UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES

EXPLORACIÓN MATEMÁTICA, INFERENCIA E INNOVACIÓN EN JOHN WALLIS (1656)

Tesis presentada para optar al título de:

Doctora en Filosofía

PRESENTA:

Lic. Erika Rita Ortiz

DIRECTORA DE TESIS:
Dr. Norma B. Goethe (UNC)

CO-DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Philip Beeley (Oxford, UK)

Noviembre 2022
Córdoba, Argentina

A Lucía, Vanina, Martín y Juan
por ser las mejores compañeras y compañeros de viaje

Agradecimientos

Esta tesis ha sido posible gracias a varias personas e instituciones que a lo largo de este camino han apoyado a mi trabajo y a mi persona de diversas maneras. Quiero aprovechar la oportunidad para expresar mi inmenso agradecimiento.

En primer lugar, quiero agradecer a mi directora, la profesora Dra. Norma B. Goethe, por haber guiado y apoyado mis estudios a lo largo de estos años. A ella agradezco también el esfuerzo dispensado en la lectura atenta y las observaciones realizadas durante el proceso de escritura del presente trabajo. Asimismo, agradezco el respaldo del Dr. Philip Beeley, co-director de mis estudios. Expreso también mi agradecimiento al resto del equipo de investigación, dirigido por la Dra. Goethe, especialmente a mis colegas y amigos, Gustavo Morales y Matías Saracho. Ellos siempre estuvieron abiertos a la discusión de muchos de los temas que ocupan a esta tesis y a brindarme su inestimable ayuda de diversas formas.

Agradezco también al CONICET, por su apoyo económico a través del programa de becas doctorales, que hizo posible que me dedicará de forma exclusiva al desarrollo de esta investigación y a la elaboración de este escrito.

Deseo dar las gracias al *Max Planck Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften* (Leipzig), la *Universität Hannover*, y la *Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Gesellschaft* (Hannover). En julio de 2016, tuve la oportunidad de participar como estudiante invitada en la *Leibniz Summer School* y en el *Graduate Seminar*, organizados con motivo del 300 aniversario del fallecimiento de Gottfried Leibniz. Esta experiencia, llevada a cabo en los inicios de mi recorrido doctoral, fue sumamente significativa, pues me permitió discutir y profundizar en diferentes aspectos de mi trabajo, en un ambiente sumamente estimulante y guiada por expertos en el área de la filosofía y la historia del siglo XVII.

Extiendo mi agradecimiento a los organizadores del *Graduate Symposium of the 10th Inter-*

national Conference on the Theory and Application of Diagrams, desarrollado en Edimburgo en 2018. No me es posible aquí nombrar a cada uno de los participantes – tutores, doctorandos y miembros de la audiencia - que, con sus comentarios y observaciones, contribuyeron sustancialmente a la profundización y clarificación de muchos de los temas aquí abordados. Deseo aquí hacer una mención especial a Emily R. Grosholz quien, en el marco de su visita académica a la Argentina en marzo de 2018 - organizada por la Dra. Goethe –, se tomó el tiempo para la lectura, corrección y discusión del manuscrito que presenté en el simposio arriba mencionado.

Es una verdad de perogrullo que la tarea de investigar es ardua y el camino no es lineal, pero esta afirmación tomo un cariz especial para muchos que, como quien escribe, nos tocó transitar el último tramo de nuestro doctorado en el contexto de una pandemia. Sumado aquí al contexto de aislamiento, y me permito aquí referir a una vivencia personal, padecí desde febrero de 2019 una dolencia física que me imposibilitó el desarrollo de mis tareas de investigación doctoral. No me alcanzan las palabras para agradecer a todas las personas que me ayudaron de las formas más diversas a transitar ese período de gran angustia e incertidumbre. A los miembros de mi equipo de investigación les doy nuevamente las gracias por la paciencia y el constante acompañamiento cuando mi trabajo se vio interrumpido, y a la motivación que me dieron desde marzo de 2021, cuando ya recuperada, pude retomar mi investigación. Agradezco a mis abogados y profesionales de la salud por hacer posible mis intervenciones quirúrgicas y recuperar mi salud física y mental, sin las cuales está investigación no hubiera podido seguir su curso. Finalmente, mi más sincero y profundo agradecimiento a mi familia y amigos, con quienes compartí desde un lugar lleno de amor las alegrías y las tristezas a lo largo de este camino. A todas estas personas, muchas gracias por haber hecho que mis esfuerzos se concreten.

Índice general

Introducción

1. Nuestro tema de investigación

El siglo XVII fue un siglo de grandes desarrollos en la matemática siendo uno de los más salientes el cálculo infinitesimal que tuvo entre sus ingredientes fundamentales la elaboración de métodos de resolución de problemas de cuadraturas. Entre estos métodos se destaca justamente el publicado en 1656 por John Wallis en su *Arithmetica Infinitorum sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaquae difficiliora Matheseos Problemata.* La importancia de la *Aritmética de los Infinitos*, propuesta por Wallis, reside no sólo en ser uno de los primeros métodos sistemáticos publicados, sino además porque logra reunir aportes fundamentales provenientes de diferentes áreas. Es así que John Wallis logra integrar los aportes provenientes del álgebra de ecuaciones, la geometría cartesiana, el método de los indivisibles y su propio trabajo con series aritméticas, poniéndolos exitosamente al servicio de la resolución de problemas de cuadraturas. Nuestra investigación se orienta al estudio epistemológico y lógico de las estrategias de resolución de problemas que llevaron a Wallis a la elaboración de su innovador método que transformó radicalmente el tratamiento de los problemas de cuadratura. En vista a este objetivo, es preciso, en primer lugar, que pasemos revista a la forma que ha tomado el tratamiento de la resolución de problemas y sus estrategias.

Una de las formas paradigmáticas de caracterizar la resolución de problemas matemáticos y sus estrategias, es a través de la noción de derivabilidad en un sistema formal. Las raíces de este tratamiento las encontramos en los enfoques surgidos a partir de la denominada "crisis de los fundamentos" de finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Encontramos allí la idea que subyace al enfoque paradigmático formalista expresada en el requisito de rigor de Hilbert, quien considera que un problema se encuentra satisfactoriamente resuelto, cuando su solución puede ser derivada deductivamente de axiomas y definiciones en un número finito de pasos. Este requisito de rigor se ve exacerbado durante el siglo XX, cuando el requisito de derivar deductivamente los resultados se transforma en el requisito de rigor formal moderno de derivación de los resultados en un sistema formal. La exigencia de una prueba formal estricta, agrega al requisito de rigor previo dos elementos: por un lado, un lenguaje formal que permita expresar cualquier proposición matemática por medio de una fórmula codificada simbólicamente, por otro lado, un conjunto de reglas de inferencia que especifican los pasos admitidos para pasar de una fórmula a otra. Con estos nuevos elementos, la solución de un problema - entendida como teorema - constituye una línea en un secuencia de fórmulas de un lenguaje formal que es obtenido, a partir de axiomas o principios, por medio de reglas de inferencia lógicamente válidas, donde la validez es de carácter sintáctico, en tanto que las reglas indican, cómo transformar una fórmula o conjunto de fórmulas, en otra fórmula sin atender a su contenido.

El enfoque de la derivación formal considera así, como únicos objetos legítimos de análisis filosófico, los elementos codificados de manera simbólica dejando de lado el recurso a otras formas de representación y a inferencias que no constituyen derivaciones formales rigurosas, que, sin embargo, podrían jugar un rol fundamental en la resolución de problemas. Las consideraciones epistemológicas acerca de la resolución de problemas y sus estrategias, son relegadas a las tareas de fundamentación, sin analizarlas en su especificidad y, como consecuencia, se anulan sus características fundamentales. Entendemos que el canon de la reflexión epistemológica delineado por la visión estándar lleva así a una caracterización de la matemática en general, y en particular, de la resolución de problemas, que precisa ser revisada en profundidad. Atendiendo a esto último, nuestro marco conceptual está constituido por algunos enfoques críticos en filosofía de la matemática que provienen de la denominada "filosofía de la práctica matemática" y su crítica al modelo de derivación formal propio de la filosofía de la matemática basada en los fundamentos. En consonancia con esta línea de trabajo, planteamos la necesidad de una caracterización del conocimiento matemático y la resolución de problemas que no recurra simplemente a las pruebas matemáticas en tanto derivaciones formales y atienda a la práctica matemática misma. Sostenemos que sólo, a partir de una caracterización de ese tipo, es posible una comprensión apropiada de los aspectos epistemológicos de las estrategias de resolución de problemas, no sólo en un sentido amplio, sino también en contextos específicos de la práctica, como lo es el caso que motiva nuestra investigación. A tal fin, consideramos algunos enfoques críticos que brindan una visión alternativa de la matemática y analizamos las consecuencias que de ellos se desprenden para una caracterización más cabal de la resolución de problemas.

La primera perspectiva que nos proponemos examinar es la desarrollada por Emily Grosholz (2007, 2016) cuyos trabajos se orientan a mostrar, el modo en que la resolución de problemas requiere de la articulación de diferentes áreas de estudio, cada una con sus propias herramientas y procedimientos codificados en lenguajes o idiomas matemáticos especializados. Para ello recurre a diferentes estudios de casos de resolución de problemas que se insertan en su epistemología de la matemática según la cual el conocimiento matemático se basa en la "experiencia matemática" nutriéndose de los aportes de la práctica investigativa. Las diferentes representaciones (diagramas, tablas, ecuaciones) constituyen las herramientas de trabajo - *paper-tools* - del matemático y la experiencia matemática es definida como la maestría en el uso de diversos "espectros de representaciones". De esta manera, la heterogeneidad característica del discurso matemático viene dada justamente porque los problemas requieren la mayoría de las veces para su resolución de la interacción de diferentes dominios y sus herramientas específicas. Siguiendo a Grosholz (2007, 2016), las estrategias de resolución de problemas están orientadas a la exploración de las relaciones e interacciones producidas por los discursos heterogéneos. Esta exploración tiene por principal objetivo, la elaboración de reglas para el uso en tandem de las diversas herramientas, reglas que luego son evaluadas en el marco del conocimiento disponible. Desde esta perspectiva, el estudio de las estrategias de resolución de problemas debe focalizarse en los procedimientos de transformación de las representaciones -ligados en cada caso a la experiencia matemática. Estos procedimientos dependen de los dominios que interactúan en el planteo y la resolución del problema con sus herramientas y el conocimiento disponible, todos ellos atados a diversos lenguajes especializados, lo cual le otorga a los problemas y sus soluciones, según Grosholz (2007, 2016), un carácter fundamentalmente histórico.

Retomando los aportes de Grosholz, en nuestra investigación consideraremos la dimensión epistemológica al examinar, los diversos modos en los que los matemáticos establecen conexiones entre diferentes dominios en la resolución de problemas. Al mismo tiempo, proponemos tener en cuenta la dimensión lógica de tales prácticas matemáticas. La posibilidad de brindar una perspectiva que articule las dimensiones lógicas y epistemológicas viene dada por un rasgo fundamental de las pruebas matemáticas que es su heterogeneidad discursiva. El estudio de la dimensión lógica de la resolución de problemas debe estar enmarcado en el estudio de las representaciones y los lenguajes especializados que hacen posible las inferencias. Un estudio en esa dirección es el de Larvor (2012, 2019) y su noción de lógica como el "estudio sistemático de las acciones inferenciales".

El segundo enfoque que consideraremos para el abordaje de nuestro tema es justamente el de Brendan Larvor, cuyo objetivo es brindar, a través de diferentes estudios, una caracterización de las pruebas matemáticas que no sea subsidiaria de la noción de derivación formal. Desde esa perspectiva, Larvor (2012) destaca que las pruebas matemáticas son "argumentos esencialmente informales", lo cual viene dado en cada caso por su dependencia, tanto de su forma como de su contenido. Las pruebas informales requieren de dominios con características adecuadas que permiten ciertas clases de inferencias. Este tipo de inferencias involucran acciones con dos implicancias: por un lado, no son acciones sólo sobre fórmulas de lenguajes formales, sino también diagramas, notaciones especializadas; por otro lado, y en tanto que constituyen o involucran procesos de manipulación, tales inferencias son mejor caracterizadas en términos de acción. Las acciones inferenciales no son aplicables en todos los dominios, porque estos están codificados en sistemas de representaciones que soportan ciertas inferencias y no otras. Los movimientos inferenciales son procedimientos estandarizados que el matemático aprende en el curso de su formación y en su práctica. Para cada acción inferencial hay un mecanismo de control que determina el rango de "acciones permisibles", esto es, determina reglas - no siempre explícitas - para el uso y la manipulación de las representaciones a fin de garantizar el rigor. De este modo, un argumento se considera riguroso, si cada una de las acciones inferenciales involucradas ha logrado sortear exitosamente los mecanismos de control de la práctica en la que están insertos. Larvor (2019) señala el carácter heterogéneo del discurso matemático, lo cual hace que la pruebas matemáticas contengan diferentes prácticas inferenciales expresadas en diferentes idiomas matemáticos. Al igual que Grosholz, Larvor sostiene que el carácter heterogéneo viene dado por la interacción de diferentes dominios, cada uno de ellos asociados a diferentes prácticas de representación, a fin de poder ampliar el rango de acciones disponibles.

2. Propósito de nuestra investigación

Retomando lo expuesto en la sección anterior, consideramos que los enfoques de Grosholz y Larvor pueden realizar aportes sustanciales para una mejor comprensión de las estrategias de resolución de problemas que llevan a resultados innovadores. Entendemos que la noción amplia de inferencia de Larvor, definida como acción sobre diferentes objetos – entre cuyos objetos se incluyen representaciones matemáticas especializadas - , es complementaria con la de experiencia matemática de Grosholz, esta última noción entendida en términos de procedimientos de uso y transformación de representaciones. Heterogeneidad discursiva y dependencia del contenido - así como su especificidad que remite a su carácter local - son justamente los elementos que se eliminan con la identificación entre argumentos matemáticos y derivaciones en sistemas formales. Sin embargo, es precisamente esta diversidad de elementos, presente en los argumentos que despliegan las estrategias de resolución, la que nos permite explicar aspectos característicos de esta actividad. Por este motivo, en nuestra caracterización de las estrategias de resolución de problemas, focalizaremos en los argumentos donde los matemáticos despliegan sus estrategias a fin de resolver los problemas planteados, prestando especial atención a la heterogeneidad discursiva propia de tales argumentos.

Proponemos incorporar las nociones de experiencia y acción inferencial y, con ello, considerar la dimensión pragmática de los argumentos heterogéneos, dado que nuestra investigación se diferencia, por un lado, de las perspectivas que caracterizan las estrategias de resolución de problemas en términos de operaciones lógico-formales y, por otro lado, también se distingue de aquellos abordajes de las estrategias que las caracterizan como procesos absolutamente individuales, ya sean ellos psicológicos, cognitivos o basados en alguna noción de "intuición". En contraste, la perspectiva que nos proponemos profundizar aquí, pone en el centro de atención la resolución de problemas y sus estrategias que se desarrollan en el contexto de interacción de dominios, donde cada uno de estos dominios se encuentra asociado a determinadas prácticas de representación e inferencia, esto es, a formas estabilizadas y compartidas de trabajo que guían la resolución de problemas. En consonancia con lo anterior, es que hablamos de "innovación" refiriendo con ello al desarrollo de soluciones y métodos novedosos que tienen como punto de partida, prácticas compartidas y bien establecidas[1]. Con el propósito de avanzar en esta dirección, partimos entonces de reconocer el rol fundamental del conocimiento establecido para la resolución de problemas.

El conocimiento establecido codificado en diversas herramientas con sus reglas de uso bien definidas, constituye el trasfondo, en primer lugar, para la exploración y elaboración de reglas para el uso en tándem de las herramientas provenientes de diferentes dominios que interactúan en la resolución de problemas. En segundo lugar, también constituye el trasfondo, para determinar el rigor de los argumentos que despliegan las estrategias de resolución de problemas y, con ello, de las reglas para el uso combinado de las diferentes representaciones. Esto último se

[1] De este modo, evitamos recurrir a nociones como "creatividad", presente frecuentemente en la caracterización de las estrategias en términos de procesos individuales, o a las de "descubrimiento" o "invención" que se encuentran atadas a discusiones de corte más ontológico propias del enfoque estándar en filosofía de la matemática.

encuentra en relación con la cuestión del modo en que se determina el rigor de los argumentos que contienen diferentes prácticas inferenciales. Al igual que las reglas para el uso en tándem de las representaciones, los criterios de rigor dependen de los problemas a resolver y, con ello, de los diferentes dominios con sus prácticas de representación e inferencia que interactúan en la resolución de problemas, otorgando a las estrategias empleadas su carácter local.

Nuestra investigación se plantea en los siguientes términos: buscamos indagar el modo en que las prácticas bien establecidas con su interacción, posibilitan la elaboración y el desarrollo de estrategias de resolución de problemas que sean rigurosas e innovadoras. Asimismo, dado que tal interacción se encuentra motivada por la resolución concreta de ciertos problemas, sería conveniente que nuestra indagación nos provea de alguna suerte de esquema o modelo que nos permita el examen de las estrategias en contextos específicos de resolución de problemas. Partiendo de una caracterización liberada de los prejuicios del enfoque de la derivación formal, que considere la actividad de resolución problemas en su especificidad, tal esquema podría contribuir a un abordaje más satisfactorio de casos específicos de resolución de problemas. Al mismo tiempo, esos abordajes podrían asimismo, sacar a luz otros aspectos fundamentales de la resolución de problemas, contribuyendo así a una comprensión más cabal de los aspectos lógicos y epistemológicos de dicha actividad.

Con la posibilidad de un abordaje más satisfactorio de casos específicos de resolución de problemas, volvemos ahora a lo que planteamos como el primer objetivo de nuestra investigación. Este objetivo, recordemos, consiste en el estudio epistemológico y lógico de las estrategias de resolución de problemas que le permitieron a Wallis la elaboración, en el periodo 1652-1655, de su innovador método para el cálculo de cuadraturas. Con todo lo desarrollado hasta aquí, tal estudio focalizará en las estrategias desplegadas en los argumentos de *Arithmetica Infinitorum*[2], los cuales se caracterizan justamente por contener diferentes prácticas. En efecto, el método desarrollado por Wallis, tal como mencionamos al inicio, incorpora diversos aportes y tiene lugar así en el contexto de la interacción entre la práctica geométrica clásica y la práctica algebraica. Con respecto a esta última, más específicamente, la práctica ligada al trabajo, desarrollado por Viète, en álgebra de ecuaciones, que postula la continuidad entre problemas aritméticos y algebraicos, por un lado, y la posibilidad de un tratamiento algebraico de diversos problemas geométricos. Atendiendo a la dimensión epistemológica de las estrategias, estudiaremos el modo en que Wallis relaciona y combina las herramientas representacionales provenientes

[2]En adelante AI

de los diferentes ámbitos. Luego, atendiendo a la dimensión lógica, examinaremos las nuevas inferencias que son posibles a partir de las reglas para el uso en tandem de las representaciones provenientes dominios. Asimismo, indagaremos el modo en que las estrategias desplegadas en los argumentos de AI, entendidas como conjuntos de acciones inferenciales, se ajustan - o no , o bien en qué grado - a los criterios de rigor determinados por las diferentes prácticas y su relación con el carácter innovador del método. Con nuestro estudio de las estrategias del método presentado por Wallis en AI, que no recurre a la noción de derivabilidad ni las reduce a procesos absolutamente individuales, pretendemos lograr una mejor comprensión de sus aspectos lógicos y epistemológicos en este estudio de caso.

Tomando como base lo propuesto en esta sección, exponemos a continuación los objetivos e hipótesis que guían nuestra investigación.

OBJETIVOS GENERALES

1. Estudio epistemológico y lógico de las estrategias de resolución de problemas de Wallis (1656) que lo llevaron a la elaboración de su innovador método de cálculo de cuadraturas, revolucionando el tratamiento de esta clase de problemas

2. Elaboración de una caracterización del conocimiento matemático y la resolución de problemas que no recurra a la derivación formal formal y atienda a la práctica matemática

Atendiendo a las limitaciones de las formas estándar de abordar la resolución de problemas y sus estrategias, observamos que la elaboración de una caracterización alternativa es fundamental para alcanzar nuestro primer objetivo.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Indagar en los aspectos lógicos y epistemológicos de las estrategias de resolución de problemas y sus estrategias

2. Examinar el modo en que las prácticas bien establecidas con su interacción, posibilitan la elaboración y el desarrollo de estrategias de resolución de problemas rigurosas e innovadoras.

3. Elucidar cómo se determina el rigor de los argumentos que despliegan las estrategias de resolución de problemas que se caracterizan por contener diferentes prácticas inferenciales

4. Elaborar un esquema o modelo para el estudio de las estrategias en contextos específicos de resolución de problemas que incluya los resultados relativos a los objetivos anteriores

5. Estudiar las estrategias de resolución de problemas desplegadas por Wallis en las diferentes proposiciones de AI

6. Examinar el carácter innovador del método de cálculos de cuadraturas y su relación con la interacción que se establece entre la práctica geométrica y la algebraica

HIPÓTESIS

(a) La posibilidad de brindar caracterización de las estrategias que articule las dimensiones lógicas y epistemológicas viene dada por un rasgo fundamental de las pruebas matemáticas que es su heterogeneidad discursiva

(b) La noción amplia de inferencia de Larvor, definida como acción sobre diferentes objetos – incluidas representaciones matemáticas especializadas - , es complementaria con la de experiencia matemática de Grosholz, esta última definida en términos de procedimientos de uso y transformación de representaciones

(c) El conocimiento establecido, disponible en las diferentes prácticas, es un elemento fundamental en la dinámica de resolución de problemas

3. Metodología

Nuestra investigación se inserta dentro de la filosofía de la práctica matemática combinando la reflexión filosófica con el estudio de casos históricos. La metodología a utilizar será de tipo conceptual para el abordaje de los objetivos relativos a la caracterización de las estrategias de resolución de problemas y la elaboración de un esquema para su examen en contextos específicos[3]. Procederemos allí con el relevamiento, examen y confrontación de la bibliografía pertinente sobre el tema, su análisis crítico y la evaluación comparativa de los argumentos, presupuestos, conceptos y métodos.

Por otra parte, emplearemos metodología de tipo histórico para la consecución de los objetivos relativos al estudio de las estrategias de resolución de problemas que llevaron a Wallis a la

[3]Segundo objetivo general y objetivos específicos (1-4).

elaboración de su método de cálculo de cuadraturas[4]. Para nuestro estudio histórico, partimos de tomar como objeto de análisis los textos que contienen los argumentos donde Wallis despliega las estrategias para la resolución de problemas de cuadraturas. Específicamente, focalizaremos en una serie de proposiciones de *Arithmetica Infinitorum* utilizando para nuestra investigación, la traducción al inglés realizada por la historiadora Jacqueline Stedall, reseñada en la bibliografía como Wallis (2004). Además del estudio de los textos fuente, incluímos también bibliografía de comentadores cuyos estudios se encuentran circunscriptos a este trabajo de Wallis. Nuestro estudio histórico considera los argumentos en su idioma matemático original, en el sentido que no apelamos a reconstrucciones formales o a re-formulaciones en términos o representaciones contemporáneos[5]. Por último, el abordaje histórico de nuestro estudio de caso es puesto luego en relación con las consideraciones conceptuales.

4. Estructura de nuestra investigación

Nuestro trabajo se encuentra dividido en dos partes: la primera de ellas titulada "Exploración matemática e inferencia", está dedicada a las cuestiones conceptuales de nuestra investigación. El capítulo 1 presenta la epistemología de la matemática estándar, asociada a enfoques filosóficos de los fundamentos. En este capítulo señalamos ciertos presupuestos y limitaciones que serán discutidos en nuestro segundo capítulo. Seguidamente, dedicamos el capítulo 2 al análisis de enfoques situados dentro de la filosofía de la práctica matemática, que se caracterizan por su rechazo del modelo del conocimiento matemático y de la resolución de problemas brindado por la perspectiva de la derivación formal. A través de una evaluación de las propuestas de los autores considerados en esta parte, destacamos los que, entendemos, resultan en aportes sustanciales para una caracterización de las estrategias de resolución de problemas que llevan a resultados innovadores, en tanto que permiten resaltar los aspectos epistemológicos y lógicos fundamentales de las mismas. El capítulo 3, que cierra la primera parte de nuestra investigación, aborda el objetivo de elaborar un esquema de análisis de las estrategias en contextos específicos de resolución de problemas.

La segunda parte de nuestro trabajo, titulada "Innovacion en Wallis(1656)", se encuentra dedicada al estudio de las estrategias de resolución de problemas que llevaron a Wallis a la

[4] Primer objetivo general y objetivos específicos (5 y 6).

[5] De igual manera, dejamos de lado consideraciones relativas a la historia externa, esto es, contexto político, sociológico, etc. como determinantes de la innovación de Wallis.

elaboración del método de cálculo de cuadraturas publicado en AI. Esta segunda parte de la tesis consta de dos capítulos: el capítulo 4, que constituye una primera aproximación a nuestro estudio de caso donde presentamos los principales aportes de los que se nutre el método de Wallis y su estructura argumentativa. Luego, focalizando en una serie de proposiciones de AI, veremos el método de Wallis en acción con la resolución de problemas de cuadraturas de curvas específicas y, finalmente, la extensión de su aplicación a tipos de curvas. En capítulo 5 profundizamos en nuestro estudio de caso y examinamos la resolución de los problemas considerados en el capítulo anterior, a la luz del esquema elaborado en la primera parte de nuestro trabajo. Este examen focalizará por un lado, en las herramientas representacionales provenientes de diferentes prácticas desplegadas y combinadas en AI y, por otro, en las nuevas acciones inferenciales posibilitadas por tales herramientas. Tal estudio nos permitirá identificar en qué reside el carácter innovador del método de cuadraturas de Wallis en el contexto de la interacción entre aritmética y geometría.

Parte I

EXPLORACIÓN MATEMÁTICA E INFERENCIA

Capítulo 1

La visión estándar del conocimiento matemático

Desde la antigüedad ha prevalecido una visión de la matemática como ciencia deductiva que obtiene sus resultados por derivaciones a partir de axiomas y definiciones. Esta concepción se ha visto exacerbada por los enfoques fundacionistas de principios del siglo XX que terminaron por definir como objetos legítimos de reflexión filosófica los fundamentos lógicos de los sistemas axiomáticos. En consonancia con esta visión, muchos autores han llegado a afirmar que esta metodología agota todas las actividades matemáticas más significativas desde el punto de vista epistemológico que remite al interés en las pruebas de los resultados obtenidos. A lo largo de este capítulo examinaremos brevemente los presupuestos que subyacen a esta visión y que han predominado y direccionado la reflexión filosófica estableciendo una agenda y una metodología canónica para la epistemología de la matemática contemporánea. No pretendemos aquí hacer un recorrido histórico detallado, tampoco discutir trabajos específicos que podamos situar dentro de esta línea de reflexión filosófica. Nuestro objetivo aquí es simplemente mostrar cómo la agenda epistemológica delineada por la visión estándar lleva a una caracterización de la resolución de problemas que precisa ser revisada.

1.1. Excepcionalidad epistémica en la filosofía fundacionista de la matemática

Precisión, certeza y objetividad constituyen, sin lugar a dudas, calificativos que más frecuentemente suelen aparece cuando se reflexiona acerca de la matemática y el conocimiento que produce. Podríamos pensar que estas características forman parte, pero no van más allá, de una visión de sentido común de la disciplina. Sin embargo, podemos encontrar en filósofos y también matemáticos afirmaciones en consonancia con estas características definitorias. Entre esas afirmaciones destacamos, por ejemplo, aquella que sostiene que el conocimiento matemático es independiente de la experiencia sensorial. En continuidad con la anterior, también hallamos quienes sostienen que los enunciados matemáticos son objetivamente verdaderos o falsos, que una vez establecido un resultado mediante una prueba no quedan dudas acerca de su validez y, en ese sentido, que el conocimiento matemático es acumulativo y no revisable. Los elementos mencionados anteriormente han sido planteados, palabras más palabras menos, tanto por filósofos como por matemáticos, a lo largo de la historia. Nuestro interés no está puesto en hacer un reconto de las afirmaciones que durante siglos han estado presentes en la literatura sino más bien, mostrar el modo en que estas características han moldeado y establecido un canon de reflexión epistemológica sobre la matemática que precisa ser cuestionado en profundidad.

Cuando a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, con la así llamada "crisis de los fundamentos", se produjo un *revival* de la reflexiones sobre la matemática, el objetivo principal estuvo orientado a restaurar y asegurar la certidumbre de la disciplina. De esta manera, entendemos que la epistemología de la matemática misma, entendida como reflexión sistemática, parte de esta visión estándar de la matemática y del conocimiento que produce. Con respecto a esta visión estándar, notemos que todos los rasgos que se adscriben a la matemática la divorcian de las demás ciencias, de suerte que la matemática aparece como una "excepción epistémica" (Buldt *et al.*, 2008).

Este carácter de excepcionalidad epistémica que ubica a la matemática en un lugar especial con respecto a las otras disciplinas, parece desprenderse de su metodología particular que reside justamente en el empleo de pruebas. La matemática utiliza la prueba matemática que confiere a sus resultados la certidumbre y objetividad matemática de la que otras ciencias carecen. En consonancia con ello, el enfoque epistemológico surgido a partir de la crisis de los fundamentos puso en el centro de atención a las pruebas matemáticas. Asimismo, el enfoque de los fundamentos tiene como rasgo característico la incorporación de la recientemente desarrollada lógica simbólica. Ambos elementos conducen a un abordaje filosófico orientado al estudio lógico de los lenguajes matemáticos que focaliza en el análisis de las pruebas y en el establecimiento de sistemas axiomáticos apropiados, con el objetivo de dotar a la matemática de fundamentos sólidos. El peso puesto en la búsqueda de fundamentos sólidos para la matemática limitó las consideraciones epistemológicas a la justificación de los resultados matemáticos, que tuvo como consecuencia para la caracterización de las pruebas matemáticas, como veremos en la próxima sección, que ellas fueran identificadas con una derivación en un sistema formal. Tal identificación tiene consecuencias fundamentales para el abordaje epistemológico de la resolución de problemas y sus estrategias que analizaremos en la próxima sección.

1.2. La resolución de problemas desde la visión estándar

A partir de lo que hemos expuesto en la sección anterior, examinaremos aquí la caracterización de las estrategias de resolución de problemas que se deprende de la visión estandar del conocimiento matemático. Esta caracterización concibe la resolución de problemas desde el punto de vista de su relación con las pruebas matemáticas, entendidas como derivaciones formales en el marco de la elaboración de sistemas deductivos sólidos. Una expresión paradigmática de esta concepción la podemos encontrar en Hilbert, quien al inicio de su célebre conferencia de 1900 para el *II congreso de Internacional de matemáticos* reconoce la centralidad de los problemas y su resolución satisfactoria para el avance de la investigación matemática:

> The deep significance of certain problems for the advance of mathematical science in general and the important role which they play in the work of the individual investigator are not to be denied. As long as a branch of science offers an abundance of problems, so long is it alive; a lack of problems foreshadows extinction or the cessation of independent development. Just as every human undertaking pursues certain objects, so also mathematical research requires its problems. (Hilbert, 1902, p. 438)

A partir del reconocimiento del rol fundamental que los problemas tienen para el desarrollo del conocimiento matemático, un elemento importante a considerar son las estrategias que permiten su resolución. Sin embargo, antes de considerar en qué consisten tales estrategias, Hilbert plantea una cuestión más de fondo: esto es, qué constituye una solución satisfactoria a un problema. En efecto, este es un punto fundamental en tanto que los requisitos para considerar satisfactoria una solución determinan el modo en que se caracterizan las estrategias de resolución. Hilbert nos dice que un problema se encuentra satisfactoriamente resuelto, cuando la solución puede ser derivada en un número finito de pasos y denomina esta exigencia para la perfecta solución de un problema el "requisito de rigor en la prueba" [1]. A partir de lo anterior,

[1] [...] it shall be be possible to establish the correctness of the solution by means of a finite number of steps

Hilbert entiende que la investigación matemática consiste en una "exploración axiomática" que tiene por objeto investigar los principios que subyacen a ciertas ideas a fin de establecerlas en un sistema axiomático deductivo:

> [s]eeking to determine the position of theorem within the system of known truth together with their logical connections, in such a way that it can be clearly said which conditions are necessary and sufficient for giving a foundation of this truth (Citado en Cellucci, 2017, p. 191)[2]

De esta manera, las estrategias consideradas relevantes serán aquellas que permitan insertar un resultado en un sistema deductivo, esto es, aquellas que nos permiten ofrecer un fundamento lógico del resultado.

El énfasis en la fundamentación de los resultados, propio de la perspectiva estándar, expresado en el requisito de rigor en la prueba de Hilbert, se ve exacerbado durante el siglo XX, cuando el requisito de derivar deductivamente los resultados se transforma en el requisito de rigor moderno de derivación de los resultados en un sistema formal[3]. La exigencia de prueba formal agrega al requisito de rigor previo dos elementos, por un lado, un lenguaje formal que permita expresar cualquier proposición matemática por medio de una fórmula, codificada simbólicamente, y por otro, un conjunto de reglas de inferencia que especifican los pasos admitidos para pasar de una fórmula a otra.

Desde esta perspectiva se sostiene que las pruebas matemáticas que encontramos en la práctica son meras abreviaciones o indicaciones de una derivación formal[4]. El enfoque de la derivación formal, como destacan Buldt *et al.* (2008, p. 310), "suprime cualquier cuestión epistemológica acerca de las pruebas informales postulando que, por cuestiones filosóficas, la diferencias entre las pruebas reales y las derivaciones formales pueden ser ignoradas". La idea en este punto es que los aspectos epistemológicos fundamentales pueden ser perfectamente capturados por medio de la derivación formal y abordados por medio de un tratamiento que focalice en sus aspectos lógicos[5].

A partir de lo desarrollado, tenemos que desde el enfoque de la derivación formal la solución

based upon a finite number of hypotheses. [...] This requirement of logical deduction by means of a finite number of processes is simply the requirement of rigor en reasoning (Hilbert, 1902, p. 441).

[2]El fragmento original corresponde a (Hilbert, 1903, p. 50), aunque podemos hallar una formulación similar en la conferencia de París: (Hilbert, 1902, p. 442).

[3]Cfr. (Kitcher, 1984), (Detlefsen, 2005).

[4]Cfr. Azzouni (2004, 2009) y Avigad (2020).

[5]Analizaremos esta cuestión en detalle en el próximo capítulo, principalmente en secc. 2.3

de un problema, entendida como un teorema, constituye una línea en un secuencia de fórmulas de un lenguaje formal que es obtenido a partir de axiomas o principios por medio de reglas de inferencia lógicamente válidas, donde la validez es de carácter sintáctico, en tanto que las reglas indican cómo transformar una fórmula, o conjunto de fórmulas, en otra fórmula sin atender a su significado. Esto dio lugar a un tratamiento puramente lógico-formal que sólo considera las pruebas como derivaciones en un sistema formal como únicos objetos legítimos de análisis filosófico. Tal tratamiento se destaca por la particularidad de que ambos elementos se encuentran codificados de manera simbólica y dejando de lado el recurso a otras formas de representación y a inferencias que no constituyen derivaciones formales rigurosas que puedan jugar un rol fundamental en la resolución de problemas. Esta es una entre varias limitaciones del enfoque estándar, que los críticos han señalado y que presentaremos sucintamente en la próxima sección.

1.3. Los críticos: filosofía de la práctica matemática

La visión estándar del conocimiento matemático ha sido predominante en la filosofía de la matemática, sin embargo a mediados del siglo pasado comenzaron a aparecer enfoques críticos. Entre los trabajos críticos iniciales y auténticamente pioneros podemos mencionar los trabajos de Pólya (1954, 1973, 1981) y Lakatos (1977), que subrayan el papel central del razonamiento plausible en la experiencia matemática, *vis-à-vis* el ideal de rigor deductivo a la base del enfoque estándar. Estos y otros escritos terminaron por inaugurar una tradición alternativa a la ortodoxa, denominada por Kitcher y Aspray (1988, p. 17) "the maverick tradition". Como destaca Mancosu (2008, p.5) los tres elementos que caracterizan a esta vertiente crítica son en primer lugar un antifundacionalismo: consideran que la matemática es una actividad que está lejos de ser infalible y, por tanto, no hay un fundamento último. En segundo lugar, un rechazo al logicismo, entendiendo que la lógica no provee las herramientas apropiadas para un análisis adecuado de la matemática, su desarrollo y práctica investigativa[6]. Por último, proponen atender a la práctica matemática sosteniendo que ciertas problemáticas filosóficas no pueden ser abordadas sin apelar a la consideración y el análisis de porciones importantes de la matemática en su propio contexto.

El surgimiento de los enfoques críticos del paradigma filosófico dominante a mediados del siglo XX terminaron por inaugurar y consolidar la así denominada "filosofía de la práctica"[7].

[6] No profundizaremos en estos tres elementos en este trabajo, sólo cabe mencionar que los diferentes autores pertenecientes a la línea crítica adhieren en diferente medida a cada una de estas tesis.

[7] No daremos una presentación detallada de esta perspectiva, una presentación de ese tipo puede encontrarse en (Mancosu, 2008, Cap. Introducción), (Larvor, 2016, Cap. Introducción) y (Carter, 2019).

Este es un movimiento crítico de relativamente reciente formación, si tenemos en cuenta las tendencias históricamente dominantes en las reflexiones filosóficas sobre la matemática. Ella surge como respuesta a la perspectiva estándar y sus ideas preconcebidas sobre qué es la matemática, que se vieron exacerbados por los enfoques fundacionistas de principios del siglo pasado y que terminaron por definir una agenda restrictiva de cuestiones y criterios filósoficos. Los aportes dentro de la filosofía de la práctica matemática se separan en diferentes grados de la perspectiva estándar, pero todos ellos coinciden en afirmar la necesidad de focalizar en la matemática tal como la encontramos en la práctica del matemático. Con esto último como objetivo, incorporan consideraciones provenientes desde otras disciplinas como la historia, la psicología, sociología, etc. desplazando a la lógica de un rol preponderante. Si bien esta dinámica resultó en una revitalización de esta área filosófica, se generan dudas respecto a la posibilidad de dar con una perspectiva unificada, como su predecesora, dada la variedad de trabajos y forma de abordar las cuestiones. Finalmente, se plantea la pregunta si la búsqueda de una perspectiva unificada debería ser un objetivo.

Nuestra investigación toma como punto de partida, el debate sobre el desarrollo del conocimiento matemático en su relación con la actividad de resolución de problemas. Entendemos que la temática elegida no puede ser abordada satisfactoriamente por el enfoque estándar, en primer lugar, por su énfasis exclusivo en la justificación de los resultados, en detrimento de la producción de los resultados. Por otro lado, porque ese enfoque no considera aspectos fundamentales de la actividad de resolución de problemas como lo es el desarrollo y uso de diversas notaciones matemáticas especializadas, ya que restringe sus consideraciones a lenguajes lógicos formales. Entendemos que un abordaje satisfactorio requiere atender a los contextos específicos de resolución de problemas por lo que dada la temática elegida, nuestro trabajo recuperará aportes provenientes de la así llamada "filosofía de la práctica matemática". Dada la vastedad de trabajos dentro esa línea, en el próximo capítulo nos focalizaremos en tres trabajos dentro de esta línea que analizan o permiten analizar las estrategias de resolución en su especificidad, sin relegarlas a las tareas de fundamentación. Entendemos que estos trabajos constituyen aportes fundamentales para el tratamiento de la resolución de problemas en relación al desarrollo del conocimiento matemático tal como venimos planteando.

Capítulo 2

El enfoque crítico: matemática y resolución de problemas

Dedicamos el capitulo anterior al examen de los presupuestos que subyacen a la que denominamos "visión estándar del conocimiento matemático". Señalamos, además, el modo en que estas pre-concepciones moldearon la reflexión filosófica y mencionamos algunas limitaciones para el tratamiento de la resolución de problemas y sus estrategias. Todos estos aspectos apuntan a la necesidad de revisar la perspectiva estándar y orientarnos hacia otras perspectivas que nos permitan abordar de un modo más satisfactorio la resolución de problemas. Sin embargo, antes de encarar esta tarea, es necesario que realicemos una serie de precisiones respecto a cuál será el marco de nuestra investigación.

En el ámbito de la epistemología de la matemática, y también en la epistemología general, podemos identificar dos líneas principales de trabajo: por un lado aquellas que toman como objeto de análisis las teorías y, por otro lado, las que focalizan en los agentes[1]. Nuestra investigación viene a situarse en una suerte de tercera vía, para ilustrarla consideremos por un momento el trabajo de José Ferreiros de 2015, *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*, que retoma elementos de las dos primeras líneas. Ferreirós (2015, Cap. 1) sostiene que el conocimiento matemático es mejor caracterizado como un red interconectada de diferentes prácticas, algunas más básicas y otras más sofisticadas. Además, Ferreirós (2015, p. 3) afirma, en primer lugar, que esas prácticas son sostenidas por agentes que viven en el mundo y están sujetos a limitaciones cognitivas. Por otro lado, su trabajo también incluye, situándose más cerca de las

[1]En la literatura filosófica anglosajona se suele referir a la primera como "logic-based epistemology", en tanto que – como ya observamos en el primer capítulo - el estudio de las teorías desde la epistemología estándar se orienta al estudio de los fundamentos lógicos de las teorías. A la anterior se contrapone la "agent-based epistemology" orientada a la consideración de la base cognitiva de los agentes. Para esta distinción en el ámbito de la filosofía de la matemática veáse (De Toffoli y Giardino, 2016) y (Carter, 2019).

perspectivas epistemológicas tradicionales, consideraciones acerca de las teorías matemáticas. De esta manera, Ferreirós dedica el sexto capítulo de su trabajo a explicar cómo la teoría de los números reales fue relevante para establecer los fundamentos de la teorías de conjuntos, con la salvedad que aduce que la objetividad de la teoría de conjuntos reside, en ultima instancia en prácticas más básicas, y esas prácticas más básicas se fundamentan en la base cognitiva del agente. De esta manera, las consideraciones epistemológicas se mueven entre estos dos polos que son las teorías y los agentes. Entendemos, sin embargo, que uno de los puntos más interesantes, y tal vez el menos explorado por Ferreirós (2015), se refiere a una serie de cuestiones situadas entre estos dos extremos. Esas cuestiones se encuentran atadas a las herramientas representacionales que los matemáticos desarrollan y que dotan de estabilidad a la diferentes prácticas[2]. Así, destaca que la interacción de las prácticas - estabilizadas por las herramientas simbólicas - impone restricciones a la hora de introducir axiomas, evaluar una solución putativa de un problema, desarrollar nuevas técnicas, etc., haciendo que la objetividad del conocimiento resulte de la interconexión de las diferentes prácticas.

