RELEVANCIA DE LA EVIDENCIA SENSIBLE EN MATEMÁTICA: ARTICULACIÓN DINÁMICA ENTRE FIGURAS Y FORMAS ANALÍTICAS

Leila Gisela Rosset Luna (UNC) & Aída Sandra Visokolskis (UNC)

UNC: Universidad Nacional de Córdoba

Resumen

Las figuras y otros elementos gráficos no sólo son herramientas para la comprensión de un problema matemático sino también una fuente de conocimientos. El presente trabajo intenta dar cuenta de la situación de la articulación dinámica entre figuras y formas analíticas en matemática, a partir de una caracterización de las imágenes como tipos de metáforas, siguiendo la perspectiva actualizadas de su exposición.

El trabajo se concentra en un estudio de caso de construcción matemática de un resultado con demostración concluyente. Sin embargo, a la par de la prueba formal de tal resultado, se aborda una "prueba visual" del mismo, un modo de inteligibilidad no demostrativa de dicho resultado pero que ofrece, a cambio, una comprensión significativa, en un intento de analizar el valor cognitivo de este tipo de explicación matemática, sus ventajas y desventajas frente a las demostraciones formales.

Palabras clave

<matemática> <figuras> <formas analíticas> <metáforas>
<pruebas visuales.>

Abstract

Figures and other graphic elements are not only tools for understanding a mathematical problem but also a source of knowledge. This paper tries to account for the situation of the dynamic articulation between figures and analytical methods in mathematics from a charac-

Fecha de recepción: 5 de Abr. 2016 - Fecha de aceptación: 5 de Oct. 2016
Representaciones, Vol. XII , N° 2 - Nov. 2016, pp 109-133

terization of images as types of metaphors, following the Aristotelian perspective and updated versions of their exposure.
The work focuses on a case study of mathematical construction of a result with conclusive demonstration. However, along with the formal proof of such a result, it is considered a "visual proof" of it, a way of nondemonstrative intelligibility of this result, but offering in exchange a meaningful understanding, in an attempt to analyze the cognitive value of this type of mathematical explanation, their advantages and disadvantages over formal demonstrations.

Keywords

<mathematics> <figures> <analytic forms> <metaphors> <visual proofs.>

1.Introducción: las imágenes como tipos de metáforas

Las figuras, diagramas, esquemas y otros elementos gráficos constituyen piezas claves tanto en la descripción como en la construcción de ideas innovadoras. Las figuras no sólo son herramientas para la comprensión de un problema sino también una fuente de nociones y conocimientos. A través de ellas se pueden descubrir y/o conformar propiedades sugeridas por las eventuales relaciones entre las partes captadas de una totalidad analizada. La facilidad y rapidez que estos elementos figurativos otorgan al proceso de inteligibilidad de algún concepto, resultado o teoría matemática hace que tales gráficos sean dignos de un análisis más profundo, a fin de comprender cómo y por qué estos elementos, a pesar de que no siempre presentan explícitamente las ideas que encierran, tienen la capacidad de conservar de manera sintética un conjunto de ideas que se hace necesario desarrollar.

El papel de las figuras ya fue tratado por Aristóteles compartiendo propiedades con otro recurso estilístico, la metáfora[1]. Entre las características que este filósofo asume como comunes a las figuras y las metáforas se halla la cuestión de la dinamicidad en sus expresiones como efecto sensibilizador implícito que proporciona nitidez respecto a las relaciones entre elementos que los conforman. En efecto, en Retórica

1411b-1412a, Aristóteles comenta cómo Homero, mediante las metáforas, logra dar vida a lo inanimado, cuando éstas representan una acción, como es el caso del "volar" de una flecha, del "rodar" de una piedra por la llanura, o del "penetrar" la lanza ansiosa en el pecho del enemigo. El Estagirita presenta a "las imágenes como metáforas con falta de una palabra", en Retórica, 1407a15 (Aristóteles, 1999: 504), que permiten "poner ante los ojos[2]" la evidencia sensible aportada por una figura o un diagrama, y a la vez permiten capturar en dicha imagen las relaciones dinámicas que se puedan extraer como efecto de una visualización ingeniosa. Dice Aristóteles:

> *La imagen es también una metáfora, pues se distingue poco de ella. (Aristóteles, 1999: 501[3])*

> *Todos estos [ejemplos] se les puede llamar lo mismo imágenes que metáforas, de modo que todos aquellos que son celebrados cuando se les dice como metáforas, es evidente que lo serán también como imágenes; y lo mismo las imágenes, como metáforas con falta de una palabra.* (Aristóteles, 1999: 504[4])

La elección de la expresión aristotélica "poner ante los ojos" como eje de las discusiones que abordaremos en este trabajo nos lleva a plantear un análisis histórico sucinto pero detallado de *la relación entre palabras e imágenes* -no necesariamente en el contexto matemático aunque también lo incluye-, que permitirá mostrar las desavenencias que ha sufrido el lenguaje figurativo en este recorrido, y que a su vez explica la situación actual –no siempre feliz o positiva- en que se encuentra.

Aplicando esta problemática luego en el ámbito de la matemática, dará cierto sustento a la convención universalmente aceptada de admitir como conocimiento legítimo, aquel que provee de justificaciones rigurosas y precisas de sus afirmaciones expresadas en lenguaje escrito y/o simbólico, publicadas tras haber pasado un tribunal evaluador respetado por sus pares y confiable. Y aunque estas justificaciones pudieran ocasionalmente estar acompañadas de imágenes que ilustren algunos de sus pasos o de sus ideas centrales, esto no sólo no es obligatorio sino que suele considerarse, en general, suprimible. No obstante ello, el trabajo se orienta en rescatar el valor de las imágenes en los procesos cognitivos matemáticos.

