): no figura el término rectangular Bxy, (es decir $B=0$) y aparece en la ecuación algún término lineal Dx o Ey o ambos (esto es, D y/o E no nulos)).

- ***Cónica rotada*:** cuando sus ejes están girados o rotados respecto de los ejes coordenados y su *centro* (o *vértice,* según corresponda) coincide con el origen de coordenadas.

- ***Cónica roto-trasladada*:** cuando sus ejes están girados o rotados respecto de los ejes coordenados y su *centro* (o *vértice,* según corresponda) no coincide con el origen de coordenadas.
    - En los dos casos anteriores y en relación a la ecuación (**I**): figura el término rectangular Bxy, (es decir $B\neq 0$).

Una técnica para identificar la gráfica de una cónica que no esté en su ***posición normal*** o ***estándar*** consiste en girar y trasladar los ejes coordenados xy a fin de obtener un sistema de coordenadas respecto al cual la cónica esté en su ***posición normal*** o ***estándar.*** A partir de este proceso, la ecuación de la cónica en el nuevo sistema de ejes coordenados puede identificarse fácilmente.

En lo que sigue, presentaremos diferentes ejemplos de ecuaciones cuadráticas en $\mathbb{R}^2$, donde buscaremos obtener un sistema de coordenadas respecto al cual la cónica esté en su ***posición normal*** o ***estándar*** y así poderla identificar con facilidad.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea la ecuación cuadrática en $\mathbb{R}^2$ dada por: $x^2+2y^2-4x+12y+10=0$

Como contiene los términos cuadráticos y lineales, pero no contiene el término rectangular o de producto cruzado (en $x.y$) se trata de una cónica en $\mathbb{R}^2$ **trasladada** respecto al origen de coordenadas, pero no está rotada respecto de éstos.

Para la ubicación de la cónica en el plano nos basta encontrar la posición de su centro mediante el procedimiento de completar cuadrados

$$(x^2-4x+4)+2(y^2+6y+9)+10-4-18=0$$

$$(x-2)^2+2(y-3)^2=12$$

$$\frac{(x-2)^2}{12}+\frac{(y-3)^2}{6}=1$$

La cónica es una elipse centrada en el punto (2,3).

Ejemplo 2

Sea la ecuación cuadrática en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$x_1^{\ 2}+x_1x_2+x_2^{\ 2}=1$$

El conjunto $\boldsymbol{C}$ de las soluciones es la imagen inversa del escalar $c = 1$ por la forma cuadrática

$$\mathbf{q(x)=q}\big((x_1,x_2)\big)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$$

Como se mencionó en la Sección **5.5**, si este conjunto $\boldsymbol{C} = \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 / \mathbf{q(x)}=1,\ 1\in\mathbb{R}\right\}$ es no vacío, entonces es una cuádrica de $\mathbb{R}^2$, es decir una **cónica.**

La existencia del término rectangular indica que la cónica se encuentra **rotada** respecto a su posición normal o estándar. La ausencia de términos lineales implica que no está trasladada respecto a su posición normal.

Nos proponemos entonces identificar esta cónica y graficarla en el plano cartesiano.

Sea la base canónica $\mathbf{B_0}$ de $\mathbb{R}^2$, la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B_0}} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B_0}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ y podemos escribir

$$\mathbf{q(x)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ esto es } \mathbf{q(x)} = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{T}} .\mathbf{A}. [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} .$$

Por tratarse de una matriz simétrica, sabemos que diagonaliza ortogonalmente, y la matriz **P** constituye la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a una nueva base $\mathbf{B}_1$ respecto a la cual la matriz de la forma cuadrática es diagonal. Por lo tanto, la ecuación cuadrática respecto al sistema de coordenadas determinado por $\mathbf{B}_1$ carecerá de término rectangular.

Luego el camino a seguir será diagonalizar la matriz **A**.

a) **Ecuación característica y valores propios de A.**

Planteamos entonces

$$0 = det\left(\lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A}\right) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) = \left(\lambda - 1\right)^2 + \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4}$$

Luego los valores propios de **A** son $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$ y $\lambda_2 = \dfrac{1}{2}$.

b) **Subespacios propios.**

$$\left(\frac{3}{2}\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0} \qquad\qquad \left(\frac{1}{2}\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego (considerando vectores propios unitarios) se tiene:

$$\mathbf{V}_{\lambda_1 = 3/2} = \mathbf{V}_{\lambda_1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle; \qquad \mathbf{V}_{\lambda_2 = 1/2} = \mathbf{V}_{\lambda_2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle.$$

c) **La matriz de cambio de la base – Matriz diagonal.**

La matriz **P** que diagonaliza ortogonalmente a **A** es también la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

P es ortogonal pues $\mathbf{B}_0$ y $\mathbf{B}_1$ son bases ortonormales.

Como su determinante es mayor que cero, la base $\mathbf{B}_1$ está positivamente orientada, y representa un giro en sentido antihorario. En efecto **P** puede escribirse

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{ siendo } \alpha \text{ el ángulo girado; en este caso } \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

Notar que se verifica que $\det \mathbf{P}=1$

Con respecto a la base $\mathbf{B}_1 = \left(\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right), \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)\right)$ resulta $\mathbf{D}=[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1}=\begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ siento

$\mathbf{P}^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}.\mathbf{P}=\mathbf{D}$.

d) Ecuación de la cónica en la nueva base. Gráfica de la cónica.

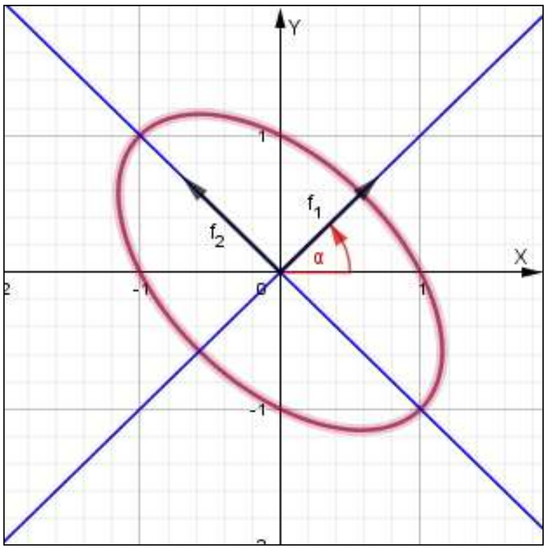
Por lo tanto, teniendo en cuenta que $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}=\mathbf{P}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}$ donde $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ es decir que ahora

$$\mathbf{q}((y_1,y_2))=[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{T}}.\mathbf{D}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\frac{3}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2 .$$

y la ecuación $\mathbf{q}(\mathbf{x})=1$ resulta

$$\frac{3}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2=1$$

que es la ecuación de una elipse con su eje mayor en la dirección del vector $\mathbf{f}_2$ y su eje menor en la dirección de $\mathbf{f}_1$.



Ejemplo 3

Se da la ecuación

$$2x_1x_2=1$$

El conjunto $\boldsymbol{C}$ de las soluciones es la imagen inversa del escalar $c=1$ por la forma cuadrática

$$\mathbf{q(x)} = \mathbf{q}\left((x_1, x_2)\right) = 2x_1x_2$$

Si el conjunto $\boldsymbol{C} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{q(x)} = 1,\ 1 \in \mathbb{R}\right\}$ es no vacío, entonces es una **cónica**.

La existencia del término rectangular indica que la cónica se encuentra **rotada** respecto a su posición normal o estándar y, por otro lado, la ausencia de términos lineales implica que no está trasladada respecto a su posición normal.

Nos proponemos entonces identificar esta cónica y graficarla en el plano cartesiano.

Sea la base canónica $\mathbf{B_0}$ de $\mathbb{R}^2$, la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_0} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y podemos escribir

$$\mathbf{q(x)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{esto es } \mathbf{q(x)} = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{T}} .\mathbf{A}. [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} .$$

Como **A** es una matriz simétrica, sabemos que diagonaliza ortogonalmente, y la matriz **P** constituye la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a una nueva base $\mathbf{B}_1$ respecto a la cual la matriz de la forma cuadrática es diagonal. Por lo tanto, la ecuación cuadrática respecto al sistema de coordenadas determinado por $\mathbf{B}_1$ carecerá de término rectangular.

Luego el camino a seguir será diagonalizar la matriz **A**.

a) Ecuación característica y valores propios de A.

Planteamos entonces

$$0 = det\left(\lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A}\right) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Luego los valores propios de **A** son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.

b) Subespacios propios.

Para $\lambda_1 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}).\mathbf{X} = \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array}\right\} \quad \text{entonces } \mathbf{V}_{\lambda_1 = 1} = \mathbf{V}_{\lambda_1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle$$

Para $\lambda_2 = -1$

$$\left.\begin{array}{l}\left((-1)\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x_1 = -x_2 \end{array}\right\} \text{ entonces } \mathbf{V}_{\lambda_2=-1} = \mathbf{V}_{\lambda_2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle$$

c) La matriz de cambio de la base – Matriz diagonal.

La matriz **P** que diagonaliza ortogonalmente a **A** es también la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1$.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

P es ortogonal pues $\mathbf{B}_0$ y $\mathbf{B}_1$ son bases ortonormales. Además, se verifica que $det\,\mathbf{P} = 1$ y en este caso $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

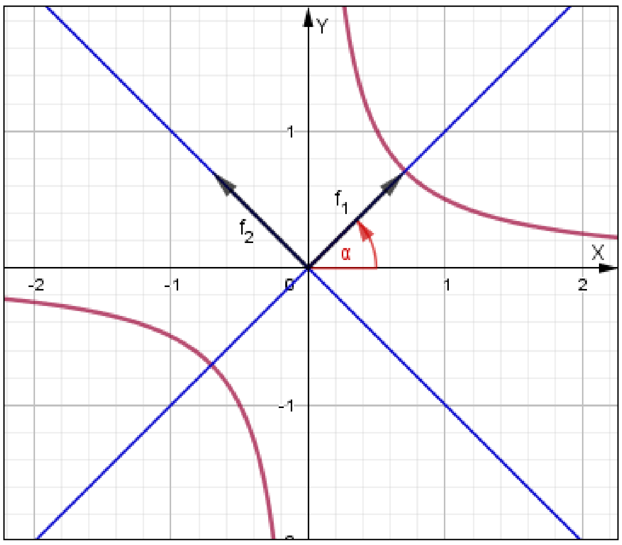
Con respecto a la base $\mathbf{B}_1 = \left(\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right), \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)\right)$ resulta $\mathbf{D} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ siento $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}.\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

d) Ecuación de la cónica en la nueva base. Gráfica de la cónica.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \mathbf{P}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}$ donde $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ es decir que ahora

$$\mathbf{q}((y_1, y_2)) = [\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{T}}.\mathbf{D}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = [y_1 \quad y_2].\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_1^2 - y_2^2 \ .$$

y la ecuación $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = 1$ resulta $y_1^2 - y_2^2 = 1$ que es la ecuación de una hipérbola con sus focos en la dirección del vector $\mathbf{f}_1$.