Sirva esta somera, y en extremo simplificadora, presentación del enfoque de Ferreirós (2015), para ilustrar el contrapunto entre dos tendencias epistemológicas: una centrada en los aspectos cognitivos de los agentes y otra en las teorías, para resaltar la existencia un tercer ámbito poco explorado. Es justamente al estudio de este ámbito y sus cuestiones, al que nos abocamos en este trabajo. De esta manera, nuestra investigación parte de considerar la interacción entre diferentes áreas de la matemática, constituidas en diferentes prácticas con sus herramientas, como un rasgo fundamental de la disciplina. A partir de esto último, nos planteamos la pregunta acerca de cómo la interacción entre diferentes prácticas, cada una de las cuales impone restricciones, constituye la base, no sólo para garantizar el rigor de sus resultados, sino también para la innovación. Además, entendiento que la resolución de problemas es el elemento que motiva la interacción entre prácticas, formulamos el objetivo de nuestra investigación como el estudio de las estrategias de resolución de problemas que llevan a resultados innovadores.

Atendiendo a este objetivo, en el presente capítulo nos proponemos analizar una serie de enfoques críticos que entendemos, se sitúan dentro de esta vía poco explorada en epistemología de la matemática. El estudio crítico de estas perspectivas nos permitirá avanzar en la elaboración de un modelo satisfactorio para la caracterización de las estrategias de resolución de problemas.

[2]El autor denomina “marcos simbólicos” a estos elementos de las prácticas (Ferreirós, 2015, p. 46-47)

2.1. Carlo Cellucci : Método analítico y reglas de descubrimiento

Carlo Cellucci se ha enfocado en desarrollar y presentar una perspectiva filosófica alternativa a la axiomática. Su perspectiva parte de considerar la actividad matemática como resolución de problemas resaltando su capacidad para ampliar el cuerpo del conocimiento matemático. Los resultados de sus trabajos han sidos presentados en dos libros recientes: *Rethinking Logic: Logic in Relation to Mathematics, Evolution and Method* (2013) y *Rethinking Knowledge. The heuristic view* (2017). La tesis principal desarrollada por Cellucci es que la matemática consiste fundamentalmente en la resolución de problemas que procede a través del método analítico, el cual entiende en los siguientes términos:

> [...] the method according to which, to solve a problem, one looks for some hypothesis that is a sufficient condition for solving it. The hypothesis is obtained from the problem, and possibly other data already available, by some non-deductive rule, and must be plausible [...]. But the hypothesis is in its turn a problem that must be solved, and is solved in the same way. [...] And so on, ad infinitum. Thus solving a problem is a potentially infinite process. (Cellucci, 2013, p. 55)

A partir de esta formulación podemos observar algunos elementos en clara contraposición con la visión axiomática: en primer lugar, para Cellucci la actividad primaria del investigador matemático es la resolución de problemas, no la construcción de teorías. En consonancia con lo anterior, el punto de partida son los problemas a resolver, a partir del cual se plantean hipótesis para su resolución en vez de axiomas o principios desde los que se debe derivar deductivamente la solución de un problema. Esto le permite considerar las estrategias de resolución de problemas en su especificidad y no subordinadas a la fundamentación de los resultados. El foco del análisis no está puesto en insertar la solución de un problema en una estructura deductiva sino en el análisis de las inferencias no-deductivas que permiten la obtención de hipótesis. Así mientras que el enfoque axiomático sólo considera las inferencias deductivas, Cellucci se centra en las inferencias no-deductivas que le confieren a la resolución de problemas su carácter ampliativo. Otro punto a destacar es el carácter local de la resolución de problemas: las hipótesis son formuladas a partir del problema y otra información disponible, lo cual supone atender al contexto en el que se plantea el problema y al conocimiento disponible más allá de las consideraciones puramente sintácticas propias de la formalización axiomática. En pocas palabras, la perspectiva de Cellucci caracteriza la investigación matemática como un proceso abierto basado en hipótesis que son revisables y obtenidas a partir de inferencias no deductivas, donde el punto de partida son los problemas a resolver en clara contraposición con el enfoque ortodoxo que presenta una visión de la investigación matemática como un sistema cerrado por axiomas.

2.1.1. Método analítico

Una vez caracterizada la actividad matemática en términos de resolución de problemas Cellucci se ocupa del estudio de las "reglas de descubrimiento" que permiten la obtención de hipótesis plausibles, dirigiendo su atención a las inferencias no deductivas. La importancia de las reglas de descubrimiento, como ya mencionamos, viene dada porque para Cellucci estas son las que otorgan el carácter ampliativo a la resolución de problemas. Entendemos que la caracterización de Cellucci de la investigación matemática apunta a la dirección correcta en tanto incluye elementos fundamentales antes excluidos de la reflexión filosófica. Sin embargo, estimamos que el excesivo énfasis que el autor otorga a las inferencias no-deductivas termina por dotar de algunas limitaciones a su enfoque. En primer lugar, entendemos que por atribuirles un lugar central a las inferencias no-deductivas tiene dificultades para explicar el rol de las inferencias deductivas en la práctica investigativa sosteniendo que estas no tienen ningún papel[3]. Una segunda limitación que encontramos, y de la que nos ocuparemos en el resto de la sección, tiene que ver con que el hecho que el autor si bien reconoce el carácter local de la resolución de problemas en su presentación de las así llamadas reglas de descubrimiento no profundiza en este aspecto.

2.1.2. Reglas de descubrimiento

La presentación de las reglas de descubrimiento tiene lugar en la cuarta y última parte de su libro *Rethinking Logic* (2013). A lo largo de dos capítulos Cellucci se ocupa de la inducción, analogía, generalización, metonimia y diagramas, entre otras reglas[4]. Para la presentación de las reglas el autor procede en cuatro etapas[5]:

(1) Descripción de en qué consiste la regla

[3] Su posición sobre la deducción en el marco de su proyecto filosófico puede hallarse en (Cellucci, 2013, Cap.17) y (Cellucci, 17 b, Cap.10). Por otro lado, (Cellucci, 017c) ofrece un interesante contraposición con Hersh que es útil para considerar esta limitación.

[4] (Cellucci, 2013, pp. 331-364).

[5] La presentación de las reglas consisten siempre de estos cuatro pasos, para algunas reglas se hacen consideraciones adicionales tendientes a mostrar algunas ideas que considera equivocadas de los enfoques previos.

(2) Presentación esquemática

(3) Ejemplo de aplicación de la regla

(4) Patrón argumentativo

Si bien la presentación inicial es satisfactoria, en el segundo paso empieza a presentar dificultades. El esquema de las reglas se organiza en premisas y conclusiones, en la parte superior se sitúan las premisas y en la parte inferior la conclusión. La conclusión expresa la hipótesis obtenida a partir de la aplicación de una regla, esta última representada por una barra horizontal que separa las premisas de la conclusión. Para todo lector que haya tenido algún contacto con textos elementales de lógica, los esquemas son similares a aquellos que presentan las reglas de inferencia lógicamente válidas. Recordemos que para el caso de las reglas lógicamente válidas, la validez depende de la forma a través de la cual la lógica se ocupa de esquemas de argumentos. Así, al reemplazar las fórmulas de un esquema válido a través de una instancia obtenemos otra instancia que también es válida. Para el caso de reglas no-deductivas esto último no se cumple de ningún modo, por lo que cabe preguntarse por la utilidad de tal presentación esquemática. En defensa de Cellucci podemos hacer unas aclaraciones con respecto al esquema, por ejemplo, podemos destacar que la línea que separa las premisas de la conclusión (hipótesis) no representa un paso deductivo sino la aplicación de una inferencia no-deductiva. Sin embargo, más precisiones deben hacerse al respecto para que el esquema sea útil. Tomemos la regla de "analogía por cuasi-igualdad" [6] que presenta el siguiente esquema:

$$(\mathrm{AQE})\frac{a \cong b \quad A(a)}{A(b)}.$$

Figura 2.1: Regla de cuasi-igualdad

En el esquema se consideran dos objetos a y b, que no son idénticos, pero están muy próximos entre sí, esta constituye la primer premisa. La segunda premisa es que el objeto a, posee una propiedad A, a partir de la regla (AQE) podemos inferir la hipótesis de que el objeto b posee la propiedad A. Para que el esquema sea ilustrativo de cómo funciona la regla se deben introducir algunas aclaraciones, en primer lugar, que la propiedad A considerada en el esquema sea efectivamente relevante para la resolución del problema. En segundo lugar, para determinar que los

[6] Cellucci (2013) presenta y se ocupa de esta regla en la sección 20.6

objetos están muy próximos sin ser idénticos ($a \cong b$ en el esquema) se debe señalar nuevamente que están próximos en relación a las propiedades relevantes para la resolución del problema. Ambas aclaraciones nos llevan directamente al contexto mismo del problema a resolver de modo que la presentación en abstracto mediante esquemas no resulta útil.

A fin de ilustrar la obtención de hipótesis a partir de estas reglas de descubrimiento, en la tercera etapa de la presentación, Cellucci introduce un ejemplo. Continuando con la regla de analogía por cuasi-igualdad el ejemplo considerado es el descubrimiento de Antifonte de que el área del círculo de circunferencia c y radio r, es igual al área del triángulo con base c y altura r, esto es, $\frac{1}{2}cr$). No desarrollaremos en detalle el ejemplo, nos basta aquí con recordar los elementos ya mencionados arriba. El problema a resolver es determinar el área del círculo con respecto al área de un polígono inscripto. Los objetos considerados son: a polígno n-lados inscripto en un círculo b. La propiedad A corresponde a las áreas de donde resulta:

- Premisa 1: $A(a)$, área del polígino inscripto a
- Premisa 2: $a \cong b$, cuasi igualdad entre a y b para un n lo suficientemente grande
- Conclusión: $A(b)$, expresa la hipótesis que resuelve el problema

Atendiendo a las aclaraciones que hicimos arriba, las propiedades relevantes a considerar son:A, área del polígono obtenida a partir de la relación entre base y altura del polígono y $a \cong b$, aproximación que se cumple para un n lo suficientemente grande, donde se mantienen las relaciones entre base y altura del polígono inscrito. Estas propiedades relevantes son las que permiten satisfacer las condiciones de resolución del problema.

El ejemplo de aplicación de la regla de analogía por cuasi-igualdad muestra el planteo del problema haciendo explícitas las condiciones que una hipótesis debe satisfacer a fin de resolver el problema planteado, del mismo modo, permite visualizar cuáles son las propiedades relevantes para la resolución del problema. Si bien podemos afirmar que la presentación de la regla de cuasi-igualdad mediante un ejemplo es más satisfactoria que su presentación esquemática, sigue presentando dificultades. A saber, en el ejemplo considerado para que la hipótesis pueda resolver el problema planteado tienen que cumplirse las premisas 1 y 2, de las cuales al menos la segunda es problemática. El establecimiento de $a \cong b$ en el descubrimiento de Antifonte constituye el elemento principal para la obtención de la hipótesis que resuelve el problema.

La posibilidad de establecer proporciones entre figuras curvilíneas y polígonos supone en la resolución de Antifonte procedimientos para la construcción de polígonos inscriptos mediante la bisección de sus lados. Del mismo modo, recurre a una teoría de proporciones que permita relacionar el área de ambas figuras. Con respecto a esto último, es importante destacar que el ejemplo considerado por Cellucci es previo al desarrollo de la teoría de proporciones de Eudoxo que está a la base de lo que posterioremente se denominó "método de exhausción" y del cual el aporte de Antifonte se considera un antecedente[7]. La teoría de proporciones de Eudoxo vino a subsanar precisamente ciertas dificultades asociadas a la aparición de cantidades inconmensurables cuando se intenta comparar, por ejemplo, figuras curvílineas y polígonos. A fin de mostrar cómo se infiere la hipótesis para la resolución del problema es necesario atender a los procedimientos de construcción de figuras, la teoría de proporciones utilizadas y su relación con las cantidades inconmensurables, etc. Por otro lado, pero relacionado con lo anterior, la introducción de terminología contemporánea, por ejemplo la referencia a un "n lo suficientemente grande", hace que en el ejemplo considerado la hipótesis sea inferida a partir de elementos que no estaban disponibles en el contexto donde Antifonte hizo su aporte. A partir de lo anterior, y a fin de arrojar luz sobre las estrategias de resolución de problemas, se hace necesario atender a los procedimientos y herramientas asociados al conocimiento disponible en cuyo contexto la resolución tiene lugar, en tanto que son esos elementos los que permiten justamente la formulación de hipótesis.

2.1.3. Conclusiones

Carlo Cellucci con su concepción del método analítico, intenta dar cuenta de la especificidad de la resolución de problemas que conduce a la formulación de hipótesis plausibles a partir de reglas no-deductivas de inferencia. A lo largo de la sección vimos que para Cellucci el punto de partida de la investigación matemática son los problemas a resolver, a partir de los cuales el matemático formula hipótesis para su resolución y no axiomas o principios a partir de los cuales se deriva formalmente la solución del problema, tal como sostiene la visión axiomática. Es a partir del planteo del problema y de la consideración de otra información relevante que se busca formular hipótesis plausibles. Esto plantea la necesidad de atender al contexto e ir más allá de las consideraciones puramente sintácticas propias del enfoque de la derivación formal. Pero la dependencia de hipótesis a partir del conocimiento disponible otorga a las estrategias

[7] Antiphon therefore deserves an honourable place in the history of geometry as having originated the idea of *exhausting* an area by means of inscribed regular polygons with an ever increasing number of sides, an idea upon which, as we said, Eudoxus founded his epoch-making *method of exhaustion* (Heath, 1921, p.222). Cursivas en el original.

de resolución de problemas, siguiendo a Cellucci, su carácter local. Si bien este es un aspecto fundamental a tener en cuenta para el estudio de las estrategias de resolución, Cellucci no parece interesado en profundizar lo suficiente en su presentación de las reglas. En primer lugar, porque la presentación esquemática no explicita las propiedades relevantes a fin de inferir la hipótesis y resolver el problema. En segundo lugar, la presentación mediante ejemplos, si bien representa una mejora en tanto que permite visualizar las condiciones de resolución del problema, no aborda en mayor detalle el conocimiento disponible en el contexto de resolución. Este abordaje poco satisfactorio resulta de la omisión de los procedimientos involucrados en el contexto de resolución, o bien, por la inclusión de elementos foráneos.

El enfoque de Cellucci nos posibilita una primera aproximación al estudio de las estrategias de resolución de problemas en su especificidad. Sin embargo, dadas las limitaciones que acabamos de señalar, se plantea la necesidad de elaborar un marco de referencia que nos permita visualizar cómo la inferencia de hipótesis plausibles es posible, a partir de procedimientos y herramientas asociados al conocimiento disponible en el contexto mismo en el que se plantea el problema. Estas herramientas y procedimientos explotan características específicas del dominio donde se plantea el problema, así como de otros dominios que puedan estar involucrados en la resolución - la "otra información disponible" que nos menciona Cellucci. En tanto que el conocimiento disponible, con sus herramientas y procedimientos, se encuentran codificados en diferentes lenguajes especializados, una forma de abordar las estrategias de resolución es a través de la consideración de las representaciones utilizadas y desarrolladas por el matemático. En la próxima sección analizaremos la perspectiva de Emily Grosholz que retoma los aportes de Cellucci y los extiende considerando el rol fundamental de las representaciones en la resolución de problemas. El enfoque de Grosholz nos permitirá avanzar en la elaboración de un marco para el estudio de las estrategias de resolución de problemas sorteando las dificultades que hemos hallado en Cellucci.

2.2. Emily Grosholz: Resolución de problemas y experiencia matemática

Con el objetivo de seguir profundizando en la caracterización de las estrategias de resolución de problemas, el segundo enfoque que nos interesa considerar es el de Emily Grosholz, cuyos aportes han sido presentados principalmente en su libro *Representation and productive ambiguity in the mathematics and the sciences* (2007) y más recientemente en *Starry reckoning. Reference and analysis in mathematics and cosmology* (2016). En estos y otros escritos, uno de los objetivos principales de la autora es mostrar de qué manera la resolución de problemas es ampliativa, esto es, cómo posibilita la obtención de nuevo conocimiento.

Grosholz, al igual que Cellucci, defiende la tesis de la centralidad de la resolución de problemas, por sobre la construcción de teorías, para la investigación matemática. Ambos consideran que los enfoques filosóficos orientados a los fundamentos han brindado una visión distorsionada de la matemática al conferir importancia sólo a las actividades requeridas para la construcción sistemática de teorías y sin considerar las estrategias de resolución en su especificidad. Tal como observamos en la parte de nuestro trabajo dedicada a la visión estándar del conocimiento matemático (Cap. 1) las propuestas que parten de dicha imagen, y particularmente aquellas que pueden englobarse dentro de lo que denominamos el "paradigma de la derivación formal", entrañan varias consecuencias. Una de ellas es la adscripción de un estatus epistémico especial a la matemática, en tanto generadora de conocimiento no-causal que versa sobre entidades no situadas espacio-temporalmente y que son investigadas a través de métodos formales (derivación formal). Esta metodología *sui generis* que le da su estatus especial la divorcia de las demás ciencias. Otra consecuencia, pero no desligada de la anterior, es la correspondiente orientación de los abordajes epistemológicos al análisis y establecimiento de fundamentos lógicos sólidos de los sistemas deductivos, donde la lógica formal constituye la herramienta fundamental. Con respecto a la primera consecuencia, tanto Cellucci como Grosholz sostienen, por el contrario, la existencia de continuidad entre la matemática y las demás disciplinas científicas, aunque basando dicha continuidad en distintos elementos que determinan diferentes direcciones para sus proyectos.

La continuidad entre las diferentes formas de conocimiento Cellucci la atribuye a la presencia de la actividad de resolución de problemas en todas las actividades humanas asociada a la posibilidad de generar hipótesis. A la visión estándar que equipara la resolución de problemas a la derivación en un sistema formal, Cellucci contrapone el método analítico que - a través de inferencias no-deductivas - permite obtener hipótesis plausibles que van más allá del planteo del problema. Tal como lo manifiesta en el título de su libro de 2013 *Rethinking Logic* su proyecto se orienta a una reforma de la lógica que ya no debe ser entendida en el sentido restrictivo de la lógica formal, sino ampliada para incluir aspectos metodológicos (2.1).

A diferencia de Cellucci, Grosholz no se plantea como objetivo una reforma de la lógica sino que su proyecto se orienta a brindar una epistemología de la matemática alternativa a la ortodoxa que de cuenta de su especificidad, pero que al mismo tiempo, tenga en cuenta su continuidad con otras disciplinas. Frente a la arraigada visión de la matemática y su desarrollo entendida como ciencia deductiva que obtiene sus resultados por medio de derivaciones formales, Grosholz nos llama la atención respecto a que:

> (t)he outcome of mathematical progress is not always, and perhaps only rarely, an axiomatized system, where solved problems recast as theorems follow deductively from a set of special axioms, logical principles, and definitions.[...] An axiomatic system is not the only model of theoretical unity, and deduction from first principles is not the only model for the location and justification of mathematical results(Grosholz, 2016, p. 46).

Grosholz observa así que la matemática aparece como una colección de problemas resueltos que relacionan diferentes dominios más que, como un conjunto de teorías puestas en relación formal[8]. La relación entre diferentes dominios no es reducible a un compendio de isomorfismos, del mismo modo que los resultados matemáticos no son el mero *output* de una derivación formal. El establecimiento de relaciones entre diferentes áreas de la matemática, que al mismo tiempo mantienen una relativa autonomía, en cuanto a la resolución de problemas, evidencia ser uno de los rasgos centrales de la disciplina. Pero no sólo esto, sino que es indispensable atender a dichas interacciones, pues es justamente en el contexto de estas últimas donde tienen lugar los avances más significativos y los casos más interesantes de resolución de problemas. La tradición filosófica ha interpretado estas relaciones de manera muy restrictiva limitándolas al establecimiento de isomorfismos entre teorías axiomáticas formalizadas. Sin embargo, Grosholz evidencia que los contextos de integración parcial de dominios se distinguen por la presencia ubicua de brechas lógicas que imposibilitan la re-escritura y unificación de la matemática como una sola teoría deductiva, y esto no es cierto sólo de los desarrollos matemáticos previos a la aparición de la lógica

[8]Certain important areas of mathematical activity do not, and may never, lend themselves to axiomatization or to axiomatization in the language of first order predicate logic; they exist rather as a collection of solved and unsolved problems about certain kinds of mathematical objects. (Grosholz, 2000, p. 81)

formal a finales del siglo XIX, sino también de muchos de los desarrollos contemporáneos. Esto lleva a Grosholz a plantear la necesidad de abandonar los abordajes epistemológicos orientados a la búsqueda de fundamentos lógicos y a la elaboración de una nueva epistemología para la matemática.

En este marco, Grosholz trae a colación la perspectiva de Nancy Cartwright en *The dappled world* dirigida a mostrar que las leyes científicas "no toman la estructura simple, elegante y abstracta de un sistema de axiomas y teoremas [...] lo que sucede es más un resultado de la negociación entre dominios que una consecuencia lógica de un sistema ordenado."[9] La integración parcial entre dominios aparece como un fenómeno relativo tanto a las denominadas ciencias empíricas como a la matemática, exponiendo una profunda continuidad entre ellas. A partir de esta continuidad, Grosholz diagnostica el fracaso de las pretensiones fundacionistas en filosofía de las ciencias y de la matemática, y plantea la tarea ineludible de dar con una nueva epistemología.

Grosholz encuentra en los movimientos de orientación pragmatista en filosofía de las ciencias una propuesta superadora de las perspectivas sintáctica y semántica de las teorías que se constituyeron como los enfoques predominantes en esta rama de la filosofía. Sin entrar en los detalles sobre el desarrollo de estas tendencias predominantes[10], el núcleo de los argumentos esgrimidos por Grosholz sostiene que las limitaciones de estas perspectivas residen, principalmente, en que toman por objeto de análisis las teorías científicas como elementos estáticos, en tanto consideran sus formulaciones como lenguajes formalizados y estructurados axiomáticamente. Incluso las perspectivas semánticas que - motivadas por las limitaciones del enfoque sintáctico - amplían sus consideraciones incorporando la noción de modelo surgida a partir del desarrollo de la semántica formal y la teoría de modelos, parecen contribuir igualmente poco al esclarecimiento de la cuestión de, cómo científicos y matemáticos desarrollan sus conceptos y teorías. La noción acotada de modelo y el consecuente abordaje del vínculo teoría-modelo a partir de la relación de isomorfismo, nos dice Grosholz, plantea importantes dificultades: por un lado, la cuestión de que dada una teoría de primer orden, generalmente existe más de un modelo para dicha teoría, lo cual no permite discernir el modelo específico (intended model). Por otro lado, aún si tuviéramos

[9] Cartwright (1999, p.1) *The dappled world. A study of the boundaries of science*. Cambridge: Cambridge University Press. La traducción es nuestra.

[10] Grosholz (2007, Cap.4, pp.91-123).Un exposición de los detalles del desarrollo de estas tendencias exceden los fines del presente trabajo por lo que nos limitaremos a hacer un bosquejo de los elementos que la autora pone en cuestión ya que acordamos en sus conclusiones relativas a la persistencia de ciertos presupuestos en torno al conocimiento científico en general y la matemática en particular, estos últimos reseñados en el primer capítulo del presente trabajo. Para una exposición de la visión estándar referimos al ya clásico Suppe, F.(1977), *The Structure of Scientific Theories*, Urbana, IL: University of Illinois Press.

un modo de elegir nuestro modelo pretendido habrá teorías poco interesantes que estarán en relación de isomorfismo con este modelo. Ante esto el enfoque en cuestión toma como fijos la teoría y el modelo pretendido[11] que supone, sino la supresión, por lo menos una simplificación excesiva de ciertas cuestiones epistemológicas como: el desarrollo y la elección de las teorías interesantes al considerar sólo una contraparte formal de una teoría suficientemente establecida en la práctica. Otra cuestión es la introducción y caracterización de los objetos de estudio a partir de definiciones que resulten fructíferas, la cual se ve asimismo suprimida, pues se reducen las definiciones a meras estipulaciones que deben ajustarse al modelo pretendido. Por último, la imposibilidad de abordar las cuestiones anteriores en el contexto de la interacción parcial de teorías debido a la simplificación excesiva que supone fijar una sola teoría y un modelo[12].

Partiendo de las críticas a estos enfoques que fueron dominantes en filosofía de la ciencia, diversos autores[13] han señalado que el abordaje ciertas cuestiones epistemológicas sólo es posible a partir del desarrollo de una perspectiva más amplia que considere no sólo las dimensiones sintácticas y semánticas del discurso científico, sino también su dimensión pragmática. Esto es, una perspectiva que focalice en las representaciones en su rol fundamental para el planteo y solución de problemas en su contexto de uso. Este cambio requiere dejar de reducir las representaciones a un mero reporte pasivo y analizarlas en su papel activo en la organización, invención y constitución de conceptos, métodos y teorías. En este marco las reflexiones sobre las prácticas ocupan el centro de la escena en contraposición a las perspectivas previas dedicadas al estudio de (las propiedades lógicas de) las teorías.

Grosholz observa que si bien la inclusión de la dimensión pragmática ha tenido una buena acogida en el estudio filosófico de las ciencias, su adopción en la filosofía de la matemática se ha encontrado con ciertas reticencias. De esta manera, Grosholz (2007, p. 23) señala que autores que han realizado valiosos aportes en esta nueva línea parecen sugerir que aunque el enfoque estándar – principalmente en sus versiones semánticas – no ha resultado ser una perspectiva

[11]Usualmente, una versión formalizada de una teoría informal suficientemente establecida y un modelo estándar para contrarrestar las consecuencias del teorema de Löwenheim-Skolem (Cfr. Ferreirós, 2015, Cap.4).

[12]Nuestro propósito aquí no es evaluar los méritos de esta línea de trabajo cuya vigencia no debe ser puesta en duda sino resaltar ciertas insuficiencias de esta perspectiva para dar una explicación epistemológica satisfactoria de estas y otras cuestiones relacionadas. En particular, para el caso de la matemática encontramos señalamientos similares en trabajos como Manders (1989) y recientemente Ferreirós (2015) que sostienen que los estudios sobre teoría-modelo deben ser suplementados con la consideración de las prácticas donde estos elementos están inmersos.

[13]Cartwright, N., 1983, *How the Laws of Physics Lie*, New York: Oxford University Press. Morgan, M.S. and M. Morrison (eds.), 1999, *Models as Mediators: Perspectives on Natural and Social Science*, Cambridge: Cambridge University Press. Este último trabajo es un volumen que reúne diversos artículos en esta línea que Grosholz recupera en sus diferentes trabajos.

epistemológica satisfactoria para las ciencias, sí lo sería para la matemática[14]. La autora no acuerda con tales afirmaciones, resultantes de presupuestos fuertemente arraigados acerca del conocimiento matemático, y a través de sus trabajos ha venido desarrollando una línea argumental que sostiene que la imposibilidad de brindar perspectivas epistemológicas satisfactorias está ligada, principalmente, a tomar como objeto de análisis al discurso científico en términos de teorías qua lenguajes formalizados. Estos lenguajes se caracterizan por su homogeneidad lo cual contrasta con la inherente heterogeneidad presente en los discursos científicos originada por la interacción y articulación de dominios para la resolución de problemas en ciencia y en matemática.

> Once we look at the history of science (or mathematics) as a series of problems to be solved rather than as a set of completed theories to be set in inferential relation, certain features of the advance of scientific knowledge leap to the eye. Scientific (and mathematical) domains are often constituted around a paradigmatic problem, and just as often this problem proves to transcend the problem-solving abilities of that domain(Grosholz, 2007, p. 101).

La matemática y las ciencias empíricas ambas articulan y desarrollan conocimiento a partir de estas relaciones entre dominios, y es el reconocimiento de este rasgo común el que debe estar a la base de cualquier epistemología de la matemática. De esto se sigue que cualquier enfoque que se apoye en una pretendida “excepcionalidad epistémica”de la matemática verá anulada cuestiones importantes y no podrá dar cuenta de ciertos rasgos fundamentales de la disciplina. Grosholz concluye así que los aspectos que hacen inadecuadas a las perspectivas epistemológicas estándar para el estudio de las ciencias, son los mismos que las hacen inadecuadas también para la matemática. A partir de lo cual, su planteo supone un cambio en el punto de partida de las reflexiones sobre la epistemología de la matemática y en vez de partir de un estatus epistémico especial, propone focalizar en los rasgos comunes con otras disciplinas. Esto tiene como consecuencia no sólo una ampliación de las cuestiones a trabajar, sino también la posibilidad de recuperar aportes provenientes de la filosofía de la ciencias tanto en lo que respecta a sus resultados, como a los modos de estudiar las prácticas científicas. Nos resulta importante destacar que esta modificación en el punto de partida de las reflexiones epistemológicas entraña reconocer cuál es el alcance y las limitaciones de las analogías que pueden ser establecidas entre

[14] Grosholz refiere aquí principalmente a Robin Hendry y Ursula Klein

la matemática y las demás ciencias. Una identificación total de la matemática con las demás ciencias puede ser tan perjudicial como la conservación de los prejuicios epistémicos clásicos. En una actitud contraria a cualquier forma de reduccionismo, Grosholz se distancia de estos dos extremos a través de una atención cuidadosa a las especificidades tanto de la matemática como de las ciencias, que toma la forma en Grosholz (2007 y 2016) de la presencia de estudios de casos de diferentes disciplinas. A través de estos estudios detallados, Grosholz identifica en las prácticas específicas consideradas similitudes fundamentales entre las formas de trabajo en las ciencias empíricas y la matemática. Caso a caso, a través de sus diferentes escritos, Grosholz señala en qué consisten estas similitudes y cuáles son las lecciones filosóficas que podrían extraerse para una epistemología de la matemática. Sin embargo, en tanto que no hay una identificación entre matemática y ciencias, esta no será una extrapolación directa sino que deberá considerar rasgos específicos del quehacer matemático requiriendo una evaluación atenta y constante de los alcances y límites de las analogías establecidas entre las diferentes disciplinas. Sin dudas, el intento de Grosholz de dar con una aproximación epistemológica equilibrada dota de complejidad a su enfoque que parece no ser susceptible de brindarnos afirmaciones generales del tipo que caracterizan a los enfoques previos. Sin embargo, a partir de sus estudios se desprenden dos consecuencias de importancia: la primera de ellas que las similitudes halladas entre las prácticas investigativas en ciencias y en matemática están asociadas al rol fundamental de las representaciones en la resolución de problemas en contextos de interacción de dominios. A partir de allí, se hace posible importar resultados de la filosofía de la ciencia de corte pragmatista que evidencia que este rol fundamental sólo puede ser estudiado en su contexto de uso, esto es, atendiendo a la dimensión pragmática de las representaciones. La segunda consecuencia tiene que ver con ciertas características específicas de la matemática, pues las relaciones entre dominios orientadas a la resolución de problemas muestran tener características distintivas en ciencia y matemática. Las relaciones entre dominios en las ciencias suponen no sólo vincular teorías y conceptos sino también, y esto en principio a diferencia de la matemática, entre diferentes técnicas experimentales ligadas a procesos empíricos orientados a la observación y la transformación de la realidad física. La presencia de procesos experimentales parece marcar una limitación tajante a la analogía ciencias-matemática, sin embargo, Grosholz profundiza en esta dirección y plantea que su objetivo es:

> [...] to move towards an epistemology that works properly for mathematics by taking into account the pragmatic as well as the syntactic and semantic features of represen-

> tation in mathematics[...]. Mathematicians represent, construct and intervene (in a semi-causal way, to be explained) in mathematical reality, as chemists represent nature, construct models on paper and in the lab, and create new molecules (Grosholz, 2007, p.23).

En búsqueda de una epistemología satisfactoria Grosholz afirma que podemos encontrar en matemática procedimientos que se asemejan a, aún cuando no puedan ser totalmente identificados con, los procedimientos experimentales en las denominadas ciencias empíricas. Grosholz sostiene que las diferentes representaciones desarrolladas en matemática (diagramas,tablas, ecuaciones, etc) constituyen las herramientas de trabajo del matemático y - recuperando la noción de Ursula Klein[15] - estas *paper tools* juegan el mismo rol que los instrumentos y artefactos utilizados en los experimentos y observaciones propios de las ciencias empíricas. A fin de caracterizar esta dimensión del quehacer matemático Grosholz plantea la necesidad de desarrollar una noción de "experiencia" que no está atada a procedimientos empíricos del tipo que hallamos en las demás ciencias, sino que debe ser definida en términos del uso, confluencia y transformación de diferentes representaciones – *paper tools* - al servicio de la resolución de problemas.

Como observamos en la sección anterior, el rol fundamental de las representaciones en la resolución de problemas es planteado pero apenas profundizado por Carlo Cellucci, siendo que es un aspecto esencial a tener en cuenta en la caracterización de las estrategias de resolución de problemas que llevan a resultados innovadores. Entendemos que la noción de "experiencia matemática" desarrollada en Grosholz (2007) posee ingredientes que pueden contribuir enormemente a los objetivos del presente trabajo por lo que nos dedicaremos a profundizar en sus alcances y limitaciones en las siguientes secciones[16].

2.2.1. Experiencia matemática

Terminamos la sección anterior señalando que para Grosholz era necesario elaborar una noción de "experiencia matemática", a fin de dar con una caracterización epistemológica adecuada del trabajo matemático. Este objetivo es abordado por la autora en Grosholz(2007) en el capítu-

[15]Groholz realiza numerosas referencias a Klein, U. (2003). *Experiments, models, paper tools : cultures of organic chemistry in the nineteenth century.* Standford University Press, Stanford. Sin embargo, esta noción es introducida y desarrollada en sus aspectos fundamentales en Klein (1999), por lo que retomaremos principamente este trabajo previo.

[16]Hersh (1981, 2014) nos habla de la noción de experiencia, pero como el mismo autor señala, sus textos no tienen como objetivo dar una caracterización filosófica de esta noción.

lo titulado "Analysis and experience"[17], en el cual desarrolla la idea de que la investigación matemática procede por medio del "análisis". Inspirada en Leibniz define el análisis como la "búsqueda de las condiciones de inteligibilidad" distinguiendo tres formas que esta búsqueda puede tomar: en primer lugar, encontramos el análisis de los términos que consiste en "la búsqueda de las razones, los requisitos para que una cosa sea lo que es y pueda ser pensada"(Grosholz, 2007, p. 33). Esta primera forma de análisis es un análisis conceptual el cual, nos dice la autora, no debe ser entendido como desempaquetar el contenido en sus partes sino distinguir, desarrollar o articular su contenido. En segundo lugar, encontramos el "análisis de las proposiciones" que es la búsqueda de las condiciones de resolución de un problema. En consonancia con Cellucci lo caracteriza como una búsqueda que "comienza con un problema a resolver, en base al cual uno formula una hipótesis; la hipótesis es otro problema que, de ser resuelto, constituiría una condición suficiente para la solución del problema original"[18]. La última forma de análisis es el "análisis de los argumentos" que consiste en "la exploración del significado de procedimientos, algoritmos y métodos en términos de problemas paradigmáticos que pueden usarse para exhibir su corrección, aclarar su dominio de aplicación e indicar cómo ese dominio puede ser extendido"[19], refiriendo así al modo de articular los resultados.

Si bien en una primera lectura el apelar a la noción "inteligibilidad", en particular a nivel de lo que la autora denomina análisis de los términos, parece llevarnos a un problema ampliamente discutido como lo es el problema del estatus ontológico de los objetos matemáticos, esta lectura sería desacertada. El enfoque desarrollado por Grosholz no intenta dar respuesta a este problema y en contraste insiste en destacar que no podemos hablar de objetos en forma aislada:

> We search for the conditions of intelligibility of these things (which are themselves conditions of the intelligibility of other things) as we search for the conditions of solvability of the problems that characterize them as well as the reach of procedures we use in the solutions(Grosholz, 2007, p. 24).[20]

[17](Grosholz, 2007, pp. 33-60) No profundizaremos en detalle en la perspectiva de la autora sino en los elementos principales para la elaboración de una noción de experiencia matemática.

[18]Analysis begins with a problem to be solved, on the basis of which one formulates a hypothesis; the hypothesis is another problem which, if solved, would constitute a sufficient condition for the solution of the original problem (Grosholz, 2007, p. 40).

[19]The exploration of the meaning of procedures, algorithms, and methods in terms of paradigmatic problems that may be used to exhibit their correctness, clarify their domain of application, and indicate how that domain can be extended(Grosholz, 2007, p. 34).

[20]Esta idea se encuentra enfatizada también en su trabajo más reciente cuando afirma "Analysis is both the search for conditions of intelligibility of things and for conditions of solvability of the problems in which they figure. We investigate things and problems in mathematics because we understand some of the issues they raise but not others; they exist at the boundary of the known and unknown (Grosholz, 2016, p. 29).

La investigación de los objetos matemáticos está motivada por, y no puede ser desligada de, la actividad de resolución de problemas y esto da a los objetos su "problematicidad". Este hecho permitiría explicar, por qué a través de la historia los matemáticos se han esforzado en brindar diferentes definiciones de sus objetos de estudio, que constituye la forma por excelencia de introducirlos y caracterizarlos[21]. En tanto que el estudio de los conceptos y problemas se sitúa en el límite entre lo que conocemos y lo que no, muestran su dependencia del estado del conocimiento[22] en el momento en que estos conceptos son definidos y redefinidos, así como de la relevancia adscrita a los problemas que los involucran. Las nuevas definiciones de los objetos de estudio que permiten una mejor comprensión de sus características distintivas y de sus relaciones con otros objetos de estudios emergen en la actividad de resolución de problemas. Las características presentes en las definiciones son explotadas en la resolución de problemas, esto es, siguiendo a Grosholz, permiten determinar las condiciones de resolución. A su vez, las estrategias de resolución - que explotan características presentes en las definiciones – son evaluadas por el investigador matemático, a fin de determinar su alcance. La posibilidad de generalizar y extrapolar estas estrategias permite muchas veces la elaboración de métodos de resolución y métodos pruebas que pueden resultar en nuevas articulaciones del campo de conocimiento donde los problemas se plantean y resuelven.

De todo lo anterior, resulta que las diferentes formas de análisis no constituyen compartimentos estancos sino actividades que se dan de forma simultánea y lo que Grosholz denomina "condiciones de inteligibilidad" no son absolutas sino relativas a los problemas a resolver. De esta manera, desde la perspectiva epistemológica de Grosholz, el problema de la inteligibilidad de los objetos matemáticos poco y nada tiene que ver con el problema del acceso, propio de los enfoques epistemológicos clásicos. Las denominadas condiciones de inteligibilidad deben ser comprendidas en relación a las actividades distintivas de la disciplina – que Grosholz identifica a través de los diferentes niveles de análisis, cuyos aspectos sólo pueden ser comprendidos en referencia a la historia y las prácticas[23], marcando la independencia entre las cuestiones epistemológicas y las ontológicas.

Una vez señaladas las principales actividades involucradas en la investigación matemática, con la noción de análisis Grosholz destaca otro aspecto fundamental que le permitirá caracterizar

[21] Como veremos más abajo Grosholz plantea una independencia entre cuestiones epistemológicas y ontológicas por lo que el debate descubrimiento versus invención no es de relevancia para este tópico.

[22] Para referencia completa véase nota al pie previa (Grosholz 2016, 29)

[23] Desarrollaremos en detalle este aspecto más adelante (Secc. 2.2.3).

la noción de experiencia matemática:

> Awareness of an intelligible thing cannot be summed up in its representations, but also cannot be distinguished from them; the best we can do is 'triangulate,' that is, investigate it using a variety of representations, each of which may capture distinct and complementary aspects(Grosholz, 2007, p. 47).

Grosholz apunta a un aspecto saliente de la investigación matemática que es el desarrollo de diversas notaciones y lenguajes, i.e. representaciones. Estas representaciones no sólo son importantes para la presentación y transmisión del conocimiento sino que, como dijimos en la sección anterior, tienen un rol constitutivo: es necesario combinar, transformar y desarrollar diversas formas de representación para la resolución de problemas y el consecuente avance del conocimiento matemático.

En la sección anterior mencionamos que Grosholz retoma aportes provenientes de la línea pragmatista en filosofía de la ciencia que se han dedicado a dar cuenta del rol constitutivo de las representaciones científicas. Como la autora nos hace notar, el uso y desarrollo de diversas representaciones en las ciencias se combina con la introducción de nuevas técnicas experimentales e instrumentos de medición y observación. Aun cuando la matemática no se caracteriza por incorporar el tipo de procedimientos "empíricos" que hallamos en las demás ciencias, Grosholz sostiene, que el uso de las representaciones en matemática tiene similitudes fundamentales con dichos procedimientos. Si la investigación matemática se caracteriza por el uso de diversas representaciones *en tándem* que - a través de su "triangulación"- permiten el avance del conocimiento ¿cómo debemos comprender esta similitud? Consideramos que este es uno de los puntos fundamentales y donde radica parte de la originalidad de la propuesta de Grosholz: el haber advertido que en matemática las representaciones constituyen *paper-tools*. El concepto de "paper-tools" es tomado de los trabajos de Ursula Klein y refiere a "representaciones externas estabilizadas que son aplicadas como recursos materiales para la construcción de nuevas representaciones o modelos"(Klein, 1999, p. 147). Klein (1999) afirma que para que una representación constituya una *paper-tool* en primer lugar debe estar estabilizada[24]. Atendiendo a este primer requisito, Grosholz comienza por definir la experiencia matemática como el "estudio de las cosas inteligibles en una tradición de representación que usa un espectro de modos de representación para

[24]First, representations which function as paper tool must be stabilized or taken for granted in order to be applied as prerequisites for the production of new representations(Klein, 1999, p. 158).

investigarlas"[25]. Aparece aquí el concepto de "tradiciones de representación" que alude a la presencia de representaciones matemáticas especializadas suficientemente establecidas a lo largo de la historia y que son utilizadas por los matemáticos que se sitúan dentro de dicha tradición. Esto pone el acento en el carácter compartido y consecuentemente externo que constituye, siguiendo nuevamente a Klein (1999), un aspecto crucial de las representaciones *qua paper-tools*. Las herramientas de papel son intelectuales y materiales: son intelectuales por que encarnan conocimiento. En el caso de la matemática lo hacen indicando cuáles se consideran - de acuerdo al conocimiento disponible - las mejores formas de definir los objetos, de resolver los problemas que involucran dichos objetos y de articular los resultados. Son también materiales porque que "existen en un medio externo, son visibles y pueden ser manipuladas de acuerdo a su sintaxis"[26]. Respecto al aspecto material de las *paper-tools* Grosholz destaca que las representaciones y sus reglas de manipulación se encuentran desplegadas en los textos matemáticos tales como libros, artículos, manuscritos, etc. En consecuencia, su enfoque insiste en la importancia de las representaciones externas[27] como elementos fundamentales para una epistemología de la matemática.

