SENTIDOS, VALIDACIONES Y DEFINICIONES
AL INTERIOR DE UNA VIVENCIA DE FORMACIÓN DE FUTURAS PROFESORAS EN MATEMÁTICA MEDIADA POR UN ESCENARIO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE UNA UNIVERSIDAD PÚBLICA ARGENTINA

PROFESORA MARÍA FLORENCIA CRUZ

IF-2023-00267925-UNC-ME#FFYH

SENTIDOS, VALIDACIONES Y DEFINICIONES AL INTERIOR DE UNA VIVENCIA DE FORMACIÓN DE FUTURAS PROFESORAS EN MATEMÁTICA MEDIADA POR UN ESCENARIO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE UNA UNIVERSIDAD PÚBLICA ARGENTINA

PROFESORA MARÍA FLORENCIA CRUZ

Tesis presentada para optar al título de Doctora en Ciencias de la Educación

Directora: Dra. Cristina Esteley
Co-directora: Dra. Sara Scaglia

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA - FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES - SECRETARÍA DE POSGRADO

ABRIL 2023
CÓRDOBA, ARGENTINA

RESUMEN

Esta tesis focaliza en la formación de futuras/os profesoras/es en matemática cuando se encuentran inmersas/os en escenarios de modelización matemática. En este marco, buscamos estudiar atribución de sentidos y procesos de validación desarrollados por futuras profesoras al trabajar en escenarios de modelización matemática en el marco de un curso de geometría tridimensional de una universidad pública argentina. Específicamente, damos cuenta de sentidos atribuidos a modelización matemática y validación, analizamos modos de validación puestos en juego en el marco de procesos de modelización matemática y, como emergente del estudio, exploramos vínculos entre procesos de modelización matemática y procesos de producción de definiciones.

Dada la naturaleza de los objetivos de investigación optamos por realizar una investigación cualitativa con un enfoque interpretativo focalizando en un estudio de caso en el marco de una investigación de diseño auténtico. Las principales fuentes de información que estudiamos provienen de producciones escritas de las estudiantes y grabaciones de audio y video de las clases en las que se pone en juego el diseño educativo que se conforma como un escenario de modelización matemática y de grabaciones de entrevistas semiestructuradas.

Del análisis realizado encontramos que las futuras profesoras, al vivir y reflexionar en el marco del escenario educativo, se apropian del proceso de modelización matemática variando los sentidos producidos a medida que se encuentran inmersas en diferentes esferas de actividad. Asimismo, observamos variaciones en los sentidos atribuidos a la validación en el marco de este abordaje pedagógico, lo que nos permite señalar que amplían perspectivas. En ambos casos las futuras profesoras a través de los sentidos producidos reconocen el potencial de trabajos en el aula de matemática que distan de acciones que se llevan adelante en metodologías tradicionales. También encontramos que las futuras profesoras ponen en juego diversos modos de validación para sostener sus propias producciones emergentes durante el trabajo matemático desarrollado en el escenario de modelización matemática. Finalmente, destacamos que tanto en el análisis teórico como en el empírico encontramos posibilidades de pensar el proceso de producción de definiciones desarrollado en el aula de matemática en el marco de procesos de modelización matemática como abordaje pedagógico.

PALABRAS CLAVES

Futuras/os profesoras/es - Modelización matemática - Sentidos - Validaciones - Definiciones.

TOGETHER FOREVER NEVER APART…
MAYBE IN DISTANCE BUT NEVER IN HEART…

A mi hermana Lauri por el sueño inconcluso de compartirlo con ella y por haberme permitido conocer el amor más grande y honesto que existe.

A mi madre y a mi padre por el amor y apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a la Dra. Cristina Esteley por aceptar dirigir esta tesis. Por confiar en mí aún sin conocerme, por dedicarme su tiempo infinito y por acompañar estos años de crecimiento personal e intelectual. También agradezco a mi co-directora de tesis Dra. Sara Scaglia por las largas sesiones de lectura, viajes y congresos compartidos y actividades diversas llevadas a cabo en equipo que siempre aportaron a mi formación y me permitieron profundizar en conceptos e ideas. A ambas por la generosidad absoluta, las lecturas contra reloj, los consejos, las sugerencias, los aportes, por ser referentes y acompañantes sustanciales durante todo el proceso de producción de tesis y dejarme infinitas enseñanzas.

Deseo recordar aquí con el mayor de los afectos a la Mg. Ana María Mantica. Le quiero agradecer por inspirarme a seguir este camino, por su sabia recomendación de dirección de esta tesis, por las largas horas sentada a mi lado ayudándome a pensar y reflexionar, por los congresos y horas de clases compartidas. Gracias por su generosidad, por ser sostén cada vez que lo necesité y por aportarme siempre confianza y optimismo.

Aprovecho para agradecer al Dr. Antonio Moreno, a la Dra. Mónica Villarreal, al Dr. Pablo Flores, a la Mg. María Mina y a la Esp. Araceli Coirini por realizar recomendaciones, aportes, sugerencias y preguntas que siempre ayudaron al avance de este trabajo de investigación.

Un afectuoso agradecimiento a las Especialistas Ailén Hurani y Eugenia Cammisi por sus lecturas atentas y por sus sugerencias que siempre resultaron oportunas y muy valiosas. A las Profesoras Marina Waigant y Larisa Zillioni por ayudarme y acompañarme en las eternas horas de transcripción. A todas ellas por ser mis compañeras y amigas en esta etapa.

Deseo agradecer a la Dra. Agustina Girado, al Dr. Bruno Borge y a la Dra. Emilia Echeveste por acompañar y colaborar en cada uno de mis proyectos académicos. Por sus sugerencias cuidadas y respetuosas y por iluminarme a través del complejo camino del proceso científico.

Agradezco a las integrantes del grupo de investigación en educación matemática "*Análisis de la Producción de Significados en el marco de procesos de modelización matemática en clases de matemática*" de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral y a todas/os mis colegas del Departamento de Matemática con las/os que intercambiamos ideas y siempre han demostrado apoyo con esta investigación.

Agradezco al equipo de investigación del "*Grupo de Enseñanza de la Ciencia y la Tecnología*" de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba por hacerme sentir parte de él y aportar con esta investigación ofreciendo siempre preguntas e ideas.

Un especial reconocimiento a las profesoras y futuras profesoras que participaron en el escenario educativo. Les agradezco haber colaborado con tanta responsabilidad, predisposición, respeto y compromiso siendo las voces fundamentales para que esta investigación se materialice.

Debo expresar un agradecimiento a la directora del Doctorado en Ciencias de la Educación de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba y a las/os integrantes de los Comités Académico y Asesor por sus oportunas y valiosas sugerencias. También aprovecho para transmitir mis agradecimientos a todo el personal de la Secretaría de Posgrado y a las/os profesoras/es de los cursos de la carrera.

Agradezco a la Universidad Nacional del Litoral y al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por financiar esta investigación.

Un especial agradecimiento a mis amigos y amigas con quienes he compartido tantas horas entre mates, libros y computadoras. Un especial reconocimiento al Dr. Antonio Moreno, al Dr. Martín Estermann, a la Prof. Guillermina Benz, a la Lic. Dianela Gahn y a la Prof. Melisa Tonelli por las horas de compañía durante la escritura de esta tesis y su incansable labor de infundirme ánimos para que no me desalentara en este proceso.

Quiero agradecer con mucho cariño a mi familia. A mi madre y a mi padre por sus escuchas infinitas cuando más lo necesité, por confiar en mí y en que iba a llegar a la meta. A Puig por ser mi fiel compañero en todo el proceso. A mis primas y primos y tías y tíos que nunca dejaron de alentar, escuchar y acompañar desde la comprensión y el cariño.

Finalmente, quiero agradecer a todas y todos las/os que de algún modo me apoyaron, acompañaron y contribuyeron en este camino.

ÍNDICE

PRIMERA PARTE

CONFORMACIÓN Y RELEVANCIA DE LA INVESTIGACIÓN

CONFORMACIÓN Y RELEVANCIA DE LA INVESTIGACIÓN

"Los significados neutros (del diccionario) de las palabras aseguran su carácter y la intercomprensión de todos los que hablan, pero el uso de las palabras en la comunicación discursiva siempre depende de un contexto particular.
Por eso, se puede decir que cualquier palabra existe para el hablante en sus tres aspectos: como palabra neutra de la lengua, que no pertenece a nadie; como palabra ajena, llena de ecos, de los enunciados de otros, que pertenece a otras personas; y, finalmente, como mi palabra, porque, puesto que yo la uso en una situación determinada y con una intención discursiva determinada, la palabra está compenetrada de mi expresividad.
En los últimos aspectos la palabra posee expresividad, pero ésta, lo reiteramos, no pertenece a la palabra misma: nace en un punto de contacto de la palabra con una situación real, que se realiza en un enunciado individual".
(Bajtín, 1999, p.278)

La presente investigación se conforma a partir de un entramado de voces, acciones y situaciones que se develan a lo largo de la tesis y delinean la temática en estudio, a saber: la formación de futuras/os profesoras/es en matemática en escenarios de modelización matemática (MM) en los que se ponen en práctica principalmente nociones del dominio geométrico en diálogo con otras nociones.

Con el fin de mostrar la relevancia de la temática en estudio y explicar su conformación, en esta parte de la tesis, introducimos la investigación reportada.

La primera parte de la tesis se conforma por el capítulo I que se organiza en siete secciones. En la primera realizamos un reconocimiento de aportes presentes en el campo de la educación matemática que utilizamos para dar cuenta de la relevancia de la temática en la actualidad y la necesidad de abordarla en el ámbito nacional. En la segunda exponemos los objetivos de investigación cuya consecución guiaron el trabajo de investigación. En la tercera avanzamos sobre una breve reflexión con respecto a cambios producidos en la investigación. En la cuarta presentamos el recorrido personal de la tesista y sucesos puntuales que atraviesan la investigación y la definición de la temática en estudio y sus objetivos. En la quinta mostramos el modo en que avanzamos y modificamos el proyecto de investigación aprobado para la admisión al programa de doctorado en Ciencias de la Educación. En la sexta sintetizamos los cambios producidos en los objetivos de investigación. Finalmente explicamos brevemente la organización de escritura de la tesis y qué cuestiones se abordan en cada capítulo.

CAP I

INTRODUCCIÓN

1. 1. | RELEVANCIA DE LA TEMÁTICA EN EL CAMPO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La temática en estudio en esta investigación es la formación de futuras/os profesoras/es en matemática cuando se encuentran inmersas/os en escenarios de MM (Esteley, 2014) en los que se ponen en práctica principalmente nociones del dominio geométrico en diálogo con otras nociones. En el marco de esta temática establecemos los siguientes núcleos problemáticos1: sentidos atribuidos a procesos de MM y validación, modos de validación en el marco de procesos de MM y vínculos entre procesos de MM y procesos de producción de definiciones. Tanto la temática educativa en estudio como los núcleos problemáticos resultan de interés actual en el campo de la educación matemática y objeto de reflexión y análisis en revistas científicas y eventos nacionales e internacionales, que a su vez dejan explícita la necesidad de que las investigaciones profundicen sus estudios en torno a los mismos y a su interacción/condensación.

Discusiones relativas a la necesidad de pensar y repensar la formación de docentes que enseñan matemática se hacen presente desde los inicios de la educación matemática como disciplina científica. En el primer Congreso Internacional de Educación Matemática (International Congress on Mathematical Education - ICME) realizado en Francia en 1969, se producen algunos debates incipientes en torno a la formación de profesoras/es y, en las resoluciones finales del congreso, se enfatiza en la necesidad de proporcionar oportunidades de formación continua a quienes enseñan matemática. Desde 1969 el ICME se realiza, en general, cada 4 años y hoy es considerado un referente mundial en el que se condensan las preocupaciones centrales de las/os investigadores/as en educación matemática. Destacamos que, desde el ICME 1, se remarca la necesidad de focalizar en la formación docente enfatizando en trayectorias y vivencias educativas que pongan especial atención en las particularidades del desempeño actual o futuro de dichas personas como profesionales (Even y Ball, 2009; Davis y Renert, 2014; Robutti et al., 2016; Geng et al., 2017; Borko et al., 2019; Imms y Kvan, 2021).

---

[1] Incorporamos y adaptamos la expresión núcleos problemáticos propuesta por Achilli (2005), para dar cuenta de aspectos sobre los que interesa focalizar en el marco de la temática propuesta. Compartimos con esta autora algunos fundamentos vinculados con la tradición crítica de investigación en las ciencias sociales, a saber: el carácter relacional dialéctico, que entiende el proceso de investigación como un esfuerzo por establecer relaciones entre distintas dimensiones de una problemática estudiando sus interdependencias; el carácter de movimiento atribuido a las prácticas y relaciones sociales; el carácter contradictorio/de conflictividades propio de los procesos sociales con contenidos concretos.

En la actualidad, evidenciamos a nivel internacional una profusa presencia de investigaciones y vivencias educativas que focalizan en la formación de futuras/os docentes (Da Ponte y Chapman, 2016; Graven y Lerman, 2020). A modo de ejemplo, mencionamos el grupo de estudio (TSG) 29 en el ICME 14 titulado "Educación de futuros/as profesores/as en matemática para o del nivel secundario" (Preservice mathematical teacher education at secondary level) realizado en 2021 y también propuesto para el ICME 15 a realizarse en Australia en 2024 (TSG 4.2).

Asimismo, se hace evidente en eventos nacionales que establecen ejes de trabajo de interés y/o grupos de discusión respecto a la formación de futuras/os docentes de matemática, por ejemplo: VII Jornadas de Educación Matemática y IV Jornadas de Investigación en Educación Matemática (Universidad Nacional del Litoral 2021)[2], VIII Reunión Pampeana de Educación Matemática (Universidad Nacional de la Pampa 2020)[3], XIII Congreso Argentino de Educación Matemática (Universidad Nacional de la Plata 2018)[4] y en bibliografía nacional (Sadovsky, 2010; Pochulu et al., 2015; Fregona et al., 2017; Sgreccia, 2018; Castorina y Sadovsky, 2018; Cruz et al., 2020).

En el marco de lo mencionado, se ha avanzado en torno a diversas cuestiones relativas a la formación de futuras/os profesoras/es y es evidente el requerimiento actual de la educación matemática de profundizar y ampliar las miradas al respecto. Incluso, las discusiones resultan especialmente relevantes hoy, puesto que la formación de jóvenes de escuela secundaria se pone en jaque y parece requerir revisiones y reestructuraciones metodológicas a fin de promover ambientes que favorezcan el desarrollo crítico que les brinde oportunidades para desenvolverse de modo responsable en sociedades que se encuentran cambiando continuamente (Núcleos de Aprendizaje Prioritarios de Matemática, 2011; Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje en Matemática, 2018). Por esto, la preocupación con respecto a la formación matemática de jóvenes de distintos niveles educativos también pone de manifiesto la necesidad de contribuir y prestar especial atención a la formación de quienes enseñan o enseñarán matemática. A su vez, el trabajo docente requiere adaptación continua y contextualización, mencionamos como ejemplo la obligada virtualización de los procesos de enseñanza producida como consecuencia de la pandemia ocasionada por el virus SARS-CoV-2 en 2020 o los constantes cambios que implica la incorporación continua de las nuevas tecnologías en la sociedad y en los contextos educativos.

[2] Eje 4: Educación matemática en la formación de profesores de matemática.
[3] Tema propuesto: Educación matemática en la formación de profesores.
[4] Temas tentativos: Formación de profesores de matemática.

En esta escena amplia referida a la formación de profesoras/es se plantean diferentes formas de aportar atendiendo a modos de trabajo que se llevan adelante en asignaturas, tipo de actividades que se ponen en juego o problemáticas con las que se trabaja. En esta línea y, en particular, considerando demandas curriculares nacionales e internacionales, en esta investigación enfatizamos las contribuciones a la formación docente cuando profesoras/es o futuras/os profesoras/es se involucran en procesos de MM (Stillman et al., 2017; Villarreal et al., 2018; Stillman et al., 2020; Shing Leung, et al., 2021).

La incorporación de la MM y las aplicaciones en la clase de matemática es foco de discusión desde hace algunas décadas. Encontramos en 1968 la conferencia titulada "Por qué enseñar matemática para que resulte útil" (Why to teach mathematics so as to be useful) a cargo de Hans Freudenthal (1968) y avances de investigaciones presentadas en el primer ICME (1969) a cargo de, entre otros, Henry Pollak (1969) y Arthur Engel (1969) que focalizan en esta temática. Estas primeras aproximaciones vinculan principalmente la modelización con las aplicaciones. Su relevancia actual es indiscutible, en particular se menciona que en el ICME 14 (2021) se propone un grupo de trabajo que estudia el estado del arte sobre la MM en la Educación Matemática titulado: "Estudio sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la Modelización Matemática y la Educación Matemática Interdisciplinaria" (Survey Team 4: The Teaching and Learning of Mathematical Modelling and Interdisciplinary Mathematics Educations) y un grupo de estudio denominado "Aplicación Matemática y Modelización en Educación Matemática" (TSG22: Mathematical Applications and Modelling in Mathematics Education) que focalizan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje en los que se apela a MM, este último grupo también propuesto para el ICME 15 (TSG 3.4).

De modo general, existe consenso internacional con respecto a la importancia y necesidad de promover vivencias educativas en las que se trabaje con modelos matemáticos y el reconocimiento de la falta de evidencia empírica en lo que respecta a la puesta en juego de procesos de MM y al modo de integrarlos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje (Kaiser, 2020). Algunos avances actuales en torno a la temática en los que prevalece la MM extramatemática pueden encontrarse en Stillman et al. (2017), Stillman et al. (2020) y Shing Leung, et al. (2021). Entre otros, la presentación y formulación de situaciones adecuadas, el propósito y sentido de modelizar en los distintos niveles educativos, la autenticidad contextual de las tareas, la evaluación en el marco de la MM, la mediación de tecnologías en la producción de modelos, las interacciones e intervenciones que se producen al modelar, el tiempo empleado, el análisis de procesos cognitivos que tienen lugar durante procesos de MM, son algunos de los puntos más importantes en torno a los cuales gira el debate actual (Julie y Mudaly, 2007, Borromeo Ferri, 2018; Stillman et al., 2020; Cruz et al., 2021).

La aspiración de trabajar los puntos mencionados hace evidente el significativo crecimiento e interés en el ámbito internacional por la enseñanza apelando a MM. Asimismo, las vivencias educativas de MM constituyen discusiones centrales en la comunidad de investigadoras/es en educación matemática (Stillman et al., 2020) y forman parte de las recomendaciones en currículos de matemática de diversas regiones del mundo cada vez con más énfasis (Borromeo Ferri, 2018, 2021; Mina et al., 2019; Moreno Verdejo et al., 2022).

A nivel nacional existen importantes aportes con respecto a la formación de futuras/os docentes cuando se encuentran inmersas/os en vivencias educativas en las que se emplea MM (Torroba et al., 2007; Magallanes et al., 2014; Esteley, 2014; Magallanes y Konic, 2016; Villarreal et al., 2018; Cruz et al., 2020). También, los estándares para la acreditación de las carreras de Profesorado Universitario en Matemática (2012) propuestos por el Consejo Interuniversitario Nacional sostienen que las/os futuras/os profesoras/es en matemática en momentos de formación deben vivenciar procesos de MM y estas consideraciones forman parte de la propuesta curricular para la escolaridad obligatoria en el sistema educativo argentino. En los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios de Matemática (2011) y en el Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje en Matemática (2018) se señala la importancia de que en la educación secundaria se promuevan procesos de MM. En particular, este último documento coloca como prioritario el trabajo con MM, explicitando sus particularidades y señalando que "enseñar a partir de la modelización favorece el desarrollo de capacidades y la construcción de los saberes" (p.37).

En el contexto brevemente descripto se hace explícita la necesidad de reflexionar con respecto a diversas cuestiones en relación con la MM como abordaje pedagógico[5] . Teniendo en cuenta tales consideraciones destacamos que en la presente investigación estudiamos modos de abordar procesos de MM, con futuras/os profesoras/es en un curso de geometría tridimensional de una universidad nacional argentina, en los que se movilizan principalmente nociones del dominio geométrico.

En el marco de formación de futuras/os docentes inmersas/os en escenarios de MM focalizamos, como se menciona anteriormente, en sentidos atribuidos. Respecto a sentido, señalamos que en el informe realizado en 2009 por el Consejo Nacional de Profesores en Matemática de Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics - NCTM), se sostiene que las prácticas de razonamiento y construcción de sentido son fundamentales para que las/os

[5] Esta perspectiva se profundiza y hace explícita en el capítulo II. Sin embargo, de modo general, desde esta perspectiva se organiza el trabajo en el aula de matemática en torno a las fases que intervienen en los procesos de MM, se producen modelos y se llevan adelante diversas actividades propias del quehacer matemático (Esteley, 2014).

estudiantes desarrollen competencia matemática. En particular, diversos estudios y directrices manifiestan la necesidad de que el estudiantado logre producir sentido durante el aprendizaje a partir de vivencias que emplean la MM como abordaje pedagógico (Cruz et al., 2020; Stillman et al., 2020; Esteley y Cruz, 2021). En esta línea, consideramos que producir, atribuir, crear e incluso develar sentidos acerca de MM por parte de futuras/os profesoras/es resulta fundamental y por tanto foco de la investigación.

Reflexiones respecto a la producción/atribución de sentido han sido y son abordadas por diversas/os investigadoras/es del ámbito educativo (Dewey, 1958; Carter, 1993; Lin y Cooney, 2001; Larrosa, 2003) y poseen gran relevancia hoy en el ámbito nacional de educación matemática (Esteley, 2014; Scaglia y Kiener, 2015). En general, observamos que en la mayor parte de los estudios nacionales predomina la discusión en relación con la construcción del sentido de conocimientos matemáticos. Con esta tesis se busca ampliar perspectivas discutiendo sentidos otorgados a procesos de MM y procesos de validación en relación con la enseñanza de la matemática cuando se llevan adelante diversas esferas de actividades (Bajtín, 2000), particularmente, cuando se intercalan discusiones didácticas y matemáticas. En esta línea, se busca promover una dialéctica entre lo subjetivo y lo objetivo mediado por el lenguaje como medio para la comprensión (Bajtín, 2000). Es decir, los procesos de MM y validación, y el sentido que se les atribuye guardan estrechos vínculos con el tipo de actividades en las que participan las/os futuras/os profesoras/es. Dicha producción de sentido se considera situada, acorde a Lave (1991).

Enfatizamos que en esta investigación focalizamos tanto en sentidos otorgados a procesos de validación como en modos de llevar adelante los mismos. Reconocemos dichos procesos en el marco del proceso de MM en el sentido de Bassanezi (2002) y Esteley (2014), por lo que el estudio se encuentra influenciado por esta particularidad.

La validación posee diversas acepciones que atraviesan las discusiones actuales de la educación matemática y surge inicialmente ligada a la idea de prueba matemática. En el 5to ICME realizado en Australia en 1986 encontramos uno de los primeros debates en torno a la prueba en ámbitos de enseñanza y de aprendizaje. Específicamente, el matemático Philip (1986) señala que la prueba tiene como propósito la validación de los enunciados y, en ese sentido, afirma que en la validación reside la verdad de la matemática. Sin embargo, el autor también destaca otros propósitos para la prueba, como ser, la posibilidad de descubrir propiedades y/o teoremas a partir de ella y propone la necesidad de discutirlos y debatirlos. Los aportes del autor muestran que el debate desde sus orígenes no se restringe al trabajo con demostraciones formales.

En el ámbito internacional, la temática de la validación en el aula de matemática es foco de discusión en la comunidad de investigadoras/es (Mariotti, 2006; Hanna y De Villiers, 2008; Balacheff, 2008; Reid y Knipping, 2010; Hanna y De Villiers, 2012; Stylianides y Harel, 2018; Hanna et al., 2019). En el ICME 14 (2021) e ICME 15 (2024), los grupos de discusión 16 y 3.6 respectivamente, se denominan "Razonamiento, argumentación y prueba en educación matemática" (Reasoning, argumentation and proof in mathematics education). Si bien observamos una ausencia explícita del término validación en el título del grupo de discusión, es importante señalar que existen discusiones terminológicas importantes al respecto en las que se hace evidente la interacción entre las tres palabras mencionadas, validación, e incluso, explicación (Balacheff, 2000; Balacheff, 2008). En relación con esta cuestión, señalamos que en la educación matemática no siempre se manifiesta explícitamente el modo en que se utilizan términos clave vinculados a esta temática, lo cual puede redundar en complicaciones para el avance de la investigación, dado que es importante para comunicar y propiciar desarrollos en el debate hacer explícita la perspectiva adoptada al respecto (Balacheff, 2008).

De modo general, en diversidad de trabajos producidos en torno a la MM se hace referencia al término validación y se la reconoce como parte ineludible de los procesos de MM. En el ámbito internacional esta preocupación y el uso de tal término, puede hacerse evidente en trabajos presentados en las últimas tres Conferencias Internacionales sobre la Enseñanza de la Modelización Matemática y Aplicaciones (The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications - ICTMA). En particular, Doerr et al. (2017) afirman que la validación matemática es una de las actividades fundamentales en el marco de los procesos de MM. A su vez, tanto en Stillman et al. (2017) como en Shing Leung et al. (2021) se presentan capítulos que muestran avances sobre validación al trabajar con futuras/os profesoras/es cuando se involucran con actividades de MM. Sin embargo, apreciamos la necesidad de mayores producciones a nivel nacional (Villarreal et al., 2018) que den cuenta en detalle de los procesos de validación adoptados por futuras/os docentes y de los sentidos que éstas/os les atribuyen cuando se encuentran inmersas/os en procesos de MM.

En Argentina, a partir del año 2000 reconocemos un importante avance por investigadoras/es que problematizan la validación en el aula de matemática (Sadovsky y Sessa, 2004; González y Rodríguez, 2006; Duarte, 2010; Mantica y Dal Maso, 2011; Markiewicz et al., 2021). Otra evidencia se pone de manifiesto en la elección de abordar como trayecto el problema de la validación en matemática como uno de los tres problemas en torno a los cuales se elabora el plan de estudios de una carrera de posgrado[6] cogestionada por tres universidades argentinas (Universidad Nacional del Litoral, Universidad Nacional de Río Cuarto, Universidad Nacional de San Luis), denominada Especialización en Didáctica de la Matemática.

En relación con la validación y el empleo de este término, a nivel nacional evidenciamos que se emplean diversas perspectivas. Encontramos trabajos que relacionan la validación directamente con la noción de prueba matemática, por ejemplo: Carnelli et al. (2008), Duarte (2010), Mantica y Renzulli (2014), Cruz et al. (2016) y Markiewicz et al. (2021). Otros hacen referencia principalmente a la situación de validación en el marco de la teoría de las situaciones didácticas como ser Borsani et al. (2014), Cammisi et al. (2016), Boubée et al. (2018). Cabe destacar que esta clasificación no es dicotómica, sino que en muchos casos estas perspectivas se entrelazan.

Señalamos también que en Argentina se hacen presentes estudios que referencian la validación en el marco de procesos de MM. Destacamos que los hallazgos de esta tesis al considerar momentos de trabajo en una asignatura de matemática (geometría), posiblemente permitan ampliar las fronteras respecto a lo realizado a nivel nacional para luego contrastar con producciones del ámbito internacional. Teniendo en cuenta lo mencionado, posicionamos en esta investigación los procesos de validación desde una perspectiva amplia. Tal como señalan Durand-Guerrier et al. (2019), la misma puede ser o no de naturaleza matemática, y puede incluir diversas herramientas y prácticas que se consideren relevantes. Esta perspectiva se irá desarrollando, profundizando y discutiendo a lo largo del texto.

Además, atendiendo que en la investigación predomina el trabajo con fenómenos geométricos del espacio tridimensional destacamos que gran parte de la bibliografía que aborda la temática de la validación lo realiza en el marco del dominio geométrico. Philip (1986) señala que, durante mucho tiempo, la prueba en el ámbito escolar residía exclusivamente en geometría. Más aún, las discusiones iniciales en lo que respecta a la validación y más específicamente a la prueba problematizan el modo de abordarla en el aula de geometría.

Hoy es indiscutible la necesidad de enseñar geometría en los distintos niveles educativos, puesto que permite desarrollar ciertos modos de actuación particulares que otorgan un gran valor formativo para el estudiantado (Itzcovich, 2005). Sin embargo, el dominio geométrico en Argentina posee menor presencia en la educación obligatoria que otros dominios (Grossi y Sgreccia, 2016; Schaefer y Sgreccia, 2016). Al respecto Herbst et al. (2017), en el ámbito internacional, señalan que el lugar ocupado por la geometría en el plan de estudios se ha justificado por motivos de transmisión cultural y destacan que la capacidad de desarrollar razonamiento lógico se potencia cuando se abordan cuestiones vinculadas con este dominio.

[6] El plan de estudios comprende tres trayectos curriculares, un curso y un trabajo final integrador. Cada trayecto se conforma por espacios curriculares y se estructura en torno a un problema que debe enfrentar el docente en su práctica profesional. Los trayectos curriculares son: El problema de la construcción del sentido de los saberes matemáticos, El problema de la validación en matemática y El problema de la articulación y organización de los contenidos en matemática.

Los/as autores/as explicitan también que la expansión de la MM a todos los aspectos de la vida humana ha hecho que diversidad de objetos o prácticas sean susceptibles de comprensión y predicción, cuestión que vinculan con el porqué estudiar geometría. Además, agregan que el trabajo geométrico resulta eficaz para desarrollar "la capacidad de organizar intelectualmente, predecir y controlar el mundo de las representaciones de objetos y experiencias físicas"[7] (p. 3)

Destacamos que, en el avance del estudio en curso emerge con especial protagonismo el trabajo de producción de definiciones por parte de las/os futuras/os profesoras/es. Al inicio del estudio consideramos resultados de un estudio previo (Cruz et al., 2017), realizado por la tesista y colegas, en el que se constata que futuras/os profesoras/es que cursan su carrera en la institución educativa en la que se realiza el estudio, luego de acreditar asignaturas del área geometría parecen no reconocer y comprender en profundidad las particularidades y potencialidades de la definición en geometría. Con estas últimas ideas otorgamos un lugar relevante a la producción de definiciones en el marco de procesos de MM. Estas decisiones, que buscan profundizar dichos resultados y atender la interpelación de colegas externas/os a la investigación en el marco de la participación en eventos nacionales e internacionales, incentivan la necesidad de contrastar y estudiar procesos de definición (Ouvrier-Buffet, 2013) en vínculos con procesos de MM (Bassanezi, 2002). Ouvrier-Buffet (2015) en su investigación doctoral concluye que es necesario implementar actividades de producción de definiciones a nivel universitario, sin embargo, señala la dificultad para caracterizar la forma de implementarlas. En este sentido, la investigación que realizamos y la posibilidad de generar definiciones en el aula de matemática apelando a la MM como abordaje pedagógico, puede tener potencial para avanzar y contribuir con cierta conceptualización al respecto.

La producción de definiciones cobra especial relevancia en el marco del trabajo geométrico, se hace presente indudablemente al considerar y discutir la validación (Lakatos, 1986) y, en esta investigación, la concebimos como una actividad característica de la ciencia matemática con la misma relevancia que otras actividades, como ser, conjeturar, validar, etc.

En relación con la producción de definiciones, tempranamente Freudenthal (1973) destaca el potencial de esta actividad en el aula de matemática y específicamente al pensar en una buena enseñanza en geometría. En esta misma línea, Mariotti y Fischbein (1997) destacan la importancia de aprender a definir considerando esta actividad como un problema básico de la educación matemática. De este modo, evidenciamos la necesidad de profundizar y repensar procesos de producción de definiciones con estudiantes de profesorado en matemática.

[7] Traducción propia del original en inglés.

El trabajo de investigación vinculado con esta tesis se inspira en las consideraciones descriptas y la problemática asociada se caracteriza por focalizar, como se menciona inicialmente, en núcleos problemáticos que consideramos relevantes en el ámbito de la temática en estudio. Este aspecto del estudio le otorga complejidad y fortaleza. Complejidad por el carácter relacional y dialéctico propio que surge en el estudio de los núcleos problemáticos que requiere coherencia en el vínculo entre lo metodológico y lo discursivo. Fortaleza al considerar que el mismo focaliza la mirada sobre un objeto particular sin perder de vista la escena general y compleja en la que se desarrolla la formación docente y las implicancias que la misma pueda tener en momentos de inmersión escolar de quienes están en proceso de formación. En este sentido, esperamos con esta tesis abrir perspectivas y pensar posibilidades en la formación docente con el fin de producir debates, en primer lugar, nacionales y luego internacionales, que potencien los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática en distintos niveles del sistema educativo.

1. 2. | OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Teniendo en cuenta las consideraciones realizadas en la sección anterior (1.1.) determinamos como objetivo general de investigación: “Estudiar procesos de validación y atribución de sentidos desarrollados por futuras profesoras en matemática al trabajar en escenarios de MM en el marco de un curso de geometría tridimensional de una universidad nacional argentina”.

En esta investigación focalizamos en el estudio de reflexiones diversas de futuras profesoras con respecto a MM y a validación en el ámbito del trabajo matemático atendiendo a los requerimientos de la formación de futuras/os profesoras/es en matemática, en el análisis de procesos de validación en el marco de un trabajo de MM y en la exploración de vínculos entre procesos de producción de definiciones y procesos de MM como abordaje pedagógico.

Cabe mencionar que reflexionar respecto a cuestiones vinculadas con la matemática y con la enseñanza de la matemática, pondera el aspecto dialógico entre práctica matemática y didáctica que conforman el centro de la actividad docente. El énfasis en tal aspecto dialógico se diferencia de trabajos tradicionales en la trayectoria de formación docente en los que, en asignaturas de matemática, se priorizan prácticas de enseñanza donde prevalecen metodologías propias de la formación de licenciadas/os en matemática, y ofrece un aporte para la formación docente.

De este modo y en el marco de lo previamente discutido, proponemos los siguientes objetivos específicos de este estudio:

- **1-** Estudiar atribución de sentidos por parte de futuras profesoras a procesos de MM al vivir escenarios educativos donde estos mismos procesos se ponen en juego.
- **2-** Estudiar atribución de sentidos por parte de futuras profesoras a procesos de validación al vivir escenarios educativos de MM.
- **3-** Analizar modos de validación que emergen del trabajo matemático de futuras profesoras al vivir escenarios educativos de MM.
- **4-** Explorar potencialidades y limitaciones de los vínculos entre procesos de MM y procesos de definición.

Presentamos a continuación una figura (figura 1) en la que sintetizamos los objetivos antes descriptos e ilustramos sus conexiones. La formación de futuras profesoras en escenarios de MM es la temática más amplia a partir de la cual se determinan los núcleos problemáticos. Presentamos con tonalidades violetas lo vinculado con atribución de sentidos, en salmón lo relacionado con modos de validación y con celeste lo vinculado con procesos de producción de definiciones.

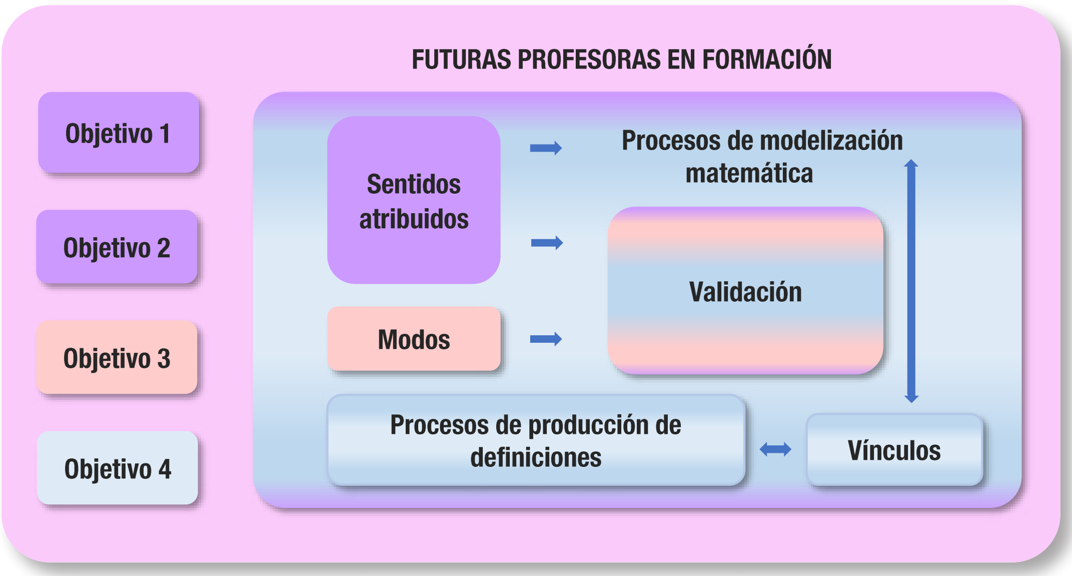


FIGURA 1 | *Síntesis de objetivos (Fuente propia).*

Para producir información a partir de la cual responder los objetivos específicos se diseña y pone en juego un escenario educativo que se desarrolla en seis clases en un entorno educativo auténtico (The Design-Based Research Collective, 2003), cuestión que se describe en profundidad en el capítulo 3. A su vez, realizamos entrevistas grupales posteriormente a la implementación de la propuesta.

En la vivencia educativa participan 16 mujeres. También participa un varón denominado Pablo (nombre ficticio) en pocos momentos. Este estudiante forma parte de discusiones en momentos de trabajo grupales en la primera clase, ya que se involucra con dos compañeras. En otras clases se encuentra ausente o trabaja solo (por una decisión personal consensuada con la docente del curso). Por este motivo, en el análisis de datos producidos en la primera clase de su grupo se hablará de las estudiantes y Pablo, y como Pablo cuando intervenga en relación con la producción realizada individualmente. En las entrevistas grupales Pablo no participa, debido a que en dicho momento se recuperaron voces de futuras profesoras que viven y se involucran en toda o la mayor parte del escenario de MM.

Por lo mencionado anteriormente, y por el predominio de mujeres con respecto a varones en los ámbitos docentes de Argentina, decidimos utilizar la expresión “futuras profesoras” para incluir a todas las personas que son parte de esta investigación. Basamos esta decisión en la importancia de hacer visible el género femenino al momento de utilizar el lenguaje que fue y aun es dominado por la voz masculina a lo largo de la historia. Así, bajo el supuesto de que en el lenguaje todo es cuestión de hábito, cuando lo empleamos de otras maneras no solo cambia la expresión, sino también toda la cosmovisión que lo sustenta como instrumento central a la hora de definir la realidad (Fabbri, 2013).

1. 3. | RECORRIDO POR LA CONFIGURACIÓN DE OBJETIVOS COMO PARTE DE UNA EXPERIENCIA DE FORMACIÓN ATRAVESADA POR LO PERSONAL

En esta tesis tomando aportes de Bajtín (2000) consideramos que la voz de cada futura profesora, o grupo de futuras profesoras se conforma en una interacción polifónica al encontrase con otras voces. Por esto, reconocemos que las ideas se forman a partir de lo que escuchamos, leemos, percibimos, sentimos, etc. En el marco de esta perspectiva, no evitamos o negamos el papel individual en atribuir sentido (Mercer, 2013), sino que examinamos lo individual en contextos de producción de pensamiento colectivo y creación de conocimiento socialmente compartido. Es por lo antes indicado que, en la mayor parte de la tesis se emplea la primera persona del plural, pues en estas páginas se ponen en escena diversidad de voces (tesista, directora, codirectora, estudiantes, docentes, referentes bibliográficos, etc.).

A pesar de ese posicionamiento, también reconocemos que la conformación de la temática en estudio y de los objetivos presentados en la sección 1. 2. emerge tomando como base experiencias personales de formación de la tesista y circunstancias que atraviesan estas páginas. Por esta razón, en las secciones 1. 4. y 1. 5. exponemos una narración en la que mostramos cómo diversas trayectorias y experiencias personales influyen en la configuración de la problemática en estudio y específicamente de los objetivos de investigación. Así, en estas secciones la tesista recurre, en momentos, a la primera persona del singular mostrando un camino que inicia con sus primeros pasos en la investigación y confluye en esta tesis que considera como cierre de una etapa y, a su vez, un abanico para pensar un nuevo comienzo. En relación, Carter (1993) señala que las narraciones se configuran como un modo adecuado para reflexionar, relatar y representar la experiencia, produciendo de este modo sentido al ser, hacer, pensar, sentir y decir.

1. 4. | NARRATIVA EN TORNO A LA BÚSQUEDA PERSONAL

En el año 2011 comencé la carrera Profesorado en Matemática en la Universidad Nacional del Litoral. Ese año implicó importantes cambios en mi vida, me encontraba viviendo por primera vez en una ciudad, junto a mi hermana, pero lejos de mi ámbito familiar y social en el contexto de una localidad pequeña. El cambio implicó una adaptación personal rápida muy importante. En ese momento, al ser pocas/os estudiantes en el profesorado en matemática nos convertimos, de modo casi inmediato, en un equipo de siete compañeras y amigas con quienes compartía muchas horas de cursado que confluían en largos días en la facultad. Todas ellas actualmente profesoras en matemática con las que continuamos compartiendo discusiones matemáticas y educativas en un grupo en la aplicación *WhatsApp.*

En ese primer año de carrera universitaria no tenía idea de qué era matemática y menos aún todo lo que implicaba pensar en procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática, sin embargo, cuando empecé a cursar algunas asignaturas de análisis y álgebra me sentía desbordada cuando tenía que estudiar largas demostraciones para reproducirlas en un examen, pues no lograba discernir el sentido de hacerlo. Recuerdo que esto me produjo una crisis vocacional, pensé que, quizás, era conveniente cambiarme a un instituto no universitario de formación docente. Luego de un largo diálogo con familiares, concluimos que la universidad podía abrir fronteras, posibilitando oportunidades para realizar intercambios en el exterior, dar clases en la universidad a futuro e incluso hacer investigación[8]. Desde ese momento, el hacer

[8] Cabe señalar que en 2011 el Instituto Nacional de Formación Docente estaba recientemente creado (se crea en 2007) y se encontraba en pleno proceso de restructuración y jerarquización de los institutos superiores no universitarios.

un doctorado y pensar en la enseñanza de las demostraciones se convirtieron en grandes metas a alcanzar, que no visualizaba claramente.

Continué linealmente el desarrollo de mi carrera. En el año 2013, decidí realizar una adscripción docente en la asignatura Matemática Discreta I bajo la dirección de la Dra. Sara Scaglia. De este modo tuve mi primera experiencia relacionada directamente con mi futuro desarrollo profesional y me sentí apasionada por la docencia universitaria, y específicamente, por la formación de profesoras/es.

En el año 2014 tomé la decisión de inscribirme a una beca de intercambio estudiantil en la Universidad Autónoma Metropolitana de la ciudad de México y, unos pocos meses después, me encontraba viviendo en esa ciudad enorme con chicas argentinas que no conocía con anterioridad, cursando asignaturas de Licenciatura en Matemática, con profesoras/es y compañeras/os nuevas/os, adaptándome a metodologías de enseñanza diferentes a las que conocía, etc. Ese viaje resultó fundamental en dos sentidos, por un lado, para mi desarrollo personal y por otro lado en mi carrera de formación, no solo por el hecho de vivir un cambio en relación con el perfil profesional cursando Licenciatura en Matemática, sino también por influencias que provenían de múltiples nuevas voces.

Las largas conversaciones con compañeras/os de intercambio me posibilitaron ampliar miradas y perspectivas desarrollando nuevas ideas, dado que provenían de lugares diferentes. Hasta ese momento no había tenido demasiado vínculo con tareas de investigación y no reconocía el campo de la Educación Matemática como tal. Todas/os ellas/os tenían decidido continuar su desarrollo profesional principalmente en el ámbito de la investigación y es a lo que se dedican hoy. Específicamente, en un diálogo con ellas/os conocí la Beca de Estímulo a las Vocaciones Científicas financiada por el Consejo Interuniversitario Nacional y pensé en la posibilidad de solicitarla. Me comuniqué con la Mg. Ana María Mantica, le comenté que tenía interés en postularme a dicha beca y le expliqué que no quería estudiar geometría sino "algo" relacionado con la enseñanza de la geometría, por lo que decidimos que al regresar a Argentina nos embarcaríamos en un proyecto vinculado con mis deseos.

Así fue como, al regresar a Argentina, empecé a investigar bajo su dirección y a descubrir el campo de la Educación Matemática. En primer lugar, mis intereses versaban en la enseñanza de la demostración con futuras/os docentes y en los procesos de evaluación, sin embargo, a partir de su experiencia en investigación priorizamos la primera temática ampliando perspectivas, estudiando procesos de validación llevados adelante por futuras/os profesoras/es en matemática en el aula de geometría, particularizando en la mediación de tecnologías en estos procesos. La temática de la validación era foco de estudio por grupos de investigación de la

Universidad Nacional del Litoral desde hacía unos años y una inquietud personal inspirada en experiencias vividas en el marco de mi formación hasta ese momento.

El trabajo en investigación se convirtió, poco a poco en algo que amaba hacer. Ana me otorgó la posibilidad de conocer diversos congresos de Educación Matemática, siempre me acompañó y compartió conmigo largas horas de formación. En ese entonces, una vez por semana, nos juntábamos varias horas a escribir trabajos, y de este modo, me fue contagiando su pasión acerca de la investigación sobre la enseñanza de la geometría. En ese contexto, decidí que al finalizar mi carrera de grado empezaría con una carrera doctoral. Por el lazo construido con Ana le consulté quién podría ser una potencial directora, ella me señaló que me iba a recomendar una persona que le parecía sumamente potente para acompañarme y contactamos juntas a la Dra. Cristina Esteley.