Ejemplo 4

Se desea identificar la cónica cuya ecuación es

$$2x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1 = 1$$

Consideremos la base canónica $\mathbf{B_0}$ de $\mathbb{R}^2$ y escribamos la ecuación anterior en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q(x)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\text{término lineal}} = 1 \qquad (*)$$

La matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_0} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica. Sabemos que diagonaliza ortogonalmente, y la matriz **P** constituye la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a una nueva base $\mathbf{B}_1$ respecto a la cual la matriz de la forma cuadrática es diagonal. Por lo tanto, la ecuación cuadrática respecto al sistema de coordenadas determinado por $\mathbf{B}_1$ carecerá de término rectangular.

Teniendo en cuenta lo realizado en el ejemplo anterior, la matriz de cambio de base de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1 = \left(\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right), \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)\right)$ resulta $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ y por lo tanto

$\mathbf{P^T.A.P} = \mathbf{D} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \mathbf{P}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}$ donde $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ podemos escribir la ecuación $(*)$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}.\underbrace{\mathbf{P^T}.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\mathbf{P}}_{\mathbf{D}}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.\mathbf{P}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 1$$

Operando se tiene

$$y_1^2 - y_2^2 + 2y_1 - 2y_2 = 1$$

Y mediante el procedimiento de completar cuadrados

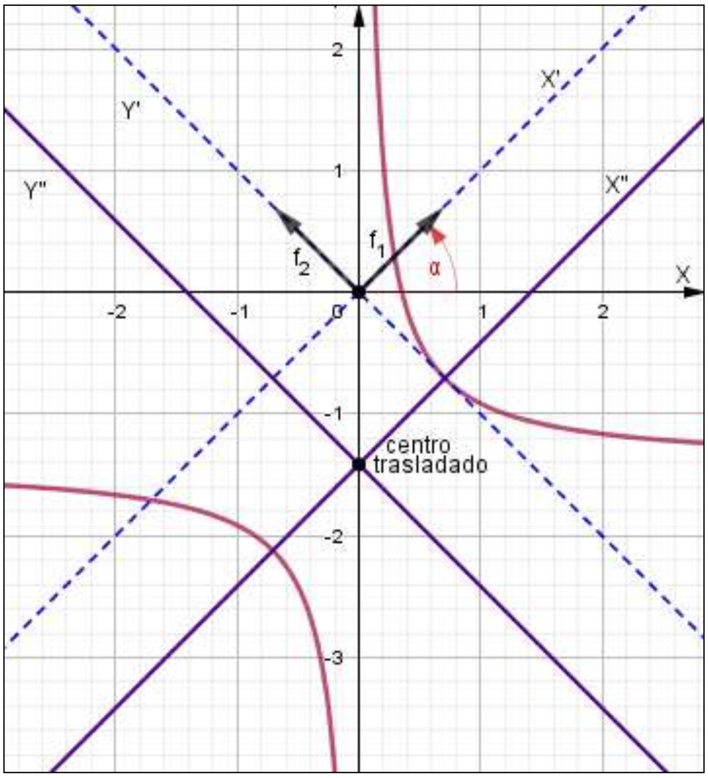
$$\left(y_1^2 + 2y_1 + 1 - 1\right) - \left(y_2^2 + 2y_2 + 1 - 1\right) = 1$$

$$\left(y_1 + 1\right)^2 - \left(y_2 + 1\right)^2 = 1$$

Resulta entonces que esta última ecuación es la ecuación de una hipérbola con sus focos en la dirección del vector $\mathbf{f}_1$ y su centro trasladado.

Las coordenadas del centro respecto al nuevo sistema de coordenadas (rotado) son $centro = (-1,-1)_{x'y'}$.

(Notar que considerando que $\mathbf{B}_1 = \left(\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$ entonces las coordenadas del centro trasladado respecto de la base canónica estándar son $centro = \left(0,\sqrt{2}\right)_{xy}$).



Ejemplo 5

Se da la ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y = -8$$

Consideremos la base canónica $\mathbf{B_0}$ de $\mathbb{R}^2$ y escribamos la ecuación anterior en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q(x)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\text{términos lineales}} = -8 \qquad (*)$$

La matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_0} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica. Sabemos que diagonaliza ortogonalmente, y la matriz **P** constituye la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a una nueva base $\mathbf{B}_1$

respecto a la cual la matriz de la forma cuadrática es diagonal. Por lo tanto, la ecuación cuadrática respecto al sistema de coordenadas determinado por $\mathbf{B}_1$ carecerá de término rectangular.

Luego el camino a seguir será diagonalizar la matriz **A**.

a) **Ecuación característica y valores propios de A.**

Planteamos entonces

$$0 = det\left(\lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A}\right) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) = \left(\lambda - 1\right)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$$

$0 = \lambda\left(\lambda - 2\right)$ es la ecuación característica de **A**.
Los valores propios de **A** son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$.

b) **Subespacios propios.**

Para $\lambda_1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \left(0\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x = y \end{array}\right\} \text{ entonces } \mathbf{V}_{\lambda_1 = 0} = \mathbf{V}_{\lambda_1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle$$

Para $\lambda_2 = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \left(2\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}\right).\mathbf{X} = \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x = -y \end{array}\right\} \text{ entonces } \mathbf{V}_{\lambda_2 = 2} = \mathbf{V}_{\lambda_2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle$$

c) **La matriz de cambio de la base** – **Matriz diagonal.**

La matriz **P** que diagonaliza ortogonalmente a **A** es también la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1$ **.**

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

P es ortogonal pues $\mathbf{B}_0$ y $\mathbf{B}_1$ son bases ortonormales.

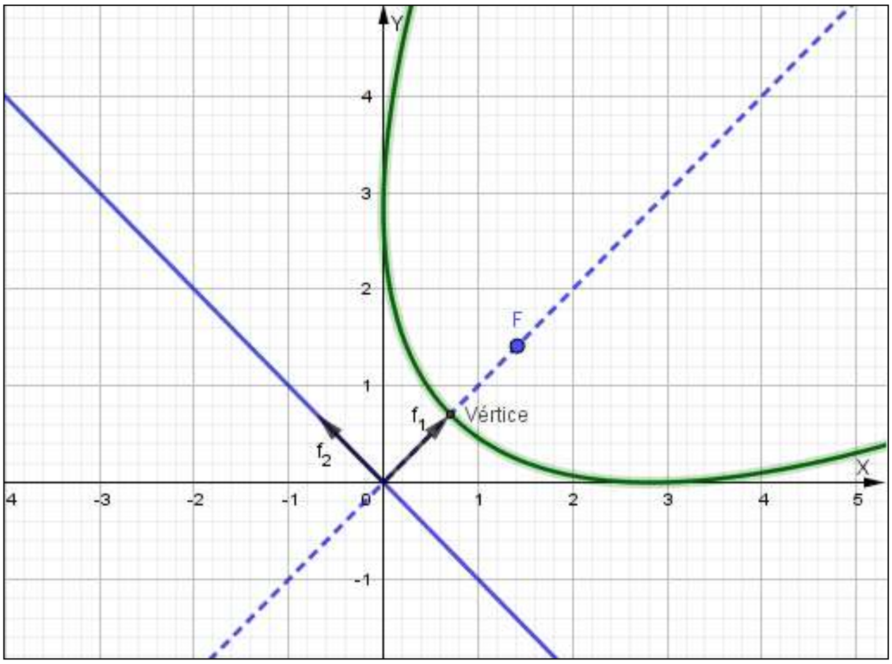
Con respecto a la base $\mathbf{B}_1 = \left(\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right), \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)\right)$ resulta $\mathbf{D} = \left[\mathbf{q}\right]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ siento $\mathbf{P^T.A.P} = \mathbf{D}$.

d) Ecuación de la cónica en la nueva base. Gráfica de la cónica.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \mathbf{P}.[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1}$ donde $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_0} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ podemos reescribir la ecuación $(*)$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -8 \\
&2(y')^2 + \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -8 \\
&2(y')^2 + -4x' = -8
\end{aligned}$$

Luego se tiene $\frac{1}{2}(y')^2 + 2 = x'$ que es la ecuación de una parábola con su foco en la dirección del vector $\mathbf{f}_1$.



Cuádricas en $\mathbb{R}^3$

Lo dicho respecto a la técnica para analizar las ecuaciones cuadráticas e identificar el conjunto solución (cónica) en $\mathbb{R}^2$ también es válido para $\mathbb{R}^3$, donde algunas de las cuádricas en su forma normal o estándar se presentan a continuación (Figura 5.10).

1)	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	Elipsoide (Esfera si $a=b=c$)
2)	$ax^2+by^2-z=0$	Paraboloide Elíptico (Paraboloide de Revolución si $a=b$)
3)	$ax^2-by^2-z=0$	Paraboloide Hiperbólico (silla de montar)
4)	$ax^2+by^2-cz^2=0$	Superficie Cónica

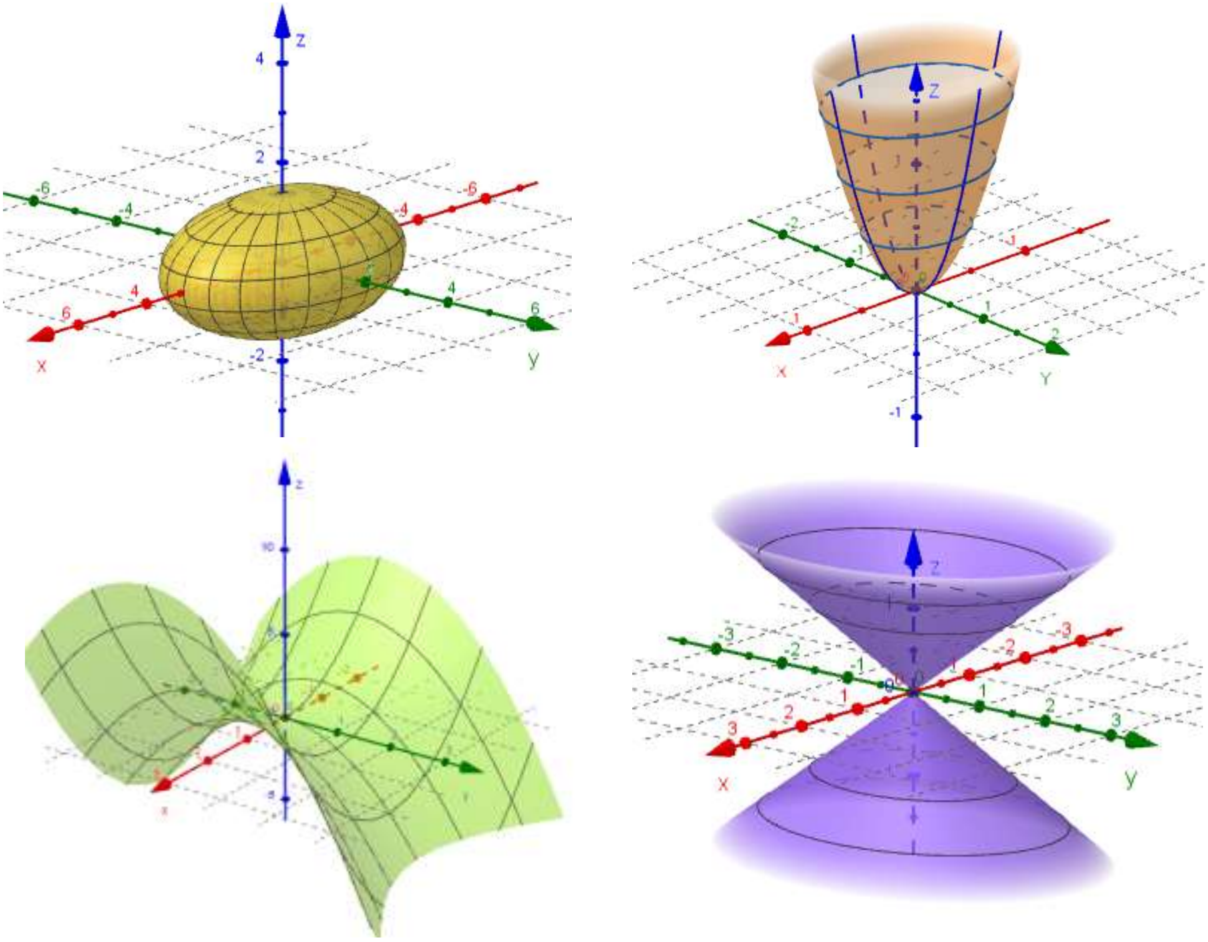


Figura 5.10 Cuádricas en $\mathbb{R}^3$

Ejemplos

Ejemplo 1

Se da la ecuación

$$3x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2+x_3^2=1$$

El conjunto ***C*** de soluciones (si no es vacío) es una superficie (cuádrica) de $\mathbb{R}^3$.