Las representaciones matemáticas cumplen con los requisitos para ser calificadas como *paper-tools* y parecen volver plausible un tratamiento epistemológico basado en una noción de experiencia. Sin embargo, resta algo más, los trabajos de Klein sobre de las paper-tools constan principalmente de casos de estudio de la química focalizando en herramientas representacionales – fórmulas químicas – que se aplican como recursos materiales para construir modelos de compuestos orgánicos. De modo que, en ese caso, el uso de las *paper-tools* consideradas se combinan con el uso de equipamiento y procedimientos experimentales que manipulan sustancias químicas en los laboratorios. Se podría pensar, por ejemplo, que la utilidad de estas *paper-tools* reside en su capacidad para realizar predicciones sobre cómo se producen las interacciones entre determinadas sustancias, que luego serán o no corroboradas en el laboratorio. Así, el valor epistémico de las *paper-tools* no podría, a primera vista, concebirse con independencia de un contexto donde se da una manipulación directa de dichos compuestos. Pues, de ser ese el caso, la posibilidad de un enfoque "experimental" de la matemática parece verse anulada teniendo

[25]It is the study of intelligible things in a tradition of representation that uses a spectrum of modes of representation to investigate them (Grosholz, 2007, p. 50).

[26]Secondly, unlike concepts, ideas, theories, etc., which often function as unquestioned prerequisites for the production of knowledge, the extra-mental representation is crucial for paper tool. Paper tools are both intellectual and material. They embody knowledge and exist in an external medium, are visible and can be manipulated according their 'syntax'(Klein, 1999, pp. 158-159). Más adelante en esta misma sección, así como en la siguiente dedicada al enfoque de Brendan Larvor (2.3), veremos que las reglas para la manipulación de las representaciones no son reducibles a reglas sintácticas, dada su dependencia del contenido.

[27]En contraposición a representaciones internas, mentales.

en cuenta que, como la misma Grosholz ya afirmó, los objetos matemáticos[28] sólo pueden ser conocidos a través de sus representaciones. Lejos de acordar con esta conclusión, Grosholz entiende que el trabajo con representaciones no constituye un llamado a suprimir la dimensión experimental de la matemática, antes bien a la necesidad de reformularla, y con este objetivo caracteriza la "experiencia matemática" como:

> [a] formal or discursive experience that mathematicians and students acquire to varying degrees [. . .]. It is the mastery of 'combinatorial spaces' constituted in the history of mathematics; mathematical notation and figures belong to traditions of representation that severely constrain what may be put on the page, how marks may be set next to other marks, and what meanings they may take on.(Grosholz, 2007, p. 50)

Al igual que los científicos adquieren las técnicas de manejo de instrumentos para la observación y la experimentación, los estudiantes y matemáticos adquieren y desarrollan habilidades en el uso de las herramientas formales[29] - *paper-tools.* Ya sea en la formación elemental hasta la práctica profesional más especializada en matemática, el estudio de los objetos matemáticos, la resolución de problemas y la organización de resultados se lleva a cabo por medio procedimientos de manipulación y transformación de las diferentes representaciones matemáticas. Las representaciones matemáticas *qua paper-tools*, recordemos, son materiales e intelectuales. Su materialidad permite su despliegue en papel y pantallas mientras que por su aspecto intelectual encarnan conocimiento en la forma de reglas de uso y procedimientos que permiten su manipulación para la obtención de otras representaciones. En este sentido es que Grosholz define la experiencia matemática como una experiencia formal y, al mismo tiempo, como la maestría asociada al dominio de las reglas definidas por las tradiciones de representación para los procedimientos con las diferentes herramientas. Ambas dimensiones confluyen en la idea de "espacio combinatorio" como el laboratorio donde estudiantes y matemáticos llevan a cabo sus procedimientos "experimentales". Para comprender cabalmente esta noción retomamos el trabajo de Pierre Cassou-Noguès (2006) quien explica que:

[28]En consonancia con lo desarrollado anteriormente, los objetos matemáticos que deben ser entendidos aquí en el sentido de objetos de estudios.

[29]Aquí formal no debe ser entendido en el sentido de derivación de expresiones en un lenguaje formalizado del tipo que vimos en el primer capítulo. Atendiendo por un lado, a la imposibilidad de una formalización completa de la matemática. Por otro, porque la derivación formal constituye el establecimiento de relaciones entre expresiones de un lenguaje formalizado determinado unívocamente por la sintaxis de dicho lenguaje. A fin de evitar una lectura que lleve esta interpretación en adelante nos atendremos a denominarla sólo como "experiencia matemática".

> Mathematical signs belong to an artificial structure, with restricted relationships. (...) In the "experiments" on formulas, what matters is not all the relationships that signs could have, as in the drawing of a child, but the restricted possibilities given by the rules of use. What that means is exactly that the experiments on formulas belong to a certain "combinatorial space". The same goes for geometrical figures (which are also made of signs governed by rules of use)[...]. Mathematical constructions, geometrical figures or logical formulas, take place in "combinatorial spaces", "abstract spaces", structures that are not given in our Sensibility but are constituted in the history of mathematics.(Cassou-Noguès, 2006, p. 98)

Los experimentos en ciencia constituyen procedimientos empíricos que involucran la puesta en funcionamiento de aparatos en un entorno físico, generalmente artificial y controlado, como lo es el laboratorio. De forma similar, y conforme a la dimensión material de las *paper-tools*, los experimentos matemáticos se despliegan en un soporte físico como lo son el papel y las pantallas de computadora. Pero en contraste, sus procedimientos no se encuentran controlados y/o restringidos por leyes naturales concernientes a los fenómenos que se está investigando o el funcionamiento de los aparatos, sino por las reglas que posibilitan la manipulación de las representaciones desplegadas. Estas reglas no se limitan a la sintaxis de un lenguaje formal que haría de los experimentos matemáticos un mero juego formal que no atiende al contenido sino que al contrario, y conforme a lo que vimos como la dimensión intelectual, son definidas por la tradición de representación de acuerdo al conocimiento disponible en el contexto donde estas tradiciones se originan y desarrollan[30]. De esta manera, la noción de espacio combinatorio ligada a la de experiencia permite capturar los aspectos "experimentales" de la matemática destacando la centralidad de los procedimientos de manipulación de representaciones externas sin reducirlos a procedimientos empíricos y considerando la dimensión más abstracta del quehacer matemático. Al considerar estas diferentes dimensiones del trabajo matemático Grosholz brinda una caracterización más rica de la investigación matemática que abre nuevas perspectivas para el abordaje epistemológico de las estrategias de resolución de problemas que la separa nítidamente de los enfoques previos. Qué ventajas, alcances y forma toma este nuevo abordaje son las preguntas que responderemos en lo que resta de la sección dedicada a Grosholz.

[30]Profundizaremos en este punto hacia el final de esta sección cuando analicemos el carácter local de las estrategias de resolución de problemas y la dependencia del contenido de las reglas que gobiernan el uso de las *paper-tools*.

2.2.2. Estrategias de resolución de problemas

El investigador matemático se encuentra equipado con procedimientos para la manipulación de las representaciones de acuerdo a reglas de uso que encarnan el conocimiento establecido, algunas sistematizadas y otras no articuladas aunque implícitas en el *know-how* propio de la tradición donde se sitúa el matemático[31]. Cuando estos procedimientos ya no son susceptibles de ser aplicados a un problema que se estima relevante resolver, el investigador matemático deberá abocarse a la elaboración de nuevas herramientas. La forma típica en que el matemático diseña nuevos procedimientos es a partir del anexado de dominios: la "resolución de problemas ocurre cuando un problema se plantea en un dominio, pero no puede ser resuelto allí, por lo que otros dominios son anexados al servicio de su resolución"[32]. Como cada dominio viene provisto de tradiciones de representación (Grosholz, 2007, p. 97) con sus propias notaciones especializadas, el resultado es un aspecto que ya adelantamos en la introducción: la generación de discursos heterogéneos, heterogeneidad que debe ser entendida en referencia a la noción de experiencia y, por tanto, al despliegue y manipulación de diversas *paper-tools*. Recordemos aquí que las *paper-tools* constituyen representaciones estabilizadas en el curso de la historia y, en consecuencia, cada uno de los diferentes dominios va desarrollando su trabajo - atendiendo a sus propios objetos de estudio y sus formas de definirlos, guiado por los problemas que se estima relevante resolver y con los métodos y estrategias que estima más convenientes para su resolución, etc. - conforme a las reglas de uso de las representaciones definidas por sus tradiciones. Grosholz señala, atendiendo a esta autonomía de las diferentes áreas de la matemática, que para la resolución de problemas se vuelve necesaria la articulación del dominio de origen con los dominios anexados que atienda a los requerimientos del problema (específico) a resolver[33]. Este vínculo es el que permite hacer uso de procedimientos que se desean anexar - aun cuando estos hayan sido diseñados para otros problemas y objetos – y, conforme a lo que venimos desarrollando, está orientado a garantizar que las representaciones que los hacen posibles se encuentren disponibles. De esta manera, la articulación de dominios relevantes toma la forma de una integración parcial, ya que preserva tanto las representaciones que permiten el planteo del problema en el dominio de origen, como aquellas que se anexan para su resolución, sin entrar en conflicto ni anular así este rasgo

[31] Cfr. Grosholz (2007, pp. 40, 51 y 232)

[32] Problem-solving occurs when a problem arises in one domain, but cannot be solved there, so that other domains are annexed in the service of problem-solving(Grosholz, 2007, p. 40).

[33] Cfr. Grosholz (2000, p. 83) y Grosholz (2007, Cap. 4).

persistente de la matemática que es la característica autonomía de sus diferentes áreas[34]. En este punto, es importante destacar que, a fin de dar cuenta de la relación entre diferentes áreas de la matemática, Grosholz nos habla de una "articulación de dominios" y no de una "reducción teórica" que ha constituido la forma estándar de tratar esta cuestión en el pasado[35].

La perspectiva estándar sostiene que la relación entre diferentes áreas de la matemática puede ser satisfactoriamente entendida en términos de teorías formalizadas y plantea que una teoría (reducida) es una subteoría de otra teoría (reductora), si los teoremas de la primera constituyen un subconjunto de la primera. Podemos observar, sin necesidad de entrar en lo detalles del desarrollo de esta perspectiva, la continuidad con lo que caracterizamos como el paradigma de la derivación formal (Cfr. Secc.1.2). Nuevamente, se toma por objeto las teorías científicas en su formulación como lenguajes formalizados y estructurados axiomáticamente y, se añade aquí, el supuesto de la posibilidad de un traducción completa entre el lenguaje de la teoría reducida y la reductora. A partir de lo cual, las estrategias de resolución de problemas se plantean como derivaciones formales, en este caso, como derivaciones formales de los teoremas de ambas teorías a partir de los axiomas de la teoría reductora, donde las operaciones son puramente lógicas y, por tanto, son determinadas únicamente por la sintaxis del lenguaje formal de la teoría reductora[36].

Profundizando en la crítica a las perspectivas epistemológicas que toman por objeto las teorías como lenguajes formalizados - que destacamos en la primera parte de esta sección dedicada a Grosholz - y atendiendo a la cuestión específica de las relaciones entre teorías y su rol en la resolución de problemas matemáticos, la autora señala dos limitaciones que se desprenden del requisito de una traducción completa entre teorías, limitaciones propias de la perspectiva de la reducción teórica. La primera atañe a que los procedimientos disponibles en cada dominio dependen de sus representaciones. Así, la homogeneización del discurso resultante de la traducción – con la consecuente supresión de las representaciones del dominio de origen - puede conducir a que algunos procedimientos fundamentales para el planteo y la resolución de problemas ya no se encuentren disponibles. Podemos encontrarnos así, con que ciertas operaciones ordinarias sean

[34] Different domains continue to exhibit their autonomy by continuing to give rise to certain problems independent of their links with other domainsGrosholz (2000, p. 83)

[35] La autora refiere aquí al modelo de reducción de teórica por derivación de Nagel y Hempel que se convirtió en el marco de referencia para la discusión de las relaciones entre teorías. Tanto en (Grosholz, 2007, Cap. 4) como en (Grosholz, 2016, Cap. 4 y 7), discute principalmente el trabajo de Nagel de 1961: *The Structure of Science. Problems in the Logic of Explanation*, New York: Harcourt, Brace & World, Inc. y en menor medida Nagel (1949) "The Meaning of Reduction in the Natural Sciences", in R.C. Stouffer (ed.), *Science and Civilization*, Madison: University of Wisconsin Press, pp. 99–135.

[36] Es decir, reglas que indican cómo deben combinarse entre sí las fórmulas del lenguaje formal para obtener otras formulas.

imposibles de ser llevadas a cabo con el lenguaje de la teoría traducida, o bien que la pérdida de especificidad de los objetos involucrados o su eventual eliminación, haga que problemas que son centrales en el dominio de origen - y que involucran dichos objetos - se vuelvan vacuos o irrelevantes[37]. La segunda limitación tiene que ver con el requisito de una traducción completa, necesaria a los fines de que todos los teoremas de la teoría reducida puedan derivarse de la teoría reductora. Una correlación de este tipo entre las diferentes teorías no sólo no es deseable, digamos por las dificultades que podría llevar tal traducción completa de ser posible, sino que entraría en conflicto con la autonomía de las diferentes áreas de la matemática. En contraposición, Grosholz destaca el carácter parcial de una relación entre dominios para la resolución de problemas, de suerte que el dominio de origen se relacione sólo con las partes del dominio anexado[38] que son relevantes para el problema a resolver. Esto último, está de acuerdo con lo que hallamos en las prácticas donde diferentes áreas de la matemática investigan diferentes objetos y problemas, más allá de aquellos que motivan el establecimiento de relaciones con otras áreas y cuyo desarrollo discurre de forma independiente de cualquier vínculo establecido[39].

Cada dominio cuenta con sus objetos de estudio a los que se les adscriben ciertas propiedades y no otras haciendo uso de sus propias herramientas y métodos para su abordaje. Estos elementos distintivos juegan un rol crucial en la resolución de problemas que no pueden ser y, de hecho, no son eliminados por medio de una traducción en la práctica. Desde la perspectiva de Grosholz, la heterogeneidad discursiva generada por la interacción de dominios, lejos está de constituir algo pernicioso, y en contraste, aparece como una condición para la resolución de problemas. Un abordaje epistemológico satisfactorio requiere que no se elimine este aspecto fundamental, como lo hace el requerimiento de una traducción o reducción teórica, sino más bien que brinde una explicación de ese hecho[40]. La noción de articulación constituye un esfuerzo en esta dirección y reconoce en tal sentido, con respecto a las estrategias de resolución de problemas que:

[37]Esto es, un problema que se plantea relevante en el dominio de origen se vuelve o bien vacuo o trivial en la teoría reductora. Veáse (Grosholz, 2007, Cap. 4) y (Grosholz, 2016, Cap. 4 y 7), en ellos Grosholz analiza distintos intentos de reducción teórica, tanto en ciencia como en matemática, y señala las consecuencias arriba mencionadas.

[38]La resolución de problemas puede involucrar el anexado de más de un dominio, por ello frecuentemente hablaremos de "dominio anexado", a fin de hacer más clara nuestra exposición.

[39]Esto no excluye, como veremos, que los dominios sufran transformaciones sustanciales por su interacción con otros dominios en la resolución de problemas. Pero tales transformaciones no toman la forman de un reemplazo de un dominio por otro.

[40]The virtue of heterogeneous discourse is that investigators can bring different kinds of information, conceptualizations, methods and formal idioms to bear together on problem-solving situations. Rather than trying to banish the heterogeneity, as logicians strive to do in both their mathematics and their philosophizing, I urge that we look philosophically, and historically, at the uses that mathematicians and scientists make of the heterogeneity of things and of discourses, and the strategies they use to bring them together(Grosholz, 2016, p. xiv).

> On the one hand, good searches need to bridge domains; on the other hand, they depend on detailed knowledge of the domain in which the problem originates. [...] Thus what we often find in mathematical problem-solving are patches from different fields juxtaposed or superimposed, to double or triple the information brought to bear on the problem, and reorganize our (local) understanding (Grosholz, 2016, p.48).

Las estrategias de resolución de problemas, de este modo, están orientadas a establecer puentes que garanticen la disponibilidad de los procedimientos tanto del dominio de origen, como de los dominios anexados que sean relevantes para la resolución del problema planteado. La necesidad de que estos diferentes procedimientos se encuentren disponibles los vuelve irreductibles[41], lo cual se evidencia en las representaciones desplegadas que toman la forma de "parches" entre los diferentes dominios involucrados. Justamente en estos parches encontramos el espectro o variedad de representaciones con que Grosholz (2007) define la experiencia matemática, quien profundizando en este aspecto agrega que "la experiencia matemática emerge de tradiciones de representación y resolución de problemas en tanto que explora los espacios combinatorios producidos en un discurso matemático polivalente"(Grosholz, 2007, p. 25).

Los discursos matemáticos polivalentes apuntan así a la presencia de reglas de uso que determinan diferentes significados para las representaciones asociadas a cada dominio de los que interactúan en la resolución de problemas. Tenemos así, por un lado, el dominio de origen que se encuentra provisto de tradiciones de representación que posibilitan por medio del despliegue y manipulación de sus *paper-tools* el planteo de un determinado problema. Este planteo prescribe, al mismo tiempo, cuáles son las mejores formas de abordaje señalando el espacio combinatorio inicial, donde se realizará la búsqueda de las condiciones a satisfacer para la resolución del problema. La experiencia matemática, entendida como la maestría en este espacio combinatorio inicial, se manifiesta aquí en la dependencia de las estrategias del conocimiento detallado de sus objetos, métodos y problemas de acuerdo con reglas de uso definidas por la tradición de representación. Esta maestría aparece así primero, como condición para plantear el problema y luego, para evaluar el límite de las herramientas disponibles que en caso de resultar insuficientes, indicará la necesidad de anexar herramientas provenientes de otros dominios. Por otro lado, tenemos los procedimientos provenientes de porciones de otros dominios que, el matemático estima, serían relevantes a la resolución del problema planteado. Sin embargo, estos dominios están provistos de tradiciones de representación diferentes de aquella donde se plantea el problema,

[41] En el sentido de reducción de teorías expuesto más arriba.

estando caracterizados por sus propias reglas de uso y manipulación de representaciones. Esto es, los procedimientos a anexar han sido elaborados y desarrollados, en el marco de su propia tradición, para otros objetos y para resolver diferentes problemas con sus propias condiciones de resolución.

Retomando la noción de "análisis de las proposiciones" con la que Grosholz bosqueja el proceso de resolución de problemas: partimos de un problema a resolver en base al cual se formula una hipótesis. Esta hipótesis es otro problema, cuya resolución constituiría una condición suficiente para la resolución del problema original[42]. En términos de lo que venimos desarrollando sobre la interacción de dominios, el problema anexado constituye el "problema-hipótesis" debido a su carácter provisional, pues es necesario determinar su plausibilidad, esto es, determinar si su resolución constituye efectivamente una solución del problema original. De esta manera, contamos con dos problemas diferentes que involucran diferentes objetos de estudio, con diferentes condiciones para su resolución y, por tanto, que delimitan diferentes espacios donde sus soluciones deben ser buscadas. Todos estos aspectos son capturados y determinados por las herramientas – *paper-tools* – con sus propias reglas de uso específicas al dominio de cada problema. Ante esto, el matemático deberá elaborar reglas de uso que permitan el despliegue conjunto de las diversas representaciones relevantes, a fin de poder establecer una relación entre las condiciones de resolución del problema original y del "problema-hipótesis".

Grosholz (2007, 2016) señala que en la resolución de problemas encontramos una combinación de las diferentes representaciones de acuerdo a ciertos patrones, y esta combinación constituye la base para la elaboración de nuevas reglas de uso para el despliegue conjunto de dichas representaciones. A saber, las representaciones relevantes del dominio de origen y del dominio anexado se combinan por medio de su yuxtaposición, superposición y/o unificación, dando lugar a los discursos polivalentes mencionados más arriba. Estos discursos delimitan un nuevo espacio combinatorio donde se sitúan tanto el problema original como el "problema-hipótesis", y donde el matemático explorará diferentes relaciones entre herramientas - *paper-tools* - específicas (fórmulas, diagramas, tablas, etc.) y sugerirá nuevas reglas de uso que serán evaluadas en el marco del conocimiento establecido[43]. Las nuevas reglas establecen formas novedosas de enlazar

[42]En lo que sigue hablaremos de "problema-hipótesis" para abreviar y distinguirlo del problema de origen, y con formulación en singular. Recordemos que la resolución de problemas puede requerir anexar más de un dominio, y por tanto, puede ser necesario relacionar condiciones de resolución entre más de dos problemas. Sin embargo, con el objetivo de hacer más clara la exposición, en esta sección hablaremos de problema-hipótesis en singular.

[43]A través de sus diferentes trabajos Grosholz deja entrever que dicha evaluación tiene que ver principalmente con restricciones impuestas por el dominio de origen, pero no hay un análisis sistemático sobre este punto. Abordaremos en detalle esta cuestión en el próximo capítulo (Secc. 3.3).

las *paper-tools* que no existían previamente y que, al no encontrarse determinadas por ningunas de las tradiciones de representación involucradas, precisan ser explicadas a través del lenguaje natural[44]. El lenguaje natural constituye así una herramienta indispensable, una *lengua franca*, a fin de poner en contacto los procedimientos dispares y determinar si es posible o no, establecer una relación entre las condiciones de resolución de los diferentes problemas planteados. Si es posible aunar los procedimientos de los diferentes dominios, mediante las nuevas reglas propuestas, el matemático podrá hacer uso de las herramientas provenientes de los dominios anexados y así determinar que la solución del problema-hipótesis constituye una condición suficiente para la resolución del problema original. En cuyo caso tiene lugar, siguiendo a Grosholz, un cambio en las condiciones de resolución del problema original, puesto que sus condiciones de resolución harán ahora referencia a las condiciones del problema anexado y, ya no a las establecidas por el dominio de origen[45]. Los cambios en las condiciones de resolución tienen lugar en espacios combinatorios fundamentalmente *abiertos*, producidos por los discursos heterogéneos que resultan de la interacción de dominios:

> The search for a solution to a problem is carried out in an open space (not the closed space delimited by a set of axioms and their deductive consequences). Mathematicians typically cut across what seem to be the boundaries of their own areas in search of solutions to problems(Grosholz, 2016, p. 47)

Recordemos que la búsqueda de establecimiento de derivaciones formales se realiza de acuerdo a reglas que indican cómo pasar de una fórmula a otra independientemente del contenido de dichas fórmulas. Estas reglas se encuentran fijadas de manera previa al planteo del problema y siendo independientes de él, delimitan un espacio fundamentalmente cerrado para la búsqueda de una derivación formal de su solución. En contraposición, Grosholz define a las estrategias como búsquedas orientadas al establecimiento de relaciones entre condiciones de resolución de problemas provenientes de diferentes dominios, que por ende tiene lugar en espacios fundamentalmente abiertos. Su carácter abierto es producto de los discursos heterogéneos generados por

[44] Thus the combination of those domains involves the juxtaposition of formerly unassociated modes of representing; the juxtaposition itself may contribute strongly to the growth of knowledge, and it will also require explanation and exposition in natural language (Grosholz, 2007, p. 96).

[45] A través de nuestro estudio de caso examinaremos los pormenores de este proceso, donde mostraremos cómo en el trabajo de Wallis los problemas de establecer razones entre series aritméticas constituyen condiciones para la resolución de problemas geométricos de cuadraturas. Esto último resulta en que las condiciones de resolución de los problemas de cuadraturas dejan de estar asociadas – como indica el dominio de origen - a operaciones geométricas de construcción que permitan el establecimiento de proporciones entre figuras geométricas. En su lugar, las condiciones de resolución pasan a estar asociadas al cálculo de razones entre series aritméticas para determinar las proporciones entre las diferentes figuras.

la interacción de dominios que hace que las reglas para el uso de las representaciones no estén, ni puedan estar dadas de antemano. Esto es así dado que ni el dominio de origen ni los dominios anexados cuentan con reglas para el uso *en tándem* de sus representaciones con aquellas provenientes de otros dominios[46]. De modo que las nuevas reglas para el uso conjunto de las representaciones se elaboran, proponen y evalúan en el transcurso de la resolución del problema y no pueden ser desligadas de éste último.

Con esta caracterización de la actividad de resolución de problemas Grosholz, logra discernir aspectos fundamentales de las estrategias que se han visto suprimidos, o por lo menos no satisfactoriamente explicitados, por los enfoques previos. Entre estos aspectos nos interesa destacar dos relativos al alcance de las estrategias de resolución. El primero de ellos, concerniente al carácter local de tales estrategias que se desprende del enfoque de Grosholz, en contraste con la visión universal que tendría desde la perspectiva de la derivación formal. Desde esta última, como las estrategias proceden de acuerdo a reglas que son independientes del contenido y por tanto del problema mismo, podrían considerarse como esquemas de pruebas formales aplicables a toda clase de problemas. En contraste, siguiendo a Grosholz, las estrategias de búsqueda se plantean como el establecimiento de relaciones entre condiciones de resolución de problemas provenientes de diferentes dominios, que procede de acuerdo con reglas para el uso coordinado de las representaciones que son exploradas, introducidas y evaluadas en la actividad misma de resolución. Con esto, tenemos que estas nuevas reglas dependen tanto del problema de origen, como del problema-hipótesis y, no menos importante, de la relación entre las porciones relevantes de los dominios que se establece con vistas a la resolución del problema que la motiva. Esto explica por qué, aun cuando estrategias que condujeron a la resolución de los problemas para el que fueron desarrolladas admitan algún grado de generalización, la mayor parte de las veces no puedan ser universalizables[47].

Relacionado con lo anterior, el segundo aspecto que nos interesa destacar es el distanciamiento de Grosholz de aquellas perspectivas que, rechazando el universalismo que se desprende de entender las estrategias como derivaciones formales, terminan caracterizando a las estrategias como procesos exclusivamente individuales o bien, recurriendo a alguna noción de intuición. Para la autora la no universalidad de las estrategias, y con esto su alcance local - esto es su dependencia contextual -, no tiene por qué conducir a un abandono de un tratamiento episte-

[46]El requisito de traducción busca suprimir este aspecto, con el objetivo de contar con reglas que gobiernen las representaciones de los diferentes dominios.

[47]Exploraremos este aspecto en la próxima sección dedicada a Larvor (2.3).

mológico de las mismas. Aquí es útil recordar que un rasgo que define a las *paper-tools* es el de constituir representaciones externas y compartidas, las cuales son desplegadas y manipuladas de acuerdo a reglas de uso definidas por su tradición de representación. La resolución de problemas genera nuevas reglas de uso para las representaciones que son susceptibles de incorporarse a una tradición ya existente, o incluso de inaugurar nuevas. Esto hace que las nuevas definiciones, métodos, problemas, etc. posibilitados por estas reglas recientemente introducidas se encuentren ahora disponibles para su consideración por parte de la comunidad de expertos.

Entendidas las estrategias a partir de la noción de experiencia, Grosholz distingue aspectos pocos explorados, como los son su carácter local y compartido, abriendo una gama de preguntas a ser exploradas. Entre estas podemos mencionar la pregunta acerca de, cómo se estabilizan las nuevas reglas de uso de las representaciones matemáticas, cómo el matemático garantiza el rigor en los diferentes procedimientos que le permiten resolver problemas, y qué rol juegan los axiomas en la resolución de problemas, entre otras. Son tales preguntas las que sugieren que la resolución de problemas no se encuentra desligada de la justificación de sus resultados, como en el enfoque predominante se ha sostenido. En consecuencia, estas preguntas demandan un abordaje epistemológico más satisfactorio, que como tal no recurra a la noción de derivación en un sistema formal y atienda a la práctica matemática misma. A partir de esto en la próxima sección indagamos acerca de la forma que toma este abordaje epistemológico superador.

2.2.3. El rol de la historia y la lógica

En la sección anterior destacamos las ventajas explicativas del enfoque epistemológico de Grosholz que arroja luz sobre aspectos fundamentales de la resolución de problemas, al mismo tiempo que abre una nueva gama de cuestiones a ser consideradas. A modo de cierre de este bloque dedicado al trabajo de Grosholz, examinaremos qué forma toma el tratamiento de las estrategias de resolución de problemas basado en la noción de experiencia. Para responder a esta pregunta estimamos relevante traer a colación la valoración que la autora hace del trabajo de Carlo Cellucci en Grosholz (2016) donde señala que:

> [...] as Cellucci himself observes, analytic methods of problem-solving are interestingly local. In between the alleged moments of irrational genius that bring insight (and about which logicist philosophers believe they have nothing to say) and the closed universality of the axiomatic method, lie the organized and principled and surprising local methods and bridging strategies of the mathematicians. We have

> to look carefully at the historical record, because the ability of mathematicians to deploy these strategies depends on a deep familiarity with the peculiarities of the objects and of the formal languages and schemata used to frame problems about them (Grosholz, 2016, p. 49)

Ambos autores coinciden en la caracterización básica de la resolución de problemas ligada a la formulación de hipótesis que le otorga un carácter ampliativo, ya que la mayor parte de las veces las hipótesis pertenecen a dominios diferentes de aquel donde se plantea originalmente el problema[48]. También coinciden en destacar el alcance local de la resolución de problemas y, en consecuencia, se distancian de las perspectivas que caracterizan las estrategias en términos de procesos individuales o bien de operaciones lógicas universales. El carácter local de la resolución de problemas es señalado por Cellucci, recordemos, cuando afirma que la inferencia de hipótesis para la resolución de problemas, depende tanto del planteo del problema como de la inclusión de otra información relevante, incluyendo en este último caso información proveniente de otros dominios. Sin embargo, tal como observamos en la sección dedicada a Cellucci (2.1), su enfoque presenta limitaciones por la ausencia de una explicación de cómo se dan estas dependencias. Se trata de una dificultad asociada a lo que Grosholz destaca hacia el final del fragmento, y es que justamente la posibilidad de elaborar y desplegar tales estrategias - y así de inferir y determinar la plausibilidad de las hipótesis – depende exclusivamente de características específicas de los dominios involucrados que son capturadas por las herramientas formales. A fin de subsanar estas dificultades y en lugar de plantear esquemas de reglas de descubrimiento como Cellucci, Grosholz sugiere la inclusión de estudios de casos de resolución de problemas:

> And towards the end of the book[49], he examines 'rules of discovery', including inductive reasoning, reasoning by analogy, generalization, specialization, metaphor and metonymy. These pages, I would argue, would have been better spent on studying the history of mathematics and the actual development of important recent problem-solutions(Grosholz, 2016, p. 49).

El análisis de las estrategias, entendidas aquí por Cellucci como reglas que permiten inferir hipótesis, no debería limitarse a la presentación de esquemas o ejemplos que – ya sea por supresión o por inclusión de elementos foráneos - omiten los procedimientos efectivamente utilizados

[48] Cellucci's careful account of analysis repays study. Most important, he makes clear that the hypotheses needed for solving a problem need not belong to the field of the problem, but may belong to other fields (Grosholz, 2016, p. 47).

[49] Aquí la autora refiere a Cellucci (2013)

en su contexto de resolución. Pues tal omisión impide, como ya observamos con respecto al enfoque de la derivación formal, considerar la interacción de dominios y cómo esta interacción posibilita usos novedosos para sus herramientas que conducen a la resolución de problemas. Esto tiene como consecuencia una presentación que parece simplificar o trivializar la actividad misma de resolución de problemas al punto de no poder esclarecer los aspectos más fundamentales para los que fue diseñada.

De esta manera, Grosholz sostiene que para el estudio satisfactorio de las estrategias no sólo es aconsejable, sino necesario atender a las representaciones efectivamente utilizadas por el matemático en la resolución de problemas y para esto la historia de la práctica investigativa constituye una herramienta fundamental. Como hemos visto a lo largo de esta sección, la perspectiva epistemológica desarrollada por la autora pone en el centro de sus reflexiones la dimensión pragmática de las representaciones. La historia permite acceder a esta dimensión a través del estudio de las *paper-tools* desplegadas en los diferentes textos matemáticos (libros, artículos, manuscritos, etc.) y toma la forma de estudio de casos históricos de resolución de problemas[50]. Los estudios de casos desarrollados por Grosholz se plantean como una "historia natural" de las tradiciones de representación, de las que emergen y se nutren los diferentes dominios involucrados en el planteo y resolución de los problemas bajo consideración[51].

Atendiendo al bosquejo del proceso de resolución de problemas que vimos hacia el final de la sección anterior (secc. 2.2.2) podemos condensar en tres núcleos las actividades presentes en los estudios de casos desarrollados por Grosholz (2007, 2016). Un primer núcleo dedicado a la identificación del dominio donde se plantea el problema y la tradición de representación asociada con las reglas de uso establecidas para sus herramientas de trabajo (*paper-tools*). A partir de lo anterior, Grosholz logra precisar cómo son definidos los objetos de estudio, cómo se plantea el problema a resolver y el modo en que se delimita el espacio de búsqueda asociado con las condiciones de resolución. Esto es, cómo está constituido el espacio combinatorio inicial donde se sitúa el problema de origen. Luego, encontramos un segundo núcleo que procede de forma análoga al primero pero que dirige ahora su atención al o los dominios anexados. Más

[50]Incluidos casos de historia reciente.

[51]"We cannot fully understand particular cases of representation in the absence of a 'natural history' of the traditions of representation of which they are a part". Hendry, R. F.(2001), 'Mathematics, Representation, and Molecular Structure,' en Klein, U. (de), *Tools and Modes of Representation in the Laboratory Sciences*. Dordrecht: Kluwer, p. 227, citado por (Grosholz, 2007, p. 191). Aquí la idea de "historia natural" alude a que el estudio histórico de las tradiciones de representaciones y sus paper-tools, se centra en las representaciones desplegadas en los textos matemáticos. A partir de las cuales es posible estudiar sus significados, reglas de uso y el proceso a través del cual se estabilizan. De modo que este estudio histórico no constituye una "historia externa" con consideración de elementos políticos, religiosos, etc. y tampoco es un enfoque centrando en aspectos individuales.

puntualmente, se enfoca en las porciones de dichos dominios que se estiman relevantes para la resolución del problema de origen y, en consecuencia atiende al planteo del problema-hipótesis con sus condiciones de resolución. Partiendo de la identificación de las representaciones específicas asociadas a cada dominio y, sus problemas como trasfondo, el tercer núcleo focaliza en los "parches" presentes en los textos, esto es, en la presencia combinada de las representaciones provenientes de los diferentes dominios. Esto hace posible determinar cómo aparecen combinadas sus representaciones - yuxtaposición, superposición, etc.- y observar cómo se constituye el nuevo espacio combinatorio generado por el discurso heterogéneo donde se exploran las relaciones entre las *paper-tools* específicas. En este tercer núcleo de actividades, Grosholz presta especial atención a la presencia del lenguaje natural que introduce y explica, en primer lugar, las nuevas reglas para el uso en tándem de las diferentes herramientas de trabajo (*paper-tools*) surgidas de la exploración del nuevo espacio combinatorio. Se trata de nuevas reglas que hacen posible relacionar los procedimientos provenientes de los diferentes dominios, tanto para el planteo de los problemas y la definición de sus objetos, como para formular sus condiciones de resolución. Así, el lenguaje natural aparece en segundo lugar, señalando las relaciones establecidas entre las condiciones de resolución de los diferentes problemas y la evaluación de la plausibilidad del problema hipótesis en el marco del conocimiento establecido. Sobre esta base se hace posible determinar los cambios producidos en las condiciones de resolución de los problemas planteados.

A partir de los estudios de casos, cuyas actividades condensamos en los tres núcleos presentados más arriba, Grosholz logra identificar las reglas que gobiernan el uso de las *paper-tools*, explicar sus significados y discernir su rol en contextos específicos de resolución de problemas. Los estudios de casos permiten visualizar aspectos centrales de la resolución de problemas ligados al modo en que las representaciones son alteradas con respecto a sus usos anteriores. Se trata de los aspectos que permiten dar cuenta de cómo son producidas las rupturas e innovaciones a partir de la exploración de las relaciones entre las diferentes *paper-tools* en los espacios combinatorios generados por discursos heterogéneos para la resolución de los problemas planteados. Al mismo tiempo, ellos echan luz sobre el desarrollo matemático con el surgimiento de nuevos dominios y la inauguración de nuevas tradiciones de representación. El enfoque epistemológico de Grosholz se basa en la noción de experiencia y tiene a la historia como herramienta fundamental que la respalda resultando, en consecuencia, una aproximación más satisfactoria a las estrategias de resolución de problemas, en tanto permite dar cuenta de aspectos no considerados por otras perspectivas.

A modo de cierre de este bloque dedicado a la forma que toma este abordaje basado en la noción de experiencia y sus herramientas, nos preguntamos finalmente si la lógica – considerada por mucho tiempo la herramienta por antonomasia para el análisis filosófico del conocimiento matemático - puede aportar algo al estudio de la resolución de problemas. Hasta ahora, hemos considerado dos enfoques donde la lógica tiene un rol central: el enfoque de la derivación formal, con respecto al cual señalamos dificultades infranqueables para un abordaje de las estrategias de resolución en tanto que suprime aspectos fundamentales de la problemática en cuestión. La segunda perspectiva que consideramos es la de Carlo Cellucci que, con su objetivo de reformar la lógica para incluir aspectos metodológicos, lucía más promisoria. Sin embargo, observamos que esta segunda perspectiva no está exenta de importantes limitaciones y así nos preguntamos si debemos abandonar cualquier intento de un abordaje lógico de las estrategias que caracterizan la práctica matemática. Como ya observamos, Grosholz sostiene que las limitaciones presentes en el enfoque de Cellucci pueden subsanarse con la inclusión de estudios de casos de resolución de problemas. Tales estudios permitirían explicar cómo las estrategias, entendidas como inferencias, están indisolublemente ligadas a las representaciones utilizadas en los contextos específicos de resolución de problemas. De acuerdo con esto, entendemos que las dificultades señaladas no implican la imposibilidad del estudio de la dimensión lógica de las estrategias de resolución. Antes bien, este estudio deberá abandonar cualquier pretensión de recurrir a la noción de derivación en un sistema formal y, al mismo tiempo, tener en cuenta la dimensión pragmática de las representaciones, y con esto, atender a la práctica matemática en sus contextos.

La viabilidad de un abordaje de la dimensión lógica de las estrategias deberá tener en cuenta que las inferencias son dependientes del problema y así, atender a la interacción de dominios, con la consecuente generación de discursos heterogéneos. Esto exige una explicación de cómo estos discursos posibilitan determinadas inferencias y, con ello, la resolución de los problemas planteados. Pero esta explicación es una explicación epistemológica, ya que está asociada a aspectos fundamentales de la investigación matemática como trabajo con diversas representaciones. De esta manera, sostenemos que el estudio de la dimensión lógica de las estrategias debe tener como punto de partida un marco epistemológico satisfactorio. La perspectiva epistemológica desarrollada por Grosholz con la noción de experiencia matemática focaliza en la interacción de dominios y cómo esta interacción posibilita usos novedosos para sus herramientas que resultan en la resolución de problemas. Estimamos que la epistemología de la matemática desarrollada por Grosholz constituye, por consiguiente, una base robusta que hace posible plantear un tratamiento de la dimensión lógica de las estrategias. Pese a reconocer la necesidad de dicho tratamiento[52], Grosholz parece aportar poco en esta dirección ya que, como la misma autora destaca, su perspectiva concede centralidad a la historia y un rol subsidiario a la lógica[53]. Este rol subsidiario tiene que ver con que el recurso a la lógica ha estado predominantemente asociado a intentos persistentes de eliminar la heterogeneidad de los argumentos matemáticos y a ignorar la dimensión pragmática de las representaciones.

Con el objetivo de considerar la dimensión lógica en la próxima sección examinaremos la perspectiva Brendan Larvor que define la lógica como el "estudio sistemático de las acciones inferenciales". Esta perspectiva toma distancia de los enfoques tradicionales en lógica, ya que no ata sus consideraciones a los lenguajes formales, y por tanto homogéneos, e incluye la dimensión pragmática en su caracterización de las inferencias matemáticas. Esta caracterización resulta sumamente adecuada y hace que, aún cuando su enfoque no tiene por objetivo el estudio de las estrategias de resolución de problemas, constituya un excelente complemento a la noción de experiencia matemática. A partir de lo cual, se hace posible plantear un abordaje que dé cuenta tanto de la dimensión epistemológica como de la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas.

[52]I claim that some of the most important ampliative reasoning— reasoning that extends knowledge—in mathematics and the sciences takes place when heterogeneous discourses are brought into novel, and rational, relation. The study of rationality is not limited to the discipline of logic, though of course it must include logic as one important aspect (Grosholz, 2016, p. xiii).

[53]My method is based on the study of history rather than on logic; logic plays a role but that role is subordinate or subsidiary(Grosholz, 2016, p. xv).

2.3. Brendan Larvor: argumentos informales y acciones inferenciales

Finalizamos la sección anterior, dedicada al enfoque de Emily Grosholz, señalando la necesidad de un abordaje de la dimensión lógica de la resolución de problemas y sus estrategias, con este objetivo, en la presente sección, nos abocaremos al estudio del enfoque de Brendan Larvor. En sus trabajos, Larvor toma distancia de los enfoques tradicionales en lógica, ya que brinda un modelo de prueba matemática que da cuenta del poder epistémico y del rigor de los argumentos, sin poner en el centro la noción de validez ni apelar a la derivación formal. Larvor también se distancia de la perspectiva estándar al no atar sus consideraciones a los lenguajes formales, y por tanto homogéneos, y al incluir la dimensión pragmática de las representaciones en su caracterización de las inferencias matemáticas. Esta caracterización resulta sumamente adecuada y hace que, aún cuando su enfoque no tiene por objetivo el estudio de las estrategias de resolución de problemas, constituya un excelente complemento a la noción de experiencia matemática de Grosholz.

Dividimos la sección en cuatro partes, en la primera de ellas (Secc. 2.3.1), realizaremos una presentación general del enfoque de Larvor y su tesis de que las pruebas matemáticas constituyen "argumentos esencialmente informales". En segunda parte (Secc. 2.3.2), analizaremos las consecuencias de esa tesis para el estudio lógico de las pruebas matemáticas, el cual consistirá ahora para Larvor, en el "el estudio sistemático de las acciones inferenciales". La tercera parte (2.3.3) aborda una cuestión fundamental para nuestro trabajo, que es el estudio lógico – desde la perspectiva de las acciones inferenciales - de las pruebas heterogéneas. Las pruebas heterogéneas son, siguiendo a Larvor, las pruebas que contienen diferentes prácticas inferenciales y representacionales. Atendiendo, por un lado, a que el enfoque de Larvor no tiene por objetivo analizar la actividad de resolución de problemas y, por otro, a la presencia de algunas limitaciones de su enfoque, en la sección (2.3.4), señalamos los elementos que pueden recuperarse para nuestra investigación. Finalizamos nuestro examen de la perspectiva de Larvor, considerando los aspectos complementarios con Grosholz e indicando en que consistiría un estudio de la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas entendidas como sistemas de acciones inferenciales.