En este sentido, para el Estagirita, el órgano sensorial con el que se expresan mejor las pasiones es la vista, y por ello la visión es una forma de conocimiento. Aristóteles ha inmortalizado la expresión "poner ante los ojos" como aquella que indica el modo más directo y evidente de que se alcance una comprensión de las ideas. Así, una persona talentosa tiene la capacidad de "hacer que salte a la vista" de los receptores aquello que quiere trasmitir:

> *Resulta así necesario que aquello que complementa su pensar con gestos, voces, vestidos y, en general, con actitudes teatrales excitan más la compasión, puesto que consiguen que el mal aparezca más cercano, poniéndolo ante los ojos, sea como inminente, sea como ya sucedido. (Aristóteles, 1999: 359[6])*

Traer o poner ante los ojos algo a alguien implica generar en el otro una visualización mental no antes concebida o actualizada, una presencia inmediata y completa de algo que estaba ausente en él y que permita la trasferencia del emisor al receptor. De esta manera, las imágenes se comparan con las metáforas. Las imágenes constituyen para este filósofo un elemento de fácil aprendizaje, placentero en la medida de la ganancia cognitiva que ofrecen, i.e. una "rápida enseñanza" (1410b20-35), de fácil comprensión inteligible.

A su vez, en Aristóteles hay otro elemento fundamental asociado a las imágenes mentales que surgen de poner algo ante los ojos. Estas imágenes (*phantasmas*) son producto de la imaginación (*phantasia*), entidades con un fundamento físico pero que además poseen un nivel de materialidad que hace a estas imágenes relacionarse con los pensamientos. En cuanto a este basamento físico, el Estagirita tiene preferencia por la visión comportando la tarea cognitiva. En *Metafísica* (980a21 y ss.) explícitamente menciona que, de todas las sensaciones, las visuales son las que proporcionan conocimiento. Y en De *Anima* (432a14-17) y De *Memoria* (449b31) destaca que el alma nunca piensa sin imágenes. Y agrega:

> *Se ha hablado anteriormente de la imaginación en el tratado Del*

> *alma, y se ha señalado que no es posible pensar sin imágenes. El fenómeno que ocurre en el pensamiento es el mismo que en el trazo de una figura. Entonces, en efecto, sin tener de ninguna manera necesidad de saber que la magnitud del triángulo es determinada, nosotros lo trazamos de un tamaño determinado. Asimismo, aquel que lo capta por el entendimiento, aun si él no piensa en su dimensión, lo coloca delante de sus ojos con una dimensión y él lo piensa, abstracción hecha de su magnitud. Si se trata de la naturaleza de las cantidades, pero de aquéllas que son indeterminadas, el pensamiento se pone una cantidad finita, y ella no piensa en las cantidades sino en tanto que son cantidades solamente. (*Aristóteles, 1993: 67-68[7])

Observamos que Aristóteles establece una analogía entre el pensamiento matemático con que opera y los esquemas visuales, para facilitar intuitivamente la comprensión de procesos rigurosos como son las demostraciones matemáticas. Como afirma Ross (1981: 214), en este caso, el pensamiento racional más riguroso debe pagar un precio por su asociación con las facultades sensoriales, que consiste en la necesidad de trabajar con imágenes visuales para poder poner ante los ojos físicos algo material y no abstracto, y así ayudar a la imaginación a operar con los ojos mentales por analogía. Toda imaginación, requiere, en última instancia, de algo sustancial de donde apoyarse. Este sustento material es la información provista por los cinco sentidos, y en particular, por la vista. Una imagen es una imagen de algo, dice Ross (1981: 207), y ese algo proviene del pasado del sujeto.

Podemos entonces sintetizar los objetivos aquí perseguidos: (i) rescatar este tipo de actividad diagramática en matemática, presentando y desarrollando para ello un estudio de caso concreto; (ii) comparar el tipo de explicación comprensiva que otorgan las "pruebas visuales" [8] frente a las que ofrecen las justificaciones rigurosas de los mismos resultados; y (iii) describir el plus cognitivo que aportan tales pruebas visuales. En este sentido, nos concentraremos en un ejemplo de construcción matemática que conforma un resultado acabado, con demostración concluyente. Sin embargo, a la par de la prueba formal de tal resultado, abordaremos lo que ha recibido el nombre de "prueba visual" en la literatura sobre estos temas. Este tipo de mostraciones visuales, en el caso que analizamos, si bien no siempre permite justificar el resultado alcanzado, otorga un grado de comprensión de por qué se da la situación presente y de convicción de su veracidad, en vez de las manipulaciones algebraicas, en general –aunque no siempre- poco significativas, que logran el propósito demostrativo.

Ello nos lleva a juzgar el valor de una prueba (formal o visual) con base en al menos dos criterios: por un lado, por la luz que proyecta sobre el resultado, es decir, qué tan claro lo hace al entendimiento, y, por otro lado, por la perspectiva que abre, es decir, de qué manera el resultado se vincula con otros dominios. Por último, nos ocuparemos de analizar las ventajas y desventajas de las pruebas visuales frente a las demostraciones formales.

Cabe observar que utilizamos la expresión “formas analíticas” para referirnos a conceptos, argumentos deductivos concluyentes, teoremas o teorías válidas, en el ámbito de la matemática. En cambio, las “imágenes” constituyen diagramas, gráficos, esquemas y otros elementos figurativos. Como veremos en los próximos apartados, estas imágenes permiten la descripción y construcción de ideas innovadoras, son herramientas de comprensión, y fuentes de conocimiento que facilitan el descubrimiento de propiedades y relaciones, aportando inteligibilidad a las formas analíticas.

2.El vínculo entre imágenes y palabras: caso general

Las imágenes, diagramas, figuras y/o dibujos, cuando se trata de resultados matemáticos, a lo largo de la historia, en general han sido desacreditados. Éstos tienden a ser vistos como artificios decorativos, herramientas auxiliares, complementos dispensables; en definitiva, aunque favorezcan la producción de resultados tentativos o provisorios, y contribuyan a la comprensión y simplificación de las ideas en torno a argumentos concluyentes complejos, son interpretados como agregados secundarios, y en todo caso desestimables cuando se requiere precisión y rigor en las descripciones matemáticas. Ello ha traído como consecuencia la conformación de una demarcación estricta entre explicaciones gráficas icónicas por un lado y justificaciones discursivas y/o simbólicas por el otro, con la grave consecuencia de que cualquier aproximación esquemática o gráfica, debido a su vulnerabilidad lógica, sea descartada por completo, perdiéndose así la oportunidad generalizada de aprovechar las riquezas implícitas que aportan este tipo de discursos figurativos.