Escribimos la ecuación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=1$$

Buscaremos diagonalizar la matriz $\mathbf{A}=[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_0}=[\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B}_0}$.

a) Ecuación característica y valores propios de A.

$$0=det(\lambda\,\mathbf{I}_3-\mathbf{A})=det\left(\begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}\right)=x^3-7x^2+11x-5$$

$0=(x-1)^2(x-5)$ Ecuación característica de **A**

Los valores propios de **A** son

$\lambda_1=5$ (raíz simple) $\lambda_2=1$ (raíz doble), .

b) Subespacios propios.

$$\mathbf{V}_{\lambda_1=5}=\left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \mathbf{V}_{\lambda_2=1}=\left\langle \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

c) La matriz de cambio de la base – Matriz diagonal.

La matriz **P** que diagonaliza **A** es también la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego la nueva base de referencia es

$$\mathbf{B}_1=(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3)=\left(\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right),\ \left(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\right),\ (0,0,1)\right)$$

Con respecto a la base $\mathbf{B}_1$ resulta

$$\mathbf{D}=[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Ecuación de la cuádrica en la nueva base.

Sean x_1', x_2' y x_3' las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ con respecto a la base $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = \left(\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right), \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right), (0, 0, 1)\right)$, es decir $\mathbf{x} = x_1'\mathbf{f}_1 + x_2'\mathbf{f}_2 + x_3'\mathbf{f}_3$.

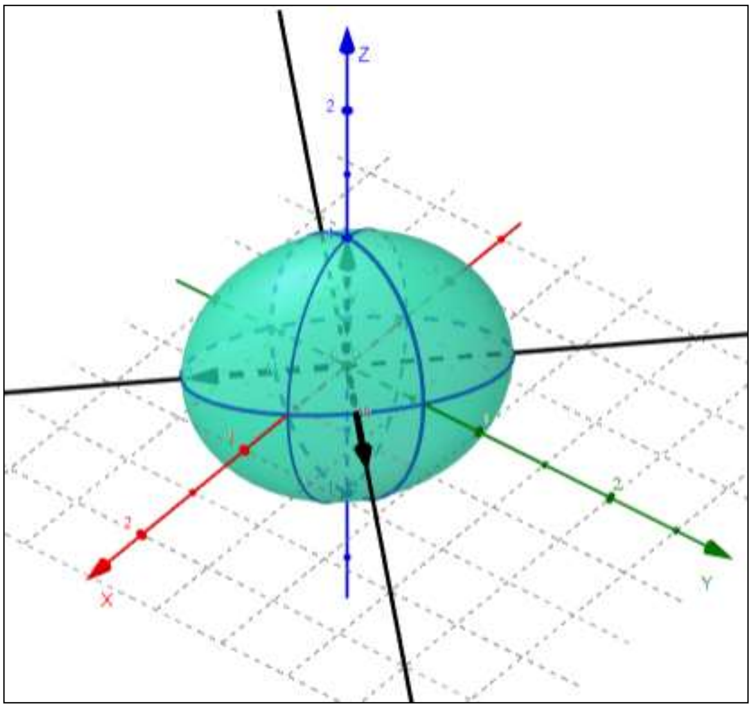
Ahora **q(x)** se expresa en la forma

$$\mathbf{q(x)} = \begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

y la ecuación $\mathbf{q(x)} = 1$ resulta

$$5\left(x_1'\right)^2 + 1\left(x_2'\right)^2 + \left(x_3'\right)^2 = 1$$

Esta ecuación representa un elipsoide con ejes principales en las direcciones de los vectores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$
.



Ejemplo 2

Se da la ecuación

$$x_2^2 + 4x_1x_3 = 0$$

El conjunto ***C*** de soluciones (si no es vacío) es una superficie (cuádrica) de $\mathbb{R}^3$.

Escribimos la ecuación en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Buscaremos diagonalizar la matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_0} = [\mathbf{b}_S]_{\mathbf{B}_0}$.

a) Ecuación característica y valores propios de A.

$$det(\lambda \mathbf{I}_3 - \mathbf{A}) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = (\lambda - 3)\left(\lambda^2 - 1\right) = 0$$

Los valores propios de **A** son

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1.$$

b) Subespacios propios.

$$\mathbf{V}_{\lambda_1 = 1} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \mathbf{V}_{\lambda_2 = -2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \mathbf{V}_{\lambda_3 = 2} = \left\langle \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle$$

c) La matriz de cambio de la base – Matriz diagonal.

La matriz **P** que diagonaliza **A** es también la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Luego la nueva base de referencia es

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = \left((0, 1, 0), \left(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right), \left(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right)\right)$$

Con respecto a la base $\mathbf{B}_1$ resulta

$$\mathbf{D} = [\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

d) Ecuación de la cuádrica en la nueva base.

Sean x_1', x_2' y x_3' las coordenadas del vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ con respecto a la base $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = \left((0, 1, 0), \left(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right), \left(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\right)\right)$, es decir $\mathbf{x} = x_1' \mathbf{f}_1 + x_2' \mathbf{f}_2 + x_3' \mathbf{f}_3$.

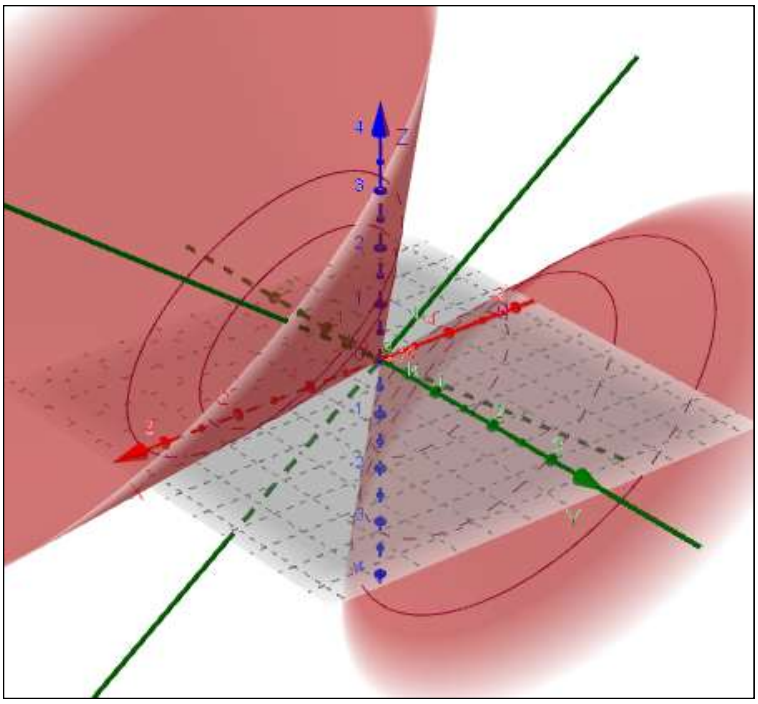
Ahora **q(x)** se expresa en la forma

$$\mathbf{q(x)} = \begin{bmatrix} x_1^{'} & x_2^{'} & x_3^{'} \end{bmatrix} \mathbf{.} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{.} \begin{bmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ x_3^{'} \end{bmatrix}$$

y la ecuación $\mathbf{q(x)} = 0$ resulta

$$3\left(x_1^{'}\right)^2 - 1\left(x_2^{'}\right)^2 + 1\left(x_3^{'}\right)^2 = 0$$

Esta ecuación representa un cono con eje en la dirección del vectores $\mathbf{f}_3$.



5.7. Ejercicios del Capítulo

Ejercicio 1

Determinar cuáles de las siguientes funciones $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ son bilineales.

a) $\mathbf{f(x,y)} = 2x_1y_1+3x_1y_2-x_2y_2$

b) $\mathbf{f(x,y)} = 1$

c) $\mathbf{f(x,y)} = (x_1+y_1)^2-(x_2-y_2)^2$

d) $\mathbf{f(x,y)} = 2x_1y_1+5x_2{y_2}^2$

e) $\mathbf{f(x,y)} = 2x_1y_1+3x_2y_2+3$

Ejercicio 2

Dada la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & -6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$. Se pide

a) $\mathbf{b}\big((1,2),(-1,4)\big)$.

b) Expresar **b** en forma polinómica.

Ejercicio 3

Dada la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$. Se pide

a) $\mathbf{b}\big((1,2),(1,-1)\big)$.

b) Expresar **b** en forma polinómica.

Ejercicio 4

Se da la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1+3x_1y_2-x_1y_3+4x_2y_1-6x_2y_2+x_3y_1+x_3y_2-x_3y_3$$

Se pide:

a) $\mathbf{b}\big((1,4,0),\ (-1,0,3)\big)$.

b) Expresar **b** en forma matricial.

Ejercicio 5

Se da la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -x_1y_1+3x_1y_2-x_1y_3+4x_2y_1-6x_2y_2-x_3y_2+x_3y_3$$

Se pide:

a) $\mathbf{b}\big((1,1,0),\ (-1,0,3)\big)$.

b) Expresar **b** en forma matricial.

Ejercicio 6

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de la forma bilineal **b** sobre $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica. Se pide:

a) Indicar para qué pares (e_i, e_j) de vectores de la base se verifican cada una de las condiciones siguientes $\mathbf{b}(e_i,e_j) = \mathbf{b}(e_j,e_i)$, $\mathbf{b}(e_i,e_j) = -\mathbf{b}(e_j,e_i)$ y $\mathbf{b}(e_i,e_j) = 0$.

b) Dar la matriz de **b** respecto de la base $\mathbf{B_1} = \big((1,1,0), (0,1,0), (1,1,1)\big)$.

c) Expresar **b** en forma polinómica.