2.3.1. Pruebas matemáticas como argumentos informales

La noción de prueba matemática comenzó a ocupar un lugar preponderante en la reflexión sobre los fundamentos a partir de finales del siglo XIX y principios del XX cuando decantó en su identificación con la noción de derivación formal. Los enfoques críticos han señalado insistentemente que las pruebas que los matemáticos leen, escriben y publican no están expresadas en un lenguaje lógico formal, ni constituyen aplicaciones de reglas explícitas definidas por un sistema lógico. Ante esto, aún podría afirmarse, y en efecto se afirma, que la noción de prueba formal constituye una idealización o tal vez una reconstrucción formal de las pruebas que los matemáticos realizan. Además se supone que esta reconstrucción, que caracteriza la prueba como una cadena de fórmulas unidas por relaciones de consecuencia lógica, lograría capturar sus elementos esenciales.

La idea de que los aspectos esenciales de las pruebas matemáticas son capturados apropiadamente por la noción de prueba formal explicaría por qué se ha constituido como un modelo predominante (Larvor, 2012, p. 716). Frente a estas perspectivas, Larvor plantea que la filosofía de la práctica matemática no debe dirigir sus esfuerzos exclusivamente a señalar que las pruebas matemáticas no constituyen, estrictamente hablando, pruebas formales. Más aún, ella debe mostrar que las pruebas matemáticas no pueden simplemente ser transformadas en derivaciones formales, pues al hacerlo sufren una distorsión o pérdida importante (Larvor, 2012, p. 716). De manera que, el principal desafío consiste en brindar un modelo alternativo de la prueba matemática que dé cuenta del hecho que los elementos eliminados en su transformación a una derivación formal, provocando la pérdida o distorsión, no son circunstanciales sino que cumplen una auténtica función lógica (Larvor, 2012, p. 716). Con este objetivo, en su artículo *How to think about informal proofs* (2012), Larvor distingue las pruebas matemáticas de las derivaciones formales afirmando que las primeras se caracterizan por ser auténticos argumentos "esencialmente informales". Es decir, las pruebas matemáticas son esencialmente informales y esto viene dado porque su validez depende tanto de la forma como del contenido[54]. La transformación de las pruebas en derivaciones formales elimina toda referencia al contenido afectando así a su función lógica que consiste, en gran parte, en garantizar el rigor de los resultados. Esto es, elimina los elementos que hace que estas pruebas funcionen como auténticas pruebas. Un argumento como el *modus ponens* puede no estar expresado en lenguaje formal pero no es esencialmente informal,

[54]A more plausible account of essentially informal arguments, and the one that this study will take up and develop, claims that the validity or invalidity of essentially informal arguments does not depend on their logical form alone, but also on their content—they are content-dependent (Larvor, 2012, p. 720).

ya que es aplicable a cualquier dominio por ser independiente del contenido. Es justamente esta independencia del contenido lo que según Larvor, permite su transformación en una derivación formal sin pérdida o distorsión. A diferencia de esto último, los argumentos esencialmente informales no son neutrales al tópico, sino que en cada caso dependen de características del dominio de aplicación. Larvor trae a colación la *inducción matemática* que, si bien es susceptible de ser aplicada en diferentes pruebas matemáticas, su aplicación no es universal, pues es requisito para su aplicación que los objetos considerados puedan ser indexados por los números naturales, por lo que para su aplicación debemos atender a características del dominio[55]. De esta manera, afirma Larvor:

> [...]essentially informal arguments are content-dependent partly because they require domains with suitable general features. The presence of such features does not guarantee that an argument is sound. Rather, they are the necessary conditions for attempting to make an argument of that sort at all (Larvor, 2012, p.721).

Larvor sostiene que, a fin de profundizar en la cuestión de cómo la capacidad inferencial de los argumentos esencialmente informales reside en esta dependencia del contenido, es necesario un cambio en nuestra manera de pensar los argumentos[56]. Es preciso abandonar la concepción de los argumentos como secuencias de proposiciones o fórmulas bien formadas unidas por relaciones de consecuencia lógica, en tanto que ella excluye toda referencia al contenido. Tal cambio es posible, si atendemos a un aspecto que ha sido ignorado, esto es, que el paso de una línea a otra en una prueba es una “acción”[57]. Estas acciones, que constituyen los movimientos realizados por el matemático en el curso de la prueba, pueden ser aplicadas a diferentes clases de objetos, no sólo fórmulas bien formadas. A partir de este giro en el modo de concebir los argumentos, Larvor plantea la lógica como el “estudio general de las acciones inferenciales”.

[55]Esta característica de la dependencia del contenido, que se manifiesta en los métodos o estrategias que son generales pero no universalmente aplicables, es el mismo aspecto que Grosholz reconoce con respecto a las estrategias de resolución de problemas y su carácter local. Retomaremos este aspecto en la última sección del presente capítulo.

[56]El subrayado es nuestro. ”This thought, that essentially informal arguments depend for their inferential power on their content as well as their forms, requires a shift in how we think about arguments. If we think of an argument as a sequence of propositions connected by logical relations, it is hard to see how the content of the argument can play a role in the step from one proposition to the next”(Larvor, 2012, 721).

[57]“This is in part because a classically trained philosophical imagination is dominated by general logic, but also because orthodox philosophical education urges us to forget that the movement from one line of a proof to the next is an action”(Larvor, 2012, 721).

2.3.2. El estudio sistemático de las acciones inferenciales

Tomando como punto de partida el reconocimiento de que el paso de una línea a otra en una prueba constituye una acción, se plantea la pregunta, cómo la noción de acción inferencial logra explicar satisfactoriamente la dependencia del contenido. En el caso de las derivaciones formales, las reglas de inferencia definidas por los diferentes sistemas lógicos constituyen procedimientos sobre fórmulas bien formadas que permiten generar nuevas fórmulas. De ese modo, estas inferencias no modifican el contenido de las expresiones no-lógicas y, por tanto, no requieren atender al contenido de dichas expresiones. Mientras que las acciones inferenciales que dependen del contenido no se realizan sobre fórmulas bien formadas. En particular, este tipo de acciones inferenciales operan sobre alguna de las siguientes tres modalidades del contenido (Larvor, 2012, p. 721):

(I) cuando el contenido es el objeto de la acción inferencial

(II) cuando su representación es el objeto de la acción inferencial

(III) cuando el contenido se manifiesta o expresa en una acción inferencial

A las acciones que tiene por objeto (I)-(III) Larvor las denomina, siguiendo a Rav (1999), “topic-specific moves” y su presencia determina que los argumentos en los que aparecen sean *esencialmente informales*. Al mismo tiempo constituyen las condiciones necesarias para que tenga lugar el argumento y son las que impiden su transformación en una derivación formal[58].

Hasta ahora observamos que el enfoque de Larvor hace hincapié en dos aspectos: por un lado, en la necesidad de caracterizar los argumentos en términos de acción, y no como secuencia de fórmulas. Por otro, en que los objetos de dichas acciones también pueden ser otros que expresiones de un lenguaje formal, distinguiendo tres tipos de objetos que involucran una manipulación del contenido. Ambos aspectos son necesarios para dar cuenta de, cómo la capacidad inferencial de los argumentos esencialmente informales, depende tanto de la forma como del contenido. Para que el enfoque de las acciones inferenciales constituya un abordaje satisfactorio resta explicar, cómo los argumentos cumplen su función específica que es precisamente determinar su corrección. Entendiendo que asegurar el rigor de los resultados constituye una de las funciones principales

[58]Therefore, if an argument includes an inferential action that manifests or manipulates the subject-matter, or a representation thereof, then formalising this argument in a general logical language must either misrepresent or fail to include this action (Larvor, 2012, p. 723-724).

de las pruebas matemáticas[59], el enfoque de las acciones inferenciales debe mostrar, el modo en que se asegura el rigor de los diferentes argumentos, en especial, cuando entran en juego, inferencias que dependen del contenido.

En efecto, una de las principales virtudes del enfoque de la derivación formal, y que lo ha vuelto un modelo predominante, reside en su capacidad de brindar criterios universales y bien definidos para evaluar el rigor de los argumentos. Sin embargo, Larvor advierte que, de hecho, esta capacidad es limitada, pues constituye un modelo explicativo parcial que sólo da cuenta del rigor de aquellos argumentos cuyas inferencias son completamente independientes del contenido (Larvor, 2012, 723). En las derivaciones formales el rigor está garantizado, si las consecuencias obtenidas son el resultado de la aplicación de las reglas de inferencia definidas por el sistema formal. Respecto a esto, Larvor señala que estas reglas no son otra cosa que procedimientos estandarizados que indican, cuáles son los pasos admitidos para pasar de una fórmula a otra. Ademas, este tipo de procedimientos no son exclusivos de las derivaciones formales, pues los *topic-specific moves* también responden a normas - frecuentemente expresadas en imperativos - que determinan las acciones a realizar sobre sus diferentes objetos y que permiten determinar el rigor de los argumentos. A partir de lo cual, Larvor manifiesta que a toda acción inferencial le corresponde siempre un mecanismo de control que define qué acciones o movimientos están permitidos[60] conformando un conjunto de "acciones permisibles". Un argumento – ya sea formal o esencialmente informal - es riguroso si las acciones inferenciales en él desplegadas se encuentran dentro del conjunto de acciones permisibles. Esto determina diferentes tipos de rigor, de acuerdo a si las inferencias dependen o no del contenido. Así, las derivaciones formales por incluir sólo inferencias neutrales al tópico determinan criterios universales, mientras que los argumentos esencialmente informales, al involucrar "topic-specific moves", determinan criterios locales, pues cada dominio genera su propio conjunto de acciones permisibles[61]. Larvor (2012, p. 728) señala que, dada la diversidad de dominios y la imposibilidad de predecir el surgimiento de nuevas acciones inferenciales, no puede haber una taxonomía completa de las acciones inferenciales y, en consecuencia, tampoco un tratamiento omniabarcativo como el que brinda el enfoque de la

[59]Otras de las funciones atribuídas a las pruebas matemáticas es la de posibilitar la comprensión de los resultados. Relacionado con esto último, unas de las principales líneas de argumentación contra el enfoque de la derivación formal consiste en afirmar que las derivaciones no pueden cumplir con esta función. Para una ilustración de esta línea argumental veáse Macbeth (2014) y Avigad (2020).

[60][...] for every kind of inferential action, there must be a corresponding means of control, to ensure rigour. Sometimes these controls are simple rules like 'do not divide by zero'. In other cases, these controls may be the fruit of mathematical research (think of the seventeenth-century experiments in exponentiation, or the nineteenth-century developments necessary to establish rules for handling infinite series)(Larvor, 2012, 728)

[61]They are rigorous if they conform to the controls on permissible actions in that domain (Larvor, 2012, 724).

derivación formal.

El modelo de prueba que brinda el enfoque de las acciones inferenciales logra dar una caracterización satisfactoria de la noción de rigor de los argumentos, ya sean estos derivaciones formales o argumentos esencialmente informales. Sin embargo, este modelo no proporciona una receta única para determinar la validez de los argumentos, sino el bosquejo de una serie de tareas para el estudio lógico de los diferentes argumentos. En ese bosquejo, la primera tarea consiste en la "identificación de las acciones inferenciales y sus objetos concretos". La segunda tarea es la "identificación de sus respectivos mecanismos de control y rigor", estos son adquiridos por el matemático en el curso de su formación y en su práctica, y muchas veces pueden estar implícitos. En ese caso se agrega la tarea de, hacer explícitos estos mecanismos, la cual debe ser llevada a cabo "por un filósofo-historiador más que por un historiador *tout court* ya que el resultado debe ser una explicación acerca de cómo son posibles las inferencias exitosas, esto es, debe ofrecer una aproximación lógica (en el sentido amplio de 'lógica' como estudio de las acciones inferenciales)"(Larvor, 2012, p. 728). La última tarea es finalmente la "explicación de los marcos lingüísticos de las acciones inferenciales". Aquí Larvor apunta a que las acciones inferenciales, con sus diferentes objetos, se combinan con el lenguaje natural para componer el argumento. La explicación de los marcos lingüstícos constituye un explicación acerca de cómo se da esta relación que permita arrojar luz sobre cómo ciertos movimientos se establecen como acciones inferenciales[62].

2.3.3. Un nuevo modelo para el análisis de las pruebas matemáticas

Partiendo del estudio lógico de las pruebas matemáticas, como el estudio de las acciones inferenciales involucradas en dichas pruebas, en *From Euclidean geometry to knots and nets* (2019) Larvor brinda un modelo para el estudio de las pruebas que involucran acciones inferenciales sobre diagramas. Ese artículo profundiza y precisa lo planteado en el artículo de 2012, a partir de la consideración de un elemento antes poco desarrollado, que es el rol fundamental de las representaciones matemáticas. Otro elemento importante en este artículo de 2019 está asociado a su tesis de que las acciones inferenciales sobre diagramas constituyen un tipo de *topic-specific move*, lo cual le permite extender sus aportes a otros tipos de argumentos. Ambos aspectos,

[62]Esta cuestión está relacionada con lo que desarrollamos en la sección anterior, donde veíamos que Grosholz señalaba la importancia del lenguaje natural que indica cómo interpretar y manipular las diferentes representaciones. Retomaremos esta cuestión más adelante (Secc. 2.3.4 y Cap. 3) ya que entendemos que es un elemento fundamental para explicar el surgimiento de nuevas acciones inferenciales a partir de los discursos heterogéneos producidos por la resolución de problemas en procesos de innovación matemática.

junto a una serie de observaciones críticas, nos permitirán en la siguiente sección (2.3.4) ver cómo el enfoque de las acciones inferenciales puede contribuir al estudio de la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas.

El modelo de análisis de las pruebas diagramáticas desarrollado por Larvor, parte del trabajo de Kenneth Manders, en especial, de los textos *The Euclidean Diagram*(1995) y *Euclid or Descartes? Representation and Responsiveness* (inédito). El primero está dedicado al análisis de las pruebas diagramáticas en los *Elementos* de Euclides y el segundo, al tratamiento que hace Descartes de problemas geométricos clásicos haciendo uso de herramientas algebraicas. El interés de Larvor en estos trabajos reside en que, en ambos casos, Manders muestra cómo ciertas prácticas de inferencias con diagramas son rigurosas, sin recurrir a la noción derivación formal. Larvor extrae cinco características lógicas de las pruebas diagramáticas euclídeas identificadas por Manders en su trabajo de 1995, que complementa con su propio enfoque de las acciones inferenciales expuestas en la forma de cinco observaciones. En base a estas observaciones, Larvor elabora un modelo de análisis de las pruebas diagramáticas que incluye criterios de rigor y es aplicable, no sólo a demostraciones de la geométria clásica, sino también a pruebas contemporáneas. A continuación haremos una presentación suscinta de estas observaciones para luego analizar los criterios de rigor propuestos, prestando especial atención a aquellos elementos que consideramos relevantes para el análisis de las estrategias de resolución de problemas en términos de inferencias.

Una de las principales características que Manders señala en su trabajo sobre las demostraciones en los *Elementos* de Euclides es que estas últimas están conformadas por diagramas y textos. Larvor recupera este aspecto fundamental y lo reformula en los términos de su enfoque lógico: las demostraciones euclídeas consisten de acciones inferenciales sobre diagramas y sobre objetos textuales, y dado que ambos modos de representación hacen al argumento, no resulta posible su eliminación. Más aún, Larvor entiende que este rasgo no es exclusivo de los *Elementos*, sino que incluso podemos encontrarlo en pruebas matemáticas contemporáneas. De esta manera, su primera observación señala que las pruebas matemáticas pueden consistir de elementos textuales y no-textuales (Larvor, 2019, p. 2720). Notemos que este modo de entender las pruebas diagramáticas es un aspecto ya presente en Larvor(2012), al que hacía referencia con los “marcos linguïstícos”de las acciones inferenciales.

Un rasgo común a los enfoques de Manders y Larvor es que ambos se dedican al estudio de prácticas de inferencia cuyas reglas son compartidas y están estabilizadas en una comunidad de expertos. A partir de esto, la segunda observación que realiza Larvor, establece la necesidad de hacer explícitas las reglas que permanecen implícitas en las pruebas, a fin de determinar el conjunto de acciones permisibles (Larvor, 2019, p. 2721). Esta observación está en consonancia con las tareas planteadas en Larvor (2012) que luego profundiza cuando indica que a fin de hacer explícitas estas reglas,

> we should look for shared proof-practices governed by rules that ensure reliable results—not every napkin-diagram or thought experiment will qualify. This is a (defeasible) reason for considering published proofs rather than spontaneous mathematical expressions (Larvor, 2019, p. 2721).

El enfoque de Larvor focaliza en las pruebas publicadas y, en consecuencia, no precisa recurrir a los aspectos cognitivos o psicológicos, a fin de identificar las reglas que regulan acciones inferenciales a la base de dichas pruebas. Esto último nos lleva a la cuarta observación donde se afirma que no es necesario recurrir a aspectos psicológicos o cognitivos individuales (Larvor, 2019, p. 2722).

En la primera observación, Larvor destacaba cómo las pruebas matemáticas podían incluir diferentes representaciones, en particular diagramáticas y textuales. Profundizando en esta dirección, advierte que un rasgo central de la matemática es el desarrollo de notaciones y representaciones que, con sus reglas de uso facilitan y hacen posible las diferentes inferencias (Larvor, 2019, p. 2721), de modo que la traducción de una prueba de un idioma o tipo de representación a otro, supone un cambio en las acciones inferenciales involucradas. A partir de esta tercera observación, que engloba con la frase *tradutore traditore*, nuestro autor señala dos consecuencias. La primera tiene que ver con un aspecto ya señalado en Larvor(2012) que es que la traducción de una prueba matemática a una derivación formal conlleva una distorsión o pérdida. Aquí precisa y señala que es posible que "la prueba utilice movimientos inferenciales que son posibles usando exactamente sólo ese tipo de representación, gobernados exactamente por esas reglas"(Larvor, 2019, p. 2722) y que su transformación en una derivación resulte así en una imposibilidad de explicar su capacidad inferencial. La primera consecuencia que se deprende de esta observación es que debemos analizar las pruebas en su forma e idioma (matemático) original.

La segunda consecuencia destaca lo que constituiría un aspecto positivo de la traducción que consiste en que "A well-chosen translation can make more information available, or it might dispose of superfluous information. It may also change the range of actions available to the mathematician"(Larvor, 2019, p. 2722). Sin embargo, es conveniente destacar que aparece aquí un segundo sentido de traducción que ya no es el de traducción en una derivación formal que vimos recién. En consonancia con el planteo de Manders, y también con lo que observamos en la sección anterior con Grosholz, Larvor aquí está planteando un aspecto fundamental ausente en su artículo de 2012, esto es, que los matemáticos se mueven de un dominio a otro y que para ello son fundamentales los cambios de representación. Si los movimientos inferenciales están atados a ciertos tipos de representaciones, la interacción entre diferentes dominios con sus respectivas representaciones hacen posible ampliar el rango de acciones disponibles. En este segundo sentido, la traducción aparecería como un intento de conceptualizar las relaciones entre dominios que los matemáticos establecen en sus prácticas, sin embargo, tal como observamos en la sección dedicada al enfoque de Grosholz (sección 2.2.2), plantear estas relaciones en términos de traducción no resulta adecuado. Sin ir más lejos, la primera dificultad que surge es que si con la traducción se eliminan las representaciones del dominio traducido, entonces se eliminan las inferencias que son posibles con esas representaciones, de modo que no hay en realidad una ampliación del rango de acciones disponibles. Así, si recurrimos a la traducción para caracterizar las relaciones entre dominios nos encontramos con serias dificultades para explicar la ampliación del rango de acciones disponibles, ya sea por anexado o por generación de nuevas acciones. A partir de lo expuesto, acordamos con la primer consecuencia, y con ello, con la necesidad de analizar las pruebas matemáticas en su formulación original. Sin embargo, no acordamos con la segunda consecuencia, entendiendo que es un punto que precisa de mayor elaboración y del que nos ocuparemos en la próxima sección donde plantearemos algunas objeciones.

Para finalizar con la serie de observaciones, Larvor señala que el trabajo de Manders focaliza en las pruebas diagramáticas que justamente constituyen casos paradigmáticos donde los intentos de transformación en una derivación formal fracasan. Esto es, las pruebas diagramáticas constituyen pruebas *esencialmente infomales* y en tales casos, afirmar que una traducción no es rutina y que las inferencias en el caso de una derivación formal no plantean una reconstrucción estricta de las inferencias dadas en un argumento visual suena convincente[63]. A partir de esto, Larvor retoma la contraposición entre inferencias textuales y no textuales[64] y la analiza en relación con su dependencia del contenido, insistiendo en señalar un punto fundamental: que las pruebas diagramáticas no deben su carácter esencialmente informal a los elementos diagramáticos, sino

[63]the claim that the translation is not routine, and that the inferences in the formal derivation really are not tidied up versions of the inferences in the visual argument is especially compelling"(Larvor, 2019, p. 2723).

[64]Esto es, la contraposición entre inferencias no-diagramáticas y diagramáticas.

a la no-universalidad (*topic-specificity*) de los movimientos inferenciales:

> The non-universality of the moves available in some notational or diagrammatic practice is what matters for this argument. This is what Euclidean diagram-use has in common with other inferential practices that resist translation into formal logic, whether they employ diagrams or not (Larvor, 2019, p. 2724).

Como observamos en la sección anterior, Larvor(2012) sostiene que las pruebas matemáticas son argumentos esencialmente informales, en tanto que involucran acciones que manipulan alguna modalidad del contenido. En el caso de las pruebas diagramáticas, sus movimientos no universales (*topic-specific*) se encuentran codificados en determinados sistemas representacionales. En estos casos, se trata de acciones que manipulan una representación del contenido, modalidad (II). Esto hace que la mayor parte de las observaciones de Larvor sean extensibles a otros tipos de argumentos que involucran acciones del tipo (II), exceptuando aquellas características específicas que aparecen atadas a sistemas representacionales no textuales, que son justamente las que convierten las pruebas diagramáticas en casos paradigmáticos de argumentos esencialmente informales.

Una vez desarolladas estas observaciones que recuperan los trabajos de Manders e incorporan el enfoque de acciones inferenciales, Larvor (2019, p. 2733-34) formula los siguientes criterios para el análisis y la evaluación de los argumentos diagramáticos:

(a) Las representaciones deben estar disponibles para su examen público

(b) La información obtenida de los diagramas no debe ser métrica (a fin de que las inferencias no sean vulnerables a deformaciones locales)

(c) Debe ser posible poner las inferencias (diagramáticas) en relación sistemática con otras prácticas matemáticas inferenciales

De esta manera, el primer criterio exige hacer explícitas las reglas que gobiernan las diferentes acciones inferenciales, así como los mecanismos que otorgan rigor a los argumentos. Este criterio recupera de manera directa la primera observación, así como la tercera y la cuarta, estas últimas relativas al estudio de pruebas publicadas en su idioma (matemático) original y la correspondiente exclusión de factores psicológicos individuales o cualquier recurso a la noción de intuición. Con respecto a este último punto, Larvor señala que las imágenes o modelos mentales son en realidad acciones inferenciales que han sido internalizadas y, en consecuencia, este primer criterio exige que cualquier referencia a estos elementos internos debe hacer explícita la práctica diagramática correspondiente[65]. El segundo criterio (b) constituye una modificación de la distinción entre "exactness" y "co-exactness" de Manders y es exclusivo para el análisis de acciones inferenciales diagramáticas. Como estamos interesados en aquellos elementos susceptibles de ser aplicados a otros argumentos más allá de las pruebas disgramáticas, no lo consideraremos por ahora.

La formulación del criterio (c), por otra parte, constituye una profundización sustancial de Larvor(2019) con respecto a su trabajo previo, ya que considera un aspecto central de la matemática que es la relación entre diferentes dominios y su rol para garantizar el rigor de las pruebas que contienen diferentes tipos de prácticas inferenciales. Pero resta aún indicar, en qué consiste esta relación sistemática y para esto, como vimos, Larvor señala en su tercera observación que las acciones inferenciales a menudo son posibilitadas por determinados tipos de representaciones. Con esta observación las representaciones desarrolladas y utilizadas por los matemáticos adquieren gran relevancia[66] y el autor termina por sostener que la posibilidad de establecer relaciones sistemáticas entre diferentes prácticas inferenciales depende de la presencia de prácticas de representación estables, ordenadas y gobernadas por reglas (Larvor, 2019, p. 2725). De modo que una práctica inferencial (relativamente estable) es rigurosa si relaciona sus prácticas de representación con otras porciones de la matemática, de las que se sabe están bien establecidas (Larvor, 2019, p. 2726).

A partir de lo anterior, Larvor diagnostica por qué la cuestión del rigor de los argumentos diagramáticos ha adquirido tanta centralidad en la reflexión filosófica contemporánea. Larvor señala que en la matemática contemporánea las prácticas de representación no diagramáticas constituyen mayoritariamente las prácticas más establecidas. Por lo tanto, las prácticas inferenciales diagramáticas sólo pueden volverse respetables cuando son puestas en relación sistemática con otras prácticas "textuales", esto es, no diagramáticas, bien establecidas. Es importante notar que el criterio (c) es aplicable - como el mismo autor afirma (Larvor, 2019, p. 2734)- también

[65]where mathematicians and others talk of 'mental models', they are really talking about internalised diagrammatic practices (just as reliable mental arithmetic is internalised pencil-and-paper arithmetic). If that is right, then in order to show that a proof that seems to appeal to a mental model is in good logical order, we have to identify the corresponding diagrammatic practice, show that criteria a–c are true of it and then carry out a Manders-style analysis (Larvor, 2019, p. 2729)

[66]Y con ello, las acciones inferenciales que manipulan representaciones del contenido (tipo II). En Larvor(2019) hay un mayor énfasis en este tipo de acciones. Atendiendo a lo desarrollado sobre la noción de paper-tools en Grosholz en la próxima sección destacaremos cómo este tipo de acciones son las más adecuadas para la caracterización de las inferencias matemáticas involucradas tanto en las pruebas como en la resolución de problemas.

para el análisis lógico de pruebas que contienen diferentes prácticas inferenciales, aun cuando no haya en ellas acciones inferenciales diagramáticas. Después de todo, como vimos en la quinta observación, las inferencias diagramáticas constituyen sólo un ejemplar específico de las acciones que manipulan representaciones del contenido. Así, si quisiéramos determinar el rigor de ciertas acciones posibilitadas por la interacción de dominios, como lo es el caso de la resolución de problemas, podríamos echar mano de este criterio.

Ahora bien, el recurso a (c) requiere precisar más en qué consiste esta “relación sistemática”. Luego de presentar los tres criterios, Larvor pasa a aplicarlos a una serie de ejemplos y estudios de casos de pruebas diagramáticas. Ya advertimos que en la tercera observación nuestro autor habla de esta relación como la traducción de procedimientos de un modo de representación a otro. Este sentido de traducción aparece en la aplicación del criterio (c) en primer lugar, al trabajo de Descartes sobre problemas geométricos clásicos utilizando álgebra y, en segundo lugar, a la “multiplicación japonesa” y su traducción a numerales indoarábigos. Con respecto al primer caso, notemos que no aclara en qué consiste la relación sistemática establecida entre álgebra y geometría en Descartes[67]. El segundo ejemplo, que refiere al procedimiento de multiplicación, tampoco es satisfactorio, pues no establece una relación sistemática sino que hace referencia a un único procedimiento. En el resto de las aplicaciones del criterio (c) encontramos estudios de casos, principalmente desarrollados por otros autores[68], sin referencia alguna a una traducción de procedimientos. Tampoco encontramos en ellos una explicación satisfactoria de las relaciones sistemáticas establecidas entre las prácticas inferenciales textuales y no textuales sino que el autor sólo se limita a afirmar el cumplimiento del criterio (c). Esta explicación poco satisfactoria parece desprenderse del énfasis puesto por Larvor en el primer criterio (a), que exige que toda referencia a modelos mentales sea reemplazada por representaciones diagramáticas externas. Tal énfasis sería atribuible a un intento por parte de Larvor, de evitar las referencias a elementos internos (mentales) predominantes en los abordajes previos de las pruebas diagramáticas. Puesto que, como señala Larvor (2019, p. 2734), no es posible aplicar las nociones de validez e invalidez

[67]Dejando de lado que hay ciertos procedimientos algebraicos que no tienen significación geométrica (Cfr. Cap. 4 y 5 dedicados a nuestro estudio de caso).

[68]Entre estos casos menciona los diagramas de Argand utilizados para realizar cálculos con números complejos y el establecimiento de relaciones sistemáticas con la geometría algebraica. También dedica varias páginas al estudio de caso de las pruebas diagramáticas en teoría de nudos respecto de las cuales afirma que son puestas en relación sistemática con el álgebra. Para esto últimos trabajos parte de la presentación de De Toffoli, S. y Giardino, V. (2015). An inquiry into the practice of proving in low-dimensional topology. En Lolli, G., Panza, M., y Venturi, G., editores, *From Logic to Practice: Italian Studies in the Philosophy of Mathematics*, pp. 315–336. Springer International Publishing, Cham y De Toffoli, S. y Giardino, V. (2016). Envisioning transformations—the practice of topology. En Larvor, B., editor, *Mathematical Cultures*, pp. 25–50, Cham. Springer International Publishing.

sobre esos elementos internos y, por tanto, la referencia a ellos impide el tratamiento lógico de las pruebas diagramáticas. De este modo, el cumplimiento del primer criterio es condición necesaria para la aplicación de los demás criterios y, con ello, para el planteo de la validez de las pruebas. Sin embargo, entendemos que el descuido del tercer criterio(c), podría conducir a dificultades similares, dado que como nuestro autor ya recalcó, la presencia de diferentes prácticas inferenciales en las pruebas matemáticas aparece como un rasgo fundamental de la disciplina que un tratamiento lógico debería abordar. De esta manera, y dada la importancia de este tercer criterio, sería deseable una caracterización de esta relación sistemática que haga uso del aparato lógico y la noción de rigor desarrollados en Larvor (2012).

Pese a las limitaciones señaladas, estimamos que el enfoque de las acciones inferenciales desarrollado por Larvor puede realizar aportes sustanciales a la caracterización de la dimensión lógica de la resolución de problemas. Pues su visión de la lógica permite considerar argumentos que involucran acciones sobre diferentes tipos de objetos, y por tanto heterogéneos, al mismo tiempo que incluye consideraciones pragmáticas relativas a las inferencias. Ambos elementos son fundamentales, como vimos en la sección dedicada al enfoque de Emily Grosholz, a fin de que la lógica deje de tener un rol subisidiario en la caracterización de la matemática. Con vistas a que el trabajo de Larvor focaliza en pruebas, no en resolución de problemas, y dadas las limitaciones señaladas, en la próxima sección mostraremos, cómo ciertos aspectos del enfoque de Larvor pueden recuperarse y hacerse extensibles para dar con una caracterización lógica satisfactoria de la resolución de problemas.

2.3.4. Acciones inferenciales y resolución de problemas

A través de estas secciones dedicadas al enfoque de las acciones inferenciales desarrollado por Larvor (2012 y 2019) pudimos observar que su perspectiva lógica incorpora consideraciones pragmáticas sin eliminar la heterogeneidad discursiva de la matemática. Ambos aspectos son necesarios, tal como destacamos anteriormente (2.2.3), a fin de abordar la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas. En vistas a que el enfoque de Larvor no está específicamente orientado a la resolución de problemas, en la presente sección resaltaremos aquellos elementos que son relevantes para la caracterización esta actividad. En este marco el primer elemento que recuperamos del enfoque de las acciones inferenciales es la tesis de que las pruebas matemáticas son argumentos esencialmente informales, pues dependen tanto de la forma como del contenido. A partir de lo anterior, en primer lugar, consideramos que las estrategias de resolución de problemas en su dimensión lógica, pueden ser caracterizadas - al igual que las pruebas - como sistemas de acciones inferenciales. En segundo lugar, sostenemos que las acciones inferenciales en matemática constituyen acciones sobre representaciones del contenido. Es importante destacar aquí que la primera modalidad de contenido (the subject-matter is the object of an inferential action) supondría hablar de una manipulación directa de los objetos matemáticos y tal perspectiva resulta lógica y epistemológicamente muy problemática. Mientras que con respecto a la última modalidad (the subject-matter is manifested or expressed in an inferential action) Larvor no desarrolla ningún ejemplo de acción inferencial perteneciente a la matemática, y resulta difícil concebir en qué consistirían tales acciones. Asimismo, encontramos que las consideraciones en Larvor (2019) están atadas a acciones inferenciales sobre representaciones y esto, entendemos, no sería sólo una cuestión de énfasis, sino sustancial, por estar atada a características fundamentales del trabajo matemático. Como observamos en la sección dedicada a Grosholz, una perspectiva epistemológica satisfactoria debe poder dar cuenta del rol fundamental de las representaciones en matemática. A partir de lo anterior, planteamos así la necesidad de focalizar exclusivamente en acciones sobre representaciones del contenido, lo que nos permitirá considerar las dimensiones lógica y epistemológica de las estrategias de resolución de problemas.

A partir de la caracterización de las estrategias de resolución en términos de acciones inferenciales, recuperamos para el análisis de las mismas, la primera tarea planteada en Larvor(2012) relativa a la identificación de las acciones inferenciales y sus objetos concretos. Es importante aquí incorporar a dicha tarea las precisiones realizadas por Larvor (2019), no sólo su requisito de focalizar en representaciones estabilizadas y externas, sino también que tal identificación debe considerar las acciones en su idioma matemático original. Esto último, está en consonancia con lo planteado por Grosholz - incluidas las observaciones realizadas al enfoque de Cellucci - con su exigencia de que el estudio de las estrategias considere las representaciones efectivamente utilizadas por el matemático en la resolución de los problemas específicos. Tanto Grosholz como Larvor apuntan al hecho de que ciertos procedimientos – acciones inferenciales en el caso de Larvor - sólo son posibles a partir de determinadas representaciones.

El requisito de Larvor (2019) de analizar las acciones inferenciales en su idioma original marca una diferencia tajante con los enfoques lógicos predominantes y su tendencia homogeneizadora, pues permite considerar argumentos heterogéneos. Estos argumentos, recordemos, son aquellos que se caracterizan por la presencia de diferentes prácticas inferenciales y representacionales.

Este último aspecto se sigue de que las acciones inferenciales están codificadas en diferentes notaciones matemáticas. A partir de lo anterior, Larvor (2019) destaca un rasgo fundamental, no sólo para la caracterización de las pruebas sino también – como observamos en Grosholz – para la resolución de problemas, que es la interacción de dominios. Para Larvor (2019) la interacción de dominios es un elemento fundamental ya que permite ampliar el rango de acciones disponibles para el matemático. Al igual que en Grosholz, para Larvor la interacción de dominios permite aplicar procedimientos provenientes de otros áreas de la matemática, así como también la elaboración de nuevos procedimientos. Ahora bien, la interacción de dominios en Larvor (2019) es transformada en un criterio para determinar el rigor de las prácticas inferenciales, que exige el establecimiento de interrelación sistemática entre diferentes prácticas de representación e inferencia. Sin embargo, advertimos que tanto el desarrollo conceptual como la aplicación del criterio de interrelación sistemática, presenta dificultades. Como nuestro objetivo es el estudio de la resolución de problemas y la interacción de dominios constituye un elemento fundamental a considerar, plantearemos algunas alternativas para sortear las dificultades en Larvor (2019)[69].

La caracterización que ofrece Larvor (2019) de la relación entre dominios, como vimos, está atada a las nociones de traducción y de interrelación sistemática entre prácticas de representación. Entendemos que si partimos de una caracterización alternativa como lo es, por ejemplo, la desarrollada por Grosholz, es posible visualizar cómo el enfoque de Larvor puede realizar aportes fundamentales al estudio de la resolución de problemas. Entendemos que la incorporación del enfoque de Grosholz no entra en conflicto con el enfoque de Larvor, ya que se basa en los puntos de contacto y la complementariedad que hallamos entre los enfoques de ambos autores. A saber, ambos autores acentúan el rol de las notaciones matemáticas especializadas, en el caso de Larvor estas notaciones son representaciones del contenido y son los objetos de las acciones inferenciales que hacen a los argumentos matemáticos esencialmente informales, mientras que Grosholz caracteriza dichas representaciones como herramientas – *paper-tools*-, las cuales también pueden ser vistas como representaciones de contenido, ya que por su dimensión intelectual encarnan conocimiento (Cfr. 2.2.1). Dichas herramientas, señala Grosholz, se encuentran gobernadas por reglas definidas por las tradiciones de representación, mientras que para Larvor las que determinan sus reglas de uso son las prácticas de representación. De esta manera, ambos autores dirigen sus estudios representaciones matemáticas estables y gobernadas por reglas que son el resultado de la investigación matemática y que, por tanto, permanecen atadas al conocimiento disponible.

[69] Esta alternativas están motivadas y atienden específicamente a nuestro tema de estudio que es la resolución de problemas que llevan a resultados innovadores.

Habiendo presentado los puntos de contacto entre ambos autores, volvamos aquí a Grosholz y su caracterización de la relación entre dominios. Según Grosholz, como ya observamos (2.2.3), dicha relación toma la forma de una integración parcial, haciendo que la noción de traducción no resulte adecuada para su caracterización. En consonancia con esto último, Grosholz muestra cómo la integración parcial de dominios está motivada por, y no puede ser desligada de la resolución de problemas. Profundizando en este último aspecto, nuestra autora enfatiza que en la resolución de problemas, las relaciones establecidas por los matemáticos entre diferentes áreas, no consisten en traducir procedimientos de un modo de representación a otro, sino en cambio, en la búsqueda y elaboración de procedimientos con reglas para el uso en tándem de las representaciones provenientes de los diferentes dominios. Consideramos que la conceptualización de Grosholz de la relación entre dominios en términos de integración parcial resulta satisfactoria y, en consecuencia, proponemos que debe reemplazar a la noción de interrelación sistemática propuesta por Larvor (2019). Tal reemplazo permite precisar aspectos no abordados apropiadamente con la noción de interrelación sistemática, más específicamente, permite definir cuáles son los elementos de las prácticas de representación a relacionar y poner bajo consideración las representaciones pertenecientes a diferentes dominios que son relevantes para el planteo y la resolución del problema.

Una vez acotados los elementos de las prácticas de representación que se vinculan en la integración parcial queda pendiente profundizar en su dimensión lógica, y con esto, pasar de la consideración de las representaciones relevantes para la resolución de problemas, a las acciones inferenciales que son posibles con tales representaciones. De esta manera, entramos al núcleo del tratamiento lógico de las estrategias de resolución y se nos plantea la cuestión acerca de la forma que podría tomar este tratamiento. Para responder a esta pregunta, lo primero es retomar un aspecto que planteamos al inicio de esta sección, esto es, que las estrategias de resolución de problemas pueden ser vistas como sistemas de acciones inferenciales, en particular, sistemas que contienen diferentes prácticas inferenciales producto de la interacción de dominios. Con respecto a este último, Larvor (2019, p. 2719) señala que para el estudio de esta clase de argumentos un punto importante es mostrar cómo los movimientos o acciones inferenciales no violan los requisitos de rigor de ninguna de las prácticas inferenciales involucradas. La necesidad explicar cómo las acciones inferenciales provenientes de diferentes prácticas, pueden dar lugar a argumentos rigurosos sólo aparece un vez mencionada en Larvor (2019), además, resulta llamativo que tal mención no se da en el contexto de la caracterización de la interrelación sistemática entre diferentes prácticas. Nuevamente, remarcamos que habría sido deseable que nuestro autor introdujera en este punto el aparato lógico desarrollado en Larvor (2012), donde presenta su noción de rigor como el ajuste de las acciones inferenciales con el conjunto de acciones permisibles definidas por su dominio.

Entendemos que la noción de rigor desarrollada por Larvor (2012) puede realizar aportes fundamentales a la explicación de cómo argumentos heterogéneos pueden estar constituídos por acciones inferenciales provenientes de diferentes prácticas y, aun así ser rigurosos, y con esto podría también dilucidar aspectos centrales de la resolución de problemas. Recordemos aquí, que Grosholz plantea que las estrategias de resolución de problemas están orientadas a la búsqueda y elaboración de nuevas reglas para el uso, en tandem, de las representaciones provenientes de diferentes dominios (Cfr. 2.2.2). Además, Grosholz señala que estas nuevas reglas son evaluadas en el marco del conocimiento disponible. El enfoque de Larvor con su noción de rigor luce promisorio para caracterizar cómo se da esta evaluación, pues como ya observamos, los mecanismos de rigor y control son el resultado de la investigación y, por tanto, están atados al conocimiento establecido. En consonancia con esto último, para el estudio de la dimensión lógica de las estrategias de resolución, estimamos importante recuperar la segunda tarea planteada en Larvor (2012). Esta segunda tarea, reformulada para el tema que nos ocupa, toma la forma de la identificación de los mecanismos de rigor y control asociados a las acciones inferenciales que constituyen las estrategias de resolución de problemas.

Por último, queremos señalar que queda pendiente el estudio de las nuevas acciones inferenciales generadas por la interacción de dominios y sus mecanismos de rigor, así como la consecuente explicación de cómo estas nuevas acciones podrían generar cambios en las condiciones de resolución de los problemas planteados. Para estas cuestiones pensamos que puede ser de utilidad recuperar la tercera tarea planteada en Larvor (2012) relativa a la explicación de los marcos lingüísticos de las acciones inferenciales y el rol del lenguaje natural, Este último indica cómo interpretar y manipular las diferentes representaciones haciendo que ciertos procedimientos se establezcan como acciones inferenciales con sus respectivos mecanismos de rigor. Sin embargo, los detalles puntuales de cómo incorporar esta tercer tarea, así como de la los elementos que hemos delineado para un tratamiento lógico de las estrategias a lo largo de esta sección, los dejamos para el próximo capítulo. En el capítulo 3, que cierra la primera parte de nuestro trabajo, desarrollaremos un modelo para el análisis de las estrategias de resolución de problemas, que considere, tanto su dimensión lógica como la epistemológica por medio de la incorporación de los aportes y las observaciones críticas a los enfoques presentados en este capítulo.

Capítulo 3

Nuestra propuesta

En el capitulo anterior nos dedicamos al examen de diferentes enfoques dentro de la filosofía de la práctica matemática. Cada uno de ellos aporta elementos sustanciales para una caracterización satisfactoria de las estrategias de resolución de problemas que llevan a resultados innovadores. De esta manera, Grosholz presenta una perspectiva epistemológica enriquecida que destaca, con su noción de "experiencia matemática", la centralidad de las herramientas representacionales desarrolladas por los matemáticos, la heterogeneidad inherente al discurso matemático producida por la integración parcial de dominios para la resolución de problemas, así como el rol central de la historia para el estudio de la dimensión pragmática de las representaciones matemáticas. Por otro lado, en complementariedad con la perspectiva epistemológica de Grosholz, introducimos el enfoque de las acciones inferenciales de Larvor, que abre la posibilidad al estudio lógico de las estrategias de resolución de problemas. Sin embargo, como ya observamos, el enfoque de Larvor presenta algunas limitaciones y además no se ocupa específicamente de la resolución de problemas. Asimismo, pese a las observaciones realizadas con respecto a los enfoques considerados, finalizamos el capítulo anterior con una serie de indicaciones que nos permitan recuperar los aportes sustanciales de Grosholz y de Larvor. Continuando con lo trabajado hasta el momento, nos planteamos como objetivo para el presente capítulo la elaboración de un marco para el análisis de las estrategias de resolución de problemas desplegadas en los argumentos matemáticos.