Luego de varias conversaciones por mail con Cristina organizamos el 6 de mayo de 2016 el primer encuentro cara a cara en Córdoba en la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación. En esa reunión estuvo también la Dra. Mónica Villarreal bajo la propuesta de Cristina de integrarse al equipo como codirectora. Al conversar con respecto a temáticas de investigación que se venían desarrollando por el grupo de investigación en Córdoba y mis investigaciones previas hicimos un diagrama en el que figuraban las siguientes temáticas: Futuras/os profesoras/es, MM, validación y tecnologías. Posteriormente, debido a mi decisión de quedarme en la ciudad de Santa Fe seguimos el plan de trabajo sin Mónica y comenzamos a pensar en posibles codirectoras radicadas en la ciudad de Santa Fe. Ambas coincidimos en que la Dra. Sara Scaglia era la persona adecuada para acompañarme, por sus importantes desarrollos y estudios en relación con la enseñanza de la geometría y validación, le realizamos la propuesta y pasados unos días comenzamos a trabajar las tres.

1. 5. | INICIO Y AVANCES SOBRE EL PROYECTO DE TESIS

Empezamos el proyecto para postular a una beca doctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). A las temáticas anteriormente mencionadas se agrega la problemática de la producción de sentido, por ser tema en estudio de directora y codirectora de tesis con importantes desarrollos. De este modo, siguiendo deseos y objetivos personales y profesionales realizamos la postulación e inscripción al doctorado en Ciencias de la Educación de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba.

Bajo las decisiones tomadas y con el fin de realizar la inscripción a la beca CONICET en julio 2016 y al doctorado en septiembre 2016 proseguimos con los planes. A su vez, el 1 de agosto de 2016 en medio de situaciones personales (o familiares) movilizadoras y en proceso de formulación de los proyectos de investigación me recibí de Profesora en Matemática. En el contexto brevemente descripto se configura como primer objetivo general de investigación "Estudiar procesos de validación puestos en juego por futuros profesores en matemática al trabajar en un contexto educativo mediado por tecnologías y actividades de modelización matemática en el marco de un curso de Geometría Euclídea Espacial de la Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC)", y como específicos:

1- ¿Qué entienden futuros profesores como proceso de validación?

2- ¿Qué sentido le atribuyen a esta actividad como futuros profesores?

3- ¿Qué sentido le atribuyen al uso de las tecnologías digitales como medio para validar en geometría tridimensional?

4- ¿Cómo se configuran los conocimientos en instancia de validación cuando la misma viene mediada por las tecnologías digitales?

En diciembre 2016 me fue notificada la denegación de la beca CONICET. En ese momento, bastante triste, Sara y Cristina me acompañaron con mucho cuidado, cariño y respeto en la búsqueda de alternativas. Sara me comunicó que existían becas para docentes de la Universidad Nacional del Litoral (UNL) a las que podía postular, siempre que desde la gestión se comprometiesen a otorgarme un cargo docente si ganaba dicha beca. Así fue que, en ese momento, con el apoyo de: Prof. Claudio Lizárraga (decano), Dra. Liliana Rossi (secretaria académica) y Dra. Bibiana Iaffei (directora del Departamento de matemática) pude postular y obtener la beca doctoral para docentes de la UNL, comenzando de este modo, gracias al apoyo y confianza de muchas personas, en septiembre de 2017 el doctorado en Ciencias de la Educación, habiendo sido admitida al mismo en agosto de 2017.

Los objetivos iniciales del estudio se fueron modificando a medida que la investigación avanzó, tal como señala Flick (2012) es importante que en los proyectos de investigación se desarrollen claramente las preguntas, pero también, las/os investigadoras/es cualitativas/os deben estar abiertas/os a resultados nuevos e incluso sorprendentes que implican la reformulación de las preguntas. Específicamente, con el fin de producir datos que analizaríamos para responder a dichos objetivos, y apelando metodológicamente a una investigación de diseño decidimos producir un escenario de MM con el fin de que futuras/os docentes lo vivencien en una asignatura de geometría tridimensional.

En primer momento consideramos como posibilidad abordar cuestiones vinculadas a la medida. Sin embargo, en las VI Jornadas de Educación Matemática y III Jornadas de Investigación en Educación Matemática (2017) presenté un trabajo junto a Marcela Götte y Ana María Mantica en el que analizamos criterios que tienen en cuenta futuras/os docentes en matemática al caracterizar familias de poliedros y aspectos que reconocen como ventajas o limitaciones de los diferentes tipos de clasificaciones. Uno de los resultados de dicho trabajo muestra que las/os estudiantes, en ese momento, confunden las pirámides con prismas[9]. Luego de la exposición del trabajo, la Esp. Ana Bressan indicó que era importante pensar cómo se estaban enseñando las definiciones, si había una verdadera producción de las mismas y si, en contextos de enseñanza verdaderamente el estudiantado se involucra en producción de definiciones. Esta cuestión me atravesó completamente, por lo que, conversamos al respecto con Sara y Cristina y modificamos el eje de la experiencia centrándonos en producción de definiciones en el marco de procesos de MM.

Teniendo en cuenta las cuestiones mencionadas y resultados de entrevistas que realizamos en el año 2017 (Cruz et al., 2018) diseñamos el escenario educativo que se implementa en 2018. Específicamente, en dichas entrevistas reconocemos que las/os futuras/os profesoras/es en estudio no podían evocar la expresión modelo o nombrar algunos modelos matemáticos, ni experiencias previas de trabajo con MM como abordaje pedagógico, ni experiencias de discusiones en relación con el empleo de este abordaje en el aula de matemática posicionadas/os en su rol de futuros/as docentes. Estas consideraciones nos llevan a repensar nuevamente los objetivos de investigación, decidiendo focalizar también en sentidos otorgados a procesos de MM por parte de futuras/os profesoras/es.

El focalizar en sentidos atribuidos a validación y MM e intercalar en un curso de matemática discusiones propias de la práctica matemática con aportes de la didáctica resulta fundamental para pensar las trayectorias de formación de futuras/os docentes. Es por lo que estudiar esta posibilidad era una cuestión que personalmente me atravesaba ya con anterioridad. Recuerdo una situación en el año 2015 en la que me encontraba conversando con una profesora de la carrera cuando era estudiante del profesorado y le pregunté una cuestión que se vinculaba con procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática. En ese entonces ella me señaló que estábamos en clases de una asignatura de matemática, no de didáctica, cuestión que me resultaba extraña, puesto que me desempeñaba como ayudante en la facultad de ingeniería y en las clases de matemática siempre se disponían espacios para discutir situaciones o problemáticas relacionadas

[9] Los prismas y las pirámides son tipos de poliedros que tienen características que los diferencian en clases excluyentes.

con el rol a ejercer por ingenieras/os. En este sentido, considero que articular las reflexiones didácticas y matemáticas, en cursos de matemática para futuras/os profesoras/es, otorga oportunidades para adentrar desde diversos espacios a las/os estudiantes de profesorado en lo que será su futuro rol profesional, lo que puede potenciar el desarrollo de su práctica profesional.

El desarrollo del proceso de investigación continuó con diversas idas y vueltas. En el año 2019 tuve la oportunidad de viajar a Colombia para presentar un trabajo, realizado junto a Sara y Cristina. El trabajo se vincula, con la producción de definiciones en el marco de procesos de MM y lo presenté en la XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Concreté este viaje junto a la Mg. María Mina y a la Dra. Mónica Villarreal. En esta oportunidad, ambas colegas y otras/os colegas de países latinoamericanos realizaron preguntas respecto a la producción de definiciones en el marco de procesos de MM, dado que no habían escuchado previamente de experiencias que focalicen en definición y MM. Las diversas preguntas e inquietudes al respecto y el estudio del trabajo de campo llevado adelante en el que emergió con fuerza el empleo de definiciones y sus vínculos con la noción de modelo (vínculo entre el trabajo empírico y el teórico) nos llevan a establecer un objetivo que aborda específicamente la relación entre procesos de producción de definiciones y procesos de MM. Esta cuestión, constituye, quizás uno de los desafíos más importantes de esta tesis.

En el año 2020 viajé a Madrid para llevar adelante una estancia de investigación en la Universidad Complutense de Madrid. En esta estancia, construí un lazo de amistad con colegas argentinas/os, discutíamos importantes cuestiones vinculadas con la propia investigación y compartíamos diferentes conversaciones en relación con el dar clases y el empleo del lenguaje inclusivo, esto me llevó a cambiar mi mirada respecto al uso de este último. Influenciada por esta experiencia y considerando, tal como se menciona anteriormente, que en el trabajo de campo intervienen mayormente mujeres, decidimos emplear el femenino en los objetivos que finalmente abordamos en esta investigación. Realizar esta modificación significó en lo personal un cambio de mirada en relación con cuestiones vinculadas con el empleo del lenguaje inclusivo que es actualmente foco de discusión de un gran número de investigaciones sociológicas, antropológicas y también en el ámbito de la educación matemática.

Teniendo en cuenta estas consideraciones que se forman a partir de una experiencia personal atravesada por lo colectivo resultan los objetivos de investigación mencionados en 1.2.

Las consideraciones mencionadas implicaron cambios en objetivos y definición de nuevos objetivos a responder, por lo que también tuvimos que realizar un recorte con respecto a los objetivos iniciales, es por esto que decidimos no enfatizar en el estudio de tecnologías. No obstante, continuamos considerando que los medios en la producción de conocimiento transforman prácticas, contenidos, formas de conocer, etc., atendiendo a la noción de humanos-con-medios como unidad epistémica (Borba y Villarreal, 2005). A su vez, estos objetivos fueron presentados en el plan de beca de finalización de doctorado de CONICET a la que postulé en 2020, otorgada y actualmente en curso.

1. 6. | SÍNTESIS DE MOVIMIENTOS Y CONEXIONES ENTRE OBJETIVOS

En esta sección presentamos una tabla (tabla 1) en la que exponemos los objetivos iniciales, actuales y los cambios propuestos. Con la misma buscamos ilustrar movimientos y conexiones que reconocemos en la configuración final de los objetivos.

TABLA 1 | *Configuración y reconfiguración de objetivos (Fuente propia).*

OBJETIVOS ESPECÍFICOS PROYECTO DE TESIS	OBJETIVOS ACTUALES DE LA INVESTIGACIÓN
1- ¿Qué entienden futuros profesores como proceso de validación?	1- Estudiar atribución de sentidos por parte de futuras profesoras a procesos de MM al vivir escenarios educativos donde estos mismos procesos se ponen en juego.
2- ¿Qué sentido le atribuyen a esta actividad como futuros profesores?	2- Estudiar atribución de sentidos por parte de futuras profesoras a procesos de validación al vivir escenarios educativos de MM.
3- ¿Qué sentido le atribuyen al uso de las tecnologías digitales como medio para validar en geometría tridimensional?	3- Analizar modos de validación que emergen del trabajo matemático de futuras profesoras al vivir escenarios educativos de MM.
4- ¿Cómo se configuran los conocimientos en instancia de validación cuando la misma viene mediada por las tecnologías digitales?	4- Explorar potencialidades y limitaciones de los vínculos entre procesos de MM y procesos de definición.

Reemplazamos los primeros dos objetivos planteados en el plan inicial por el primer objetivo propuesto actualmente en la investigación. No abordamos el tercer objetivo en la tesis y reconfiguramos el cuarto en el tercer objetivo actual. A su vez, añadimos el segundo y cuarto objetivo al considerar y otorgar especial relevancia al sentido otorgado a MM y en la focaliza-ción realizada con relación a procesos de MM y de definición respectivamente.

De modo general, la experiencia personal atraviesa por completo estas páginas, si determinadas situaciones no se hubieran desarrollado como lo hicieron los objetivos de investigación, e incluso mi desarrollo profesional, hoy serían otros. Retomo una frase de Flick (2012) que se condice con lo desarrollado y pensado:

> Las preguntas de investigación no provienen del aire. En muchos casos, su origen está en la biografía personal del investigador [o de la investigadora] y su contexto social. La decisión sobre una pregunta específica depende sobre todo de los intereses prácticos del investigador [o de la investigadora][10] y su implicación en ciertos contextos sociales e históricos. Tanto los contextos cotidianos como científicos desempeñan un papel aquí (p.63).

1. 7. | RECORRIDO POR ESTAS PÁGINAS

Con el fin de exponer y presentar el contenido e información que reportamos en esta tesis, en esta sección describimos brevemente la organización que llevamos adelante para dar cuenta de los objetivos de investigación haciendo explícito qué se aborda en cada parte y capítulo. Destacamos que organizamos la presentación en partes, debido a que en las mismas se articulan consideraciones que se presentan en una distribución en capítulos que se entraman para dar forma a una unidad temática.

La primera parte se constituye por el capítulo I que involucra lo presentado a este momento y aborda la introducción de la investigación dando cuenta del recorrido (no lineal) desarrollado que confluye en estas páginas. Avanzamos en la fundamentación de la importancia de la temática en el ámbito educativo en la actualidad y específicamente en la educación matemática y presentamos con fundamentos los objetivos en estudio.

En la segunda parte recuperamos y reflexionamos en torno a referentes teóricos que abordan la temática en estudio en esta investigación. Organizamos la presentación teniendo en cuenta que los aspectos en los que focalizamos constituyen una red compleja de nociones teóricas, a saber: formación de profesoras/es, MM, validación, sentido y producción de definiciones. Organizamos el avance al interior de esta parte en dos capítulos (capítulo II y III),

[10] Destacamos que las aclaraciones realizadas en citas textuales de autoras/es y en producciones del trabajo de campo las añadimos entre corchetes en el marco del texto en cuestión.

teniendo en cuenta la temática general y los núcleos problemáticos en estudio. En el capítulo II avanzamos en la formación de futuras/os profesoras/es en matemática y en MM y en el capítulo III en validación, sentidos y producción de definiciones. En todos los casos mostramos perspectivas internacionales y nacionales que resultan útiles para reconocer diversidad de enfoques, determinar posiciones y hacerlas explícitas, pero también avanzar en los casos en que resulta necesario para delimitar las ideas y constructos en juego en esta investigación. Destacamos que en el avance al interior de ambos capítulos se van recuperando ideas anteriores, por lo que las perspectivas se moldean enlazando ideas y posiciones adoptadas.

En la tercera parte presentamos dos capítulos (capítulos IV y V) en los que se profundiza en la descripción del terreno[11] (Lave, 1991) en el que llevamos adelante la investigación en aspecto dialógico con la metodología de la investigación, ambas en relación y seleccionadas teniendo en cuenta los constructos teóricos adoptados en la investigación y los objetivos de la misma. En el capítulo IV focalizamos en aspectos contextuales vinculados con las particularidades que atraviesan a la investigación dadas por la asignatura enmarcada en el programa de Profesorado en Matemática de la universidad pública argentina en la que se produce la información a estudiar. En el capítulo V describimos aspectos metodológicos.

En la cuarta parte abordamos el primer objetivo de investigación, a saber: estudiar atribución de sentidos por parte de futuras profesoras a procesos de MM al vivir escenarios educativos donde estos mismos procesos se ponen en juego. Específicamente, estudiamos sentidos y hacemos explícitas categorías analíticas y resultados con respecto al mismo. Para esto organizamos en tres capítulos esta parte de la tesis, teniendo en cuenta la información en estudio. Determinamos tres momentos claves de producción de información que nos otorgan luz para organizar el estudio y el análisis de información, constituyendo, de este modo, los capítulos VI, VII y VIII.

En la quinta parte abordamos el tercer y cuarto objetivo de investigación teniendo en cuenta que se vinculan con procesos de validación en el marco de procesos de MM y se nutren mutuamente. Presentamos, en primer lugar, aportes con respecto al segundo objetivo, a saber: estudiar atribución de sentidos por parte de futuras profesoras a procesos de validación al vivir escenarios educativos de MM. Para abordar el análisis y los resultados vinculados con este objetivo organizamos la información en dos capítulos, IX y X. En segundo lugar, presentamos el análisis y resultados del tercer objetivo: analizar modos de validación que emergen del trabajo matemático de futuras profesoras al vivir escenarios educativos de MM. Específicamente, este

[11] Término que adoptamos en esta investigación y explicamos en la tercera parte de la tesis.

objetivo se desarrolla en el capítulo XI. A su vez, establecemos conclusiones con respecto a los objetivos en estudio en esta parte de la tesis.

En la sexta parte abordamos el capítulo XII de la tesis. Avanzamos en el explorar potencialidades y limitaciones de los vínculos entre procesos de MM y procesos de definición. Es decir, abordamos el principal emergente de la investigación presentado. Avanzamos presentando algunas reflexiones con relación a este objetivo.

En la séptima y última parte presentamos el capítulo XIII, en el que avanzamos con las conclusiones generales de la tesis con el fin de aportar al campo de la educación matemática tanto a nivel nacional como internacional dando cuenta de los resultados de investigación logrados, futuras líneas de investigación y limitaciones del estudio realizado. Finalmente, presentamos la bibliografía que empleamos en la investigación y los anexos.

SEGUNDA PARTE

UN RECORRIDO TEÓRICO: ANTECEDENTES Y DELIMITACIÓN DE IDEAS

UN RECORRIDO TEÓRICO: ANTECEDENTES Y DELIMITACIÓN DE IDEAS

"...el conocimiento no existe realmente en los textos y las bibliotecas:
ni siquiera se acumula en las mentes individuales.
Sólo adquiere existencia efectiva en las relaciones entre las personas
y sus entornos sociales y naturales".
(Rockwell, 2009, p. 39)

En la presente investigación, tal como mencionamos en la primera parte, estudiamos la formación de futuras/os profesoras/es en matemática en escenarios de MM en los que se ponen en juego, principalmente, nociones del domino geométrico. Establecemos núcleos problemáticos a estudiar: sentidos producidos a procesos de MM y de validación, modos de validación en el marco de procesos de MM y vínculos entre procesos de MM y procesos de producción de definiciones.

Con el fin de explicitar antecedentes y marcos teóricos que guían nuestro estudio organizamos esta parte de la tesis en dos capítulos. En el capítulo II presentamos consideraciones respecto a formación de futuras/os profesoras/es y profesoras/es y a procesos de MM. En el capítulo III avanzamos en lo que refiere a validación, sentido y producción de definiciones.

Destacamos que estos capítulos se encuentran vinculados y se nutren mutuamente. A su vez, en el marco de la reflexión teórica que recupera aportes a nivel local e internacional emergen algunas propuestas teóricas y nociones que empleamos en el análisis y creemos pueden otorgar un aporte al campo educativo.

CAP II

FORMACIÓN DE FUTURAS/OS PROFESORAS/ES EN MATEMÁTICA EN ESCENARIOS DE MM

2.1. | FORMACIÓN INICIAL DE FUTURAS/OS PROFESORAS/ES. ANÁLISIS Y POSICIONAMIENTO

La formación de futuras/os profesoras/es es fundamental en el marco de la temática en estudio en la presente investigación. Para posicionarla, recuperamos diversidad de perspectivas que atraviesan el campo de la educación matemática, además explicitamos nociones fundamentales en nuestra investigación, como lo son trayectoria educativa y desarrollo profesional. También, abordamos la importancia de comprender y reconocer la construcción de identidad docente desde la formación inicial y el lugar fundante que ocupa el desarrollo del conocimiento interpretativo. Finalmente, ponemos de manifiesto cuestiones fundamentales en relación con la formación de futuras/os profesoras/es, teniendo en cuenta el proceso de formación en vínculo con la MM y la producción de sentidos.

2.1.1. | PERSPECTIVAS INVESTIGATIVAS QUE ABORDAN LA FORMACIÓN INICIAL Y CONTINUA DE PROFESORAS/ES

La investigación relativa a la formación de profesoras/es[12] en matemática es un área de estudio que ha crecido sustancialmente en los últimos 25 años. Ese hecho ocurre debido al reconocimiento y a los avances de estudios sobre la influencia de las/os profesoras/es en el aprendizaje de la matemática de las/os estudiantes (Lerman, 2001). Asimismo, el fin de que se otorgue sentido a la enseñanza de la matemática parece ser compartido por futuras/os profesoras/es, profesoras/es en actividad, formadoras/es de docentes e investigadoras/es

[12]Cabe mencionar que en el texto de Lerman, subyace la idea de representar la formación de profesoras/es como “un viaje personal” (Lin y Cooney, 2001, p. 2). En ese sentido al hablar de formación de profesoras/es, se incluye también la formación de futuras/os profesoras/es. De modo que, en esta sección, cada vez que se mencione formación de profesoras/es o educación de profesoras/es, nos referiremos a profesoras/es en actividad y a futuras/os profesoras/es. Se hace notar que esta unificación hoy está ampliamente aceptada y utilizada en la bibliografía.

(Lin y Cooney, 2001). Con tal fin, los autores proponen que, en los programas de formación de profesoras/es, se abran espacios para: debatir y estudiar situaciones reales de enseñanza, incentivar reflexiones con las/os futuras/os profesoras/es sobre la necesidad y la ventaja de conceptualizar y teorizar acerca de la enseñanza de ciertos contenidos; diseñar estrategias y desarrollar herramientas para que las/os futuras/os profesoras/es y docentes otorguen sentido a algún aspecto particular de la enseñanza. De manera similar, destacan la centralidad de diseñar programas de formación docente en los que los resultados y procesos de investigación faciliten su desarrollo profesional, así como de desarrollar teorías que posibiliten conceptualizar la complejidad de la enseñanza.

El reconocimiento y creciente aumento de estudios de esta área en el ámbito educativo se evidencia en el análisis de literatura que muestra gran complejidad por la diversidad de intereses de tales estudios, perspectivas teóricas y enfoques empíricos, propios de un campo que se encuentra en desarrollo (e. g. Lerman, 2001; Da Ponte y Chapman, 2016). Tempranamente, Lerman (2001) distingue ciertos estudios y perspectivas de investigación empleados/as para comprender la formación de profesoras/es:

- Análisis de creencias de profesoras/es sobre la matemática, la educación matemática y las posibles conexiones entre ambas. En esta perspectiva de trabajo, se suele argumentar que para que algunos métodos de enseñanza se modifiquen, es necesario que las/os profesoras/es modifiquen[13] ciertas creencias.

- Estudios de prácticas reflexivas, las cuales ofrecen una visión sobre cómo las/os docentes actúan en el aula en su rol profesional y cómo continúan aprendiendo acerca de la enseñanza y el aprendizaje, sobre sí mismos como profesoras/es y sobre el estudiantado. En esta perspectiva se propicia la noción de docente autónoma/o y emancipada/o más allá de las propuestas de gobiernos e investigadoras/es.

- Reflexiones en relación con el conocimiento de la asignatura matemática y el conocimiento del contenido pedagógico de las/os profesoras/es. En esta perspectiva se realiza una taxonomía de tipos de conocimiento. Ejemplos de este caso son los trabajos de Shulman (1987, citado en Lin y Cooney, 2001), Even (1990, citado en Lin y Cooney, 2001) y, con mayor actualidad, Ball u otras/os autoras/es que siguen desarrollando y aplicando esta teoría (e. g. Ball, Tames y Phelps, 2008; Flores et al., 2013; Selling et al., 2016).

[13]Lerman (2001) realiza una interesante reflexión sobre algunas cuestiones de índole ética en relación con los modos en que se llegan a impulsar o se consideran estos cambios.

- Estudios sobre el aprendizaje de profesoras/es. En esta perspectiva a partir de lo señalado por Lerman (2001) distinguimos dos casos. Por un lado, los estudios en los que se apela a ideas del constructivismo. Esta teoría fue originariamente aplicada para estudios del aprendizaje de niñas/os y/o para explicar enseñanzas compatibles con teorías constructivistas del conocimiento para comprender el aprendizaje de las/os profesores. Un ejemplo de trabajo desde esta perspectiva es el de Steffe y D'Ambrosio (1995, citado en Lin y Cooney, 2001). Por otro lado, consideramos los casos en los que se estudia el aprendizaje focalizándose en el crecimiento de la conciencia de las/os profesoras/es. Se busca focalizar en que las/os profesoras/es identifiquen preguntas que les permitan profundizar sus propios propósitos y ser conscientes de las teorías personales que motivan su práctica. Esta es una teoría del aprendizaje que puede tener un sesgo individualista e internalista.

- Estudios acerca de las/os profesoras/es en sus contextos. En esta perspectiva tanto el aprendizaje de las/os profesoras/es como el aprendizaje sobre la enseñanza son consideradas actividades (aprendizaje y enseñanza) socioculturales, en este sentido se entiende a cada profesor/a en el marco de su entorno social. Lerman (2001) reconoce que los aportes de Vygotsky y sus seguidores estimulan los trabajos de Lave (en los que resulta central la noción de comunidad de práctica) y de la teoría de la actividad, así también, las ideas de dichas teorías se solapan con cuestiones que considera el posmodernismo. Específicamente, hay tres aspectos de la teoría de Vygotsky que resultan de suma importancia al pensar la formación docente en su entorno social: en primer lugar, ofrece un marco único y coherente para el aprendizaje a largo plazo que se aplica tanto a las/os niñas/os como a adultos; en segundo lugar, intenta integrar el afecto y la cognición al centrarse en el sentido como unidad de análisis; y, en tercer lugar, ofrece un método para situar el conocimiento y la acción en entornos sociohistóricos y culturales. Por lo tanto, desde esta teoría se franquean las practicas individualistas considerando la diversidad que atraviesa las aulas, como ser, influencias políticas y sociales, interacciones socioculturales y múltiples posicionamientos que se ponen de manifiesto, tales como, el género, la etnia, las relaciones entre profesoras/es y alumnas/os y otras prácticas discursivas en las que se sitúan el poder y el conocimiento.

Lerman (2001) puntualiza que las perspectivas expuestas muestran un panorama de teorías implícitas o explícitas del aprendizaje docente. También sugiere que las teorías que abordan la complejidad de las prácticas sociales son más apropiadas para dar cuenta de la complejidad de tales aprendizajes.

Destacamos que las contribuciones de Lerman (2001) muestran un panorama general y completo respecto a perspectivas, que incluso en la actualidad se encuentran vigentes y en avance constante.

Da Ponte y Chapman (2016) realizan una revisión de estudios que focalizan en la formación de futuras/os profesoras/es en matemática y la organizan en relación con aspectos que resultan de interés para la investigación, entre otros: perspectivas y desarrollo de conocimiento matemático de las/os futuras/os profesoras/os, perspectivas y desarrollo de conocimiento sobre la enseñanza de la matemática y la constitución y el desarrollo de identidad profesional. Específicamente, estos autores explicitan que la identidad se desarrolla en el marco de una identidad grupal de la comunidad profesional de profesoras/es, que se encuentra atravesada por lo social en un determinado sistema educativo. Consideramos que esta perspectiva respecto al desarrollo de identidad en sociedad puede presentar alguna relación o vínculos respecto a lo planteado por Lerman (2001) al hablar de estudios de profesoras/es considerando sus contextos.

Da Ponte y Chapman (2016) explicitan que, aunque se pueden diferenciar aspectos que se ponen en juego y son foco de estudio en la actualidad, es importante considerar la formación de futuras/os docentes en matemática como un proceso complejo atravesado por múltiples elementos que interactúan entre sí. Afirman que el desarrollo de conocimiento matemático y de conocimiento de la enseñanza de la matemática son elementos centrales de la complejidad de la formación de futuras/os profesoras/es y que, aunque suelen considerarse independientes, están sustancialmente conectados y son clave en la formación de profesoras/es en matemática. Además, señalan que las vivencias en las que se desarrollan dichos elementos influyen en el desarrollo de la identidad de las/os futuras/os profesoras/es.

Lerman (2001) destaca que un gran volumen de investigaciones problematiza no solo acerca de la resistencia al cambio de ciertas/os profesoras/es sino también acerca de cómo las/os profesoras/es principiantes reproducen estilos de enseñanza puestos en juego por sus docentes durante los estudios de grado. Da Ponte y Chapman (2016) observan que en diversas investigaciones que focalizan en la formación de futuras/os profesoras/es se pone de manifiesto una cuestión compleja, dado que focalizan en aspectos del currículum de matemática y, en algunos casos, producen recomendaciones contradictorias sobre el aprendizaje de las/os futuras/os profesoras/es y las oportunidades de aprendizaje adecuadas.

Esta última problemática vinculada con el aprendizaje que se espera logren las/os futuras/os profesoras/es y las oportunidades que se brindan en la formación inicial, permanecería vigente en la actualidad, por lo que nuestra investigación puede ofrecer aportes para pensar propuestas de formación para futuras/os profesoras/es en asignaturas de matemática en las que se emplea MM. De este modo se invita a transitar vivencias educativas[14] que emplean me-

[14] Profundizamos la noción de vivencia y experiencia en el capítulo III (sección 3.2.2.) al discutir sus vínculos con el sentido.

todologías de enseñanza que forman parte de requerimientos actuales en demandas curriculares nacionales e internacionales para la educación secundaria y que distan de metodologías tradicionales, considerando, específicamente, la relación entre el desarrollo de conocimiento matemático y el conocimiento de la enseñanza de la matemática (NAP, 2011; Villarreal et al., 2018; Marco nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática, 2018; Mina et al., 2019; Borromeo Ferri, 2018, 2021).

2.1.2. | TRAYECTORIAS DE DESARROLLO PROFESIONAL QUE SE CONFIGURAN A PARTIR DE VIVENCIAS EDUCATIVAS

A lo largo de sus trayectorias profesionales las/os profesoras/es en matemática, por diversas razones, suelen vivenciar tensiones al tener que tomar decisiones frente a posiciones relativas a cuestiones relevantes para ellas/os. Por ejemplo, esto ocurre en ocasiones en las que deben optar entre ciertos objetivos y modos de enseñanza ideales propiciados por investigadoras/es y demandas curriculares o escolares no siempre compatibles con esos ideales. Las tensiones se incrementan cuando las posiciones difieren sustancialmente (Lerman, 2001; Westaway y Graven, 2019).

A su vez, las/os profesoras/es pueden reconocer ciertas contradicciones entre principios, ideales y vivencias educativas asumidas o atravesadas previamente al ejercicio profesional docente y los desafíos, demandas y restricciones impuestas por el propio sistema educativo (Rocha y Fiorentini 2009). En relación con las dos cuestiones señaladas anteriormente, coincidimos con Losano et al. (2018) en que en el inicio del ejercicio profesional de las/os profesoras/es entran en juego vivencias pasadas en general y, en particular y con énfasis, las vividas en los estudios de grado. Esto nos motiva e incita a considerar que estudiar vivencias educativas en la trayectoria de formación de futuras/os profesoras/es resulta de especial relevancia para pensar acerca del inicio de la constitución de sus identidades profesionales. Teniendo en cuenta lo recién mencionado, dos nociones emergen como relevantes y claves para nuestra investigación, trayectoria y desarrollo profesional.

Vezub (2013) propone pensar el proceso de formación de profesoras/es como una trayectoria, lo que implica considerarlo como un proceso complejo y a largo plazo que articula la formación inicial y continua. La autora considera que las trayectorias profesionales no son lineales ni uniformes, y que pueden verse como el resultado de acciones y prácticas desarrolladas por individuos en situaciones específicas a lo largo del tiempo. En ese sentido, la trayectoria profesional atraviesa con frecuencia importantes procesos de revisión y cambio (Vezub, 2011). A su vez, Vezub (2008) explicita que estudiar las trayectorias profesionales de las/os profesoras/es implica reconstruir sus vivencias formativas, comprender acciones singulares que han realizado en el devenir de su historia profesional en el marco de las oportunidades y regulaciones propias de su campo de actuación. Esta última cuestión resulta especialmente relevante, dado que refleja que cada una de las vivencias de futuras/os docentes y docentes en actividad puede influir en el desarrollo profesional.

Da Ponte (2001) afirma que el desarrollo profesional inicia en la formación inicial y continúa durante toda la vida laboral de la/el docente. El autor señala que el mismo se puede llevar adelante mediante la participación de docentes en cursos, proyectos, intercambios de vivencias y experiencias, lecturas, reflexiones, etc. A su vez, al considerar la noción de desarrollo profesional, propone centrarse en las potencialidades del profesorado y en propiciar movimientos de adentro hacia afuera, es decir, que se comience desde la propia vivencia y/o experiencia de la/el docente para aproximarse a conocimientos e información que se va produciendo en el desarrollo de la vivencia y/o experiencia. En el desarrollo profesional, el/la docente es considerado como un todo que abarca dimensiones cognitivas, afectivas y relacionales y enfatiza en la relevancia de la reflexión en interconexión continua tanto con la teoría como con la práctica.

Desde la perspectiva de desarrollo profesional el/la docente se considera en constante aprendizaje, concebido como un proceso que involucra múltiples etapas, siempre incompleto y en el cual él/ella se posiciona como la persona principal.

El estudio de vivencias y/o experiencias educativas que atraviesan las trayectorias de desarrollo profesional de futuras/os profesoras/es es particularmente relevante debido a la influencia que tienen tanto en la conformación inicial de identidades profesionales como en el inicio de accionar en el marco de la labor docente. Vezub (2004) reconoce la importancia de investigar las trayectorias de desarrollo profesional de profesores/as, como un modo de favorecer (o promover) la transformación de prácticas y rutinas que “se considera que es necesario modificar” (p.11) en las instituciones educativas. Nuestra investigación estudia en profundidad los sentidos atribuidos por futuras profesoras en matemática durante una vivencia de formación vinculada con saberes matemáticos y prácticas educativas que se inserta en la trayectoria de desarrollo profesional.

2.1.3. | CONFIGURACIÓN DE IDENTIDAD DOCENTE DESDE LA FORMACIÓN INICIAL FOCALIZANDO EN LO INTERPRETATIVO

En la trayectoria de desarrollo profesional se configura paulatinamente la identidad docente, que se empieza a gestar desde el inicio de formación de las carreras de grado. Graven y

Lerman (2020) conciben la identidad de las/os profesoras/es en matemática como "formas de ser, llegar a ser y pertenecer; como trayectorias de desarrollo"[15] (p.597). En este sentido, el desarrollo de identidad en la profesión docente posibilita constituir dinámicamente diferentes modos de ser o llegar a ser docente.

Da Ponte y Chapman (2008) mencionan que las/os docentes van desarrollando y construyendo su identidad profesional en la formación inicial, durante las primeras experiencias como profesoras/es y en la formación continua. Esto se vincula con la importancia que le otorgan al desarrollo de habilidades reflexivas, considerándolas con tanta relevancia como el desarrollo de nuevos conocimientos y puntos de vista, puesto que atraviesan la vida profesional de las/os profesoras/es.

Coincidimos con Graven y Lerman (2020) en que reflexionar respecto a identidades docentes y entornos en los que estas pueden desarrollarse, es un modo de comprender el desarrollo o accionar de profesoras/es en matemática. Losano et al. (2018) explicitan que las nociones de identidad y agencia propuestas por Holland et al., (1998) se centran en el desarrollo de ambas -identidad y agencia- en prácticas situadas en mundos construidos culturalmente y resultan relevantes para desarrollar estudios focalizados en la formación de profesoras/es en matemática.

Específicamente, Losano et al. (2018) señalan que un profesor/a puede tener una identidad con múltiples aspectos o múltiples identidades y que en esta diversidad es relevante la agencia para reconstruir o reescribir su historia a través de la participación en diversas prácticas. En consonancia, Da Ponte y Chapman (2016) explicitan que una cuestión fundamental en la formación de futuras/os profesoras es la de transformar la identidad de estudiante a profesor/a y prepararlos/as para asumir sus funciones profesionales. En este proceso, es importante no perder de vista que hay muchas formas de ser profesor/a y que la identidad es una noción multifacética.

Holland et al. (1998) consideran que la agencia es una componente de la identidad y con agencia hacen referencia a la capacidad de las personas para actuar intencional y reflexivamente en el mundo. Más aún, tal como señalan Zavala y Castañeda (2014) "el concepto de agencia, en su sentido general, remite a una de las cualidades más importantes del ser humano: la capacidad de actuar intencionalmente y, por lo tanto, de lograr propósitos o metas guiado por la razón" (p. 98).

Ensor (2001) señala que no considerar, en el ámbito de investigación en educación matemática y en la formación de futuras/os profesoras/es, el desarrollo de agencia podría resultar contraproducente. Puesto que puede ocurrir que las/os futuras/os profesoras/es

[15] Traducción propia del original en inglés.

repitan en diversas situaciones y momentos, sin reflexionar, lo que las/os formadoras/es enseñen y no logren desarrollar capacidad reflexiva y creativa de sus propias prácticas y conocimientos. A su vez, Lerman (2001) destaca que los cambios en las atribuciones de sentidos, por parte de las/os profesoras/es, sobre la matemática y su enseñanza muestran indicios acerca del desarrollo de sus identidades docentes.

Con relación al desarrollo de identidad y conocimiento puesto en juego por futuras/os profesoras/es, cabe mencionar que si bien se espera que las/os futuras/os profesoras/es desarrollen diversos tipos de conocimientos, en nuestra investigación ponemos especial énfasis en el conocimiento interpretativo. Tal como señalan Mellone et al. (2020) el proceso de interpretación se encuentra en el centro de la práctica docente, dado que una característica crucial de un/a profesor/a en matemática es su capacidad para interpretar diversas producciones. Por tanto, la acción de interpretación es una de las tareas más importantes que realizan las/os profesoras/es en su práctica profesional diaria.

Mellone et al. (2020) señalan que se requiere que las/os profesoras/es interpreten, den sentido y respondan continuamente a producciones diversas (de estudiantes, propias, de colegas) sobre resolución de problemas o de otra índole expresadas de forma escrita u oral. Las interpretaciones son importantes, incluso cuando las producciones no hayan sido anticipadas por las/os profesoras/es, sean incorrectas o no se correspondan con estrategias estándares y/o habituales para resolver problemas u otras actividades. En este sentido, el desarrollo del conocimiento interpretativo por parte de futuras/os profesoras/es resulta de especial relevancia.

Atendiendo a las consideraciones realizadas, en nuestro caso, focalizamos en la interpretación de la vivencia por parte de las futuras profesoras al reflexionar con respecto a procesos de MM, procesos de validación, pero también en torno a la matemática misma. Por lo mencionado, hacemos zoom en interpretaciones que involucran la enseñanza de la matemática y la matemática al analizar producciones propias o ajenas.

2.1.4. | REFLEXIONES Y PERSPECTIVAS CON RESPECTO A FORMACIÓN DE FUTURAS/OS PROFESORAS/ES

A partir del estudio bibliográfico realizado, coincidimos con Lerman (2001) en que las teorías que abordan la complejidad de las prácticas sociales son apropiadas para el estudio de la formación docente. Específicamente, consideramos que las vivencias y/o experiencias educativas, atravesadas por contextos sociales específicos que comienzan en la formación inicial, son fundamentales en el marco de las trayectorias educativas y para el desarrollo de la identidad de la/el docente.

Tal como mencionan Losano et al. (2018), las identidades profesionales se desarrollan dialógicamente dentro del mundo figurado[16] de la enseñanza de la matemática a través de la participación continua con compañeras/os y profesoras/es, donde cada participante se posiciona y es posicionado por otras/os dentro del mundo figurado. Las diversas voces en interacción y las vivencias y/o experiencias educativas influyen en la creación y el desarrollo de futuras/os profesoras/es como docentes que configuran su identidad profesional y desarrollan diversos tipos de conocimientos, entre ellos, el interpretativo en el que focalizamos en la presente investigación. Asimismo, enfatizamos en el potencial que produce el desarrollo de agencia, entendiendo que incentivar la reflexión por parte de las/os futuras/os profesoras/es y el actuar en concordancia con la misma son necesarios para un buen desempeño docente en sociedades y sistemas educativos que cambian (algunas veces rápidamente) con el transcurso del tiempo.

Los aspectos teóricos empleados respecto a formación de futuras/os profesoras/es resultan útiles para pensar vivencias y/o experiencias de formación inicial en las que se franqueen prácticas de enseñanza tradicionales e inviten a la reflexión de lo requerido en la actualidad por parte de la investigación en educación matemática y el cambio curricular. En correspondencia con esto último, consideramos importante que futuras/os profesoras/es tengan experiencias compatibles con las orientaciones curriculares innovadoras, con el fin de que desarrollen identidades que se vinculen con un accionar futuro relacionado con perspectivas actuales del currículo de matemática.

A su vez, es importante destacar, tal como plantean Da Ponte y Chapman (2016) que la formación docente no es un sistema cerrado, sino un subsistema que depende de otros sistemas sociales más amplios que también evolucionan en relación con cambios sociales más grandes. Por lo anterior, entendemos que las/os profesoras/es pueden ser agentes de cambio a partir de la reflexión sobre las diversas situaciones y vivencias. Finalmente, esto sugiere que la formación docente debe seguir encontrando formas significativas de facilitar el desarrollo de la identidad profesional de las/os futuras/os profesoras/es.

2.2. | PROCESOS DE MM EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

En esta sección realizamos un recorrido por estudios del ámbito nacional e internacional que abordan cuestiones vinculadas con MM y son particularmente relevantes para nuestra

[16] Los mundos figurados se entienden como ámbitos de interpretación y representación que se construyen social y culturalmente. Un mundo figurado ofrece un conjunto de roles, atribuye importancia a ciertos hechos y actividades y valora algunos resultados más que otros (Losano et al., 2018, pp. 291-292, traducción propia).

investigación. Presentamos diferentes perspectivas de MM que atraviesan actualmente el campo de la educación matemática reconociendo alcances y limitaciones de cada una de ellas, caracterizamos a la MM como abordaje pedagógico, analizamos la noción de modelo y exponemos el modo en que la utilizamos en esta investigación. Finalmente presentamos conclusiones respecto a las decisiones tomadas y posiciones adoptadas.

2.2.1. | PERSPECTIVAS Y AVANCES EN LA NOCIÓN DE MM EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y DE APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Tanto en el campo de la investigación en educación matemática como en el ámbito de los sistemas educativos se constata actualmente un consenso generalizado (local e internacional) acerca del valor y la necesidad de promover, cada vez con mayor énfasis, vivencias educativas en las que se pongan en juego la MM y las aplicaciones en todos los niveles del sistema educativo. Además, Kaiser (2020) reconoce vacancia en lo que respecta a la implementación de procesos de MM y refiere a la necesidad de reunir evidencia empírica acerca de los efectos de su incorporación en la práctica educativa.

El promover vertiginosamente la MM y las aplicaciones en el aula de matemática en diversas regiones del mundo ha detonado en la formulación y/o construcción de enfoques o perspectivas que presentan puntos en común y diferencias.

Kaiser (2020) recupera aportes de Kaiser-Meßmer (1986) para fundamentar que, en el ámbito educativo y en el ámbito de investigación en educación, la MM y las aplicaciones toman aportes de dos corrientes. Por un lado, la corriente pragmática en la que se reconoce al matemático Pollak como principal referente y tiene objetivos utilitarios en los que se aplica la matemática en problemas prácticos. Por otro lado, la corriente científico-humanista propuesta por el matemático y educador matemático Freudenthal en la que se concibe a la matemática como ciencia y se focaliza en el desarrollo de capacidades por parte del estudiantado para establecer relaciones entre la matemática y la realidad.

Las corrientes mencionadas son las bases a partir de las cuales se establecen diversas perspectivas educativas para la enseñanza y el aprendizaje de la MM en la actualidad en el ámbito internacional. Kaiser y Sriraman (2006), Blomhøj (2009) y Kaiser (2020) diferencian seis perspectivas o enfoques (realista, epistemológica, educativa, contextual, socio-crítica y cognitiva) considerando objetivos educativos, bases o fundamentos epistemológicos sobre los que se construyen y el vínculo con las dos corrientes reconocidas inicialmente. Tales perspectivas se detallan a continuación.

- Modelización realista o aplicada: sigue la línea y los supuestos propuestos en la corriente pragmática focalizando en objetivos prácticos-utilitarios donde se emplea la matemática para resolver problemas, se pone énfasis en la situación de la vida real y en el trabajo interdisciplinario. Desde esta perspectiva, el trabajo con la MM debe estar respaldado por el empleo relevante de tecnología. Se reconocen diversas producciones anglosajonas desarrolladas con aportes de este enfoque.
- Modelización epistemológica o teórica: se vincula con la corriente científico-humanista y focaliza en el desarrollo teórico amplio para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Se inscriben en esta perspectiva diversas producciones, entre ellas, la teoría de la educación matemática realista y la teoría de las praxeologías matemáticas desarrollada por Chevallard. En este enfoque se presentan estudios que enfatizan, por ejemplo, en la comprensión y descripción de la naturaleza de actividades matemáticas, las reflexiones involucradas en la MM y el análisis de la base epistemológica de los conceptos matemáticos.
- Modelización educativa: esta perspectiva integra aspectos de los enfoques anteriores (realista o aplicada y epistemológica o teórica) y hace hincapié tanto en objetivos pedagógicos como en objetivos relacionados con la asignatura, es decir, se busca integrar la modelización como medio para el aprendizaje de la matemática y como una competencia en sí misma. Se tienen finalidades relacionadas con la estructuración de los procesos de aprendizaje y/o con el desarrollo de contenidos. Entre otros, importantes aportes realizados en Alemania o Dinamarca pueden enmarcarse en esta perspectiva, por ejemplo, se destacan los trabajos de Blum y Niss respectivamente. Las investigaciones que forman parte de esta perspectiva debaten en torno a las nociones básicas que involucra la MM, como ser: modelo, ciclo de MM, aplicación de la MM, competencia de MM. Además, la puesta en juego de este enfoque en el aula se fundamenta en tres argumentos (Blomhøj, 2009): en primer lugar, la MM motiva, brinda apoyo cognitivo para las concepciones y cierra la brecha entre experiencias de la vida real del estudiantado y la matemática; en segundo lugar, en sociedades con importantes desarrollos tecnológicos, cobra especial relevancia la adquisición de competencias para establecer, analizar y criticar modelos matemáticos; y finalmente, el desarrollo de competencias de MM para criticar los modelos matemáticos y el empleo de estos últimos en la toma de decisiones potencia el desarrollo crítico en la vida en sociedad.
- Modelización contextual y de elicitación de modelos: enfatiza en el diseño didáctico de actividades de MM con situaciones cuidadosamente estructuradas/diseñadas para apoyar el aprendizaje de las/os estudiantes. En esta perspectiva la MM se concibe como un tipo especial de resolución de problemas y, por lo tanto, los aspectos psicológicos involucrados en la resolución

de problemas se toman como punto de partida para comprender dificultades de aprendizaje vinculadas con la MM y para la enseñanza de la misma. Las actividades de modelización que se diseñan en el marco de este enfoque deben resultar significativas y poner en juego el pensamiento del estudiantado, ser simples y vincularse con experiencias previas, requerir el desarrollo de constructos matemáticos significativos y proporcionar la oportunidad de evaluar los modelos y generalizarlos a otras situaciones. Desde esta perspectiva se toman principalmente aportes del debate estadounidense que valoran el empleo de problemas en la práctica escolar.