Ejercicio 7

Dada la forma bilineal $\mathbf{b}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{b}\big((x_1, x_2),(y_1, y_2)\big) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$$

a) Expresar a **b** en forma matricial.

b) Teniendo en cuenta la base $\mathbf{B'} = \big((0,1),(1,1)\big)$, hallar la matriz asociada de la forma bilineal respecto de dicha base.

Ejercicio 8

Sea $\mathbf{B} = (e_1,e_2)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y sea la forma bilineal **b** sobre $\mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{b}(e_1, e_1) = 3$, $\mathbf{b}(e_1, e_2) = 3$, $\mathbf{b}(e_2, e_1) = 5$, $\mathbf{b}(e_2, e_2) = -2$.

Considerando que $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se pide expresar a **b** en forma matricial y en forma polinómica.

Ejercicio 9

En los siguientes casos dar la matriz de la forma bilineal **b** con respecto a cada una de las bases indicadas.

1. $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$; $\quad \mathbf{B}_1 = \big((1,2), (3,4)\big)$; $\quad \mathbf{B}_2 = \big((1,0), (0,1)\big)$

   a) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$.

   b) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2x_1y_1 - 5x_1y_2 + 2x_2y_1$

   c) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}\right)$.

   d) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (2x_1 + 3x_2)(-3y_1 + y_2)$

   e) $\mathbf{b}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (2x_1 - x_2)(2y_1 - y_2)$

2. $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$; $\mathbf{B}=\left(e_1, e_2, e_3\right)$ la base canónica

   a) $\mathbf{b(x,y)}=2x_1y_1+3x_1y_2-x_1y_3+4x_2y_1-6x_2y_2+x_3y_1+x_3y_2-x_3y_3$.

   b) $\mathbf{b(x,y)}=x_1y_1+6x_2y_2-x_3y_3$.

   c) $\mathbf{b(x,y)}=x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+3x_2y_2-5x_2y_3-5x_3y_2-x_3y_3$.

3. $\mathbf{V}$ es el subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ generado por las funciones $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ definidas por: $\boldsymbol{f}_1(t)=1$; $\boldsymbol{f}_2(t)=t$; $\boldsymbol{f}_3(t)=t^2$.

$$\mathbf{b}\left(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\right)=\int_0^1 \boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{g}(t)dt$$

Ejercicio 10

Sea S el espacio vectorial de todas las sucesiones de números reales:

$$\mathbf{y}=\left\{y_k\right\},\ \ \mathbf{z}=\left\{z_k\right\}\in\ \mathbf{S},\ p\in\mathbb{R} \qquad\qquad \mathbf{f(y,z)}=\sum_{k=1}^{p} y_k\,\mathbf{.}z_k$$

Muestre que **f** es una forma bilineal simétrica sobre el espacio **S** de todas las sucesiones.

Ejercicio 11

Dar la forma cuadrática correspondiente a cada una de las siguientes formas bilineales

a) $\mathbf{b}\left(\mathbf{x,y}\right)=2x_1y_1+x_1y_2-3x_2y_1+x_2y_2$, $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$

b) $\mathbf{b}\left(\mathbf{x,y}\right)=-x_1y_1-x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$, $\mathbf{V}=\mathbb{R}^2$

c) $\mathbf{b(x,y)}=x_1y_1+2x_1y_3-4x_2y_1+x_2y_3+6x_3y_1-3x_3y_2+2x_3y_3$, $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$

d) $\mathbf{b(x,y)}=x_1y_1+2x_1y_3+x_2y_1+x_2y_2-3x_3y_2-x_3y_3$, $\mathbf{V}=\mathbb{R}^3$

e) Dar la forma cuadrática **q** asociada a la forma bilineal **b** de los ejercicios 7 y 8.

Ejercicio 12

En cada uno de los casos siguientes, se pide:

a) Dar dos formas bilineales no simétricas, que tengan a **q** como forma cuadrática asociada.

b) Dar la forma bilineal simétrica correspondiente a **q**.

c) Dar la matriz **A** de la forma cuadrática respecto de la base canónica $\mathbf{B}_0$.

d) Dar la expresión matricial de las formas cuadráticas.

1. $\mathbf{q}(x_1,x_2)=3x_1x_2+2x_2^2$
2. $\mathbf{q}(x_1,x_2)=-x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$

3. $\mathbf{q}(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$
4. $\mathbf{q}(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 9x_2^2 + 6x_1x_3 + x_3^2$
5. $\mathbf{q}(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 3x_1x_3 - 4x_3^2$

Ejercicio 13

Dadas las formas cuadráticas del Ejercicio 9, se pide:

a) Encuentre la matriz **P** que diagonalice **A**.

b) Considerando a **P** como la matriz de cambio de base de $\mathbf{B}_0$ a la base $\mathbf{B}_1$.

c) Dar $[\mathbf{q}]_{\mathbf{B}_1}$.

d) Grafique en los casos 1), 2) y 3) la posición relativa de los vectores de la base $\mathbf{B}_1$ respecto a los vectores de la base $\mathbf{B}_0$. ¿Qué comentarios puede hacer?.

e) Siendo **P** una matriz ortogonal, su determinante es igual a +1 ó -1 (demuéstrelo). Se dice que la base $\mathbf{B}_1$ está positivamente orientada (tiene igual orientación que la base canónica) si $det\,(\mathbf{P}) = 1$. En caso de que $\mathbf{B}_1$ no lo sea, ¿cómo puede encontrar a partir de ella una que si cumpla este último requisito?.

Ejercicio 14

Sea la ecuación $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = c$, como se indica en cada uno de los casos siguientes. Se pide:

1) Una base ortonormal $\mathbf{B}_1$, positivamente orientada, que diagonalice a **q**.
2) La ecuación referida a esta base.
3) Graficar e identificar la cónica, ubicando los ejes definidos por la base $\mathbf{B}_1$ con respecto al sistema original.

a) $5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 4$
b) $x_1^2 + 9x_1x_2 - 9x_2^2 = 0$
c) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 6$
d) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$
e) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 6$
f) $9x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 = 4$
g) $9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 = 52$
h) $17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2 = 20$
i) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 = -8$
j) $4x_1^2 - 20x_1x_2 + 25x_2^2 = 20$
k) $9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 5 = 0$
l) $-25x_1^2 + 9x_2^2 + 225 = 0$
m) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 2$
n) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$
o) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$

Ejercicio 15

Sea la ecuación $\mathbf{q(x)} = c$, como se indica en cada uno de los casos siguientes. Se pide:

a) Una base ortonormal $\mathbf{B}_1$, positivamente orientada, que diagonalice a **q**.

b) La ecuación de la cuádrica referida a esta base.

c) Identificar la cuádrica.

1) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$

2) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 5yz = 3$

3) $xy + xz + yz = 1$

4) $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz = 1$

5) $2xy + 2xz + 2yz = 9$

Ejercicio 16

Diagonalizar las formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^3$ representadas en base canónica por cada una de las matrices siguientes. En cada caso dar la matriz de cambio de base y resolver la ecuación $\mathbf{X}^\mathrm{T}\mathbf{A}\,\mathbf{X} = 6$

$$\text{a) } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{b) } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{c) } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 17

Se dice que una forma cuadrática es **definida positiva** si $\mathbf{q(x)} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{q(x)} = 0$ solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Demuestre que **q** es definida positiva si y sólo si su matriz simétrica asociada tiene todos los valores propios positivos.

Ejercicio 18

Se dice que una forma cuadrática es **semidefinida positiva** si $\mathbf{q(x)} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que **q** es semidefinida positiva si y sólo si los valores propios de su matriz asociada son todos no negativos.

Las definiciones de **definida negativa** y **semidefinida negativa** son similares cambiando $\geq$ por $\leq$. Una forma cuadrática es **indefinida** si no es de ninguno de los tipos anteriores. Clasifique las formas cuadráticas del Ejercicio 8 de acuerdo a este criterio.

Ejercicio 19

Es posible determinar si una forma cuadrática es definida positiva, siguiendo un mecanismo distinto que el de la determinación de sus valores propios y que consiste en el análisis del signo de los determinantes de las submatrices superiores izquierdas de la matriz que la representa respecto a alguna base. Si son todos positivos, entonces la forma cuadrática es definida positiva.

Analizar las formas cuadráticas siguientes usando este último criterio:

a) $\mathbf{q(x)} = \mathbf{X^T}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.\mathbf{X}$ b) $\mathbf{q(x)} = x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2$ c) $\mathbf{q(x)} = \mathbf{X^T}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.\mathbf{X}$

Ejercicio 20

Mostrar que si **A** es definida positiva, también lo es $\mathbf{A}^2$ y $\mathbf{A}^{-1}$.

5.8. Guía de Estudio

1) Defina **forma lineal**. Muestre que toda forma lineal en un vectorial real **V** de dimensión finita se puede expresar de la forma $\mathbf{L(v) = a . x}$.

2) Defina **forma bilineal**. Dé su expresión polinómica y matricial.

3) ¿Como se construye la **matriz de una forma bilineal** en la base **B**?.

4) ¿Cómo cambia la **matriz de una forma bilineal** cuando cambia la base de referencia?.

5) Defina forma **bilineal simétrica.** ¿Que característica tiene su matriz respecto a una base **B**?.

6) Defina **forma cuadrática**. ¿A qué se denomina **matriz** de la forma cuadrática?.

7) ¿Cuál es la forma general de una ecuación cuadrática en $\mathbb{R}^n$? ¿Qué da por resultado trabajando en $\mathbb{R}^2$? ¿y en $\mathbb{R}^3$?.

8) ¿Qué efecto tiene en el conjunto de soluciones la existencia en la ecuación cuadrática de términos rectangulares? ¿y la presencia simultanea de un término en x^2 y x?.

9) Indique una técnica de cálculo que permite identificar el conjunto de soluciones de una ecuación cuadrática.

6

Bibliografía

- Anton, H. (2003). *Introducción al Álgebra Lineal* (3ª. Edición). Limusa Wiley.
- Álvaro, P. S., Hernández, F. J. V., & Pulido, P. O. (1998). *Problemas de álgebra lineal: cuestiones, ejercicios y tratamiento en Derive*. Prentice Hall.
- Ayres, F. (1978). *Matrices: teoría y problemas*. McGraw Hill.
- Bru, R., Climent, J., Mas, J., & Urbano, A. (2004). *Álgebra Lineal*. Limusa Wiley.
- Cabello, J. G. (2005). *Álgebra lineal. Sus aplicaciones en economía, ingenierías y otras ciencias*. Delta Publicaciones.
- Grossman, S.I. (1996/2008). *Álgebra Lineal con Aplicaciones* (4ª y 5ª edición). McGraw Hill.
- Hoffman, K. & Kunze, R. (1981). *Álgebra lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Jacob, H.G. & Bailey, D.W. (1971). *Linear Algebra*. Houghton Mifflin Company.
- Kreyszig, E. (2006) *Matemática Avanzada para Ingeniería*. Limusa Wiley.
- Kolman, B. & Hill, D.R. (2006). *Álgebra lineal*. Pearson Educación.
- Lang, S. (1987). *Linear Álgebra* (third edition). Springer
- Larson, R. (2014). *Fundamentos de Álgebra Lineal* (7ª edición). CENGAGE Learning.
- Lay, D.C. (2001). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones* (2ª edición). Prentice Hall.
- Lipschutz, S. (1992). *Álgebra Lineal*. McGraw Hill.
- Poole, D. (2011). *Álgebra lineal: una introducción moderna*. Cengage Learning Editores.
- Raichman, R.S. & Totter, E. (2016) *Geometría analítica para ciencias e ingenierías*. Versión Digital - Universidad Nacional de Cuyo - Ediciones Biblioteca Digital UNCuyo

- Rodríguez, E. H., Gallo, M. J. V., & Moro, M. Á. Z. (2012). *Álgebra lineal y Geometría*. Pearson.