Esta división peyorativa proviene de larga data, y no sólo en el ámbito de la matemática, sino que abarca un amplio dominio. Existe una extensa tradición occidental griega respecto a la dicotomía entre imágenes y palabras, en el sentido de que las reflexiones teóricas que se remontan a la antigüedad clásica, en general, categorizan las obras escritas de manera diferente a las obras artísticas visuales. Antecedentes de la relación entendida como disímil entre lo visual y lo verbal/escrito nos llevan a Platón.

La crítica platónica a la pintura, fundamentalmente concentrada en el Libro X de República, parte de su concepción para la cual toda pintura, por ser arte imitativo, copia la realidad, constituyendo una tercera generación comparada con la naturaleza [9] (Platón, 1988b: 507 [10]), una tercera a partir de lo que realmente es (Platón, 1988b: 508 [11]), una tercera a partir de lo verdadero (Platón, 1988: 514)[12], una imagen espejada de una cierta realidad que nunca, según él, puede ser fielmente representada.

Si bien Platón apela al recurso analógico de desprestigiar la pintura con el objetivo de abordar una crítica mayor hacia el valor mimético -y por tanto defectuoso- de la poesía, su meta prioritaria consiste en oponer ambas actividades, i.e. pintura y poesía, al discurso filosófico [13]. En efecto, mientras que la filosofía aporta argumentaciones rigurosas, la pintura y por extensión analógica, también la poesía, son inferiores (Platón, 1988b: 518 [14]). Por ejemplo, en otra parte de *República*, afirma:

> *[El poeta] imagina mal en palabras [...] como un pintor (grapheus) cuya pintura (graphôn) no es para nada como el objeto que él quiere portar. (Platón, 1988b: 173 [15]).*

Cabe advertir que esto no incluye a toda la poesía sino a parte de ella. En el discurso platónico habría dos tipos de poesía, una inspirada y digna de los mejores elogios, y otra rebajada a lo mundano sensorial y equiparable a las artes visuales, degradada al nivel de las técnicas adquiridas por entrenamiento culturalmente heredado. El primer tipo convierte a Platón en un demarcador estricto entre (este tipo de) poesía y pintura -relegando a la pintura al último rincón de la realidad-, mientras que el segundo tipo de poesía acepta una posición conciliadora de Platón entre (este tipo de) poesía y pintura. El primer tipo se trata del caso en el cual la poesía es elogiada por ser inspirada por las musas, y así, cercana a la filosofía. Es el caso que al poeta le es arrebatada su fuerza de juzgar mientras le es otorgado este don como un regalo de los dioses. Así entendida la poesía, no es para nada semejante a la pintura. La palabra proferida de esta manera está cargada de un mensaje divino, mientras que las imágenes visuales ofrecidas por la pintura constituyen una obra humana, y por ello, son de menor valor al ser comparadas con cualquier actividad sobrenatural.

Esta perspectiva permaneció vigente al menos hasta que Aristóteles (Poética, 1460b8; Retórica, 1371b5) consiguió fusionar en una única categoría de "artes imitativas" [16] al arte visual -que comprendía la arquitectura, escultura y pintura- con el arte acústico -poesía, música y danza-, excluyendo los oficios manuales, con la salvedad que "el arte visual no fue elevado al nivel de la poesía [inspirada] sino que fue la poesía la que fue degradada al nivel de las artes visuales." (Tatarkiewicz, 1997: 133)

Si denominamos "vertiente antitética" a la posición filosófica que representa a los detractores de toda semejanza entre signos pictóricos y signos lingüísticos, claramente Platón resulta su representante más notable. Sin embargo, de acuerdo a lo analizado arriba, no siempre Platón respondería a esta vertiente: Platón es el representante por antonomasia de lo que denominamos la "vertiente antitética" en lo que refiere a la relación entre palabra e imagen. Sin embargo, cuando Platón se refiere al otro tipo de poesía, aquel que es analogable a la pintura (Libro X de *República*), Platón ingresa en la otra vertiente, que daremos en llamar la "vertiente analógica", que intenta dar cuenta de la similaridad entre palabra e imagen, reforzando lo que palabra e imagen tienen en común.

Este segundo tipo de poesía es desdeñada por Platón porque es una actividad técnica y sobre todo, dependiente de la fuerza física [17] para su producción y ejecución. Y por todo ello es asimilable a la pintura, que se ejecuta manualmente. Es un tipo de arte regido por reglas, un tipo de actividad que requiere de un entrenamiento para la adquisición de destrezas que permitan su conocimiento experto.

Así, pintura y poesía en Platón son similares cuando refiere a los aspectos menos deseables -su destreza física- por su distancia con la filosofía, actividad superior del alma humana. Y son opuestas cuando la poesía es enaltecida como obra de inspiración divina, mientras que la pintura sigue siendo una actividad regulada por normas técnicas, y por ello es de estatuto inferior. En definitiva, la poesía, aun cuando está cargada de tecnicismo, puede aspirar a la supuesta grandeza filosófica, si además resulta inspirada. En cambio, la pintura, en esta concepción platónica fuertemente dominante en la época, no tiene escapatoria.

3. Simónides de Ceos versus Leonardo da Vinci: relaciones diversas entre pintura y palabra

El partidario más conocido de la vertiente analógica dentro de la Grecia Antigua fue Simónides de Ceos (ca. 556–468 a.C.), poeta griego que nos legó, entre otras cosas, una concepción original, producto de la aceptación de una relación fructífera entre palabras e imágenes: los poetas son hacedores de imágenes. Simónides parte de la hipótesis que el mensaje poético y las imágenes pictóricas cumplen la misma función expresiva y apelativa, y por ello pueden enriquecerse mutuamente mediante su interacción: las palabras suscitan imágenes (mentales) y a su vez las imágenes (físicas) pueden ser descriptas mediante palabras, siendo este intercambio suficientemente ajustado [18].

Se busca en las palabras una capacidad evocadora que haga evidente el mensaje de ellas, que lo haga lo más comprensible posible. Esta idea de evidencia –cuya palabra original en griego es *enargeia*- implica una operación mental análoga a la visión, que es directa, evocadora, comprensible y manifiesta. Nada hay más evidente que una imagen visual clara. Así, se espera que las palabras sean tan claras y evidentes como lo son ciertas imágenes físicas. En consecuencia, esas palabras deben sugerir en la mente, imágenes mentales análogas a las imágenes que se producen al ver una pintura.