- Modelización sociocrítica y sociocultural: focaliza en la comprensión crítica del mundo en relación con el reconocimiento de la influencia de las cuestiones socioculturales en las actividades de modelización. Por ejemplo, entre otros, aportes del trabajo de Skovsmose o Skovsmose y Valero configuran una base de la perspectiva sociocrítica sobre la MM. Este enfoque resulta adecuado para empoderar a las/os estudiantes posicionándolas/os como ciudadanas/os autónomas/os e independientes. Esta perspectiva tiene un gran desarrollo en Brasil y otros países de América Latina.

- Modelización cognitiva: se desarrolló en la última década y enfatiza en el análisis de procesos de modelización por parte del estudiantado y en la promoción de los procesos de pensamiento matemático. Esta perspectiva requiere un análisis detallado de la apropiación del propio proceso de MM y de barreras cognitivas y afectivas individuales, incluso, podría considerarse como una investigación básica sobre el aprendizaje de la competencia de la MM. Los trabajos de Borromeo Ferri y Doerr resultan un buen ejemplo de esta perspectiva.

Tal como se menciona anteriormente, las seis perspectivas o enfoques se originan a partir de entrecruzar las dos corrientes epistemológicas iniciales. Sin embargo, es importante destacar que pueden tener solapamientos y posiblemente no cubran completamente el área de investigación vinculada a MM (Blomhoj, 2009), no obstante, otorgan una buena representación de las tendencias vigentes en la actualidad en el campo internacional de la educación matemática.

El análisis de las perspectivas de MM y sus diferencias evidencian el reciente desarrollo de la temática en el campo y nos permite reconocer posiciones que asumimos en la presente investigación. En la sección 2.2.4. estableceremos puntos de encuentro entre algunas de las perspectivas mencionadas y la noción de MM como abordaje pedagógico asumida en esta investigación. Cabe mencionar que el posicionamiento adoptado influye en las decisiones que se toman en el marco del trabajo empírico en la investigación y claro, también en el trabajo analítico.

2.2.2. | CARACTERIZACIÓN DE LA MM COMO ABORDAJE PEDAGÓGICO

En esta investigación apelamos a la noción de MM como abordaje pedagógico, la misma se basa en visiones y modos de trabajo propuestos en Bassanezi (1994, 2002), Borba y Villarreal (2005) y Esteley (2014). Las/os autoras/es señalan que el empleo del proceso de MM como estrategia de enseñanza y de aprendizaje potencia la producción de conocimientos matemáticos que se configuran a medida que se avanza en el propio proceso. Específicamente, Bassanezi (1994) afirma que este abordaje produce condiciones favorables para que el estudiantado comprenda un fenómeno participando en su transformación, lo que significa concebir la matemática como ciencia dinámica.

Bassanezi (2002) sostiene que la matemática que se enseña podría incentivar más al estudiantado si se vinculara con el mundo real y considera que aprender a través de la MM otorga la posibilidad de reconocer potenciales aplicaciones de las nociones matemáticas, así como de emplear habilidades alternativas. El autor afirma que en la modelización se ponen en juego aspectos del trabajo multidisciplinario y que esto trae aparejadas algunas ventajas, como lo son: la formulación de problemas, pruebas de hipótesis teóricas y el empleo de diversos conocimientos en los que la búsqueda de la verdad debe ser impulsada por indicaciones empíricas provenientes de distintos campos, por ejemplo, física, química, biología y astrofísica.

Además, este autor enfatiza que gran variedad de las ideas matemáticas se originan a partir de abstracciones de situaciones empíricas (naturales o sociales). Incluso, Bunge (1974) sustenta que cada teoría específica es, de hecho, un modelo matemático de una parte de la realidad. A partir de estas ideas en juego, Bassanezi (2002) afirma que analizar una situación real científicamente potencia la postura crítica y exhaustiva por parte de quien modeliza y es un modo de racionalizar el pensamiento.

De este modo y considerando a la MM como abordaje pedagógico, Bassanezi (2002) explicita que un objetivo fundamental de la matemática que este enfoque promueve es la posibilidad de extraer una parte esencial de una situación-problema y formalizarla en un contexto abstracto donde se logra una economía del lenguaje. De esta forma, la matemática puede ser vista como un instrumento intelectual que posibilita sintetizar situaciones empíricas que están en muchos casos atravesadas por un gran número de variables.

Posicionada en esta misma línea, Esteley (2014) señala que hablar de MM como abordaje pedagógico requiere llevar adelante en el aula diversidad de acciones que involucran el empleo y/o la producción de modelos matemáticos por parte del estudiantado y la puesta en juego de actividades características de la comunidad matemática.

Además, en las diversas perspectivas de MM y particularmente al considerar la noción de MM como abordaje pedagógico, se emplea una representación esquemática del proceso de modelización de índole matemático que se utiliza como inspiración y organización del desarrollo de la clase de matemática. En la literatura de investigación hay diversas variantes del ciclo de MM (Doerr et al., 2017). Específicamente, en nuestra investigación tomamos el ciclo propuesto por Esteley (2014) que se configura a partir de una adaptación del que se presenta en Bassanezi (2002).

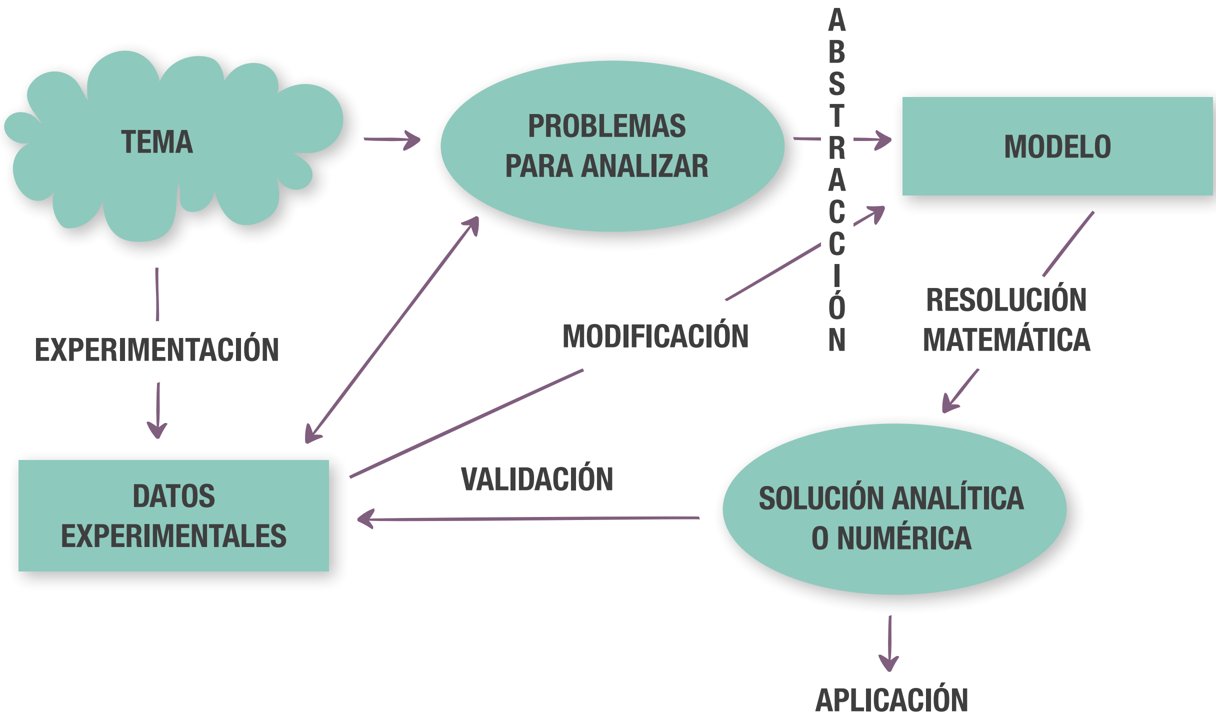


FIGURA 2 | *Esquema de proceso de MM, adaptación gráfica del esquema original presentado en Esteley (2014), p.54*

En el esquema se explicitan fases: selección del tema, delimitación de problemas a estudiar, análisis, recolección y/o producción de datos experimentales, construcción de modelos y solución analítica o numérica; y subprocesos del proceso de MM: experimentación, abstracción, resolución, validación, modificación y aplicación.

En las propuestas educativas en las que se apela a este esquema se comienza el proceso de MM a partir de la selección de un tema y de la formulación de problemas, ambas acciones pueden estar a cargo de estudiantes y/o del/de la docente y/o investigadoras/es. Al respecto, Esteley (2014) al analizar en el marco de un contexto educativo los roles que toman las aplicaciones, la realidad y la modelización, enfatiza en el potencial de emplear este esquema en el aula de matemática tanto cuando se trabaja con proyectos en los que el o la docente elige un tema y formula el problema, como cuando los temas son seleccionados por el estudiantado. En ese último caso, son las/os estudiantes quienes formulan uno o varios problemas en el marco de los temas escogidos y se considera que el proceso de MM se lleva adelante por completo o que se desarrolla una MM activa (Muller y Burkhardt, 2007). Enfatizamos que también consideramos la posibilidad de que las acciones anteriores se encuentren a cargo de investigadores/as.

A su vez, destacamos, tal como mencionan Borromeo Ferri y Lesh (2013), que en el marco del proceso de MM se debe abrir la oportunidad para que el estudiantado formule nuevas preguntas, ya sean propias de la ciencia matemática y/o ligadas al tema/problema en estudio.

En el esquema se evidencian subprocesos del proceso de MM que describimos a continuación, tomando aportes de Bassanezi (2002), Blomhøj y Højgaard (2003) e interpretaciones propias:

- Experimentación: se indaga e investiga en pos de obtener datos que se emplean para comprender y/o modificar el problema y producir y/o modificar el modelo. Los datos obtenidos resultan un factor fundamental durante el desarrollo del ciclo de MM cobrando especial relevancia en el subproceso de validación. Además, en las acciones llevadas adelante en este subproceso se enfatiza el aspecto empírico de la matemática.
- Abstracción: se seleccionan factores a considerar y variables esenciales, y se establecen vínculos entre ellos/as. En general, en el marco de este subproceso se emplea el lenguaje natural.
- Resolución: se produce un primer modelo. En general, consiste en sustituir el lenguaje natural por lenguaje o expresiones matemático/as. El estudio del modelo depende de su complejidad y de los sujetos involucrados en el proceso. A su vez, si los datos no son suficientes, pueden crearse métodos y producirse nuevas búsquedas, o el modelo debe ser modificado.
- Validación: se decide por la aceptación o reformulación del o los modelo/s producido/s. En general, se lleva a cabo mediante: comparación entre el modelo y los datos o información disponibles o emergentes, conocimientos matemáticos disponibles o emergentes (propiedades, teoremas, definiciones), la utilización de conocimientos de distinta índole derivados de la experiencia personal, entre otros. El grado de aproximación y formalización deseado será un factor importante en las instancias de decisión y depende en gran medida del nivel académico en el que se encuentran las/os estudiantes y/o las esferas de actividad matemática en las que se involucran.
- Modificación: se realizan modificaciones en la producción realizada, en caso de que el primer modelo no sea aceptado por quien o quienes trabajan en el estudio. Cuando eso ocurre, se deben modificar las variables o factores, o las posibles relaciones reconocidas entre ellas/os, lo que conduce a una modificación del modelo original.

- Aplicación: se otorga posibilidad para que los modelos construidos se puedan emplear en otros momentos o situaciones. La modelización eficiente o eficaz posibilita realizar previsiones, tomar decisiones, explicar y entender la cuestión sobre la que se está trabajando.

Enfatizamos algunas cuestiones o aspectos del trabajo con procesos de MM que pueden no hacerse evidentes en el esquema y resultan fundamentales para comprenderlos en profundidad. Entre tales aspectos se destacan: la no linealidad del proceso, el papel de múltiples modelos preexistentes que se movilizan en el marco del proceso, los aspectos sociales y críticos de la modelización y el papel de los medios con los que se trabaja (Borba y Villarreal, 2005; Doerr et al., 2017; Sevinc y Lesh, 2018). Además, se enfatiza que el/la profesor/a debe estar preparado o dispuesto para crear y gestionar estos procesos que enfrentan diversas transformaciones y de las cuales no puede prever con anterioridad el modelo final (Bonotto, 2007).

A su vez, este abordaje concibe al proceso de MM como objeto de enseñanza o reflexión en sí mismo. En este sentido, guarda vínculos con la perspectiva de modelización como contenido en sí mismo propuesta por Julie y Mudaly (2007), sin excluir un trabajo próximo a la modelización como vehículo. En sintonía con la idea de Lewis (2021) pensamos el desarrollo del proceso de MM como un puente entre la modelización como contenido y como vehículo, a fin de adecuar el trabajo docente a las exigencias de la institución o de los diseños curriculares vigentes que enmarcan el trabajo docente. De este modo, se puede lograr nutrir el desarrollo de la MM en el estudiantado como contenido y apuntar también a la consecución de objetivos curriculares a través de la formalización de los conocimientos matemáticos deseados; en otras palabras, se navega entre estos dos enfoques epistemológicos para desarrollar la capacidad de llevar adelante la MM por el estudiantado.

Las consideraciones mencionadas evidencian el potencial de llevar adelante procesos de MM como abordaje pedagógico en el aula que redundan en la puesta en juego de actividades características del quehacer matemático, pero también presentan un gran desafío para estudiantes, profesoras/es y todos los actores que forman parte del sistema educativo.

2.2.3. | PRODUCCIÓN DE MODELOS EN EL MARCO DE PROCESOS DE MM

Al poner en juego la MM como abordaje pedagógico en el aula de matemática se potencia la motivación del estudiantado y la constitución de una cultura o visión adecuada de la matemática (Villa-Ochoa et al., 2017) que redunda en la movilización y/o producción de modelos. A su vez, en esta investigación concebimos a la matemática como ciencia de los modelos (Davis y Hersh, 1989; Devlin, 1994) y en este sentido, interesa realizar discusiones con respecto a la expresión modelo matemático.

A partir de un estudio bibliográfico extenso apreciamos que en diversas caracterizaciones de la noción de modelo matemático y en investigaciones que reportan vivencias educativas en las que se utiliza la MM, parece enfatizarse o predominar el empleo y creación de modelos que involucran símbolos matemáticos y expresiones aritméticas y/o algebraicas (Bassanezi y Biembengut, 1997; Stillman et al., 2017; Borromeo Ferri, 2018; Stillman et al., 2020). A su vez, desde una perspectiva general, Ernest (1991) considera los modelos como herramientas desarrolladas por el hombre para proveer una descripción viable de la realidad social y de la naturaleza, cumpliendo la doble función de medio para pasar información y de dispositivo para pensar.

En esta investigación tomamos una perspectiva amplia de modelo que considera la posibilidad de creación de diversos tipos de modelos. Para ello se toma como referencia el enfoque propuesto por Gazzeta (1989) quien realiza un estudio profundo sobre el uso de la noción de modelo en el ámbito educativo, y específicamente, de la educación matemática. Esta autora señala que la expresión modelo matemático en las investigaciones en educación matemática no siempre se hace explícita. Concibe que los modelos matemáticos se pueden encontrar desde el inicio del desarrollo de la matemática y pueden tomar formas diversas, como ser, conceptos, teoremas, representaciones geométricas, expresiones algebraicas, etc. A su vez, Gazzeta (1989) recupera la caracterización de modelo propuesta por Pinker (1981), a saber:

> El sistema[17] M es un modelo del sistema O (original), para un cierto fin, si M puede ser un sustituto de O para ese fin y si el estudio de M, en ese contexto puede producir resultados que son significativos para O. (p.21).

Tal como se muestra, se determina la puesta en juego de una relación entre una determinada problemática o situación y el modelo que esclarece esta última y resulta eficaz y significativa para abordar la problemática o situación.

A su vez, Gazzeta (1989) en el marco de su investigación propone una categorización de diferentes tipos de modelos, determinando modelos matemáticos concretos y abstractos. Los primeros se constituyen a partir del empleo de objetos concretos para sustituir algún otro objeto de investigación, por ejemplo, una representación en material concreto de un cuerpo geométrico tridimensional. Los segundos son aquellos que describen por medio de elementos gráficos o símbolos matemáticos de naturaleza definida, su manipulación tiene un gran potencial para la introducción de nuevos conocimientos, por ejemplo, el concepto de círculo.

Además, retomamos la noción propuesta sobre modelo matemático por Biembengut y Hein

[17] Conjunto de cosas que relacionadas entre sí ordenadamente contribuyen a determinado objeto (Real Academia Española, s.f.).

(2004): “Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión” (p.106). Esta caracterización de modelo matemático se encuentra relacionada con lo planteado por Gazzeta (1989).

A partir de las consideraciones realizadas, en esta investigación consideraremos que un modelo matemático emergente de un proceso de MM como abordaje pedagógico es un objeto matemático abstracto o un objeto concreto vinculado con un objeto matemático abstracto que otorga información y se constituye como respuesta provisoria o definitiva al problema en estudio otorgando resultados significativos o esclareciendo, de algún modo, la problemática en estudio.

Cabe mencionar que al hablar de objetos matemáticos abstractos reconocemos importantes discusiones epistemológicas vinculadas tanto con la ontología matemática, como con las relaciones entre determinados objetos físicos y abstractos (e.g. Borge, 2015). Sin dejar de reconocer la profundidad y valor de ese tipo de discusiones, en esta investigación no profundizamos esta cuestión, sino que tomamos aportes de Hersh (1998) que se vinculan principalmente con lo planteado por la perspectiva del realismo científico (Borge, 2015). Hersh (1998) señala que al trabajar en matemática se emplean objetos que poseen, en cierto sentido, existencia real y objetiva. A modo de ejemplo, explica que es incuestionable que en una mano se tienen cinco dedos, considerando que en este contexto “cinco” tiene un significado físico, en nuestro caso con este tipo de representaciones se nombran objetos concretos vinculados con un objeto matemático abstracto. También hace evidente que, al referirse a números naturales, por ejemplo, al tomar un número muy grande es cuestionable el significado físico que tiene el mismo, y afirma que los números naturales que describen objetos físicos no son los mismos que los números naturales en matemática pura. En este sentido, cuando referimos a objetos matemáticos abstractos referimos al objeto en el marco de la matemática pura, más allá del vínculo con determinados objetos físicos, por ejemplo, teoremas, propiedades, definiciones, etc.

2.2.4. | REFLEXIONES Y PERSPECTIVAS RESPECTO A MM

Destacamos que en esta investigación adoptamos como referencia fundamental la noción de escenarios[18] de MM propuesta por Esteley (2014). Tal escenario:

> [se] caracteriza por la presencia [en o fuera del aula] de un conjunto de espacios, situaciones, circunstancias, materiales, acciones e interacciones que dan sentido al

[18] La noción de escenario se profundiza en la tercera parte.

> proceso [de modelización matemática] y con ello, transforma ese conjunto en una experiencia cuyo fin es llevar al aula la modelización como abordaje pedagógico (p. 99).

A su vez, teniendo en cuenta los aportes mencionados, consideramos que se emplea la MM como abordaje pedagógico cuando se organiza el trabajo en el aula de matemática en torno a las fases que intervienen en un proceso de MM, se ponen en juego actividades que caracterizan a la ciencia matemática y se considera el propio proceso como un objeto de enseñanza y de aprendizaje. En términos generales, en este abordaje se espera que el estudiantado experimente en clase un proceso de MM (Bassanezi, 2002) poniendo en juego acciones e interacciones para promover la producción de sentidos.

Destacamos que la perspectiva de Bassanezi (2002) presenta tres consideraciones que se encuentran en sinergia directa con la posición que adoptamos en esta investigación. En primer lugar, el rol predominante de la experimentación. En segundo lugar, el concebir el desarrollo de procesos de MM en el marco social donde las interacciones resultan fundamentales para el avance del proceso en búsqueda de esclarecer el problema en estudio. En tercer lugar, el esquema comienza el proceso de MM con la elección de un "tema" y no desde el mundo real como lo realizan otras/os investigadoras/es (Doerr et al., 2017), lo que consideramos posibilita pensar el "tema" desde una perspectiva amplia.

La MM en el sentido que se emplea en esta investigación posee principalmente cercanía con la corriente científico-humanista propuesta por Freudenthal. En este sentido, interesa señalar que, si bien en el trabajo realizado se acude a información u objetos reales o tangibles, no restringimos los temas y/o problemas empleados en el marco del proceso de MM a cuestiones que involucran estrictamente al mundo tangible o perceptual. Señalamos que estas afirmaciones se consideran válidas tanto para temas y/o problemas seleccionados/diseñados por profesoras/es, investigadoras/es como por estudiantes.

Esta última consideración coincide con afirmaciones realizadas en Freudenthal (1973, 1991). El autor señala que el tema y los problemas deben involucrar cuestiones representables, razonables, imaginables para los estudiantes con el fin de generar actividad matemática. En caso contrario, se limitan las oportunidades para que el estudiantado aprenda a operar dentro de la matemática misma. A su vez, Bassanezi (1994) afirma que un estudio en el marco de la matemática puede tener una importancia intrínseca independientemente de su aplicación directa.

En este sentido, reconocemos que en general en el campo de la educación matemática suele establecerse una relación directa entre "MM" y "mundo real extra-matemático" (Kaiser, 2020). Sin embargo, en el marco contextual-institucional en el que están inmersas/os futuras/os profesoras/es y en el que se sitúa este estudio, tomamos una visión amplia que involucra también cuestiones de la propia matemática en el marco del mundo real. En sinergia con Hersh

(1998), consideramos que hay tres tipos de realidades, mental, material y social, siendo las matemáticas parte de la "realidad social". Esta posición amplía las fronteras y posibilidades de empleo de MM como abordaje pedagógico. Esta ampliación resulta particularmente relevante para resolver algunas restricciones institucionales (Barquero et al., 2018) a fin de trabajar con MM en ciertos cursos de matemática superior para futuras/os profesoras/es. A modo de ejemplo mencionamos que, a los grupos de futuras/os profesoras/es, se les otorga la posibilidad de trabajar algunas temáticas vinculadas con lo propuesto en el curriculum apelando a la MM. De ese modo se franquean las restricciones de gran demanda de tiempo producidas en MM más abiertas dado que, en este último caso, en general el tiempo demandado es mayor.

A su vez, la MM como abordaje pedagógico en el sentido que se emplea en esta investigación toma aportes de la modelización educativa, contextual y de elicitación de modelos y cognitiva, puesto que tenemos objetivos vinculados con el aprendizaje de geometría euclídea espacial, empleamos problemáticas simples vinculadas con las trayectorias y vivencias previas del estudiantado con el fin que desarrollen constructos matemáticos significativos en el marco de un curso de geometría euclídea espacial para futuras/os profesoras/es y enfatizamos en la apropiación del propio proceso de MM considerándolo como una competencia a desarrollar. Interesa destacar que la producción matemática realizada en este tipo de trabajos y las propias reflexiones con respecto al proceso de MM permiten también desarrollar aptitudes vinculadas con el comportamiento crítico frente a la propia matemática y a las futuras actividades profesionales como profesoras/es de matemática.

Consideramos el trabajo con procesos de MM como un contenido a abordar en sí mismo (Julie y Mudaly, 2007) colocando en primer plano el análisis del proceso de MM del estudiantado y la promoción de los procesos de pensamiento matemático (Kaiser y Sriraman, 2006; Kaiser, 2020). En términos de Blomhøj y Højgaard (2003) se trata de integrar los modelos y la MM en la enseñanza de la matemática como medio para enseñar matemática y como una importante competencia en sí misma.

CAP III

SENTIDOS, VALIDACIÓN Y PROCESOS DE PRODUCCIÓN DE DEFINICIONES

3.1. | LA VALIDACIÓN COMO PARTE FUNDAMENTAL DEL TRABAJO MATEMÁTICO

La validación en matemática es foco en diversos trabajos de investigación en educación matemática y un subproceso del proceso de MM que posee especial relevancia (Blum y Leiß, 2006). Teniendo en cuenta dicha consideración y que dos de nuestros objetivos de investigación focalizan en validación, recuperamos en esta sección perspectivas que consideramos relevantes en la educación matemática al abordar en investigación cuestiones vinculadas con la acción de validar, aportes respecto a validación en el marco de MM y modos en que esta se lleva adelante. Finalmente explicitamos la perspectiva adoptada en este estudio.

3.1.1. | PERSPECTIVAS Y AVANCES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA RESPECTO A LA NOCIÓN DE VALIDACIÓN EN LA CLASE DE MATEMÁTICA

El término validación en el diccionario de la Real Academia Española se emplea para referenciar, principalmente, la acción de dar fuerza o firmeza a algo (Real Academia Española, s.f.). En los diseños curriculares de la provincia de Santa Fe (Argentina) para el ciclo básico y orientado de la educación secundaria, se explicitan dos posibilidades, dado que es “entendida como la decisión autónoma [de la/del] estudiante acerca de la verdad o la falsedad de su respuesta” (Diseño Curricular de Santa Fe para Ciclo Básico de la Educación secundaria, 2014, p.40). Es decir, en dichos documentos se emplea cuando se hace referencia a la acción de exponer razones por las cuales una determinada afirmación debe aceptarse o refutarse. También se emplea en el ámbito científico de diferentes modos, por ejemplo, en ciencias experimentales, metodología de la investigación, etc. En matemática y educación matemática resulta de gran relevancia y se utiliza con diversas acepciones en el ámbito de las investigaciones en educación matemática (Herbst y Balacheff, 2009).

Específicamente, en el ámbito de la educación matemática, se emplean diferentes términos que se vinculan con la acción de validar, a modo de ejemplo mencionamos: razonamiento, prueba, argumentación, explicación, justificación, evaluación, demostración. La diversidad terminológica y el empleo que se hace, tal como señala Balacheff (2002), puede producir confusión y ser un obstáculo para futuras investigaciones si no se hace evidente la perspectiva o mirada que se adopta con respecto a dichos términos en las investigaciones.

Señalamos, tal como lo realizamos en el capítulo I, que encontramos una relación estrecha entre prueba y validación desde los inicios de la discusión con respecto a esta cuestión en el ámbito de la educación matemática. Philip (1986) afirma que en la validación reside la verdad de la matemática y la prueba es el objeto matemático que tiene como propósito la validación de los enunciados. Incluso, en diversos trabajos de investigación a nivel nacional se emplean ambos términos como sinónimos o sin realizar una discusión explícita con respecto a la perspectiva adoptada (e.g. Mantica y Renzulli, 2014; Cruz et al., 2016).

Reid y Knipping (2010) plantean que las/os estudiantes de matemática en la actualidad pueden considerar que el avance de esta ciencia se logra por la acumulación de conocimiento, porque sus vivencias con la prueba los lleva a considerar que esta palabra mantiene el mismo significado desde los tiempos de Euclides. Sin embargo, tiene un carácter cultural (Wilder 1981, citado en Reid y Knipping, 2010). Además, las pruebas no siempre cumplen con la definición formalista planteada por Aristóteles y esto puede ser una fuente de confusión para el estudiantado de matemática que debe comprender y realizar pruebas “formales” (Moore 1990, citado en Reid y Knipping, 2010).

Reid y Knipping (2010) retomando aportes de Lakatos señalan que, incluso, la presentación de geometría realizada por Euclides (y sus seguidores) puede complicar la forma de considerar la naturaleza del descubrimiento matemático, puesto que en realidad no se focaliza especialmente en la formulación de conjeturas y contraejemplos. Al respecto, puntualizan que la prueba euclidiana comienza con un teorema cuando en realidad el análisis de la prueba concluye con él y que esta forma de ver la prueba, desde la perspectiva euclidiana, atraviesa la propia historia de la prueba matemática y ha tenido un impacto significativo en su enseñanza. Es relevante señalar que la perspectiva euclidiana propone una organización de los conocimientos siguiendo un orden lógico (Boyer, 1986), tal que cada afirmación verdadera es un axioma, una definición o bien una propiedad cuya verdad se deduce de axiomas, definiciones u otras propiedades enunciadas previamente.

Lo anteriormente mencionado muestra discusiones con respecto a validación presentes en el ámbito de la investigación en educación matemática, tanto a nivel nacional como internacional. Destacamos que, entendiendo el lugar preponderante de la validación en matemática y específicamente en la MM y sus vínculos con la prueba, reconocemos algunas perspectivas que se pueden adoptar al hablar de validación, que no resultan dicotómicas y que se encuentran presentes en investigaciones.

- Validación en el marco de la teoría de situaciones didácticas en la que su principal referente es el investigador Guy Brousseau. Brousseau (2007) desarrolla esta teoría a fin de ofrecer medios o contribuciones para mejorar o regular la enseñanza de la matemática de un modo sustentado. Sadovsky (2005) señala que la teoría de situaciones didácticas “propone un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar” (p.17). Brousseau (2007) determina cuatro situaciones que organizan la puesta en práctica de problemas matemáticos en el aula de matemática, entre ellas se encuentra la situación de validación, en la que el estudiantado debe comunicar información y convencer a las/os demás de la verdad de su enunciado a partir de razones que se ponen a prueba, debaten y acuerdan. En esta situación el/la estudiante debe establecer razones “en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración” (p.23).

- Procesos de validación y pruebas teniendo en cuenta aportes de Balacheff (2000). Este autor, ampliamente reconocido en el ámbito internacional por sus estudios vinculados con validación, pruebas y demostración, desde una perspectiva y estudio de índole didáctico epistemológico, propone una caracterización de razonamiento y procesos de validación. Específicamente señala que la palabra razonamiento se emplea “para designar la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información” (p.13). Y considera que con procesos de validación se refiere a la actividad de razonar cuando (el razonamiento) tiene “como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración). (p.13)”. Balacheff (2000), considera que las pruebas pueden utilizarse para establecer la validación de aseveraciones, y distingue entre pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales. Las primeras son prácticas y recurren a la acción real, a la experiencia o a la ostensión y las segundas se apoyan en la formulación de propiedades y relaciones que se ponen en juego, por lo que se alejan de la acción real. A su vez, interesa destacar que Balacheff (2019) realiza una distinción con respecto a los modos de validación empleados en relación con las personas involucradas en el marco de la clase de matemática, dado que al entrar en juego lo social se deben establecer consensos (en general, entre profesoras/es y estudiantes) con el fin de determinar qué será aceptado o no en la comunidad en particular en la que se está discutiendo.

- La perspectiva de pruebas y refutaciones adoptada por el epistemólogo Lakatos que pone énfasis en el establecimiento y la puesta en juego de argumentos y contraejemplos para descubrir nociones matemáticas. Este filósofo y matemático refiere a un proceso que denomina “análisis de prueba”, en el cual la prueba permite analizar una conjetura establecida, el proceso de análisis de la prueba no se trata principalmente de probar la conjetura establecida, sino más bien de mejorar las definiciones y los axiomas en los que se debe basar (Reid y Knipping, 2010). Lakatos (1986) señala que la matemática informal y cuasiempírica no se desarrolla “mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino que lo hace mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones” (Lakatos, 1986, p. 20). Al respecto, Umland y Sriraman (2020) afirman que la posibilidad de falibilidad de la prueba presente en la perspectiva de Lakatos (ya sea debido a un error humano o inconsistencias en un sistema axiomático), posibilita considerar que la matemática y particularmente las pruebas se pueden mejorar, arreglar o hacer más rigurosas y los sistemas axiomáticos se modifican para resolver inconsistencias. Desde esta perspectiva, se sugiere que la validación matemática puede considerarse con niveles sucesivos de formalizaciones (Umland y Sriraman, 2020). Más aún, Davis y Hersh (1989) al analizar cuestiones vinculadas con la matemática “informal” desde la teoría de Lakatos afirman que, con demostración, no se refiere a un proceso de encadenamiento irrompible en el que desde axiomas se deducen teoremas, sino a la puesta en juego de explicaciones y justificaciones en relación con una determinada conjetura que se establece con mayor fortaleza al establecerle presión empleando contraejemplos.
- Validación en el marco de los procesos de MM. En general, los trabajos que abordan los procesos de MM hacen referencia al subproceso de validación cuando se establecen razones por las cuales aceptar o refutar el modelo que da respuesta al problema (Bassanezi, 2002). Específicamente en la sección 2.2.2. cuando se propone una caracterización de MM como abordaje pedagógico se realiza una primera reflexión con respecto a este subproceso. Destacamos que el empleo del término validación en el marco de estos procesos resulta especialmente relevante porque se ponen en escena datos e información que no siempre resultan propios de la matemática en cuestión, por lo cual la idea de demostración o prueba intelectual tradicional en el marco de un sistema axiomático deductivo muchas veces se diluye.

Las perspectivas que recuperamos anteriormente respecto a validación y/o prueba muestran algunos modos en que se consideran estas nociones en la educación matemática. Coincidimos con Durand-Guerrier (2020) en que examinar el valor de verdad de afirmaciones, participar en procesos de prueba y emplear un leguaje matemático formal son cuestiones complejas incluso para estudiantes avanzados.

Asimismo, interesa destacar, tal como plantea Hanna (2020), que el trabajo con pruebas informales puede producir confianza entre quienes se involucran con ese trabajo, y que la validez de las mismas se puede mejorar en el marco del proceso social en el cual estas pruebas se examinan y aceptan. Esta autora explicita que incluso, la mayoría de las pruebas matemáticas aceptadas consisten en argumentos válidos que pueden no tener una formalización sencilla. Así también, señala que, si se tiene como objetivo en los procesos de enseñanza y de aprendizaje enseñar al estudiantado cómo formular, analizar y probar conjeturas y desarrollar y justificar argumentos y pruebas matemáticas, se deben proporcionar diversidad de herramientas, incluyendo el trabajo con pruebas formales e informales.

3.1.2. | IMPORTANCIA DE LA VALIDACIÓN EN PROCESOS DE MM

En esta investigación focalizamos en procesos de validación en el marco de procesos de MM. Por este motivo interesa reflexionar con relación a esta cuestión. Destacamos específicamente que en el ICME 14 (2021), el grupo de discusión 16 (razonamiento, argumentación y prueba matemática en el ámbito de la educación matemática) ya nombrado en el capítulo I, señala que resulta de interés la realización de estudios que abordan cuestiones vinculadas con razonamiento, argumentación y demostración en la enseñanza y aprendizaje de la MM. Lo explicitado resulta relevante porque muestra interés internacional en reflexionar sobre la validación en el marco de procesos de MM.

Consideramos que el subproceso de validación es fundamental en el marco de los procesos de MM, dado que en el mismo las/os estudiantes toman decisiones respecto a la aceptación, modificación o refutación del modelo. Doerr et al. (2017) recuperan diversos esquemas o representaciones del proceso de MM en los que se hacen evidentes los distintos subprocesos, encontramos que en relación con la validación se emplean tres términos: interpretación, evaluación y validación. Sin embargo, en general, predomina el empleo de este último.

Hankeln (2020) señala específicamente que en el proceso de MM la acción de validar resultados, modelos y/o supuestos suele presentar complicaciones y dificultades en el estudiantado. De modo análogo, Blum (2007) identifica que el subproceso de validación de una solución encontrada presenta importantes desafíos para quienes se involucran en el proceso y que es esencial en el marco del proceso de MM, dado que las investigaciones empíricas ponen de manifiesto que se torna casi imposible encontrar procesos independientes de validación en las actividades de MM de las/os estudiantes.

En esta línea y en relación con las cuestiones antes mencionadas, Blum y Leiß (2006) expresan que el subproceso de validación requiere reflexiones sustanciales sobre la producción realizada, e incluso, en ocasiones el aceptar la necesidad de una segunda puesta en juego del proceso completo de modelización considerando, entre otros, variables, datos, información, factores, adicionales. Los autores destacan que en este subproceso se requiere más reflexión desde una metaperspectiva sobre el propio proceso de MM que en el resto de los subprocesos, puesto que se deben poner de manifiesto acciones de autorregulación, autoevaluación y de monitoreo del trabajo completo.

Más aún, Blum y Kaiser (1997, citado en Maaß, 2006) señalan que al llevar adelante la validación es importante analizar críticamente y reflexionar en torno a los modelos producidos, cuestionarlos e incluso reflexionar con respecto a otras formas posibles de abordar la problemática, de modo tal de decidir y analizar si se debe aceptar el modelo, modificar parte de este o volver a comenzar el proceso de modelización.

Lo expresado pone en escena el lugar preponderante de la validación en el desarrollo de procesos de MM. Interesa reflexionar y avanzar sobre una caracterización de validación específicamente en el marco de los procesos de MM y los modos en que se lleva adelante.

3.1.3. | MODOS DE VALIDACIÓN EN PROCESOS DE MM

Recuperamos la perspectiva adoptada por investigadoras/es que consideramos referentes a nivel internacional que abordan la MM como abordaje pedagógico, noción que empleamos en la presente investigación.

Borromeo Ferri (2018) señala que en el subproceso de validación se comparan: resultados reales (el problema tomado de la realidad que puede estar representado a través de imágenes o texto), su representación mental (asociación mental realizada por la persona que se involucra con el problema, entre su propia experiencia y la comprensión del problema), el modelo real (simplificación del problema inicial encontrando la matemática en juego que se emplea para resolverlo) y las suposiciones que se hicieron inicialmente. La autora destaca que la validación es sumamente importante y debe ser guiada por el/la profesor/a, ya que es fundamental que el estudiantado cuestione el resultado matemático en función del problema.

Blomhøj y Højgaard Jensen (2003) destacan que durante el subproceso de validación se lleva adelante la evaluación de la validez del modelo matemático por comparación con datos o con conocimiento basado en nociones teóricas, como ser, axiomas, propiedades, etc. A diferencia de Borromeo Ferri (2018) no hacen explícito el contraste con las representaciones mentales y las hipótesis establecidas. Sin embargo, ambas consideraciones pueden vincularse con aportes de Blomhøj (2004), dado que el autor hace referencia a la validación a partir de experiencias personales o compartidas. A su vez, interesa destacar que tanto Blomhøj y Højgaard Jensen (2003) como Blomhøj (2004) señalan que es importante que se produzca una validación en doble sentido: por un lado, para validar el modelo en sí mismo; por otro lado, para validar el proceso de MM completo incluyendo cuestionar el alcance y la validez del uso del modelo para otras situaciones. Esta última cuestión se vincula con el subproceso de aplicación en términos de Bassanezi (2002).

En relación con el subproceso de validación Bassanezi (2002) señala que uno de los objetivos principales del trabajo con procesos de MM es el producir y validar modelos y que mientras más complejo resulta el modelo producido más dificultad posee la validación del mismo. Este autor afirma que en este subproceso se decide por la aceptación o no del modelo y considera que en la validación se contrastan los modelos, las hipótesis formuladas y los datos empíricos. Además, pone de manifiesto que son muchos más los factores que influyen en la aceptación o no del modelo, por ejemplo, objetivos y recursos disponibles, y señala que en diversas oportunidades el contraste con datos empíricos no es suficiente. También enfatiza que el grado de aproximación deseado será un factor importante en el momento de validación siempre que el modelo sea simple y útil para representar razonablemente la situación y dar respuesta a la problemática.

A su vez, Doerr et al. (2017) destacan que es importante que en los procesos de MM se exceda la creación de modelos que se validan por comparación de datos empíricos, con el fin de avanzar hacia actividades que incluyan explicaciones, el uso de medios computacionales e incluso consideraciones políticas y sociales. En esta línea Saeki et al. (2017) realizan una investigación en la que se fomenta el pensamiento crítico de estudiantes que validan modelos empleando hechos históricos, artísticos y religiosos potenciando la toma de decisiones. En concordancia, Niss (2015) hace referencia a modelos que no siempre se pueden validar empíricamente, como ser los que involucran políticas y finanzas, considerando el potencial que implica la puesta en juego de una discusión focalizada en preguntas críticas por parte del estudiantado e incluso decisiones que se basan finalmente en consideraciones matemáticas o estadísticas.

De modo general, tal como mostramos, existen diversas consideraciones respecto a los modos de concebir la validación en los procesos de MM. A su vez, encontramos que diversas/os investigadoras/es en educación matemática coinciden en la importancia que posee este subproceso para la producción y aceptación del modelo, siendo en general, uno de los subprocesos con mayor importancia. Tal como señalan Frejd y Bergsten (2018) la validación del modelo es extremadamente difícil y requiere de una negociación entre personas o comunidades involucradas en el marco de cada proceso de MM.

3.1.4. | REFLEXIONES Y AVANCES PARA PENSAR LA VALIDACIÓN EN ESCENARIOS DE MM EN CONTEXTOS DE FORMACIÓN DOCENTE

En general y en función de lo desarrollado en esta sección (3.1) enfatizamos que, si bien reconocemos diversidad terminológica en relación con el uso del término "validación" en el marco de procesos de MM, decidimos emplear dicho término en esta investigación para designar al subproceso en el que se decide por la aceptación, modificación o refutación del o los modelo/s producido/s.

Concebimos que el término validación resulta adecuado por emplearse en diversas investigaciones que abordan específicamente procesos de MM y por su potencial empleo en la educación matemática, dado que en general no requiere estrictamente la puesta en juego de una demostración formal (Umland y Sriraman, 2020).

Señalamos que tanto los aportes de Balacheff (2000), en los que se considera que la validación se puede llevar adelante empleando pruebas pragmáticas o intelectuales, como la perspectiva de Lakatos (1986), en la que el establecimiento de pruebas y refutaciones conducen al descubrimiento y revisión de la propia matemática, pueden ponerse en juego en el marco de procesos de MM.

En ese sentido, retomando los aportes de las/os autoras/es citados, consideramos que se pueden validar modelos a partir de: análisis realizados por comparación entre el modelo y los datos o informaciones disponibles o emergentes durante el proceso de MM, empleo de conocimientos matemáticos disponibles o emergentes (propiedades, teoremas, definiciones), demostraciones y/o pruebas diversas, contraste con hipótesis formuladas en el marco del desarrollo del proceso de modelización, utilización de conocimientos de distinta índole derivados de la experiencia personal o compartida, empleo de conocimientos propios de áreas no matemáticas como ser historia, artes, economía, física, religión, política, etc.

Destacamos que el grado de aproximación y formalización deseado en la validación será un factor importante en momentos de decisión y dependerá en gran medida del nivel académico en el que se encuentran las/os estudiantes, las esferas de actividades matemáticas en las que se involucran y la comunidad de práctica (Goos, 2020) de la que forman parte.

Finalmente, enfatizamos dos cuestiones. Por un lado, consideramos que en la formación de profesoras/es en matemática es importante que se lleven adelante vivencias educativas vinculadas con el trabajo matemático que posibiliten la puesta en juego de diversos modos de validación, tanto formales como informales (Hanna, 2020). En ese sentido, las vivencias educativas de MM posibilitan el empleo de validaciones que no resultan estrictamente demostraciones formales, y con potencial para favorecer otros tipos de reflexiones. Lo antes mencionado resulta relevante en el contexto local, ya que en las escuela secundaria y futuro ámbito de trabajo de las/os futuras/os profesoras/es, en general, no se ponen en juego demostraciones formales (en el sentido de Balacheff, 2000). Por otro lado, siguiendo la perspectiva de Lakatos, consideramos que incluso en el marco de procesos de MM en el subproceso de validación se puede poner de manifiesto la necesidad de una revisión de las nociones matemáticas que se conocen hasta el momento.

3.2. | SENTIDOS ATRIBUIDOS EN CONTEXTOS EDUCATIVOS

La noción de sentido ocupa un lugar predominante en nuestra investigación, dado que focalizamos en producción de sentido en torno a dos objetos, que los consideramos y estudiamos teniendo en cuenta el campo educativo y específicamente perspectivas de la didáctica de la matemática, MM y validación.

Reflexionamos con respecto a sentido luego de avanzar en torno a MM y validación, por lo que, si bien el sentido conduce el análisis en nuestra investigación, tal análisis se realiza en el marco particular de formación de futuras/es profesoras/es en el entorno de una vivencia de MM que delimita hasta dónde se avanza en esta mirada teórica.

Teniendo en cuenta lo mencionado en esta sección realizamos un modesto avance con respecto a la perspectiva de sentido, explicamos el alcance de las nociones de vivencia y experiencias y sus vínculos con la producción de sentido y finalmente reflexionamos con relación a los constructos teóricos recuperados.