- Rojo, J. & Martín, I. (2005) *Ejercicios y Problemas del Álgebra Lineal* (2ª edición). McGraw Hill.

- Strang, G. (2006). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Cengage Learning Latin America

- Williams, G. (2002). *Álgebra Lineal con Aplicaciones* (4ª edición). McGraw Hill.

A

Anexo: Introducción a MATLAB

1 Nociones Básicas.

MATLAB es un sistema interactivo basado en la manipulación de matrices, apto para computación numérica y visualización gráfica de problemas tanto científicos como técnicos.

El nombre MATLAB proviene de "**MATrix LABoratory**", y constituye quizá la herramienta de soft más difundida para ser usada en las distintas ramas de la Ingeniería.

El primer paso para el manejo del soft es saber como introducir los datos. En nuestro caso serán fundamentalmente las matrices.

- Los elementos de una fila se separan por espacios y las columnas se separan por "**;** "

$\mathbf{A} = \mathbf{[}1 \quad 2 \quad 3\mathbf{;} 4 \quad 5 \quad 6\mathbf{]}$ corresponde a la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Puede lograrse el mismo resultado si se introduce

$\mathbf{A} = \mathbf{[}1 \quad 2 \quad 3\mathbf{;}$
$\quad\quad 4 \quad 5 \quad 6\mathbf{]}$

$\mathbf{b} = \mathbf{[}3\mathbf{;} \quad 5\mathbf{]}$ corresponde a la matriz $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

- **Notación para formar las submatrices y las matrices aumentadas**

$f = \mathbf{A(}2,3\mathbf{)}$ — *f* es el elemento de la segunda fila y tercera columna de la matriz **A**

$d = \mathbf{A(}2,\mathbf{:)}$ — *d* es la segunda fila de la matriz **A**

$e = \mathbf{A(:,}3\mathbf{)}$ — *e* es la tercera columna de la matriz **A**

C = [A b] — **C** es la matriz aumentada, esto es la que resulta de agregar la columna **b** a la matriz **A.**

Ejemplo 1

$>> A=[1\ 2\ 3;4\ 5\ 6]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$>> A(2,3)$

$ans = 6$

$>> A(2,:)$

$ans = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$>> A(:,3)$

$$ans = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$>> b=[3;5]$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$>> C=[A,b]$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

- **Operaciones Elementales de Filas y matriz reducida por filas**

$\mathbf{A}(2,:) = 3 * \mathbf{A}(2,:)$	realiza la operación tipo I de multiplicar la fila 2 por el escalar 3
$\mathbf{A}(2,:) = \mathbf{A}(2,:)/4$	realiza la operación tipo I de multiplicar la fila 2 por $\frac{1}{4}$
$\mathbf{A}([1\quad 2],:) = \mathbf{A}([2\quad 1],:)$	intercambia las filas 1 y 2 (operación tipo III)
$\mathbf{A}(2,:) = \mathbf{A}(2,:) + 3 * \mathbf{A}(1,:)$	realiza la operación tipo II de sumar a la fila 2 la fila 1 multiplicada por 3
$\mathbf{C} = rref(\mathbf{A})$	da la matriz reducida por filas de la matriz **A**

Todos estos comandos cambian a la matriz **A**. Si se quiere conservar la matriz original **A** y llamar **C** a la matriz cambiada, se procede de la siguiente manera:

C = A;
$\mathbf{C}(2,:) = 3 * \mathbf{C}(2,:)$ (el "**;**" después de la primera igualdad evita aparezca en pantalla **C**)

Ejemplo 2

$>> A=[1\ 3\ \ -1;4\ 0\ 2;2\ 5\ \ -2]$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$>> C=A;$

$>> C(2,:)=3*C(2,:)$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 12 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$>> D=A;$

$>> D([2\ 3],:)=D([3\ 2],:)$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$>> F=A;$

$>> F(3,:)=F(3,:)+3*F(2,:)$

$$F=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 14 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$>> G=rref(A)$

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una ayuda importante

Help: Si se teclea **help** seguido de un comando MATLAB aparece una descripción del comando

Ejemplo 3

```
>> help rref
RREF Reduced row echelon form.
R = RREF(A) produces the reduced row echelon form of A
[R,jb] = RREF(A) also returns a vector, jb, so that:
 r = length(jb) is this algorithm’s idea of the rank of A,
 x(jb) are the bound variables in a linear system, Ax = b,
 A(:,jb) is a basis for the range of A,
 R(1:r,jb) is the r-by-r identity matrix.
[R,jb] = RREF(A,TOL) uses the given tolerance in the rank tests.
Roundoff errors may cause this algorithm to compute a different
value for the rank than RANK, ORTH and NULL
See also RREFMOVIE, RANK, ORTH, NULL, QR, SVD.
```

2 Operaciones con matrices

1)	Suma de matrices	**A + B**
2)	Multiplicación de matrices	**A * C**
3)	Matriz Transpuesta	**A'**
4)	Potencia entera	**A ^ n**
5)	Matriz Inversa	**B** ^(-1) ó *inv*(**B**)
6)	Producto por un escalar	k.***A**

Ejemplos

a) Introducción de datos:

$>> A = [1\ -1\ 3;2\ 1\ 0;2\ -1\ 4]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$>> B = [2\ 3\ -1;\ 4\ 2\ 0;\ 1\ -1\ 3]$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$>> C = [1\ 3\ ;2\ -1;4\ 5]$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Suma

$>>\ A + B$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

c) Producto

$>> A * C$

$$\begin{bmatrix} 11 & 19 \\ 4 & 5 \\ 16 & 27 \end{bmatrix}$$

d) Transpuesta

$>> A'$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

e) Potencia entera

$>> A\,\hat{}\,2$

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 15 \\ 4 & -1 & 6 \\ 8 & -7 & 22 \end{bmatrix}$$

f) Inversa

$>> B\,\hat{}\,(-1)$

$$\begin{bmatrix} -0.3333 & 0.4444 & -0.1111 \\ 0.6667 & -0.3889 & 0.2222 \\ 0.3333 & -0.2778 & 0.4444 \end{bmatrix}$$

$>> inv(B)$

$$\begin{bmatrix} -0.3333 & 0.4444 & -0.1111 \\ 0.6667 & -0.3889 & 0.2222 \\ 0.3333 & -0.2778 & 0.4444 \end{bmatrix}$$

g) Producto por un escalar

$>> 2.*A$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

3 Vectores de $\mathbb{R}^n$

- Por la identificación de las n-uplas de $\mathbb{R}^n$ con las matrices columna de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ la n-upla

$\mathbf{v} = (2,\ 4,\ -1)$ se corresponde con la matriz columna $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

- El producto interno estándar de $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ se encuentra por $\mathbf{u}'*\mathbf{v}$ *ó* $\mathbf{v}'*\mathbf{u}$
- La norma o módulo de **u:** $\|\mathbf{u}\| = sqrt\,(\mathbf{u}'*\mathbf{u})$ *ó* $norm(\mathbf{u})$
- La proyección de **u** sobre **v :** $proy_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = ((\mathbf{u}'*\mathbf{v}) / (\mathbf{v}'*\mathbf{v}))*\mathbf{v}$

NOTA

A veces resulta conveniente a fin de aclarar los pasos que se van realizando dentro del Matlab, incluir comentarios. Esto es posible con sólo preceder la frase con el símbolo %.

Ejemplos

u=[2;-1;3;5]

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

>> *v=[4;-2;3;1]*

$$v = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

>> *% producto punto de u y v*
>> *u' * v*
24

>> *%modulo o norma*
>> *norm(u)*
6.2450

>> *sqrt(u'*u)*
6.2450

>> *%proyección de u sobre v*
>> *((u'*v)/(v'*v))*v*

$$\begin{bmatrix} 3.2000 \\ -1.6000 \\ 2.4000 \\ 0.8000 \end{bmatrix}$$

4 Comandos importantes

Sea $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ tal que $\mathbf{W} = \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_r} \rangle$. Si se quiere construir una base ortonormal del subespacio **W** a partir del generador dado, mediante el Proceso de Gram- Schmidt, basta utilizar:

- el comando **orth**

```
>> help orth

ORTH Orthogonalization.
Q = ORTH(A) is an orthonormal basis for the range of A.
That is, Q'*Q = I, the columns of Q span the same space as
the columns of A, and the number of columns of Q is the
rank of A.
```

Se sigue el siguiente proceso:

1) Se construye una matriz **A** que tiene como columnas los vectores $\mathbf{v_1, v_2, ..., v_r}$

2) Se aplica: **Q = orth(A)** con lo que se obtiene la matriz **Q** cuyas columnas constituyen la base ortonormal pedida del subespacio **W.**

Ejemplo

Sea $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{R}^6$ tal que $\mathbf{W} = \langle (1,2,3,3,1,1),(2,3,-2,2,1,2),(-1,-1,1,-2,-2,-1),(3,0,3,1,3,3) \rangle$ se desea hallar una base ortonormal de **W**.

1) Se arma la matriz A

A=[1 2 -1 3*;*2 3 -1 0*;* 3 -2 1 3*;* 3 2 -2 1*;*1 1 -2 3*;*1 2 -1 3]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

2) Se aplica el comando orth

>> Q=orth(A)

$$Q = \begin{bmatrix} -0.4519 & 0.0186 & -0.3580 & 0.3309 \\ -0.3293 & 0.4595 & 0.4376 & 0.4095 \\ -0.2806 & -0.8575 & 0.3803 & 0.1639 \\ -0.4599 & 0.2202 & 0.5165 & -0.4559 \\ -0.4392 & -0.0656 & -0.3753 & -0.6153 \\ -0.4519 & 0.0186 & -0.3580 & 0.3309 \end{bmatrix}$$

Las columnas de la matriz **Q** constituyen la base ortonormal del subespacio **W**.

Es posible verificar que efectivamente las columnas de **Q** son ortogonales dos a dos y unitarios.

u1=Q(:,1)

$$u1 = \begin{bmatrix} -0.4519 \\ -0.3293 \\ -0.2806 \\ -0.4599 \\ -0.4392 \\ -0.4519 \end{bmatrix}$$

$>> u2=Q(:,2)$

$$u2 = \begin{bmatrix} 0.0186 \\ 0.4595 \\ -0.8575 \\ 0.2202 \\ -0.0656 \\ 0.0186 \end{bmatrix}$$

$>> u3=Q(:,3)$

$$u3 = \begin{bmatrix} -0.3580 \\ 0.4376 \\ 0.3803 \\ 0.5165 \\ -0.3753 \\ -0.3580 \end{bmatrix}$$

$>> u4=Q(:,4)$

$$u4 = \begin{bmatrix} 0.3309 \\ 0.4095 \\ 0.1639 \\ -0.4559 \\ -0.6153 \\ 0.3309 \end{bmatrix}$$

Se hacen los productos internos tomados dos a dos para verificar ortogonalidad.