El marco que propondremos parte, en primer lugar, de la noción de "análisis de las proposiciones" con la que Grosholz bosqueja el proceso de resolución de problemas, que tiene como punto de partida un problema a resolver, en base al cual se formula una hipótesis. Esta hipótesis constituye a su vez otro problema, cuya resolución constituiría una condición suficiente para la resolución del problema original. En términos de lo desarrollado previamente respecto a la interacción de dominios (Cfr. 2.2.2), el problema anexado constituye en este caso el "problema-hipótesis" debido a su carácter provisional, pues es necesario determinar su plausibilidad, esto es, determinar si su resolución constituye efectivamente una solución del problema original.

A partir de lo anterior, las secciones siguientes están dedicadas a la elaboración de un marco para el estudio de las estrategias de resolución de problemas que, atendiendo a los enfoques considerados en el capítulo anterior y sus puntos de contacto, se plantea como el estudio de las estrategias de resolución desplegadas en argumentos matemáticos. El marco propuesto consta de cinco actividades divididas en tres bloques: el primer bloque (sección 3.1) analiza la dimensión epistemológica de las estrategias y está dedicado al estudio de las representaciones desplegadas en los argumentos matemáticos tomando en cuenta los aportes de Grosholz. Desde esta perspectiva, las estrategias están orientadas a la búsqueda de nuevas reglas para el uso, en tandem, de las representaciones provenientes de los diferentes dominios involucrados en la resolución de problemas. La sección 3.1 finaliza señalando que a fin de determinar si el problema-hipótesis constituye efectivamente una solución del problema original - esto es, a fin de determinar su plausibilidad, es necesario que las nuevas reglas de uso de las representaciones sean evaluadas en el marco del conocimiento establecido. La necesidad de evaluar las nuevas reglas de uso es un aspecto efectivamente planteado por Grosholz, pero no desarrollado en mayor detalle.

El segundo y tercer bloque de nuestro marco intenta dar una respuesta a la cuestión de cómo las nuevas reglas para el uso coordinado de las representaciones son evaluadas, a fin de contribuir a la explicación de los cambios en las condiciones de resolución de los problemas planteados. Con este objetivo, recuperamos el enfoque de las acciones inferenciales y sus mecanismos de rigor desarrollado por Larvor y, con ello, pasamos a considerar la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas, la que es complementaria con la dimensión epistemológica. De esta manera, nuestro segundo bloque (sección 3.2) tiene por objetivo la identificación y el estudio de las estrategias de resolución de problemas entendidas como sistemas de acciones inferenciales. Por último, el tercer bloque (sección 3.3) muestra, cómo la evaluación de las reglas para el uso coordinado de las representaciones provenientes de los diferentes dominios involucrados en la resolución de problemas puede ser caracterizada de forma más precisa. Con este objetivo, recurrimos a la noción de mecanismos de rigor y control presente en el enfoque de las acciones inferenciales desarrollado por Larvor. Atendiendo a las observaciones críticas realizadas en el capítulo anterior, en esta sección (3.3) partiremos de la distinción entre dos nociones de rigor para los argumentos.

3.1. Dimensión epistemológica de las estrategias de resolución de problemas

En esta primer sección nos proponemos atender la dimensión epistemológica de las estrategias de resolución de problemas. Analizadas desde esta dimensión, las estrategias de resolución son caracterizadas como la búsqueda de reglas para el uso, en tandem, de representaciones provenientes de diferentes dominios. Tales reglas son exploradas, introducidas y evaluadas en la actividad misma de resolución de problemas. De esta manera, las nuevas reglas para el uso coordinado de diversas representaciones dependen tanto del problema de origen, como del problema-hipótesis y, no menos importante, también dependen de la relación entre las porciones relevantes de los dominios que se establece con vistas a la resolución del problema que la motiva.

A partir de lo expuesto, nuestro marco propone la siguiente primer actividad: (1) el estudio de las representaciones presentes en los argumentos en los cuales las estrategias de resolución de problemas son desplegadas. Tal estudio focaliza en la dimensión pragmática de las representaciones en el sentido planteado por Grosholz y atendiendo a las diferentes prácticas de representación que determinan las reglas de uso de las herramientas matemáticas involucradas. Asimismo, reparando en el hecho que la integración parcial de dominios para la resolución de problemas específicos hace que los argumentos donde se despliegan las estrategias sean fundamentalmente heterogéneos, dividimos el estudio de las representaciones en tres tareas. La primera de ellas (1a), consiste en la identificación y estudio de las representaciones donde se plantea el problema a resolver. Esta primera tarea tiene como objetivo, indagar el modo en que el despliegue y transformación de las *paper-tools* del dominio de origen posibilitan el planteo del problema a resolver, al mismo tiempo que prescribe cuáles son las mejores formas de abordaje, delimitando así el espacio de búsqueda y las condiciones para su resolución. Por otro lado, la segunda tarea (1b) tiene por objeto el estudio de las representaciones provenientes de los dominios anexados, más específicamente, las porciones de esos dominios que se estiman relevantes para la resolución del problema original y, procede de forma análoga a la primera (1a), pero ahora con el foco puesto en el planteo del problema-hipótesis y sus condiciones de resolución.

La tarea que completa nuestra primera actividad consiste en (1c) y plantea la identificación de las representaciones desplegadas en las porciones del argumento donde se resuelve el problema desde el trasfondo del estudio de las representaciones analizadas previamente. En otras palabras, (1c) focaliza en las representaciones cuyas reglas de uso son el resultado de la exploración de las relaciones entre herramientas específicas provenientes de los diferentes dominios[1], en el espacio combinatorio generado justamente a partir de la interacción de dominios. Tales reglas posibilitan, en consecuencia, el empleo en tandem de las diferentes representaciones y, con ello, hacen posible el despliegue conjunto de los procedimientos provenientes de diferentes dominios en un mismo argumento. Ahora bien, en tanto que las nuevas reglas son el resultado de la exploración de relaciones entre las herramientas específicas provenientes de los diferentes dominios, ellas pueden ser de diversa índole. Por ejemplo, ellas pueden estar asociadas al desarrollo de una notación que retenga simultáneamente aspectos de las herramientas relacionadas, pero también puede ser que la exploración resulte en un nuevo uso para una representación ya existente, o bien incluso que enlacen de forma explícita las herramientas específicas provenientes de los diferentes dominios. De esta manera, las nuevas reglas para el uso en tándem pueden depender más o menos de una u otra de las prácticas de representación involucradas.

Con lo desarrollado hasta aquí, tenemos que las nuevas reglas para el uso en tandem de diferentes representaciones son el resultado de la exploración del espacio combinatorio generado por la interacción de dominios para la resolución de problemas. De suerte que todo intento, como dijimos, de introducción y explicación de estas reglas debe incorporar consideraciones en torno a la interacción que hace posible su elaboración. Este último aspecto nos lleva a la segunda actividad propuesta por nuestro marco y que cierra el estudio de la dimensión epistemológica de las estrategias de resolución de problemas. Específicamente, proponemos como segunda actividad de nuestro esquema la siguiente: (2) el estudio de la relación entre prácticas de representación - asociadas a los dominios involucrados en el planteo y la resolución del problema - a través de la identificación del patrón de articulación de las representaciones presentes en los argumentos en los que las estrategias de resolución de problemas son desplegadas. La integración parcial de dominios depende, como hemos venido destacando, tanto de sus características específicas como del problema a resolver, lo cual requiere poner en relación elementos fundamentalmente dispares. Dada la disparidad entre las diferentes herramientas a relacionar, encontraremos en los argumentos donde se despliegan las estrategias de resolución de problemas, diferentes tipos de combinación de representaciones. A partir de esto último, es posible observar que las representaciones provenientes de los distintos dominios pueden aparecer, yuxtapuestas, superpuestas, etc., evidenciando así diversos modos de integración. En consonancia con lo desarrollado hasta ahora, el estudio de las relaciones entre las diferentes prácticas de representación, toma como

[1]identificadas en (1a) y (1c)

punto de partida el análisis de las herramientas representacionales identificadas en la primera actividad, dado que se orienta a examinar, cómo ellas son combinadas. Sin embargo, más allá de las representaciones especializadas reseñadas en la primera actividad, en un segundo paso se incorpora un aspecto fundamental que es la presencia del lenguaje natural que acompaña a las herramientas dispares que se combinan (Cfr. Secc. 2.2.2).

Los diferentes grados de integración explicarían, por qué las reglas para el uso en tandem de las diversas representaciones y, con ello las herramientas que encontramos en las porciones de los argumentos dedicadas a la resolución de problemas (1c), dependen en diferentes grados de las prácticas que las hacen posibles. El lenguaje natural viene a hacer explícitas estas dependencias, en tanto que explica las formas novedosas de enlazar las diferentes herramientas que no existían de forma previa a la integración de dominios y que, en consecuencia, no se encuentran determinadas por ninguna de las prácticas de representación involucradas precisando así ser explicadas a través del lenguaje natural. El lenguaje natural constituye, por lo tanto, un elemento fundamental para la introducción y explicación de las nuevas reglas para el uso en tandem de las diversas representaciones. Por otro parte, la explicación de las nuevas reglas establece formas novedosas de enlazar las *paper-tools* logrando, en consecuencia, relacionar los procedimientos asociados a tales herramientas. En particular, ellas permiten relacionar aquellos procedimientos provenientes de los diferentes dominios que posibilitan el planteo de los problemas y establecen sus condiciones de resolución. De modo que el lenguaje natural manifiesta en este caso ser también una herramienta indispensable, una lengua franca, a fin de poner en contacto los procedimientos dispares y determinar si es posible o no, establecer una relación entre las condiciones de resolución de los diferentes problemas planteados. Esto es, la introducción y explicación de las reglas por medio del lenguaje natural permite relacionar las condiciones del problema original con las condiciones del problema-hipótesis.

Ahora bien, como señalamos al inicio de esta sección, las nuevas reglas para el uso coordinado de las representaciones provenientes de diferentes dominios precisan ser evaluadas en el marco del conocimiento establecido. Esta evaluación es necesaria a fin de determinar, si la solución del problema-hipótesis constituye una condición suficiente para la resolución del problema original. Como consecuencia de lo anterior, y a fin de comprender, cómo son posibles los cambios en las condiciones de resolución de los problemas matemáticos, es preciso explicar previamente cómo se realiza la evaluación de las reglas para el uso, en tandem, de las diversas representaciones. Tal como mencionamos en el capítulo anterior (Cfr. Secc. 2.2.2), Grosholz deja entrever en sus diferentes trabajos que la evaluación de las nuevas reglas de uso tiene que ver principalmente con restricciones impuestas por el dominio de origen, sin embargo, no profundiza sobre esta cuestión.

Estimamos que el cambio en las condiciones de resolución de problemas constituye un aspecto fundamental de las estrategias de resolución de problemas que conduzcan a resultados innovadores y demanda, en consecuencia, una explicación de la evaluación de las nuevas reglas para el uso coordinado de diversas representaciones. Nuestro marco intenta justamente dar una respuesta a dicha cuestión, recuperando para ello el enfoque de las acciones inferenciales desarrollado por Larvor (2012 y 2019). Intentaremos arrojar luz sobre el proceso por el que las nuevas reglas de uso de las representaciones son evaluadas contribuyendo así a la explicación de los cambios en las condiciones de resolución de los problemas planteados. La explicación de la evaluación de las nuevas reglas de uso con su recurso a la noción de rigor, nos lleva así a la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas en la que focalizaremos en las próximas secciones.

3.2. Dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas

La presente sección constituye nuestra primera aproximación al estudio de la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas. Para esta aproximación comenzamos considerando las estrategias de resolución como sistemas de acciones inferenciales y focalizamos en las tareas que Larvor (2012) específicamente delinea para su estudio. A fin de capturar y dar cuenta de los aspectos característicos de la dimensión lógica de las estrategias de resolución, algunas de las tareas serán reformuladas, mientras que la tarea relativa a los mecanismos de rigor no será considerada aquí. La noción de rigor constituirá el tema de la última sección del presente capítulo en relación con la cuestión de la evaluación de las nuevas reglas de uso, en tanto se recurre a ellas para el uso en tándem de las diversas representaciones.

El rasgo fundamental de los argumentos donde se despliegan las estrategias de resolución analizados desde la perspectiva de las acciones inferenciales lo constituye la presencia de diferentes prácticas inferenciales. Asimismo, este rasgo no está desligado de la heterogeneidad discursiva – que ha sido el foco de las actividades desarrolladas hasta ahora. Pues, tal como observamos en la sección dedicada al enfoque de Larvor, las acciones inferenciales se encuentran codificadas en notaciones especializadas gobernadas por reglas de uso definidas por prácticas de representación. De modo que la presencia de diferentes prácticas de representación en un argumento implica la presencia de diferentes prácticas inferenciales[2]. El estudio de los argumentos matemáticos desde la perspectiva de las acciones inferenciales, siguiendo a Larvor (2012), delinea como primera tarea la identificación de las acciones inferenciales y sus objetos concretos. Ahora bien, es importante destacar que en el trabajo donde Larvor plantea esta tarea, sólo aparecen consideraciones relativas a argumentos conformados por acciones inferenciales provenientes de un único dominio. El tratamiento de argumentos heterogéneos - esto es, argumentos que contienen diferentes prácticas inferenciales - aparece recién en Larvor (2019), respecto a los cuales el autor destaca la necesidad de considerar para su estudio las prácticas de representación subyacentes. A partir de lo anterior, y a fin de brindar un tratamiento satisfactorio de los aspectos lógicos de la resolución de problemas, es preciso entonces reformular la primer tarea planteada por el enfoque de Larvor, esto es, la identificación de las acciones inferenciales y sus objetos concretos.

Con el estudio de la dimensión epistemológica de la resolución de problemas observamos que las prácticas representacionales involucradas son, por un lado, las asociadas al dominio origen, y por otro, las asociadas a los dominios que se anexan para la resolución del problema planteado. En cuanto al estudio lógico de las estrategias, en primer lugar, se trata de identificar las acciones inferenciales distinguiendo aquellas posibilitadas por las prácticas del dominio de origen por un lado, y las posibilitadas por los dominios anexados, por otro lado. Una forma de hacer esto es focalizando en las representaciones en las que se encuentran codificadas las distintas acciones, sobre las cuales ya hemos avanzado en la primera tarea. De esta manera, proponemos reformular la primer tarea planteada por Larvor(2012) e incorporarla como un actividad de nuestro esquema. Así, planteamos como tercer actividad de nuestro esquema: (3) la identificación de acciones inferenciales provenientes de los diferentes dominios involucrados en la resolución de problemas. Esto es, por un lado, (3a) la identificación de las acciones inferenciales provenientes del dominio de origen que plantean el problema a resolver y establecen sus condiciones de resolución. Notemos aquí que estas acciones se encuentran codificadas y posibilitadas por las representaciones provenientes del dominio de origen. Esto es, y en consonancia con lo trabajado en la primera actividad, las representaciones abordadas en la tarea (1a). Por otro lado, (3b) la identificación de las acciones inferenciales provenientes de los dominios anexados que plantean problema-hipótesis y sus condiciones de resolución. Estas serán las acciones inferenciales codificadas y posibilitadas por las representaciones provenientes dominios anexados, ya estudiadas en la primera actividad con nuestra tarea (1b). De esta manera, la tercera actividad que propone-

[2]Inclusive se puede sostener que la distinción entre estos dos tipos de prácticas sólo puede ser analítica en tanto depende de que aspectos se estén considerando – si los epistemológicos o los lógicos.

mos para nuestro esquema, se orienta a la identificación de las acciones inferenciales que tienen por objeto representaciones con reglas de uso bien definidas por sus prácticas de representación.

Es así que la tercera actividad que proponemos para nuestro esquema focaliza en las acciones inferenciales que plantean y establecen las condiciones de resolución tanto del problema a resolver como del problema-hipótesis. Sin embargo, con esta actividad no lograríamos identificar la totalidad de las acciones inferenciales que conforman los argumentos donde se despliegan las estrategias, puesto que resta considerar aquellas acciones fundamentales que resuelven el problema. Con respecto a ellas y retomando lo trabajado en la sección anterior, notemos que tales acciones se encontrarían asociadas a las representaciones gobernadas por las nuevas reglas de uso surgidas de la interacción de dominios. En consecuencia, proponemos como cuarta actividad para nuestro esquema: (4) la identificación de las nuevas acciones inferenciales surgidas por la interacción de dominios, esto es, aquellas acciones que tienen por objeto las representaciones gobernadas por las nuevas reglas para el uso coordinado de representaciones, esto es, aquellas estudiadas en (1c). Las nuevas acciones inferenciales no se encuentran determinadas por ninguna de las prácticas involucradas en la resolución de problemas, por lo que su introducción viene siempre acompañada del lenguaje natural que explica en cada caso cómo combinar las diversas representaciones. Dicha explicación no es otra cosa que la explicación de las nuevas reglas de uso para .el uso en tandem"de las diversas representaciones resultantes de la integración de dominios que abordamos con nuestra segunda actividad. Así, nuestra cuarta actividad plantea la tarea delineada por Larvor (2012) relativa a la explicación de los marcos lingüísticos, esto es, la presencia del lenguaje natural que indica cómo interpretar y manipular las diferentes representaciones haciendo que ciertos procedimientos se establezcan como acciones inferenciales.

Con las dos actividades propuestas en esta sección – (3) y (4) – estamos en condiciones de identificar la totalidad de las acciones inferenciales que conforman los argumentos donde se despliegan las estrategias de resolución de problemas. Al mismo tiempo, esas actividades también permiten determinar los objetos concretos de dichas acciones que no son otra cosa que las representaciones analizadas en nuestra primer tarea (1a)-(1c) completando así la primera tarea delineada por el enfoque de las acciones inferenciales. Además, para el caso de las nuevas acciones inferenciales, también se logra dar cumplimiento a la tarea relativa a la explicación de sus marcos lingüísticos. Para completar el tratamiento lógico de las estrategias de resolución de problemas, sólo queda pendiente la tarea de identificar los mecanismos de rigor y control asociados a cada una de las acciones desplegadas. Sin embargo, como mostraremos más adelante, esta tarea así planteada no sería suficiente para determinar el rigor de los argumentos donde se despliegan las estrategias de resolución lo que requiere profundizar en la noción de rigor. De esta profundización nos ocuparemos en la próxima sección.

3.3. Nuevas acciones inferenciales, rigor y cambios en condiciones de resolución

Terminamos la sección anterior con la identificación de las nuevas acciones inferenciales surgidas por la interacción de dominios, esto es, aquellas acciones posibilitadas por las representaciones asociadas a las nuevas reglas de uso - estudiadas en la tarea (1c). Allí, llamamos la atención sobre un aspecto remarcado por Grosholz cuando insiste en que las nuevas reglas de uso para las representaciones deben ser evaluadas en el marco del conocimiento establecido. Esto significa que, sólo a partir de dicha evaluación, es posible relacionar satisfactoriamente los diferentes procedimientos, a fin de estar en condiciones de determinar si la resolución del problema-hipótesis es condición necesaria para la resolución del problema original. En esta sección, nuestro objetivo es mostrar, cómo esta evaluación puede ser caracterizada recurriendo a la noción de mecanismos de rigor y control que está presente en el enfoque de las acciones inferenciales desarrollado por Larvor. Puesto que los mecanismos de rigor son, siguiendo Larvor (2012), el resultado de la investigación, ellos constituyen una forma de precisar cómo las estrategias propuestas son evaluadas en el marco del conocimiento establecido.

Profundizando en la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas, notemos que el principal desafío reside en determinar los mecanismos de rigor a los que se deben ajustar las nuevas acciones inferenciales. A lo largo de las próximas secciones, mostraremos que la forma de garantizar el rigor de las nuevas acciones inferenciales depende de la coordinación con los mecanismos de rigor ya definidos por los dominios que interactúan en la resolución de problemas. Esto es, el rigor depende de la coordinación de aquellos mecanismos que se conservan con la integración parcial analizada previamente (actividad 2). A fin de dar cuenta en qué consiste exactamente dicha coordinación, y haciendo algunas adiciones al enfoque de las acciones inferenciales, planteamos que es necesario distinguir entre dos nociones de rigor. Por un lado, una noción de rigor que podemos denominar “intrapráctica”, que recupera la noción de rigor definida por Larvor (2012) y establece que una acción inferencial es rigurosa si se encuentra dentro del conjunto de acciones permisibles definidas por el dominio (Sección 2.2.3). Esta primera noción de rigor funciona correctamente para aquellas pruebas cuyas acciones inferenciales pertenecen a un mismo dominio, esto es, donde encontramos sólo una práctica inferencial bien establecida que permite determinar de forma precisa el rigor de cada una de las acciones inferenciales desplegadas. Por otro lado, motivados por la propuesta de Larvor (2019), distinguimos una noción de rigor "interpráctica" aplicable a pruebas que contienen diferentes prácticas inferenciales. Esta segunda noción intenta capturar la idea expresada por el autor de que las diferentes acciones desplegadas en este tipo de pruebas no violan los mecanismos de rigor de ninguna de las prácticas involucradas (Cfr. Secc. 2.2.3). Entendemos que esta idea sugiere un segundo criterio de rigor que caracterizamos tentativamente como el ajuste de las acciones inferenciales desplegadas con los mecanismos de rigor (intrapráctica) definidos por las diferentes prácticas involucradas.

En consonancia con Larvor (2019), afirmamos que el ajuste con los mecanismos de rigor provenientes de diferentes prácticas inferenciales, sólo es posible a partir del establecimiento de relaciones entre las prácticas de representación estables asociadas con tales mecanismos. Con respecto a este último punto, recordemos que, Larvor caracterizaba la relación entre prácticas de representación como una interrelación sistemática basada en la traducción. El recurso a la traducción supone que es posible que las pruebas que contienen diferentes prácticas inferenciales puedan convertirse en una prueba que contiene una única práctica inferencial. Sólo a partir de esto último, sería posible determinar si la prueba "traducida" es rigurosa simplemente observando si las acciones desplegadas se encuentran dentro de las acciones permisibles definido por esta única práctica inferencial "traductora". Ahora bien, separándonos de Larvor (2019), nuestro punto de partida es entender esta relación como una integración parcial. Este cambio en el punto de partida supone que ya no echaremos mano a la noción de traducción y justifica así la necesidad de distinguir entre las dos formas de rigor arriba mencionadas. Nuestro objetivo aquí es encontrar una explicación que no simplifique la cuestión central que es aclarar la forma en que se articulan diferentes mecanismos de rigor en un mismo argumento. Esto es fundamental ya que es en la presencia simultánea de diferentes prácticas inferenciales con sus propios mecanismos de rigor donde reside la capacidad de ampliar el rango de acciones inferenciales disponibles y con esto, como veremos en la próxima sección, de posibilitar cambios en las condiciones de resolución de problemas.

3.3.1. Rigor interpráctica

Con el propósito de profundizar en el estudio de la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas, nuestro objetivo en esta sección es continuar con el desarrollo de la noción de rigor interpráctica esbozada más arriba. Entendemos que el desarrollo de esta noción contribuiría a explicar efectivamente la ampliación de rango de acciones disponibles que constituye un aspecto fundamental de los argumentos con diferentes prácticas inferenciales. Asimismo, y en particular, para el tema de nuestra investigación podría arrojar luz sobre el surgimiento de nuevas acciones inferenciales y la elaboración mecanismos de rigor asociados con las prácticas heterogéneas donde se originan posibilitando cambios en las condiciones de resolución de los problemas planteados.

Con el fin de desarrollar una noción de rigor interpráctica satisfactoria es necesario que la misma incorpore una serie de aspectos en conexión con la actividad de resolución de problemas. El primero de estos aspectos es la determinación de los mecanismos de rigor (intrapráctica) a los que deberán ajustarse las diferentes acciones inferenciales que constituyen las estrategias de resolución de problemas. La determinación de esos mecanismos se encuentra ligada a lo que destacamos como el primer requisito de rigor interpráctica, que es la presencia de una relación entre prácticas representacionales bien establecidas. Como ya mencionamos, en la resolución de problemas esta relación toma la forma de una integración parcial entre las prácticas de representación donde se plantea el problema y las prácticas que son anexadas para su resolución. Podemos visualizar tal integración, por un lado, a través de la presencia de representaciones provenientes del dominio donde se plantea el problema a resolver, y por otro, de aquellas provenientes de los dominios anexados para su resolución. Además, también es posible observar que esas representaciones que pertenecen a las diferentes prácticas que se relacionan, constituyen los objetos concretos de las acciones inferenciales que conforman los argumentos en los que se despliegan las estrategias de resolución de problemas. A partir de lo anterior, tenemos que las diferentes prácticas inferenciales que hallamos en la resolución de problemas dependen de prácticas representacionales bien establecidas que cuentan con mecanismos de rigor intrapráctica bien definidos. Dado que en los argumentos hallamos sólo aquellas acciones inferenciales que son relevantes al planteo y la resolución del problema, esto último permite acotar las consideraciones a los mecanismos de rigor asociados a esas acciones. Esto último sugiere que los mecanismos de rigor que se conservan con la integración parcial motivada por la resolución de problemas, serían los únicos involucrados en el ajuste interpráctica. Se sigue que las estrategias de resolución de problemas – entendidas como conjunto de acciones inferenciales – deberán ajustarse sólo a una porción de los mecanismos de rigor (intrapráctica) definidos por las diferentes prácticas, en particular, sólo aquellos mecanismos asociados a las acciones que resultan relevantes al problema que se desea resolver. Como consecuencia de lo anterior, los mecanismos de rigor interpráctica serán locales, y su carácter local viene dado no sólo por incorporar mecanismos de rigor intrapráctica que son locales, sino fundamentalmente porque ellos dependen del problema a resolver.

Los mecanismos de rigor intrapráctica, considerados sobre el trasfondo de la integración parcial, nos permite determinar cuáles son los mecanismos relevantes que estarán a la base del rigor interpráctica aplicable a los argumentos que despliegan las estrategias de resolución de problemas. Una vez acotados esos mecanismos, el siguiente aspecto a incorporar tiene que ver con el peso que se les asigna a ellos y esto depende de la práctica inferencial a la cual pertenecen. Esta diferencia puede verse como una consecuencia de la integración parcial de dominios, la cual entraña cierta asimetría con respecto a la importancia de los mecanismos de rigor provenientes de las diferentes prácticas involucradas[3]. Encontramos en la resolución de problemas, más específicamente, una mayor ponderación de los mecanismos provenientes de la práctica de origen, debido a que ella constituye la práctica mejor establecida respecto del ámbito donde se plantea el problema a resolver. Como observamos en la sección dedicada a Grosholz, la práctica de representación correspondiente al dominio de origen cuenta con diferentes herramientas – tales como definiciones de sus objetos de estudios, métodos de cálculo y prueba, etc. - elaboradas para el abordaje del tipo de problemas que se desea resolver. Esas herramientas han demostrado ser exitosas para la resolución de problemas, así como para el establecimiento de diversos resultados, de modo que, a partir del éxito y conocimiento acumulado con respecto a su ámbito de problemas, la práctica de origen prescribe cuáles son las mejores formas de plantear y abordar el problema a resolver, delimitando las condiciones de resolución del mismo. Dado lo anterior, se le otorga a la práctica de origen una preeminencia con respecto a otras prácticas, haciendo que las acciones inferenciales y sus correspondientes mecanismos de rigor y control - relevantes para el planteo del problema y sus condiciones de resolución - tengan un rol fundamental. A fin de capturar esta preeminencia, y avanzar en la caracterización de nuestra noción de rigor interpráctica, plantea-

[3]Esta asimetría presente en las pruebas que contienen diversas prácticas inferenciales y su rol en el establecimiento de rigor es reconocida, recordemos, por Larvor (2019) cuando afirma que debe establecerse una interrelación sistemática entre áreas más establecidas y otras menos establecidas, a fin de que la última adquiera sus credenciales de rigor (Cfr. 2.3.3). Atendiendo a las observaciones críticas, reformulamos este punto indicando que la práctica preeminente es aquella que se encuentra mejor establecida respecto del ámbito de problemas que se desean resolver. Puesto que, son justamente esos problemas los que motivan el establecimiento de relaciones (parciales) entre diferentes prácticas.

mos que el establecimiento del rigor intrapráctica consistiría, en primer lugar, en el ajuste de las estrategias – entendidas como conjunto de acciones inferenciales - fundamentalmente, con los mecanismos de rigor (intrapráctica) definidos por el dominio de origen.

Con la incorporación de este aspecto relativo a la ponderación de los mecanismos de rigor de la práctica en la que se plantea el problema, surge la cuestión acerca de su relación con los mecanismos provenientes de los dominios anexados, así como acerca del rol de estos últimos en la elaboración de una noción de rigor interpráctica. Como primera aproximación a esta cuestión, debemos notar primeramente que el conjunto de acciones inferenciales que constituyen las estrategias de resolución de problemas está constituido por tres tipos de acciones: las acciones que provienen del dominio de origen, las que provienen de los dominios anexados, y por último, aquellas generadas por integración parcial. Mientras que la determinación del rigor de las acciones provenientes del dominio de origen es directa, pues sólo debe mostrar que se encuentran dentro del conjunto de acciones permisibles definidas por su propio dominio, no sucede lo mismo con las otras dos. Con respecto a las acciones inferenciales provenientes de las prácticas anexadas, notemos que si bien ellas cuentan con mecanismos de rigor (intrapráctica) bien definidos[4], su despliegue está motivado por el problema a resolver. Esto último hace que esas acciones se encuentren atadas a la exploración de nuevas reglas para el uso en tandem de las diferentes representaciones y, con, ello a las nuevas acciones inferenciales surgidas en el contexto de la integración parcial de dominios. De esta manera, tanto el rigor de las acciones inferenciales anexadas como el de las nuevas acciones deberá determinarse conjuntamente sobre el trasfondo de los mecanismos de rigor de la práctica de origen. Ahora bien, los objetos de esas acciones inferenciales – anexadas y nuevas – son diferentes de los objetos de las acciones provenientes de la práctica de origen. Esto último indica que el ajuste con los mecanismos de rigor de la práctica de origen no podrá consistir en una relación directa orientada al establecimiento de relaciones uno a uno entre las acciones inferenciales de la práctica de origen por un lado, y las anexadas y nuevas, por el otro.

Atendiendo los aspectos expuestos hasta ahora, tenemos que a fin de determinar si los argumentos donde se despliegan las estrategias de resolución son rigurosos, en primer lugar, es preciso recurrir a una noción de rigor interpráctica que sea de carácter local. Esto último, a fin de capturar la forma en que el rigor depende del problema que se intenta resolver, y con ello también su dependencia de los elementos anexados para su resolución. En segundo lugar, esta

[4]Por pertenecer a una práctica inferencial bien establecida.

noción de rigor interpráctica deberá incorporar también la preeminencia de los mecanismos de rigor provenientes de la práctica en la que se plantea el problema a resolver y, por último, la relación de esos mecanismos con cada una de las demás acciones no será directa. A partir de lo anterior, sostenemos que para determinar el rigor de los argumentos donde se despliegan las estrategias de resolución, es necesario mostrar que, por medio de dichas estrategias, es posible obtener uno o varios resultados ya establecidos de forma previa a la integración de las diferentes prácticas. Esto es, mostrar que un resultado obtenido por las acciones inferenciales permisibles de la práctica de origen puede obtenerse también con el despliegue de las nuevas acciones inferenciales surgidas de la integración de dominios. De esta manera, las estrategias de resolución de problemas – entendidas como conjuntos de acciones inferenciales – serán rigurosas (en sentido interpráctica) si, además de brindar una solución para el problema para el que fueron elaboradas, logran resolver problemas no triviales ya resueltos satisfactoriamente por la práctica de origen. Con problemas "no triviales" queremos recuperar aquí lo que Grosholz(2007) caracteriza como "problemas paradigmáticos", esto es, ciertos problemas que una determinada práctica (aquí la práctica de origen) estima centrales. La centralidad de los problemas paradigmáticos está asociada a su rol fundamental en la articulación del conocimiento, puesto que permiten determinar el alcance de los métodos y herramientas, así como también determinar la corrección de los nuevos resultados.

La noción de interpráctica propuesta incorpora los aspectos fundamentales en relación a la resolución de problemas señalados previamente, al mismo tiempo que recupera un elemento saliente que hallamos en la práctica matemática, a saber, que los resultados innovadores muy frecuentemente vienen acompañados de otros resultados bien establecidos. Así, en los argumentos donde se despliegan las estrategias de resolución encontramos la solución, o bien una indicación de cómo obtener una solución, por medio de nuevas herramientas de un problema que ya se encontraba resuelto. Este fenómeno de ofrecer soluciones de problemas ya resueltos que pertenecen al mismo ámbito de problemas que motivaron el desarrollo de las nuevas herramientas se encontraría asociado justamente a la evaluación tales herramientas. En relación a las pruebas y su función en la elaboración y evaluación de métodos de resolución de problemas, destacamos aquí el planteo de Rav(2007) y sus valiosas observaciones:

> Arguments, in the sense of an 'informal logic' justify the coherence of the proposed methodology in connecting techniques, and in general, validate the solution to the problem at hand on the basis of known and/or new conceptual and technical machi-

> nery. [...] Proofs are the locus of mathematical ideas and display the interconnections among them, and this is why frequently mathematicians re-prove the same statement of a theorem by different methods. (Rav, 2007, p. 293-294).

Podemos encontrar afirmaciones en la misma dirección en Manders *Euclid or Descartes? Representation and Responsiveness* (inédito), quien sostiene que las innovaciones matemáticas se caracterizan también por ser "inferencialmente conservadoras" en el sentido de que retienen resultados fundamentales de prácticas ya bien establecidas. El mismo autor repite esta idea en Manders(2008, p. 67) cuando afirma que un resultado como el teorema de Pitágoras está vivo en la topología del siglo XX. Motivado por Manders, un elemento central en el que Larvor (2019) intenta profundizar es justamente la prueba de un resultado apelando a diferentes herramientas, como ya observamos. Larvor acierta en reconocer que brindar diferentes pruebas, entendidas como diferentes conjuntos de acciones inferenciales, de un mismo resultado cumple un rol fundamental en la determinación del rigor de los argumentos que contienen diferentes prácticas inferenciales. Pero Larvor, desacierta cuando intenta explicar este fenómeno en términos de una traducción posibilitada por una interrelación sistemática entre las diferentes prácticas. Una explicación del desarrollo de diferentes pruebas de un mismo resultado en términos de traducción conduce a las mismas dificultades y expone su enfoque a las mismas críticas dirigidas a las perspectivas que caracterizan este fenómeno como la derivación de un mismo teorema en dos sistemas formales diferentes[5].

Con la noción de rigor interpráctica, asociada a este "probar de nuevo", hemos intentando incorporar aspectos fundamentales de la práctica matemática y arrojar luz sobre su función en la evaluación de las estrategias, distanciándonos de enfoques cuyas explicaciones recurren a la idea de traducción y a la derivación formal. Consideramos que esta noción de rigor interpráctica permite evaluar más adecuadamente el rol del conocimiento establecido en la resolución de problemas. Por un lado, nos permite abordar los rasgos, que podríamos llamar, más conservadores de las estrategias de resolución problemas. Esos rasgos conservadores están ligados a la exigencia de concordancia con los resultados ya establecidos para las nuevas acciones inferenciales surgidas de la interacción entre las diferentes prácticas para la resolución de problemas. Esta exigencia de concordancia con los resultados establecidos es necesaria para evaluar las nuevas técnicas y métodos elaborados en la resolución de problemas, al mismo tiempo, al no ser entendida como un poner en relación "uno-a-uno" las acciones inferenciales provenientes de las diferentes prácticas,

[5]Cfr. sección 2.2

permite explicar también el carácter innovador de las estrategias.

El carácter innovador de las estrategias reside en la posibilidad de generar cambios en las condiciones de resolución de los problemas planteados. Cuando se propone una nueva forma de resolución de un problema para el que ya contamos con una solución, mediante estrategias conformadas por nuevas acciones inferenciales, la concordancia con la solución establecida por la práctica de origen es interpretada como un indicio del rigor de dichas estrategias. Pero esa concordancia no es sólo un indicio del rigor de las estrategias, sino que también es interpretada como evidencia de la plausibilidad del problema-hipótesis, recordemos, anexado para la resolución del problema que motivaron la elaboración de las estrategias. Ahora bien, el cumplimiento del rigor interpráctica atañe a problemas que ya han sido resueltos y parecería, entonces, que no nos encontramos en presencia de nada novedoso. Sin embargo, la novedad implicada aquí radica en que se logra indicar cómo las condiciones de resolución de problemas anexados pueden constituir condición suficiente para la resolución de los problemas planteados por la práctica de origen, produciendo cambios en las condiciones de resolución. De suerte que las condiciones de resolución del problema ya no harán referencia a las planteadas por la práctica de origen, sino a las condiciones de resolución de los problemas anexados. Asimismo, este cambio en las condiciones de resolución de problemas se hace extensible a los problemas que motivaron el diseño de las estrategias de resolución, permitiendo determinar la plausibilidad del problema-hipótesis.

La noción de rigor interpráctica desarrollada a lo largo de esta sección nos permite brindar una caracterización más satisfactoria de ciertos aspectos fundamentales de las estrategias de resolución de problemas. A fin de incorporar lo trabajado con respecto a dicha noción, completamos nuestro esquema para el estudio de las estrategias con el planteo de la siguiente actividad:(5) explicitar los mecanismos de rigor interpráctica presentes en los argumentos donde se despliegan las estrategias de resolución. Esto es, indicar si en los argumentos se encuentran referencias a problemas ya resueltos y cómo ellos aparecen relacionados a la justificación de las nuevas herramientas, así como también a los nuevos nuevos resultados y a los cambios en las condiciones de resolución de los problemas planteados. A partir de lo anterior, tenemos que esta actividad debe incluir un análisis de la explicación de, cómo la resolución del problema-hipótesis constituye una condición suficiente para la resolución del problema-origen. Esta actividad tiene entonces por objetivo focalizar en la evaluación de las estrategias como un elemento fundamental para la explicación no sólo del rigor de los resultados, sino también de los cambios en las condiciones de resolución y la posibilidad alcanzar resultados innovadores. En tal sentido, esta actividad considera no sólo la referencia a resultados ya establecidos como indicios a favor de la rigurosidad de las estrategias desarrolladas, sino también su relación con otros problemas a resolver y, con ello, la posibilidad de extender su alcance, sus ventajas con respecto a herramientas previas, etc. Todos estos aspectos a menudo expresados en lenguaje natural y que son centrales en la práctica pero que no pueden ser capturados desde perspectivas que conciban la exploración matemática en términos de teorías formalizadas.

Con esta quinta actividad completamos el esquema propuesto en este capítulo para el estudio de la resolución de problemas que ordenamos según la siguiente estructura:

(1) **Estudio de las representaciones presentes en los argumentos en los cuales las estrategias de resolución de problemas son desplegadas:**

  (a) **Identificación y estudio de las representaciones donde se plantea el problema a resolver**

  (b) **Identificación y estudio de las representaciones provenientes de los dominios anexados**, más específicamente, las porciones de esos dominios que se estiman relevantes para la resolución del problema original

  (c) **Identificación de las representaciones desplegadas en las porciones del argumento donde se resuelve el problema**. Focalizamos aquí en las representaciones cuyas reglas de uso son el resultado de la exploración de las relaciones entre herramientas específicas provenientes de los diferentes dominios

(2) **Estudio de la relación entre prácticas de representación** - asociadas a los dominios involucrados en el planteo y la resolución del problema - a través de la identificación del patrón de articulación de las representaciones presentes en los argumentos en los cuales las estrategias de resolución de problemas son desplegadas

(3) **Identificación de acciones inferenciales provenientes de los diferentes dominios involucrados en la resolución de problemas:**

  (a) **Identificación de las acciones inferenciales provenientes de los dominios dominios donde se plantea el problema a resolver**

  (b) **Identificación de las acciones inferenciales provenientes de los dominios anexados**

(4) **Identificación de las nuevas acciones inferenciales surgidas por la interacción de dominios**, esto es, aquellas acciones que tienen por objeto las representaciones gobernadas por las nuevas reglas para el uso coordinado de representaciones analizadas en (1c)

(5) **Explicitar los mecanismos de rigor interpráctica presentes en los argumentos donde se despliegan las estrategias, su rol en la evaluación de las estrategias y en la generación de nuevas condiciones de resolución de los problemas planteados**

El esquema elaborado a lo largo del presente capítulo debe ser visto como una guía para el estudio de las estrategias de resolución de problemas, el cual seguramente es susceptible de ampliación. A través del esquema, aquí propuesto hemos planteado una serie de actividades que consideramos básicas para el estudio de la resolución de problemas, a fin de capturar aspectos fundamentales de la resolución de problemas que a menudo se han visto oscurecidos por los enfoques tradicionales que recurren a la noción de derivación formal. En este sentido, el esquema de análisis que proponemos intenta abordar de forma equilibrada las dimensiones lógica y epistemológica de la resolución problemas, entendiendo que ambas son fundamentales, pero que necesitan ser repensadas desde perspectivas más afines a la práctica matemática.

Parte II

INNOVACIÓN EN WALLIS(1656)

Capítulo 4

John Wallis(1656)

El presente capítulo constituye nuestra primera aproximación al estudio de caso propuesto, esto es, el método para resolver problemas de cuadraturas desarrollado por Wallis en el período 1652-1655 y publicado en su trabajo de 1656 *Arithmetica Infinitorum*. Esta primera aproximación consiste en un estudio histórico de las estrategias de resolución de problemas desplegadas en AI. Dividimos nuestro estudio en tres secciones, la primera de ellas (4.1), dedicada a una presentación sucinta de los problemas de cuadraturas y la constitución histórica de este ámbito de problemas, que nos permitirá posteriormente, observar los cambios progresivos en las formas de planteo y resolución de los mismos.

La segunda sección (4.2), ya orientada al trabajo de John Wallis, introduce brevemente los aportes que estuvieron a la base de la elaboración de su método de cuadraturas aritméticas. En particular, consideramos la influencia del álgebra de ecuaciones, la geometría de Descartes y el método de los indivisibles, esto es, las diferentes herramientas disponibles que son puestas en relación para el desarrollo de su innovador método. Nuevamente, el objetivo de esta sección no es brindar un análisis histórico pormenorizado de cada uno de estos aportes, sino un abordaje que nos permita visualizar, en el próximo capítulo, los aspectos epistemológicos y lógicos más salientes de las estrategias de resolución desarrolladas por Wallis.