3.2.1. | SENTIDO Y SIGNIFICADO: PERSPECTIVAS ACTUALES

Estudios acerca de la producción/atribución de sentido en los procesos de enseñanza y de aprendizaje se hacen presentes tempranamente en un gran número de investigaciones en educación (e.g. Dewey, 1958; Carter, 1993; Lin y Cooney, 2001; Larrosa, 2003).

En particular, encontramos que en el campo de la educación matemática al remitir a producción de sentido o significado de nociones matemáticas (principalmente) se encuentran distinciones en perspectivas adoptadas. Scaglia y Kiener (2015) consideran tres:

- El sentido como las razones de ser de los saberes en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). Se vincula con la atribución de sentido teniendo en cuenta que los saberes matemáticos son obras que tienen una o varias razones de ser, que motivaron su creación y su uso (Chevallard, 2013). Esta teoría hace referencia al sentido de determinadas nociones matemáticas desde un enfoque matemático y en el marco de dicha ciencia.

- La construcción del sentido de un conocimiento matemático desde la teoría de situaciones didácticas. Esta perspectiva involucra necesariamente el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la matemática, puesto que considera interpretaciones y producciones del estudiantado. Específicamente, Brousseau (1998, citado en Scaglia y Kiener, 2015) hace referencia a la "construcción del sentido de un conocimiento a partir de la interacción dialéctica" (p. 42) de el/la "estudiante con las situaciones problemáticas, en las cuales anticipa y finaliza sus acciones, retoma conocimientos anteriores, los revisa, modifica, completa o rechaza para formar nuevas concepciones" (p. 42).

- Significado de la acción desde la educación matemática crítica, donde su principal referente es Skovsmose (Valero y Skovsmose, 2012). En esta teoría se discute en torno al significado de la acción en momentos de aprendizaje (Scaglia y Kiener, 2015). En Skovsmose (2005) se señala que el estudiantado lleva adelante acciones en el aula de matemática que no suceden en forma mecánica, sino que se constituyen a partir de diversas consideraciones, entre otras: porvenir, antecedentes, intenciones, reflexiones diversas.

Las perspectivas recuperadas involucran voces de importantes investigadoras/es de la educación matemática que, como mencionamos anteriormente, focalizan en la construcción de sentido en el aula matemática. Además, destacamos que la importancia de ofrecer oportunidades al estudiantado para que produzca sentido sobre las ideas matemáticas a fin de propiciar el desarrollo de comprensiones de conceptos matemáticos es compartida y discutida en la literatura en investigación (e.g. Scaglia y Kiener, 2015; Buenrostro y Ehrenfeld, 2019).

La atribución de sentido resulta también relevante al momento de diseñar un curriculum. Por ejemplo, la organización de los contenidos en el actual curriculum español en el área matemática para la escuela obligatoria (infantil, primaria, secundaria, 3-16 años aproximadamente) y bachillerato (16-18 años aproximadamente) se realiza en torno a los sentidos matemáticos. En este marco, Moreno et al. (2022) se refieren al sentido matemático como: "el conjunto de destrezas relacionadas con el dominio en contexto de contenidos métricos, numéricos, algebraicos, geométricos y estocásticos" (p. 173). Específicamente, con respecto a la educación secundaria consideran que "la idea de sentido matemático subraya el carácter funcional del aprendizaje de las matemáticas en esta etapa educativa y las posibilidades de establecer conexiones entre los diferentes sentidos matemáticos" (p. 173). Las/os autoras/es refieren a la importancia de que se logren desarrollar situaciones de aprendizaje en el aula propuestas por docentes que incentiven el trabajo con diferentes sentidos matemáticos en conexión y articulación.

En relación con nuestro objeto de estudio, señalamos que la relevancia actual de la producción de sentido en el aula de matemática en formación de profesoras/es y/o en experiencias de MM es compartida por investigadoras/es del campo de la educación matemática. Keazer y Menon (2015/6) realizan un estudio con futuras/os profesoras/es en matemática en el que destacan la ineludible presencia de la atribución de sentido en las clases de matemática, ya que es un hábito de pensamiento inherente a toda actividad matemática. Además, Abel et al. (2020) describen el proceso de atribución de sentido de un colectivo formado por profesoras/es de secundaria y profesoras/es universitarios en los que la MM se emplea como vehículo y contenido para el aprendizaje de la matemática. Se informa que las/os profesoras/es se involucraron en debates que las/os llevan a conciliar diversas vivencias y comprensiones sobre la MM y rescatan la riqueza de la producción de sentidos colectivos y su potencial para arrojar luz al proceso de MM.

Las/os autoras/es referenciadas/os en esta sección ponen de manifiesto algunas ideas específicas sobre atribución de sentidos a nociones, principalmente, matemáticas. A pesar de esto, consideramos que en la clase de matemática se puede producir sentidos sobre nociones que no resultan estrictamente matemáticas, por ejemplo, actividades que caracterizan al quehacer matemático (Bishop, 1991; Itzcovich,2007), situaciones que involucren ideas no matemáticas, entre otras.

En vinculación, en Argentina reconocemos investigaciones en esta línea. Por ejemplo, Esteley (2014) analiza sentidos que atribuyen tres profesoras de matemática al producir y poner en práctica actividades de MM en tres escuelas secundarias. La autora destaca como resultado el potencial del sentido colectivo producido por las profesoras y la valoración que otorgan a la colaboración como medio para sostener la enseñanza de la MM. De manera similar, en Villarreal y Esteley (2017) se estudia la producción de sentidos de dos futuras profesoras al implementar actividades de MM en sus primeras prácticas profesionales. Las autoras afirman que las futuras profesoras otorgan valor a la colaboración entre ellas para llevar adelante su práctica y el nuevo sentido producido a MM en el marco del desarrollo de este trayecto de formación en el que enseñan MM.

Al igual que las dos investigaciones referenciadas anteriormente, estudiamos atribución de sentidos a MM, y añadimos el estudio de producción de sentidos a procesos de validación específicamente. Esta consideración nos invita a recuperar, estudiar y analizar perspectivas que van más allá del campo de la educación matemática. Consideramos que algunas perspectivas sobre atribución de sentidos a nociones matemáticas pueden ser reinterpretadas y adoptadas para abordar la atribución de sentidos a nociones que no resultan estrictamente matemáticas. En esta línea, coincidimos con Radford (2006) en que el sentido es un elemento central en la formación del conocimiento que ha ganado presencia en la educación matemática.

Encontramos otras/os autoras/es que abordan la noción de sentido en educación que han estado presentes en la investigación. Por ejemplo, Charlot (2008) reflexiona con respecto al sentido sin particularizarlo en la educación matemática, si bien no posicionamos nuestra investigación desde esa perspectiva nos parece relevante. El autor señala que para que un/a estudiante se apropie del saber es necesario que "se empeñe en una actividad intelectual, y que se movilice intelectualmente. Pero, para que él [ella] se movilice, es preciso que la situación de aprendizaje tenga sentido para él, que pueda producir placer, responder a un deseo." (p. 54). A su vez, Charlot (2008) explica que el estudiantado debería tener dos deseos, el de saber y el de aprender, deseo de saber acerca de la ciencia en estudio y deseo de comprender un determinado contenido de saber y agrega que "es preciso que haya una movilización del propio sujeto en actividades determinadas, sobre contenidos determinados" (p.55). Es decir, enfatiza en el sentido que el/la estudiante otorga a la acción de aprender en el marco del aprendizaje de la matemática.

Stillman et al. (2020) discuten específicamente el valor de la producción de sentido al modelizar, tanto de nociones matemáticas como de otras nociones. Recuperando aportes de Vygotsky y otras/os autoras/es puntualizan que el sentido de cada palabra expresada por una persona es resultante de un proceso complejo en el que esa persona recupera ideas, experiencias, conocimientos, de modo que la palabra adquiere sentido acorde al contexto en el que se usa. Destacamos que apelamos a estas ideas en el marco de nuestra investigación.

Además, para explicar nuestra posición tomamos aportes de Bajtín (2000). Este autor desde una perspectiva amplia afirma que el accionar de las personas tiene sentido al ser respuesta a otro accionar anterior y considera ineludible la necesidad de atender dos cuestiones cuando se habla de sentido: la palabra como decisiva para comprender el sentido que se otorga al enunciado sobre una cuestión determinada y las relaciones con otras personas para explicar el modo en que ideas de los demás se convierten en propias en momentos de intercambios. La idea de sentido o la discusión sobre "el sentido" recuperada por Bajtín (2000) pone en evidencia a una persona en interacción con otras personas, pero también ciertas actividades con las que se involucran o esferas de actividad. Es decir, lo social en esta teoría tiene gran relevancia, pues sostiene que el pensamiento humano surge y se forma en el proceso de interacción y controversia con ideas ajenas (Bajtín, 2000).

Arán (2006) al interpretar la teoría de Bajtín hace evidente la distinción que este autor realiza entre la noción de sentido y de significado. El significado es, entre otros, neutro, unívoco, reproducible por las personas y estable. Esta noción no implica un cambio o modificación de comprensión en el marco de la interacción social. El sentido implica una interpretación y apropiación por parte de la/s persona/s involucradas, a su vez, el sentido "demanda, para su construcción, una necesaria interpelación" (p.238) de la o del intérprete. Es por esto que el sentido no es único, puede ser diferente entre personas e incluso ir modificándose y variando en una misma persona, el sentido presenta infinitud, porque siempre puede ir cambiando, es decir, el sentido fluye, no satura, siempre se pueden construir nuevos sentidos frente a una determinada cuestión.

Estas líneas o perspectivas que problematizan la producción de sentido y revalorizan la misma en los procesos de enseñanza y de aprendizaje resultan fundamentales para abordar la investigación. Finalmente, interesa destacar que coincidimos con Sadovsky (2005) en que "hay que instituir el sentido. Hay que construirlo, no es evidente, no va de suyo, no es natural" (p.10). En el marco de estas ideas, consideramos que hay que buscar modos de construir e instituir el sentido, incluso, situarlo.

3.2.2. | EXPERIENCIA Y SENTIDO: UNA RELACIÓN INDUBITABLE

En el marco de su contexto socio-histórico, Dewey (1958) afirma que, para alcanzar los fines de la educación, respecto a un individuo y a la sociedad, la misma debe basarse en experiencias. Manifiesta la importancia de entender los procesos de enseñanza y de aprendizaje como procesos continuos de reconstrucción de experiencias, y de considerar la experiencia presente como una fuerza que influye en las experiencias futuras. Este autor también enfatiza que la experiencia no ocurre en el vacío, sino que se encuentra influenciada por fuentes que dan lugar a la misma y afirma que en el ámbito educativo las experiencias que se ofrecen pueden resultar beneficiosas y/o valiosas para la formación de la/el estudiante siempre que se tenga en consideración por parte de el/la profesor/a el ambiente físico y social en el que se enmarca la experiencia.

Es decir, en la perspectiva de Dewey (1958) las nociones de situación[19] e interacción son fundamentales e indispensables para comprender la experiencia. Este autor asegura que una experiencia resulta tal porque se desarrolla una transacción entre un individuo y cualquier condición que interactúa con sus necesidades, propósitos y capacidades personales para crear la experiencia que se tiene, por ejemplo, disponer de ciertas tecnologías, interacción con sujetos, lugares donde se desarrolla. A su vez, Dewey (1958) al analizar la experiencia en la educación hace referencia al sentido. Específicamente señala "debe prestarse un cuidado atento a las condiciones que dan a cada experiencia presente un sentido valioso" (p.59).

Desde un contexto distinto al que enmarca el trabajo de Dewey, Larrosa (2003) hace men-

[19] En la tercera parte explicamos las nociones de terreno y escenario (Lave, 2001) adoptadas en esta tesis que se vinculan con la noción de situación (Dewey,1958).

ción a dos modos tradicionales de pensar la educación, los pares teoría/práctica (perspectiva política y crítica) o ciencia/técnica (perspectiva positivista cosificadora) y propone pensar la educación desde la experiencia. Además, Larrosa (1996) avanza y profundiza esta idea encontrando que una experiencia educativa puede potenciar la producción de sentidos de determinadas nociones, de este modo sugiere pensar la educación a partir del par experiencia/sentido, postura que adoptamos en la presente investigación y que consideramos posee especial relevancia para la misma.

Larrosa (2003) destaca "que la experiencia es lo que nos pasa, o lo que nos acontece, o lo que nos llega" (p.168) y por lo tanto es necesario "dar sentido a lo que somos y a lo que nos pasa" (p. 166). Este autor destaca que se producen transformaciones en la persona cuando un acontecimiento tiene impacto para ella y enfatiza que la palabra es un modo de poner de manifiesto el sentido que se otorga, ya que a través de la palabra se puede dar sentido tanto a lo que somos como a lo que nos pasa. Este autor además expresa que la experiencia, entre otros, requiere de una persona que se detenga a pensar, mirar, escuchar, sentir.

Guzmán Gómez y Saucedo Ramos (2015) al analizar la noción de experiencia señalan que los aportes de Dewey y Larrosa presentan similitudes y diferencias. Con respecto a Dewey plantean que el autor encuentra dos aspectos de la experiencia, el activo que "la experiencia supone ensayar un sentido" (p. 1024) vinculado a la noción de experimento y otro pasivo vinculado a "sufrir y padecer" (p. 1025). De este modo las autoras plantean que:

> (…) ambos aceptan una dimensión subjetiva, que implica el plano emocional, cognitivo y relacional. Larrosa reconoce también el carácter transformador de las experiencias, su connotación temporal y espacial, así como un principio de incertidumbre, sin embargo, le parece que en Dewey hay un trasfondo experimental en su noción de experiencia compuesta por un elemento activo que actúa sobre el pasivo (p.1027).

Como mencionamos anteriormente, la posibilidad de atribuir sentido a una determinada noción en el aula no resulta un proceso natural o que siempre se lleva a cabo. Es por esto que incorporamos la noción de vivencia de Guzmán Gómez y Saucedo Ramos (2015), a saber:

> Las vivencias son una unidad indivisible entre lo exterior y lo interior de la persona; llegan a ser significativas en su integración dinámica, situada y se convierten en experiencias cuando la persona hace acopio de un conjunto de las mismas para darse cuenta de que "lo que le pasa", "lo que le importa" es significativo. El sentido entra, entonces, como una manera de articular vivencia y experiencia como elemento de motivación, de guía de las acciones y así tener claridad de qué es "eso que vale la pena" (p.1030).

En el marco de la tesis tomamos dicha noción de vivencia, y específicamente hacemos referencia a vivencia educativa. Con esta última expresión particularizamos al ámbito de la educación formal, en el que se lleva adelante la vivencia en un entorno educativo en la que se involucran actores del sistema educativo y hay un propósito específico de enseñanza.

Además, resulta relevante considerar que, tal como plantea Britzman (2003), la experiencia implica reflexividad y una cierta continuidad en el tiempo diferenciándose así de una instancia de trabajo circunstancial. Es por esto que consideramos que la diferencia entre la mera circunstancia y la experiencia vivida involucra la capacidad de dotar de sentido a la vivencia, reflexionar y actuar.

Finalmente destacamos, en relación con lo señalado por Larrosa (2003) con respecto al lugar preponderante de la palabra para producir sentido, que "la experiencia vivida produce sentido, pero, al mismo tiempo, las palabras escogidas para relatarla reconfiguran esa experiencia vivida ofreciendo la posibilidad de formación del sujeto de la experiencia" (Villarreal y Esteley, 2017, p. 26)

3.2.3. | REFLEXIONES Y AVANCES PARA PENSAR LA ATRIBUCIÓN DE SENTIDOS

Del análisis realizado enfatizamos que de las/os autoras/es mencionados tomamos aportes para entender la noción de sentido teniendo en cuenta que focalizamos en atribución/producción de sentidos a procesos de validación y de MM por parte de futuras/es profesoras/es en matemática.

Consideramos, que la educación debe basarse en experiencia y enfatizamos en la puesta en juego del par experiencia/sentido (Larrosa, 2003) en el ámbito educativo. Además, tal como menciona Larrosa (2006) la experiencia es subjetiva, puesto que cada persona tiene una experiencia que se considera única y propia, implica reflexividad, forma y transforma. En esta línea, concebimos que, si bien la experiencia en relación con lo planteado por el autor es individual, también puede influir en la conformación y transformación de la experiencia de otras/os estudiantes en el marco de una comunidad educativa particular. Además, en el ámbito educativo cuando la modalidad de trabajo predominante es grupal y en colaboración, en muchos casos la experiencia es atravesada grupalmente. De modo análogo, consideramos que los sentidos pueden entenderse producidos tanto individual como grupalmente.

Para posicionarnos con respecto a sentido destacamos cuestiones de particular interés en nuestra investigación. Enfatizamos en: lo social en el marco de experiencias educativas como un factor fundamental (Bajtín, 2000), puesto que la producción de sentido surge y se forma en el proceso de interacción; la producción de sentido como un proceso que no-satura (Bajtín, 1982, citado en Arán, 2006), ya que un sentido descubre su hondura al toparse con otro sentido, no hay un sentido último, sino que el sentido puede variar a medida que la persona se involucra en diversas actividades o interaccionan con otras personas, es decir, hay una cadena o flujo de sentidos; el potencial de atender a cambios que acontecen en la producción de sentidos cuando el estudiantado se encuentra inmerso en distintas esferas de actividad, lo que conlleva a interpretar la experiencia en diversos momentos en pos de que no adquieran carácter pasajero (Bajtín, 2000; Dewey, 1958); y el lenguaje (Bajtín, 2000) o la palabra (Larrosa, 2003) como modelador/a fundamental de sentidos.

Coincidimos con Guzmán Gómez y Saucedo Ramos (2015) en que el sentido se constituye como un hilo conductor entre la vivencia y la experiencia. Es importante destacar también que no es posible asegurar que toda vivencia será significativa, comprendida, aceptada, negociada interiormente por una persona, pero, en caso de que lo sea da inicio a una experiencia y a la producción profunda de sentidos que resultan dinámicos a través del tiempo y el espacio.

Destacamos que la producción de sentidos en el marco de una vivencia no ocurre en el vacío, sino que se encuentra influenciada por fuentes que dan lugar a la misma (Dewey, 1958; Larrosa, 2003; Skovsmose, 2005; Bajtín, 2000; Stillman et al., 2020) y que es importante considerar el porvenir, antecedentes, intenciones, reflexiones diversas, ideas previas, experiencias y conocimientos previos de la persona que produce sentido (Skovsmose, 2005; Stillman et al., 2020).

Como indica Freitas (2007), tanto para Bajtín como también para Vygotski, “el conocimiento es construido en interacción, en la que, la acción del sujeto sobre el objeto es mediada por el otro a través del lenguaje. Así, de la discusión entre un énfasis entre el sujeto o el objeto, emerge un sujeto interactivo” (p.160).

De este modo, el sentido se produce cuando dos o más voces se ponen en contacto, la voz del oyente responde a la voz de un hablante. La comprensión de un enunciado implica un proceso en el que otros enunciados entran en contacto y lo confrontan. En esta línea, con respecto al empleo de palabras o enunciados para atribuir sentido, Esteley (2014) afirma que un estudiante se apropia de las palabras cuando las carga con sentido personal adaptándolas a sus intenciones expresivas. A su vez, la autora, tomando aportes de Britzman (2003) asegura que en la búsqueda de construcción de la voz propia emerge la necesidad de encontrar las palabras, significar y comprender.

Finalmente, tomando aportes de Carter (1993) consideramos que la palabra se configura como un modo adecuado para reflexionar, relatar y representar la experiencia, produciendo de este modo sentido al ser, hacer, pensar, sentir y decir. Asimismo, el repensar a través de la palabra la complejidad de la acción y describirla es un modo de expresar conocimiento en torno a la misma (Da Ponte et al., 2003) y consideramos que en diversos momentos espacio-temporales a medida que las personas transitan diferentes esferas de actividad (Bajtín, 2000) pueden modificarse los sentidos atribuidos. Esto es así debido a que la cadena o flujo de discursos puede llevar a una variación de sentidos.

3.3. EL TRABAJO CON DEFINICIONES EN EL AULA DE MATEMÁTICA

En esta sección focalizamos en la producción de definiciones en el aula de matemática y específicamente en geometría. Reconocemos que al abordar el estudio de las definiciones existen concepciones que poseen gran relevancia, como ser, la de Aristóteles, Lakatos y Popper (Ouvrier-Buffet, 2013) que han atravesado a la ciencia matemática. Sin embargo, no focalizamos en torno a las mismas por exceder nuestra perspectiva y objeto en estudio.

En esta sección buscamos reflexionar en torno a los procesos de producción de definiciones con el fin de analizar posteriormente la posibilidad de llevarlos adelante en el marco de un proceso de MM, entendiendo que esta problemática emerge del propio trabajo de investigación como un aspecto dialógico entre el trabajo empírico y los análisis teórico y epistemológico.

3.3.1. | PRODUCCIÓN DE DEFINICIONES EN EL AULA DE MATEMÁTICA

El estudio de actividades que involucren la producción de definiciones por parte del estudiantado en el aula de matemática es un tema didáctico presente en la investigación en educación matemática que se manifiesta sucesivamente en el tiempo, pero distribuida puntualmente en ciertos ámbitos del campo o conjuntos de producciones científicas. En síntesis, tiene un avance constante en el tiempo de un modo discreto desde los años 90 (Ouvrier-Buffet, 2015). Coincidimos con Mariotti y Fischbein (1997) en que aprender a definir es una problemática básica de la educación matemática, puesto que las definiciones de objetos matemáticos se estudian en las clases de matemática de todos los niveles educativos.

A su vez, la elaboración de definiciones es considerada como una actividad matemática de gran importancia en el marco de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de esa disciplina. Más aún cuando se espera que el estudiantado avance y reflexione en sus modos de validación, puesto que durante los procesos de elaboración de definiciones y de formulación de pruebas de conjeturas u otros tipos de validaciones se producen reflexiones y la posible modificación de cualesquiera de estos objetos matemáticos (definiciones, conjeturas o pruebas) (Zandieh y Rasmussen, 2010). De Villiers (1998) destaca que la actividad de producir definiciones es tan importante como la de resolver problemas, generalizar, modelizar, demostrar, etc., a pesar de que la producción de definiciones se ha desarrollado menos que las otras actividades en la enseñanza de la matemática.

Tempranamente, Freudenthal (1973) realiza una crítica a modos tradicionales de trabajo en el aula en los que se establecen definiciones sin discusión y afirma que es necesario propiciar momentos de trabajo en los que las/os estudiantes aprendan específicamente a definir. Este autor afirma que imponer definiciones puede reducir la matemática a una ciencia que se rige por reglas, lo cual influye en la falta de reconocimiento por parte del estudiantado de la arbitrariedad que se presenta en la definición en matemática.

En relación con lo mencionado anteriormente, Borel (1962) señala que las definiciones en matemática son arbitrarias y la condición fundamental al establecerlas es que no conduzcan a contradicciones en el marco del sistema axiomático del que forman parte. Enfatiza la importancia de que personas diferentes, al interpretarlas, piensen en el mismo objeto. Este autor, específicamente al abordar la definición de un número afirma: "Por mi parte, no puedo considerar a x como bien definido cuando, si hablo de x con otra persona, no puedo estar seguro de que nos entendemos bien, es decir que hablamos del mismo número" (p. 31).

Además, Zaslavsky y Shir (2005) señalan que un gran número de estudios que abordan el uso o la creación de definiciones hacen evidente que involucrar al estudiantado en el proceso de producción de una definición puede proporcionarle oportunidades no solo para reconocer la arbitrariedad de las definiciones, sino también para explicitar las características de las definiciones adecuadas y/o útiles en determinadas situaciones.

Es importante destacar que el reconocimiento y repetición de una definición no asegura la apropiación del concepto por parte de quien lo hace (Ouvrier-Buffet, 2011). Si bien todo concepto matemático posee una definición formal y ordenada (Corfield, 2017), aunque arbitraria, el reconocimiento de la misma no asegura apropiación del concepto. Además, el reducir el trabajo con definiciones a la reproducción de una definición formal puede ocultar que las definiciones pueden mutar o cambiar a lo largo del tiempo (Pimm, 2017).

En el marco de discusiones que involucran el trabajo con definiciones De Villiers (1998) se pregunta si en los procesos de enseñanza y de aprendizaje se deberían enseñar definiciones o enseñar a definir. En este sentido, consideramos fundamental que el estudiantado tenga oportunidades de llevar adelante procesos de elaboración de definiciones y reflexiones con respecto a estos procesos. Destacamos también que, si bien consideramos que la puesta en juego de estos procesos resulta importante en todos los niveles educativos, adquieren especial relevancia durante la formación de futuras/os profesoras/es en matemática. Esto es así, pues en su desempeño profesional deberán tomar decisiones respecto a qué definición emplear y de qué modo abordar el trabajo con definiciones y producción de definiciones en el aula.

3.3.2. | EL ABORDAJE DE DEFINICIONES EN EL DOMINIO GEOMÉTRICO

La información y datos en estudio en la presente investigación, tal como se explicita en el primer capítulo, se producen, principalmente, en el marco de un curso de geometría tridimensional, por lo que tiene especial relevancia el reflexionar en relación con la definición en este dominio en particular. A su vez, se aborda específicamente la definición de poliedro, lo que nos lleva a realizar algunas consideraciones específicas con respecto a este objeto geométrico.

Freudenthal (1973) puntualmente destaca la importancia de la definición en matemática, enfatizando que no se emplea solamente para explicar qué se entiende por una palabra determinada, sino que las definiciones son los enlaces en cadenas deductivas. Al reflexionar en relación con el dominio geométrico en particular, considera que una buena enseñanza en geometría puede implicar "aprender a organizar un tema y aprender qué es organizar, aprender a conceptualizar y qué es conceptualizar, aprender a definir y qué es definir"[20] (p. 418). Enfatiza que el trabajo reflexivo en torno a los objetos geométricos puede potenciar el establecimiento de conjeturas y destaca como fundamental guiar a las/os estudiantes en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la definición para que logren comprender por qué alguna organización, algún concepto, alguna definición es mejor que otra u otras.

En esta línea de reflexión respecto a definiciones y producción de definiciones, diversas/os autoras/es del campo de la educación matemática ponen de manifiesto dos nociones básicas que resultan de interés para entender qué se debe desarrollar para favorecer la comprensión de un determinado concepto y por tanto de su definición, estas son imagen conceptual y definición formal (e.g. Fischbein 1993; Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1991).

Tall y Vinner (1981) afirman que muchos conceptos matemáticos que se emplean no están definidos formalmente, sino que se utilizan adecuadamente a partir del reconocimiento de los mismos en diversas experiencias y contextos. Incluso, estos autores expresan que las personas pueden refinar su significado e interpretación con una sutileza cada vez mayor con o sin el lujo de una definición precisa.

En relación con lo anterior, destacamos que Vinner (1991) distingue imagen conceptual de definición formal. Por un lado, el autor considera que el nombre de un concepto conocido, en general, permite evocar algo conformado por un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias que denomina imagen conceptual, y añade que estas cuestiones pueden traducirse de forma verbal por la persona, pero no es lo primero que se

[20] Traducción propia del original en inglés.

evoca, es decir, dichas formas surgen en una fase posterior. Por otro lado, habla de definición formal cuando el nombre del concepto remite a significados matemáticos expresados en lenguaje adecuado en el marco de una teoría axiomática en particular.

Vinner (1991) agrega que para apropiarse de un concepto es necesario formarse la imagen conceptual del mismo, lo que implica asociar un determinado significado a las palabras y destaca que las definiciones formales pueden tener un papel muy importante en instancias de constitución de la imagen conceptual. Además, explicita que la imagen del concepto es correcta cuando le permite a la persona discriminar sin errores los ejemplos de ese concepto y las propiedades asociadas al mismo. Finalmente, este autor reconoce que el lograr repetir memorísticamente una definición no implica una apropiación del concepto.

Destacamos que si bien reconocemos que los aportes de Vinner (1991) se realizan para conceptos en matemática y no específicamente para conceptos geométricos, creemos que poseen relevancia con respecto a estos últimos, puesto que los objetos propios de la geometría sintética se suelen representar con objetos reales bidimensionales o tridimensionales en material concreto o con diversos softwares de geometría dinámica, lo que permite la posibilidad de emplear tanto la vista como el tacto para la apropiación de estos objetos.

La posibilidad de representación de dichos objetos se hace evidente, incluso, en Freudenthal (1983). Este autor afirma que se pueden organizar diferentes fenómenos matemáticos y/o del mundo real a partir de conceptos, estructuras e ideas matemáticas y específicamente “Por medio de las figuras geométricas, como triángulo, paralelogramo, rombo o cuadrado, uno tiene éxito organizando el mundo de los fenómenos de los contornos” (p.28). De modo similar, consideramos que los poliedros permiten organizar fenómenos de objetos tridimensionales que guardan ciertas características.

En relación, Aleksandrov (2003) plantea que en geometría se abstraen todas las propiedades (excepto forma y dimensiones) de un objeto concreto, incluso señala que las/os matemáticas/os constantemente emplean modelos y analogías físicas y recurren a ejemplos concretos como ayuda en el descubrimiento matemático.

Aleksandrov (2003) señala que el inicio del trabajo con formas geométricas surge a partir de la observación de objetos de la naturaleza y explicita que en general las personas no se encuentran con líneas rectas o cuadrados perfectos, sino que, con el fin de satisfacer necesidades prácticas, a medida que fue transcurriendo el tiempo, se trabajó con objetos con formas cada vez más regulares. Es decir, considera que en primer lugar se dieron formas a distintos materiales y, en segundo lugar, se reconocieron clases en las formas y se realizaron abstracciones. Al reconocer las formas de los cuerpos se mejoró el trabajo y se construyó con mayor precisión la noción abstracta de forma. En síntesis, es de este modo que "las actividades prácticas sirvieron de base a los conceptos abstractos de la geometría" (p. 38).

En el marco de ideas anteriores, interesa señalar que Zaslavsky y Shir (2005) enfatizan el potencial de que el estudiantado participe en la creación de definiciones, destacando que esta actividad abre la necesidad de definir conceptos geométricos adicionales al objeto de definir (por ejemplo, en el marco de la producción de la definición de poliedro podría emerger el abordaje y reflexión de la definición de polígono), formular diversas conjeturas y enunciar teoremas que involucran los conceptos, comparar posibles equivalencias entre diferentes definiciones y revisar otras. A modo de ejemplo, señalan que el análisis realizado por Lakatos (1986) de la definición de poliedro muestra un proceso que se puede llevar adelante al formular una definición y cómo una definición puede evolucionar concomitantemente en un proceso de "pruebas y refutaciones".

Davis y Hersh (1989) mencionan que Lakatos "ofrece un choque de opiniones y razonamientos y refutaciones" (p.252) que puede utilizarse para pensar en una matemática no fosilizada. A su vez, destacan que Lakatos "presenta el desarrollo de una idea matemática a partir de un problema y una conjetura" (p.252) de modo tal que se muestra el modo en que una teoría adquiere forma "en el calor del debate y desacuerdo, y la duda va cediendo el paso a la certeza, y la certeza, a la duda renovada" (p.252).

Tempranamente, Aleksandrov (2003) señala que el rigor de la matemática se encuentra en proceso de desarrollo y de ningún modo es una ciencia absoluta, pues los principios de la misma "no se han congelado de una vez para siempre, sino que tienen su propia vida y pueden incluso ser objeto de discusiones científicas" (p.20). Más aún, el autor considera que, aunque la matemática es abstracta sus conceptos y resultados se originan "en el mundo real y encuentran muchas y diversas aplicaciones en otras ciencias, en ingeniería y en todos los aspectos prácticos de la vida diaria; reconocer esto es el requisito previo más importante para entender la matemática" (p.20).

En línea con lo mencionado, enfatizamos que el análisis que se lleva adelante en el marco de producción de una definición de poliedro resulta de especial interés, ya que la actual diversidad de definiciones no equivalentes de poliedro (Lakatos, 1986) habilitaría profundas reflexiones entre quienes se involucran en dicha producción. La perspectiva mencionada se sustenta en una visión de la matemática como actividad cuasi-empírica (Lakatos, 1986; Ravn y Skovsmose, 2019), lo que supone asumir que la exploración por parte del estudiantado constituye un aspecto central de la enseñanza, así como la posibilidad de proporcionar oportunidades para que apelen al sentido común y a sus experiencias (Sriraman y Mousoulides, 2020).

A su vez, estas afirmaciones se encuentran en relación con el análisis realizado por Barany (2017) respecto al proceso llevado adelante por Lakatos poniendo de manifiesto cómo incluso patrones que se consideran estabilizados pueden probarse y reconfigurarse y señala que los ejemplos y modelos[21] tienen un lugar especialmente importante porque conforman la base para aprender conceptos anteriormente desarrollados y desarrollar otros nuevos.

Finalmente, destacamos que coincidimos con Alsina et al. (1997) en la relevancia de producir definiciones a partir de un trabajo en el que se gana precisión poco a poco a pesar de que seguramente en principio se presenten definiciones provisorias que resultan redundantes e imprecisas. Tal como enfatizan, el aprendizaje de conceptos se potencia al discutir la conveniencia y exactitud de una determinada definición utilizando definiciones provisorias. A su vez, consideramos que este modo de trabajo potencia la construcción del concepto figural[22].

3.3.3. | PROCESOS DE PRODUCCIÓN DE DEFINICIONES

Ouvrier-Buffet (2013) señala que el trabajo en el aula de matemática con definiciones que se encuentran dentro de una teoría matemática existente, formalizada y consistente, presenta una distancia importante con respecto al problema que las originó. Enfatiza que la actividad de producción de definiciones no siempre se sitúa en la generación de nuevos conocimientos, lo que puede reducir el reconocimiento por parte del estudiantado de su potencial y las posibilidades que otorga en el marco de una teoría axiomática particular y afirma que la presentación léxica y lógica de las definiciones no permite construirlas. Pero reconoce que también hay definiciones en construcción que permiten la puesta en juego de diferentes etapas de generación de conceptos.

Los vínculos que se establecen entre las actividades de definir y los procesos de prueba son evidentes, tal como se menciona en la sección anterior, en el estudio de Lakatos (1986). Este autor hace explicita la importancia de la producción de definiciones al mostrar un ejemplo en el que la definición de poliedro se construye con la característica principal de ser provisional y evolutiva. Interesa enfatizar que, en sus investigaciones, el autor presenta diversas definiciones de poliedro no equivalentes. Además, destacamos que en la actualidad se puede evidenciar fácilmente en libros de textos y libros de matemática la presentación de diversas definiciones de poliedro que no resultan equivalentes entre sí[23]. Estas consideraciones se hacen evidentes también en Barany (2017).

---

[21] Esta idea se encuentra en relación con la conceptualización de modelo matemático concreto propuesta en la presente investigación.

[22] Fischbein (1993) afirma que la expresión concepto figural constituye el límite ideal de un proceso de fusión e integración entre las facetas lógicas y figurales de una figura geométrica.

[23] En el trabajo empírico realizado en la presente investigación las futuras profesoras que participan realizan un análisis que fundamenta esta afirmación.

Consideramos que la definición de poliedro se encuentra en construcción en la matemática y por tanto su abordaje resulta potencial en el sentido que el estudiantado se debería responsabilizar de su producción como si el concepto fuera nuevo. Esta cuestión es destacada también por Ouvrier-Buffet (2013) al analizar definiciones en construcción de la matemática discreta. Esta autora señala que el trabajo con conceptos que no poseen una definición completamente formalizada permite el acceso a diversidad de representaciones y exploraciones.

Ouvrier-Buffet (2011; 2013; 2015) al reconocer el potencial del trabajo con construcción de definiciones en el aula considera necesario caracterizar los procesos de producción de definiciones. Para esto, la autora realiza una investigación en la que entrevista a matemáticos con el fin de conocer y caracterizar sus procesos de definir. A partir de sus estudios, la autora establece ciertos momentos que las/los entrevistadas/os reconocen al producir una definición que describimos a continuación.

- Momento "en acción": se pone en juego cuando la actividad matemática es principalmente de exploración, de apropiación de uno o varios problemas, de reconocimiento de ideas, objetos y resultados, es decir, se ponen en escena ejemplos, no ejemplos[24], contraejemplos y analogías. También pueden emerger otros problemas (más débiles o de menor trascendencia). Emergen imágenes conceptuales (Vinner, 1991) y definiciones en acción (enunciado utilizado como herramienta que permite operar sin una definición explícita).
- Momento de transición entre momento "en acción" y momento "cero": se producen primeras categorías de objetos en juego a partir de la clasificación, se pueden explorar y reutilizar clasificaciones existentes, se realizan analogías y se establecen relaciones con respecto a conceptos y teorías existentes. En este momento se enfatizan tres actividades: clasificación, categorización de los objetos y denominación de los mismos.
- Momento "cero": se establecen definiciones que se denominan cero y pueden tener carácter provisorio. Estas definiciones pueden ser modificadas para proteger conjeturas o afirmaciones iniciales de ciertas figuras u objetos que no cumplen dicha definición o porque el concepto se altera por la puesta en juego de una prueba. En este momento se pueden emplear y construir ejemplos, no ejemplos y contraejemplos. A su vez, la autora manifiesta que estas definiciones provisorias tienen diversas funciones, por ejemplo, nombrar, potenciar la comprensión y acceso a un concepto, trabajar con pruebas matemáticas, delimitar dominio de validez de una afirmación, comunicar, etc.

[24] Un no ejemplo es un enunciado que no es equivalente a la definición y/o no verifica una de las características fundamentales de la definición (Ouvrier-Buffet, 2013).

- Momento “formalizado”: se produce la formulación de una definición más formalizada que la realizada en el momento “cero”. Es decir, se produce un cambio en relación con la abstracción en juego con respecto al momento “cero” y esta definición permite explorar o analizar inferencias. Si bien en todos los momentos las interacciones sociales resultan importantes, en este momento se torna relevante el rol de lo comunicacional, puesto que la definición debe validarse apelando a normas de la institución involucrada. Se espera que la definición que se aborda en este momento resulte sólida, no presente contraejemplos y a partir de ello se logre la apropiación del concepto figural y de la definición. Además, la autora señala que en este momento se pueden enunciar nuevos problemas con el fin de continuar la investigación matemática, dado que la producción de la definición en juego puede generar nuevos cuestionamientos, por ejemplo, la exploración de otros conceptos que conducen a un nuevo proceso de definición o el cuestionamiento de la generalización y el uso de otras definiciones.
- Momento “axiomático”: se obtiene una definición considerada “teórica” por incluirse en una teoría axiomática particular. En este punto se construye una teoría que puede ser aceptada en una comunidad en particular y se introducen nuevos conceptos dentro de esta teoría, respondiendo así a ciertas restricciones axiomáticas. En este momento, al incorporar la definición en una teoría, se abrirán perspectivas, preguntas y campos de investigación.

Ouvrier-Buffet (2013; 2015) plantea que es importante considerar que los momentos mencionados no pretenden ser jerárquicos y no presentan un desarrollo lineal, sino que se encuentran relacionados entre sí. Se espera que se reflexione de este modo las definiciones y su operatividad, los tipos de problemas vinculados a la actividad matemática de la investigación, y se entienda la actividad de definir como una actividad de investigación matemática.

Finalmente, Ouvrier-Buffet (2013) concluye que las/os matemáticas/os entrevistados consideran que es necesario implementar actividades de producción de definiciones a nivel universitario, a pesar de que no pueden conceptualizar la forma en que se puede implementar con los estudiantes. En este sentido, la investigación que realizamos y la posibilidad de generar definiciones en el aula de matemática en el marco de un escenario de MM puede resultar un modo pertinente y novedoso de trabajo en el aula de matemática universitaria.

3.3.4. | REFLEXIONES RESPECTO A LA PRODUCCIÓN DE DEFINICIONES EN EL AULA DE MATEMÁTICA

Tal como se muestra, en la educación matemática se hacen presente discusiones con respecto a la posibilidad de llevar adelante actividades de producción de definiciones en el aula, sin embargo, la cantidad de investigaciones que reportan este tipo de experiencias educativas no resultan predominantes o abundantes. Este tipo de actividades generalmente se abordan a partir del estudio de procesos de pruebas y procesos de resolución de problemas, pero no se estudian mucho por sí mismas (Ouvrier-Buffet, 2013).

Enfatizamos en el potencial que promueve el abordaje de ejemplos, no ejemplos y contraejemplos teniendo en cuenta que el estudiantado se apropia de conceptos a partir del enriquecimiento de imágenes conceptuales (Vinner, 1991). Además, en nuestra investigación, al igual que en la de Ouvrier-Buffet (2013) se llevan adelante procesos de clasificación, no se aspira a la producción de una definición en el marco de descubrimiento de un teorema como es el caso de Lakatos (1986), sino que la validación se lleva adelante al aceptar las definiciones construidas y en el marco del mismo proceso de producción de definiciones.

Como Ouvrier-Buffet (2013) consideramos que la implicación del estudiantado en procesos de los que emerge como respuesta a una problemática una definición potencia la capacidad para responsabilizarse de la producción de definiciones.

Coincidimos con la perspectiva de Vinner (1991) que promueve la puesta en juego de actividades en las que la imagen conceptual del estudiantado presenta imprecisiones para potenciar la reconstrucción de la definición de conceptos previamente abordados o la formulación de definiciones de conceptos nuevos.

A su vez, enfatizamos los tres modos en que se promueve el trabajo con definiciones en el aula de matemática propuesto por Borasi (1992): el análisis en profundidad de diversidad de definiciones, el uso de definiciones en problemas que incentivan la reflexión en torno a las mismas, el estudio y reflexión con respecto a la incorporación de una definición en una determinada teoría.

Finalmente, consideramos que el pensar la producción de definiciones en el marco de un escenario de MM abre una posibilidad para abordar un modo en que estudiantes de nivel superior puedan reflexionar sobre el abordaje de definiciones y construir con fundamentos las mismas, franqueando perspectivas en las que la definición parece ser única e impuesta.

A MODO DE CIERRE DE LA SEGUNDA PARTE

En esta parte realizamos una revisión bibliográfica que focaliza en nuestro objeto de estudio y que empleamos para abordar nuestros objetivos de investigación. Presentamos perspectivas actuales del campo de la educación matemática en relación con nuestro estudio y hacemos explícitos los enfoques que se emplean en el análisis en el marco de esta investigación. Destacamos que, si bien consideramos aportes tanto del ámbito nacional como internacional, realizamos un recorte de los mismos teniendo en cuenta el modo en que se encastran los núcleos problemáticos en estudio.

La formación de profesoras/es es el marco más amplio en el que se encuadra nuestra investigación y por tanto la primera revisión que realizamos. Los aportes de Lerman (2001) con respecto a la necesidad de considerar la formación docente a partir de teorías que abordan la complejidad de las prácticas sociales resultan fundamentales para pensar nuestra investigación y algunas nociones que trascienden estas páginas, como ser, trayectoria educativa, identidad y agencia. Teniendo en cuenta que proponemos una vivencia a futuras/os profesoras/es desde la perspectiva teórica mencionada recuperamos aportes de MM, donde en consonancia con dichos constructos emergen algunas nociones con énfasis, como ser, escenarios de MM (Esteley, 2014) y MM como abordaje pedagógico (Bassanezi, 2002; Esteley, 2014).

Las perspectivas mencionadas delinean el modo en que se configura el capítulo III, pues, la noción de validación en la investigación tendrá especial relevancia en el marco de procesos de MM como abordaje pedagógico llevados adelante por futuras/os docentes. De igual modo, las perspectivas de sentido puestas en escena y la adoptada tienen en cuenta todos los aspectos anteriores, ya que se profundiza con relación a la misma considerando que se busca estudiar sentidos atribuidos a MM como abordaje pedagógico y a procesos de validación en el marco de dichos procesos de MM por futuras/os profesoras/es. Finalmente, las perspectivas recuperadas para pensar la producción de definiciones en el aula se realizan teniendo en cuenta que se espera iluminar la posibilidad de que se produzcan definiciones en el marco de procesos de MM.

Por todo lo mencionado, consideramos que en este capítulo se entreteje una red compleja de nociones teóricas que recupera aportes de autores del ámbito nacional e internacional y que considera aspectos generales para luego acudir a aquellos más particulares. Así, paulatinamente se precisa la información y se delimitan las reflexiones.

TERCERA PARTE

DIÁLOGOS Y VÍNCULOS ENTRE EL CONTEXTO DE FORMACIÓN PROFESIONAL Y LOS ASPECTOS METODOLÓGICOS

DIÁLOGOS Y VÍNCULOS ENTRE EL CONTEXTO DE FORMACIÓN PROFESIONAL Y LOS ASPECTOS METODOLÓGICOS

Si quieres entender algo tienes que cambiarlo, y
si quieres cambiar algo tienes que entenderlo.[25]
(Bakker, 2004, p. 37).

Esta parte reúne dos capítulos conectados dialécticamente, las descripciones del terreno (Lave, 1991) en el que llevamos adelante el estudio y de la metodología de la investigación. Ambos capítulos se encuentran imbricados y resultan complementarios, puesto que las decisiones metodológicas y pedagógicas asumidas a partir de los objetivos de la investigación, están ancladas en el terreno en el que se enmarca el estudio.

La información que producimos y estudiamos en el marco de esta investigación, tal como mencionamos en la primera parte de la tesis, emerge al registrar la puesta en juego de un escenario educativo en la asignatura Geometría Euclídea Espacial (GEE) de una universidad nacional argentina en el año 2018. Participan futuras profesoras que cursan GEE en 2018 y docentes a cargo del curso. Los registros producidos inicialmente se complementan con entrevistas posteriores a dicha puesta en juego con algunas futuras profesoras que participan de la misma.