Obsérvese que el resultado no da cero como era de esperar, ello sólo es debido a cuestiones de redondeo. Notar que los valores obtenidos son muy próximos a cero ya que con e-016 se quiere indicar 10^{-16}

$>> u1'*u2$

$-1.8562\,e-016$

$>> u1'*u3$

$2.2204\,e-016$

$>> u1'*u4$

$1.6653\,e-016$

$>> norm(u1)$

1

$>> norm(u2)$

1

$>> norm(u3)$

1.0000

$>> norm(u4)$

1.0000

- El comando **qr** (permite obtener la descomposición **QR** de una matriz **A**)

Ejemplo

A=[1 -1 3 4;2 4 5 -2;5 3 2 -1;1 -1 2 3]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

[Q,R]=qr(A)

$$Q = \begin{bmatrix} -0.1796 & 0.4693 & 0.6017 & -0.6208 \\ -0.3592 & -0.7401 & 0.5616 & 0.0887 \\ -0.8980 & 0.1083 & -0.4212 & -0.0665 \\ -0.1796 & 0.4693 & 0.3811 & 0.7761 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -5.5678 & -3.7717 & -4.4901 & 0.3592 \\ 0 & -3.5741 & -1.1372 & 4.6572 \\ 0 & 0 & 4.5327 & 2.8480 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2661 \end{bmatrix}$$

% se verifica

*Q*R*

$$ans = \begin{bmatrix} 1.0000 & -1.0000 & 3.0000 & 4.0000 \\ 2.0000 & 4.0000 & 5.0000 & -2.0000 \\ 5.0000 & 3.0000 & 2.0000 & -1.0000 \\ 1.0000 & -1.0000 & 2.0000 & 3.0000 \end{bmatrix} »$$

5 Gráfico de funciones

MATLAB ofrece la posibilidad de graficar funciones (siempre que seamos capaces de introducir correctamente los datos) mediante el comando **plot**

Ejemplo 1

Sea la recta $y = 0.5x+3$ a la cual queremos graficar.

```
>> x= - 6 : 0.1 : 6;
>> y=0.5.* x + 3;
>>  % puede establecerse las escalas y valores para los ejes coordenados con "axis"
>> plot(x,y),axis( [-6 6  - 6 6])
  % de esta forma los ejes coordenados corresponden para x entre -6 y 6 y para el eje y entre  - 6 y 6
>> grid,  title('recta')
>> xlabel('variable independiente')
>> ylabel('valores de la funcion')
```

Observaciones

1) Para introducir los valores de la variable independiente, se fija un intervalo, en nuestro caso [-6,6] y se indica el “paso”, esto es la distancia entre los puntos sucesivos del dominio. Si lo hacemos igual a 0.1, la manera de indicarlo es : x = -6: 0.1 : 6

2) Una vez escrita la función, para graficarla lo hacemos con el comando **plot** indicando entre paréntesis (x, y)

3) El gráfico que aparece en *Figura 1* presenta sobre el eje horizontal los valores de la variable independiente y en el eje vertical los valores de la función. En este gráfico no están marcados los ejes coordenados. Si se quisiera variar los valores min y max sobre cada eje coordenado se indica axis([*minx maxx miny maxy*])

4) Con **title(‘............’)** se le coloca el título al gráfico, mientras que con **xlabel(‘......’) ylabel(‘....’)** los rótulos al eje horizontal y vertical respectivamente.

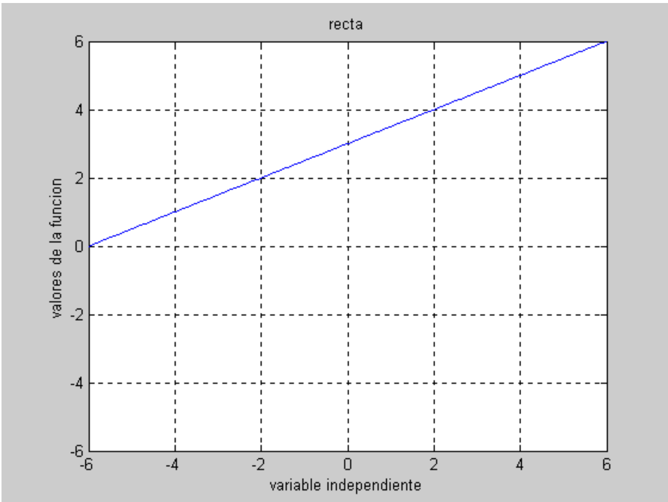


Figura 1: gráfica de la recta

También es posible graficar más de una función en un solo gráfico.

Ello puede ser útil cuando por ejemplo se quiere visualizar la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas, donde cada ecuación representa una recta en $\mathbb{R}^2$ y se quiere determinar su intersección.

Ejemplo 2

Sea el sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

que puede escribirse matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

La matriz de los coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

es inversible, luego la solución analítica del problema se puede encontrar como

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{*}\, \boldsymbol{b} \qquad con \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Luego

>> *A=[*1 1***;*** -2 1*]*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

>> *b=[*3***;*** -3*]*

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

>> *X=A^(-1)*b*

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esto es el punto intersección es ***p****= (2,1)*

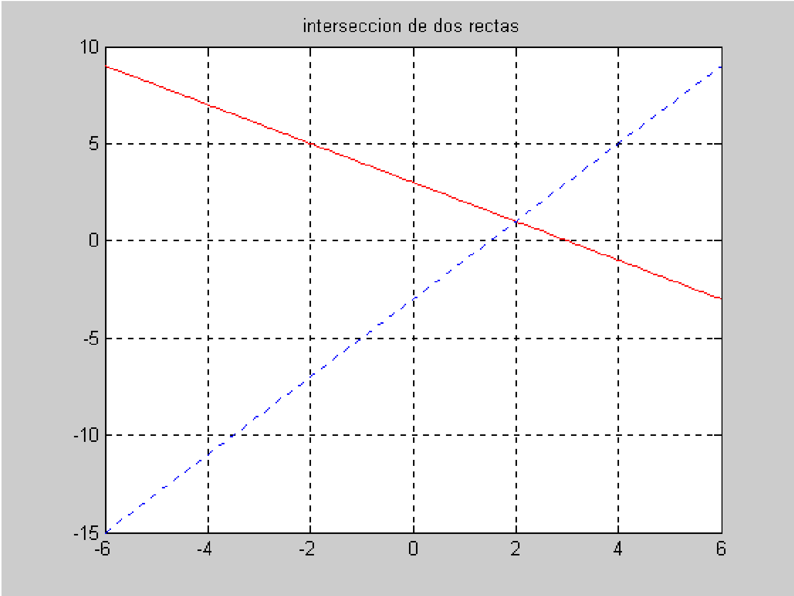


Figura 2: Intersección de dos rectas

>> *x1*= - 6 **:** 0.1 **:** 6**;**

>> *y1=-x1*+3**;**

>> *x2*= - 6 **:** 0.1 **:** 6**;**

>> *y2=2*x2-3;*

>> *plot(x1,y1,'r-',x2,y2,'b:')*

>> *grid*

>> *title('interseccion de dos rectas') (Figura 2)*

6 Vectores y Valores propios

Algunas matrices especiales

1) **A**= *eye (n)* *reproduce la matriz unidad* $n \times n$
2) **B** = *zeros(size(* **A** *))* *reproduce la matriz nula del tamaño de la matriz* **A**
3) **C**= *ones (size(* **A** *))* *reproduce la matriz de unos del tamaño de la matriz* **A**.

Ejemplo1

> *A=eye(3)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

>> *B=zeros(size(A))*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

>> *C=ones(size(A))*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Algunas rutinas útiles

1) *det(* ***A*** *)* *da el determinante de la matriz* ***A***
2) *c=poly(A)* *da los coeficientes del polinomio característico de la matriz A*
3) *r= roots (c)* *da las raíces del polinomio que tiene por coeficientes el vector c*
4) *eig (A)* *da los valores propios de la matriz A*
5) *[V,D]=eig(A)* *da los vectores propios y la matriz diagonal de la matriz A*

Ejemplo 2

Dada la Matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ se desea hallar el polinomio caracterísitico de **A**, los valores propios de **A** y los subespacios propios asociados.

$A = [5\ \ -6\ \ -6; -1\ 4\ 2;\ 3\ \ -6\ \ -4]$ *% DATO*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

>> det(A)

ans = 4

% Se van a emplear dos métodos distintos para encontrar los valores propios de la matriz A

1) % el comando ' poly' permite encontrar directamente el polinomio característico

>> c=poly(A) (% polinomio característico de A)

c = 1.0000 -5.0000 8.0000 -4.0000

% lo obtenido son los coeficientes del polinomio característico el cual resulta:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$

>> r=roots(c) (raíces del polinomio carácterístico)

r = 2.0000
2.0000
1.0000

% para calcular los vectores propios se arma para cada valor propio r la matriz (r.I-A) y se resuelve el sistema (r.I-A).X = 0

$>> B = 2.*eye(3) - A$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

>> rref(B)

$$ans = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

% a partir de esta reducida se deduce que los vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *y* $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

generan el subespacio propio asociado a r =2

$>> F = 1.*eye(3) - A$

$$F = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$>> \; rref(F)$

$$ans = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

% a partir de esta reducida se deduce que el vector propio $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

genera el subespacio propio asociado al valor propio $r = 1$

2) *% pueden encontrarse los valores propios de a matriz A directamente a través del comando eig*

$f = eig(A)$

$f = 2.0000$

1.0000

2.0000

% Si se quiere encontrar en el mismo paso los valores propios y los vectores propios asociados se utiliza el mismo comando eig, pero en el primer miembro se indica $[V, D]$ *donde V son los vectores propios y D da la matriz diagonal*

$>> \; [V, D] = eig(A)$

$$V = \begin{bmatrix} 0.7845 & 0.6882 & 0.7672 \\ -0.1961 & -0.2294 & 0.6028 \\ 0.5883 & 0.6882 & -0.2192 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

% Notar que la matriz V formado con los vectores propios de la matriz constituye la que en la teoría hemos llamado matriz P.

En consecuencia es fácil verificar $P^{-1}.A.P = D$

$>> \; P = V;$

$>> \; P\wedge(-1)$

$$ans = \begin{bmatrix} 5.0990 & -9.4947 & -8.2639 \\ -4.3589 & 8.7178 & 8.7178 \\ -0.0000 & 1.8878 & 0.6293 \end{bmatrix}$$

$>> D \; = \; P\wedge(-1)*A*P$

$$ans = \begin{bmatrix} 2.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 1.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

Observaciones

1) Los vectores propios calculados por el primer procedimiento y el segundo son aparentemente distintos. Sin embargo, la diferencia reside en que con el "comando **eig**" se obtienen vectores propios unitarios

En efecto, para r =1 se obtuvo $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ que normalizado es: $\mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 0.688 \\ -0.229 \\ 0.688 \end{bmatrix}$

Para $r = 2$: $\mathbf{V}_{\lambda=2} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0.7845 \\ -0.1961 \\ 0.5883 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.7672 \\ 0.6028 \\ -0.2192 \end{bmatrix} \right\rangle$ (VERIFICARLO!!)