Atendiendo al marco de análisis de las estrategias propuesto (Cap. 3), la aproximación histórica focalizará en las estrategias de resolución de problemas de Wallis tal como se encuentran desplegadas en *Arithmetica*. A partir de esto último, la tercera sección de este capítulo (sección 4.3), está exclusivamente dedicada al innovador método de cuadraturas aritméticas propuesto por Wallis y tiene como principal objetivo el estudio de la estructura argumentativa de su método. En primer lugar, daremos una descripción de la estructura argumentativa general del método, a fin de analizar posteriormente la resolución de la cuadratura de la parábola generalizada, esto es, las curvas (en términos actuales) de la forma $y = x^k$. Con este objetivo, en la sección (4.3.2) estudiaremos el cálculo de la cuadratura de la así denominada parábola simple, $y = x^2$ $(k = 2)$ y, luego, en la sección (4.3.1) del de la curva $y = x^{\frac{1}{2}}$ $(k = \frac{1}{2})$, que nos permitirá considerar la extensión del método a curvas con exponentes fraccionarios. El estudio de la resolución de esos problemas a través del análisis de las diferentes proposiciones de la *Aritmética de los infinitos* finaliza la primera aproximación a nuestro estudio de caso.

4.1. Contexto matemático de la innovación de Wallis y su *Aritmética de los Infinitos*

El siglo XVII fue un siglo de grandes desarrollos en la matemática siendo uno de los más salientes el cálculo infinitesimal que consiste en reglas para computar áreas, longitudes y volúmenes de figuras curvilíneas, así como también para la determinación de propiedades locales como cálculo de tangentes, normales y curvaturas. Entre los problemas asociados al cálculo, focalizaremos en los problemas de determinación de áreas. Es decir, nos centraremos en los problemas de cuadraturas, cuya denominación surge justamente de su planteo inicial que requería hallar un cuadrado igual a un espacio dado.

Los problemas de cuadraturas ya habían sido planteados en la antigüedad, y si bien los geómetras griegos establecieron varios resultados, un rasgo saliente de esta primera fase es que, salvo algunas excepciones, las técnicas de resolución no fueron transmitidas, sino sólo las demostraciones de dichos resultados. Tales demostraciones eran estrictamente geométricas basándose así en la teoría de proporciones de Eudoxo, presente en el Libro V de los *Elementos* de Euclides. El método griego de demostración, tal como lo encontramos en los textos clásicos, consistía en una doble reducción al absurdo[1] que por medio de figuras inscritas y circunscritas establecía la corrección de un resultado obtenido por otros medios. Estas pruebas fueron denominadas por Gregory de Saint Vincent, en el siglo XVII, "Método de Exhausción"[2] y su riqueza residía en

[1]Este tipo de demostraciones por reducción al absurdo se denominaron "demostraciones apagógicas no constructivasz su carácter no constructivo reside en que no dan lugar a nuevos resultados, sino que se limitan a mostrar que un determinado resultado, obtenido por otros medios, es válido. Para un abordaje detallado de este tipo de pruebas veáse Vega Reñon, L. (1990). *La Trama de la Demostración (Los griegos y Ia razón tejedora de pruebas).* Alianza Editorial, Madrid

[2]La observación que hace Boyer sobre la denominación dada por Saint Vincent es ilustrativa con respecto a los procedimientos de prueba clásicos vis à vis los métodos modernos: "In Greek demonstrations by the method of exhaustion the figure was thought of simply as approximated, to within a given degree of accuracy, by the inscribed or circumscribed figure. The Greek method is therefore, in a sense, improperly designated as the method of exhaustion, but Gregory apparently used the word in its literal sense, allowing the subdivision to continue to infinity (Boyer 1959, p. 136-137).

que evitaba el uso del infinito, esto era deseable para los griegos ya que el principio de divisibilidad infinita propio de los objetos geométricos no tenía su contraparte aritmética. Esta ausencia se evidenciaba en la imposibilidad para el lenguaje de la teoría de proporciones de expresar procesos de divisibilidad infinita.

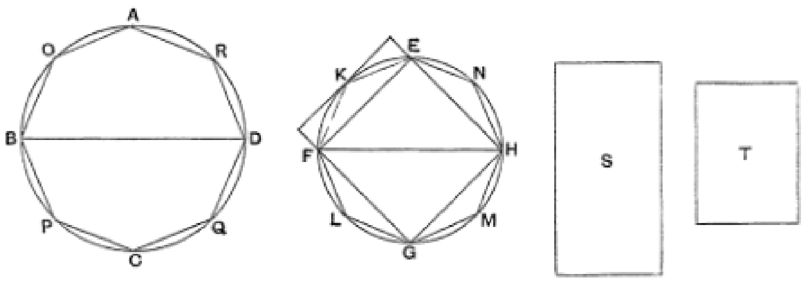


Figura 4.1: Euclides,*Elementos*, X prop. 2. Esta proposición se encuentra en el núcleo de las demostraciones clásicas y establece que *los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diametros.*

La difusión de los métodos de demostración, en detrimento de las técnicas de resolución, una característica de la geometría antigua, hizo que los matemáticos de los períodos renacentista y moderno buscaran desentrañanar tales técnicas o bien desarrollar nuevas. Como consecuencia de lo anterior, a finales del siglo XVI y en el XVII hallamos numerosos desarrollos que tomaron, aunque no exclusivamente, la forma de métodos de resolución de problemas. En esos métodos el énfasis estaba puesto en alcanzar resultados novedosos, y en menor medida, su demostración puesto que aparece expresada la convicción que los resultados obtenidos, a partir de las nuevas técnicas, pueden luego ser demostrados por medio del método de exhausción heredado de los antiguos[3]. Además del énfasis en la obtención de resultados novedosos, otro rasgo característico de los nuevos aportes, es que ellos se establecen como los primeros tratamientos sistemáticos en ese ámbito. Esto último, está en contraste con los resultados de los antiguos que se restringen a construcciones geométricas particulares.

La elaboración de métodos de resolución de problemas de cuadraturas fue un ingrediente fundamental para el desarrollo del cálculo infinitesimal. Entre estos métodos se destaca justamente el publicado en 1656 por John Wallis en su *Arithmetica Infinitorum.* Una de las razones por las que Wallis ha pasado a la historia con su aporte fue por lo heterodoxo de su trabajo que lo enfrentó con varios de sus contemporáneos[4], ya que su trabajo no sólo estaba plagado de

[3]Aunque las discusiones acerca de su justificación lógica no estuvieron ausentes. Para un tratamiento de estos aspectos véase Mancosu, P. (1996). *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century.* Oxford University Press, New York.

[4]Entre las controversias desatadas por la publicación de AI se destacan las mantenidas con Pierre de Fermat,

inferencias no deductivas, sino que también hacía un uso extendido de herramientas aritméticas y algebraicas, ambos aspectos en flagrante ruptura con los cánones de rigor clásico. Sin embargo, y pesar de la presunta ausencia de rigor demostrativo, el método de cuadraturas aritméticas de Wallis se convirtió en un trabajo de referencia para matemáticos posteriores, entre los que se destacan Newton y Leibniz.

La importancia de la *Aritmética de los Infinitos* reside no sólo en ser uno de los primeros métodos sistemáticos publicados[5], sino además porque logra reunir aportes fundamentales provenientes de diferentes áreas. Es así que John Wallis logra integrar los aportes provenientes del álgebra de ecuaciones, la geometría analítica, el método de los indivisibles y su propio trabajo con series aritméticas, poniéndolos exitosamente al servicio de la resolución de problemas de cuadraturas. De esta manera, como destaca la historiadora de la matemática Jacqueline Stedall, al combinar esos diferentes aportes "[Wallis] no sólo revolucionó el enfoque tradicional de los problemas de cuadraturas, sino que aseguró que la tendencia del pensamiento geométrico hacia el algebraico, propia del siglo XVII, se volviera irreversible"(Stedall, 2002, p. 55)[6]. A partir de lo expuesto, en la próxima sección enumeraremos cuáles fueron los diferentes aportes de los que se nutrió Wallis, a fin de comprender el carácter innovador de su método de cuadraturas aritméticas.

4.2. Wallis y el estado del arte en la primera mitad de siglo XVII[7]

Finalizamos la sección anterior señalando que el método de Wallis (1656) fue revolucionario por haber logrado reunir diferentes aportes. Esto último resulta llamativo, si atendemos al hecho de que no fue sino hasta 1647 que Wallis comienza a dedicarse al estudio de la matemática y que en el transcurso de pocos años llega tener pleno conocimiento y dominio del "estado del

Isaac Barrow y el filósofo Thomas Hobbes. Con respecto a este último, una exposición detallada se encuentra en Jesseph, D. (1999) Squaring the Circle. The war between Hobbes and Wallis. Chicago: Chicago University Press. Para la controversia con Fermat un artículo clásico es Cajori, F., (1929). "Controversies on mathematics between Wallis, Hobbes, and Barrow". Mathematics Teacher , 22, (pp. 146-151). Mientras que para una discusión con los matemáticos franceses contamos con Stedall, J. (2012) "John Wallis and the French: his quarrels with Fermat, Pascal, Dulaurens, and Descartes". Historia Mathematica 39(12) 265-279.

[5]Roberval se abocó al desarrollo de un método entre 1628 y 1634, pero su *Traité sur des indivisibles* no fue publicado sino hasta 1693. Mientras que el método de Fermat fue publicado póstumamente en 1679 en *Opera Varia*.

[6]Los fragmentos citados en esta sección, salvo que se exprese otra cosa, corresponden a traducciones propias.

[7]Para el desarrollo de esta sección nos hemos basado en los trabajos de Jacqueline Stedall principalmente su estudio introductorio a la traducción de 2004 de *Arithmetica Infinitorum* , referenciado como Wallis (2004), Stedall (2008) y (2002).

arte". Asimismo, aunque su designación en 1649 para ocupar la prestigiosa *Savilian Chair of Geometry* de la Universidad de Oxford pudo haber obedecido a razones políticas[8], inauguró con su trabajo en esa cátedra un período relativamente breve pero de intensa investigación que resultó en la elaboración y publicación de un trabajo propio de gran trascendencia, llegando a convertir a Oxford en un centro intelectual para los matemáticos ingleses. Con respecto al veloz avance en la carrera matemática de Wallis es importante destacar la enorme influencia de William Oughtred, quien con sus *Clavis Mathematicae* le permite, a través del estudio del álgebra, ingresar a la comunidad matemática de la época.

Álgebra de ecuaciones

Tal como mencionamos, Wallis comienza sus estudios matemáticos en 1647, puntualmente con la lectura del prestigioso libro del algebrista inglés Oughtred *Clavis Mathematicae*, cuya primera publicación – en latín - se remonta a 1631 y que en 1647 se encontró disponible en habla inglesa. Entre los principales méritos de este trabajo, como destaca (Stedall, 2002, p. 62), se encuentra el hecho que constribuyo a formar a una generación entera de científicos y matemáticos ingleses poniendo a su disposición los elementos fundamentales del álgebra de ecuaciones. *Clavis* era un libro de texto, por lo que no se caracterizaba tanto por realizar aportes novedosos, sino por presentar y hacer accesibles los métodos y reglas del álgebra de ecuaciones, así como la aplicación del álgebra a la geometría. De esta manera, en *Clavis Mathematicae*, adquiere gran relevancia el trabajo de François Viète, particularmente, su visión del álgebra como un "arte analítico", esto es, una herramienta "para no dejar ningún problema sin resolver". Así, Viète concibe el álgebra como una poderosa herramienta para resolver no sólo problemas que involucran números, sino también aquellos que involucran magnitudes geométricas. Tal como destaca Stedall:

> Viète supuso que el método algebraico fue la herramienta analítica por la que los teoremas geométricos clásicos habían sido descubiertos, y así para él, y para quienes lo siguieron, el álgebra se convirtió en el "arte analítico", el medio por el cual, resultados pueden ser conocidos y nuevos teoremas encontrados.(Stedall, 2002, p. 6)

En este marco, Viète distinguió entre *logistica numerosa* -aritmética - y *logistica speciosa*

[8]El 1684 los profesores que se encontraba en el Cátedras Savilianas de geometría y astronomía fueron depuestos debido a su apoyo a los Realistas. La comisión de paralamentaristas pusieron Seth Ward al frente de la cátedra saviliana de astronomía y John Wallis en la de geometría, pese a que este último no tenía mucha experiencia ni reputación como matemático. En 1642 Wallis comenzó a descifrar códigos para el parlamentarista Oliver Cromwell, aunque siempre mostró un apoyo moderado a la causa revolucionaria durante la guerra civil.

- álgebra - reservando esta última denominación para el cálculo con letras, liberando así a las representaciones algebraicas de una interpretación exclusivamente numérica. De esta idea fundamental se hará eco Wallis en sus trabajos, cuando señala que los elementos involucrados en las ecuaciones, ya no serán sólo números sino también magnitudes geométricas. Asimismo, la liberación del álgebra de una interpretación puramente aritmética contribuyó al desarrollo de la geometría analítica, que significó una profundización sistemática de la relación entre álgebra y geometría. La geometría analítica constituye otro de los pilares fundamentales del método de cuadraturas desarrollado por Wallis, pero antes de pasar a ella, nos interesa considerar otro aporte de gran relevancia del que Wallis se interioriza por recomendación de Oughtred, que es el método de los indivisibles de Bonaventura Cavalieri.

Método de los indivisibles

Las investigaciones matemáticas de Wallis se inauguraron con el estudio del trabajo *Clavis Mathematicae* de William Oughtred, a partir del cual tomó contacto con las técnicas desarrolladas por Viète antes de ocupar la cátedra Savilian. Sin embargo, Oughtred no sólo contribuyó en este aspecto, sino que también lo puso en conocimiento de otro de los resultados que resultaron fundamentales para el método de cuadraturas aritméticas, como es el caso del método de los indivisibles. A través de un intercambio epistolar con Robert Keylway en 1645, Oughtred escribe con respecto al método de los indivisibles:

> a geometrical-analytical art or practice found out by one Cavalieri, an Italian, of which about three years since I received information by a letter from Paris, wherein was praelibated only a small taste therof, yet so that I divine great enlargement of the bounds of the mathematical empire will ensue (Citado por Stedall, 2002, p. 157).

A partir del fragmento podemos observar que William Oughtred tenía una concepción más amplia de “arte analítico”, no restringida al álgebra, pues el método para el cálculo de cuadraturas de Cavalieri es estrictamente geométrico. De esta manera, Oughtred ve el trabajo de Cavalieri también como una poderosa herramienta para resolver problemas.

Las obras donde Cavalieri desarrolla su método de los indivisibles para el cálculo de áreas y volúmenes son, *Geometria indivisibilibus continuorum nona quadam ratione promota* de 1635 y *Exercitationes geometricae sex* de 1647, ambas publicadas en Bolonia. El núcleo del método consiste en dividir las figuras planas en segmentos rectos paralelos a un segmento dado[9]. Análogamente, se dividen a los volúmenes en superficies planas paralelas a un plano dado. Sobre esta base establece lo que luego se denominó el "Teorema de Cavalieri" que afirma que, si dos figuras planas o dos volúmenes con la misma altura guardan entre sí la misma relación que guardan sus indivisibles, es posible, mediante la comparación de sus indivisibles, conocer la relación que guardan sus áreas o volúmenes. De esta manera, el cálculo de las cuadraturas se realiza estableciendo la proporción entre el área bajo la curva y el rectángulo que la contiene, a través de la comparación de las colecciones de indivisibles de ambas figuras, por medio de la teoría de proporciones, constituyendo así un método puramente geométrico[10].

Es importante destacar aquí que, pese a que Wallis(1656) refiere de forma explícita a los textos de Cavaleri, él no tuvo acceso a ellos sino a la versión del método de los indivisibles dada por Evangelista Torricelli en su *Opera geométrica* de 1647. La *Opera geométrica* de Torricelli se hallaba en la *Savile Library* a la que Wallis tuvo acceso a partir de 1649 cuando fue designado en la cátedra Saviliana de Geometría. Este es un hecho importante, atendiendo a que la presentación del método de los indivisibles dada por Torricelli no posee el mismo grado de sutileza que la de Cavalieri, lo cual se revela en el hecho que considera a las colecciones de líneas y de planos como una suma. De esta manera, para Torricelli, a fin de determinar la proporción entre el área bajo la curva y el rectángulo que la contiene, es necesario llevar a cabo la suma (geométrica) de los indivisibles que componen las figuras. Es en la conceptualización de las colecciones de indivisibles como una suma donde Wallis encontrará justamente la posibilidad de incorporar herramientas aritméticas y algebraicas para el cálculo de áreas y volúmenes, ya que un aspecto nuclear del método de cuadraturas aritméticas reside en sostener que la suma de indivisibles puede ser llevada a cabo aritméticamente en vez de geométricamente.

Geometría analítica

El último aporte del que se nutrió Wallis que queremos destacar aquí es la geometría analítica desarrollada por René Descartes. La *Géométrie* de Descartes, publicada originalmente en francés en 1637 y reeditada en latín por Frans van Schooten en 1649, se hallaba en la biblioteca Savile y Wallis comienza su estudio apenas ingresa a Oxford. La *Géométrie* constituye un aporte

[9] Para una presentación sucinta del método de los indivisibles véase Boyer (1959, p. 120-121) y para una exposición detallada Andersen (1985).

[10] Con este método Cavalieri logró calcular la cuadratura de las curvas que en notación actual tienen la forma $y = x^k$, para k igual a 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 9.

sustancial, ya que en ella Descartes introduce un sistema de coordenadas[11] que hace posible, para las curvas que él denomina "geométricas"[12], describirlas mediante una ecuación algebraica. Entre las curvas geométricas más simples, Descartes reconoce la parábola, la elipse, el círculo y la hipérbola, esto es, las secciones cónicas.

El estudio del trabajo de Descartes le permitió a Wallis acrecentar considerablemente sus competencias matemáticas, en especial con respecto a la aplicación del álgebra a problemas geométricos. Recordemos que en 1647, cuando Wallis comenzó sus estudios con la lectura del trabajo de Oughtred, adquirió sólo los rudimentos del álgebra de ecuaciones, esto es, reglas básicas y sus aplicaciones elementales a problemas geométricos. La influencia de Descartes en el trabajo de Wallis es manifiesta, principalmente en su *Sectionibus Conicis Tractatus (1655)* que constituye la antesala inmediata de su método de cuadraturas aritméticas. En este tratado Wallis parte de las definiciones clásicas, esto es, la parábola, la elipse, el círculo y la hipérbola, como resultantes del corte de un cono, para luego *à la* Descartes derivar las ecuaciones que las definen. Sin embargo, a diferencia de Descartes, incorpora el método de los indivisibles en la derivación de las ecuaciones que describen las curvas, utilizando para ello las relaciones geométricas entre los indivisibles que componen dichas figuras. De esta manera, el tratamiento sistemático de las secciones cónicas de Wallis resulta en un redefinición de estas figuras donde incorpora tanto los aportes de Descartes como los de Cavalieri, por ser ambos necesarios a fin de determinar las propiedades relevantes para la resolución de problemas de cuadraturas. En vista a que la redefinición de las conicas está orientada a la resolución de problemas, planteamos la necesidad de examinarla en mayor detalle, junto a los demás aportes mencionados, cuando describamos en la próxima sección la estructura argumentativa del método de cuadraturas aritméticas propuesto por Wallis.

[11] Este sistema no es necesariamente ortogonal – como lo que conocemos actualmente como "coordenadas cartesianas" – sino que el sistema es variable pues primero se plantea el resolver, se trazan las curvas y luego se determina el sistema de coordenadas. Para detalles sobre el procedimiento véase Bos, H. J. M. (2001). *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* Springer, New York.

[12] Descartes distingue entre curvas geométricas y mecánicas. Las figuras curvas geométricas son aquellas que pueden ser obtenidas por medio de un movimiento continuo, o por una serie sucesiva de ellos y son expresables por medio de una ecuación polinomial. Por otro, están las curvas mecánicas, que luego serán denominadas "trascendentes", son aquellas que resultan de movimientos independientes cuya relación no puede expresarse por medio de una ecuación.

4.3. La estructura argumentativa del método de cuadraturas aritméticas

El método de cuadraturas aritméticas de Wallis aparece publicado en *Arithmetica Infinitorum sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaquae difficiliora Matheseos Problemata*[13] de 1656. Como adelantamos, la importancia de la *Aritmética de los Infinitos* radica en que modificó el enfoque geométrico tradicional de los problemas de cuadraturas al incorporar diferentes aportes. Entre esos aportes, destacamos el método de los indivisibles de Cavalieri – en la presentación dada por Torricelli - y la geometría de Descartes, cuyas influencias pueden ser claramente apreciadas en *De Sectionibus Conicis Nova Methodo Expositis Tractatus* (SC), también publicado en 1656.

El tratado sobre las secciones cónicas fue desarrollado íntegramente en 1652, pero Wallis retrasa su publicación hasta finales de 1655, cuando estuvo completa la escritura de AI. Es así que el método de cuadraturas aritméticas debe ser analizado con SC como trasfondo, pues mientras en AI, Wallis desarrolla la resolución de diferentes problemas de cuadraturas mediante la aplicación de herramientas aritméticas y algebraicas, es en SC donde encontramos una redefinición de los objetos geométricos que posibilitan tal aplicación. Wallis lleva a cabo en SC un tratamiento sistemático de las secciones cónicas partiendo de una caracterización de esas curvas, por medio del método de los indivisibles, como es posible observar ya en la primera proposición:

> I suppose at the start (according to the *Geometria indivisibilium* of Bonaventura Cavalieri) that any plane whatever consists, as it were, of an infinite number of parallel lines. Or rather (which I prefer) of an infinite number of parallelograms of equal altitude; which indeed the altitude of a single one is $\frac{1}{\infty}$ of the whole altitude, or an infinitely small divisor; (...); and therefore, the altitude of all of them at once is equal to the altitude of the figure. (SC p. 4-5 , trad. Stedall 2008, p. 68)

Pese a las limitaciones de las herramientas puramente geométricas para ofrecer un método general de resolución, por estar atadas a construcciones particulares, Wallis reconoce el valor del método de los indivisibles y ve en la nueva geometría analítica, así como en el álgebra y la aritmética de su época, las herramientas para extender este método. Así, una vez establecido su punto de partida, Wallis recupera el trabajo clásico de Apolonio sobre las cónicas y en la

[13] En adelante AI

primera parte de su tratado (proposiciones 1 a 20) considera la parábola, la elipse, el círculo y la hipérbola como secciones de un cono (Fig. 4.2). Inspirado en Descartes, en esta primera aproximación, el objetivo de Wallis es encontrar las ecuaciones que definen las cónicas y, para ello, examina las relaciones geométricas (*ratios*) entre los diferentes elementos que componen las curvas (ordenadas, diametros, *latus rectum*, etc.). A partir de este examen, Wallis deriva en (SC, p. 46-59), la ecuación que define la parábola ($p^2 = ld$), la elipse ($e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$) y la hipérbola ($h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2$). De esta manera, para la parábola, cuya cuadratura consideraremos en detalle más adelante (secc. 4.3.1), p es la ordenada DO, d el diametro AD y l el *latus rectum* LA.

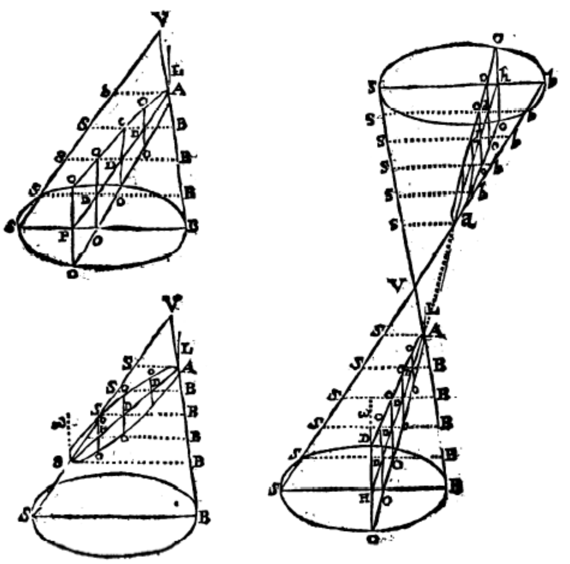


Figura 4.2: Secciones cónicas representadas como figuras resultantes del corte un cono (SC, Prop. 7, p. 21.

En la segunda parte de SC (Proposiciones 21 a 44), también inspirado por el trabajo de Descartes, Wallis comienza a considerar las cónicas como figuras planas -*absolute considerata* - (Fig. 4.2), mostrando que sus propiedades fundamentales pueden ser obtenidas sin referencia al cono, sino sólo por medio del examen de las relaciones geométricas expresadas en las ecuaciones presentadas previamente. De esta manera, muestra cómo obtener, mediante manipulación algebraica, la longitud de cualquier componente de una cónica, dadas las restantes magnitudes. En la figura 4.3 podemos observar las fórmulas que permiten obtener las diferentes magnitudes de las cónicas.

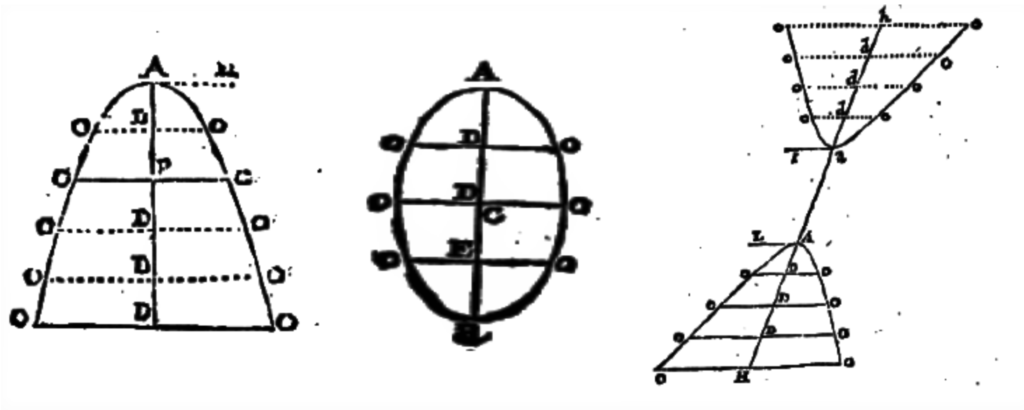
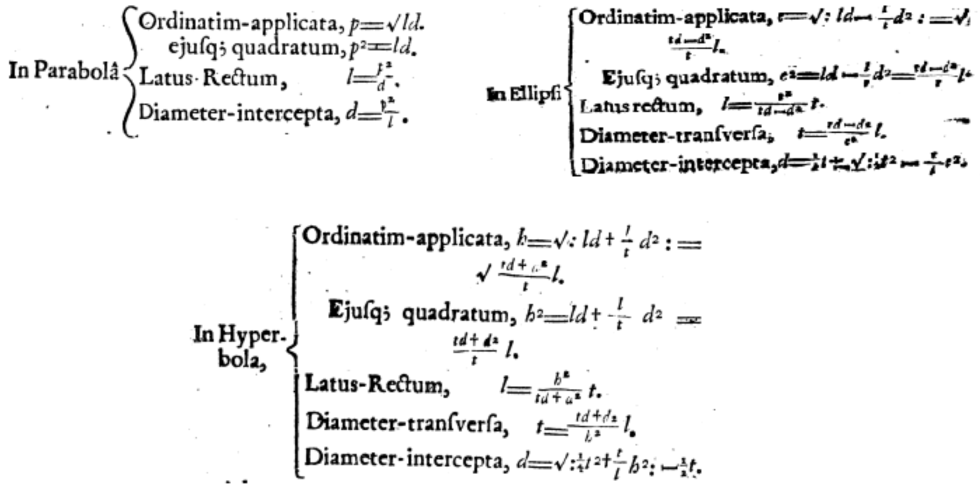


Figura 4.4: Secciones cónicas representadas como figuras planas (SC, Prop. 21, 26 y 33, pp. 47, 60 y 79, respectivamente



In Parabolâ
- Ordinatim-applicata, $p = \sqrt{ld}$.
- ejusq; quadratum, $p^2 = ld$.
- Latus-Rectum, $l = \frac{p^2}{d}$.
- Diameter-intercepta, $d = \frac{p^2}{l}$.

In Ellipsi
- Ordinatim-applicata, $e = \sqrt{:\, ld - \frac{l}{t}d^2 :} = \sqrt{\frac{td - d^2}{t}\, l}$.
- Ejusq; quadratum, $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2 = \frac{td - d^2}{t}\, l$.
- Latus rectum, $l = \frac{e^2}{td - d^2}\, t$.
- Diameter-transversa, $t = \frac{td - d^2}{e^2}\, l$.
- Diameter-intercepta, $d = \frac{1}{2}t \pm \sqrt{:\, \frac{1}{4}t^2 - \frac{t}{l}e^2}$.

In Hyperbola,
- Ordinatim-applicata, $h = \sqrt{:\, ld + \frac{l}{t}d^2 :} = \sqrt{\frac{td + d^2}{t}\, l}$.
- Ejusq; quadratum, $h^2 = ld + \frac{l}{t}d^2 = \frac{td + d^2}{t}\, l$.
- Latus-Rectum, $l = \frac{h^2}{td + d^2}\, t$.
- Diameter-transversa, $t = \frac{td + d^2}{h^2}\, l$.
- Diameter-intercepta, $d = \sqrt{:\, \frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{l}h^2 :} - \frac{1}{2}t$.

Figura 4.3: Tablas con las fórmulas que permiten obtener las diferentes magnitudes de las cónicas (SC, Prop. 22, 28 y 35, pp. 51, 64 y 83, respectivamente).

Con lo expuesto hasta ahora podemos observar que el tratamiento de las cónicas, por parte de Wallis, tiene como punto de partida las definiciones tradicionales, en tanto que considera estas curvas como secciones de un cono, al mismo tiempo que conserva la terminología geométrica para sus partes constitutivas. Sin embargo, el distanciamiento del enfoque tradicional se vuelve manifiesto, en cuanto Wallis comienza a incorporar los novedosos aportes del método de los indivisibles y de la geometría de Descartes para la redefinición de las cónicas. Asimismo, y tal como mencionamos, esta redefinición es la que posibilita a Wallis la aplicación de herramientas algebraicas y aritméticas para el cálculo de cuadraturas, tarea que es llevada a cabo en AI donde se desarrolla y expone su método.

Pasando ahora a AI, vemos que el método de resolución de Wallis posee una estructura argumentativa bien definida, donde es posible distinguir dos etapas bien diferenciadas: una etapa que podemos denominar aritmética y otra etapa geométrica. La etapa aritmética está orientada a resolver un problema estrictamente aritmético que es el establecimiento de la razón (*ratio*) entre dos series determinadas de sumas (o productos). Este problema es investigado "inductivamente" donde Wallis va observando qué sucede con la razón entre las diferentes series, conforme el número de términos a considerar va aumentando. La etapa aritmética culmina con el establecimiento de un teorema que realiza una afirmación sobre el comportamiento de la razón entre las series, cuando el número de términos de las sumas (o productos) son infinitos. Luego, Wallis inicia la etapa geométrica, en la cual se plantea un problema de cuadratura que requiere el establecimiento de la proporción entre el área debajo de una curva y el rectángulo que la contiene. Atendiendo a que las figuras geométricas han sido redefinidas, la proporción entre el área de esas dos figuras consiste ahora, incorporando los aportes de Cavalieri, en determinar la proporción entre las colecciones de indivisibles que las componen. Aquí, a modo de corolario, Wallis afirma que la proporción buscada entre las colecciones de indivisibles de ambas figuras es la misma proporción hallada en el teorema que finaliza la etapa aritmética, dando así por resuelto el problema.

A continuación, presentaremos el caso de la cuadratura de la parábola, a fin de visualizar en más detalle, el modo en que se articulan los diferentes aportes considerados en la sección anterior en el contexto de resolución de problemas, permitiendo así la elaboración de un método sistemático de resolución de problemas de cuadraturas.

4.3.1. La cuadratura de la parábola

Como venimos mencionando, es posible distinguir en el método de cuadraturas de Wallis dos etapas bien diferenciadas, siendo la primera de ellas la etapa aritmética, que para el cálculo de la parábola se inicia en la Proposición 19 de AI. En esta proposición, Wallis considera un problema estrictamente aritmético, que consiste en calcular, cuál es la razón (*ratio*) que se cumple entre una serie de cantidades cuya razón duplica a la proporción aritmética, o lo que es lo mismo, la serie de números cuadrados, y una serie de cantidades que poseen igual número de términos, todos ellos iguales al término mayor de la primera serie:

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + n^2 + \ldots + n^2}$$

Wallis procede a realizar el cálculo de los cocientes, considerando como varía el mismo cuando el número de términos va de 1 a 6:

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2}{4^2+4^2+4^2+4^2+4^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$$

Luego, a partir de la observación del comportamiento de las series cuando el número de términos varía de 1 a 6, Wallis procede a realizar una generalización de sus observaciones en la siguiente proposición:

> **Proposition 20**. If there is proposed a series, of quantities that are as the squares of arithmetic proportionals (or as a sequence of square numbers) continually increasing, beginning from a point or 0, its ratio to a series of the same number of terms equal to the greatest will exceed one third; and the excess will be the ratio of one, to six times the number of terms after 0; or of the square root of the first term after 0, to six times the square root of the greatest term. T hat is (if for the first term after 0 t here is put 1, and for the last l),
>
> Por lo tanto (si para el primer término después del 0 se pone uno, y para la raíz de los últimos [l]),
>
> $$\frac{l+1}{3}l^2 + \frac{l+1}{6l}l^2.$$
>
> Or (denoting the number of terms by m , and the last by l),
>
> $$\frac{m}{3}l^2 + \frac{m}{6m-6}l.$$
>
> Since, moreover, as t he number of terms increases, that excess over one third is continually decreased, in such a way that at length it becomes less than any assignable

> quantity (as is clear); if one continues to infinity, it will vanish completely. (Wallis 2004, p. 27).

Así, en una segunda instancia, Wallis deja de considerar los casos particulares y pasa a considerar los patrones subyacentes a las observaciones realizadas en la proposición 19. De este modo, Wallis ya no se ocupa de observar cuál es el comportamiento de las series cuando el número de términos varía para una cantidad específica de términos, sino que considera el número de términos en su generalidad, yendo más allá de los valores calculados en la primera parte. Este tratamiento más generalizado se evidencia en la introducción de un simbolismo, la fórmula característica, que expresa la proporción entre las series consideradas. Este simbolismo incluye así referencias a los elementos que constituyen las series, como lo son el primer y el último término de la serie, así como también, el número de términos de la misma, sin que este último haga referencia a un número de términos en particular. Este proceso de generalización inductiva finaliza en la proposición 21 donde establece que:

> **Proposition 21.** (Theorem) If there is proposed an infinite series, of quantities that are as squares of arithmetic proportionals (or as a sequence of square numbers) continually increasing, beginning from a point or 0, it will be to a series of the same number of terms equal to t he greatest as 1 to 3. (Wallis 2004, p. 27).

Luego, en la proposición 23, Wallis pasa a considerar el problema de la cuadratura de la parábola, refiriéndose explícitamente al diagrama que acompaña el texto (Fig.4.5) e iniciando así la segunda etapa de su método, la etapa geométrica.

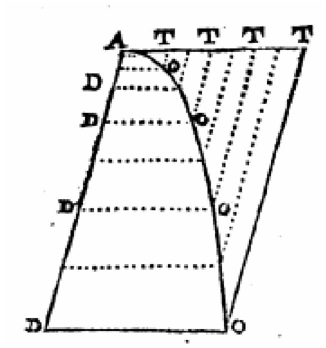


Figura 4.5: Diagrama de la parábola simple (AI, prop. 23, p. 28)

El problema en este caso requiere determinar la proporción entre el área de AOT y del rectángulo $ATOD$. En continuidad con lo elaborado en SC, observamos aquí que la parábola ya no es considerada por Wallis como la sección de un cono, sino como una figura plana compuesta - de acuerdo al método de Cavalieri - de los indivisibles DO y TO. El problema inicial es entonces transformado en el problema de determinar la proporción entre las colecciones de indivisibles de ambas figuras. A fin de determinar tal proporción, Wallis asocia valores numéricos a los indivisibles que componen ambas figuras. En este caso, los términos iniciales de las series consideradas en la etapa aritmética son puestos en correspondencia con el vértice de la figura (punto A), mientras que los indivisibles de AOT lo hacen con la serie de los números cuadrados y los de $ATOD$ con los términos de la serie compuesta por términos constantes, todos ellos igual al término mayor de la primera serie. La correspondencia establecida entre indivisibles y valores aritméticos sólo puede ser establecida, si las relaciones (en el sentido de *ratio*) entre los términos de las series es la misma que se cumple entre las ordenadas y el diámetro de la parábola.

Es fundamental recordar aquí que las relaciones entre las ordenadas y los diámetros fueron examinadas en SC, cuando Wallis se encontraba enfocado en la definición de las cónicas por medio de ecuaciones algebraicas. De esta manera, Wallis refiere aquí a los resultados de la proposición 21 de SC (pp. 46-50) que establecen que las líneas DO (ordenadas) serán como las raíces cuadradas de las líneas AD (diámetros) y, conversamente, las líneas AD- esto es, TO- serán como los cuadrados de DO - esto es, AT. Este resultado garantiza así la correspondencia entre indivisibles y valores numéricos permitiendo a Wallis la aplicación de los resultados obtenidos en las proposiciones precedentes, a fin de concluir en la proposición 23 que establece: "Así, la totalidad de la figura AOT [...] será al paralelogramo TD de igual altura [...] , como 1 a 3. Y, por consiguiente, la propia semiparábola será al paralelogramo lo mismo que 2 a 3" (AI, prop. 23, p. 28).

4.3.2. Extendiendo el alcance del método

El cálculo de la cuadratura de la parábola que acabamos de presentar no era un resultado novedoso para la época, como ya mencionamos, el mismo podía incluso ser obtenido por métodos puramente geométricos. Así, en este punto debemos reiterar que la principal innovación de Wallis en AI reside en la sistematicidad su método propuesto que permite resolver, no sólo la cuadratura de la parábola simple, sino también la cuadratura de muchas otras curvas. De los problemas abordados por Wallis en AI, el de la cuadratura del círculo es, sin lugar a dudas, el que ha tomado mayor protagonismo. Sin embargo, en lo que sigue nos gustaría llamar atención sobre otro grupo de curvas que tienen un lugar preponderante en el desarrollo del método de cuadraturas aritméticas. Específicamente, nos interesa focalizar en la resolución de las cuadraturas de curvas de la forma, en términos actuales, $y = x^k$ posibilitada por el método de Wallis. La razón de este interés es que AI constituye el primer trabajo publicado donde se aborda sistemáticamente la cuadratura de este tipo de curvas incluyendo no sólo aquellas con exponentes enteros positivos, sino también, las que poseen exponentes fraccionarios y negativos.

Como mencionamos anteriormente (Secc. 4.2), matemáticos como Cavalieri y Torricelli[14], desarrollaron también métodos para el cálculo de cuadraturas de curvas de la forma $y = x^k$ con k entero positivo. Asimismo, el cálculo de la cuadratura de las así llamadas "parábola cúbica"($k = 3$), "bicuadrática"($k = 4$), "supersólida"($k = 5$) y "superiores"($k > 5$)[15], es bastante directa, pues para calcular sus cuadraturas Wallis repite el mismo patrón argumentativo presentado en la sección anterior. En consecuencia, entendemos que reviste especial interés la aplicación del método a las parábolas con exponentes fraccionarios y negativos, a fin de comprender el alcance general de su método, así como su relación con la inclusión de herramientas provenientes de diferentes dominios característica de su innovador enfoque. A fin de arrojar luz sobre estos aspectos, en la próxima sección presentaremos la extensión del método a exponentes fraccionarios considerando, en particular, la cuadratura de la curva $y = x^{\frac{1}{2}}$.