El estudio que realizamos focaliza en una mirada actual de lo sucedido en el marco de las vivencias educativas promovidas en el escenario de MM, sin embargo, el terreno (Lave, 1991) institucional en el que llevamos adelante el trabajo de campo y para el que se construye el escenario, atraviesa las decisiones metodológicas (y el mismo diseño) y por tanto nuestra información en estudio. Es por lo que consideramos relevante, en el marco de un estudio que privilegia una mirada social sobre la formación de profesoras/es, focalizar en algunas cuestiones dadas del terreno (Lave, 1991) en donde llevamos adelante el trabajo empírico.

Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado, en el capítulo IV presentamos descripciones de la institución y de la asignatura en la que se lleva a cabo el escenario educativo de MM. Específicamente, reconocemos algunas particularidades que consideramos fundamentales para comprender la trayectoria educativa que propone la institución y de las futuras profesoras que participan del escenario y, por tanto, la información en estudio.

Además, en el capítulo V, presentamos los aspectos metodológicos a los que apelamos en la investigación. Describimos los procedimientos empleados teniendo en cuenta que se encuentran en vínculo con los aspectos teóricos a los que recurrimos y que resultan adecuados con relación a los objetivos en estudio, además explicamos el proceso de producción, análisis e interpretación de información.

[25] Traducción propia del original en inglés.

CAP IV

FUTURAS DOCENTES EN ESTUDIO: TERRENO DE FORMACIÓN PROFESIONAL

4.1. | TERRENO, ESCENARIO Y CONTEXTO EN LOS QUE SE ENMARCA EL ESTUDIO

Lave (1991) afirma “el mundo no consiste en un conjunto de recién llegados [llegadas] que se incorporan solos [solas] a espacios problemáticos deshabitados” (p.17). Inspiradas en esta frase sostenemos que las particularidades de la asignatura en la que se desarrolla el escenario educativo de MM como abordaje pedagógico trascienden la investigación. En este sentido, las investigadoras y futuras profesoras que participan y se involucran con este escenario se incorporan al trabajo en la asignatura GEE del Profesorado en Matemática de la FHUC que presenta características particulares. En este capítulo se abordarán distintos aspectos que dan cuenta de las mismas.

Tal como mencionamos en el segundo capítulo, consideramos como Lerman (2001) que las teorías que abordan la complejidad de las prácticas sociales son apropiadas para el estudio de la formación docente. En relación con esta perspectiva, el enfoque de Lave (1997, citado en Lerman 2001) sobre la formación de la identidad en la práctica social hace foco en el lugar que ocupan las relaciones sociales constituidas y negociadas durante el aprendizaje en un aula determinada. Además, Lave (1991) afirma que en el marco de una teoría de aprendizaje situado hablar de un proceso de aprendizaje descontextualizado constituye un contrasentido. En particular, Losano (2011), inspirada en los aportes de Lave, señala que “existen relaciones mutuamente constitutivas entre la actividad, la persona y los entornos en los que estas personas actúan” (p.36).

También, como destacamos en el segundo capítulo, la noción de escenario de MM (Esteley, 2014) es fundante para la investigación y resulta básica para dar sentido a la misma. Dicha noción emerge en un proceso dialéctico entre teoría y práctica (Araújo, 2019) recurriendo a aportes de Lave. Estas consideraciones nos llevan a delimitar y emplear tres nociones en esta investigación: terreno, escenario y contexto (Lave, 1991).

En términos de Lave (1991) con terreno se hace referencia a las condiciones “dadas” en una determinada localización espaciotemporal, es decir, aspectos que se encuentran previamente y sobre los cuales las personas que actúan no tienen control. Las actividades que tienen lugar allí no pueden ser separadas de esas condiciones establecidas. En nuestra investigación, que toma como centro la formación de futuras/os profesoras/es, dan forma al terreno las docentes de la asignatura GEE, las características de la asignatura GEE, la infraestructura edilicia, los recursos disponibles (bibliografía, medios digitales o tradicionales, etc.), las características institucionales, entre otros. El terreno es marco para el escenario, pues, las personas realizan sus actividades en terrenos, mientras que el escenario "se concibe como una relación entre las personas en acción y los terrenos en los que actúan" (Lave, 1991, p. 164). Es decir, el escenario puede interpretarse como una forma de estructuración entre las personas en acción y el terreno estructurado. Estas componentes, terreno y escenario conforman dialécticamente el contexto. Por esto, la información emergente de las vivencias educativas que estudiamos en la investigación muestra el contexto, dado que emerge de la interacción entre el terreno y el escenario.

Esta última consideración carga de sentido la necesidad y aspiración de conocer en profundidad el terreno en el que se instala el escenario de MM, puesto que se pondrán de manifiesto sus particularidades que, como investigadoras, nos exceden, pero inciden en la información construida. Además, creemos que es imprescindible comprender las condiciones dadas en el marco de una búsqueda por estudiar un entorno educativo auténtico. A fin de situar, describiremos detalladamente el terreno y escenario en juego.

Destacamos que para caracterizar la institución y asignatura obtenemos información solicitada en la universidad nacional argentina en estudio y aportes de Baraldi (1996). Específicamente, en la universidad solicitamos: planes de estudio que ha tenido la carrera Profesorado en Matemática hasta el actual, programas de las asignaturas Geometría Euclídea Plana y GEE a partir del año 1990 y relevamiento de datos en lo que atañe a la regularidad, promoción y aprobación de las asignaturas Geometría Euclídea Plana y GEE a partir del año 2000. También, empleamos información proporcionada por el libro de Baraldi (1996) en el que se recupera la historia de la facultad en la que se inserta el profesorado y a la que denominamos FHUC en la búsqueda de comprender el lugar que fue ocupando la didáctica en las carreras de formación docente de dicha facultad.

4.1.1 | DEVENIR HISTÓRICO DEL ACTUAL PROFESORADO EN MATEMÁTICA

La asignatura GEE forma parte del plan de estudio de la carrera Profesorado en Matemática que se dicta en una universidad nacional argentina. Esta institución tiene una larga trayectoria e historia de cambios a partir de los cuales comprendemos la complejidad y particularidad del contexto actual que problematizamos en la presente investigación.

La actual FHUC tuvo cinco denominaciones diferentes a lo largo de la historia que se presentan en la tabla 2.

TABLA 2 | *Transformaciones de la identificación de la Institución (Fuente propia).*

AÑOS	DESIGNACIÓN DE LA INSTITUCIÓN
1953 - 1958	Instituto del Profesorado
1958 - 1970	Instituto del Profesorado Básico
1970 - 1987	Escuela Universitaria del Profesorado
1987 - 2000	Facultad de Formación Docente en Ciencias
2000 - HOY	Facultad de Humanidades y Ciencias

La institución fue cambiando de denominación evidenciando cambios de identidad y consecuentemente modificaciones de su oferta académica. En el Instituto del Profesorado no se dictaban carreras relacionadas con la matemática o su enseñanza. Sin embargo, ya en el Instituto del Profesorado Básico se ofrecía el Profesorado en Ciencias Exactas y Naturales donde algunas asignaturas de este plan de estudio eran de matemática específica, como ser, aritmética, álgebra, geometría y trigonometría.

El período histórico en el que la institución se denominó Escuela Universitaria del Profesorado en sus inicios impartía la carrera denominada Profesorado de Enseñanza Media Especializada en Matemática (a partir de 1970), no obstante, en esta etapa prolífica en la universidad nacional de referencia se presentaron diversos cambios en planes de estudios, nombres de carreras, entre otros. Esta carrera se llamó luego Profesorado de Enseñanza Media en Matemática (a partir de 1974) y posteriormente Profesorado en Matemática (a partir de 1980).

En el año 1987 se da el contexto para la transformación de la Escuela Universitaria del Profesorado en Facultad de Formación Docente en Ciencias. De modo inmediato, se solicitó la transformación curricular de las carreras de grado, entre ellas el Profesorado en Matemática. En el año 1991 entra en vigencia un nuevo plan de estudio bajo el mismo título. En ese devenir, en el año 2000 se modifica el nombre de la institución a FHUC y se realiza la última reforma del plan de estudios del Profesorado en Matemática que continúa hasta la actualidad (expediente Nº343.906/14).

4.1.2 | DESCRIPCIÓN DEL PLAN DE ESTUDIO DE LA CARRERA PROFESORADO EN MATEMÁTICA

Como se menciona anteriormente la actual carrera Profesorado en Matemática tuvo diferentes nombres y sus planes de estudio se modificaron a lo largo del tiempo. Sin intención de desarrollar un análisis en profundidad, a continuación, realizamos una modesta descripción del plan de estudios que entró en vigencia en el año 2000 hasta la actualidad con el fin de comprender las condiciones que actualmente atraviesan a la carrera, al perfil profesional de las/os egresadas/os y particularmente de la asignatura GEE.

El plan de estudios vigente desde el año 2000 plantea que las exigencias de la educación demandan de profesionales docentes que:

> Posean una sólida capacitación Matemática, abierta a los requerimientos planteados por la ciencia y la tecnología actuales e interesados en resolver los problemas pedagógico-didácticos que surjan de la enseñanza de la Matemática en los distintos niveles; accedan a los conocimientos matemáticos sin parcializar el saber, con interés científico, humanístico, social, estético y ético.
>
> Por todo ello se tiende al logro en los egresados de las siguientes competencias: conocimientos de la Matemática y sus aplicaciones para un mejor desarrollo de la enseñanza; conocimientos de aspectos epistemológicos y pedagógicos que orientan los procesos de enseñanza y de aprendizaje teniendo en cuenta los objetivos de cada nivel de la enseñanza en el sistema educativo formal; actitud reflexiva y capacidad para colaborar en investigaciones educativas vinculadas al campo de la enseñanza de la matemática; interés para acceder al perfeccionamiento y actualización permanentes, y a la posibilidad de vincularse y enriquecerse en el contacto con profesionales y especialistas de su área o de otras áreas del saber; capacidad para el análisis crítico de las problemáticas pedagógicas y socioculturales que se generan en la escuela y la atraviesan en todas sus dimensiones; capacidad para producir material educativo mediante la utilización de diferentes tecnologías; capacidad de intervención en diferentes dimensiones institucionales asumiendo lo institucional como construcción social y curricular.[26] (Plan de estudios Profesorado en Matemática, 2000, p.5).

[26] Con el fin de preservar la anonimidad de la institución en la que realizamos el estudio no otorgamos información en referencias bibliográficas de los documentos oficiales (planes de estudio y programas de asignaturas) emitidos por la universidad en la que se sitúa la investigación. No obstante, lo expuesto es copia fiel de los mismos.

El plan de formación estipula que debería ser llevado adelante en 5 años, específicamente se proponen 3285 horas de cursado presencial. Se organiza en torno a dos ciclos, al cumplimentar las exigencias del primero de ellos se obtiene el título de Bachiller Universitario en Matemática. Hacemos evidente que para obtener el título de Profesor/a en Matemática se hace hincapié en la formación disciplinar tanto matemática como epistemológica y didáctica de el/la futuro/a profesor/a, siempre destacando la necesidad de que se desarrollen capacidades diversas.

El plan de estudios contempla, por un lado, una formación general (3 asignaturas) y por otro, una formación disciplinar (34 asignaturas) organizada en cinco áreas: álgebra y geometría, análisis, matemática aplicada, fundamentos y educación. Además, incluye la asignatura Práctica de la Comunicación Oral y Escrita que no se encuentra enmarcada en las anteriores formaciones. Específicamente, dentro del área álgebra y geometría se ubican las asignaturas GEE y Geometría Euclídea Plana (ambas en el primer ciclo de la carrera).

Para mostrar con claridad la distribución de asignaturas determinamos cuatro categorías para organizar y analizar el plan de estudios vigente. La primera categoría se denomina asignaturas de Matemática Específica donde se encuentran, entre otras, Álgebra, Geometría, Cálculo, Probabilidad. La segunda categoría se corresponde a un grupo de asignaturas de Educación General, tales como, Psicología de la Educación, Sociología de la Educación, Didáctica General. La tercera comprende asignaturas de Educación Matemática, como el caso de Didáctica de la Matemática y Práctica Docente. La última, Asignaturas de Formación General, por ejemplo, Práctica de la Comunicación Oral y Escrita, Filosofía, Psicología, etc. Cabe mencionar que en el primer ciclo solo se proponen asignaturas de Matemática Específica y Formación General. Además, es importante destacar que para aprobar materias del segundo ciclo se deben aprobar previamente, como mínimo, 2/3 partes de las asignaturas del primer ciclo y Práctica de la Comunicación Oral y Escrita.

A continuación, en la figura 3, mostramos un gráfico con los porcentajes de cada una de estas categorías o tipos de asignaturas en función de cantidad de materias totales (38) y horas. Cabe mencionar que, para acceder el título de Profesor/a en Matemática, también se requiere la acreditación de conocimientos de al menos un Idioma Extranjero, pero el mismo no se considera dentro de la cantidad de asignaturas totales ni en la carga horaria del plan de estudios.

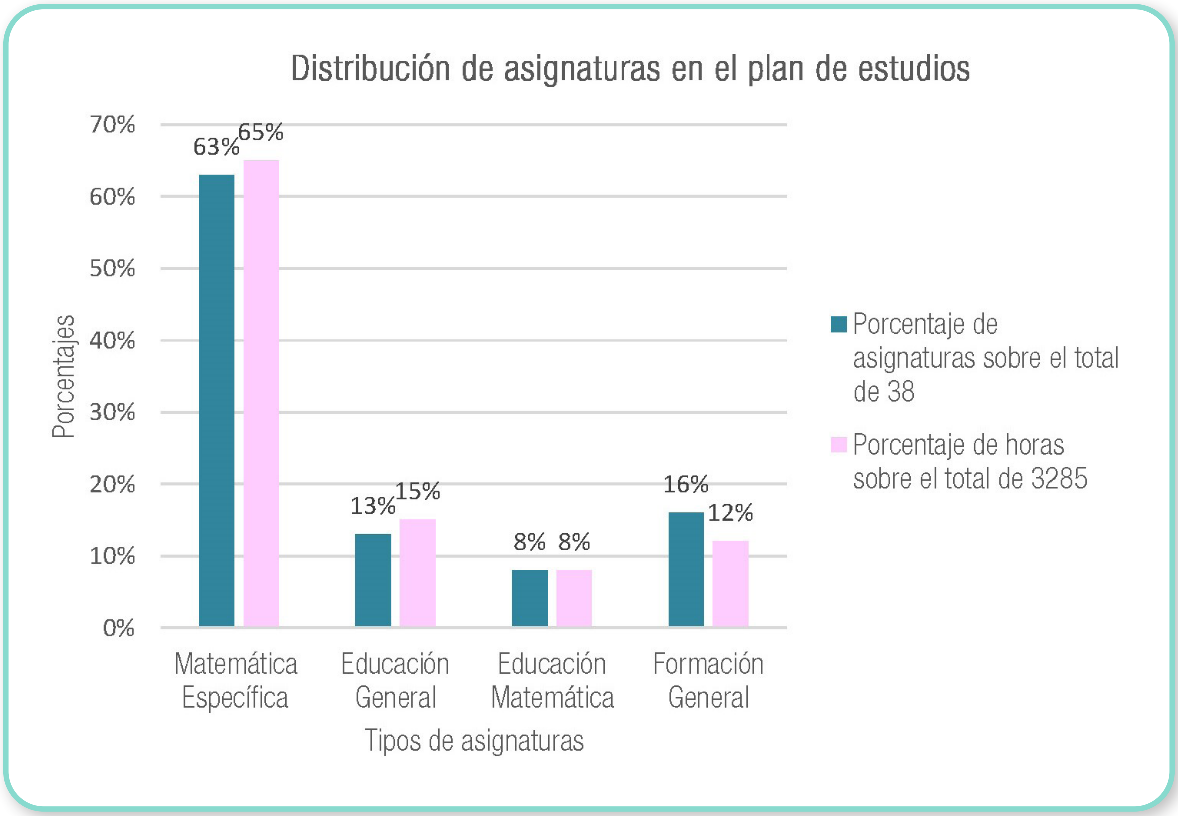


FIGURA 3 | *Gráfico de porcentajes de asignaturas y horas que conforma cada categoría (Fuente propia).*

Al analizar el gráfico (Figura 3) observamos que casi las dos terceras partes de las asignaturas corresponden a la categoría Matemática Específica y además esa cantidad de materias van parejas con la cantidad de horas que se les asigna. Ese hecho indicaría la preponderancia de esas asignaturas en cantidad y horas de clases asignadas lo que podría deberse a la trayectoria de la institución, pues los planes anteriores solo se conformaban con asignaturas de Matemática Específica y Formación General según las categorías que empleamos y delimitamos. Estas reflexiones nos dan pistas para pensar la trayectoria educativa en el marco de la carrera llevada adelante por las/os futuras/os profesoras/es y el perfil profesional que se espera lograr en el marco de la carrera.

4.1.3. | CAMBIOS, RUPTURAS Y CONTINUIDADES EN EL DOMINIO GEOMÉTRICO EN LA CARRERA PROFESORADO EN MATEMÁTICA

Con respecto a las asignaturas de geometría en particular encontramos que el plan 1991-2000 incluía tres asignaturas de geometría que se denominaban Geometría I, Geometría II y Geometría III, en donde la primera focalizaba en Geometría Analítica y las restantes en Geometría Sintética. Esta cantidad de asignaturas propias del dominio geométrico se preserva en el plan de estudios 2000 con las denominadas Geometría Euclídea Plana, GEE y Taller de Geometría. De modo general, los temas en estudio de Geometría II se corresponden con los de Geometría Euclídea Plana y los de Geometría III con los de GEE. La asignatura Taller de Geometría propone un trabajo en el que se profundizan y sintetizan las nociones geométricas abordadas en las asignaturas de Geometría anteriormente mencionadas. Es decir, en el plan vigente en la actualidad estas tres asignaturas focalizan en el desarrollo de nociones y modos de trabajo propios de la geometría sintética. Con respecto a los contenidos propios de la geometría analítica, fueron distribuidos en la asignatura Matemática Básica y en las Álgebras Lineales.

Luego de realizar un estudio de los programas de la asignatura Geometría III (1991-2000) y GEE (2000-2018) encontramos que el programa actual proviene de una historia de enseñanza. Esto se hace evidente en el orden y los temas que se esperan abordar en la asignatura. Pues, en los programas más antiguos (e.g. 1993; 1995; 1997; 1999) se abordan los siguientes temas: enlace, ordenación y sentido en el espacio, los movimientos y la congruencia en el espacio, poliedros y cuerpos redondos, homotecia y semejanza en el espacio, área, equivalencia de cuerpos y volumen y plano proyectivo. Cabe mencionar que en el año 1999 se incorpora el empleo de un software de geometría dinámica bidimensional, lo que muestra la incorporación de medios que potencian la visualización geométrica.

Desde entonces se han realizado recortes en los programas de la asignatura, pero se mantiene en general el anterior orden y los temas en estudio. Específicamente, reconocemos algunos cambios importantes, como ser, desde el 2007 la ausencia del trabajo con el plano proyectivo. Además, desde el año 2009 se hace explícita la incorporación de un software de geometría dinámica tridimensional lo que puede influir positivamente en instancias de visualización y en el empleo de propiedades geométricas al producir construcciones, puesto que, tal como mencionan Borba y Villarreal (2005) los conocimientos puestos en juego y la construcción de los mismos se encuentran atravesados por los medios que se emplean.

También evidenciamos que en la bibliografía predomina el libro "Curso de Geometría Métrica" de Puig Adam (1980) y el material de cátedra escrito por las docentes de la asignatura.

Con respecto a ese material destacamos que, en general, sigue la organización axiomática propuesta por Puig Adam (1980), aunque se modifican algunas definiciones o teoremas. Además, señalamos que este mismo libro (Puig Adam, 1980) es la principal bibliografía en uso en la actualidad en la asignatura Geometría Euclídea Plana de la FHUC.

Las asignaturas Geometría Euclídea Plana y GEE poseen algunas características determinadas que se hacen explicitas en los programas 2018. Específicamente, en el programa de cátedra de Geometría Euclídea Plana (2018)[27] se señala que la misma "estudia las propiedades del plano y resulta ser el modelo más accesible, en dos dimensiones, del mundo construido por el hombre. Se hace un enfoque axiomático, lo que provee un acabado ejemplo de un sistema hipotético deductivo" (p.1). Mientras que en el programa de GEE (2018) se afirma que "se desarrolla la geometría en tres dimensiones y tiende a complementar el trabajo realizado en dos dimensiones desarrollados en Geometría Euclídea Plana" (p.1). Además, se señala que:

> La geometría no es una colección al azar de verdades que describen las propiedades espaciales de los cuerpos, sino un sistema científico basado en leyes estrictas. En este sistema cada teorema se enlaza lógicamente con las proposiciones establecidas previamente y esa relación es la que se descubre mediante la demostración. (p.1)

Lo recuperado en esta sección nos otorga pistas para pensar algunas perspectivas o estilos de trabajo actuales al interior de la asignatura GEE. También, evidenciamos que la bibliografía y modos de presentación se encuentran en relación con el modo de presentación del método axiomático deductivo de Euclides. Estas consideraciones, tal como mencionan Reid y Knipping (2010) pueden influir en que el estudiantado considere que el avance de la geometría se realiza por acumulación de conocimiento, dado que la prueba euclidiana comienza con un teorema cuando en realidad el análisis de la prueba concluye con el mismo. Estos autores, manifiestan también que esta forma de ver la prueba atraviesa la propia historia de la prueba matemática y ha tenido un impacto significativo en su enseñanza, cuestión que no pareciera ser ajena a la realidad actual de la asignatura GEE.

4.1.4. | REFLEXIÓN CON RESPECTO AL DESARROLLO DE LA ASIGNATURA GEE EN 2018

La asignatura GEE actualmente se cursa en el primer cuatrimestre del tercer año, previamente el estudiantado cursa asignaturas de la categoría Matemática Específica (Álgebra

[27] Preservamos el anonimato y por cuestiones éticas en referencias bibliográficas no se citan estos textos.

Lineal, Cálculo, Matemática Discreta, etc.). Además, para acceder al examen final de GEE las/os futuras/os profesoras/es deben aprobar previamente Geometría Euclídea Plana.

El plan de estudios, tal como se menciona anteriormente se organiza en dos ciclos. Sin embargo, teniendo en cuenta el régimen de correlatividades estipulado, se realiza por parte de la dirección de la carrera una oferta de cursado. En particular, antes de ingresar al cursado de GEE la sugerencia de cursado que se ofrece al inicio de cada año a las/os estudiantes, que distribuye las asignaturas del plan de estudios en los cinco años de duración propuestos para la carrera, recomienda que las/os futuras/os profesoras/es cursen diversas asignaturas: 9 de Matemática Específica, 5 de Formación General y una de Educación General. A su vez, en paralelo con GEE (6 h semanales) se propone el cursado de Matemática Discreta II (6 h semanales), Política Educativa y Organización Escolar (6 h semanales) y Cálculo III (8 h semanales). Esta información pone de manifiesto que posiblemente quienes se involucran con el escenario educativo de MM no hayan abordado en el desarrollo de la carrera nociones propias de la Educación Matemática ni de la Didáctica en general.

A su vez, entre las futuras profesoras[28] que participan encontramos que varias de ellas ya han cursado con anterioridad la asignatura, cuestión que puede deberse a que no lograron cumplir con los requerimientos para regularizarla o eventualmente se les venció la regularidad antes de poder aprobarla. Por esto, y en pos de comprender y conocer más aún el terreno solicitamos en la universidad nacional argentina en la que enmarcamos el estudio datos en lo que atañe a condición obtenida por el estudiantado en los últimos años (desde la facultad no encuentran el acta correspondiente a los años 2005 y 2017 por lo que esos datos no se hacen evidentes). Destacamos que la información otorgada por la universidad muestra datos con respecto a tres categorías[29] que pueden obtener las/os futuras/os profesoras/es al finalizar el cursado: abandona, regular o libre; sin embargo, hasta el año 2010 solo se nos proporciona información con respecto a dos, regular o libre (dentro de esta categoría se incluyen las personas que abandonan el cursado).

[28] A partir de este momento cuando referenciamos estrictamente lo sucedido en el trabajo empírico hablaremos en género femenino.

[29] En la actualidad las categorías son más detalladas, por ejemplo: abandonó, libre, libre por inasistencias, promoción pendiente, renuncia, etc. Sin embargo, limitamos los datos a las tres categorías de las que se proporciona información por la universidad en estudio. Estos resultados no permiten conocer con precisión lo sucedido, por ejemplo, estudiantes que nunca cursaron figuran como que abandonaron o libres por inasistencia (cuando en realidad la asistencia no es obligatoria). Es decir, se presentan algunas contradicciones entre la legislación y las planillas que luego se deben completar lo que dificulta conocer con precisión lo ocurrido.

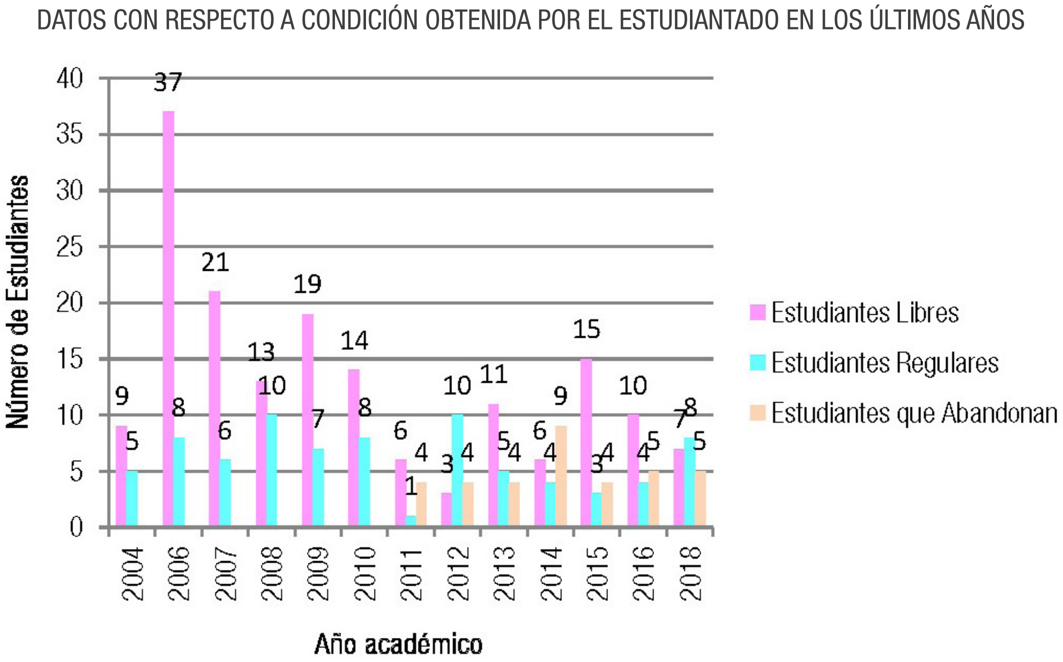


FIGURA 4 | *Gráfico de condición obtenida por estudiantes en la asignatura GEE (Fuente propia).*

Los datos que presentamos muestran que muchas veces el estudiantado no alcanza la condición de regularidad. Para explicar lo requerido para lograr tal condición retomamos palabras[30] de la Profesora Laura[31] de la asignatura al explicar lo solicitado en el año 2018. Esta explicación se realiza en la primera clase y muestra también la perspectiva adoptada por el equipo de cátedra con respecto al trabajo en el dominio geométrico. Cabe mencionar que el equipo de investigación no estaba al tanto de que se realizaría esta presentación antes de comenzar con el escenario educativo diseñado, pero resulta relevante porque es parte del terreno. A su vez, las reflexiones que se realizan pueden influir en la información en estudio en el marco de nuestra investigación y ponen de manifiesto el auténtico terreno. Ese hecho la vez guarda coherencia con decisiones metodológicas como se hará notar en el próximo capítulo.

[30] Las transcripciones textuales se presentan en la variedad dialectal del español rioplatense. Disponible en: https://www.rae.es/dpd/voseo

[31] Este nombre es ficticio con el fin de preservar la anonimidad de la profesora. Destacamos que esta profesora es quien interviene predominantemente durante todo el desarrollo del escenario de MM y se encuentra durante todas las clases en las que el misma se desarrolla.

En primer lugar, la docente explica al estudiantado que en las tres primeras semanas (tiempo que dura la puesta en juego de la vivencia educativa de MM) se trabajará *"de un modo distinto al que ustedes, a lo mejor, trabajaron hasta ahora"* [32], y pregunta: *"¿Cómo fueron trabajando hasta ahora, desde que están acá en la facultad en las distintas materias? ¿Cómo se desarrollaban las clases?"*. Estas preguntas solo fueron respondidas por una de las estudiantes que llamamos Ludmila y plantea: *"En particular para mí, generalmente yo llegaba y el profesor era el que volcaba los nuevos conocimientos, digamos. Por ejemplo, yo no tenía en general, lectura previa".*

En segundo lugar, la Profesora Laura explica el modo de trabajo que se emplea en la asignatura GEE:

> *Hay gente que ya cursó Geometría [Se refiere a GEE] y sabe que nosotras tenemos un sistema de trabajar en Geometría que no es lo que decía Ludmila, no es el modo en que decía Ludmila.* [...] *Nosotras tenemos un módulo donde tenemos desarrollados los contenidos y un cronograma en el que tenemos previsto en cada semana y clase por clase qué es lo que vamos a desarrollar. La idea es que ustedes traigan visto el tema, leído el tema, marcadas las dificultades que les surgieron en esa lectura y que cuando vengamos a la clase siguiente trabajemos en función, esos temas, en función de esas dificultades que ustedes encontraron. La idea no es que traigan estudiado el tema que vamos a desarrollar, pero si visto porque si nosotras venimos y desarrollamos un tema, ustedes están sentados, reciben el tema y las dificultades se les presentan cuando van a estudiar ese tema para el parcial o para el final. Nuestra idea es que ustedes puedan trabajar en la Geometría Euclídea, Espacial en este caso,* [...] *en particular en la Geometría Euclídea como trabajó Euclides.*

Posteriormente la docente realiza algunas preguntas a partir de las cuales las estudiantes señalan que en geometría se establecen axiomas que no necesitan demostración y luego se deducen propiedades que deben demostrarse. A continuación, la profesora Laura señala:

> *Tenemos un conjunto de axiomas, ese conjunto de axiomas, ustedes, uno comienza a decir, a dar determinadas definiciones que no pueden contradecirse con los axiomas y en función de esos axiomas y las definiciones vamos demostrando propiedades y a partir de esas propiedades vamos demostrando otras. Esa elección de axiomas ya está determinada, pero la elección del modo en que vamos demostrando las propie-*

[32] En esta tesis todas las transcripciones textuales de audio, video o producciones escritas de estudiantes o profesoras se colocan en letra itálica (cursiva). Además, respetamos el formato APA 7 para citas textuales teniendo en cuenta si los fragmentos poseen más o menos de 40 palabras.

dades no es lineal, no es siempre la misma, por eso ustedes van a encontrar además del módulo, se lo vamos a dar recién la tercera semana para que no interfiera con lo que vamos a hacer ahora. Además del módulo ustedes van a encontrar una guía en la que están todas las propiedades en el orden que las vamos demostrando, porque ustedes no tienen por qué recordar el orden de las propiedades, si ésta la tenía o no la tenía para […] *poder demostrar propiedades. Ese conjunto de propiedades ustedes lo van a tener siempre, en clase, en los parciales, en los finales. Porque lo que nos interesa y por eso les dimos que ustedes lean y marquen las dificultades de lo que vamos a desarrollar, es que ustedes puedan hacer una demostración. Porque no puedo acordarme o memorizarme 50 o 60 demostraciones, entonces yo digo bueno, para hacer esta demostración tengo todas estas propiedades, bueno, a ver qué propiedades puedo tomar para hacerla, me sirven, no me sirven, eso es un poco la idea. Entonces cuando ustedes presenten la dificultad veremos si la dificultad está en sí en el tema que estamos tratando, o en la demostración, o a ustedes se les ocurrió que podían hacer una demostración diferente. Entonces ese es el modo en que nosotros queremos trabajar, pero para eso necesitamos que ustedes tengan las lecturas que tienen que tener y marquen cuáles son, según ustedes, las dificultades que les ocasionó una demostración u otra.* […] *Las clases son teórico-prácticas.* […] *En teoría ustedes también van a hacer demostraciones. O sea, nosotras queremos que ustedes hagan sus propias demostraciones.*

En tercer lugar y una vez descripta la modalidad de trabajo que se emplea en las clases la Profesora explica las condiciones para regularizar y promocionar la asignatura:

Para regularizar ustedes tienen que obtener en el parcial 50% o más y además tienen que aprobar un taller[33] *que hacemos en Geometría, aprobar ese taller es cuando nosotros les demos el tema particular que lo vamos a hacer en la tercera semana a ese taller porque vamos a tomar la temática que vamos a trabajar ahora, aprobar ese taller que es presentar un trabajo escrito y defender oralmente ese escrito, ya después cuando estemos...* […] *Para promocionar 75% o más de un parcial también teórico práctico y aprobar el taller.*

En ambos casos, para regularizar o para promocionar se puede recuperar el parcial considerando lo que significa la palabra recuperar. La palabra recuperar significa que yo borro el anterior y tomo el nuevo, ¿está? Entonces ese es el con-

[33] En el siguiente capítulo (capítulo V) se ofrecen detalles del taller en el marco del escenario de MM diseñado por las investigadoras.

cepto que en la cátedra tenemos de recuperar. Recuperar significa descarto el otro totalmente y tengo un parcial nuevo.

El parcial es el 05/06 y el recuperatorio el 21/06. Esas son las fechas y en general las fechas son inamovibles porque una vez que pusimos la fecha ustedes son de diferentes años, están cursando diferentes materias, mover un parcial es muy complicado. En general, nosotras de acuerdo al cronograma tenemos el tiempo suficiente como para poder desarrollar para esa fecha los temas que va a tratar el parcial, pero en cualquier caso sino preferimos modificar los temas a modificar la fecha, ¿sí? […] *Si ustedes promocionan, promocionan la parte más gruesa y más pesada de la materia.* […] *Son las primeras tres unidades del programa que son más pesadas* […] *en el examen final lo que tienen es un coloquio integrador y un examen que va a constar de esa segunda parte que es la que no entró en el parcial, porque ustedes la primera ya promocionaron. Para los que regularizaron también tienen un coloquio que es una cuestión más conceptual de la materia y después un examen que tiene todos los contenidos que desarrollamos en la materia. En el examen, sí vas a tener si sos libre, un punto o dos en los que obligatoriamente vas a tener que trabajar con GeoGebra, de todos modos, ustedes pueden usarlo, trabajarlo, tenerlo el resto.*

Las transcripciones anteriores contienen expresiones e ideas presentadas por la Profesora Laura que dan cuenta del escenario educativo que las docentes de la asignatura proponen para el curso regular del año 2018 de GEE, que se desarrolla en el terreno institucional dado. En el marco de la presente investigación proponemos, por un período acotado de tres semanas, un escenario MM. Este último, en interacción con el terreno, constituyen el contexto educativo en el que se encuadran las actividades de MM.

Luego de explicar las condiciones, la docente señala que el taller que se lleva adelante y deben aprobar para regularizar y/o promocionar es obligatorio y que constituye el cierre de estas primeras clases en las que se desarrolla la vivencia de MM, por lo que les sugiere explícitamente que asistan en el desarrollo de las tres primeras semanas de cursado a las clases porque el mismo se vincula con lo que se evaluará y, desde luego, es completamente relevante para nuestra investigación. A pesar de esto, destacamos que por normativa de FHUC, la asistencia a clases no es condición obligatoria para regularizar y/o promocionar.

Además, es relevante para nuestro estudio señalar que en el desarrollo de la asignatura GEE las clases se llevan adelante en las salas de informática de la facultad en la que se enmarca el estudio, por lo que las/os futuras/os profesoras/es disponen de computadoras con acceso a Internet y, en particular, con el software de geometría dinámica *GeoGebra*. Con respecto al empleo de este último, cabe mencionar que hasta el año 2016 se empleaba otro software que no era de uso libre, sin embargo, al empezar a pensar en la presente investigación, la tesista realiza una colaboración con los docentes de la cátedra en el marco de una adscripción en docencia que focaliza en el diseño e implementación de consignas en las que se utiliza este software (*GeoGebra* - libre y de código abierto). Además, el trabajo en la adscripción posibilita a la tesista: profundizar el estudio de los conocimientos de la asignatura, conocer con detalles modos de trabajo, profundizar el conocimiento acerca de la utilización del software *GeoGebra* en su aspecto 3D y contrastar entre las opciones que otorga este software y el que se utilizaba anteriormente. Todo este trabajo previo e inmersión en el terreno se realiza no solo en pos de incorporar este software libre y de código abierto en el trabajo diario de las clases de geometría sino también a fin de pensar el diseño a realizarse en el marco de la investigación.

4.1.5 | REFLEXIONES CON RESPECTO AL TERRENO EN ESTUDIO

La descripción realizada es relevante en el marco de las perspectivas teóricas empleadas en la investigación. Realizamos el estudio en un entorno educativo auténtico[34], por lo que consideramos fundamental explicar las modalidades de trabajo y evaluación de la asignatura GEE para comprender la información y poder abordar los objetivos de nuestra investigación.

Es preciso señalar que los medios disponibles en el terreno en el que se lleva adelante la vivencia de MM resultan fundamentales. Adoptamos la noción de humanos-con-medios propuesta por Borba y Villarreal (2005), quienes sostienen que la cognición incluye herramientas (medios) de forma esencial para producir conocimientos. Medios que son constitutivos del conocimiento y transforman no solo las prácticas y los contenidos sino también los modos de conocer. En ese sentido, los medios adquieren un papel central en la construcción del conocimiento. Cabe destacar que los términos utilizados (humanos y medios), reflejan dos ideas: por un lado, la idea de que la cognición es una empresa social (por eso humanos) y, por el otro lado que incluye herramientas (medios) con los cuales se produce el conocimiento.

A su vez, destacamos con respecto al terreno que en el año 2017 realizamos entrevistas biográficas a futuras/os profesoras/es que se encuentran cursando GEE para conocer y obtener pistas con respecto a posibles modos de trabajo y perspectivas con respecto a MM y validación. Del análisis de la información producida en ellas concluimos que el estudiantado

[34] La investigación busca mostrar un entorno en el que se respetan las particularidades del terreno, es decir se respetan características y estilos del trabajo docente natural y la participación estudiantil tal y como es, en este sentido concebimos que la investigación se realiza en un entorno educativo auténtico.

reconoce como actividad principal del quehacer matemático la resolución de problemas, y no hay indicios que den "cuenta de instancias de formulación de problemas, resolución de problemas formulados por ellos" [ellas], "el rol o uso de la experimentación y, vinculado con esto último el rol y sentido de una validación empírica" (Cruz, et al., 2018, p. 114). Además, reconocen específicamente a la demostración matemática como fiable para justificar una conjetura matemática.

Destacamos que la descripción del terreno realizada es especialmente relevante, puesto que enmarca la información en estudio en ocasión del trabajo analítico.

CAP V

PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS SEGUIDOS

5.1. | CARACTERIZACIÓN METODOLÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN

En nuestra investigación, tal como mencionamos en el primer capítulo, en el marco de la temática en estudio focalizamos en núcleos problemáticos que se anidan. Davis y Sengupta (2020), en relación con dicha cuestión, explican que en el campo de la educación matemática en diversidad de investigaciones se estudian sistemas complejos, como ocurre en nuestro caso, lo que implica un esfuerzo con relación a la descripción coherente y unificada de la complejidad en juego.

En la parte dos, los diversos constructos teóricos que recuperamos resultan fundamentales para establecer las perspectivas desde las cuales tomamos posición para abordar los objetivos en estudio. Además, los aportes de Lave (1991) recientemente abordados resultan relevantes para avanzar en la comprensión de las particularidades que atraviesan la información en estudio y profundizan la fundamentación de las perspectivas teóricas tomadas y la relación establecida entre las mismas. A partir de estas consideraciones, en este apartado focalizamos en la descripción de los procedimientos metodológicos a los que apelamos que se encuentran en consonancia directa con las perspectivas teóricas y epistemológicas adoptadas (Lincoln y Guba, 1985).

En primer lugar, caracterizamos este estudio como una investigación cualitativa. Flick (2012) señala que este tipo de investigaciones poseen rasgos esenciales, como ser: “elección correcta de métodos y teorías apropiadas, el reconocimiento y el análisis de perspectivas diferentes, las reflexiones de los investigadores [y/o investigadoras] sobre su investigación como parte del proceso de producción del conocimiento y la variedad de enfoques y métodos.” (p. 18).

Korblit (2007) afirma que los diferentes enfoques que actualmente coexisten en metodologías cualitativas tienen aspectos comunes, entre los cuales destacamos los siguientes:

- El análisis de información involucra la puesta en juego de un trabajo intensivo, si bien se pierde la posibilidad de generalizar, es posible mostrar algunas cuestiones sobre la sociedad (en nuestro caso sobre el contexto educativo) a la que pertenecen las personas involucradas, por lo cual, posiblemente los resultados se pueden ampliar a contextos similares con respecto al que se encuentra en estudio.

El propósito que tiene quien investiga es reconstruir la lógica que rige puntos de vista y acciones llevadas adelante por las personas que se involucran en la investigación. Se pretende, a partir de las explicaciones y/o descripciones densas, comprender los hechos problemáticos en estudio. Los resultados presentados son "interpretaciones" de el/la investigador/a, en las cuales intervienen sus respectivas trayectorias biográficas y su condición genérica.

Además, dado que se tiene por objetivo comprender sucesos desde la perspectiva del estudiantado, se trata de una investigación interactiva, ya que se emplearán técnicas cara a cara para producir información en un entorno natural y/o auténtico (McMillan y Schumacher, 2005). Es de interés destacar que, tal como señala Flick (2012) en una investigación cualitativa se "estudia el conocimiento y las prácticas de las/os participantes" (p.20).

En segundo lugar, caracterizamos la investigación como estudio de caso, ya que interesa comprender la complejidad y particularidad del mismo (Stake, 1998), específicamente, el caso se define como "un sistema delimitado en tiempo y espacio de actores, relaciones e instituciones sociales" (Neiman y Quaranta, 2006, p. 220). En este sentido, tal como menciona Stake (1998) "el caso es un sistema integrado" (p.16). En nuestra investigación constituye el caso el estudio de vivencias y experiencias de formación de futuras profesoras en matemática en el marco de una asignatura de geometría de una universidad nacional argentina en escenarios de MM en los que se ponen en juego principalmente nociones del dominio geométrico en un entorno educativo auténtico.

Stake (1998) considera que el caso puede ser intrínseco y/o instrumental. En nuestra investigación consideramos es intrínseco, puesto que algunas particularidades vienen dadas tal como se hace explícito en la primera parte de esta tesis y se vinculan con la curiosidad y responsabilidad de aprender sobre formación de profesoras en un terreno particular, focalizando en un grupo de futuras profesoras conformado por quienes cursan la asignatura GEE en 2018, en este sentido la muestra es no probabilística e intencional (Kazez, 2009). Pero también, considerando la finalidad general del estudio, es instrumental. Esto es así pues nos interesan cuestiones que son necesarias investigar y requieren una comprensión general en el campo de la educación matemática. En esta línea, consideramos que a partir de la comprensión sobre el estudio de un caso particular podemos comprender cuestiones más generales vinculadas con la formación docente en escenarios de MM en el marco de trayectorias de formación.

En tercer lugar, consideramos que realizamos una investigación de diseño (Confrey,2006; Bakker y van Eerde, 2015). Bakker y van Eerde (2015) señalan que estas investigaciones resultan pertinentes para cerrar la brecha entre la práctica educativa y la teoría, puesto que permiten desarrollar teorías sobre el aprendizaje y comprender medios que están diseñados para acompañar ese aprendizaje. Es por esto que en este tipo de investigaciones se producen productos útiles (por ejemplo, materiales educativos) e ideas científicas acerca de cómo pueden emplearse en el aula. A su vez, y con relación a nuestra investigación, esta metodología posibilita abordar problemas educativos complejos que deben estudiarse de modo integral (Davis y Sengupta, 2020).

Cabe mencionar también que, en este tipo de investigaciones, tal como menciona Confrey (2006), se diseñan tareas novedosas, se busca conocer recursos y conocimientos previos puestos en juego por estudiantes, modos en que se crean registros, formas en que surgen sentidos, ideas y sus cambios, recursos que se emplean, entre otros.

En sinergia con las/os autoras/es anteriormente mencionados, el grupo The Design-Based Research Collective (2003) afirma que el diseño con fines de aprendizaje toma un lugar preponderante en estas investigaciones y posibilita el estudio sistemático de lo acontecido en el contexto educativo que se investiga. A su vez, este grupo hace explícitas cinco características que se deben cumplir en estas investigaciones:

- Los objetivos del diseño de la vivencia de aprendizaje se encuentran enlazados con el desarrollo de teorías con respecto al mismo.
- La implementación del diseño y la investigación tienen lugar a través de ciclos continuos de diseño, puesta en juego, análisis y rediseño en caso que sea necesario.
- La investigación produce teorías que aportan al campo de la investigación en educación y las/os profesoras/es.
- Los diseños producidos se implementan en entornos auténticos y no solo se hace explicito el éxito o fracaso, sino también las interacciones que fundamentan la comprensión de los problemas involucrados.
- Los métodos que se emplean pueden documentar y conectar acciones con resultados de interés.