2) Softwares como Mathematica y Maple pueden usar con facilidad cálculo simbólico para encontrar el polinomio característico de una matriz de tamaño moderado, si bien no hay una fórmula o algoritmo finito que permita calcular las raíces de la ecuación característica para $n \geq 5$. Los mejores métodos numéricos para encontrar los valores propios de una matriz evitan por completo el tener que armar el polinomio característico. De hecho, Matlab encuentra el polinomio característico calculando primero los valores propios de la matriz **A** y luego desarrollando el producto: $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$. Los algoritmos utilizados serán desarrollados en Cálculo Numérico

7 Transformaciones en $\mathbb{R}^2$

Con MATLAB, es posible realizar gráficos no sólo de funciones sino también de figuras.

- Supongamos que se quiere dibujar un rectángulo con vértices **(**0,0**)**; **(**2,0**)**; **(**2,3**)**; **(**0,3**)** ¿cómo se procede?.

Se construye un vector columna **X** con todas las primeras componentes y un vector **Y** con todas las segundas componentes. Si se pretende dibujar una figura cerrada, se agrega el primer punto también al final

```
>> X=[0;2;2;0;0];
>> Y=[0;0;3;3;0];
```

% el comando **plot** grafica la figura que resulta de unir con segmentos de recta los puntos que tiene abscisa X y ordenadas Y.
Mediante el comando **axis**([xmin xmax ymin ymax]) se fijan los límites de los ejes coordenados

```
>> plot( X,Y ),axis([-5 5  -5 5])    % (Figura 4.4)
```

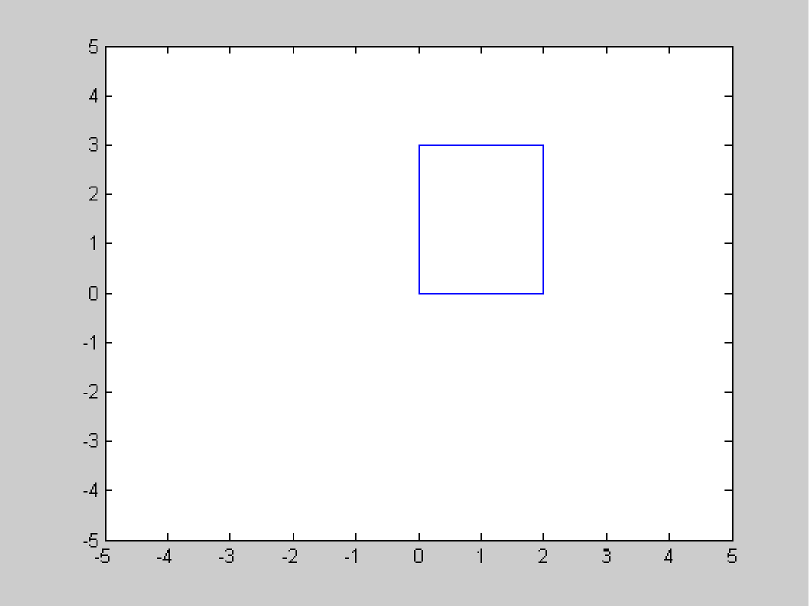


Figura 4.4: rectángulo de vértices (0,0); (2,0); (2,3); (0,3)

Para mayor información sobre el comando **plot** tipee: help plot

- Supongamos que se desea visualizar como se transforma el rectángulo con vértices $(0,0)$; $(2,0)$; $(2,3)$; $(0,3)$ bajo la acción de un operador lineal en $\mathbb{R}^2$ que está definido a partir de la matriz **A**.

Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{cos}(\pi/4) & -\mathbf{sen}(\pi/4) \\ \mathbf{sen}(\pi/4) & \mathbf{cos}(\pi/4) \end{bmatrix}$$

Deberá producirse una rotación en el ángulo π/4.

% Armamos la matriz B con los puntos dato (vértices del rectángulo)

$B = [0\ 2\ 2\ 0; 0\ 0\ 3\ 3]$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$>>\ A = [cos(pi/4)\ \ -sin(pi/4); sin(pi/4)\ \ cos(pi/4)]$

$$A = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

$>>$ *% recordando que la primera columna de la matriz B se puede indicar :* $B(:,1)$:

$>> v1 = A*B(:,1)$

$$v1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$>> v2 = A*B(:,2)$

$$v2 = \begin{bmatrix} 1.4142 \\ 1.4142 \end{bmatrix}$$

$>> v3 = A*B(:,3)$

$$v3 = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 3.5355 \end{bmatrix}$$

$>> v4 = A*B(:,4)$

$$v4 = \begin{bmatrix} -2.1213 \\ 2.1213 \end{bmatrix}$$

$>>$ *% luego para armar la figura transformada lo hacemos con* $v1\ v2, v3$ *y* $v4$

$>> C = [v1\ v2\ v3\ v4\ v1]$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1.4142 & -0.7071 & -2.1213 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 3.5355 & 2.1213 & 0 \end{bmatrix}$$

$>> M = C(1,:)$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1.4142 & -0.7071 & -2.1213 & 0 \end{bmatrix}$$

$>> N = C(2,:)$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1.4142 & 3.5355 & 2.1213 & 0 \end{bmatrix}$$

$>>$ *%Para graficar necesitamos matrices columna, luego tomamos las transpuestas :*

$>>$

$>> X1 = M';$

$>> Y1 = N';$

% con plot es posible hacer dos gráficos juntos, cada uno de ellos con una característica de color y tipo de línea (ver help plot)

$>>$ *plot(X,Y,'b-',X1,Y1,'r :'),axis([-5 5 -5 5])*

$>>$ *title('efectos de la matriz de rotacion sobre un rectangulo') (Figura 4.5)*

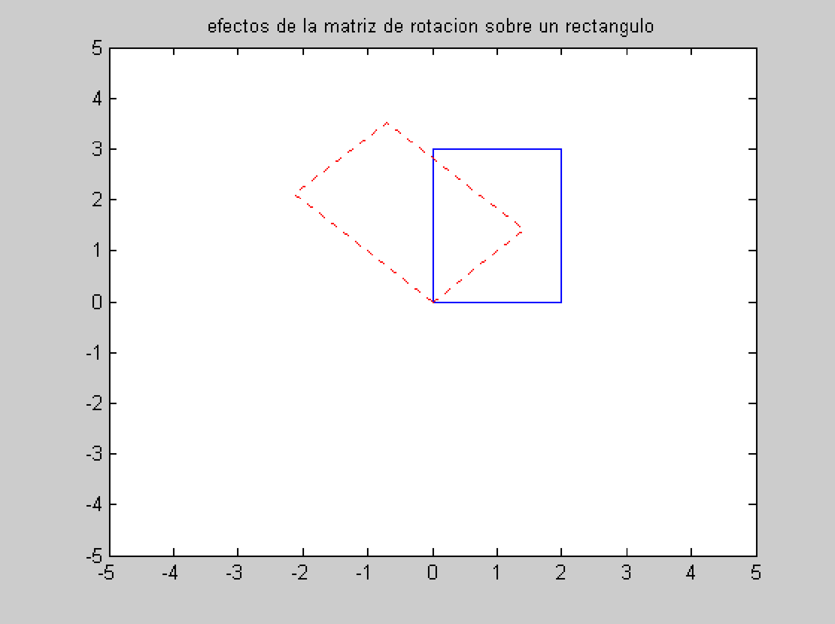


Figura 4.5

8 Graficación de Cónicas y Cuádricas

Ejemplo 1

Si lo que se quiere es graficar una parábola el procedimiento es el ya visto:

$>>\ x = -8 : 0.1 : 8;$

$>>\ y = x.\wedge 2 + 2.* x - 3;$

$>>\ plot(x, y)$

$>>\ grid$

$>>\ title('\ parabola\ y = x.\wedge 2 + 2 * x\ \ -3')$ $(Figura\ 5.16)$

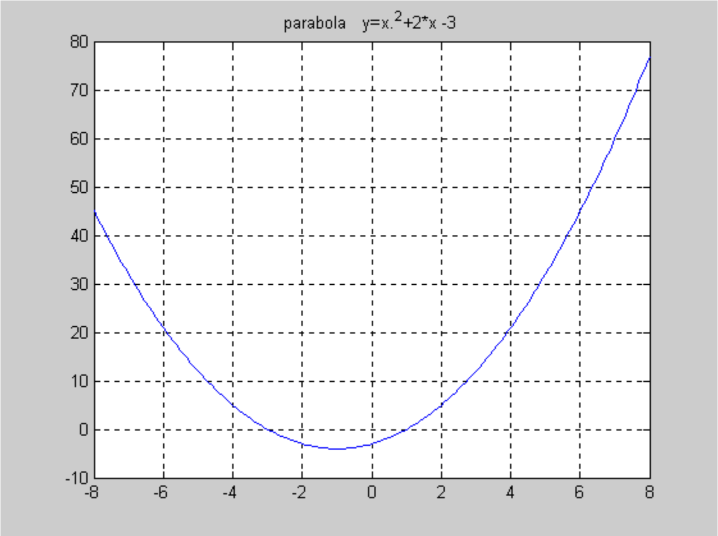


Figura 5.16 : Parábola

Ejemplo 2.

Se presentan dificultades cuando se quiere dibujar figuras geométricas tales como una circunferencia completa donde no tenemos una función única $y = \mathbf{f}(x)$ que describa totalmente la misma.
En este caso se puede apelar a la representación de la cónica en coordenadas polares:

a) $\begin{cases} x = r.\boldsymbol{cos}\,\theta \\ y = r\boldsymbol{.sen}\,\theta \end{cases}$ Circunferencia

b) $\begin{cases} x = a\boldsymbol{.cos}\,\theta \\ y = b\boldsymbol{.sen}\,\theta \end{cases}$ Elipse

c) $\begin{cases} x = a\boldsymbol{.sec}\,\theta \\ y = b\boldsymbol{.tg}\,\theta \end{cases}$ Hipérbola