Exponentes fraccionarios

La presente sección está dedicada a la aplicación del método de cuadraturas aritméticas de Wallis a las parábolas con exponentes fraccionarios, donde prestaremos especial atención a la resolución del problema de la cuadratura de la parábola definida por la curva $y = x^{\frac{1}{2}}$. Atendiendo a este objetivo, lo primero que debemos destacar es que la aplicación, por parte de Wallis, de su método a parábolas con exponentes fraccionarios, es mejor comprendida en el contexto de una primera extensión a todas las parábolas con exponentes enteros positivos que le permite a Wallis ir más allá de ciertos casos particulares. Esta primera extensión tiene lugar, luego de que Wallis resuelve (Prop. 42) la cuadratura de la parábola cúbica ($y = x^3$) empleando la misma estructura argumentativa que usara para la parábola simple, que vimos en la sección anterior. Luego de resolver este problema, en lo referente a los problemas de series aritméticas Wallis sostiene en la siguiente proposición:

PROPOSITION 44 – Theorem Therefore if there is considered an infinite series,

[14]Para mencionar dos trabajos que se encontraban publicados en el período donde Wallis desarrolla AI.
[15]Se trata de las denominaciones propuestas por el mismo Wallis.

of quantities beginning from a point or 0, and continually increasing in arithmetic proportion (which I call a series of laterals, or first powers) or of heir squares, cubes, biquadrats, etc, (which I call a series of second powers, third powers, fourth powers etc.)[. . .] the ratio of the whole series, to a series of the same number of terms equal to the greatest, will be that which follows in this table. That is:

Equals	$\frac{1}{1}$ or	as 1 to	1
First powers	$\frac{1}{2}$		2
Second powers	$\frac{1}{3}$		3
Third powers	$\frac{1}{4}$		4
Fourth powers	$\frac{1}{5}$		5
Fifth powwers	$\frac{1}{6}$		6
Sixth powers	$\frac{1}{7}$		7
Seventh powers	$\frac{1}{8}$		8
Eighth powers	$\frac{1}{9}$		9
Ninth powers	$\frac{1}{10}$		10
Tenth powers	$\frac{1}{11}$		11

And so on. (AI, Prop. 44. p. 42)

En esta proposición podemos observar que Wallis realiza una generalización yendo así más allá de los resultados calculados previamente (hasta la Prop. 42), y que sólo consituyen las primeras cuatro filas de la tabla. De manera análoga a lo que vimos en la etapa geométrica para el cálculo de la cuadratura de la parábola simple, Wallis deriva de este teorema un corolario que será, en consonancia, también de carácter general. Esto es, el corolario establecerá un resultado general sobre la proporción entre el área de los complementos de las parábolas con exponentes enteros positivos y el área de los rectángulos que las contienen, como señala Wallis en la siguiente proposición:

PROPOSITION 45 - Corollary Here we learn the method of finding the area of the complement of a simple parabola, and also of cubical, biquadratic or supersolid parabolas, or those of any higher powers; and consequently also the area of a simple parabola or parabolas of any power. [...] That is, while the complement of a parabola (or half parabola), is a series of second powers (Prop.23), the complement of the cubical parabola (or half of it) is a series of third powers (Prop. 42), and (for the same reason) the complement of the biquadratic parabola is a series of fourth powers, the complement of a supersolid parabola is a series of fifth powers, and so on. **The**

> **ratio of these to a circumscribed parallelogram (that is, to a series of the same number of terms equal to the greatest) is 1 to 3, 1 to 4, 1 to 5, 1 to 6, and so on, according to the table in the preceding proposition**. (AI, Prop. 45, p.43. El resaltado es nuestro)

A partir de la presente proposición, podemos ver cómo Wallis extiende la aplicación de su método a parábolas con exponentes enteros positivos permitiéndole alcanzar el resultado que actualmente expresamos como:

$$\int_0^1 x^k dx = \frac{1^k}{k+1}$$

Una vez que Wallis determina que su método es aplicable a toda parábola con exponente entero positivo, en la Proposición 51 pasa a afirmar que es posible hacer lo mismo con aquellas que involucran exponentes fraccionarios. Como consecuencia de lo anterior, Wallis observa en la Proposición 53 que:

> [I]t opens an avenue to the investigation of the ratios (to a series of quantities equal to the greatest) that series of this kind, of square [p. 48] roots, cube roots, biquadratic roots, etc. of numbers or arithmetic proportionals, beginning from a point or 0, may be said to have. (Thus $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc., $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}$, etc. $\sqrt[4]{0}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, etc.) Which I call series of second roots, third roots, fourth roots etc. (AI, Prop. 53, p. 49)

Nuevamente, observamos aquí que la resolución de problemas de cuadraturas de Wallis inicia con una etapa aritmética que busca establecer la razón entre dos series aritméticas, que serán aquí series cuyos términos son raíces cuadradas. Con respecto a dichas series Wallis señala a continuación y en la misma proposición:

> For example, if there is proposed an infinite number of squares of this kind which are arithmetic proportionals, or as a series of first powers, to which in the table is assigned the ratio 1 to 2, then to their sides (that is, to a series of second roots) belongs the ratio 1 to $1\frac{1}{2}$ (or 2 to 3); because 1, $\frac{1}{2}$, 2, are arithmetic proportionals.(AI, Prop. 53, p. 49)

A diferencia de lo que vimos en la etapa aritmética de la cuadratura de la parábola simple, para determinar la razón entre las series, Wallis no realiza cálculos que le permitan observar qué sucede cuando el número de términos varía en una cantidad finita. Aquí ese paso se encuentra ausente y, en su lugar, Wallis obtiene la razón entre las series a partir de la tabla de la proposición 44 - que, recordemos da una regla general para calcular la razón entre series de sumas de potencias positivas. Así, si se define $\sqrt{x}$ como $x^{\frac{1}{2}}$ Wallis calcula en base a una tabla que la razón entre las series consideradas será $\frac{1}{\frac{1}{2}+1}$, esto es, $\frac{2}{3}$. En el resto de la proposición Wallis procede también calculando la proporción de las series de raíces a partir de la tabla y expone el resultado general de lo desarrollado en el siguiente teorema:

> **PROPOSITION 54 - Theorem** If there is understood to be an infinite series, of quantities beginning from a point or 0, and continually increasing, as the square roots, cube roots, biquadratic roots, etc. of numbers in arithmetic proportion (which I call series of second roots, third roots, fourth roots, etc.), then the ratio of all of them, to a series of the same number of terms equal to the greatest, will be that which follows in this table, that is:

Second roots	$\frac{2}{3}$ or	as 1 to	1
Third roots	$\frac{3}{4}$		$1\frac{1}{3}$
Fourth roots	$\frac{4}{5}$		$1\frac{1}{4}$
Fifth roots	$\frac{5}{6}$		$1\frac{1}{5}$
Sixth roots	$\frac{6}{7}$		$1\frac{1}{6}$
Seventh roots	$\frac{7}{8}$		$1\frac{1}{7}$
Eighth roots	$\frac{8}{9}$		$1\frac{1}{8}$
Ninth roots	$\frac{9}{10}$		$1\frac{1}{9}$
Tenth roots	$\frac{10}{11}$		$1\frac{1}{10}$
And so on.			

> Clear from what has gone before (AI, Prop. 54, p. 49).

A partir de lo anterior, obervamos que con el teorema de la Proposición 54 Wallis establece un resultado general acerca de la proporción entre series cuyos términos son raíces, análogamente a como establecía un resultado general con la proposición 44, pero en aquel caso para series de sumas de potencias enteras positivas. Con este teorema finaliza la etapa aritmética y, en el paso siguiente, Wallis procede a derivar diversos corolarios geométricos, así como lo hizo anteriormente con la parábola simple, en ese caso particular, y, de forma general, con las parábolas con exponentes enteros positivos. En cuanto a esos corolarios, nos queremos detener en el de la proposición 55 que se ocupa de la cuadratura de la curva $y = x^{\frac{1}{2}}$.

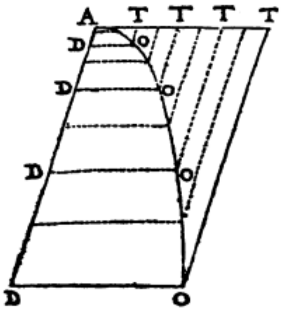


Figura 4.6: (AI, Prop. 55, p. 50)

En la resolución de este problema, Wallis reintroduce el diagrama de la proposición 23 (Fig. 4.6) con la diferencia que aquí lo que se desea es calcular la proporción entre el área de la figura AOD y el área del rectángulo que la contiente $ATOD$. Sobre la proporción buscada, Wallis establece seguidamente que:

> **PROPOSITION 55 – Corollary** Therefore half a plane parabola (or also a whole parabola) is to the circurnscribed parallelogram as 2 to 3. For a plane half parabola (or also a whole parabola) is an infinite series of second roots (by Proposition 8 of *On conic sections*) . The parallelogram, moreover, is a series of the same number of terms equal to the greatest. Therefore the former to the latter is as 1 to $1\frac{1}{2}$, or as 2 to 3 (and consequently, its complement, that is, the remainder of the parallelogram, as 1 to 3) (AI, Prop. 55, p. 50).

Al igual que con la parábola simple, observamos que Wallis aborda también aquí un problema de cuadratura planteando y resolviendo, en primer lugar, un problema de series aritméticas. En ambos casos, observamos también que la determinación de la proporción entre el área de las figuras es posible, a partir del establecimiento de una correspondencia entre los indivisibles de las figuras y los términos de series. De manera que, a partir de esta correspondencia, Wallis puede afirmar que la proporción entre el área de las figuras es la misma que la razón entre las series que, en todos los casos, son cocientes entre las series de sumas consideradas en la etapa aritmética. Por otra parte, también llama la atención cómo Wallis partiendo de entender la raíz cuadrada de un número como una potencia fraccionaria, esto es $\sqrt{n}$ como $n^{\frac{1}{2}}$, logra obtener la cuadratura de la curva $y = x^{\frac{1}{2}}$ por dos vías diferentes. Una de estas vías es la presentada en la Proposición 55 que acabamos de ver y, la otra vía, es la que observamos en la Proposición 23, donde se ocupa de la parábola. Wallis afirma que $\sqrt{n}$ es la recíproca de n^2, de suerte que, y volviendo al diagrama geométrico, el área de AOD es igual al área determinada por la parábola, siendo $\frac{2}{3}$ del área del rectángulo $ATOD$, como ya se había establecido en la proporción 23. De esta manera, la cuadratura de la parábola $y = x^{\frac{1}{2}}$ puede obtenerse tanto por la consideración de la serie de sumas de cuadrados como de la serie de sumas de raíces. Ambos resultados concuerdan con lo que se observa en el diagrama, y que aquí hemos sombreado en la Fig. 4.7 para destacar aún más claramente la concordancia y la continuidad entre los diferentes resultados obtenidos por Wallis.

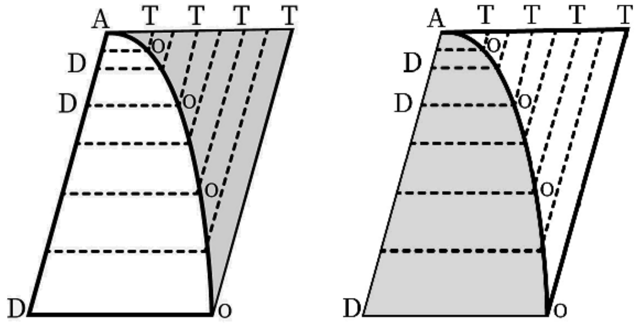


Figura 4.7: A la izquierda cuadratura parábola simple a la derecha cuadratura de la parábola complementaria ($y = x^{\frac{1}{2}}$). Expresado en términos actuales, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}$.

Con esta exposición de la extensión que Wallis hace de la aplicación de su método al cálculo de cuadraturas con exponentes fraccionarios, damos por finalizada nuestra primera aproximación al estudio de caso aquí propuesto. Esta primera aproximación de carácter histórico constituirá la base a partir de la cual, en el próximo capítulo, analizaremos las estrategias de resolución de problemas de cuadraturas elaboradas por Wallis recurriendo al esquema desarrollado en nuestro tercer capítulo.

Capítulo 5

Prácticas de representación e inferencia en John Wallis (1656)

El presente capítulo tiene por objetivo, la aplicación del esquema propuesto en el Cap. 3 para el análisis de estrategias de resolución de problemas al método de cálculo de cuadraturas aritméticas publicado por Wallis en 1656, completando con ello nuestro estudio de caso. Para ello, partimos del abordaje histórico realizado en el capítulo anterior, donde planteamos los principales aspectos del método. Dividimos el presente capítulo en tres secciones principales: la primera (5.1) está dedicada a la dimensión epistemológica de las estrategias y se orienta así a la identificación y el estudio de las representaciones presentes en los argumentos donde se despliegan las estrategias de resolución de problemas. Por otro lado, la siguiente sección (5.2) tiene como objetivo el estudio de la dimensión lógica de las estrategias, entendidas así como conjunto de acciones inferenciales. Específicamente, y como consecuencia de la interacción de dominios, los argumentos donde se despliegan las estrategias se caracterizan por la presencia de diversas prácticas. De esta manera, el estudio de la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas, resulta un complemento al estudio de su dimensión epistemológica, en tanto que se orienta a la identificación y el estudio de las acciones inferenciales posibilitadas por las representaciones analizadas en la sección anterior. Por último, nuestra tercera sección (5.3) focaliza en los cambios en las condiciones de resolución de problemas que nos permitirá analizar aspectos innovadores de las estrategias desarrolladas por Wallis en el contexto específico de resolución de problemas.

5.1. Aspectos epistemológicos de las estrategias desplegadas en Wallis (1656)

En esta primer sección nos proponemos atender la dimensión epistemológica de las estrategias de resolución de problemas. Analizadas desde esta dimensión, caracterizamos las estrategias de resolución como la búsqueda de reglas para el uso, en tandem, de representaciones provenientes de diferentes dominios. Tales reglas son exploradas, introducidas y evaluadas en la actividad misma de resolución de problemas. De esta manera, las nuevas reglas para el uso coordinado de diversas representaciones dependen, tanto del problema de origen, como del problema-hipótesis y, no menos importante, también dependen de la relación entre las porciones relevantes de los dominios que se establece con vistas a la resolución del problema que la motiva. En el caso analizado el problema a resolver - problema-origen - es el problema geométrico de cuadraturas que consiste en determinar la proporción entre el área de diferentes figuras. Por otro lado, el problema-hipótesis, que se anexa a fin de resolver el problema-origen, es el problema de hallar la razón entre dos series de sumas. Con estos problemas en vista, procederemos en primer lugar en la próxima sección, a la identificación de las representaciones que hacen posible su planteo y establecen sus condiciones de resolución.

5.1.1. El espectro de representaciones en AI

La primera actividad del esquema que proponemos tiene por objetivo, recordemos, la identificación de las representaciones - *paper-tools*- presentes en los argumentos donde se despliegan las estrategias de resolución de problemas. Atendiendo a los diferentes dominios involucrados en la resolución de problemas, dividimos esta actividad en las tres tareas que desarrollamos a continuación.

Identificación de las representaciones que posibilitan el planteo del problema-origen (tarea 1a)

La primera tarea (1a) tiene por objetivo identificar las representaciones provenientes del dominio de origen presentes en AI e indaga en el modo en que el despliegue y transformación de esas *paper-tools* posibilitan el planteo del problema a resolver, al mismo tiempo que prescribe cuáles son las mejores formas de abordaje, delimitando así el espacio de búsqueda así como las condiciones para su resolución. Nuestro estudio de caso analiza la resolución propuesta por Wallis de problemas de cuadraturas por medio de su método desarrollado en AI. Tal como observamos en el capítulo anterior, los problemas de cuadraturas, en su planteo geométrico clásico, requerían establecer la proporción entre el área de diferentes figuras. Para la resolución de este tipo de problemas, en la práctica geométrica clásica se parte de un diagrama de la figura dada y, por medio del sucesivo trazado de líneas de acuerdo a reglas bien definidas e indicadas por el texto que acompaña el diagrama, se obtiene una figura proporcional a la primera.

Pasando ahora a nuestro estudio de caso, observamos que Wallis parte de la formulación clásica de los problemas de cuadraturas, esto es, como problemas geométricos que requieren establecer la proporción entre el área de dos figuras. De igual manera, podemos obsevar que Wallis también recurre a representaciones diagramáticas acompañadas de lenguaje natural para indicar los requerimientos del problema geométrico a resolver. Respecto a esto último, queremos destacar que los diagramas que Wallis introduce en el planteo del problema-origen son los mismos que encontramos en la segunda parte de SC. Es importante recordar aquí que, aunque SC tiene como punto de partida el estudio geométrico clásico de Apolonio sobre las cónicas, en la segunda parte de su tratado, Wallis abandona las representaciones diagramáticas clásicas y el lenguaje de la teoría de proporciones. Como consecuencia de lo anterior, en los diagramas que aparecen en el planteo del problema-origen en AI, Wallis conserva sólo la terminología de Apolonio para las partes constitutivas de las cónicas y los resultados relativos a las relaciones geométricas entre dichas partes[1].

Con lo expuesto hasta ahora, identificamos en AI representaciones asociadas al dominio de origen en el planteo del problema de cuadraturas que mantiene la formulación geométrica clásica de los problemas de cuadraturas como la búsqueda de la proporción entre el área de diferentes figuras, así como en la introducción de un diagrama en este mismo planteo. Con respecto a los diagramas introducidos por Wallis en el planteo del problema-origen, notemos que ellos conservan de los elementos representacionales clásicos, sólo la terminología y relaciones geométricas asociadas al trabajo clásico de Apolonio.

[1] Mencionamos aquí los rasgos de los diagramas introducidos por Wallis ligados a la práctica geométrica clásica. Sin embargo, los aspectos de mayor interés residen en, cómo esos diagramas incorporan elementos provenientes de otros dominios que resultan fundamentales para la resolución de los problemas de cuadratura. En consecuencia, ellos serán analizados en mayor detalle más adelante, cuando nos aboquemos a la identificación de las representaciones presentes en la resolución de problemas con nuestra tarea (1c).

Identificación de las representaciones que posibilitan el planteo del problema-hipótesis (tarea 1b)

Habiendo identificado las representaciones provenientes de la práctica de origen en los argumentos donde Wallis despliega sus estrategias para la resolución de problemas de cuadraturas, haremos lo propio con las representaciones provenientes de la práctica anexada. De esta manera, en la presente sección nos abocaremos a la identificación de las representaciones asociadas al problema-hipótesis, la que constituye la segunda tarea (1b) de la primera actividad de nuestro esquema. En nuestro estudio de caso, el problema-hipótesis es el problema aritmético de establecer la razón entre series de sumas que Wallis estima relevante para la resolución sistemática de problemas de cuadraturas. Las representaciones asociadas al problema- hipótesis resultan fácilmente identificables gracias a la estructura argumentativa bien definida del método desarrollado por Wallis. En efecto, tanto el planteo como la resolución de los problemas relativos a series, se encuentran enteramente acotados a lo que denominamos la etapa aritmética del método.

Como ya hemos tenido oportunidad de observar, Wallis plantea el problema de establecer la razón entre dos series en las proposiciones que componen la etapa aritmética de su método. En los casos que presentamos en el capítulo 4, se busca la razón entre la serie de sumas cuyos términos son potencias (enteras positivas, fraccionarias o negativas) empezando en 0 (cero), y la serie de sumas con la misma cantidad de términos que la primera, todos ellos igual al término mayor de la primera serie. En el planteo inicial del problema aritmético - lemas - las primeras representaciones que identificamos son representaciones aritméticas que Wallis utiliza para introducir las series de potencias involucradas. Además, cuando el problema de series a resolver corresponde a un caso específico - por ejemplo, el que involucra la serie de los números cuadrados que observamos en el contexto del cálculo de la cuadratura de la parábola simple - , hallamos también representaciones aritméticas de las razones entre las series. En estos casos, la razón entre las series es expresada por medio de una fracción que tiene como numerador, las series de sumas de potencia con término inicial 0 y como denominador, las series de sumas con todos los términos iguales al término mayor de la primera serie[2]. Estas fracciones forman parte de los cálculos aritméticos que permiten visualizar, cómo varía la razón entre las series, cuando sus términos aumentan en una cantidad finita.

Cuando el problema relativo a series es específico, el segundo tipo de representaciones que en-

[2]Para las proposiciones que generalizan resultados, Wallis pasa de los lemas que plantean el problema directamente a los teoremas, de modo que no encontramos estas fracciones y tampoco las representaciones algebraicas que veremos a continuación.

contramos en la etapa aritmética son las algebraicas[3]. Este paso de representaciones aritméticas a algebraicas para el abordaje del problema relativo a series se encuentra asociado a la práctica algebraica inaugurada por Viète con su distinción entre *logistica numerosa* y *logistica speciosa.* La *logistica numerosa* refiere a los cálculos realizados únicamente con números, mientras que la *logistica speciosa* refiere al cálculo con letras y no sólo números. En el contexto de esta distinción, las representaciones algebraicas resultan aptas para la representación de cálculos numéricos, al mismo tiempo que permiten una mayor abstracción. Así, las fórmulas algebraicas que introduce Wallis le permiten investigar el comportamiento de la razón entre las series cuando el número de términos va en aumento, pero sin hacer alusión a ninguna cantidad específica de términos y, con ello, determinar el comportamiento de la series cuando el número de términos aumenta indefinidamente hasta hacerse infinito.

Por último, focalizando en los teoremas que finalizan la etapa aritmética, en los que Wallis resuelve los problemas de series, indicando su razón cuando el número de términos es infinito, encontramos nuevamente representaciones aritméticas que expresan la razón obtenida. En particular, encontramos una única fracción cuando se consideran casos específicos, o bien, una tabla con diversas fracciones en los teoremas que generalizan resultados sobre diferentes series.

Con nuestra tarea (1b) hemos focalizado en las representaciones provenientes del dominio anexado que posibilitan el planteo y establecen las condiciones de resolución del problema-hipótesis. Gracias a la estructura bien definida del método de Wallis, hemos podido identificar representaciones simbólicas, numéricas y algebraicas, que son utilizadas por Wallis para explorar las razones entre diferentes series - principalmente series de números figurados, esto es, con términos con exponentes enteros positivos pero también con exponentes fraccionarios y negativos. De esta manera, a partir de lo expuesto tenemos que las representaciones algebraicas, asociadas a la resolución del problema- hipótesis tienen por objetivo determinar las propiedades de las series infinitas que permitan resolver el problema. Notemos que el uso de representaciones algebraicas que encontramos en la etapa aritmética, contrasta así con el que encontramos en SC donde Wallis recurre a las ecuaciones algebraicas para representar tipos de curvas. En el contexto de la redefinición de las cónicas, además, las representaciones algebraicas aparecen combinadas con representaciones geométricas, lo cual nos lleva a la última tarea de la actividad (1) dedicada a la identificación de las representaciones presentes en la resolución de problemas.

[3]En la extensión del método, este paso puede estar ausente y, en su lugar, referir a las tablas correspondientes a teoremas previos como en el caso de las series de potencias fraccionarias (Cfr. Secc. 4.3.2).

Identificación de las representaciones empleadas en la resolución del problema (tarea 1c)

Una vez identificadas las representaciones provenientes de los diferentes dominios que posibilitan el planteo y las condiciones de resolución del problema-origen, por un lado, y del problema-hipótesis, por el otro, estamos en condiciones de abordar la tarea que completa nuestra primera actividad. Esta última tarea (1c), recordemos, se orienta a la identificación de las representaciones desplegadas en las porciones del argumento donde se resuelve el problema-origen. Desde el trasfondo del estudio de las representaciones analizadas previamente, en esta sección focalizaremos en las representaciones que incorporan elementos de diversos ámbitos permitiéndole a Wallis resolver problemas de cálculos de cuadraturas. Esto último, finalmente, nos lleva a analizar las herramientas desplegadas por Wallis en lo que denominamos la etapa geométrica de su método de cuadraturas.

La resolución de diferentes problemas de cálculo de cuadraturas tiene siempre lugar en los corolarios de AI. En ellos, Wallis plantea los problemas de cuadraturas conservando su formulación geométrica clásica que requiere establecer la proporción entre el área de dos figuras. En los corolarios que abordan la cuadratura de figuras específicas, y seguido a ese planteo, Wallis introduce un diagrama con las figuras cuya proporción entre sus áreas se desea calcular, mientras que los diagramas están ausentes en los corolarios generales[4].

Como ya adelantamos al final de nuestra tarea (1a), los diagramas que encontramos en los corolarios de AI son los diagramas que Wallis introduce en la segunda parte de SC en el contexto de la redefinición de las cónicas. Si bien los diagramas de Wallis retienen, como ya mencionamos, la terminología clásica para sus partes constitutivas, muestran su distanciamiento al representar las cónicas - recuperando los aportes de Cavalieri - como figuras planas compuestas de indivisibles, que son las líneas paralelas que observamos en los diferentes diagramas. La diferencia con la práctica geométrica clásica se profundiza cuando Wallis, inspirado por Descartes, afirma que la relación entre las líneas que son los indivisibles, son susceptibles de ser expresadas mediante una ecuación. De modo que sus propiedades fundamentales pueden determinarse a partir de ecuaciones mostrando, en consecuencia, un creciente abandono por parte de Wallis del lenguaje de la teoría de proporciones. De esta manera, los diagramas introducidos en la segunda parte de SC y que reaparecen en la resolución de problemas llevada a cabo en AI, se encuentran asociados

[4]Como lo vimos en el caso de la proposición 45 donde establecía las proporciones entre las parábolas con exponentes enteros positivos (Secc. 4.3.2). Profundizaremos en este aspecto en la sección dedicada al estudio de la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas desarrolladas por Wallis.

a la redefinición de las cónicas con la que Wallis incorpora tanto los aportes de la geometría de Descartes, como el método de los indivisibles de Cavalieri.

Regresando a AI, retomemos el corolario de la Proposición 23 donde Wallis resuelve el problema de la cuadratura de la párabola simple. En el diagrama introducido, que volvemos a reproducir aquí (Fig. 5.1), aparecen representadas las figuras con los indivisibles que la componen. Los indivisibles que componen la figura aparecen indicados mediante letras y líneas punteadas. Así, la parábola se encuentra compuesta de los indivisibles DO y TO (ó AD), mientras que el rectángulo está compuesto de los indivisibles $TO(AD)$ cuando esta linea tiene la mayor altura. Wallis utiliza así las letras DO para denotar ordenadas y $AD(TO)$ para los diámetros de la parábola incorporando así la terminología clásica para los componentes de estas curvas.

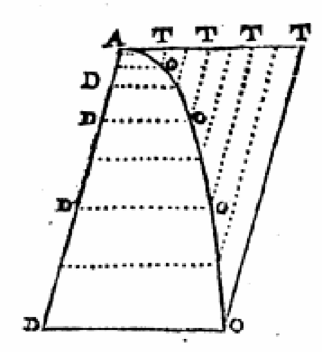


Figura 5.1: AI, Prop. 23, p. 28

Para completar nuestra tarea queremos destacar aquí otros aspectos salientes de los diagramas introducidos por Wallis. El primero está ligado a la estabilidad de los diagramas y, con ello nos queremos referir a que los diagramas presentes en AI no son modificados en el curso de los argumentos. De esta manera, en los diagramas de los corolarios de AI, Wallis no realiza trazados de líneas ni ningún otro tipo de operación geométrica, lo cual contrasta con la práctica geométrica clásica. El segundo aspecto a destacar, y relacionado con el anterior, es que Wallis utiliza los mismos diagramas no sólo, como ya mencionamos, en SC y AI sino también en diferentes proposiciones de AI. De esta manera, encontramos que el diagrama correspondiente a la cuadratura de la parábola simple (Fig. 5.1), Wallis lo vuelve a introducir en las proposiciones donde calcula la cuadratura de parábolas con diferentes exponentes. En el uso repetido de un diagrama, Wallis consecuentemente conserva también la asignación de letras para los indivisibles que componen las figuras, designando siempre con DO las ordenadas y AD los diámetros de las diferentes parábolas. Con estos dos aspectos se evidencia una mayor generalidad de los diagramas, los cuales no se encuentran atados a procesos geométricos de construcción. Vemos así una menor diversidad de diagramas que en los textos clásicos, ya que no se inserta un diagrama diferente cada vez que se prueba un teorema o se resuelve un problema[5]. Esta menor diversidad no debe ser interpretada como una pérdida de la importancia de los diagramas en el trabajo de Wallis, sino como un aprovechamiento de su virtudes para articular aportes provenientes de diferentes dominios que le posibilita la elaboración de un método general de resolución de problemas.

5.1.2. Integración de dominios y el uso combinado de diversas representaciones en Wallis (1656)

Terminamos la sección anterior con la tarea (1c) dedicada a la identificación de las representaciones presentes en las porciones de los argumentos donde se resuelven los problemas de cuadraturas. Atendiendo a la estructura argumentativa del método de Wallis focalizamos en los corolarios, en los que identificamos los novedosos diagramas introducidos por Wallis. Decimos "novedosos", pues como observamos a partir del contraste con las representaciones analizadas previamente en (1a) y (1b), los diagramas de las figuras geométricas se caracterizan por incorporar elementos asociados tanto a las prácticas de representación del dominio de origen, como del anexado.

Debemos notar aquí que si bien en estos diagramas aparecen combinados elementos provenientes de los diferentes dominios involucrados, ellos no resultan suficientes por sí solos para indicarnos, cómo se relacionan los procedimientos de cada uno de esos dominios que permiten el planteo y establecimiento de las condiciones de resolución de los diferentes problemas. Esto último deja entonces abierta la pregunta acerca de cómo Wallis relaciona las condiciones de resolución del problema-origen con las condiciones del problema-hipótesis, es decir, cómo se conectan los problemas aritméticos relativos a series de sumas, con los problemas geométricos de cuadraturas. Para responder esta cuestión, y profundizando en el estudio de los aspectos epistemológicos de las estrategias, es preciso atender al modo en que Wallis pone en relación las representaciones dispares provenientes de los diferentes dominios. Con esto iniciamos el abordaje de la segunda actividad de nuestro esquema de análisis que, recordemos, tiene por objetivo el estudio de la relación entre prácticas de representación que aparecen asociadas a los diferentes

[5] Este aspecto tiene como resultado una articulación argumentativa del diagrama con el texto que lo acompaña diferente a la que encontramos en la práctica geométrica clásica, la cual analizaremos en la sección dedicada al surgimiento de nuevas acciones inferenciales.

dominios involucrados en la resolución de problemas, focalizando en este caso en cómo las diferentes herramientas son puestas en relación a lo largo de los argumentos donde las estrategias son desplegadas.

Volviendo a nuestro estudio de caso, nuestro objetivo en esta sección será analizar el modo en que Wallis logra combinar las herramientas provenientes de la aritmética y del álgebra, por un lado, y la geometría por el otro, a lo largo de AI. Esto último supone, no acotar nuestro análisis solamente a los corolarios donde Wallis resuelve los problemas de cuadratura, sino también considerar el resto de las proposiciones de su método. Asimismo, si bien nuestro análisis parte de las representaciones especializadas - *paper-tools* - identificadas en nuestra primera actividad, también incopora consideraciones en torno al uso del lenguaje natural que hace posible su combinación.

Un rasgo saliente de AI es que los argumentos proceden siempre por dos vías paralelas de acuerdo a los diferentes tipos problemas que se están considerando en cada proposición. Este paralelismo no sólo se manifiesta en la presencia de las herramientas asociadas a los diferentes dominios, que identificamos en la primera actividad, sino también en que estas herramientas se encuentran siempre acompañadas por un vocabulario específico. Tal como señala Stedall en su introducción a la versión en inglés de AI:

> Wallis even used two distinct but parallel vocabularies: for example, first power, second power, and third power in arithmetic, but side, square, and cube in geometry; the Latin verbs multiplicare and dividere in arithmetic, but ducere and applicare in geometry (Stedall, Introducción AI, p. xxi)

De esta manera, tanto las representaciones especializadas analizadas en la primera parte, como el vocabulario específico, se encuentran acotados a las diferentes etapas del método de Wallis y parecen desplegarse de forma independiente hasta que son puestas en relación en los corolarios donde se resuelven los problemas de cuadraturas. Sin embargo, mirando más de cerca a cada una de las proposiciones del método, es posible notar que Wallis introduce una serie de expresiones que tienen por objetivo establecer puntos de contacto entre el problema-origen y el problema-hipótesis que son necesarias para poder establecer luego, en los corolarios, relaciones entre sus condiciones de resolución.

Revisitando las proposiciones de la etapa aritmética, encontramos que Wallis indica en lenguaje natural que el elemento inicial de las series puede ser “un punto o cero”. Esto es, puede ser un elemento geométrico o un elemento aritmético. Esta dualidad que aparece en AI, Wallis la recupera de la tradición algebraica de Viète, quien con su noción de *logistica speciosa* entiende que el simbolismo algebraico es apto para representar tanto números como magnitudes geométricas. De este modo, el álgebra aparece como una herramienta aplicable a problemas geométricos y aritméticos. Pese a esta dualidad que encontramos en el planteo de los problemas de la etapa aritmética, no encontramos allí ninguna indicación o sugerencia por parte Wallis, de una interpretación geométrica ligada a problemas de cuadraturas. De modo que el abordaje y los resultados de los problemas de series de sumas se restringen, por lo menos en estas porciones del método, a una interpretación estrictamente aritmética.

Por otro lado, con respecto a los problemas geométricos hemos destacado que Wallis se atiene al planteo clásico de los problemas de cuadratura, ya que indica que su solución consiste en determinar la proporción entre el área de dos figuras. Sin embargo, también observamos que en los corolarios, el planteo de dichos problemas suele aparecer acompañado de diagramas que representan las figuras con los indivisibles que las componen. Así, los diagramas se encuentran ligados a la redefinición de las cónicas llevada a cabo a SC. Con respecto a esto último, queremos volver aquí a la primera proposición de SC, a fin de llamar la atención sobre un elemento que resulta central en las estrategias de Wallis, esto es la ambigüedad de la noción de indivisible.

> [The] line is here supposed to be dilatable, or at least to have a certain such thickness that by infinite multiplication it can acquire a definite altitude or latitude, namely as much as the altitude of the figure. Therefore from now on (partly because strictly speaking this seems to have been the case in Cavalieri's method of indivisibles, partly also so that we may deliberate with brevity) we sometimes call those infinitely tiny parts of figures (or, of infinitely tiny altitude) by the name of lines rather than parallelograms, at least when we do not have to consider the determination of the altitude. Moreover when Indivisibles we do have to take into consideration the determination of the altitude (as sometimes happens) those tiny altitudes must have a ratio, so that infinitely multiplied they are assumed to become equal to the whole altitude of the figure. (SC, Prop. 1, p. 4 -5. Citado por Stedall 2008, p. 68-69).

Los indivisibles de los que se encuentran compuestas las figuras son considerados por Wallis a veces líneas y a veces paralelogramos, considerándolos como paralelogramos en el contexto de los problemas de cálculo de áreas. Esta primera interpretación está ligada a la práctica geométrica clásica que exige para el establecimiento de una proporción entre dos magnitudes, que ellas sean homogéneas. De manera que, cuando lo que se busca es calcular un área, los indivisibles son, según Wallis, paralelogramos permitiendo por medio de su suma o su multiplicación determinar el área de una figura, o bien su proporción con otra figura dada. Por otro lado, Wallis considera a los indivisibles a veces como líneas. Esta segunda interpretación de los indivisibles es la que encontramos en SC, y tiene lugar en un contexto donde no es necesario considerar el área de una figura, sino donde Wallis investiga las proporciones entre los indivisibles que componen las cónicas y a partir de las cuales deriva las ecuaciones que definen dichas figuras. Volviendo a AI, los diagramas no están asociados a ninguna operación geométrica haciendo que esta ambigüedad de los indivisibles permanezca irresuelta.

Con lo expuesto hasta ahora podemos observar, por un lado, que los términos iniciales de las series pueden ser elementos aritméticos o geométricos, el simbolismo algebraico abre la posibilidad que los problemas relativos a series aritméticas puedan contribuir a resolver problemas geométricos. Mientras que, por otro lado, a los indivisibles Wallis a veces los considera paralelogramos, a veces líneas. En SC interpretando los indivisibles como líneas, Wallis ya estableció una primera relación entre geométria y álgebra, pero entendidos como paralelogramos abre la posibilidad a que éstos entren en juego en problemas de cuadraturas. Dicha posibilidad permanece gracias a la ambigüedad de los indivisibles que no es resuelta por los diagramas que representan las figuras geométricas.

Volviendo a analizar las herramientas representacionales identificadas en la primera actividad, y ahora incorporando las expresiones en lenguaje natural, el contexto del planteo del problema-origen y del problema-hipótesis, podemos visualizar cómo Wallis va estableciendo puntos de contacto entre esos diferentes problemas previo a los corolarios geométricos. Esos puntos de contacto se encuentran asociados a la ambigüedad de las herramientas utilizadas y cuyo significado se fija en el contexto de resolución de problemas, permitiéndole establecer una conexión entre los problemas de cuadraturas y los problemas de series de sumas. Para analizar cómo Wallis establece dicha conexión, retomemos su cálculo de la cuadratura de la parábola simple y veamos ahora además del diagrama, el texto a continuación:

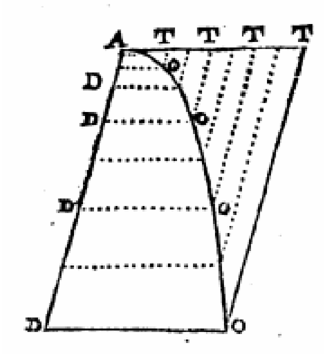


Figura 5.2: AI, Prop. 23, p. 28

> For in the figure AOT, let the vertex be A, the diameter AT, the base TO, and as many parallels to it as you wish (between base and vertex) TO, TO, etc. Since (by Proposition 21 of *On conic sections*) the straight lines DO, DO, etc. are as the square roots of the lines AD, AD, etc., conversely AD, AD, etc ., that is, TO, TO, etc., will be as the squares of the same DO, DO, etc., that is of AT,AT, etc . Therefore the whole figure AOT (consisting of an infinite number of straight lines TO, TO, etc. , the squares of the arithmetic proportionals AT, AT, etc.) will be, to the parallelogram of equal height TD (consisting of the same number of straight lines equal to the greatest TO itself), as 1 to 3, by Proposition 21 (AI p. 28).

El problema de la cuadratura de la parábola requiere calcular el área de AOT en relación al del rectángulo $ATOD$. Lo que Wallis hace en primer lugar, es determinar la proporción entre los indivisibles que componen cada una de las figuras y para ello recurre a la Proposición 21 de SC. Así, en primer lugar, Wallis considera, en el contexto de los corolarios, a los indivisibles como líneas, no paralelogramos. Son esas mismas las que Wallis emplea para derivar las ecuaciones que definen la parábola SC y que le permiten saber cuál es la proporción entre los diferentes indivisibles. En el siguiente paso, en la última oración de la Proposición 23 de AI, Wallis deja de considerar la proporción entre indivisibles y pasa a considerar la totalidad de las figuras: la figura AOT compuesta de las líneas TO y el paralelogramo $ATOD$ cuyos indivisibles son las líneas TO. A continuación, recurriendo ahora a la proposición 21 de AI que culmina la etapa aritmética, Wallis concluye que la figura AOT será paralelogramo $ATOD$ como 1 a 3. Con esto último, tenemos que Wallis toma aquí el resultado del teorema de la Proposición 21 de AI en su interpretación geométrica y la aplicación de este teorema depende así de que las proporciones entre los indivisibles de cada figura sea la misma que se cumple entre los diferentes términos de las series de sumas. El término inicial de la serie en su interpretación aritmética es el 0 (cero), mientras que en su interpretación geométrica es el vértice de la figura, el punto A. Y, por otra parte, la proporción que se cumple entre los infinitos indivisibles TO es la misma que la que se da entre los términos de la serie de números cuadrados. Por otro lado, al ser constante la altura de los indivisibles de la figura TO (DO), cuyo valor es igual al segmento TO cuando tiene la mayor longitud, se tiene que la proporción entre los diferentes indivisibles TO es igual que la razón que guardan entre sí los términos de la segunda suma. Es así que la razón que se da entre las colecciones de indivisibles de AOT y $ATOD$ es la misma que se da entre las dos series consideradas en la etapa aritmética.

Nuestro estudio de la dimensión epistemológica de las estrategias partió de la identificación de las diversas representaciones presentes en los argumentos de AI donde Wallis despliega sus estrategias de resolución de problemas de cuadraturas. A partir de lo anterior, distinguimos por un lado, las representaciones provenientes de los diversos dominios que hacen posible el planteo del problema-origen y del problema-hipótesis. Por otro lado, observamos las representaciones que encontramos en las porciones de los argumentos donde se resuelve el problema-origen, identificando en el método de Wallis los diagramas de las figuras geométricas que incorporan elementos provenientes de los diferentes dominios. A fin de comprender, cómo las diversas representaciones se combinan permitiendo la resolución de problemas, pasamos a la segunda actividad de nuestro esquema con la que analizamos estrategias, que considera además de las herramientas identificadas en la primera actividad, su uso junto al lenguaje natural. El lenguaje natural viene a explicar las formas novedosas de enlazar las diferentes herramientas generadas a partir de la integración de dominios para la resolución de problemas. Este rol fundamental se hizo manifiesto en la resolución de problemas de cuadraturas en AI, donde Wallis acompaña las notaciones especializadas con lenguaje natural para explicar cómo proceder en el uso de las series de sumas para la determinación de áreas. Podemos observar que Wallis logra así poner en contacto los resultados de los problemas relativos a series de sumas presentes en la etapa aritmética, para luego aplicarlos en la resolución de los problemas geométricos de cálculo de cuadraturas. Un aspecto que es fundamental destacar aquí, es que la relación establecida entre esos problemas, Wallis no la realiza por medio de una correspondencia uno-a-uno entre procedimientos geométricos y aritméticos, esto es, no se plantea una traducción entre las respectivas representaciones que los codifican. A diferencia de esto, encontramos que el uso combinado de las herramientas provenientes de las diferentes prácticas de representación depende de representaciones ambiguas cuyo significado preciso sólo se especifica en el contexto de la resolución de problemas.

5.2. Aspectos lógicos de las estrategias desplegadas en Wallis (1656)

Con la presente sección iniciamos nuestra aproximación al estudio de la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas en AI. Para esta aproximación, comenzamos considerando las estrategias de resolución como sistemas de acciones inferenciales que se caracterizan por ser fundamentalmente heterogéneas, por contener diferentes prácticas que se siguen de la interacción de dominios para la resolución de problemas y que hace que encontremos diferentes acciones codificadas en diferentes notaciones especializadas. De esta manera, pasamos del estudio de las diferentes herramientas representacionales, analizadas en las secciones anteriores, al estudio de las acciones inferenciales posibilitadas por tales herramientas.

5.2.1. La presencia de múltiples prácticas inferenciales en AI

Iniciamos el estudio de la dimensión lógica de las estrategias de resolución de problemas con la tercera actividad del esquema de análisis propuesto, que consiste en la identificación de las acciones inferenciales provenientes del dominio de origen y el anexado, lo cual llevaremos a cabo a lo largo de la presente sección.

Acciones inferenciales provenientes del dominio origen (Actividad 3a)

La primera tarea de esta actividad (3a) focaliza entonces en las acciones inferenciales asociadas a la práctica de origen y, en consecuencia se orienta al estudio de las acciones inferenciales cuyos objetos son las representaciones identificadas en el actividad (1a). En consonancia con ello, analiza las acciones inferenciales que posibilitan el planteo del problema-origen y establecen las condiciones para su resolución. Como ya observamos con el desarrollo de la primera actividad de nuestro esquema, Wallis parte de la formulación clásica de los problemas de cuadraturas que requeren establecer la proporción entre el área de diferentes figuras. Para la resolución de este tipo de problemas, en la práctica geométrica clásica se parte de un diagrama de la figura dada y, por medio del sucesivo trazado de líneas de acuerdo a reglas bien definidas e indicadas por el texto que acompaña el diagrama, se obtiene una figura proporcional a la primera. Examinadas ahora desde su dimensión lógica, tenemos que se produce un diagrama para cada sistema de datos inicial que acompaña el planteo del problema a resolver, o del teorema a probar. Luego, algunas cosas son inferidas del diagrama y algunas de registros en el texto o ambas cosas. Esto es, cada acción inferencial se encuentra permitida por una acción previa ya sea sobre el texto, o bien sobre el diagrama[6].

Como ya destacamos, el planteo de los problemas de cuadraturas en AI también suele introducir un diagrama. Sin embargo, los diagramas introducidos por Wallis en el planteo del problema-origen, conservan de la geometría clásica sólo la terminología y relaciones geométricas asociadas al trabajo clásico de Apolonio. Al mismo tiempo, los diagramas incorporan elementos provenientes de otros dominios posibilitando nuevas acciones inferenciales y serán analizados, por lo tanto, en nuestra cuarta actividad. Pero primero consideremos a las acciones inferenciales provenientes del dominio anexado.

Acciones inferenciales provenientes de dominios anexados (Actividad 3b)

En la presente sección nos ocuparemos de las acciones inferenciales posibilitadas por las representaciones provenientes del dominio anexado, esto es, las representaciones analizadas en (1b). Nuevamente, nos enfocamos en las proposiciones que componen la etapa aritmética del método de Wallis. Así, nos orientamos ahora al estudio de la dimensión lógica del planteo y la resolución del problema-hipótesis que son, en este caso, los problemas de series de sumas. Para este estudio debemos concentrarnos en primer lugar, en la resolución de problemas específicos, puesto que ellos constituyen la base sobre la que Wallis realiza sus generalizaciones permitiéndole extender el alcance de su método a diversos tipos de curvas.