Consideramos que la metodología de investigación empleada en nuestra investigación resulta adecuada para abordar los objetivos en estudio. Específicamente realizamos el diseño de un escenario educativo que busca promover vivencias educativas vinculadas con el trabajo con modelos y procesos de MM. El escenario se implementa en la asignatura GEE en el año 2018. La información producida y registrada en el marco de dicha implementación es fundamental para dar cuenta de los objetivos propuestos en este estudio.

Además, luego de la puesta en juego del escenario educativo apelamos a “entrevistas narrativas” (Flick, 2012, p.111) y grupales que posibilitan repensar y reconstruir emergentes en el marco de la propuesta de enseñanza. Cabe mencionar, por un lado, que las entrevistas grupales permiten obtener información que proporciona clarificación acerca de acontecimientos que se llevaron adelante de modo grupal en el aula, a su vez, la interacción estimula y potencia el recuerdo de la vivencia educativa (Flick, 2012). Por otro lado, las entrevistas narrativas presentan preguntas que se consideran generadoras de narración y refieren al tema en estudio, de modo tal de estimular a las entrevistadas a expresar su relato sobre acontecimientos que vivieron y son de interés en el ámbito de la investigación en la que se enmarca dicha entrevista (Flick, 2012). Flick (2012) señala que estas preguntas iniciales deben formularse de forma amplia, pero a su vez, lo suficientemente específicas, con el fin de que, en la conversación, se ponga en juego el dominio de experiencia de interés por quien se encuentra investigando. A su vez, el autor señala que es relevante realizar una guía previa a la entrevista, dado que el trabajo que realiza quien investiga al diseñar dicha guía asegura que se obtenga información útil en relación con la investigación y, si bien se permite improvisar la participación de el/la entrevistador/a, la guía estimula que no se pierda la entrevista hacia temas que no están relacionados con el/los objetivo/s de investigación.

5.1.1 | REFLEXIONES Y DECISIONES PREVIAS AL DISEÑO DEL ESCENARIO DE MM

Previo al diseño del escenario de MM se tomaron un conjunto de decisiones con respecto a fines educativos e investigativos que atravesarían el diseño. Tales decisiones consideran tanto las demandas de la asignatura GEE como los objetivos de investigación.

Desde una perspectiva educativa, se buscaba que el escenario de MM a diseñar propusiera un trabajo en la asignatura GEE que involucre la enseñanza, el aprendizaje y la reflexión sobre nociones de la didáctica de la matemática y de la geometría de modo enlazadas y entrecruzadas. En particular, se aspiraba a lograr, por un lado, la promoción de atribución de sentidos a procesos de MM y validación y, por otro lado, producción y análisis de nociones propias del dominio geométrico.

Además, pensábamos el diseño y su respectiva estructuración teniendo en cuenta el terreno en el que llevaríamos adelante la investigación y enfatizando en quienes se involucrarían con el escenario educativo, es decir, futuras/os profesoras/es. Esta última particularidad, resulta relevante debido a que, si bien el programa de formación docente de la universidad argentina en la que se enmarca el estudio entró en vigencia en el año 2000 y no promueve con énfasis el trabajo con MM, se espera que al egresar y convertirse en profesionales que ejercen el rol docente puedan desempeñarse en las escuelas de hoy en día. En este sentido, es relevante destacar que las/os futuras/os docentes se incorporan en general al sistema educativo argentino que, en la actualidad, propone el trabajo con MM y validaciones diversas (NAP, 2011; Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje en Matemática, 2018).

Destacamos que tomaba especial relevancia el considerar que en la formación de futuras/os profesoras/es es importante, tal como se evidencia en el capítulo dos, que en las vivencias que conforman la trayectoria educativa logren desarrollar la capacidad de agencia frente a diversas cuestiones que atraviesan. Más aún, considerando que las/os docentes deben estar preparados para afrontar los constantes y rápidos cambios que surgen en el sistema educativo y en las sociedades actuales (Giddens, 1997). En este sentido, consideramos que a pesar de la presencia de políticas de formación continua a las que podrían acceder las/os egresadas/os de la carrera de Profesorado en Matemática, debían tener oportunidades para desarrollar la capacidad para actuar reflexivamente y en función de metas claras en situaciones diversas.

Para diseñar el escenario que buscaría promover una vivencia de MM tuvimos en consideración el programa de la asignatura GEE y los temas que se deben cumplimentar en el desarrollo de la misma. Es por esto que, previo a iniciar el diseño, realizamos una reunión con las docentes a cargo de la asignatura y acordamos diversas cuestiones. En primer lugar, escoger poliedros como tema matemático principal para abordar en el escenario de MM. Dicho tema no había sido desarrollado con anterioridad en las asignaturas previas de la carrera Profesorado en Matemática. En segundo lugar, en pos de llevar adelante la vivencia educativa en un entorno auténtico las tres profesoras del curso asumirían el rol docente durante las clases. Específicamente la profesora con mayor antigüedad en el desarrollo de la asignatura tomaría el rol preponderante y las otras dos docentes participarían en menor medida realizando breves intervenciones. En tercer lugar, la temática poliedros se encuentra entre los contenidos propuestos por la cátedra en la primera unidad, por lo que el escenario de MM se llevaría adelante en 17 horas, organizadas en 5 clases de 3 horas cada una y una de 2 horas, durante las tres primeras semanas de cursado.

5.1.2. | PRIMERAS DECISIONES CENTRADAS EN LA MM Y CONSIDERACIONES PARTICULARES COMO RECURSOS PARA EL DISEÑO DEL ESCENARIO

En el marco de la temática poliedros pensamos tres ciclos de MM que se llevarían a cabo y propondríamos en el diseño educativo buscando constituir el escenario de MM. Atendiendo a lo mencionado establecemos dos problemas al empezar a formular el diseño educativo, el primero solicita determinar qué figura o figuras (de un conjunto de figuras dadas) es un poliedro[35] y el segundo invita a conjeturar si existe alguna relación entre el número de vértices, de aristas y de caras de un poliedro[36]. De este modo, el avance sobre el primer problema, permite adentrarse en el segundo con un trabajo previo de reconocimiento de variables pertinentes para problematizar y avanzar en el estudio de poliedros. Además, decidimos que se propondría la formulación de problemáticas por parte del estudiantado con el fin de lograr la puesta en juego de un proceso de MM completo, dado que las futuras/os profesoras/es en interacción con las docentes delimitarían libremente un problema a modelizar y buscarían los medios para hacerlo (Esteley, 2014).

Las decisiones y problemáticas determinadas al comenzar con el diseño del escenario educativo de MM buscan preservar el entorno educativo auténtico, pues la MM se incorpora en una asignatura con un programa estructurado. En este sentido, resultó relevante considerar que en la asignatura GEE se estipulan desarrollar diversidad y gran volumen de contenidos matemáticos, principalmente geométricos. A su vez, posee especial relevancia el considerar que quienes se involucran son futuras/os profesoras/es, pues consideramos relevante el estimular en el diseño el trabajo en interacción que busca conexiones entre discusiones didácticas y matemática con futuras/os profesionales de la enseñanza.

En esta línea, el diseño guardaría vínculos con la perspectiva de modelización como contenido (Julie y Mudaly 2007) y como vehículo acorde a las demandas del terreno institucional, sin dejar de concebir a la matemática como una ciencia dinámica en el sentido de Bassanezi (1994). Esa decisión se toma a fin de cumplimentar con requerimientos curriculares y está en sintonía con la idea de Lewis (2021) de proponer el trabajo con MM como un puente entre la modelización como contenido y como vehículo a fin de adecuar el trabajo docente a las exigencias de las instituciones o de los diseños curriculares vigentes.

Decidimos también que en diversos momentos del diseño se propondría una reflexión con respecto a la MM y a la validación en el ámbito del trabajo matemático, puesto que buscaríamos promover y favorecer reflexiones vinculadas a la producción matemática y sus vínculos con nociones didácticas.

Además, concebimos los procesos de enseñanza y de aprendizaje como un espacio en el que emergen conocimientos, por lo que posicionamos la clase, y por tanto atravesaría nuestro

[35] Tomamos esta decisión debido a que esperábamos trabajar con definiciones y, específicamente la de poliedro como tal no se abordaba en la asignatura hasta 2018. Solo se abordaba la definición de poliedro convexo en la primera unidad.

[36] Esta problemática se vincula con los contenidos estipulados por el programa de la asignatura a ser llevado a cabo, a saber: propiedad general de las figuras convexas.

diseño, la noción de comunidad de práctica (estudiantes y docente). En las comunidades de práctica se negocian significados entre los participantes, se trabaja en conjunto hacia objetivos comunes y el aprendizaje puede ser reconocido por cambios en las identidades personales de los miembros de la comunidad (Forman, 2014).

Además, y en estrecha relación destacamos que:

> Las comunidades de práctica en la formación de profesores/as en matemática se basan en una teoría del aprendizaje como participación social, en la que el aprendizaje y el desarrollo de los/as profesores/ras se conceptualizan como una participación creciente en prácticas sociales que desarrollan una identidad como profesor/a[37]. (Goos, 2014, p. 82).

5.1.3. | CONSIDERACIONES GENERALES DEL DISEÑO DEL ESCENARIO EDUCATIVO DE MM

El escenario educativo que diseñamos se conforma de cinco momentos. En los momentos uno y cinco se pone énfasis en discusiones que versan sobre la noción de MM y validación (ambos objetos de aprendizaje y enseñanza). En el momento dos y cuatro se abordan los dos problemas en el marco del proceso de MM propuestos por las investigadoras (el primero propone estudiar qué figura o figuras, de un conjunto de figuras dadas, es un poliedro; y el segundo propone estudiar posibles relaciones entre el número de vértices, de aristas y de caras de un poliedro). Finalmente, en el momento cinco, proponemos la elección de un tema y formulación, resolución y presentación de un problema por parte de las futuras profesoras. A continuación, sintetizamos lo mencionado anteriormente (Ver tabla 3).

[37] Traducción propia del original en Inglés.

TABLA 3 | *Momentos del escenario educativo (Fuente propia).*

MOMENTO	ACCIONES Y DESCRIPCIÓN	
MOMENTO 1	Reflexión y discusión con respecto a modelización y validación	Sentidos iniciales Reflexión en torno a autores
MOMENTO 2	Primer proceso de modelización matemática	Tema: Poliedros Problema: Estudiar qué figura o figuras (de un conjunto de figuras dadas) representa un poliedro
MOMENTO 3	Reflexión con respecto a modelización y validación con relación al primer proceso de modelización matemática	Sentidos producidos con relación al primer proceso de modelización matemática
MOMENTO 4	Segundo proceso de modelización matemática	Tema: Poliedros Problema: Estudiar posible/s relación/es entre número de vértices, aristas y caras de un poliedro
MOMENTO 5	Tercer proceso de modelización matemática	Tema/s y problema/s formulados por las futuras profesoras

Para configurar el escenario educativo se diseñan 8 consignas. Para cada uno de los momentos anteriormente aludidos se propone/n una/algunas consignas a las futuras profesoras con el fin de avanzar en el desarrollo de los procesos de MM e incentivar la reflexión con relación a los procesos de MM y validación en sí mismos. Sintéticamente, las consignas invitan a realizar las acciones que se muestran en la siguiente tabla (ver tabla 4).

TABLA 4 | *Acciones propuestas para los diferentes momentos (Fuente propia).*

MOMENTO	ACCIONES QUE SE PROMUEVEN A TRAVÉS DE LAS CONSIGNAS
MOMENTO 1	1 - Reflexionar con respecto a quehacer matemático, modelización matemática y validación 2 - Reflexionar, a partir de aportes de autores, con respecto a modelización matemática y validación
MOMENTO 2	3 - Caracterizar 18 figuras tridimensionales 4 - Caracterizar dos grupos de figuras tridimensionales, poliédricas y no poliédricas 5 - Analizar y contrastar la definición de poliedro producida con definiciones de poliedro presentadas en libros de textos
MOMENTO 3	6 - Narrar acerca del proceso seguido para definir poliedro
MOMENTO 4	7 - Estudiar relaciones entre el número de caras, vértices y aristas de figuras poliédricas
MOMENTO 5	8 - Formular, resolver y comunicar problemas geométricos

5.1.4. | MOMENTOS DEL ESCENARIO EDUCATIVOS: CONSIGNAS, OBJETIVOS, TIEMPOS Y MODALIDADES DE TRABAJO. PRIMERAS ESCENAS DE UN DISEÑO AUTÉNTICO

Los momentos y las respectivas consignas que se desarrollan en cada uno de ellos se organizan en las 6 clases a partir del consenso al que arribamos con las docentes de la asignatura GEE. A continuación, presentamos cada momento con sus respectivos objetivos generales, consignas, objetivos de cada consigna en particular, tiempos que se destinaron, modalidad de trabajo por cada consigna y en algunos casos aclaraciones de la consigna o aclaraciones generales del momento.

MOMENTO 1

El momento 1 tiene por objetivo que las futuras profesoras logren reflexionar, analizar e interpretar tres nociones: quehacer matemático, MM y validación. En el desarrollo del mismo se proponen dos consignas para ser trabajadas en un total de 150 minutos.

TABLA 5 | *Consigna 1 (Fuente propia)*[38].

Lean en grupos los siguientes interrogantes y discutan posibles respuestas a los mismos. Luego realicen una narración en la que recuperen las respuestas de todos los integrantes del grupo (explicitando los acuerdos y desacuerdos que hayan surgido durante las discusiones): *a - ¿Cuáles son las actividades que lleva a cabo una persona que hace Matemática?* *b - ¿Qué entienden por proceso de validación en instancias del trabajo matemático?* *c - ¿Qué entienden por proceso de modelización matemática?*

Objetivo de la consigna 1: Que las futuras profesoras logren reflexionar, explicar, consensuar ideas con respecto a quehacer matemático, MM y validación a partir de vivencias previas a la asignatura GEE.

Tiempo destinado a la consigna 1: 60 minutos.

Modalidad de trabajo en la consigna 1: Se propone que se trabaje en grupos. En ese momento, participan 15 futuras profesoras que se organizan libremente en cuatro grupos, 3 de 4 estudiantes y uno de 3. Cada grupo interacciona y produce las narrativas solicitadas.

TABLA 6 | *Consigna 2 (Fuente propia).*

a - A continuación, se presenta uno de los posibles esquemas en el que se muestra un proceso de modelización (cuyo autor es Bassanezi) y se explicita el modo en que se utilizan algunos términos presentes en el esquema. Interpreten lo presentado a fin de responder qué es o cómo se puede entender un proceso de modelización. *b - Además de considerar la visión de validación propuesta por Bassanezi, se presenta la de Balacheff (2000) acerca de proceso de validación. A partir de los aportes de estos dos autores formulen una idea sobre qué es o cómo se puede entender un proceso de validación en el ámbito del trabajo matemático.*

[38] Presentamos las consignas diseñadas y propuestas en la puesta en juego del escenario de MM en letra itálica (cursiva).

Objetivo de la consigna 2: Que las futuras profesoras reflexionen, analicen e interpreten perspectivas sobre MM y validación a partir de la lectura de algunas caracterizaciones de reconocidos autores del campo de la educación matemática (Bassanezi, 2002; Balacheff, 2000).

Tiempo destinado a la consigna 2: 60 minutos.

Modalidad de trabajo en la consigna 2: Las futuras docentes trabajan distribuidas en los mismos grupos que en la consigna anterior.

Aclaraciones generales del momento 1: Una vez desarrolladas las dos consignas en grupos se propone una discusión colectiva en la que cada grupo pone de manifiesto la producción realizada. Las futuras profesoras exponen a la comunidad de práctica la respuesta realizada inicialmente, el análisis de los autores y contrastan ambas producciones. Se destinan 30 minutos para este debate colectivo.

Cabe mencionar que para el desarrollo de la consigna se proporciona el esquema del proceso de MM de Bassanezi (2002) (Ver sección 1 de Anexos) y una caracterización de los subprocesos del proceso de MM, además de la caracterización de proceso de validación propuesta en Balacheff (2002).

También, es importante destacar que el solicitar narrativas permite a las futuras profesoras organizar el trabajo realizado en interacción (Da Ponte, Segurado y Olivera, 2003) y dar cuenta de sus interpretaciones. Da Ponte, et al. (2003) afirman que las narrativas resultan un modo de describir una secuencia de eventos que consideran una forma de conocimiento particular, dado que emerge de la acción: una historia o narrativa es "una forma particularmente ajustada de expresar el conocimiento asociado con la complejidad de acción" (p. 89).

A su vez, Villarreal y Esteley (2017) destacan que "la experiencia vivida produce sentido, pero, al mismo tiempo, las palabras escogidas para relatarla reconfiguran esa experiencia vivida ofreciendo la posibilidad de formación" (p. 26).

En esta misma línea, Villarreal y Esteley (2014) afirman que en el trabajo con futuras/os profesoras/es la producción de narrativas incita a la reflexión y quienes las producen "escudriñan experiencias pasadas y presentes, o proyectan futuros acontecimientos, relacionadas con la enseñanza. Tales narrativas ponen en evidencia situaciones de personas que resignifican y transforman lo vivido en experiencia, transformándose ellos mismos en el proceso (p. 26).

MOMENTO 2

El momento 2 tiene por objetivo que las futuras profesoras logren estudiar qué figura/s (de un grupo de figuras dadas) representa un poliedro. En este momento se desarrollan tres consignas para un total de 390 minutos.

TABLA 7 | *Consigna 3 (Fuente propia).*

Observen las siguientes imágenes (ver figura 5) con el fin de determinar características que poseen. Algunas de tales imágenes representan objetos de la realidad y otras son construcciones realizadas en el Software de Geometría Dinámica GeoGebra. Se presentan representaciones en material concreto para manipular todas las imágenes, salvo de la N°14. Esta última, si lo desean, la pueden buscar en Internet, como "United Tower de Bahréin".

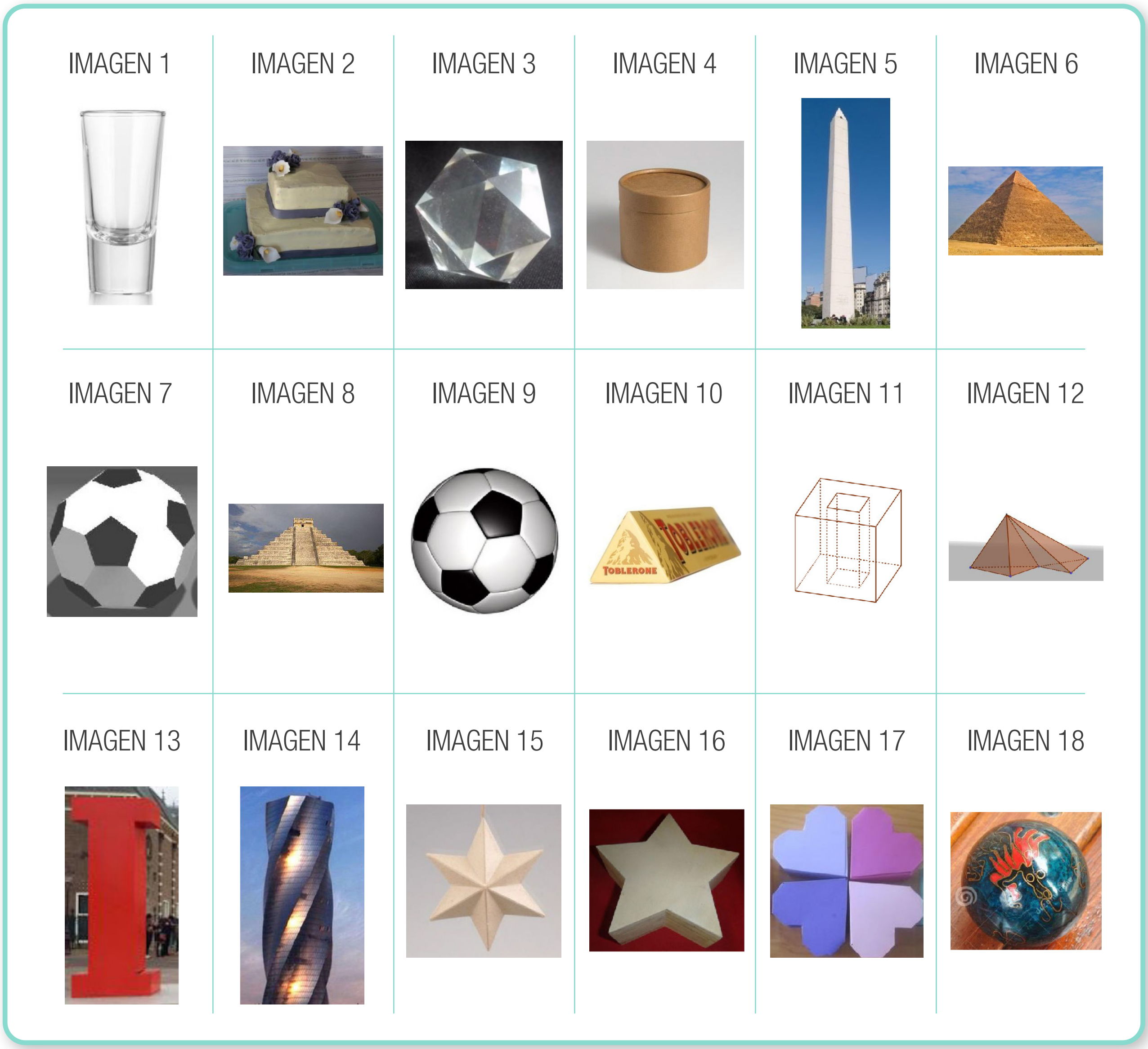


FIGURA 5 | *Imágenes presentadas a las futuras profesoras (Ver fuentes en sección 2 de Anexos).*

Objetivo de la consigna 3: Que las futuras profesoras logren caracterizar, apelando a variables escogidas por ellas, figuras tridimensionales.

Tiempo destinado a la consigna 3: 30 minutos.

Modalidad de trabajo en la consigna 3: Las futuras docentes trabajan en los mismos grupos que en las consignas anteriores y luego se lleva adelante una puesta en común en la que cada grupo comunica a la comunidad de práctica lo realizado.

Aclaraciones con respecto a la consigna 3: Cabe destacar que las futuras profesoras poseen libertad de elección, dado que determinan las características. En este sentido es amplio el abanico de oportunidades de elección: colores, texturas, formas de caras, número de caras, etc.

TABLA 8 | *Consigna 4 (Fuente propia).*

a) Las imágenes presentadas en la clase anterior se organizan en dos grupos. Determinen características geométricas que permitan que se agrupen de ese modo. ¿Qué nombre le podrías al grupo 1?, y, ¿al grupo 2?

b) Representen en el Software de Geometría Dinámica GeoGebra una figura tridimensional que pertenezca al grupo 1 y una que pertenezca al grupo 2 (diferentes a las presentadas anteriormente). Expliquen por qué consideran que dichas representaciones pertenecen respectivamente a los grupos 1 y 2.

c) Discutan con otro grupo las respuestas de los incisos anteriores. Establezcan una única caracterización y determinen dos representaciones en el Software de Geometría Dinámica GeoGebra, una que pertenezca a cada grupo.

GRUPO 1

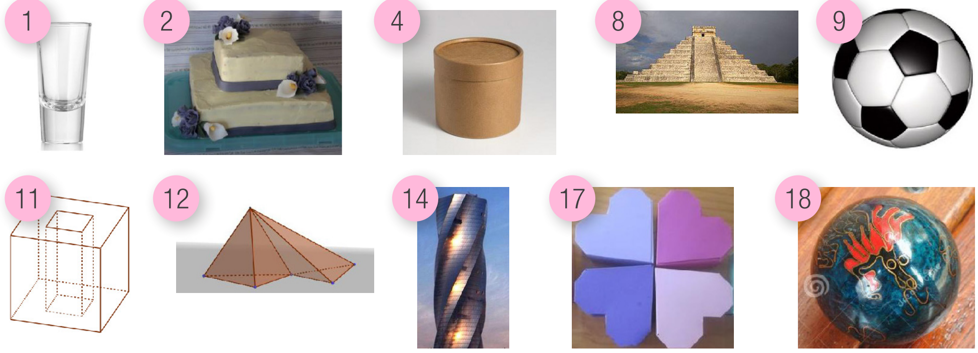


FIGURA 6 | *Imágenes organizadas en dos grupos.*

Objetivo de la consigna 4: Que las futuras profesoras logren reconocer características de figuras poliédricas y no poliédricas, validar sus decisiones, iniciar la construcción de la imagen conceptual de poliedro (Vinner, 1991, iniciar la construcción de figuras geométricas con GeoGebra en su vista 3D, reconocer la equivalencia entre definiciones, entre otros.

Tiempo destinado a la consigna 4: 180 minutos.

Modalidad de trabajo en la consigna 4: En primer lugar, trabajan los incisos a y b de la consigna en cinco grupos, dos grupos de dos futuras profesoras y tres grupos de tres. En un segundo lugar se juntan con otro grupo y responden el inciso c presentado anteriormente. Luego de este trabajo se realiza un debate colectivo, del que emerge una primera definición de poliedro.

Cabe destacar que, si bien se realizan algunos cambios en la conformación de grupos con relación a los de la primera clase, se intenta que las futuras profesoras mantengan grupos con la mayor estabilidad posible en el desarrollo del escenario educativo de MM.

Aclaraciones con respecto a la consigna 4: En esta consigna se propone explícitamente el empleo del software *GeoGebra*, posiblemente hasta este momento las futuras profesoras no habían empleado la vista 3D del mismo. Es decir, se busca que produzcan construcciones, descubran comandos y modos de emplear este software, por ejemplo, el uso de vistas 2D y 3D en simultáneo. Estas últimas cuestiones son propias de procesos de MM, donde emergen conocimientos matemáticos y tecnológicos no conocidos previamente o que no se sabe que surgirán cuando se inicia el mismo (Bassanezi, 1994; Borba y Villarreal, 2005), asimismo, el empleo de diversos medios influye en la propia matemática en juego (Borba y Villarreal, 2005).

También señalamos que realizamos la organización de los grupos de figuras tridimensionales teniendo en cuenta algunas consideraciones planteadas en Lakatos (1986), por ejemplo, considerar que la figura representada con número 12 no es poliedro. Además, respetamos la perspectiva adoptada en la asignatura que concuerda con esta decisión teniendo en cuenta el terreno en el que se enmarca el estudio con el fin de preservar su autenticidad.

Finalmente, cabe mencionar que hubiera sido interesante otorgar mayor libertad a las estudiantes para que organicen las figuras en grupos y seleccionen y relacionen variables. Éstas últimas acciones son realizadas, sin embargo, decidimos presentar algunas direcciones en el marco del proceso de MM en pos de asegurar la producción de una primera definición en el tiempo previsto por la asignatura GEE. En este sentido, consideramos que este modo de trabajo puede iluminar la posibilidad de diseñar escenarios educativos en los que se emplea la MM como abordaje pedagógico y que logren franquear algunas barreras vinculadas con las grandes demandas de tiempo que requiere este tipo de trabajo (Borromeo Ferri, 2018) o la falta de posibilidad de puesta en juego de alguna noción matemática determinada.

TABLA 9 | *Consigna 5 (Fuente propia).*

a) Busquen por lo menos 2 definiciones de poliedros. La búsqueda la pueden realizar en libros de texto, libros de geometría (reconocidos por la comunidad matemática), Internet, entre otros.

b) Decidan y expliquen si las definiciones buscadas recientemente son equivalentes. De las imágenes presentadas en la consigna anterior, ¿existen figuras tridimensionales que cumplen alguna de las definiciones y no otras?

c) Justifiquen si las definiciones buscadas son o no equivalentes a la establecida en la comunidad matemática "clase de geometría". De las imágenes presentadas en la consigna anterior, ¿existen figuras tridimensionales que cumplen alguna de las definiciones y no otras?

d) Preparen una presentación para realizar al resto de la clase en la que se exponga lo pensado en los incisos anteriores. Tengan en cuenta explicitar y argumentar si la definición establecida en la comunidad matemática "clase de geometría" les sigue pareciendo adecuada.

Objetivo de la consigna 5: Que las futuras profesoras logren poner a prueba la producción, incentivando la validación y la toma de decisión acerca de la modificación o no de la definición producida.

Tiempo destinado a la consigna 5: 180 minutos.

Modalidad de trabajo en la consigna 5: Las futuras docentes trabajan en tres grupos, dos de cuatro y uno de cinco. Una vez finalizadas todas las consignas se lleva adelante una puesta en común. Cada grupo comunica a la comunidad de práctica lo realizado y se consensúa una definición de poliedro que se empleará en lo sucesivo.

Aclaraciones con respecto a la consigna 5: Para el desarrollo de esta consigna se llevan diversos libros de secundaria y de geometría euclídea. Además, las docentes a cargo del curso llevan y reparten a algunos grupos una definición formulada por ellas tomando aportes de Puig Adam (1980).

A su vez, destacamos que Winicki–Landman y Leikin (2000) afirman que "cada definición determina un conjunto de objetos que cumplen con las condiciones de la definición. [...] Si dos enunciados diferentes definen dos conceptos y sus conjuntos correspondientes de objetos que los ejemplifican no son disjuntos" (p. 18), pueden ser equivalentes sí y sólo sí el conjunto de objetos sobre el que se discute es el mismo para ambas, caracterización a la que apelamos en la presente investigación.

MOMENTO 3

El momento 3 tiene por objetivo que las futuras profesoras logren reflexionar y recuperar individualmente lo vivido al producir una definición de poliedro focalizando en el proceso de MM y en la validación llevada adelante en el marco de dicho proceso. En este momento se aborda una sola consigna.

TABLA 10 | *Consigna 6 (Fuente propia).*

Tomando como referencia el esquema del proceso de modelización presentado en la clase 1 describan el proceso seguido al interior de la comunidad para arribar a una definición o modelo de la noción de "poliedro". Dentro del proceso de modelización, ¿cómo vivieron la validación?

Tiempo destinado a la consigna 6: 50 minutos.

Modalidad de trabajo en la consigna 6: Esta consigna es llevada adelante de forma individual.

Aclaraciones con respecto a la consigna 6: Se focaliza en la producción de narrativas teniendo en cuenta el valor de las mismas para producir sentidos (Villarreal y Esteley, 2014). Además, si bien en la perspectiva teórica adoptada con respecto a formación docente (Lerman, 2001) y a producción de sentidos (Bajtín, 2000) es importante el trabajo en interacción, proponemos este único momento individual con el fin de invitar a comprender como atravesó lo vivido (Larrosa, 2003) a cada futura profesora. Sin perder de vista que cada producción y vivencia personal se da en el marco de un trabajo colectivo y, en el momento de la narración, cada persona acude a recursos e ideas personales.

MOMENTO 4

El momento 4 tiene por objetivo que las futuras profesoras logren estudiar posibles relaciones entre números de caras, vértices y aristas de un poliedro. En este momento se aborda una consigna.

TABLA 11 | *Consigna 7 (Fuente propia).*

a) Cuando trabajaron con polígonos planos pudieron observar (o no) que el número de lados coincide con el número de vértices. Por ejemplo, el cuadrado tiene cuatro lados y cuatro vértices, el pentágono cinco lados y cinco vértices, etc. Cabe preguntarse entonces, para los poliedros, ¿será posible establecer relaciones entre los números de caras, de vértices y de aristas de los mismos? Invitamos a que levanten o traten de levantar algunas conjeturas al respecto (decir que no o si es también una conjetura).

b) En caso de haber encontrado alguna relación representen en el software de geometría dinámica GeoGebra figuras tridimensionales que la cumplen y en la hoja de cálculo expliciten la relación.

Tiempo destinado a la consigna 6: 100 minutos.

Modalidad de trabajo en la consigna 6: Para esta instancia proponemos que se organicen en 3 grupos, dos de cuatro y uno de cinco. Posteriormente en instancias de trabajo colectivo surgen interesantes discusiones respecto a la posibilidad de validación de las conjeturas establecidas.

Aclaraciones con respecto a la consigna 7: Detrás del abordaje de este problema se hace evidente la relación de Euler. Esta relación forma parte del programa de la asignatura GEE y se consensúa con las docentes que, en el marco de la vivencia educativa de MM propuesta, se trabaje esa relación.

Además, es importante destacar que en el grupo 2 de figuras tridimensionales presentado en la figura 6, los “poliedros” cumplen la relación de Euler. Sin embargo, sería una discusión teórica y epistemológica interesante el analizar si es necesario que todo poliedro cumpla la relación de Euler o no, pero no abordaremos este punto en nuestra investigación, aunque reconocemos el aporte de Lakatos (1986) para pensar en torno a esta cuestión. A su vez, reconocemos que las docentes de la asignatura GEE formulan durante el desarrollo del escenario de MM una definición de poliedro que busca eliminar contraejemplos de la fórmula de Euler para todo poliedro, a pesar de que no se dispone de una demostración que logre probar esta posible conjetura.

MOMENTO 5

El momento 5 tiene por objetivo que las futuras profesoras logren pensar, formular, resolver y comunicar un problema geométrico. Por decisión de las docentes, este momento constituye el taller que todos las/os estudiantes deben acreditar para regularizar y/o promocionar la asignatura. En ese momento se presentan opciones para la consigna 8. La primera opción se destina a estudiantes que participan de la mayor cantidad de momentos del escenario de MM. La segunda opción es para aquellas estudiantes que no participan del escenario de MM o que participan solo en ciertos momentos.

TABLA 12 | *Consigna 8 - primera opción (Fuente propia).*

a) Durante las clases de Geometría Euclídea Espacial llevadas a cabo hasta el momento pensaron y reflexionaron diferentes problemas, por ejemplo, la definición de poliedros, relaciones entre números de caras, vértices y aristas en poliedros, entre otros. Ahora las invitamos a que se hagan preguntas que les surgen a partir del proceso vivido con el fin de que ustedes mismas determinen un problema geométrico.

b) Intenten junto a las compañeras con las que diseñaron la problemática determinar una posible “reflexión” y “respuesta” a la misma. Preparen para entregar en el próximo encuentro un archivo de Word en el que se expliciten de modo detallado sus exploraciones, investigaciones, conjeturas, conclusiones, entre otros. Se sugiere que finalmente presenten una reflexión en la que narren como vivieron el proceso de producción y exploración de su problemática.

b) Diseñen una presentación de 15 minutos para que en el próximo encuentro puedan mostrar a la comunidad “clase de geometría” el proceso llevado a cabo al interior del grupo.

TABLA 13 | *Consigna 8 - segunda opción (Fuente propia).*

a) Se determina la problemática acerca de la posibilidad de validar matemáticamente la relación de Euler. Surgen interrogantes, por ejemplo: ¿cuándo es posible validar la relación de Euler?, ¿cómo se valida?, ¿existen diferentes modos de validarla?, ¿las validaciones que se encuentran son matemáticamente correctas?, entre otros. Determinen una posible "reflexión" y "respuesta" a la misma.

Preparen para entregar un archivo de Word en el que se expliciten de modo detallado sus exploraciones, investigaciones, conjeturas, conclusiones, entre otros. Se sugiere que finalmente presenten una reflexión en la que narren como vivieron el proceso de exploración de su problemática.

b) Diseñen una presentación de 15 minutos para que en el próximo encuentro puedan mostrar a la comunidad "clase de geometría" el proceso llevado a cabo al interior del grupo.

Tiempo destinado a la consigna 8 (para ambas opciones): 330 minutos.

Modalidad de trabajo en la consigna 8: Para esta instancia proponemos que se organicen en 5 grupos, dos de cuatro, uno de cinco, uno de dos y un estudiante que trabaja individualmente. Posteriormente se proponen 120 minutos de exposición y comunicación del trabajo realizado por cada grupo.

Aclaraciones con respecto a la consigna 8: Tal como se hace evidente anteriormente para esta consigna se presentan dos opciones. La primera opción es llevada a cabo por las futuras profesoras que asisten a la mayor parte de las clases, por lo tanto, han trabajado en dos procesos de MM en el marco de la temática poliedros. En este caso se destinan 30 minutos a la formulación de la problemática, 180 minutos a la investigación de la misma y 120 minutos a la comunicación (aproximadamente 20-25 minutos por grupo).

La segunda opción se propone a dos futuras profesoras que no asisten a la totalidad de las clases, y al único varón que asiste a la primera clase y a la clase en la que se aborda y comunica el problema. Con respecto a una de las estudiantes que participa de esta tarea, que llamamos Zoe, manifiesta desacuerdo con resolver esta consigna, puesto que se encuentra presente en la formulación del problema con uno de los grupos que llamamos 2. Sin embargo, las docentes de la asignatura determinan que no puede exponer con el grupo la producción puesto que no participa de la resolución de la problemática. Por esto, participa en la segunda opción de la consigna 8.

Señalamos también que la propuesta de trabajar con la validación de la fórmula de Euler es realizada por las docentes de la asignatura, dado que se encuentra dentro de las temáticas que se proponen abordar en el escenario educativo de MM y en la primera unidad de la asignatura, por lo que debe contemplarse su abordaje en las tres primeras semanas.

Este momento conforma una parte de la evaluación de la asignatura, por lo que la totalidad de futuras profesoras deben aprobarlo para obtener la condición de regular o promocionada. En este sentido, se evalúa este momento particular, pero consideramos que quienes se involucran en la consigna 8 (primera opción) lo abordan en vinculación con un proceso previo de trabajo con MM. Es decir, al involucrarse con el resto de los momentos en el marco del escenario de MM, se logra evaluar un proceso formativo en su totalidad, considerando la evaluación como parte del proceso de enseñanza y de aprendizaje y no un evento aislado y logrando un verdadero compromiso en este momento por parte de las futuras profesoras. Es relevante, además, considerar que Borromeo Ferri (2018) señala que una barrera para la implementación de la MM en el aula se vincula con las posibilidades de evaluar estos procesos, cuestión que consideramos, en el diseño se logra franquear, puesto que en el marco del propio escenario educativo se destina un momento con objetivos específicos de evaluación.

Las producciones de los grupos se ilustran a continuación debido a que consideramos que resultan fundamentales para entender resultados que se irán presentando en las próximas partes de la tesis. A pesar de que reconocemos que los mismos constituyen en sí mismos resultados de esta investigación y forman parte del trabajo empírico pensamos que incluirlos en este capítulo posibilita una comprensión al lector completar del escenario de MM desarrollado.

Los problemas formulados por los tres grupos que abordan la consigna 8 (primera opción) se vinculan con situaciones de la geometría tridimensional y específicamente con la temática poliedros, a pesar de que la consigna es abierta a un problema geométrico cualquiera. Presentamos los problemas formulados a continuación.

TABLA 14 | *Problemas formulados por las futuras profesoras (Notas de campo).*

GRUPO 1:

Durante estas clases el problema que nos surgió es que en las definiciones aparecen términos que no comprendíamos, por ejemplo: superficie y sólido y esto nos dificultó poder comprenderlos[39].

GRUPO 2:

Nosotras pensamos que si tenemos distintas figuras geométricas (triángulos, rectángulos, cuadrados, pentágonos, etc.) al unirlos podemos formar poliedros. Pero, ¿siempre se puede? (tomando cualquier figura y cantidad).

Nuestra idea es ver que la respuesta va a depender de distintas características de las figuras y lo analizaremos en la clase con los demás grupos utilizando el Polydron y otros elementos (figuras regulares, irregulares, circulares).

GRUPO 3:

Con las características descriptas en los poliedros, el concepto de ángulo no se menciona. Dado los contenidos estudiados en geometría plana acerca de polígonos, nos preguntamos si existen o no ángulos en el espacio y como se definen, miden y clasifican, si existen ángulos exteriores.

5.1.5. | REFLEXIONES CON RESPECTO AL ESCENARIO EDUCATIVO

En el marco del diseño desarrollamos consignas que posibilitan abordar a través de la MM ciertas nociones matemáticas, lo que no resulta trivial y requiere tiempo, tal como señala Borromeo Ferri (2018). En particular, la temática poliedros se hace evidente en el diseño, sin embargo, en línea con Borromeo Ferri y Lesh (2013), consideramos que en el marco de cada uno de los procesos de MM que proponemos se abren oportunidades para la formulación de nuevas preguntas, cuestión que se enfatiza en el momento 5. Por esto, consideramos que el

[39] La resolución de este problema consiste en la realización de un análisis terminológico para comprender diversas definiciones de poliedro.

diseño de escenarios de MM a cargo de investigadoras/es, con la colaboración de docentes, puede potenciar su incorporación en la enseñanza diaria.

Al diseñar el escenario educativo buscamos franquear las tres barreras que Borromeo Ferri (2018) reconoce para la enseñanza a través de MM, a saber: material, tiempo y evaluación.

En el marco del desarrollo del escenario educativo se emplean en los diferentes momentos un conjunto de imágenes que representan objetos de la realidad (e.g. fotos de monumentos históricos, adornos, etc.), objetos concretos manipulables (por ejemplo, envases de productos, cuerpos construidos en cartulina, etc.) u objetos construidos en el software de geometría dinámica *GeoGebra*. Cabe mencionar que para la puesta en aula del escenario educativo se utilizan representaciones en material concreto de dichas imágenes (Ver figura 5 o 6), a excepción de la United Tower de Bahréin, de la que se otorgan los datos para que las/os estudiantes exploren en Internet en el caso de que requieran más información.

De este modo consideramos que las imágenes de objetos reales, su observación y caracterización constituyen la entrada al trabajo con poliedros. Pues, como señalan Aleksandrov et al. (2003) el inicio de trabajo con formas geométricas surge a partir de la observación de objetos. En esta línea, Freudenthal (1983) afirma que “por medio de las figuras geométricas, como triángulo, paralelogramo, rombo o cuadrado, uno tiene éxito organizando el mundo de los fenómenos de los contornos” (p.28). De modo similar consideramos que las figuras poliédricas permiten organizar objetos tridimensionales que guardan ciertas características. Destacamos también que el diseño, en sinergia con las propuestas de Borromeo Ferri (2018) u otras/os autoras/es, se emplean imágenes como inspiración para el trabajo con modelos matemáticos.

A su vez, durante la puesta en juego del escenario de MM se emplean las computadoras disponibles, tanto para acceder a *GoogleDrive*, *GeoGebra, Word* y completar consignas, como para acceder a Internet cuando las futuras docentes lo deciden y requieren.

Finalmente, destacamos que el escenario educativo focaliza en la puesta en juego de una vivencia educativa diseñada tanto con propósitos pedagógicos como de investigación. Es importante resaltar que con respecto a los propósitos pedagógicos el diseño busca promover, por un lado, el debate en torno a nociones matemáticas a partir de la investigación y producción por parte de las futuras profesoras. Por otro lado, se generan discusiones reflexivas con relación a los modos de trabajo llevados adelante en el aula atendiendo a nociones propias de la didáctica de la matemática enfatizando en los requerimientos que atraviesan a la formación docente.

5.1.6. | DISEÑO Y REFLEXIONES CON RESPECTO A LAS ENTREVISTAS GRUPALES

Las entrevistas grupales se implementan con las futuras profesoras que participan, en general, de la mayor parte de las clases en que se desarrolla el escenario educativo de MM. Las mismas se organizan en dos partes, en la primera se realizan preguntas por escrito e individuales con el fin de obtener información con respecto a la trayectoria educativa de cada una de ellas que consideramos relevante tanto en la formulación de preguntas a realizar en la entrevista grupal cara a cara, como en instancias de análisis de la información producida y analizada en la presente investigación. Presentamos a continuación las preguntas formuladas para responder por escrito.

TABLA 15 | *Preguntas iniciales propuestas a las futuras profesoras (Fuente propia).*

- *A lo largo de tu vida seguramente te formaste en diversas instituciones, ¿Podrías contarme dónde cursaste la escuela secundaria?*
- *Tengo entendido que estás cursando el tercer año del Profesorado en Matemática, ¿podrías explicitar qué te llevó a elegir esta carrera?*
- *¿Cursaste alguna carrera antes de comenzar con el Profesorado en Matemática de esta universidad?*
- *¿Podrías comentarme cómo fue tu trayectoria en el Profesorado en Matemática hasta este momento?*
- *¿Cómo seleccionaste las materias que cursaste en el transcurso por el Profesorado en Matemática?*
- *¿Cursaste alguna vez Geometría Euclídea Espacial?*
- *¿Cómo se desarrollaron las diferentes clases de las materias que transitaste?*

Posteriormente, se invita a los tres grupos de futuras profesoras que participan de la mayor parte del escenario de MM. Para cada grupo la guía de la entrevista es diferente, puesto que presentamos e interpelamos producción realizada en el marco de la vivencia educativa de MM. Sin embargo, todas se organizan en cinco intervenciones que se presentan a continuación.

TABLA 16 | *Guía de intervenciones para entrevistas narrativas y grupales (Fuente propia).*

Primera intervención: *En la primera clase de la asignatura GEE se discutió acerca de las actividades que lleva a cabo una persona que hace matemática, ustedes entre otras consideraciones explicitaron [se presenta la producción de cada grupo]. Ahora bien, atendiendo a esta afirmación que realizaron, surge la duda acerca de qué pasa con respecto a la producción de conocimientos.*

En su proceso completo de formación, ¿consideran que han producido conocimiento matemático?, ¿consideran que lograron producir una primera aproximación a la definición de poliedro?

Segunda intervención: *En las primeras 3 clases de Geometría Euclídea Espacial se trabajó acerca de la definición de poliedro. En primera instancia se caracterizaron figuras tridimensionales, luego se presentaron dos grupos y se caracterizó cada grupo, uno de ellos se denominó poliedros [se presenta la producción de cada grupo].*

Hoy en día, ¿qué dirían de estas definiciones?