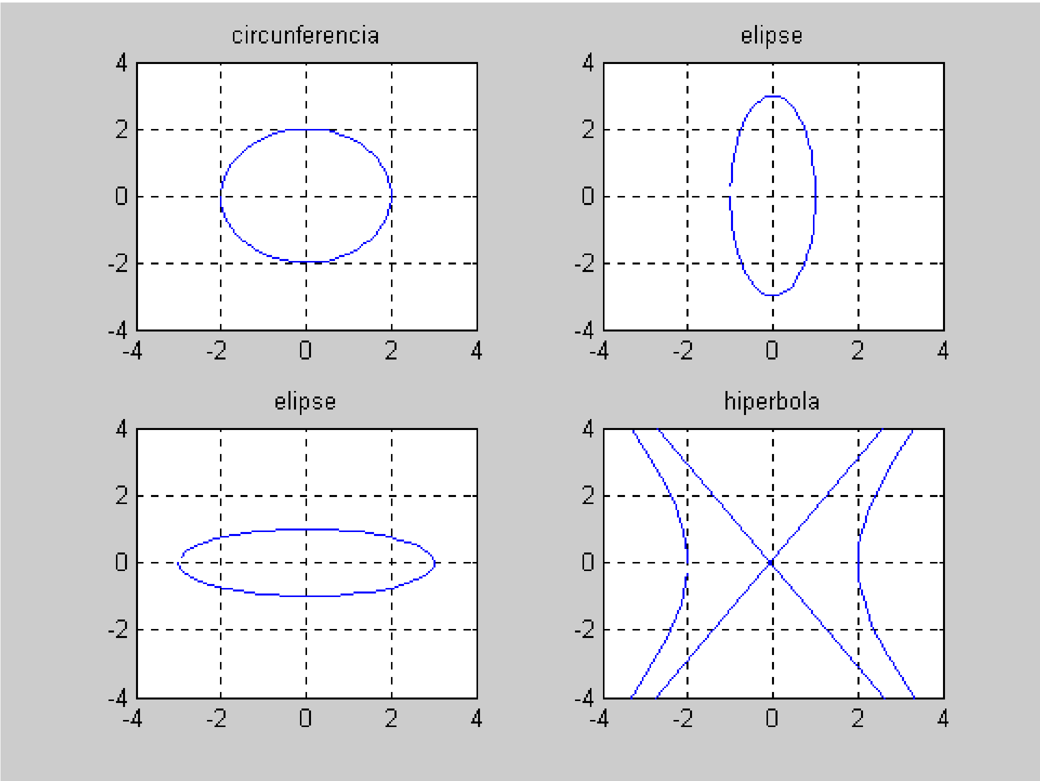


Figura 5.17 : Cónicas

$\% \ cicunferencia\ centrada\ en\ el\ origen\ de\ radio\ 2$
$>>\ t = -pi : 0.1 : pi;$
$>>\ x = 2.*\mathbf{cos}(t);$
$>>\ y = 2.*\mathbf{sin}(t);$

$>>\ \%\ elipse$
$>>\ x1 = \mathbf{cos}(t);$
$>>\ y1 = 3.*\mathbf{sin}(t)$
$>>\ \%\ elipse$
$>>\ x2 = 3.*\mathbf{cos}(t);$
$>>\ y2 = \mathbf{sin}(t);$

$>>\ \% hiperbola$
$>>\ x3 = 2.*\mathbf{sec}(t);$
$>>\ y3 = 3.*\mathbf{tan}(t);$

A los fines de hacer varios gráficos juntos se usa *subplot(m,n,)* donde *m x n* indica el número de gráficos a hacer. En nuestro caso *subplot (2,2,...)* quiere decir *2x2 = 4* gráficos ubicados en dos filas y dos columnas (*Figura 5.17*)

```
>> subplot(221), plot(x, y), axis([-4 4 -4 4])
>> grid, title('circunferencia')
>> subplot(222), plot(x1, y1), axis([-4 4 -4 4])
>> grid, title('elipse')
. >> subplot(223), plot(x2, y2), axis([-4 4 -4 4])
>> grid, title('elipse')
>> subplot(224), plot(x3, y3), axis([-4 4 -4 4])
>> grid, title('hiperbola')
```

Ejemplo 3

Las gráficas en $\mathbb{R}^3$ pueden hacerse con el comando *mesh,* previo a lo cual es necesario construir la grilla correspondiente a los valores de las dos variables independientes para dar origen a una superficie.
Para el caso de un paraboloide de ecuación

$$z = x^2 + y^2$$

resulta

```
>> [x1grid, y1grid] = meshgrid(-4 : 0.1 : 4, -4 : 0.1 : 4);
>> z1 = x1grid.^2 + y1grid.^2;
>> mesh(z1)
>> title('paraboloide')   %Figura 5.18
```

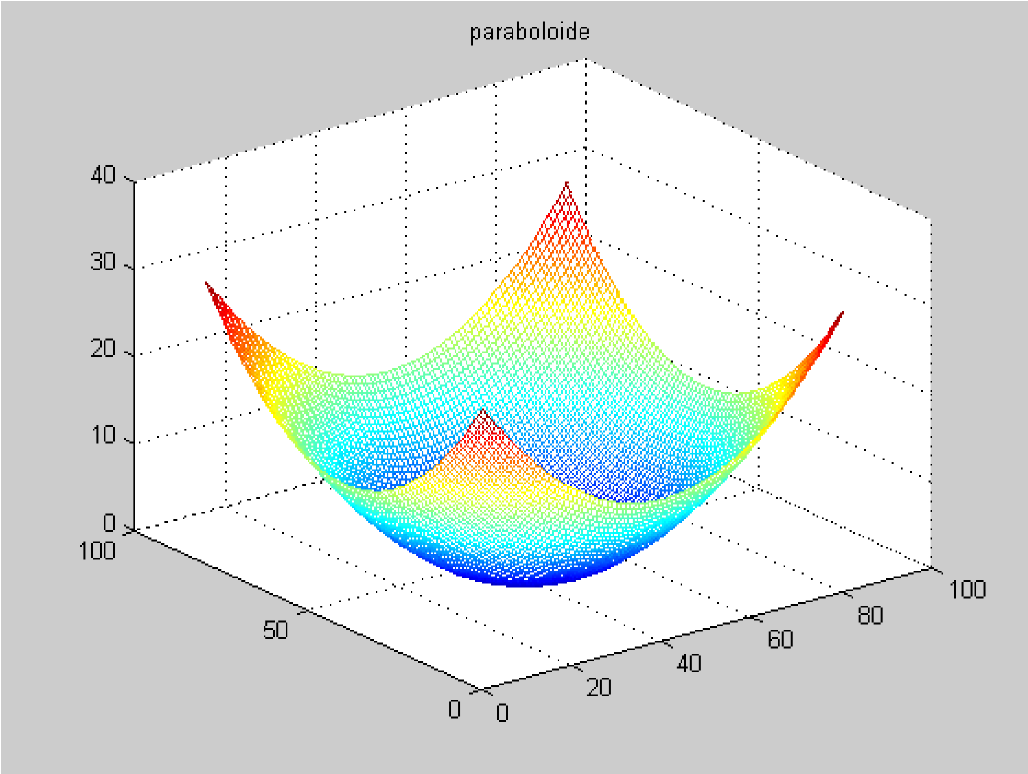


Figura 5.18: Paraboloide

Para algunas cuádricas se hace a menudo necesario trabajar con coordenadas esféricas o cilíndricas para lograr un buen resultado.

9 Ejercicios para realizar utilizando MATLAB

Ejercicio 1

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0.5 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -3 & 0.2 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Realice las siguientes operaciones elementales de filas:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{4*F_2} \mathbf{C} \qquad \mathbf{A} \xrightarrow{F_1+3*F_4} \mathbf{D} \qquad \mathbf{A} \xrightarrow{F_2 \longleftrightarrow F_3} \mathbf{G}$$

b) Encuentre la matriz reducida por filas de la matriz **A**

Ejercicio 2

Sea **b** la matriz columna $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y la matriz **A** del ejercicio 1.a

a) Construya la matriz aumentada $\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}$ y encuentre su reducida por filas

b) Use papel y lápiz para en base a lo encontrado en el punto anterior dar el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{A.X = b}$

Ejercicio 3

Los siguientes sistemas representan la intersección de tres planos en $\mathbb{R}^3$. Use el comando **rref** como herramienta para resolver los sistemas. ¿Que se puede concluir sobre la geometría de los planos que representa cada ecuación?

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ \quad -3x_2 + \ x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Ejercicio 4

Dadas las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

efectuar: a) $\mathbf{A.C}$ con $\mathbf{C = B^T}$

b) $\mathbf{A}^{-1}$

Ejercicio 5

Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^5$; $\mathbf{W} = \langle (1,2,-1,3,2), (3,2,4,-1,2), (2,-1,3,0,2) \rangle$

Dar una base ortonormal de **W**

Ejercicio 6

Dadas las matrices siguientes encontrar su descomposición QR

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Verificar que $\mathbf{A = Q.R}$

Ejercicio 7

Graficar las siguientes funciones:

a) $y = -2x + 1$ para $x \in [-3, 6]$

b) $y = 2x^2 - 3x + 4$ para $\mathrm{x} \in [-5, 5]$

c) $y = sen(x)$ para $x \in [0\,;\,2\pi\,]$

Ejercicio 8

Resolver analítica y gráficamente los sistemas. Interpretar geométricamente los resultados

$$a)\ \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

Ejercicio 9

Encontrar los valores y vectores propios de la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n \times n}}$. Analizar de acuerdo a los resultados obtenidos, si ésta es diagonalizable. En caso afirmativo, dar la matriz **P** y la matriz diagonal **D**

$$a)\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 6 & 12 & 11 & 2 & -4 \\ 9 & 20 & 10 & 10 & -6 \\ 15 & 28 & 14 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 10

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 38 & -95 & 55 \\ 35 & -92 & 55 \\ 35 & -95 & 58 \end{bmatrix}$$

Verifique que

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$ es un vector propio de la matriz **A** con valor propio λ*=-2;*

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$ es un vector propio de **A** con valor propio λ *=3*

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix}4\\9\\13\end{bmatrix}$$ es vector propio con valor propio λ*=3* .

Ejercicio 11

Una de las propiedades más importantes de las rocas deformadas es su deformación interna. Una medida de deformación está basada en la macla por deformación de la calcita. Las medidas se hacen a partir de cortes delgados de muestras de la roca que contiene calcita. Se calculan ciertos números que representan las medidas de deformación respecto a un sistema de coordenadas determinado por el corte delgado y se colocan en una matriz 3x3.
Los vectores propios de esta matriz representan la dirección de los ejes principales de la deformación. Los valores propios asociados dan las magnitudes de las deformaciones en la dirección de los ejes principales, con los valores propios positivos se indica extensión y los valores propios negativos significan compresión.

a) Para la siguiente matriz de medida de deformación, encuentre la dirección (vector unitario) del eje principal de máxima extensión y la dirección del eje principal de máxima compresión:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-0.01969633 & 0.01057339 & -0.005030409\\ 0.01057339 & 0.008020058 & -0.006818069\\ -0.005030409 & -0.006818069 & 0.01158627\end{bmatrix}$$

b) Encuentre el ángulo que forma el eje principal de máxima deformación compresiva con el eje x (éste viene representado por el vector [1 0 0])

> NOTA: conocido el coseno se determina el ángulo con el comando acos (arco coseno). Para expresarlo en grados se multiplica por $180/\pi$.

Ejercicio 12

Analizar las propiedades geométricas de los operadores lineales de $\mathbb{R}^2$ representados por las matrices indicadas observando sus efectos sobre el triángulo de vértices $(0,0)$ $(2,0)$ $(2,1)$ (graficando con MATLAB)

$$a)\,\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\quad;\quad b)\,\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\quad;\quad c)\,\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\cos(\pi/6) & -sen(\pi/6)\\ sen(\pi/6) & \cos(\pi/6)\end{bmatrix}$$

Ejercicio 13

Graficar las siguientes cónicas

$a)$ $x^2 + y^2 = 25$ $\quad$ $b)$ $2x^2 + y^2 = 1$

$c)$ $2x^2 - y^2 = 1$ $\quad$ $d)$ $y = 3x^2$

Ejercicio 14

Graficar las siguientes cuádricas

$a)$ $z = 2x^2 + 2y^2$ $\quad$ $b)$ $z = 2x^2 - 2y^2$