Retomando lo realizado en la primera actividad, tenemos que en la resolución de problemas específicos de series de sumas, Wallis plantea en su lema inicial de la etapa aritmética, el problema de establecer la razón entre dos series de sumas. Para las parábolas, específicamente, se trata de la serie de sumas cuyos términos son potencias (enteras positivas, fraccionarias o negativas) empezando en 0 (cero), y la serie de sumas con la misma cantidad de términos que la primera, todos ellos igual al término mayor de la primera serie. Para la representación de estas series, vimos que Wallis se vale de representaciones aritméticas, en consecuencia, las acciones inferenciales involucradas en los lemas iniciales son acciones que tienen por objeto ese tipo de representaciones. Aquí las acciones inferenciales permitidas son las operaciones aritméticas habituales – sumas, potencias, etc.- aplicadas a representaciones numéricas. Encontramos

[6]No haremos una presentación detallada, sólo retomamos los puntos relevantes para nuestro estudio de caso. Para un tratamiento detallado, véase (Manders, 2008a,b).

aquí que las acciones inferenciales llevan a cabo cálculos aritméticos que permiten establecer la razón, entendida como un cociente, entre las series cuando el número de términos varía en una cantidad finita. Notemos que las series tienen un término inicial fijo y un término final fijo, y este último término puede ser alcanzado en diferentes pasos de acuerdo a ciertas reglas. De este modo, las acciones inferenciales le permiten a Wallis moverse del término inicial hacia el final, en un número finito de pasos. Wallis explora el comportamiento de la serie conforme va considerando un mayor número de términos y los pasos se van haciendo, en consecuencia, más pequeños, expresando siempre el resultado por medio de una fracción.

El siguiente paso es considerar, qué sucede cuando el número de pasos es finito pero indefinido, y aquí es donde Wallis introduce el simbolismo que le permite representar ese proceso aritmético. En este punto, las acciones inferenciales son acciones que tienen por objeto fórmulas algebraicas que mantienen su referencia para el primer y último término. Aquí las acciones permitidas, se basan en la continuidad entre *logistica numerosa* y *especiosa* que Wallis recupera de Viète, también son las operaciones aritméticas usuales - suma, producto, etc.- sólo que aquí aplican a letras y números. Así, por medio de la manipulación de este simbolismo algebraico, Wallis alcanza una fórmula, la fórmula característica que representa la razón entre las series, pero que se abstrae de valores particulares para la cantidades de términos. A partir de la fórmula que alcanza Wallis, infiere cuál es la razón entre las series cuando el número de términos es infinito, que es el resultado expresado en los teoremas que finalizan la etapa aritmética. Las acciones inferenciales sobre fórmulas le permiten a Wallis moverse de un número finito, pero indefinido de términos, a un número infinito. La presentación del resultado en un teorema nos dice que para Wallis la solución satisfactoria de los problemas de series de sumas, problema-hipótesis, es la de determinar la razón entre las series cuando el número de términos es infinito. Este resultado presente en los teoremas, se expresa como una proporción y como una fracción. Por ejemplo, como vimos en el cálculo de la parábola simple, "como 1 a 3" y "$\frac{1}{3}$" y, en el caso de los teoremas generales, se visualiza con una tabla con una columna para las proporciones y otra para las fracciones.

A partir de lo desarrollado, tenemos entonces que las acciones inferenciales que permiten el planteo y la resolución del problema-hipótesis, son acciones que tienen por objeto representaciones simbólicas, aritméticas y algebraicas. Los mecanismos de rigor de estas acciones están determinados por las operaciones numéricas habituales, con la particularidad que las acciones sobre fórmulas algebraicas le permiten a Wallis considerar procesos de suma infinitos. Queremos enfatizar que el objeto de las acciones inferenciales identificadas en la etapa aritmética son representaciones simbólicas representado números, siendo toda referencia a elementos geométricos sólo indicada por medio del lenguaje natural a lo largo de los lemas. Mientras que, en los teoremas de AI la referencia a elementos geométricos es indirecta, esto último puede observarse en la expresión del resultado en el lenguaje de proporciones que aparece junto a las fracciones.

Con nuestra tercera actividad hemos identificado las acciones inferenciales provenientes del dominio de origen y del dominio anexado, ambos asociados a prácticas bien establecidas y con requisitos de rigor bien definidos. Pasaremos ahora a analizar las nuevas acciones inferenciales que surgen de la interacción de dominios para la resolución de problemas de cuadraturas por parte de Wallis.

5.2.2. La ampliación del rango de acciones inferenciales en AI

La presente sección tiene por objetivo abordar la cuarta actividad de nuestro esquema de análisis que consiste en la identificación de las nuevas acciones inferenciales surgidas a partir de la interacción de dominios para la resolución de problemas de cuadraturas desarrollado por Wallis. Las nuevas acciones inferenciales son aquellas que tienen por objeto las representaciones presentes en las porciones de AI donde se resuelven los problemas de cuadraturas, esto es, las representaciones analizadas en (1c). En el caso del método de Wallis, las representaciones que encontramos en los corolarios son los diagramas de las figuras geométricas que incorporan elementos de la geometría clásica, del método de los indivisibles y de la geometría de Descartes. Al incorporar elementos de diferentes dominios los diagramas no se encuentran sujetos a reglas de uso ni mecanismos de rigor de las prácticas estables que con su interacción posibilitan su surgimiento. De este modo, su rol en los argumentos donde se despliegan las estrategias de resolución de problemas requiere ser explicado en lenguaje natural. En efecto, hemos observado que después de la introducción de un diagrama, Wallis procede a indicar - en lenguaje natural - aspectos relativos a las proporciones entre los indivisibles que componen las figuras consideradas, así como el modo de aplicar los resultados de los problemas de series de sumas al cálculo de cuadraturas que involucran dichas figuras.

Para el desarrollo de la presente actividad, debemos notar, por un lado, que no encontramos en los corolarios acciones inferenciales sobre representaciones simbólicas, ya sean estas últimas aritméticas o algebraicas, como las que vimos en (3b). Asimismo, tampoco encontramos acciones atadas a una manipulación del diagrama como las mencionadas en (3a). Con respecto a este último punto, lo primero que debemos destacar es que los diagramas de Wallis, son diagramas que representan tipos de curvas. Esto último, explica por qué un mismo diagrama, o bien con mínimas modificaciones, aparece una y otra vez en AI, en el contexto de diferentes problemas. Como ya hicimos notar, el mismo diagrama que Wallis introduce por primera vez en la Proposición 23 dedicada al cálculo de la cuadratura de la parábola simple, aparece posteriormente en el cálculo de parábolas de diferentes grados. De este modo, las acciones inferenciales en AI que tienen por objeto los diagramas, no se encuentran atadas a procesos geométricos de construcción. A diferencia de ello, las acciones inferenciales apuntan a indicar los indivisibles que serán considerados para la resolución del problema.

En AI Wallis representa diagramáticamente los tipos de curva de modo análogo a como lo hacia por medio de ecuaciones algebraicas en SC. En ambos, casos Wallis considera los elementos constitutivos de las cónicas, los diámetros y las ordenadas en el caso de las parábolas. Esta continuidad entre los elementos considerados en sus dos trabajos, es lo que le permite establecer la proporción que se cumple entre los diferentes indivisibles que componen cada una de las figuras. Los diagramas presentes en los corolarios de AI muestran las figuras con los indivisibles que las componen. La primera acción inferencial, el primer movimiento que hace Wallis en los corolarios es, considerar cada figura por separado a fin de determinar la proporción que se cumple entre sus indivisibles. En este caso, el lenguaje natural indica que los indivisibles deben ser entendidos como líneas al igual que en SC, lo cual le permite hacer uso de los resultados ya establecidos en SC. La siguiente acción inferencial consiste en pasar a considerar las colecciones de indivisibles, a fin de establecer la proporción que se cumple entre las figuras consideradas. Aquí aparece el paso central en la resolución de problemas de cuadraturas, pues de acuerdo a las restricciones impuestas por la práctica geométrica clásica, los indivisibles deben ser paralelogramos a fin de que su suma pueda dar el área de las figuras. Sin embargo, Wallis sigue considerando los indivisibles como líneas para finalmente afirmar que, si la proporción que se cumple entre los indivisibles de cada una de las figuras por separado, es la misma que la que se cumple entre los términos de cada una de las series tomada por separado, entonces es posible aplicar los resultados alcanzados en la etapa aritmética. Este movimiento, que lleva a la resolución del problema, depende así del planteo del problema aritmético, que indica que los elementos considerados pueden ser aritméticos o geométricos.

A modo de cierre de la presente sección, y antes de pasar a la última actividad de nuestro esquema, destaquemos algunos aspectos de gran relevancia. El primero de ellos tiene que ver con el uso repetido de diagramas estables, esto es, el uso de un mismo diagrama en diferentes proporciones y que no depende de operaciones geométricas de construcción. Este aspecto de los diagramas de AI no debe ser considerado un llamado a la eliminación de este tipo de representaciones por parte de Wallis, sino como un elemento que permite articular los aportes provenientes de los diferentes dominios, para la elaboración de un método general de cálculo de cuadraturas. Los diagramas representan las curvas como figuras planas y exhiben las relaciones geométricas que llevan a formular las ecuaciones que definen las curvas. Al mismo tiempo, estas relaciones son usadas de manera fructífera para el cálculo de áreas, a través de series aritméticas que permiten resolver problemas de cuadratura de una manera general. Así, las relaciones geométricas establecidas en la búsqueda de ecuaciones que definen las cónicas, se convierten en condiciones de resolución de problemas de cuadratura que involucran dichos objetos, evidenciando que la cuestión del rol de los diagramas en la resolución de problemas no está disociado de su rol en la redefinición de los objetos de estudio.[7]

La independencia del diagrama de operaciones de construcción geométrica hace posible la puesta en contacto con las acciones inferenciales simbólicas, tanto para casos específicos, como para el establecimiento de corolarios generales referidos a tipos de curvas como las parábolas. El segundo aspecto, relacionado con el anterior, es que el contacto entre diagramas de las figuras con representaciones simbólicas no se realiza a través de una traducción. Las nuevas acciones inferenciales presentes en los corolarios involucran el uso del lenguaje natural que explica cómo pasar en cada paso de un tipo de representación a otro. De esta manera, acordamos con lo planteado en Larvor(2012) acerca de que el estudio de las nuevas acciones inferenciales deben incluir una explicación de los marcos lingüísticos, esto es, la presencia del lenguaje natural que indica cómo interpretar y manipular las diferentes representaciones haciendo que ciertos procedimientos se establezcan como acciones inferenciales. Enfatizados estos aspectos, sólo nos queda para completar el estudio lógico de las estrategias de resolución de problemas desplegadas por Wallis en AI, considerar la relación entre las nuevas acciones inferenciales y su rol en el cambio de las condiciones de resolución de los problemas de cuadraturas que es el tema de nuestra próxima sección.

[7]Un resumen de los resultados de esta sección fue publicado enOrtiz, E. R. (2018). Wallis's use of innovative diagrams. En Chapman, P., Stapleton, G., Moktefi, A., Perez-Kriz, S., y Bellucci, F., editores, *Diagrammatic Representation and Inference*, pp. 712–715, Cham. Springer International Publishing.

5.3. Evaluación de las estrategias y cambios en las condiciones de resolución de problemas de cuadratura en Wallis (1656)

A lo largo del presente capítulo hemos analizado en su dimensión, tanto epistemológica como lógica, las estrategias que llevaron a Wallis a la elaboración de un método de cálculo de cuadraturas. Este método parte de la formulación clásica de los problemas de cuadratura, como el establecimiento de una proporción entre dos figuras dadas. Asimismo, a partir de la redefinición de las figuras geométricas, y motivado por el método de Cavalieri, Wallis entiende que la condición para establecer la proporción entre el área de diferentes figuras reside en el establecimiento de la proporción entre las colecciones de indivisibles que las componen. Si los indivisibles son paralelogramos, como afirma en parte, en la primera proposición de SC, entonces por medio de su suma se puede obtener el área de las diferentes figuras y, con ello, hallar la proporción buscada ajustándose al canón de la práctica geométrica clásica. Sin embargo, como ya observamos en los corolarios de AI, Wallis considera a los indivisibles como líneas. Si los indivisibles son líneas no sería posible, por medio de ningún procedimiento geométrico, obtener el área de una figura y, en consecuencia, resolver satisfactoriamente el problema de cuadratura planteado. En este punto lo que hace Wallis, sin abandonar esta interpretación del indivisible como línea, es calcular la proporción entre figuras recurriendo a resultados aritméticos que establecen la razón entre serie de sumas con infinitos términos. De esta manera, para determinar cuál es la proporción entre dos colecciones de indivisibles, es preciso que la proporción que guardan entre sí los indivisibles de cada figura, sea la misma que la razón entre los términos de series de sumas de potencias. Si se cumple esta condición, entonces es posible aplicar resultados relativos a series de números a problemas de cuadraturas. En términos de nuestro esquema, la resolución de problemas aritméticos de series es condición para la resolución de problemas de cuadraturas, así la solución del problema-hipótesis es condición suficiente para la resolución del problema original. Ahora bien, para afirmar que éste es efectivamente el caso, Grosholz nos dice que las nuevas reglas para el uso en tandem de diferentes representaciones, y con ello, para indicar que se ha resuelto satisfactoriamente el problema-origen, es necesario evaluar las reglas en el marco del conocimiento establecido. En particular, el nuevo método precisa ser evaluado sobre el trasfondo de la práctica de origen.

El método desarrollado por Wallis en AI se encuentra en una situación al menos complicada con respecto al ajuste con los cánones de la práctica geométrica clásica. Esta tensión con la práctica de origen tiene varias aristas pero, sin lugar a dudas, una de las más salientes es el estatus de los indivisibles asociados a procesos de divisibilidad infinita. Wallis se limita a señalar que los indivisibles entendidos como líneas serían “dilatables”, y por tanto sería legítimo su uso para la resolución de problemas de cuadraturas. Asimismo, los procesos infinitos no se encuentran asociados en Wallis con operaciones geométricas de construcción -las cuales además se encuentran ausentes en AI - sino que están acotados a las partes de su método dedicadas al cálculo de razones entre series. En cualquier caso, Wallis no profundiza en estas discusiones atadas a otra pregunta relacionada, que es, si el fundamento de la matemática es la geometría o el álgebra. Por el contrario, sus observaciones se orientan a destacar diferentes aspectos de su método que se encuentran ligados a lo que denominamos en el tercer capítulo “rigor interpráctica” (Cfr. Secc. 3.3.1).

En el capítulo 3 destacamos que en el caso de los argumentos donde se despliegan las estrategias de resolución de problemas y que se caracterizan por contener diferentes prácticas, la forma de establecer el rigor de los nuevos métodos reside en mostrar que un resultado ya obtenido por medio de los procedimientos de la práctica de origen, también puede obtenerse con las nuevas herramientas. En nuestro caso de estudio, encontramos numerosos comentarios al respecto por parte de Wallis, quien afirma hacia al final de AI que ha mostrado la cuadratura de innumerables curvas, muchas de ellas ya conocidas y, por tanto, concordantes con los resultados previos, pero ahora obtenidos por medios más rápidos y simples (AI, p. 182). Este comentario se encuentra en concordancia con lo señalado ya en la proposición 42, en el contexto de la aplicación de su método a todas las parábolas con exponentes enteros positivos, donde afirma:

> I do not attach laborious geometrical demonstrations; which, however, if anyone should require them, he may search out such (at leisure) by the inscription and circumscription of figures, or also by putting forward other demonstrations by showing that the ratio is neither more nor less than any quantity. To me, what I have produced seems to suffice, following Cavalieri's *Method of indivisibles* (because I find that already to be taken from geometry). Note, however, those demonstrations I have used, which better represent inscribed figures, since they suppose that the first term is 0. If on the other hand one prefers to represent the figures as circumscribed it may be changed, and one may do it, only the first term is made 1. (AI, Prop. 43, p. 41)

A partir de este fragmento, podemos ver que Wallis no sólo indica que la corrección de los resultados obtenidos con su método puede ser corroborada por los métodos geométricos clásicos de prueba, sino que también relaciona los métodos clásicos con los procedimientos aritméticos desplegados en AI. De esta manera, Wallis dedica los comentarios finales de AI a mostrar su concordancia con los resultados clásicos, lo que denominamos anteriormente como los aspectos más conservadores de la resolución de problemas. Pero al mismo tiempo, destaca la fertilidad de su enfoque que permite resolver muchas clases de problemas superando con creces los resultados clásicos, destacando así su carácter innovador.

Conclusiones

En la presente investigación nos planteamos el estudio epistemológico y lógico de las estrategias de resolución de problemas que le permitieron a Wallis la elaboración de su innovador método de cálculo de cuadraturas publicado en 1656 en AI. Dicho método se distingue por la incorporación de diferentes aportes - geometría cartesiana, el método de los indivisibles, el álgebra de ecuaciones y su propio trabajo con series aritméticas - y su puesta al servicio de la resolución de problemas de cuadraturas, transformando radicalmente el tratamiento de esa clase de problemas. Atendiendo a este aspecto, centramos nuestra atención en las estrategias de resolución de problemas en AI en relación al contexto de interacción entre la geometría clásica y el álgebra de ecuaciones. Cada uno de estos ámbitos asociados a determinadas prácticas de representación e inferencia, a formas estabilizadas y compartidas de trabajo que guían la resolución de problemas.

I

Advirtiendo las limitaciones del abordaje de la resolución de problemas y sus estrategias, que ofrece la epistemología de la matemática estándar, planteamos la necesidad de una caracterización alternativa que no recurra a la reconstrucción formal de la práctica a través de la noción de derivación en un sistema formal y, atienda a la práctica matemática misma. Entendemos que es sólo en base a una caracterización de ese tipo, que se hace posible una comprensión apropiada de los aspectos epistemológicos y lógicos de las estrategias de resolución de problemas, no sólo a nivel general, sino también en contextos específicos, como lo es el caso que motiva nuestra investigación. En vista a este objetivo, en el primer capítulo, hicimos una presentación sucinta de la epistemología de la matemática estándar que se asocia a los enfoques filosóficos de los fundamentos y la caracterización de la resolución de problemas que de ella se desprende.

Nuestro segundo capítulo, por otra parte, lo dedicamos a la evaluación de diversas perspectivas provenientes de la filosofía de la práctica matemática. Focalizamos aquí en la propuesta epistemológica de Emily Grosholz, quien destaca el uso de representaciones como un aspecto fundamental del trabajo matemático, que la autora pretende capturar con su noción de "experiencia matemática". Seguidamente, en este mismo capítulo, nos centramos en la perspectiva de Brendan Larvor que parte de definir a la lógica como el estudio sitemático de las acciones inferenciales. A través de una lectura crítica de las propuestas de ambos autores, destacamos lo que, entendemos, consiste en aportes sustanciales para una caracterización de las estrategias de resolución de problemas, en tanto que permiten resaltar los aspectos epistemológicos y lógicos fundamentales de las mismas.

En el capítulo 3 avanzamos luego en la elaboración del esquema que proponemos para el estudio de las estrategias en contextos específicos de resolución de problemas, tomando como base conceptual los aportes de las perspectivas consideradas en el capítulo anterior. Mostramos cómo la noción de "acción inferencial" de Larvor se complenta con la de "experiencia matemática" de Grosholz. Tal complementariedad reside en que ambas nociones refieren a procesos de manipulación de representaciones, mas específicamente, tales nociones refieren a representaciones matemáticas con contenido. En el caso de Grosholz, esto se sigue de la propuesta de concebir a las representaciones matemáticas *qua* "paper-tools". Atendiendo a dicha complementariedad, el esquema aquí propuesto toma como objeto de análisis los argumentos mismos, en los que el matemático despliega las estrategias de resolución de problemas. Por otro lado, nuestro esquema incorpora la noción de "análisis de las proposiciones" con la que Grosholz bosqueja el proceso de resolución de problemas que tiene como punto de partida, un problema a resolver, en base al cual se formula una hipótesis. Esta hipótesis constituye a su vez otro problema, cuya resolución constituiría una condición suficiente para la resolución del problema original. En términos de lo desarrollado respecto a la interacción de dominios, el problema proveniente del dominio anexado constituye el "problema-hipótesis" debido a su carácter provisional, pues es necesario determinar su plausibilidad, esto es, determinar si su resolución constituye efectivamente una solución del problema original.

Una vez establecido el punto de partida de nuestro análisis, planteamos las diferentes actividades que componen nuestro esquema de trabajo: un primer grupo de actividades dedicadas al estudio de las estrategias en su dimensión epistemológica, entendidas como la búsqueda de nuevas reglas para el uso en tándem de las representaciones provenientes de los diferentes dominios en la resolución de problemas. Aquí las actividades se encuentran orientadas a la identificación de las herramientas representacionales y el modo en que ellas son combinadas. El segundo grupo de actividades tiene por objetivo el estudio de la dimensión lógica de las estrategias, entendidas desde esta perspectiva como sistemas de acciones inferenciales, con la particularidad de contener diferentes prácticas. Este segundo grupo de actividades se orienta así al examen de las acciones inferenciales posibilitadas por las representaciones analizadas previamente. Finalmente, la tercera parte del esquema propuesto tiene por objetivo la determinación del rigor de los argumentos que despliegan las estrategias de resolución de problemas.

Esta última actividad de nuestro esquema, dedicada a la evaluación de los argumentos que despliegan las estrategias de resolución de problemas, no recupera de forma directa aportes de los enfoques de Grosholz o Larvor. A diferencia de las actividades anteriores, nuestra última actividad está principalmente motivada por la cuestión que Grosholz plantea pero nunca profundiza, esto es, la cuestión de la evaluación de las estrategias de resolución de problemas en el marco del conocimiento establecido. Tal evaluación de las estrategias constituye, según Grosholz, un aspecto fundamental de la resolución de problemas, pues permite determinar la plausibilidad del problema-hipótesis y, con ello, que el problema haya sido satisfactoriamente resuelto. A fin de contribuir a la explicación de los cambios en las condiciones de resolución de los problemas planteados y su relación con la evaluación de las estrategias, recurrimos a la noción de mecanismos de rigor y control presente en el enfoque de las acciones inferenciales de Larvor. Los mecanismos de rigor y control son el resultado de la investigación y, por lo tanto, permiten precisar el modo en que se evalúan los argumentos en el marco del conocimiento establecido. Sin embargo, tal como destacamos en la sección dedicada al enfoque de las acciones inferenciales, el abordaje de Larvor acerca de la determinación del rigor de las pruebas que contienen diferentes prácticas inferenciales dista de ser satisfactorio.

Atendiendo a la importancia de la cuestión relativa a la evaluación de las estrategias de resolución de problemas, planteamos la noción de "rigor interpráctica", que nos permitió capturar el modo en que se determina el rigor de los argumentos que despliegan las estrategias de resolución de problemas y que se caracterizan por contener diferentes prácticas inferenciales. La idea básica que desarrollamos allí, es que las estrategias de resolución de problemas – entendidas como conjuntos de acciones inferenciales – serán rigurosas (en sentido interpráctica) si, además de brindar una solución para el problema para el cual fueron elaboradas, logran resolver problemas no triviales, ya resueltos satisfactoriamente por la práctica de origen. La noción de rigor interpráctica que desarrollamos, y que incorporamos a nuestro esquema, pone el énfasis en un aspecto saliente que hallamos en la práctica matemática, a saber, que los resultados innovadores muy frecuentemente vienen acompañados de otros resultados bien establecidos. Esta noción nos permitió así evaluar más adecuadamente la importancia del conocimiento establecido en la resolución de problemas, por un parte, en tanto que está asociado a la determinación del rigor de los argumentos que despliegan las estrategias que se sigue de le exigencia de concordancia con resultados ya establecidos. Por otra parte, el conocimiento establecido también tiene un rol fundamental para la innovación de las estrategias, pues el rigor de los argumentos que despliegan las estrategias de resolución de problemas es interpretado como evidencia a favor de la plausibilidad del problema-hipótesis, y con ello de la resolución satisfactoria de problemas no resueltos por la práctica de origen.

Las perspectivas de Grosholz y Larvor constituyeron el punto de partida para la elaboración de nuestro esquema para el estudio de las estrategias en contextos específicos de resolución de problemas. Asimismo, también fuimos más allá de esos enfoques al considerar cuestiones no abordadas por esos investigadores, a fin de poder capturar aspectos fundamentales de la resolución de problemas que a menudo se han visto oscurecidos por los enfoques tradicionales que recurren a la noción de derivación formal. Las cuestiones trabajadas a lo largo de la primera parte de nuestra investigación han sido incorporadas a nuestro esquema, abriendo la posibilidad a un estudio más satisfactorio de los aspectos lógicos y epistemológicos de las estrategias en contextos específicos de resolución problemas. Una vez que completamos la elaboración de nuestro esquema para el estudio de las estrategias, estuvimos en condiciones de pasar al estudio de caso que motivó nuestra investigación.

II

La segunda parte de nuestra investigación, estuvo enteramente dedicada al estudio epistemológico y lógico de las estrategias de resolución de problemas que le permitieron a Wallis la elaboración de su innovador método de cálculo de cuadraturas, publicado en 1656. En vista a este objetivo, aplicamos el esquema que elaboramos en nuestro tercer capítulo y atento a lo desarrollado en la primera parte, orientamos nuestro estudio a los argumentos de AI donde Wallis resuelve diferentes problemas de cuadraturas. En el capítulo 4, presentamos el método desarrollado por Wallis, destacando los principales aportes de los que se nutre, lo cual nos permitió visualizar cómo su método tiene lugar en el contexto de interacción entre la geometría clásica y el álgebra de ecuaciones. Allí, también examinamos la estructura argumentativa general del método y focalizamos, luego, en una serie de proposiciones de AI dedicadas al cálculo de cuadraturas de curvas específicas y su extensión a tipos de curvas.

A lo largo del capítulo 5, nos abocamos finalmente, a la aplicación del esquema propuesto para el estudio de las estrategias de resolución de problemas a nuestro estudio de caso. Siguiendo las actividades delineadas por nuestro esquema, en primer lugar, consideramos las representaciones efectivamente utilizadas por Wallis. Analizamos aquí el modo en que las herramientas representacionales provenientes de los diferentes ámbitos son combinadas entre sí. Luego, atendiendo a la dimensión lógica de las estrategias, examinamos las nuevas inferencias que son posibles a partir de las reglas para el uso en tandem de las representaciones provenientesde los dominios.

Entre los aspectos más salientes que resultaron de nuestro estudio, podemos señalar, por un lado, el uso por parte de Wallis, de representaciones algebraicas - provenientes del dominio anexado - que se caracterizan por encontrarse abiertas a una interpretación aritmética o geométrica. Por otro lado, muestran la introducción de diagramas que incorporan elementos provenientes de la geometría cartesiana y del método de los indivisibles. A diferencia de los diagramas de la geometría clásica, los diagramas de AI no se encuentran asociados a operaciones geométricas de construcción y, en consecuencia, dejan sin resolver la ambigüedad asociada a la noción de indivisible. Vimos que los indivisibles que componen las figuras son, para Wallis, a veces paralelogramos y a veces líneas. Los indivisibles serán paralelogramos, en su interpretación de acuerdo a la práctica geométrica, y serán líneas en referencia a los dominios anexados para la resolución de problemas de cuadraturas.

A partir de nuestro estudio, pudimos observamos que la ambigüedad presente, tanto en las representaciones algebraicas como diagramáticas son las que le permiten a Wallis relacionar los procedimientos provenientes de las diferentes prácticas que interactuán en la resolución de problemas. Esas ambigüedades sólo son resueltas en el contexto mismo de las proposiciones en las que los problemas son resueltos. Cuando analizamos las acciones inferenciales que tienen por objeto las representaciones ambiguas, observamos así, por ejemplo, con respecto a los diagramas, que dichas acciones apuntan a indicar por medio del lenguaje natural los indivisibles que deberán ser considerados para la resolución del problema. En los diferentes corolarios, donde Wallis resuelve problemas de cuadraturas, los indivisibles que componen las figuras constituyen líneas, no paralelogramos. Asimismo, destacamos que los diagramas que encontramos en las diferentes proposiciones de AI, son exactamente los mismos que Wallis introdujo en SC en el contexto de la re-definición de las secciones cónicas, y en el cual los indivisibles también son líneas.

Los diagramas de Wallis representan las curvas como figuras planas y exhiben las relaciones geométricas que le llevaron en SC, a la formulación de las ecuaciones que definen las curvas. Al mismo tiempo, estas relaciones son usadas en AI de manera fructífera para el cálculo de áreas valiéndose, para ello, ahora de la ambigüedad del simbolismo algebraico. Así, observamos que sólo en el contexto de los corolarios Wallis refiere en lenguaje natural a la interpretación geométrica de los teoremas aritméticos, y es justamente esta intrepretación, la que permite aplicar los resultados aritméticos relativos a series, a la resolución de problemas de cuadraturas.

A partir de lo desarrallado pudimos corroborar el rol fundamental del lenguaje natural para explicar, cómo pasar en cada paso, de un tipo de representación a otro y cómo éstas deben ser interpretadas. Las indicaciones en lenguaje natural presentes en los corolarios de AI fijan la interpretación de las representaciones ambiguas en el contexto de la resolución de problemas, haciendo que ciertos procedimientos se establezcan como acciones inferenciales. Estas nuevas acciones le permiten a Wallis, articular los elementos provenientes de los diferentes dominiosresolviendo así los problemas planteados.

Completamos nuestro estudio de caso abordando la cuestión de la evaluación de los argumentos, en los que Wallis despliega sus estrategias para la resolución de problemas de cuadraturas. Para el desarrollo de esta actividad, recurrimos a la noción de rigor interpráctica que desarrollamos en nuestro tercer capítulo. Observamos que en AI, Wallis no se limita a mostrar cómo su método le permite obtener resultados que concuerdan con los de la geometría clásica, sino que también afirma que la corrección de algunos de los resultados nuevos puede determinarse – aunque de una manera engorrosa - por lo medios clásicos. Además, Wallis muestra la relación entre la estructura argumentativa de su método y la de las pruebas apagógicas clásicas. De este modo, Wallis no sólo da cuenta de la rigurosidad de su método sino, al mismo tiempo, muestra que su fertilidad reside en la posibilidad de resolver problemas de cuadraturas de varias clases de curvas, superando con creces los resultados clásicos y destacando así su carácter innovador.

III

Nuestra investigación se propuso estudiar la estrategias de resolución de problemas, en sus aspectos epistemológicos y lógicos, que llevaron Wallis a la elaboración de su método de cálculo de cuadraturas. Para dicho estudio, a lo largo de nuestro trabajo, pusimos en el centro de atención la resolución de problemas y sus estrategias que se desarrollan en el contexto de interacción de dominios, donde cada uno de estos dominios se encuentra asociado a determinadas prácticas de representación e inferencia, a formas estabilizadas y compartidas de trabajo que guían la resolución de problemas. Examinamos así, el carácter innovador del método de cálculo de cuadraturas de Wallis, refiriendo con ello, al desarrollo de soluciones y métodos novedosos que tienen como punto de partida prácticas compartidas y bien establecidas. El estudio de las estrategias de resolución de problemas en AI, a través de la aplicación de nuestro esquema de análisis, nos permitió visualizar las actividades de resolución en toda su complejidad, con sus intentos de satisfacer las demandas de rigor de una larga tradición geométrica, así como la necesidad de incorporar aportes de otras áreas que permitieran resolver problemas de cuadraturas de forma general, contribuyendo al avance del conocimiento.

Bibliografía

Andersen, K. (1985). Cavalieri's method of indivisibles. *Archive for History of Exact Science*, 31(4):291–367.

Avigad, J. (2020). Reliability of mathematical inference. *Synthese*, enero 2020:1–23.

Azzouni, J. (2004). The Derivation-Indicator View of Mathematical Practice. *Philosophia Mathematica*, 12(2):81–106.

Azzouni, J. (2009). Why Do Informal Proofs Conform to Formal Norms? *Foundations of Science*, 14:9–26.

Bos, H. J. M. (2001). *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* Springer, New York.

Boyer, C. (1959). *History of the Calculus and its conceptual development.* Dover, Nueva York.

Brown, J. (2008). *Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures (2nd ed.).* Routledge, New York.

Buldt, B., Löwe, B., y Müller, T. (2008). Towards a new epistemology of mathematics. *Erkenntnis*, 68(3):309–329.

Campos, D. (2018). Heuristic analogy in ars conjectandi: From archimedes' de circuli dimensione to bernoulli's theorem. *Studies in History and Philosophy of Science*, 67:44–53.

Carter, J. (2019). Philosophy of mathematical practice – motivations, themes and prospects. *Philosophia Mathematica*, 27(1):1–32.

Cartwright, N. (1999). *The Dappled World: A Study of the Boundaries of Science.* Cambridge University Press.

Cassou-Noguès, P. (2006). Signs, figures, and time: Cavaillès on 'intuition' in mathematics. *Theoria*, 55(2006):89–104.

Cellucci, C. (2013). *Rethinking Logic: Logic in Relation to Mathematics, Evolution and Method.* Springer, Dordrecht.

Cellucci, C. (2013 b). Philosophy of mathematics: Making a fresh start. *Studies in History and Philosophy of Science*, 44:32–42.

Cellucci, C. (2017). Is mathematics problem solving or theorem proving? *Foundations of Science*, 22:183–199.

Cellucci, C. (2017 b). *Rethinking Knowledge. The heuristic view.* Springer, Cham.

Cellucci, C. (2017c). Varieties of maverick philosophy of mathematics. En Sriraman, B., editor, *Humanizing Mathematics and its Philosophy: Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh*, pp. 223–251. Springer, Cham.

De Toffoli, S. (2017). 'chasing' the diagrams.the use of visualizations in algebraic reasoning. *The Review of Symbolic Logic*, 10(1):158–186.

De Toffoli, S. y Giardino, V. (2015). An inquiry into the practice of proving in low-dimensional topology. En Lolli, G., Panza, M., y Venturi, G., editores, *From Logic to Practice: Italian Studies in the Philosophy of Mathematics*, pp. 315–336. Springer International Publishing, Cham.

De Toffoli, S. y Giardino, V. (2016). Envisioning transformations—the practice of topology. En Larvor, B., editor, *Mathematical Cultures*, pp. 25–50, Cham. Springer International Publishing.

De Toffoli, S. y Giardino, V. (2016). Envisioning transformations—the practice of topology. En Larvor, B., editor, *Mathematical Cultures The London Meetings 2012–2014*, pp. 25–50. Springer, Cham.

Detlefsen, M. (2005). Formalism. En Shapiro, S., editor, *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*, pp. 236–317. Oxford University Press, Nueva York.

Ferreirós, J. (2015). *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices.* Princeton University Press, Princeton.

Gaukroger, S. (2005). The nature of abstract reasoning: philosophical aspects of descartes' work in algebra. En *The Cambridge Companion to Descartes*, pp. 91–114. Cambridge University Press, Nueva York.

Giaquinto, M. (2002). *The search for certainty.* Oxford University Press, Oxford.

Grosholz, E. R. (2000). The partial unification of domains, hybrids, and the growth of mathematical knowledge. En Grosholz, E. y Breger, H., editores, *The Growth of Mathematical Knowledge*, pp. 81–91. Springer Netherlands, Dordrecht.

Grosholz, E. R. (2007). *Representation and productive ambiguity in mathematics and the sciences.* Oxford University Press, Oxford.

Grosholz, E. R. (2016). *Starry Reckoning: Reference and Analysis in Mathematics and Cosmology.* Springer, Cham.

Hacking, I. (1988). Philosophers of experiment. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, 1988:147–156.

Hacking, I. (2014). *Why Is There Philosophy of Mathematics At All?* Cambridge University Press, Cambridge.

Hamami, Y. (2018). Mathematical inference and logical inference. *The review of Symbolic Logic*, 11(4):665–704.

Heath, T. (1921). *A history of greek mathematics. Vol. I: From Thales to Euclid.* Clarendon Press, Oxford.

Heath, T. (1956). *Euclid. The thirteen books of the Elements (vol. 1-3).* Dover, Cambridge.

Hersh, R. (1981). *The mathematical experience.* Birkhäuser, Boston.

Hersh, R. (2014). *Experiencing mathematics: What do we do, when we do mathematics?* American Mathematical Society, Providence.

Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8(1902):437–479.

Hilbert, D. (1902-1903). *Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck*, pp. 50–68. London Mathematical Society, Londres.

Hintikka, J. y Remes, U. (1974). *The Method of Analysis Its Geometrical Origin and its General Significance.* Springer, Stuttgart.

Kaplan, A. (2018). Analysis and demonstration: Wallis and newton on mathematical presentation. *Notes and Records: the Royal Society Journal of the History of Science*, 72(4):447–468.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge.* Oxford University Press, Nueva York.

Kitcher, P. y Aspray, W. (1988). *History and philosophy of modern mathematics.* University of Minnesota Press, Minneapolis.

Klein, J. (1992). *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra.Traduccilón de Eva Brann.* Dover, Nueva York.

Klein, U. (1999). Techniques of modelling and paper-tools in classical chemistry. En Morgan, M. S. y Morrison, M., editores, *Models as Mediators: Perspectives on Natural and Social Science*, Ideas in Context, p. 146–167. Cambridge University Press.

Klein, U. (2001a). *Tools and modes of representation in the laboratory sciences.* Kluwer, Dordrecht.

Klein, U. (2001b). Paper tools in experimental cultures. *Studies in History and Philosophy of Science*, 32:265–302.

Klein, U. (2003). *Experiments, models, paper tools : cultures of organic chemistry in the nineteenth century.* Standford University Press, Stanford.

Knorr, W. (1993). *The ancient tradition of geometric problems.* Dover, Nueva York.

Lakatos, I. (1977). *Proof and refutations. The logic of mathematical discovery.* Cambridge, Cambridge University Press.

Larvor, B. (2012). How to think about informal proofs. *Synthese*, 187(2):715–730.

Larvor, B. (2012a). Emily R. Grosholz. Representation and Productive Ambiguity in Mathematics and the Sciences. Oxford: Oxford University Press, 2007. ISBN 978-0-19-929973-7. Pp. viii + 313. *Philosophia Mathematica*, 20(2):245–252.

Larvor, B. (2016). Editorial introduction. En Larvor, B., editor, *Mathematical Cultures*, pp. 1–6, Cham. Springer International Publishing.

Larvor, B. (2018). Why 'scaffolding' is the wrong metaphor: the cognitive usefulness of mathematical representations. *Synthese*.

Larvor, B. (2019). From euclidean geometry to knots and nets. *Synthese*, 196(7):2715–2736.

Macbeth, D. (2014). *Realizing Reason A Narrative of Truth and Knowing*. Oxford University Press, Nueva York.

Malet, A. (1996). *From indivisibles to Infinitesimal. Studies on Seventeenth Century Mathematization of Infinitely Small Quantities*. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Mancosu, P. (1996). *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. Oxford University Press, New York.

Mancosu, P. (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford University Press, Oxford.

Manders, K. (1989). Domain extension and the philosophy of mathematics. *The Journal of Philosophy*, 86(10):553–562.

Manders, K. (2008a). Diagram-based geometric practice. En Mancosu, P., editor, *The Philosophy of Mathematical Practice*, pp. 65–79. Oxford University Press, Oxford.

Manders, K. (2008b). The euclidean diagram. En Mancosu, P., editor, *The Philosophy of Mathematical Practice*, pp. 80–133. Oxford University Press, Oxford.

Manders, K. (inédito). Euclid or descartes? representation and responsivennes. *A journal*.

Morgan, M. (2003). Experiments without material intervention: model experiments, virtual experiments and virtually experiments. En Radder, H., editor, *The philosophy of scientific experimentation*, pp. 216–235. University of Pittsburgh Press, Pittsburgh.

Netz, R. (1999). *The shaping of deduction in Greek mathematics: a study in cognitive history*. Cambridge University Press, Cambridge.

Novaes, D. (2012). *Formal languages in logic : a philosophical and cognitive analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.

Nunn, T. P. (1910). The arithmetic of infinites.: A school introduction to the integral calculus. *The Mathematical Gazette*, 5(89):345–356.

Nunn, T. P. (1911). The arithmetic of infinites. a school introduction to the integral calculus. *The Mathematical Gazette*, 5(90):377–386.

Ortiz, E. R. (2018). Wallis's use of innovative diagrams. En Chapman, P., Stapleton, G., Moktefi, A., Perez-Kriz, S., y Bellucci, F., editores, *Diagrammatic Representation and Inference*, pp. 712–715, Cham. Springer International Publishing.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning. Vol. I y II.* Princeton University Press, Princeton.

Pólya, G. (1973). *How to solve it.* Princeton University Press, Princeton.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.* John Wiley and Sons, Londres.

Radder, H. (2003). *The philosophy of scientific experimentation.* University of Pittsburgh Press, Pittsburgh.

Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, 7(1):5–41.

Rav, Y. (2007). A Critique of a Formalist-Mechanist Version of the Justification of Arguments in Mathematicians' Proof Practices. *Philosophia Mathematica*, 15(3):291–320.

Schlimm, D. (2017). José ferreirós. mathematical knowledge and the interplay of practices. *Philosophia Mathematica*, 25(1):139–143.

Stedall, J. (2002). *A Discourse Concerning Algebra.* Oxford University Press, Oxford.

Stedall, J. (2008). *Mathematics Emerging, A sourcebook 1540 –1900.* Oxford University Press, Oxford.

Stillwell, J. (2010). *Mathematics and its history (Tercera edición).* Springer, New York.

Vega Reñon, L. (1990). *La Trama de la Demostración (Los griegos y Ia razón tejedora de pruebas).* Alianza Editorial, Madrid.

Wagner, R. (2017). *Making and breaking mathematical sense : histories and philosophies of mathematical practice.* Princeton University Press, Princeton.

Wallis, J. (1656a). *De sectionibus conicis, nova methodo expositis, tractatus.* Leon Litchfield, Oxford.

Wallis, J. (1656b). *Arithmetica Infinitorum sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaquae difficiliora Matheseos Problemata.* Leon Litchfield, Oxford.

Wallis, J. (2004). *The Arithmetics Of Infinitesimals. John Wallis 1656.* Springer, Nueva York. Estudio introductorio, ed., y trad. por J. Stedall.

Whiteside, D. T. (1961). Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century. *Archive for History of Exact Sciences*, 1(3):179–388.

Universidad Nacional de Córdoba
2022 - Las Malvinas son argentinas

Hoja Adicional de Firmas
Informe Gráfico

Número: IF-2022-01000882-UNC-ME#FFYH

CORDOBA, CORDOBA
Martes 29 de Noviembre de 2022

Referencia: Ortiz - TESIS

El documento fue importado por el sistema GEDO con un total de 155 pagina/s.

Digitally signed by GDE UNC
DN: cn=GDE UNC, c=AR, o=Universidad Nacional de Cordoba, ou=Prosecretaria de Informatica, serialNumber=CUIT 30546670623
Date: 2022.11.29 10:32:36 -03'00'

Marina Salas
Jefe de División
Mesa de Entradas Facultad de Filosofía y Humanidades
Universidad Nacional de Córdoba

Digitally signed by GDE UNC
DN: cn=GDE UNC, c=AR, o=Universidad Nacional de Cordoba, ou=Prosecretaria de Informatica, serialNumber=CUIT 30546670623
Date: 2022.11.29 10:32:42 -03'00'