Posteriormente se presenta la definición producida por la comunidad clase de geometría y se pregunta: hoy en día, ¿qué dirían de estas definiciones?, ¿qué cuestiones tienen de diferentes estas definiciones?, ¿tienen similitudes?, entre otras.

¿Cómo cotejarían/compararían las definiciones anteriores respecto a la definición propuesta en GEE?, ¿qué piensan de esta definición?, ¿qué cuestiones tienen de diferentes estas definiciones?, ¿tienen similitudes?, entre otras.

Tercera intervención: *Teniendo en cuenta la experiencia educativa que vivieron en las tres primeras semanas de clases de GEE, cuando se trabajó con el tema poliedros, ¿cómo le contarían a un compañero qué significa hacer matemática? A partir de este momento vamos a hacer referencia a esas tres primeras semanas de cursado de GEE, atendiendo a esto, ¿identifican alguna diferencia o similitud en los modos de trabajo que se propusieron en dichas clases de geometría euclídea espacial respecto a otras clases?*

Cuarta intervención: *Si tuvieran que contarle a un compañero el proceso de modelización a partir de la experiencia vivida en GEE, ¿qué le dirían? ¿Cómo ven esto que me están comentando respecto a experiencias previas?, ¿era algo familiar?, ¿no era algo familiar?, etc. Como futuras docentes, ¿creen que podría llevarse a cabo una propuesta de enseñanza empleando el proceso de modelización matemática que trabajamos en GEE?, ¿qué aspectos pueden ser positivos?, ¿qué aspectos pueden provocar dificultades?*

Quinta intervención: *En la experiencia de las tres primeras semanas de cursado en GEE se habló bastante acerca de la validación, ¿cómo se ven ustedes en el trabajo con validación en estas semanas? ¿Qué podrían decir hoy del vínculo entre validación y demostración?*

- *Un estudiante afirma que contó el número de vértices, aristas y caras de 10 poliedros convexos y que en todos los casos se verifica la relación de Euler. Luego dice que esto es suficiente para afirmar que la propiedad es verdadera. ¿Qué les parece a ustedes?*
- *Otro estudiante explicita que realizó lo mismo con 1500 poliedros convexos diferentes, y expresa "consideré todos los casos especiales". ¿Qué les parece a ustedes?*
- *¿Qué procesos les parece que siguieron estas/os alumnas/os?*

En la guía comenzamos la intervención con una pregunta que consideramos generadora y que incentiva la confianza y exploración amplia. Posteriormente se focalizan las intervenciones con relación a los objetivos en estudio en la investigación. La segunda y tercera intervención focalizan en reconocer el modo en que atravesaron y consideran cuestiones vinculadas con la producción de definición, la cuarta intervención con MM y la quinta con validación.

A su vez, en cada entrevista, la tesista y entrevistadora improvisa y toma decisiones con el fin de profundizar la producción de información con relación a los objetivos, en este sentido las entrevistas contienen contenido analítico e interpretativo (Valles, 2002).

Destacamos que consideramos fundamental esta etapa de entrevistas tanto para profundizar la información producida como para que las futuras profesoras que participan logren volver a reflexionar sobre la vivencia educativa. En este sentido consideramos que este momento también puede resultar de aprendizaje para quienes participan, aunque tiene una finalidad principalmente de investigación. En pos de organizar nuestro análisis consideramos a las entrevistas grupales como momento 6.

TABLA 17 | *Información producida en momentos que se analizan (Fuente propia).*

MOMENTO	ACCIONES Y DESCRIPCIÓN	
MOMENTO 1	Reflexión y discusión con respecto a modelización y validación	Sentidos iniciales Reflexión en torno a autores
MOMENTO 2	Primer proceso de modelización matemática	Tema: Poliedros Problema: Estudiar qué figura o figuras (de un conjunto de figuras dadas) representa un poliedro
MOMENTO 3	Reflexión con respecto a modelización y validación con relación al primer proceso de modelización matemática	Sentidos producidos con relación al primer proceso de modelización matemática
MOMENTO 4	Segundo proceso de modelización matemática	Tema: Poliedros Problema: Estudiar posible/s relación/es entre número de vértices, aristas y caras de un poliedro
MOMENTO 5	Tercer proceso de modelización matemática	Tema/s y problema/s formulados por las futuras profesoras
MOMENTO 6	Entrevistas grupales con fines vinculados a la investigación	

5.1.7. | PRODUCCIÓN Y ANÁLISIS DE INFORMACIÓN: ETAPAS Y REGISTROS

Para abordar cada uno de nuestros objetivos de investigación seleccionamos información a estudiar producida en los diferentes momentos y que consideramos se vincula estrictamente con cada uno de ellos. A continuación, presentamos una tabla (ver tabla 18) que muestra a qué momentos apelamos para cada objetivo.

TABLA 18 | *Objetivos y momentos en los que se produce información para abordarlos (Fuente propia).*

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN	MOMENTOS EN LOS QUE SE PRODUCE INFORMACIÓN PARA ABORDARLO
1- Estudiar atribución de sentidos por parte de futuras profesoras a procesos de MM al vivir escenarios educativos donde estos mismos procesos se ponen en juego.	MOMENTO 1 MOMENTO 3 MOMENTO 6
2- Estudiar atribución de sentidos por parte de futuras profesoras a procesos de validación al vivir escenarios educativos de MM	MOMENTO 1 MOMENTO 3 MOMENTO 6
3- Analizar modos de validación que emergen del trabajo matemático de futuras profesoras al vivir escenarios educativos de MM.	MOMENTO 2 MOMENTO 4 MOMENTO 5
4- Explorar potencialidades y limitaciones de los vínculos entre procesos de MM y procesos de definición.	MOMENTO 2 MOMENTO 6

Durante la puesta en aula del escenario de MM la tesista realiza el seguimiento sistemático empleando el rol de observadora no participante (Flick, 2012). Las futuras profesoras que cursan GEE en 2018 y las profesoras del curso dan consentimiento para que se graben sus interacciones e intervenciones en el aula en audio y video.

Para organizar el registro de información contratamos a un camarógrafo que realiza una filmación general del aula en audio y video. La tesista coloca un grabador de audio en cada grupo de trabajo durante el desarrollo de las distintas consignas, para de este modo obtener información de la totalidad de intercambios que se celebran. También, recuperamos las producciones realizadas por las futuras profesoras en medios digitales (*Word, GeoGebra, PowerPoint*, etc.) y artefactos escritos y tomamos fotografías del pizarrón cada vez que se realizan debates colectivos en los que la docente o estudiantes emplean este registro. A su vez, la tesista posee un archivo con notas de campo que realiza durante el desarrollo de cada una de las clases y graba un audio posterior a cada clase con información relevante para la presente investigación a partir de lo observado.

En el marco de desarrollo de las entrevistas la tesista actúa como entrevistadora. Durante las mismas, registramos en audio los intercambios y recuperamos las producciones escritas que realizan las futuras profesoras.

Para realizar el estudio de la información producida la tesista realiza transcripciones completas de los audios registrados (audio y video) por momento de trabajo y consignas durante el desarrollo de las clases y de las entrevistas. Es importante destacar que se identifican y siguen detalladamente cada una de las voces desde el principio hasta el final, obteniendo así de modo detallado las expresiones de cada futura profesora en particular.

En el desarrollo de la totalidad del escenario educativo de MM y entrevistas participan 17 futuras profesoras, sin embargo, no todas se encuentran presentes en todos los momentos e incluso dentro de un momento en la puesta en juego de las diferentes consignas que lo constituyen. Estas características son propias de un entorno educativo auténtico que se desarrolla en diferentes clases, más aún, en una asignatura que no posee asistencia obligatoria.

Avanzamos a continuación con la presentación de tres tablas imbricadas que denominamos 19 A, 19 B y 19 C. En ellas focalizamos en la información en estudio en cada uno de los objetivos de investigación.

Para abordar los dos primeros objetivos recuperamos transcripciones de voces y narrativas producidas por las futuras profesoras. Teniendo en cuenta la perspectiva de sentido adoptada reconocemos voces individuales y colectivas. Para ambos objetivos estudiamos información producida en el marco de los mismos momentos. Es por esto que especificamos los registros que estudiamos en el marco de ambos.

TABLA 19 A | *Información en estudio en los dos primeros objetivos de investigación (Fuente propia).*

MOMENTO	INFORMACIÓN EN ESTUDIO
UNO	Narrativas y transcripción de audios para estudiar sentidos atribuidos inicialmente a MM y validación (ver consigna 1). Narrativas y transcripción de audios para estudiar sentidos atribuidos a MM y validación posteriormente a interpretar aportes de Bassanezi (2002) y Balacheff (2000) (ver consigna 2). Videos y transcripción de audios de exposición de narrativas realizadas explicitando oralmente cambios en la atribución de sentidos otorgados a MM y a validación luego de responder las consignas 1 y 2.
TRES	Narrativas individuales en las que explicitan cómo vivieron la primera vivencia de MM y en la misma, específicamente, la validación (Ver consigna 6).
SEIS	Transcripción de voces puestas en juego en entrevistas grupales donde explicitan cómo vivieron los procesos de MM y validación durante el desarrollo del escenario de MM.

Para abordar el tercer objetivo de investigación recuperamos transcripciones de voces y producciones realizadas en el desarrollo de los procesos de MM. Al buscar estudiar modos de validación en el marco de procesos de MM focalizamos principalmente en momentos en los que se validan producciones, acciones y afirmaciones.

TABLA 19 B | *Información en estudio en el tercer objetivo (Fuente propia).*

MOMENTO	INFORMACIÓN EN ESTUDIO
DOS	Producciones escritas en las que se validan modelos intermedios y finales en el marco del proceso de MM. Transcripción de audios de trabajos en grupos en los momentos en que validan producciones al interior del grupo. Videos y transcripción de audios de debates colectivos en los que se presenta la producción realizada y se pone a prueba. (Ver consignas 3, 4 y 5).
CUATRO	Producciones escritas en las que se validan modelos intermedios y finales en el marco del proceso de MM. Transcripción de audio de trabajo en grupos en momentos en que validan producciones al interior del grupo. Videos y transcripción de audios de debates colectivos en los que se presenta la producción realizada y se pone a prueba. (Ver consignas 7).
CINCO	Informes escritos, presentaciones en PowerPoint, videos y transcripciones de audios de la exposición del informe (Ver consigna 8 opción a y b). Transcripción de audios de producción de respuesta a la consigna 8 (opción a) por parte de grupos que la resuelven (Ver consigna 8).

En el cuarto objetivo focalizamos en el proceso de MM llevado adelante en el momento 2.

TABLA 19 C | *Información en estudio en el cuarto objetivo (Fuente propia).*

MOMENTO	INFORMACIÓN EN ESTUDIO
DOS	Producciones escritas en las que se validan modelos intermedios y finales en el marco del proceso de MM. Transcripción de audios de trabajos en grupos en los momentos en que validan producciones al interior del grupo. Videos y transcripción de audios de debates colectivos en los que se presenta la producción realizada y se pone a prueba. (Ver consignas 3, 4 y 5).
SEIS	Transcripción de voces puestas en juego en entrevistas grupales donde explicitan cómo vivieron los procesos de MM y de validación durante el desarrollo del escenario de MM.

Cabe mencionar que construimos la información en estudio, como mostramos anteriormente, a partir de diversos registros que se obtienen de la puesta en juego del escenario de MM y de las entrevistas. En todos los casos, en el marco del desarrollo del escenario de MM se respeta el estilo docente de la profesora a cargo de GEE. Razón que también pone de manifiesto que la investigación se realiza en un entorno educativo auténtico (The Design-Based Research Collective, 2003).

Tal como mencionamos anteriormente la profesora que asume predominantemente el rol docente durante el desarrollo del escenario de MM se designa como Profesora Laura. Las otras dos profesoras del curso se nombran Profesora Gabriela y Profesora Maricel, estas últimas docentes por consenso entre investigadoras y profesoras solo responden dudas específicas si algún grupo de estudiantes lo solicita explícitamente.

Los nombres que empleamos para distinguir a cada una de las futuras profesoras que participan del escenario educativo de MM en cada momento en las partes de la tesis son ficticios. A continuación, presentamos detalles de los nombres ficticios de las participantes y los grupos que conforman (seleccionados por ellas por afinidad).

Como se muestra a continuación, la mayor parte del trabajo se desarrolla en grupos de cuatro o cinco integrantes. Es por esto que en general la conformación se mantiene, aunque hay variabilidad. Sin embargo, es relevante explicitar que a medida que transcurren los diferentes momentos se van conformando grupos con identidad propia en los que participan las mismas futuras profesoras, posiblemente por tener trayectorias de formación profesional similares.

TABLA 20 | *Futuras profesoras y grupos de trabajo que participan en cada momento (Fuente propia).pia).*

GRUPOS	MOMENTO 1	MOMENTO 2			MOMENTO 3	MOMENTO 4	MOMENTO 5	MOMENTO 6
		CONSIGNA 3	CONSIGNA 4	CONSIGNA 5				
1	Larisa	Larisa	Larisa	Larisa	Larisa	Larisa	Larisa	Larisa
	Eugenia	Eugenia	Eugenia	Eugenia	Eugenia	Eugenia	Eugenia	Eugenia
	Ailén	Ailén	Ailén	Ailén	Ailén	Ailén	Ailén	Ailén
	Marina	Marina	Marina	Marina	Marina	Marina	Marina	Marina
2	Micaela	Micaela	Micaela	Micaela	Micaela	Micaela	Micaela	Micaela
	Dianela	Dianela	Dianela	Dianela	Dianela	Dianela	Dianela	Dianela
	Guillermina	Guillermina		Guillermina	Guillermina	Guillermina	Guillermina	Guillermina
	Valentina	Valentina	Valentina	Valentina	Zoe	Zoe	Valentina	Zoe
3	Macarena	Macarena	Macarena	Macarena	Macarena	Macarena	Macarena	Macarena
	Yamila	Yamila	Yamila	Yamila	Yamila	Yamila	Yamila	Yamila
	Paula	Paula	Guillermina	Paula		Paula	Paula	
	Agostina	Agostina		Victoria		Victoria	Victoria	Victoria
				Martina	Martina	Martina	Martina	Martina
4	Ludmila	Ludmila	Zoe				Zoe	
	Victoria	Victoria	Victoria				Juana	
	Pablo	Pablo	Martina					
5							Pablo	

En el momento 2 especificamos quién participa de cada consigna porque cada una de ellas se lleva adelante en una clase diferente. Además, la consigna cuatro propone un primer trabajo en grupos, específicamente el grupo uno se divide en dos grupos y luego discuten la producción con el grupo 2 y el grupo 3 se reúne en este segundo momento con el grupo 4.

Cabe mencionar que cada grupo tiene algunas particularidades. Apelando a información recuperada de las entrevistas grupales afirmamos que en el grupo 1 (grupo estable) todas las estudiantes se encuentran cursando por primera vez la asignatura GEE y transitando su tercer año del Profesorado en Matemática, siguiendo en general, el desarrollo de asignaturas propuesto por la dirección de carrera. Las estudiantes del resto de los grupos, a excepción de Micaela y Victoria, han cursado previamente GEE. Las futuras docentes que conforman el grupo 2 y el grupo 3 se caracterizan, en general, por haber ingresado en años similares y compartido el cursado de diversas asignaturas (a excepción de Victoria). En general, las participantes del grupo 2 llevan menos años en el Profesorado en Matemática que las del grupo 3 y no han cursado asignaturas que se proponen para 4to o 5to año, a diferencia de la mayor parte de estudiantes que conforman el grupo tres.

Para realizar el análisis, si bien recuperamos voces individuales, en general, a partir de las mismas establecemos reflexiones en relación a producciones grupales, pues, desde la perspectiva propuesta en Lerman (2001) y Bajtín (2000) entendemos el intercambio social como una variable fundamental en nuestro estudio.

A su vez, cabe mencionar que realizamos nuestro análisis, principalmente, de modo analítico en términos de Demaziére y Dubar (1997, citado en Korblit, 2007). Puesto que, analizamos teniendo en cuenta la identificación de las principales categorías en la información en estudio (emergentes de los datos y presentadas en el marco teórico), teniendo en cuenta que, si bien aparecerán estructuras propias al interior de cada grupo, se buscan comprender estructuras comunes. En este sentido es importante destacar que el modo analítico no se agota. A su vez, realizamos la presentación del análisis y resultados, atendiendo a las particularidades de este modelo, recuperando producciones obtenidas del trabajo empírico y realizando avances de interpretaciones por parte de las investigadoras con el fin de atender a los objetivos de investigación.

A MODO DE CIERRE DE LA TERCERA PARTE

En esta parte de la tesis avanzamos en la presentación del terreno (Lave, 1991) en el que llevamos adelante nuestro trabajo empírico y que resulta fundamental tanto para comprender y analizar la información como para comprender los resultados a los que arribamos.

A su vez, el avance con relación a la metodología de investigación y presentación de los modos en que fuimos produciendo la información en estudio consideramos resulta de interés para comprender el modo en que realizamos y organizamos el análisis. Tal como se hace evidente, a pesar de que la información en estudio se construye seguidamente, seleccionamos ciertos momentos que se vinculan estrictamente con cada uno de los objetivos de investigación, aunque entendemos que se producen en una red compleja en la que cada momento se entrama con los anteriores, los posteriores y las experiencias personales y propias de las futuras profesoras que participan en este estudio.

Finalmente, destacamos que tanto los objetivos de investigación formulados como las perspectivas teóricas adoptadas resultan fundamentales para delinear este capítulo, y desde luego, el trabajo empírico realizado.

CUARTA PARTE

SENTIDOS ATRIBUIDOS A MM EN MOMENTOS DIFERENTES

SENTIDOS ATRIBUIDOS A MM EN MOMENTOS DIFERENTES

*Para mí cuando pensás en un problema sobre un tema
es como que te terminás de sacar las dudas que tenés sobre el tema,
me parece a mí, como que te empezás a preguntar si realmente tenés bien claro lo que
estás dando, lo que significa…
(Zoe, 2018, entrevista grupal)*

En esta parte de la tesis abordamos el primero de nuestros objetivos de investigación, a saber: Estudiar atribución de sentidos por parte de futuras profesoras a procesos de MM al vivir escenarios educativos donde estos mismos procesos se ponen en juego.

Como describimos en la tercera parte, para dar cuenta del objetivo que reportamos en esta parte, recuperamos información producida en tres momentos de trabajo (momento 1, momento 3 y momento 6). Para interpretar lo sucedido en cada momento consideramos el contexto y/o actividades en las que están o han estado inmersos los grupos y apelamos, como se menciona en la parte tres, a producciones escritas y transcripciones de registros en audio y video que nos permiten recuperar ideas que ofrecen elementos para interpretar o reconocer las atribuciones de sentidos por parte de las futuras profesoras.

Organizamos esta parte teniendo en cuenta cada uno de los momentos de trabajo (1, 3 y 6) determinando tres capítulos respectivamente (6, 7 y 8). Es decir, en cada uno de estos capítulos presentamos el análisis de la información producida en cada uno de los momentos.

Además, en cada momento se hacen presente diferentes voces, como ya avanzamos y mostramos en la tercera parte (ver Tabla 20). Sin embargo, recuperamos aquí la presentación de la conformación de los grupos y sus variaciones. Cabe mencionar que el grupo que en el momento 1 se denomina grupo 4 no se encuentra presente en el resto de los momentos que reportamos.

TABLA 21 | *Futuras profesoras y grupos de trabajo que participan en los momentos 1, 3 y 6 (Fuente propia).*

GRUPOS	MOMENTO 1	MOMENTO 3	MOMENTO 6
1	Larisa	Larisa	Larisa
	Eugenia	Eugenia	Eugenia
	Ailén	Ailén	Ailén
	Marina	Marina	Marina
2	Micaela	Micaela	Micaela
	Dianela	Dianela	Dianela
	Guillermina	Guillermina	Guillermina
	Valentina	Zoe	Zoe
3	Macarena	Macarena	Macarena
	Yamila	Yamila	Yamila
	Paula		Victoria
	Agostina	Martina	Martina
4	Ludmila		
	Victoria		
	Pablo		

La permanencia de una integrante en un grupo a lo largo de los tres momentos se señala sombreando las celdas. Tal como se hace evidente, Ludmila, Pablo, Valentina, Agostina y Paula participan del momento 1 pero no se encuentran en los otros momentos relacionados con el objetivo que analizamos en esta parte. Más aún:

- El grupo 1 permanece estable en todos los momentos de trabajo.
- En el grupo 2, Dianela, Guillermina y Micaela participan en todos los momentos, Valentina solo participa en el 1 y Zoe se incorpora en los momentos 3 y 6. Es importante destacar que Micaela se retira en parte de la entrevista por tener otra obligación, por lo que, específicamente en lo que respecta a información relacionada con este objetivo no evidenciamos su voz.
- En el grupo 3, Macarena y Yamila participan en todos los momentos. Paula solo participa en el momento 1, Martina se incorpora en los momentos 3 y 6 y Victoria en el momento 6.
- El grupo 4 luego del primer momento se disuelve. Victoria participa del momento 6 con estudiantes del grupo 3 por haber trabajado en los momentos 2, 4 y 5 con este grupo. Finalmente, avanzamos en reflexiones vinculadas con el objetivo en estudio.

CAP VI

RECUPERAR TRAYECTORIAS PARA REFLEXIONAR LO NUEVO

6.1. I INTRODUCCIÓN

En este capítulo avanzamos en el estudio sobre los primeros sentidos atribuidos a procesos de MM por parte de las futuras profesoras. Como se explica con anterioridad (Ver tabla 19 A) los objetos materiales que sintetizan las ideas y atribuciones de sentido de los cuatro grupos durante el momento 1 se corresponden con sus narrativas (Da Ponte et al., 2003). Esas narrativas escritas provienen de un fructífero intercambio oral entre las integrantes de cada grupo. La narrativa escrita sintetiza de manera condensada ideas, narraciones y conocimientos desplegados en tales intercambios.

En la primera narrativa las futuras profesoras dan cuenta de qué piensan o qué ideas tienen acerca de MM antes de vivir el escenario de MM y en la segunda muestran sus interpretaciones sobre ideas referidas al proceso de MM recuperadas de Bassanezi (2002). Además, presentamos breves consideraciones, a partir de registros en audio y video del momento en el aula en el que comparten sus producciones con todo el curso y dan cuenta de cambios entre sus perspectivas iniciales al contrastar con los aportes del autor.

Organizamos la presentación del estudio a partir de cada uno de los grupos participantes (Forman, 2014). Para realizar el análisis de la información que reportamos en este capítulo intercalamos fragmentos de voces o narraciones de las futuras profesoras, registros elaborados en el trabajo de campo con interpretaciones y análisis de los mismos, tal como mencionamos en el capítulo 5. Es relevante destacar que, en este capítulo, avanzamos en la presentación del análisis dando cuenta de los sentidos intercalando transcripciones con interpretaciones de las investigadoras y describimos las discusiones desarrolladas en cada uno de los grupos de forma profunda en pos de mostrar la totalidad de ideas que fueron emergiendo.

En primer lugar, estudiamos los intercambios y narrativas de cada uno de los grupos al responder la consigna 1, y específicamente, el inciso c (Ver tabla 5). Es decir, focalizamos en la respuesta producida al reflexionar con respecto a qué entienden por procesos de MM. En segundo lugar, analizamos intercambios y narrativas que se generan al responder la consigna 2, en la cual los grupos reflexionan con respecto a qué es o cómo se puede entender un proceso de modelización a partir de los aportes de Bassanezi (ver Tabla 6). Finalmente, avanzamos en discutir los cambios (o no) puestos de manifiesto oralmente con respecto a los debates previos y posteriores a la lectura de Bassanezi (2002).

Tenemos en cuenta inicialmente como principales categorías analíticas los subprocesos del proceso de MM (experimentación, abstracción, resolución, validación, modificación, aplicación) en términos de Bassanezi (2002) y tipos de modelos (Gazzeta, 1989).

6.1.1. | GRUPO 1 - NARRATIVA 1: APLICACIÓN INTRA Y EXTRAMATEMÁTICA

En la interacción al interior del grupo 1 observamos que en un primer momento relacionan directamente la modelización con la ejemplificación ilustrativa que se realiza a continuación del trabajo en torno a una determinada noción matemática. De modo inmediato, apelan a vivencias previas en las que reconocen que se nombra la palabra modelización y recuperan el sentido que se otorga a este término en el marco de dichas experiencias (académicas o educativas), es decir comienzan un rastreo de referentes conocidos provenientes de ámbitos y vivencias familiares para ellas.

Ailén afirma *"¿Se acuerdan del Taller de Álgebra y Cálculo que decían esto es un ejemplo de modelización de la función cuadrática?, y te daban un problema donde se usaba la función cuadrática."* El recuerdo de Ailén es ratificado por Marina. Además, Eugenia señala que resulta más adecuado hablar de aplicación que de ejemplificación. Esta aproximación que reconocen las estudiantes parece indicar una cierta identificación de modelización con una actividad de aplicación o ejemplificación de un saber matemático posterior a haberlo abordado en clase, podría hacerse referencia, a problemas típicos de función cuadrática contextualizados que podrían considerarse extramatemáticos. Consideraciones tales que se vinculan con la caracterización de aplicación (subprocesos de proceso de MM) realizada por Bassanezi (2002), en la que un determinado modelo (función cuadrática) se aplica en diversas situaciones.

Continúan la discusión organizando la respuesta a la consigna. Marina afirma que el ejemplo anterior (de función cuadrática) es *"La ejemplificación y la parte práctica digamos"* y Eugenia responde *"O sea, la aplicación, no un ejemplo, sino que* [lo aplico] *a una situación"*. Estas consideraciones se relacionan con el modo de estructurar comúnmente un libro de matemática específica, como los que se encuentran acostumbradas a abordar y estudiar en el marco del Profesorado en Matemática: definición, teoremas, ejemplos y práctica (que queda a cargo de las estudiantes).

Eugenia se detiene súbitamente y afirma "[…] *igual no sé porque* [en la consigna] *dice un proceso"*. La relectura de la consigna produce un cierto desconcierto, puesto que en sus interacciones iniciales la palabra "proceso" no fue evocada, como así tampoco una conexión entre modelización y proceso. La primera iniciativa para resolver de un modo pragmático la tarea, es modificar el inicio de su narrativa *"modelización es"*, por *"un proceso de modelización es"*. A pesar del carácter práctico de esta decisión, el grupo continúa poniendo en juego ideas con las que dan sentido a una tarea que probablemente resulta novedosa para ellas en el ámbito de un curso de matemática.

Prosiguen escribiendo su narrativa, intercambiando ideas y considerando los términos ejemplificación y aplicación, consideraciones que se relacionan con acciones que se desarrollan en el subproceso de aplicación (Bassanezi, 2002). Interesa señalar que una de las cuestiones que emerge con fuerza en el grupo es la idea de *"creación de ejemplos"*, que es puesta a consideración por Larisa. Marina afirma *"Sí de última ahí sería crear ejemplos en los que se puede aplicar lo que creamos* […]". En un intento de sintetizar ideas Ailén sugiere como caracterización provisoria "[crear] *ejemplos prácticos que requieran la aplicación de lo propuesto* [creado] *anteriormente"*.

Durante el rico proceso de intercambios, emerge una duda formulada por Eugenia que plantea no entender el rol otorgado a los ejemplos, y explica: "[…] *por ejemplo, vos decís un axioma y ¿qué ejemplo le vas a dar?"* Ante esta inquietud una de sus compañeras indica que un axioma sirve para "algo" y en el caso que se utilice pasaría a ser una aplicación. Con el fin de profundizar e ilustrar su posición Ailén afirma:

> *¿Te acordás que dos rectas que tienen un punto en común determinan un plano que las contiene?* […] *Después, vos usas los axiomas para demostrar eso. Sabes por axioma, que la recta tiene infinitos puntos, entonces tomamos dos puntos, por axioma sabes que tres puntos no alineados determinan un plano.*

En la ejemplificación presentada, la futura profesora emplea el axioma, posiblemente legitimado por la comunidad clase, para demostrar una afirmación y por medio de esto dar cuenta de un problema interno a la disciplina. A su vez, en esta interacción evidenciamos que toman de un modo amplio los términos aplicación y ejemplificación, sin particularizar a fenómenos extramatemáticos. Consideramos relevante que en este momento vinculan el proceso de MM con un medio por el cual se recuperan saberes matemáticos para ser empleados en situaciones/problemas, ya sea con connotación extra o intramatemática. Observamos cómo la polifonía de voces amplía la perspectiva inicial donde el grupo relaciona modelización con un problema de aplicación de función cuadrática, en sinergia con lo señalado por Bajtín (2000).

las voces en interacción o en los contrastes entre ellas y las diversas perspectivas puestas en juego otorgan un avance en el reconocimiento y las posibilidades de trabajo con MM o una transformación de los primeros sentidos.

Como grupo ofrecen ejemplos familiares que les permiten ir superando dudas o conflictos. En momentos de acuerdos, posteriormente discuten y reconocen que lo que se crea debe ser aplicado adecuadamente o que debería existir una ocasión de verificación de lo creado que luego sea aplicado en un ejemplo ilustrativo, al respecto Ailén señala *"que verifiquen que lo que dijimos antes también sea verdadero en las actividades".*

Emerge un nuevo término: verificar. Ailén agrega *"Claro, que vos veas un ejemplo y veas que se cumple lo que vos dijiste o lo que propusiste, la propiedad o el axioma o lo que sea. No que des un ejemplo supuestamente para aplicar eso y que no se cumpla porque no estarías verificando".* Consideramos que esta cuestión refleja la necesidad de que, al aplicar la cuestión matemática abordada, empleando un ejemplo, necesariamente la misma se verifique. Esto podría deberse a un predominio de trabajo con situaciones en las que las respuestas son correctas o incorrectas, alejadas de acciones vinculadas con el subproceso de modificación en el sentido de Bassanezi (2002). Finalmente, Larisa ratifica *"Se verifique"* y Ailén acota *"O que se compruebe su veracidad ponele…",* esta última expresión es empleada, finalmente, en la narrativa que sintetiza en un formato de definición breve todas las ideas discutidas extensamente.

A partir de las interacciones presentadas, las futuras profesores presentan la siguiente narrativa.

TABLA 22 | *Narrativa 1 Grupo 1 (Fuente propia).*

Un proceso de modelización es crear ejemplos prácticos que requieran la aplicación de lo propuesto, y que en dicho ejemplo se compruebe su veracidad.

Del análisis realizado consideramos que se enfatizan y enlazan algunas cuestiones que sintetizamos a través de la siguiente tabla.

TABLA 23 | *Red de sentidos a MM en la interacción del grupo 1 al realizar la narrativa 1 (Fuente propia).*

EJEMPLIFICACIÓN

↓

APLICACIÓN EXTRAMATEMÁTICA

↓

POSBILIDAD DE CREACIÓN DE EJEMPLO

↓

APLICACIÓN EXTRAMATEMÁTICA E INTRAMATEMÁTICA

↓

VERIFICACIÓN

De modo general apreciamos que la perspectiva tomada por las futuras profesoras se relaciona principalmente con la caracterización realizada para el subproceso de aplicación del proceso de MM (Bassanezi, 2002), pues hacen referencia a emplear con diversos fines modelos disponibles o construidos en otras situaciones. Sin embargo, también, avanzan en cuestiones vinculadas con la validación (Bassanezi, 2002), en el sentido que debaten en torno a la verificación del ejemplo en relación con la matemática abordada anteriormente focalizando en confirmar que efectivamente funciona, esto es, decidir sobre el valor de verdad.

A su vez, explicitan la posibilidad de creación de las situaciones en las que se aplica el conocimiento matemático en juego y ponen en escena la posibilidad de abordar aplicaciones que involucren nociones intra y extramatemáticas. Evidenciamos cambios en el hilo de ideas a medida que avanzan en la producción de narrativas que ponen de manifiesto el modo en que la interacción y experiencias previas influyen en la atribución de sentidos (Bajtín, 2000; Larrosa, 2003)

6.1.2 | GRUPO 1 – NARRATIVA 2: MODELO IDEAL, LENGUAJE, MODIFICACIÓN Y VALIDACIÓN COMO IDEAS SORPRENDENTES

Al iniciar la discusión e interpretación sobre la lectura de los aportes de Bassanezi (2002) el grupo inmediatamente compara los aportes del autor con su producción inicial. Larisa afirma *"La modelización no está"* y Eugenia responde *"Está donde dice aplicación",* con esta expresión, la futura profesora pareciera reconocer en la caracterización de aplicación ofrecida por el autor, el sentido otorgado por el grupo al proceso de MM. Esto es, al confrontar con el sentido atribuido por el autor a la aplicación, se reconoce el propio sentido atribuido inicialmente.

Continúan cotejando cuestiones que señala el autor con su primera aproximación a la noción de MM. Marina señala que encuentra una relación entre sus ideas y el subproceso de experimentación, dado que es allí donde buscan datos. A su vez señala *"Nunca hubiera pensado en usar el lenguaje natural, yo hubiera ido a la resolución"* y Eugenia agrega *"Modificar, todas esas cosas nos faltaron"*. Con respecto a validación, expresan sorpresa frente a la afirmación "grado de aproximación deseada", a su vez manifiestan que consideraban que la validación la realizaba una persona externa a quien está modelizando. Estas afirmaciones pueden encontrarse afectadas por experiencias de trabajo matemático en las que apelan directamente al lenguaje matemático, donde el conocimiento matemático es rígido y quizás validado por el/la profesor/a correspondiente en el marco de una metodología de aula tradicional (Skovsmose, 2000).

Seguidamente se acerca la profesora Laura al grupo y realiza significativas intervenciones. Al preguntarles qué estuvieron pensando, Larisa responde "[…] *Relacionar lo de la vida cotidiana con lo del modelo"*. La profesora interpela esta cuestión afirmando *"Pero los problemas, ¿sólo serían de la vida cotidiana?"* esta intervención pone en jaque el pensamiento inicial de las futuras profesores que amplían su perspectiva tomando situaciones de la propia matemática. Específicamente señalamos que Marina pone de manifiesto una cadena de sentidos, pues argumenta que el pensar que tomaba cuestiones de la vida cotidiana, puede estar influenciado por la referencia del autor al uso del lenguaje natural.

Prosiguen, a partir de otra intervención de la profesora Laura, debatiendo con respecto a qué es un modelo. Marina afirma que es *"Como la mejor manera de mostrar lo que querés mostrar"*, inmediatamente la profesora responde: *"Bien, o sea un modelo de jugador de fútbol"* y Marina señala *"Y el mejor, el ideal"*. La intervención de la profesora se encuentra influenciada por una discusión previa que lleva adelante con el grupo 4 sobre la misma cuestión, donde abordan como ejemplo de modelo el ideal de jugador de fútbol.

A su vez, la profesora realiza diversas aclaraciones explicitando el carácter cíclico del proceso de MM. Marina, en respuesta a las afirmaciones de la profesora, explicita *"Como que capaz nunca encontrás el mejor, siempre hay otro".* La profesora pregunta *"¿Alguna vez ustedes hicieron algún proceso para encontrar un modelo?"*. Sin una respuesta directa a la pregunta, al interior del grupo emerge como ejemplo la discusión en torno al ideal de un vestido o una torta. La profesora luego de importantes intercambios en torno a esta cuestión les solicita que escriban su narrativa y se retira (Notas de Campo, 13/03/2018).

Las futuras profesoras interaccionan con respecto a la dificultad que requiere responder esta consigna. Consideramos que influye el hecho que la pregunta puede resultar inesperada en el marco de un curso de matemática específica. El grupo, además, señala que la modelización es todo, desde la elección de un tema hasta la validación y modificación del modelo, y que en esta consigna se habla de modelización en general, a diferencia de la consigna anterior que consideraba la expresión MM.

Posteriormente, proceden a iniciar la escritura de la narrativa. Apreciamos, tal como plantea Bajtín (2000) cómo dicha narrativa va tomando forma a partir de entrelazar las voces de todas las partícipes de las interacciones, esto es, ideas del grupo e intervenciones de la profesora. Más aún, como menciona Larrosa (2003) la palabra es fundante para atribuir sentidos, pues las palabras escogidas reconfiguran lo dado con respecto al sentido otorgado.

Explicitan que un proceso de modelización requiere, a partir de un tema, llevar adelante diversas instancias (refieren a subprocesos en el sentido de Bassanezi) para llegar a un modelo ideal. En discusiones al interior del grupo, hacen evidente que el término ideal lo colocan entre comillas para hacer explícita la posibilidad de modificarlo, más aún, a continuación, señalan que el mismo se puede modificar afirmando que es posible pasar nuevamente por alguna de las instancias anteriores. Apreciamos que desde un primer momento de trabajo en torno a esta consigna señalan con sorpresa la posibilidad de modificación del modelo.

Con el fin de responder de modo completo la consigna, escriben el ejemplo de confección de un vestido de gala, conversado anteriormente con la profesora. Con este ejemplo como referencia tangible y familiar, intentan establecer qué se realiza en cada subproceso, sin embargo, al tener dudas toman la decisión de no explicitarlo de modo general en su producción escrita. Señalan que los problemas se encontrarían al definir color, tela, bordado, modelo y modista del vestido; dudan si estas cuestiones conforman los datos experimentales o si forman el modelo, posteriormente las consideran en la abstracción y señalan que los datos experimentales incluyen el probar en una persona el vestido y modificarlo si la persona lo considera necesario.

Dan vueltas sobre las ideas tratadas sin encontrar claridad y puntos de encuentro para comunicar a otras/os lo pensado. En ese momento, toman la decisión de no explicitar cuándo se lleva a cabo cada subproceso del ciclo de modelización.

Finalmente, a partir de las interacciones presentadas y sus propias incertidumbres, las futuras profesores presentan la siguiente narrativa.

TABLA 24 | *Narrativa 2 Grupo 1 (Fuente propia).*

El proceso de modelización consta de partir de un tema y mediante distintas instancias llegar a un modelo "ideal", el cual una vez hallado puede volver a pasar por algunas de éstas con el fin de mejorarlo.

Ejemplo:

tema: vestido de recepción.

problemas para analizar: color del vestido, tela, bordado, modelo, modista.

Una vez analizados los problemas se crea el modelo. Luego se analiza si es el indicado, y si no lo es se elige que características modificar y se arma el nuevo modelo y así sucesivamente hasta llegar al modelo "ideal".

Del análisis realizado consideramos que se enfatizan y enlazan ideas que sintetizamos a través de la siguiente tabla.

TABLA 25 | *Red de sentidos presentados en la interacción del grupo 1 al realizar la narrativa 2 (Fuente propia).*

RELACIÓN ENTRE APLICACIÓN Y PRIMERA APROXIMACIÓN A MM

↓

SORPRESA RESPECTO A: LENGUAJE, VALIDACIÓN Y MODIFICACIÓN

↓

MM EXTRAMATEMÁTICA

↓

MM INTRAMATEMÁTICA

↓

MODELO "IDEAL"

↓

MODIFICACIÓN

En la interpretación de los aportes de Bassanezi (2002) de las futuras profesoras evidenciamos en un primer momento que encuentran puntos de encuentro entre su primera aproximación a MM y el subproceso de aplicación, poniendo en escena interpretaciones y potenciando desde los primeros debates como grupo el desarrollo del propio conocimiento interpretativo (Mellone et al., 2020).

Posteriormente, muestran sorpresa con respecto a la posibilidad de emplear lenguaje natural en el marco de un proceso de modelización inmerso en un curso de matemática, de validar en función de los conocimientos de la persona que se encuentra modelizando y de modificar el modelo obtenido. A su vez, explicitan que en primer lugar consideran que necesariamente se involucran cuestiones externas a la propia matemática y amplían esta aproximación considerando también cuestiones intramatemáticas. Finalmente, explicitan que el modelo es un ideal que responde al problema formulado y que el mismo se puede modificar.

Evidenciamos que la consigna les otorga la posibilidad de repensar o revisitar el sentido otorgado inicialmente a MM a partir de sus vivencias y/o experiencias, lo que produce un cambio en los sentidos atribuidos, principalmente ampliando fronteras. Sin embargo, señalamos que no logran, a partir de un ejemplo, caracterizar qué acción se lleva adelante en cada subproceso, cuestión que se podría franquear a partir de vivir esferas de actividad de MM y reflexionar sobre las mismas.

6.1.3. | GRUPO 1 – PRESENTACIÓN DE PRODUCCIÓN A LA COMUNIDAD DE PRÁCTICA

En el debate colectivo la profesora invita a cada grupo a exponer su trabajo, generando un espacio de interacciones en el que no observamos intercambios entre los grupos. Quizás debido al escaso tiempo que queda disponible para avanzar con la clase. Específicamente, la profesora solicita que expliciten si cambió el sentido otorgado a MM inicialmente a partir de la lectura de los aportes del autor consultado (Notas de Campo, 13/03/2018).

Ailén explica que ellas consideran en primer momento que MM *“era como la aplicación práctica de ese concepto* [matemático] *o de ese tema* [matemático]”. Y enfatiza que, al leer lo expresado por el autor, las sorprendió que la MM involucre un trabajo más amplio. Finalmente, la estudiante afirma *“jamás hubiéramos pensado que* [el proceso de modelización] *incluía el tema, problemas y que la idea era llegar a un modelo”*. Marina agrega: *“No modificarlo* [al modelo], […] *íbamos a tener algo y después ya estaba bien y* […] *lo aplicábamos en algo”.* A su vez Larisa señala *“Para mí es un poco impreciso eso que dice que es decisión de cada uno validar o no”*. Finalmente destacan que, a pesar de que no pensaban el modo de abordar la MM tal como lo propone el autor, lo consideran adecuado para lograr arribar a un modelo “ideal”.

Al exponer sus narraciones a la comunidad de práctica, muestran una reconfiguración del sentido atribuido a MM, que ya se hacía evidente en las narrativas presentadas. Expresan que una diferencia se produce al considerar inicialmente la MM como la aplicación de un tema enseñado por el/la profesor/a. Consideramos que esta atribución de sentido podría relacionarse con una representación de la MM ligada a la resolución de problemas en sentido clásico y un modo de entender la enseñanza tradicional de la matemática: teorías→ejemplos→problemas (Skovsmose, 2000).

Además, la transformación de sentidos lleva a una reconfiguración de lo expresado inicialmente al ampliar sus sentidos incluyendo las posibilidades de elección de un tema y la formulación de problemas con el fin de encontrar modelos adecuados o pertinentes. Además, señalan (con sorpresa) que no consideraban la posibilidad de modificación del modelo, lo que muestra una mirada, quizás, acabada de la producción matemática.

6.1.4. | GRUPO 2 – NARRATIVA 1: MODELIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA CON SITUACIONES COTIDIANAS

El grupo 2 comienza evocando vivencias y/o experiencias desarrolladas en la carrera Profesorado en Matemática en las que se referencia la expresión MM. Micaela recuerda que en la asignatura Taller de Álgebra y Cálculo les solicitaron que "[…] *con el GeoGebra pensemos respecto de un tema de la secundaria* […], *como modelizar para que los chicos entiendan los conceptos. Es decir, lo que* […] *teníamos que hacer es como crear* […] *herramientas para que los chicos* [las chicas] *utilicen esas herramientas y entiendan los conceptos que nosotras le queremos meter a ellos* [ellas] *en la cabeza".* En la frase de la estudiante notamos que vincula la modelización con situaciones en el marco de procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática tanto intra como extramatemáticas en las que se emplean tecnologías digitales. Específicamente, recupera como ejemplo una situación en la que la visualización potenciaría la comprensión de una noción matemática. La situación referida se vincula con representación de funciones lineales con *GeoGebra* a fin de observar cómo se modifica el gráfico al variar el valor asignado a la pendiente de una recta.

En el grupo, apreciamos inicialmente un predominio de la voz de Micaela, sin embargo, sus compañeras afirman que no presentan desacuerdos con esta primera aproximación. Esto se evidencia cuando Valentina al leer nuevamente la consigna puntualiza *"Acuerdos y desacuerdos que hayan surgido. Creo que no hay desacuerdos por el momento"*, lo que es confirmado por Micaela y Dianela. Además, Dianela y Micaela, señalan que a partir de lo recuperado y planteado se posibilita *"incorporar conceptos de una manera más didáctica"* que en otro tipo de clases (posiblemente refieran a clases en las que se emplea un abordaje de enseñanza tradicional). A su vez, destacamos que emplea una expresión que podría considerarse fuerte *"le queremos meter en la cabeza"*, que podría encontrarse relacionada, principalmente, con una idea de reproducción en los procesos de enseñanza de la matemática y una visión tal vez pasiva de quien aprende.

Prosiguen escribiendo la narrativa. Ponen en discusión, por un lado, el empleo de la expresión que propone Micaela *"herramientas didácticas"*, acordando que resulta más adecuado utilizar la expresión propuesta por Dianela *"actividades didácticas que favorecen la comprensión"*. Por otro lado, en la frase *"actividades didácticas que favorecen la comprensión* […] *por parte de los* [las] *alumnos* [alumnas]" debaten con respecto al modo en que refieren a alumnas/os, dado que Micaela plantea: *"No por parte de los* [las] *alumnos* [alumnas] […] *porque en una de esas una persona grande que no entiende se va a ir a buscar* [posiblemente refieran, por ejemplo, a búsquedas en Internet que realiza un adulto cuando tienen alguna duda]" y Guillermina agrega *"Claro,* […] *no son siempre alumnos* [alumnas], *por parte de aquellas personas que estén interesadas".*

Apreciamos que la discusión sigue un desarrollo lineal, en la que, si bien se ponen en jaque algunas cuestiones terminológicas y se amplían perspectivas, desde el primer momento se vincula estrictamente la MM con una metodología que se puede emplear para enseñar matemática, es decir, enfatizan en el uso de contextos extramatemáticos para introducir/explicar/comprender nociones matemáticas, es decir, apelando a la MM como vehículo (Julie y Mudaly, 2007). Destacamos que, en la interacción al interior del grupo, se dejan de lado ideas taxativas tales como asumir la idea de un docente que "mete en la cabeza de las/os estudiantes" lo que él o ella desea que entiendan, idea que posibilita contrastar sentidos.