Las palabras poéticas surgen inspiradas de imágenes pictóricas (físicas) vívidas y así logran crear mejores imágenes mentales en el oyente/lector, de las escenas narradas. En este sentido, Dionisio Longino (o Pseudo-Longino) (ca. 213–273 d.C.) en su obra *Sobre lo sublime*, habla acerca del poder de las imágenes implícitas en las palabras (15.1) y de su efecto emotivo y por tanto penetrante (15.9), recordándonos que no hay nadie mejor que Simónides para representar más vívidamente las escenas recitadas de una poesía (15.7). Dice:

> *¿Qué efecto puede tener la imaginería oratoria? Bueno, es capaz de muchas maneras de infundir vehemencia y pasión en las palabras habladas, mientras que más específicamente, cuando se combina con los pasajes argumentativos, no sólo persuade al oyente sino que realmente lo convierte en su esclavo.* (Seudo-Longino, 1979: 187)

El supuesto aquí presentado en torno a Simónides emerge de fragmentos de sus textos que son mencionados por otros autores, como los dos que aparecen a continuación:

(a) Simónides es conocido por afirmar que: “la palabra (*logos*) es la imagen (*eikôn*) de la cosa [19]”.
(b) Este dicho se relaciona con otro que Plutarco refiere a Simónides:

> *Simónides llama poesía silenciosa a la pintura y pintura que habla a la poesía; pues las acciones que pinta el pintor según son llevadas a cabo, las palabras las describen tras ser realizadas* [20]. (Plutarco, 1989: 489)

La primera oración de este párrafo de Plutarco, combinada con el apotegma anterior, describen, entre otras cosas, un razonamiento por similaridad: así como el pintor, al dibujar crea imágenes físicas, el poeta, con las palabras crea imágenes mentales. De esta manera, el poeta se convierte en un hacedor de imágenes. Esta oración refleja también que la pintura carece del lenguaje necesario para expresarse tan bien como lo hace la poesía [21]. En este sentido, es con las palabras que se llegan a armar imágenes mentales.

A pesar de la correlación implícita entre imágenes y palabras que emerge de las referencias a los dichos de Simónides, la primera oración del texto de Plutarco, i.e. su frase hegemónica [22], induce a suponer que existe en Simónides una primacía de la palabra sobre la pintura, y ello queda puesto en evidencia cuando observamos la corrección que hiciera Leonardo da Vinci (1452-1519) de este fragmento en el siglo XV. En efecto, a los fines comparativos, cotejemos a continuación ambas frases:

(a) Frase hegemónica de Simónides: *La pintura es poesía silenciosa y la poesía es pintura que habla*.

(b) Corrección aportada por Leonardo da Vinci: *La pintura es poesía muda y la poesía es pintura ciega.*

Leonardo destaca que existe una simetría entre pintura y poesía, resaltando carencias mutuas: la pintura es poesía muda porque le falta palabras. Hasta acá ambos autores coinciden. Pero además, Leonardo agrega que también a la poesía le falta algo: ver. La poesía vería a través de las imágenes visuales. En ambos autores falta una descripción verbal de la imagen física; por eso la pintura es poesía muda, le falta hablar. Pero para Simónides, la afirmación recíproca no es cierta necesariamente: no se requiere que la poesía se vea, pues es con las palabras que se llega a armar una imagen mental. La voz, para él, es más directa, imagen de la cosa. En cambio, dado que Leonardo ubica la fuente de todo conocimiento en los sentidos y la experiencia, afirma una prioridad de la pintura sobre la poesía, basado esto en la superioridad del sentido de la visión, en desmedro del sentido auditivo propio de la poesía. En este sentido, Leonardo, al invocar la famosa frase hegemónica de Simónides, lleva a cabo una corrección, aduciendo a esta ventaja de lo visual sobre la palabra. Leonardo capta que lo visual también es un tipo de lenguaje sígnico que requiere de cierta pericia para descifrar su código, no siempre generalizable a cualquier imagen, sino justamente un lenguaje idiosincrático.

El análisis llevado a cabo respecto de las afirmaciones de Simónides, con el relevante agregado de Leonardo, nos permite concluir en este apartado que existen argumentos históricos a favor de un potencial lingüístico en las imágenes pictóricas, los diagramas o los esquemas figurativos. Resta hacer una tarea interpretativa de los mismos, a modo de prueba tentativa. Su ausencia de garantías conclusivas los limitan en su utilización, pero ello no impediría su inserción como factor cognitivo apropiado.

4. Estudio de caso: prueba visual de la convergencia de una serie geométrica

En esta sección abordaremos el caso particular de la convergencia de la serie geométrica [23]. En primer lugar desarrollaremos su prueba formal tal como es entendida en los primeros cursos de *Análisis Matemático*, -una asignatura básica en la matemática desde su incorporación en su *corpus* a partir de los trabajos de Newton y Leibniz-, acompañada posteriormente por una prueba visual, a fin de comparar ambas y esclarecer las ventajas y desventajas de una respecto de la otra. El teorema de convergencia de las series geométricas dice lo siguiente: Sea r un número real tal que $0 < r < 1$; entonces la suma infinita $1+ r+ r^2+ r^3+ \ldots$, resulta igual a $1/(1-r)$:

$$1+ r+ r^2+ r^3+ \ldots = 1/1-r$$

La demostración que se realiza usualmente en los textos [24] es como sigue: para comenzar, se define S_n , la suma finita de los primeros n términos de la serie:

$$S_n = 1+ r+ r^2+ r^3+ \ldots +r^n$$

De esta manera, la suma de los primeros $n + 1$ términos será:

$$S_{n+1} = 1+ r+ r^2+ r^3+ \ldots +r^n+ r^{n+1} \qquad (*)$$

Si observamos el segundo miembro de la igualdad anterior, notaremos que la misma consiste en la serie S_n más el término r^{n+1}:

$$(1+ r+ r^2+ r^3+ \ldots +r^n)+ r^{n+1}=S_n+r^{n+1}$$

A partir de lo anterior obtenemos la siguiente igualdad

$$S_{n+1}=S_n+r^{n+1} \qquad (**)$$

Notemos también que, agrupando en el segundo miembro de la igualdad (*) todos los términos salvo el primero, podemos expresarla como:

$$S_{n+1} = 1+(r+ r^2+ r^3+ ...+r^n+ r^{n+1})$$

y de este modo podemos sacar factor común r del paréntesis del segundo miembro, con lo que resulta:

$$S_{n+1}=1+r .(1+ r+ r^2+ r^3+ ...+r^n)$$

Observemos que la suma entre paréntesis en el segundo miembro es precisamente la suma S_n. Luego,

$$S_{n+1}=1+r .S_n \qquad (***)$$

Ahora bien, igualando los segundos miembros de las expresiones iguales (**) y (***), resulta:

$$S_n+r^{n+1}=1+r .S_n$$

A partir de esta última igualdad, podemos agrupar

$$S_n-r .S_n=1-r^{n+1}$$

y factorizar. Así obtenemos:

$$S_n (1-r)=1- r^{n+1}$$

A partir de la identidad anterior, obtenemos S_n:

$$S_n=(1- r^{n+1})/(1-r)$$

Nótese que cuando n se hace “lo suficientemente grande” [25], resulta que $\lim_{n\to\infty} r^{n+1}=0$, ya que $0 < r < 1$. Por lo tanto,

$$S_\infty=\lim/_{n\to\infty} S_n= 1/_{1-r}$$

que es lo que se quería probar.

En relación a esto, Torres Alcaraz (2004) plantea que saber no es lo mismo que entender:

> *Pese a la firmeza del argumento, hay un aspecto de la prueba que no nos deja satisfechos. Con base en ella sabemos que la serie converge, e incluso sabemos a qué número lo hace. No obstante, la demostración no nos deja una clara comprensión de por qué las cosas son así, pues se basa en una serie de manipulaciones algebraicas poco significativas. Aclara muy poco decir: 'Si descomponemos la suma S_{n+1} de tal y tal otra manera, igualamos, agrupamos, factorizamos y despejamos, obtenemos un cociente a partir del cual llegaremos a la igualdad prometida tomando el límite cuando n tiende a infinito'.* (Torres Alcaraz, 2004: 13)

Si bien para un experto, esta demostración no sólo está a su alcance sino que formaría parte de un grupo de pruebas que podríamos llamar "elementales" -ya que los artilugios matemáticos que se necesitan para completar la demostración se aprenden en un primer curso de Cálculo-, esta prueba, en general no es accesible a un gran número de personas, ya que supone la existencia de conocimientos previos que, en la mayoría de los casos, no existe, es decir, definir sumas finitas, factorizar, agrupar, tomar límite, comprender el concepto de límite, entre otras. A continuación exponemos una prueba visual del resultado anterior.

Comenzamos graficando en una línea horizontal (figura 1), segmentos concatenados, de longitud 1, r, r^2, r^3, y así sucesivamente, representando éstos, términos de la serie geométrica. Los puntos suspensivos que figuran allí indican la existencia de los infinitos valores presentes de la serie, pero que es imposible materialmente graficar en su totalidad. Recordemos que al ser r un número comprendido entre 0 y 1, $0 < r < 1$, las potencias de r irán decreciendo en magnitud a medida que éstas van aumentando. En símbolos, $r^2 < r$, $r^3 < r^2$, … .

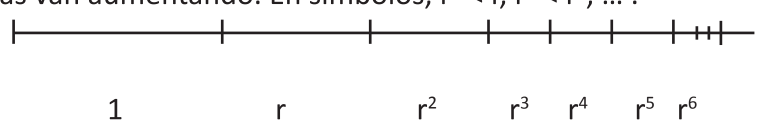

Figura 1

Buscamos representar gráficamente el valor postulado al que convergería la suma de estos términos. Llamemos *b* a dicho valor. ¿Cómo podemos llegar a graficar *b*? A partir de la recta graficada más arriba, no podríamos asegurar que ese número exista, es decir, que la serie converja a un valor determinado. Sin embargo, al pasar de la línea, que es de dimensión 1, a una figura de dimensión 2, es posible visualizar el modo de llegar a converger en el punto *b*. En efecto, dibujemos sobre la recta anterior, una sucesión de cuadrados, el primero de lado 1, el segundo de lado r, el tercero de lado r^2, el cuarto de lado r^3 y así sucesivamente, de manera que siempre uno de los lados de cada cuadrado quede alineado con el correspondiente de sus consecutivos (figura 2).

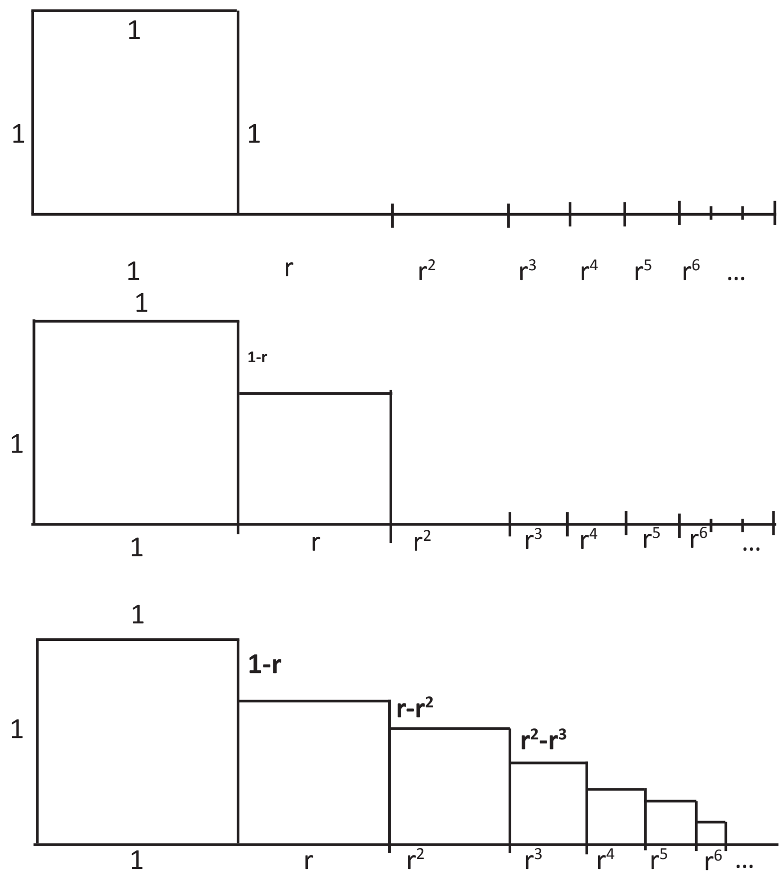

Figura 2

Notemos que, si bien en acto, la cantidad de cuadrados que es posible dibujar es finita, en potencia, la cantidad de cuadrados de esta sucesión es infinita. Al observar la figura se ponen en juego dos procesos: el primero, *ver* [26] los cuadrados, es un proceso fisiológico. Mientras que el segundo, *visualizarlos* [27], es un proceso de carácter cognitivo, una actividad de razonamiento. Va más allá de la simple percepción de imágenes con los ojos. Es percepción, pero comprensiva. El hecho de poder visualizar los cuadrados que no se ven en la figura, nos hace intuir que esta serie converge al punto que habíamos llamado *b* (figura 3). Tracemos ahora en cada uno de los cuadrados, los triángulos sombreados como se muestran en la figura 3.

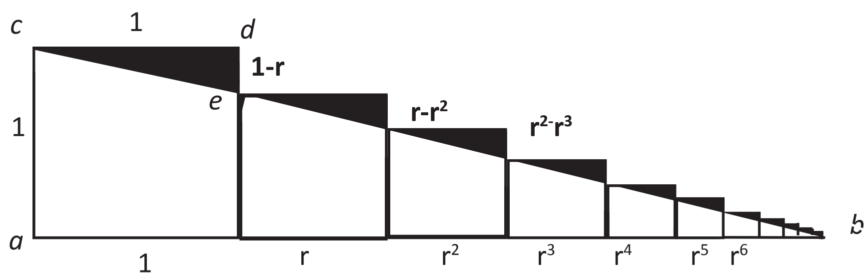

Figura 3

Una vez más, la cantidad de triángulos que se pueden sombrear es finita, pero es posible *visualizar* infinitos triángulos. A medida que sombreamos dichos triángulos, podemos proyectar la línea formada por las sucesivas hipotenusas de manera que, finalmente, queda formado el triángulo hipotético *abc*.

Por construcción, todos los triángulos sombreados son semejantes entre sí, ya que sus ángulos interiores correspondientes son congruentes, y, además, cada uno de los triángulos sombreados es semejante al hipotético triángulo *abc* [28]. Observemos en particular los triángulos *abc* y *cde*. Al ser semejantes, por teoría de proporciones, se cumple la relación:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{ed}}$$

Nótese también que, por contrucción, los segmentos $\overline{ac}$ y $\overline{cd}$ tienen longitud igual a 1 y además *de* = 1 - r, de modo que, reemplazando estos valores en la relación de más arriba, resulta:

$$\overline{ab} = \frac{1}{1 - r}$$

Recordemos que la base $\overline{ab}$ del triángulo abc corresponde a la suma cuyo valor queremos calcular, y por tanto, obtenemos la expresión buscada:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1 - r}$$

En este caso la prueba se "construye" de manera visual. ¿Cuáles son las ventajas de esta prueba frente a la prueba formal? Mencionaremos algunas de ellas: por un lado, las figuras son fáciles de hacer, fáciles de reconocer y fáciles de recordar. Por caso, es sencillo comprender la idea de colocar en una hilera una sucesión de cuadrados con determinadas características. Por otro, en la prueba visual nos apoyamos en la teoría de proporciones, que tiene una explicación geométrica obvia. Constantemente hay una equivalencia entre el gráfico y el cálculo que queremos realizar aunque en realidad no es así: hacemos un "salto inductivo incompleto", para acceder al caso infinito, que, en tiempo finito, no podríamos dibujar. Además, una prueba visual puede incluir ecuaciones para guiar al lector, pero el énfasis está puesto principalmente en los indicios visuales.

5. Conclusiones

Frente a la prueba formal expuesta, en primer lugar, es importante destacar que el tipo de razonamiento que ofrecen las pruebas visuales es sintético, en el sentido de ser holista, total, gestáltico, al modo de la información vertida eventualmente en un cuadro. Y por otro lado, es ampliatorio. No olvidemos, además, que aquello que se demuestra formalmente, debe conocerse o al menos conjeturarse de antemano. Recordemos que, por ejemplo, la geometría euclidiana, en su presentación axiomática[29] ofrecida por Euclides en su obra *Elementos*, ya en el siglo III a.C., no abandonó el razonamiento sobre figuras. Por el contrario, es sobre éstas que se elaboraron casi todas las demostraciones, haciendo de las figuras una parte esencial del argumento. La forma de cada argumento hace ver que éste es aplicable a cualquier figura de la misma especie, mas no por ello se libera de su presencia. Son las figuras las que dan significado a las proposiciones de los *Elementos* y las hacen comprensibles. *La demostración euclidiana devuelve a las figuras la verdad que tomó de ellas*, pero lo hace otorgándoles un caracter de necesidad lógica ausente en un principio.

Proclo, en el contexto de una larga glosa de la proposición 1 del *Libro I* de (Euclides, 1991)[30], señala una especie de pauta general de prueba de las proposiciones de *Elementos*: (1º) enunciado o *prótasis*, (2º) exposición o *ékthesis*, (3º) determinación-delimitación o *diorismós*, (4º) preparación o *kataskeué* , (5º) demostración o *apódeixis* y (6º) conclusión o *sympérasma*. La construcción que realizamos en la prueba visual sería equivalente a lo que Euclides hace en la etapa cuarta -preparación-, aunque en nuestro caso no es concluyente. Luis Vega Reñón define esta etapa como la "urdimbre o disposición de construcciones y relaciones a partir de lo dado y en orden a la obtención del resultado propuesto" (Vega Reñón, 1991: 35-36). La prueba visual ofrece comprensión y convicción, elucidación, aclaración, nos hace “ver ante los ojos”, en términos aristotélicos. Otorga un grado de confiabilidad y creencia. Evidencia, aunque no certeza.

A partir del estudio de caso planteado, en vistas al análisis teórico e histórico desarrollado más arriba, a modo de conclusión, es posible establecer un conjunto de características de la visualización en matemática. En efecto, las imágenes visuales obtenidas a través de la realización de una prueba visual tienen carácter:

(1) vivaz: dan vida a lo inanimado, cuando representan una acción, un “experimento” matemático. Son vigorosas, activas, dinámicas. Uno puede actuar con ellas.

(2) enigmático: debido a su iconicidad, requieren de cierta pericia para descifrar su código, algún mensaje descubierto y/o construido.

(3) sorpresivo: su mensaje es “punzante”, agudo, excepcional, admirable, desacostumbrado, novedoso.

(4) imaginativo: consisten metafóricamente en "mirar con los ojos de la mente", de manera análoga a la captación visual material.

(5) clarificador: Aristóteles usa el término "*enargeia*", i.e. aportan evidencia, penetración visual, comprensión.

(6) sintético: su significado se captura globalmente, como el caso de una pintura en un cuadro.

Hemos presentado en este trabajo una investigación que se centró, por una parte, en analizar la importancia de las argumentaciones matemáticas, tanto las concluyentes como las llamadas "pruebas visuales". Como hemos manifestado desde la introducción, nuestro objetivo era centrarnos en el valor de las pruebas visuales, reconociéndolas como un estilo de resolución de problemas tentativo, no conclusivo, y sin embargo, muy sugerente de ideas para lograr vías de solución, luego, por otros mecanismos más seguros y rigurosos.

El estudio de caso llevado a cabo buscó poner de manifiesto que aún individuos sin una formación matemática elevada son capaces de reconocer, describir y comprender este tipo de argumentaciones. Lo antedicho lleva a valorar las pruebas visuales, y, en general cierto tipo de información proveniente de imágenes, figuras, diagramas o esquemas visuales.

Notas

[1] Cfr. (Aristóteles, 1999), especialmente el Libro III. También Aristóteles se ocupa de la metáfora en su obra *Poética*, capítulo 21, 1457 b 6-32. Cfr. (Aristóteles, 1974).

[2] Aristóteles habla tanto de "poner ante los ojos" como de "saltar a la vista", "*prò ommátõn poieîn*" en su obra *Retórica*. Cfr. (Aristóteles, 1999), 1386a34 (p. 359), 1405b12 (p.495), 1410b34 (p.533), 1411a26 (p.536), 1411a28 (p.536), 1411a35 (p. 537), 1411b4 (p. 537), 1411b6 (p.537), 1411b9 (p. 538), 1411b23-25 (p.538).

[3] Cfr. § 1406b20, en (Aristóteles, 1999: 501).

[4] Cfr. § 1407a15, en (Aristóteles, 1999: 504).

[5] Cfr. nota 77, en (Racionero, 1999: 501).

[6] Cfr. Libro II, 1386a31-35, en (Aristóteles, 1999: 359).

[7] Cfr. § 450a1-5, en (Aristóteles, 1993: 67-68).

[8] Cfr. (Nelsen, 1993) y (Nelsen, 2000), entre otros, para una descripción del concepto de “prueba visual”.

[9] Al respecto, según Platón (1988b: 505-506), §596e–597b, un primer nivel de realidad consiste en una idea creada por Dios acerca de algún objeto físico, digamos una cama. Un segundo nivel de realidad consiste en el objeto físico material mismo, la cama hecha por un carpintero; y por último, existe un tercer nivel consistente en la cama dibujada por un pintor (imitador) como copia de la cama construida, que a su vez es copia de la idea original de cama.

[10] Cfr. §597e, en (Platón, 1988b: 507).

[11] Cfr. §599a, en (Platón, 1988b: 508).

[12] Cfr. §602c, en (Platón, 1988b: 514).

[13] Cfr. al respecto (Platón, 1988b: 521), §607b.

[14] Cfr. §605a-b, en (Platón, 1988b: 518).

[15] Cfr. §377e, en (Platón, 1988b: 173).

[16] Ahora la noción de imitación (*mímesis*) en manos de Aristóteles no era entendida como mera copia degradada de una realidad más perfecta, con lo cual las artes imitativas tenían un estatuto epistemológico diferente del otorgado por Platón.

[17] Cfr. por ejemplo §377e, en (Platón, 1988b: 173).

[18] Notemos que en esta oración se aclara acerca de qué tipo de “imagen” se está hablando en cada caso. Esto es de extrema importancia en lo que sigue, ya que, en realidad, Simónides no efectúa una verdadera equivalencia entre “imágenes” y palabras. En efecto, para Simónides, a cada palabra le corresponde una imagen *mental* (producto de la imaginación), y a cada imagen *física* (producto de la experiencia empírica real) se le asigna una palabra. Pero no se está hablando siempre del mismo tipo de “imagen”. Veremos más adelante, que, quien logra ofrecer tal equivalencia es Leonardo da Vinci, en el siglo XV, corrigiendo así lo estipulado por Simónides.

[19] Cfr. Michael Psellus (1615), *Peri Energeias Daimones*, 821b.

[20] Cfr. (Plutarco, 1989), 3, 347a.

[21] La pintura es, para Simónides, poesía silenciosa, de acuerdo a la cita anterior de Plutarco.

[22] Más concretamente, nos referimos a la frase tantas veces referenciada en la literatura: "Simónides llama poesía silenciosa a la pintura y pintura que habla a la poesía", que daremos en llamar "la frase hegemónica de Simónides" dada su cita muy recurrente en este trabajo.

[23] Una serie geométrica es una expresión del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1+r+r^2+r^3 \ +\ldots$, en la cual la razón entre los términos sucesivos de la misma permanece constante igual a r. Por ejemplo, la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ es geométrica, pues cada término sucesivo se obtiene al multiplicar el anterior por $\frac{1}{2}$.

[24] Cfr. (Spivak, 1996: 644-646).

[25] Es bien sabido que, desde el siglo XIX, los resultados del cálculo diferencial obtenidos por Leibniz y Newton, fueron esclarecidos por la corriente del rigor matemático, impulsada por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) y Bernhard Riemann (1826-1866), entre otros. Cauchy, en el año 1821, dio la siguiente definición de límite: "Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una variable particular dada se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de modo que acaban por diferir respecto a éste en una cantidad tan pequeña como uno quiera, se llama a este último valor, el límite de todos los demás." Cfr. (Cauchy, 1821: 19). Así, surge la noción de límite, que especifica el mecanismo matemático por el cual es posible llevar a cabo un cálculo preciso y exacto del valor obtenido por el procedimiento de aproximación indefinida, evitando frases como la señalada en el cuerpo del texto ("lo suficientemente grande"), que, si bien favorecen la intuición respecto de su significado, suelen producir ambigüedades y/o errores que pueden evitarse mediante el concepto de límite.

[26] Según el *Diccionario de la lengua española*, de la *Real Academia Española*, *ver* es: "percibir con los ojos algo mediante la acción de la luz". Cfr. (D.R.A.E, 2014).

[27] Según el *Diccionario de la lengua española*, de la *Real Academia Española*, *visualizar* es: "formar en la mente la imagen visual de un concepto abstracto. Imaginar con rasgos visibles algo que no se tiene a la vista". Cfr. (D.R.A.E, 2014).

[28] Cfr. criterios de semejanza de triángulos, por ejemplo en (Baldor, 2004: 104 ss.).

[29] Cfr. (Euclides, 1991).

[30] Cfr. (Proclus, 1992).

Referencias

Aristóteles (1974) Poética, Edición trilingüe. Introducción, traducción y notas de Valentín García Yebra, Madrid: Editorial Gredos.

Aristóteles (1993) "De la memoria y de la reminiscencia", En *Parvia Naturalia*, Madrid: Alianza Editorial, pp. 66-80.

Aristóteles (1999) *Retórica*, Introducción, traducción y notas de Quintín Racionero, Madrid: Editorial Gredos.

Baldor, Aurelio (2004) *Geometría plana y del espacio, con una introducción a la trigonometría*, Vigésima reimpresión, Mexico: Publicaciones Cultural.

Cauchy, Augustin-Louis (1821) "Cous d'Analyse de l'École Royale Polytechnique", en *Oeuvres Complètes d'Augustin Cauchy*, Serie 2, vol. 3, Paris: Gauthier-Villars, 1899.

D. R. A. E. (2014) *Diccionario de la lengua española*, Edición del Centenario, Vigésimo tercera edición, Madrid: Real Academia Española.

Euclides (1991) Elementos. *Libro I-IV*, Introducción de Luis Vega Reñón, Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños, Madrid: Editorial Gredos.

Nelsen, Roger (1993) *Proofs Without Words*: *Exercises in visual thinking*, Washington: The Mathematical Association of America.

Nelsen, Roger (2000) *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*, Washington: The Mathematical Association of America.

Platón (1988a) "Fedro", en Diálogos. Volumen III. *Fedón, Banquete, Fedro,* Introducción, traducción y notas de Emilio Lledó Iñigo, pp. 289-413, Madrid: Editorial Gredos.

Platón (1988b) *República*, Traducción de Antonio Camarero, Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Plutarco (1989) "De Gloria Atheniensium (Sobre la fama de los Atenienses)”, *Obras morales y de costumbres (Moralia)*, vol. V, Traducción de Mercedes López Salvá, Madrid: Editorial Gredos.

Psellus, Michael (1615) “Peri Energeias Daimones Dialogos”, *Migne, Patrologiae Cursus Graeca*, Vol. CXXII, G. Gaulmine (Ed.): Paris.

Pseudo-Longino (1979) *Sobre lo sublime*, Introducción, traducción y notas de José García López, Madrid: Editorial Gredos.

Proclus (1992) *A Commentary on the First Book of Euclid’s Elements, Translated* by Glenn Morrow, with a new foreword by Ian Mueller, Princeton: Princeton University Press.

Ross, William David (1981) *Aristóteles*, Segunda edición, Traducción de Diego Pró, Buenos Aires: Editorial Charcas.

Spivak, Michael (1996) *Calculus.Cálculo infinitesimal*, Segunda edición, Madrid: Editorial Reverté.

Tatarkiewicz, Wladislaw (1997) *Historia de seis ideas. Arte, belleza, forma, creatividad, mímesis, experiencia estética*, Sexta edición, Traducción de Francisco Rodríguez Martín, Madrid: Editorial Tecnos.

Torres Alcaraz, Carlos (2004) “Lo visual y lo deductivo en las matemáticas”, *Miscelánea Matemática*, vol. 40, pp. 1-27.

Vega Reñón, Luis (1991) “Introducción general a Elementos de Euclides”, *Euclides, Elementos*, pp. 7-184 , Madrid: Editorial Gredos.

Leila Gisela Rosset Luna

leilarosset@gmail.com

Leila Gisela Rosset Luna es profesora en matemática (FaMAF, UNC) y profesora en física (FaMAF,UNC). Se ha desempeñado como docente tanto en el nivel medio como el superior y el universitario. Ha trabajado como tutora de ingresantes universitarios. Ha participado en diversos cursos y congresos de educación y de filosofía de la ciencia. Cuenta con diversas publicaciones relacionadas con la filosofía y la historia de la matemática. Forma parte de un grupo de investigación en filosofía de la matemática, concentrándose en temáticas de filosofía de la educación matemática.

Aída Sandra Visokolskis

sandraviso@gmail.com

Aída Sandra Visokolskis es licenciada en matemática (FaMAF, UNC), especialista en enseñanza de la educación superior (U. Cuyo), magister en planificación y gestión educativa (U. Diego Portales) y doctoranda en filosofía (UNC), bajo el tema de la creatividad en matemática. Se especializa en historia y filosofía y de la matemática. Dirige proyectos de investigación en esta temática. Participa frecuentemente en congresos, así como también los organiza en torno a esta área de investigación. Ha publicado numerosos artículos y ha dictado cursos de posgrado en diversas instituciones del país. Actualmente es profesora a cargo de la cátedra de "Filosofía de la matemática" en la Universidad Nacional de Córdoba y de "Historia y fundamentos de la matemática" en la Universidad Nacional de Villa María.