Pasados pocos minutos de la clase el grupo plantea que ha finalizado la consigna. Debido a que los otros grupos se encuentran trabajando sobre la primera consigna, la investigadora se acerca al grupo y las invita a formular un ejemplo de lo expresado por ellas respecto a proceso de MM (Notas de campo 13/03/2018).

Al ofrecer ejemplos, evidenciamos que referencian situaciones en las que madres explican a sus hijas/os nociones matemáticas recurriendo a situaciones extramatemáticas. Por ejemplo, Micaela señala *"Cuánto es* [refiere a cuántas manzanas quedan], *si yo tengo cinco manzanas y me voy a comer dos"*. Frente a este ejemplo, sus compañeras señalan que el trabajo con este tipo de situaciones resulta "[…] *una forma de cambiar,* […] *de hacer más llamativo* […], *más didáctico, más entendible"*. A su vez, Valentina comenta que también emplea este tipo de situaciones cuando dicta clases particulares, la futura profesora afirma *"Cuando les enseño a mis alumnos que son de primaria, como cuando les decís cuando tu mamá te manda al kiosco y le pagas con tanto ¿cómo sabes cuánto…?* [No finaliza la frase, posiblemente refiere a cuánto debe pagar o cuánto vuelto le darán], *y así".*

La conversación continúa en relación con experiencias que han tenido al dictar clases particulares, manifiestan constantemente la importancia de explicar fundamentos de por qué se realizan ciertas acciones al resolver cuentas, principalmente aritméticas, Valentina señala *"Bueno los chicos no te entienden de donde salen esas cosas"*, además, referencian constantemente la importancia de emplear contextos extramatemáticos para incentivar la comprensión por parte del estudiantado. Observamos que los ejemplos puestos en escena por las futuras profesoras se vinculan con la aplicación en el sentido de Bassanezi (2002). Finalmente presentan la siguiente narrativa.

TABLA 26 | *Narrativa 1 Grupo 2 (Fuente propia).*

Lo que entendemos por "proceso de modelización matemática" es la incorporación de conocimientos matemáticos a través de actividades didácticas que favorecen la comprensión de esos conocimientos.

Por ejemplo: una madre lleva a cabo un proceso de modelización matemática, cuando intenta enseñarles a sus hijos [hijas] *llevando los problemas a situaciones cotidianas.*

En el análisis presentado se enfatiza en algunas cuestiones que mencionamos en la siguiente tabla.

TABLA 27 | *Red de sentidos a MM en la interacción del grupo 2 al realizar la narrativa 1 (Fuente propia).*

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA MEDIADA POR TECNOLOGÍAS

↓

SITUACIONES EXTRAMATEMÁTICAS E INTRAMATEMÁTICAS

↓

APLICACIÓN EN SITUACIONES EXTRAMATEMÁTICAS Y COTIDIANAS

En el análisis presentado evidenciamos que las futuras profesoras consideran al proceso de MM como una estrategia que consiste en recurrir a contextos extramatemáticos cotidianos que se puede emplear en los procesos de enseñanza y de aprendizaje para potenciar la comprensión de nociones matemáticas. De algún modo se presenta un corrimiento de la actividad matemática propiamente dicha a una actividad educativa, quizás mediada por las propias perspectivas futuras de las estudiantes y el porvenir (Skovsmose, 2012) en su desarrollo profesional enfatizando en el empleo de la MM como vehículo para la enseñanza de la matemática (Julie y Mudaly, 2007).

Estas ideas propuestas por las futuras profesoras del grupo 2 se pueden encontrar en relación con la perspectiva contextual y de elicitación de modelos (Kaiser, 2020) en la que la MM se concibe como un tipo especial de resolución de problemas que se emplean, principalmente, para apoyar el aprendizaje del estudiantado.

En concordancia con lo mencionado, primero recurren a vivencias y/o experiencias de formación en las que las tecnologías digitales resultan un medio eficaz para la comprensión de las/os estudiantes en el marco de situaciones intramatemáticas. Segundo, al intentar ejemplificar el proceso de MM, recurren a situaciones extramatemáticas y cotidianas en las que se aplican nociones matemáticas disponibles por quien resuelve la misma, lo que se encuentra, también relacionado con la caracterización de aplicación en términos de Bassanezi (2002). Cabe mencionar que en ningún momento se referencian afirmaciones vinculadas con la posibilidad de generar producciones matemáticas o de saberes matemáticos por partes de las/os estudiantes o personas en general a fin de resolver una situación dada.

6.1.5. | GRUPO 2 – NARRATIVA 2: PROBLEMAS QUE EMERGEN, SUBPROCESOS DETALLADOS Y MODELOS PRODUCIDOS

Al iniciar la discusión respecto a la lectura correspondiente a la segunda consigna, evidenciamos que el grupo 2 pone en discusión algunos aspectos que captan su atención o que no comprenden. Dianela señala *"Te dan un problema para analizar, los datos eh…* […] *Ahí haces experimentos, bla bla… vuelve a los problemas",* Guillermina agrega *"Claro, vuelve"* y Micaela aclara *"Claro, es un ida y vuelta"*. Las futuras profesoras se encuentran recuperando expresiones a partir de la lectura y particularmente señalan que el problema se encuentra dado y enfatizan la posibilidad de desarrollo cíclico del proceso de MM.

Continúan recuperando algunas caracterizaciones de los subprocesos y destacando qué palabras/expresiones unen las flechas en el esquema. Luego Micaela ejemplifica *"Claro, viste cuando vos llegás a una solución y decís, pero me parece que no es esta, vas y comprobás los* *datos experimentales* […], *entonces otra vez de nuevo al modelo digamos"*. Esta afirmación de la estudiante muestra un reconocimiento de vivencias y/o experiencias previas donde la producción inicial no responde a lo deseado y se deben producir modificaciones. A su vez, parece que la expresión *"solución analítica o numérica"* restringe las posibilidades de trabajo con el proceso de MM, al respecto Micaela afirma: *"Analítica o numérica, depende de si tenés x o no.* […] *La aplicas, o sea si funciona, viste como lo que hacemos con las sucesiones cuando encontrás el n-ésimo término, por ejemplo"*. De este modo evidenciamos que las estudiantes, influenciadas por la expresión presentada y apelando a un ejemplo intramatemático, consideran procesos de MM en los que se dan respuestas numéricas o expresiones algebraicas, eliminando otro tipo de posibilidades, como un gráfico o una tabla, o incluso, como es en nuestro caso, la definición como modelo (esta idea se profundiza en la parte 6).

Posteriormente señalan la importancia de la validación y particularmente consideran que es posible modificar el modelo y/o los datos experimentales. Dianela señala *"Porque el problema va a ser siempre el mismo, a menos que te haya surgido otro problema en la resolución",* no hacen explícitas consideraciones vinculadas con la modificación del problema, pero afirman que pueden emerger en el marco del desarrollo del proceso de MM nuevos problemas.

Seguidamente se acerca la profesora Laura al grupo y pregunta cómo van avanzando con la consigna. Las futuras profesoras señalan que las confunde el uso de algunas flechas del esquema y que no tienen en claro si luego de validar deben volver al problema o a modificar los datos experimentales y por tanto el modelo. La profesora responde *"A ver, puedo volver a los problemas que tenía para analizar y analizar a partir de ahí, para ver si modifico el modelo, o cuando llego a los datos experimentales, ahí puedo encontrar en los datos experimentales qué debería modificar"*. Esta afirmación de la profesora no deja explícita la posibilidad de modificar problemas en el marco de un proceso de MM, a pesar de ser una opción. Esta última opción, finalmente, es considerada por las futuras profesoras al proponer la posibilidad de análisis del problema.

Luego, y a raíz de una pregunta de la profesora *"¿Qué es un modelo para ustedes?",* cambian la temática de la discusión. Micaela responde que un modelo es *"algo a seguir"* y la profesora vuelve a realizar una pregunta *"¿Qué sería un modelo de docente?"* Las futuras profesoras señalan *"Un ejemplo"* y Dianela agrega *"Que tiene ciertas características digamos, que a vos te gustaría alcanzar"*. Finalmente, la profesora señala que en geometría generalmente el modelo se expresa en palabras y se retira del grupo.

Prosiguen produciendo su narrativa, escribiéndola y reescribiéndola apelando principalmente a los términos empleados por Bassanezi (2002). Discuten con respecto a la posibilidad de emplear *"formación de un modelo", "planteamiento", "constitución"* o *"conformación"*, optando, finalmente por este último término, lo que puede encontrarse influenciado por considerar la posibilidad de producción de modelos nuevos en el marco del proceso de MM. Continúan con interesantes discusiones en relación con lo planteado por el autor. Focalizan en diversas cuestiones, como ser: inicialmente se pueden tener problemas para analizar o una experimentación previa del tema; en la resolución se traduce el lenguaje natural en un lenguaje matemático; en caso de no lograr un modelo adecuado se recurre nuevamente a datos experimentales; se debe comparar la situación inicial con el modelo; en caso de ser necesario se vuelve a repetir el ciclo; cuando el modelo es adecuado se puede aplicar. A partir del detallado análisis presentan la siguiente narrativa.

TABLA 28 | *Narrativa 2 Grupo 2 (Fuente propia).*

Luego de leer el esquema de Bassanezi, llegamos a interpretar que partiendo de un tema, surgen distintos problemas para analizar, de los cuales se seleccionan variables esenciales y un lenguaje natural del problema para llegar a la conformación de un modelo. Este modelo consiste en una representación de aquello a lo cual se quiere llegar. Mediante una resolución matemática el lenguaje natural seleccionado en el proceso de abstracción se traduce a lenguaje matemático para poder llegar a una solución analítica o numérica; si la solución a la que se llega es la deseada se procede a la aplicación de la misma, de lo contrario se efectúa una validación en donde se compara dicha solución con el modelo donde entran en juego los datos experimentales adquiridos. Desde esta fase podemos volver al análisis del problema o modificar los datos experimentales para la obtención del modelo deseado para luego volver a repetir el ciclo hasta llegar a la aplicación de una solución.

Del análisis realizado retomamos algunas cuestiones que sintetizamos a través de la siguiente tabla con el fin de evidenciar aspectos predominantes y avances en el sentido otorgado al proceso de MM.

TABLA 29 | *Red de sentidos a MM en la interacción del grupo 2 al realizar la narrativa 2 (Fuente propia).*

PROBLEMA DADO
↓
DESARROLLO CÍCLICO DEL PROCESO DE MM
↓
POSIBILIDAD DE MODIFICACIÓN DEL MODELO
↓
SOLUCIONES NUMÉRICAS O ALGEBRAICAS
↓
VALIDACIÓN DE LA SOLUCIÓN INICIAL
↓
POSIBILIDAD DE MODIFICACIÓN DE DATOS EXPERIMENTALES Y DEL MODELO
↓
POSIBILIDAD DE EMERGENCIA DE NUEVOS PROBLEMAS EN EL MARCO DEL PROCESO DE MM
↓
FORMULACIÓN DE PROBLEMAS
↓
MODELO COMO ALGO A SEGUIR, ALGO DESEADO QUE SE PUEDE PRODUCIR
↓
APLICACIÓN DEL MODELO CONSTRUIDO

Como grupo van produciendo sentidos posicionadas como futuras docentes y concibiendo la MM como vehículo (Julie y Mudaly, 2007) para enseñar recurriendo a la aplicación, por lo que todo estaría dado para que apliquen modelos conocidos con anterioridad. Esta idea parece que atraviesa la interpretación de los aportes de Bassanezi (2002) y como grupo tratan de escribir la narrativa, a pesar de que se les interpone sus sentidos anteriores que quedaron problematizados. Incluso, como grupo consideramos que les resulta complejo interpretar la dinámica del proceso de MM expresada en el esquema, posiblemente por la linealidad de sus propias representaciones.

En general, del análisis realizado observamos que el grupo recorre en detalle y con reflexiones constantes los subprocesos del proceso de MM explicitados por Bassanezi. En el recorrido, van configurando y reconfigurando sentidos. Inicialmente consideran que el problema se encuentra dado, sin embargo, amplían esta posibilidad detallando la posibilidad de formulación de problemas y de emergencia de otros problemas durante el desarrollo del proceso de MM. A su vez, consideran que el modelo es algo deseado y que puede construirse por la persona que se involucra en el proceso, que debe ser validado y puede ser modificado. También pareciera que en ciertas afirmaciones (por ejemplo, *si la solución a la que se llega es la deseada*) las estudiantes refieren a acciones que podrían vincularse con la validación – modificación, como subprocesos inseparables y destacan la posibilidad de modificar los datos experimentales y de aplicar el modelo construido sólo si se validó previamente.

En general, logran apreciar potencialidades que posee el trabajo con el proceso de MM desde la perspectiva presentada para interpretar. Además, destacamos tres cuestiones que atraviesan los sentidos atribuidos por el grupo en este momento: en la discusión en torno a esta consigna no recuperan sus primeras aproximaciones a MM ni contrastan con el autor su producción inicial; no consideran en su escrito, a pesar de la afirmación de la docente, la posibilidad de obtener una solución expresada en palabras, recuperan las opciones de que la misma resulte numérica o analítica; y no explican ni recuperan oralmente un ejemplo concreto para comprender el proceso.

6.1.6. | GRUPO 2 - PRESENTACIÓN DE PRODUCCIÓN A LA COMUNIDAD DE PRÁCTICA

Durante la presentación a la comunidad de práctica de la producción realizada predomina la voz de Micaela. Afirma que en su postura inicial consideran a la modelización desde un punto de vista que la vincula directamente con la enseñanza, a su vez destaca *"Enseñar, modelizar. Nuestro proceso de modelización partía de proporcionar herramientas didácticas* *y cosas así, como para que los chicos* [chicas] *entiendan el tema que nosotras propusimos".* En esta primera consideración observamos que nuevamente enfatizan en el empleo de la MM como vehículo para enseñar matemática (Julie y Mudaly, 2007) y que expresa que el problema es dado, tal como lo proponen en su narrativa inicial. Sin embargo, no recuperan en la presentación, sus interpretaciones sobre las ideas del autor que las llevaran a consideran como posible que la formulación del problema se encuentre a cargo de la persona que se involucra en el proceso de MM.

Además, la futura profesora destaca que coinciden con el autor en la descripción del proceso de MM que presenta, pero que no tenían en cuenta que se atravesaban los subprocesos y las acciones que se realizan en cada uno de ellos, explicita: *"Coincidimos, pero nunca teníamos en cuenta digamos que pasábamos por todas esas etapas, o sea, viéndolo así decimos sí, bárbaro, tenemos problemas, tenemos los datos, modificamos esos datos si no llegamos a las soluciones, o sea, hacemos todos estos pasos, pero nunca los teníamos en cuenta".* Esta cuestión muestra que no parecen apreciar como algo lejano la actividad de MM, sino que no hacían explícito el recorrido o no encontraban las palabras para referenciar el proceso. La necesidad de explicitar subprocesos emerge en contraste con lo leído, es decir, los sentidos se reconfiguran en el encuentro con el sentido de otros produciendo una cadena de sentidos, lo que tracciona la apropiación de las palabras para explicitar lo pensado y con ello cargar de sentido.

6. 1. 7. | GRUPO 3 - NARRATIVA 1: MODELOS QUE SE ADAPTAN EN FUNCIÓN DE LA SITUACIÓN

De modo general apreciamos que el grupo 3 dirige su atención en responder la consigna presentada rápidamente y luego, las estudiantes focalizan sus conversaciones en aspectos externos al trabajo que se está desarrollando en el aula.

Destacamos, como ya se avanza en la tercera parte, que el grupo de futuras profesoras que conforman este equipo de trabajo han cursado anteriormente diversas asignaturas de distintos años del plan de estudio, no siguen en su trayectoria un desarrollo lineal del mismo y las trayectorias son diferentes. Específicamente, Paula, Agostina y Yamila cursaron la asignatura Modelos Matemáticos (propuesta para 5to año de la carrera) en el segundo cuatrimestre del año 2017 y observamos que diversas afirmaciones que realizan y la perspectiva que adoptan se encuentra influenciada por esta experiencia. En dicha asignatura, entre otros, se persigue el siguiente objetivo: "Comprender, interpretar y analizar alcances y limitaciones de modelos matemáticos" (Programa de Cátedra Modelos Matemáticos 2017, p.1). En general, la modalidad de trabajo consiste en la presentación por parte de las profesoras de la cátedra de diferentes fórmulas, leyes, etc., como ser, cadenas de Marcov, ecuaciones logísticas, ecuaciones de Lotka-Volterra, sistema de masa-resorte, que luego se emplean en problemas dados por parte de las profesoras y se determinan los valores que se emplean en las fórmulas atendiendo a la contextualización ofrecida en el enunciado del problema dado.

Al intentar responder la consigna notamos que Yamila de modo inmediato señala *"Y ahí no sé. Es el modelo mismo",* Macarena interrumpe agregando *"Modelizar las leyes que rijan…* […] *fenómenos de la naturaleza o fenómenos sociales"* y Yamila responde *"¿Qué hacemos?, modelizamos, no sé… modelizar de adaptación"* [Al volver a la consigna dada]. Cabe destacar que, al inicio de las interacciones, las ideas de las futuras profesoras, tal como se muestra, no se configuran a partir de idas y vueltas entre ellas, sino que, entre ellas, realizan afirmaciones aparentemente desconectadas. Pareciera como si cada una estuviera pensando en voz alta pero sola. En estas primeras ideas, por un lado, Yamila espontáneamente hace referencia al modelo, por lo que pareciera es considerado por la estudiante como parte sustancial en el marco de modelización. Por otro lado, Macarena pone el foco en fenómenos naturales o sociales, vinculando la modelización con situaciones extramatemáticas. Posteriormente Agostina afirma *"pensemos",* y permanecen en silencio unos segundos.

La discusión continúa con una intervención de Paula que señala *"Modelizar para mí es que para determinados tipos de problemas ya tengas un modelo",* Agostina responde *"Claro, por ejemplo, una ecuación logística"* y Paula indica *"O sea, poder establecer…",* sin embargo, esta última estudiante no completa su idea. Ante esto, Macarena afirma *"Una ley que rija, que explique algún fenómeno",* quizás completando de ese modo lo dicho por Paula. A raíz de estas últimas intervenciones Yamila propone escribir *"Obtener ciertas, que se yo, normas que puedan adaptarse a determinados…"* El primer diálogo presentado, entre Paula y Agostina, puede vincularse, quizás, con una perspectiva en la que consideran el empleo de modelos disponibles, dejando de considerar o no haciendo explicita la posibilidad de producción de los mismos. Esta aproximación puede vincularse con el empleo de ecuaciones logísticas en la asignatura Modelos Matemáticos, en la que en determinados tipos de problemas se emplea esta ecuación modificando parámetros en función de los datos dados en cada problema.

Posteriormente, Macarena propone no usar la palabra norma debido a que resulta *"más jurídico"* y sugiere emplear el término *"leyes"* al vincularlo con el uso que se realiza del mismo en física. A su vez, explicitan que cuando refieren a leyes consideran leyes matemáticas, fórmulas y ecuaciones. El empleo de las dos últimas expresiones (fórmulas y ecuaciones) puede interpretarse como una equiparación entre modelo y fórmulas algebraicas y/o funcionales. Pero la idea de ley hace evidente la determinación de una cierta regularidad en lo estudiado y esa ley o regularidad podría ser escrita/representada de varios modos.

Luego recuperan un ejemplo trabajado en la asignatura Modelos Matemáticos. Paula afirma:

> *O sea, vos en el modelo lo que haces, o sea vos después por ejemplo vas a tener un problema similar y lo vas a poder resolver con lo mismo, no le decís, ¿se entiende lo que quiero decir?* [...] *Todos los temas, todos los problemas similares* [...] *Los vas a resolver con la misma ecuación, es modelado.*

Agostina agrega como ejemplo *"La ecuación logística, te acordás que esa es la del pan".* En la asignatura Modelos Matemáticos se solicita que observen el desarrollo de hongos en un pan, para esto, colocan sobre el pan una cuadrícula, registran una vez al día la cantidad de cuadrados en los que se visualizan hongos y con los datos obtenidos aproximan el comportamiento del crecimiento de hongos en el pan, en general, a través de la ecuación logística. Este reconocimiento de modelización ligado principalmente a la aplicación y modificación de modelos preestablecidos se encuentra en relación con el subproceso de aplicación mencionado en Bassanezi (2002). Además, destacamos que al hablar de MM recuperan en todo momento situaciones extramatemáticas y evidenciamos la fortaleza de una experiencia para construir o configurar sentidos, en este caso la experiencia en la asignatura Modelos Matemáticos, tal como lo plantea Larrosa (2003).

Finalmente referencian la importancia de emplear el modelo de manera correcta otorgando un lugar primordial a la necesidad de dar una respuesta adecuada al problema en juego, también, explicitando que deben cotejar que el problema o situación nueva cumple con ciertas condiciones, mostrando cautela con el trabajo matemático. Algunas expresiones de las futuras profesoras son *"Para poder resolver todo de la forma adecuada"* y *"Hay que resolver bien",* tal vez esto puede mostrar una mirada de algún modo acabada de la matemática donde la respuesta correcta, quizás, es considerada única y coincide con el modelo estudiado/abordado recientemente. A su vez, estas afirmaciones se pueden vincular con acciones que se realizan en el marco del subproceso de validación (Bassanezi, 2002).

El grupo, a partir de las discusiones realizadas, presenta la siguiente narrativa.

TABLA 30 | *Narrativa 1 Grupo 3 (Fuente propia).*

Proceso de modelización matemática es poder establecer una ley que se ajuste "mejor" a un problema determinado para poder resolverlo de forma adecuada.

Del análisis realizado consideramos que se ponen en juego algunas cuestiones con énfasis que sintetizamos a través de la siguiente tabla.

TABLA 31 | *Red de sentidos a MM en la interacción del grupo 3 al realizar la narrativa 1 (Fuente propia).*

MODELO

↓

SITUACIONES EXTRAMATEMÁTICAS

↓

LEYES

↓

ADAPTACIÓN DE MODELOS DISPONIBLES

↓

VALIDACIÓN DE MODELOS

Apreciamos a partir del análisis realizado que las estudiantes desde el primer momento consideran al modelo como parte fundamental del proceso de MM y vinculan este último, durante toda la discusión, con la aplicación en situaciones extramatemáticas.

A su vez, evidenciamos que una experiencia en su trayectoria de formación formal previa al curso de GEE durante el cursado de la asignatura Modelos Matemáticos, influye en el sentido otorgado a MM. El cursado de esta asignatura les abre una esfera de actividades que les provee ideas, repertorio verbal y ejemplos que atraviesan completamente su perspectiva respecto a qué es modelizar. A partir de esa experiencia, las futuras profesoras consideran como indispensable el disponer de un modelo (leyes: ecuaciones y/o formulas) que se puede adecuar o modificar en función de la situación y que debe estar validado para poder ser empleado.

Finalmente, consideramos que algunas ideas de las propuestas pueden vincularse con la modelización epistemológica o teórica, puesto que se focaliza en la comprensión de ciertos conceptos matemáticos, a pesar de buscarse un problema extramatemático que se responda apelando a un determinado concepto.

6.1.8. | GRUPO 3 - NARRATIVA 2: VALIDACIÓN COMO PARTE DEL PROCESO DE MM Y MODELOS QUE SE MODIFICAN Y ADAPTAN A LA SITUACIÓN DADA

Inicialmente, el grupo enfatiza con desconcierto que la validación según el autor forma parte del proceso de MM. Inmediatamente, Paula afirma *"O sea, primero experimenta",* esta consideración lleva a Agostina a responder *"Nada que ver entonces a lo que pusimos"* [refiriéndose a la narrativa inicial propuesta por el grupo en la que ponen de manifiesto sus ideas iniciales respecto a MM] y Paula fundamenta *"Sí, porque es proceso. Nosotras por ahí lo tomamos como que ya estaba el modelo hecho y nosotros* [nosotras] *lo usábamos para resolver y acá está, a ver, cuando vos tenés un problema, ¿qué haces?, ¿probas si no sabes cómo hacerlo?".* Es evidente que encuentran rápidamente una diferencia sustancial con respecto al lugar que ocupa el modelo en la perspectiva del autor, dado que ellas consideraban que el mismo era conocido y no consideran como opción que sea un objeto por crear.

A su vez, Macarena, siguiendo el orden presentado en el texto dado afirma *"Sí, los datos es una de las primeras cosas, cuáles son las variables, bueno los datos primero"* y explicita que esta cuestión la encuentra relacionada con lo que se realiza en Física (asignatura del primer cuatrimestre del quinto año en el plan de estudios), dado que *"Vamos al dibujito primero".* Esta consideración puede encontrarse relacionada por el hecho de que en la asignatura Física aborden problemas dados por el profesorado en los que inicialmente las/os estudiantes realizan un diagrama que representa la situación problemática que se presenta y en el mismo se colocan los datos identificados del enunciado y se vinculan las variables empleando fórmulas dadas previamente.

Posteriormente, Macarena señala *"O viste la inducción cuando no sabes para qué lado disparar, en los primeros casos empezás a probar".* Observamos que esta última acción señalada implica experimentar, e incluso, diseñar un experimento. También, encontramos que por primera vez en el grupo emerge una consideración que involucra un fenómeno intramatemático, lo que puede ser el detonante de una ampliación de la mirada y de posibilidades con respecto a los ejemplos y sentidos iniciales.

Continúan leyendo de modo corrido la descripción de los subprocesos de experimentación, abstracción, resolución y validación. Con respecto a este último Paula señala *"¿A qué se refiere esto?, o sea, lo que obtuviste como resultado puede ser realmente un resultado de tu situación matemática".* La interrupción de la lectura por parte de Paula posiblemente se encuentra influenciada por la caracterización del subproceso de validación que, evidentemente, capta su atención. Yamila explica *"Como decir qué resultado se ajusta o no a algo"* y Macarena agrega

“Claro, si tiene mucho error o no, ¿entendés?, porque si tiene mucho error, capaz medio raro...”. Las aseveraciones de las futuras profesoras muestran un cierto desconcierto con respecto al abordaje de validación que se propone en el texto. Sin embargo, por un lado, la afirmación realizada por Yamila puede encontrarse en sinergia con lo discutido por el grupo al formular la primera narrativa en relación con adaptación de modelos, y por otro lado la consideración realizada por Macarena puede encontrarse en relación con los ejemplos que abordan al formular su primera narrativa, puesto que al efectuar mediciones (como es en el caso del ejemplo del pan) se pueden cometer errores. A su vez, esta estudiante señala *“medio raro”,* cuestión que muestra que emplear un resultado con bastante margen de error no resultaría adecuado.

Posteriormente, Yamila recupera la expresión del texto *“es un proceso de decisión de aceptación o no del modelo inicial”* y asegura *“Vos partís de algo, pero no sabés…”,* y Macarena explica *“Claro, por ahí haces cuentas, que se yo, pero por ahí no es tan así, entonces tenés que descartarlo”,* haciendo evidente la posibilidad de modificar. Parecería que basadas en experiencias, referencian la modificación de ciertos datos (parámetros), números, etc. que se emplean en fórmulas preestablecidas. Asimismo, no observamos que expliciten alguna consideración respecto a validaciones de tipo empírico, por ejemplo.

Prosiguen leyendo la caracterización del subproceso de modificación. Macarena señala *“Claro es lo mismo, no sé, como modelo para un cálculo de áreas, siempre que te dan las áreas negativas no hay áreas negativas, bases negativas”,* sus compañeras ratifican esto, y en particular Agostina afirma *“Ajustarlo”* y Macarena responde *“Claro hay algo que está mal”.* En lo mencionado por las futuras profesoras consideramos que el ejemplo que toman refiere a la necesidad de modificar la función a integrar (en dos dimensiones) para calcular áreas debajo de una curva aplicando valor absoluto, situación en la que nuevamente se emplean métodos y modelos conocidos, pero que ante el error se inicia una modificación que puede resultar matemáticamente importante. Además, apreciamos que la perspectiva respecto al error, quizás se encuentra relacionada con enfoques tradicionales de metodologías de enseñanza, donde se puede apelar a modelos disponibles para resolver diversas situaciones y existe una única respuesta correcta, por lo que, en caso contrario se considera que la misma es errónea. Destacamos que a pesar de que el grupo en un inicio parece encontrar una diferencia entre su perspectiva inicial de modelo y la del autor, luego, no retoman ni reconsideran esta idea.

Paula lee la caracterización de aplicación y señala *“Yo pensé que eso ya lo habíamos hecho”.* Como grupo, realizan una serie de apreciaciones en las que dejan de manifiesto que consideran que este subproceso se vincula con la *“vida real”*, debido a que a partir de los resultados alcanzados pueden tomar decisiones. Macarena afirma que, por ejemplo, a partir de los resultados se puede decidir invertir o no en un proyecto [Sin aclarar a qué proyectos referencia]. En este momento finalizan la lectura y Yamila afirma *"No está tan errado, así qué* [Refiere a su primera narrativa en la que dan cuenta de su apreciación respecto a MM]" y sus compañeras aclaran que lograron su escrito por haber cursado la asignatura Modelos Matemáticos y que en caso contrario no hubieran podido hacerlo. Nuevamente ponen de manifiesto el valor de la experiencia en la constitución de sentidos (Larrosa, 2003) o de las esferas de actividades en las que la/el sujeta/o se involucra (Bajtín, 2000).

Una vez finalizada la lectura y discusiones que recuperamos anteriormente el grupo comienza la escritura de la narrativa. Consideramos que el grupo no se apropia completamente de la consigna y la perspectiva que se presenta a partir de los aportes de Bassanezi (2002), sino que prevalece el cumplir con lo solicitado, recuperando la experiencia en la asignatura Modelos Matemáticos. En este sentido, no evidenciamos que amplíen demasiado sus perspectivas u horizontes, sino que prevalece la vinculación y reflexión entre la experiencia y el escrito dado. Es decir, evidenciamos en este grupo una apropiación previa respecto a MM que recuperan con valor.

En momentos de escritura, parecería que Yamila intenta profundizar algunas ideas, pero Macarena (voz predominante en el grupo) interviene focalizándose estrictamente en dar una respuesta. Yamila afirma *"Se entiende por proceso de modelización aquel que involucra datos recolectados experimentalmente"* y Macarena señala que involucra etapas y sugiere numerarlas, Yamila cuestiona esta decisión preguntando *¿Es esto nada más?,* y Macarena responde *"Sí y a lo sumo le tiras algo más".*

Avanzan en la narrativa linealmente siguiendo el orden desarrollado en el texto entregado. Explicitan que a partir de un tema se: recolectan u obtienen datos a través de la experimentación, vinculan o relacionan las variables, lleva de lenguaje coloquial a matemático, resuelve, valida, modifica o no, aplica el modelo. Es decir, recuperan estrictamente frases y términos del autor sin realizar consideraciones al respecto en su escritura. La narrativa producida por el grupo es la siguiente.

TABLA 32 | *Narrativa 2 Grupo 3 (Fuente propia).*

A partir del autor Bassanezi por proceso de modelización entendemos aquel que involucra las etapas de experimentación, abstracción, resolución, validación, modificación y aplicación. Es decir que a partir de un tema central se obtienen una serie de datos a través de la experimentación, se definen las variables y luego se vinculan, se pasa del lenguaje coloquial al matemático para así resolverlo. Una vez resuelto se procede a la validación del resultado y con eso la modificación o no del modelo para su posterior aplicación.

Del análisis realizado recuperamos en la siguiente tabla algunas consideraciones que permiten poner en evidencia sentidos atribuidos.

TABLA 33 | *Red de sentidos a MM en la interacción del grupo 3 al realizar la narrativa 2 (Fuente propia).*

EXPERIMENTACIÓN Y VALIDACIÓN COMO PARTE DEL PROCESO DE MM

↓

ROL DEL MODELO

↓

SITUACIONES EXTRAMATEMÁTICAS E INTRAMATEMÁTICAS

↓

MODIFICACIÓN VINCULADA A CAMBIOS DE PARÁMETROS

De modo general, no reconocemos grandes debates con respecto a la perspectiva inicial y las discusiones que presentan al leer los aportes de Bassanezi (2002), sino que observamos una asociación entre vivencias y /o experiencias atravesadas en la carrera Profesorado en Matemática y el texto. Es decir, con la lectura identifican situaciones vividas en el marco de su trayectoria profesional y reflexionan atribuyendo sentido.

Destacamos algunas consideraciones que resultan de interés para comprender el sentido atribuido, por ejemplo, la sorpresa que manifiestan al observar que el autor considera a la validación como parte del proceso de MM. En relación con esta cuestión no dejan evidencias que muestren un reconocimiento de la posibilidad de llevar adelante validaciones empíricas e incluso, se asombran de la perspectiva presentada. A su vez, en un primer momento parecen encontrar diferencias con respecto al rol del modelo propuesto en su narrativa y el del autor, enfatizando en la acción de experimentar, consideración que también evidencian en la narrativa.

Destacamos que ofrecen al interior del grupo un ejemplo que involucra una situación intramatemática, pero no discuten al respecto ni lo retoman en momentos de producción de la narrativa.

Finalmente, la expresión *"se definen las variables y luego se vinculan, se pasa del lenguaje coloquial al matemático"* presentada en la narrativa podría admitir la posibilidad de producción y/o modificación de modelos, sin embargo, en general, los ejemplos sobre los que avanzan remiten a adaptación de modelos dados en función de una situación particular.

6.1.9. | GRUPO 3 - PRESENTACIÓN DE PRODUCCIÓN EN LA COMUNIDAD DE PRÁCTICA

En la exposición solo se aprecia la voz de Paula, al principio señala *"A grandes rasgos nosotras habíamos pensado similar, ni cerca habíamos escrito todo esto, o sea por pasos"*. Refiriere a la organización por subprocesos que realiza el autor.

A su vez, destaca que, en la perspectiva inicial del grupo el proceso de modelización *"es poder establecer una ley* […] *que se ajuste mejor a un problema para poder resolverlo de una forma adecuada"* y señala *"si bien ya tener un modelo conocido y poder aplicarlo a nuestro problema o poder armar nosotros un modelo que sirva para diferentes, también puede ser para diferentes tipos de problemas".* Aquí se hace evidente que Paula considera la posibilidad de producción de modelos, cuestión que no habíamos considerado evidente en el análisis de las discusiones que se realizan al interior del grupo durante la formulación de la primera narrativa y que en el marco de producción de la segunda "aparece" de modo fugaz como parte de una discusión, pero no es retomada.

Finalmente, destaca que como grupo al leer la caracterización del subproceso de aplicación pudieron darse cuenta del potencial de emplear resultados para tomar decisiones. Pareciera que las experiencias previas con la asignatura MM y Física, se tornan tan importante para ellas, que no resultaría necesario transformar las atribuciones de sentidos conformados en esos contextos. O al menos, las dos consignas no producen un contraste para rebatirlos.

6.1.10. GRUPO 4 - NARRATIVA 1: LOS MODELOS VIENEN DADOS

En un inicio el grupo 4 se aproxima a la consigna propuesta con ciertos desacuerdos sobre la dificultad de esta, percibida por Pablo como fácil pero no así por sus compañeras. Evidenciamos, desde esta primera interacción, una constante puesta a prueba de las afirmaciones que se realizan al interior del grupo, modalidad que se mantiene durante todos los intercambios que se producen.

Ludmila pregunta *¿Qué entienden por proceso de modelización matemática?*, Pablo responde *"Ese es fácil, ese".* Esta última aseveración es objetada por sus compañeras, Ludmila señala *"A ver..."* y Victoria *"¿En serio?"*. Posteriormente Ludmila explicita *"O sea yo entiendo algo por modelización, a ver que pensás vos…* [Dirigiéndose a Pablo] *¡Dale!, ¿no era fácil?".* Con estas expresiones la futura profesora continúa interpelando a Pablo, quien indica que su primer comentario era en realidad sarcástico, dado que parece una consigna no-fácil.

Este primer intercambio pone en evidencia la mayor o menor familiaridad o confianza del grupo con MM. Inmediatamente Ludmila afirma *"yo entendía en algunas materias era que vos podías trabajar contenidos matemáticos con realidades o con cosas más concretas que el alumno puede ver digamos",* es decir, la influencia de vivencias en asignaturas previas pone en escena el pensar que se modeliza cuando se trabaja con situaciones en las que se establece un vínculo entre cuestiones visibles y nociones matemáticas. Además, señala que se otorga la posibilidad de trabajar con fenómenos más concretos o reales para un/a estudiante que la propia matemática. Expone el siguiente ejemplo al interior del grupo *"cuando tenés un problema* […] *de una caja y los* [o las] *haces trabajar* [considera estudiantes imaginarios que se encuentran inmersos en una clase] *con GeoGebra, se quiere saber el área, es algo que se me ocurre"*. Ludmila parece que, por un lado, establece una relación directa entre MM y los procesos de enseñanza y de aprendizaje, dado que lee la consigna y señala *"los* [las] *haces trabajar"* refiriéndose a estudiantes que se involucrarían en estos procesos de MM. Por otro lado, referencia el representar con un software un objeto (caja) por lo que consideramos que otorgaría relevancia a esta tecnología digital al pensar en MM. Quizás refiere al software por la posibilidad que brinda el mismo para representar y/o para calcular el área de la representación de la caja.

Ante lo dicho por Ludmila, Victoria solicita que la convenza de que lo que ella dice es verdad. Ludmila responde *"hay que buscar el significado de modelización".* Esto es, lo afirmado se debe contrastar con lo legitimado (externamente en este caso) de algún modo para determinar su valor de verdad. Este intercambio argumentativo lleva al grupo a buscar en Internet qué es modelizar. Ludmila lee de una página escogida *"Establecer el modelo teórico de algo, un* *comité, modelizar algo".* En un principio esta estudiante pareciera percibir que la definición es circular y no ayudaría, pero inmediatamente Pablo señala *"Modelar sería, hacer un modelo.* [...] *La matemática modeliza ciertos problemas* [...] *de la física y de la química".* Además, el estudiante, para ampliar su idea referencia la Ley de Torricelli, tratada en un curso previo de ecuaciones diferenciales. A partir de esa intervención, Ludmila menciona otro ejemplo que involucra problemas de mezcla de sustancias. La estudiante ofrece ese ejemplo pues sabe que Victoria no ha cursado previamente ecuaciones diferenciales (asignatura propuesta en segundo cuatrimestre de tercer año donde se aborda esta Ley).

Apreciamos que estas primeras aproximaciones parecen vincular, principalmente, la modelización con problemas extramatemáticos y con lo que Bassanezi (2002) denomina subproceso de aplicación, dado que refieren a aplicar en una situación una noción matemática determinada y disponible (cálculo de un área o aplicación de la fórmula propuesta por Torricelli[40]).

Luego de breves intercambios al interior del grupo, Pablo intenta extender su idea más allá de los ejemplos anteriores. Afirma, *"Para cualquiera problema nosotros* [nosotras], *mediante matemática, hacíamos un modelo de ese problema para resolverlo".* Si bien, se percibe importante la idea de *"hacer un modelo"* no referencian, de modo explicito, hasta este momento la posibilidad de producción de modelos matemáticos totalmente nuevos por parte de quien se involucra con el proceso de MM. No obstante, así como una de las aplicaciones de la ley de Torricelli consiste en emplear adecuadamente sistemas de referencias para medir alturas que le da sentido al modelo, quizás en lo referido por Pablo, también hay una visión de adaptar modelos dados a nuevas situaciones, lo cual puede conformar parte de un proceso de MM.

Posteriormente, se producen comentarios referidos a cómo escribir lo conversado. Victoria realiza una afirmación aparentemente desvinculada con lo que el grupo se encontraba debatiendo, pero que posibilita ampliar el eje de la discusión *"Sería como la parte siguiente al proceso de validación".* Esto produce algo de perplejidad a Ludmila y Pablo que le piden a Victoria que explique. Ante estos cuestionamientos, Victoria afirma: *"Para mí una* [refiere, por ejemplo, a la prueba de la ley de Torricelli] *es la prueba y en la otra enuncia* [refiere, por ejemplo, al enunciado de la ley de Torricelli]". Si bien Ludmila y Pablo no parecen comprender en profundidad lo expresado, la intervención de Victoria lleva a Ludmila a evocar ciertas vivencias pasadas en el marco de la carrera Profesorado en Matemática. A raíz de tal evocación indica

[40] Es interesante hacer notar que Torricelli propone su ley aplicando el Principio de Bernoulli. En la misma se supone que se tiene un determinado tanque con un agujero en el fondo (de área a) por donde sale el agua, entonces se establece una relación proporcional entre la velocidad de salida del agua con la profundidad en un determinado instante. Tomado de: Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Cengage Learning.

que cuando se hablaba de modelización se refería a problemas concretos, es decir, aplicación en otras áreas [fuera de la matemática] y señala que, para ella, la propuesta de Victoria se vincula con la construcción de un modelo más teórico. Quizás motivada por la connotación matemática formal que le provoca la palabra validación.

Posteriormente inician el proceso de escritura de la narrativa, momento en el que prevalece la asociación entre modelización y el trabajo con problemas de diversas áreas que se resuelven matemáticamente, pero incluyen en su escritura la posibilidad de trabajo con situaciones de la propia matemática debido a la consideración manifestada por Victoria. A partir de las interacciones presentan la siguiente narrativa.

TABLA 34 | *Narrativa 1 Grupo 4 (Fuente propia).*

El proceso de modelización algunos pensamos que consiste en la adaptación de situaciones o contenidos de cualquier área que admiten un modelo matemático (disciplina o realidad) para ser trabajados desde los contenidos matemáticos.

Del análisis realizado consideramos que se ponen en juego algunas cuestiones con énfasis que sintetizamos a través del siguiente cuadro por considerarlas significativas en la relación con el trabajo de MM.

TABLA 35 | *Red de sentidos a MM en la interacción del grupo 4 al realizar la narrativa 1 (Fuente propia).*

SITUACIONES EXTRAMATEMÁTICAS Y TECNOLOGÍAS DIGITALES

↓

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

↓

POSIBILIDAD DE HACER UN MODELO A PARTIR DE CONOCIMIENTOS DISPONIBLES

↓

APLICACIÓN EXTRAMATEMÁTICA E INTRAMATEMÁTICA

El grupo vincula la modelización con la reformulación de un modelo, a partir de conocimientos matemáticos disponibles (por ejemplo, aplicación de Ley de Torricelli), para abordar y responder problemas. Esta idea se encuentra en relación, principalmente, con el subproceso de aplicación en el sentido de Bassanezi (2002).

En principio consideran el trabajo con situaciones extramatemáticas mediadas por tecnologías (principalmente digitales), sin embargo, la polifonía de voces (Bajtín, 2000) amplía la perspectiva inicialmente instaurada insinuando la posibilidad de trabajo con MM en situaciones intramatemáticas.

También, hacen referencia a un alumno/a que se encuentra modelizando y aprendiendo, ideas que pueden vincularse con aproximaciones realizadas por el grupo 2 y que se relacionan con la perspectiva contextual y de elicitación de modelos (Kaiser, 2020) en la que la MM se concibe como un tipo especial de resolución de problemas que se emplean, principalmente, para apoyar el aprendizaje del estudiantado.

Finalmente, destacamos dos cuestiones del análisis presentado que consideramos influenciadas por vivencias y/o experiencias de formación en el marco de la carrera Profesorado en Matemática. Por un lado, la relación entre procesos de enseñanza y de aprendizaje y procesos de MM, considerando este último como una instancia en la que luego de abordar nociones matemáticas se realizan problemas de aplicación. Por otro lado, no parecen centrarse en la posibilidad de hacer modelos, aunque lo referencian brevemente, no encontramos que focalicen en la posibilidad de producción de modelos matemáticos totalmente nuevos empleando conocimientos que emergen y se producen en el marco del propio proceso de MM.

6.1.11. | GRUPO 4 - NARRATIVA 2: SELECCIÓN DE TEMAS, SUBPROCESOS DETALLADOS Y MODELO COMO PERSONA IDEAL

En primer lugar, leen en detalle la caracterización de cada subproceso y realizan aportes, explicaciones, manifiestan dudas, etc. al interior del grupo. Emergen algunas cuestiones durante la lectura, principalmente a partir de afirmaciones o ideas que captan la atención del grupo, que detallamos a continuación. Toman como referencia el esquema del proceso de MM y lo analizan detenidamente atendiendo a la descripción presentada para cada subproceso.

Ludmila inicialmente afirma *"Bien, del tema para problemas para analizar o datos experimentales* [...]. *En el esquema, es que para los datos experimentales primero tiene que haber una experimentación, obtención de datos experimentales",* Victoria responde *"Primero parte del tema"* y Ludmila señala *"Pero en el tema no hay nada que analizar".* Luego de tal afirmación de Ludmila se produce silencio en el grupo. Por un lado, destacan la secuencia tema-problema y presentan incertidumbre con respecto a la presencia de los datos, resuelven esto considerando la secuencia experimentación-datos. Por otro lado, parece que para el grupo no es claro el rol del tema o selección del tema en el proceso de MM, la afirmación de Ludmila *"En el tema no hay nada que analizar",* podría encontrarse influenciada por el hecho de no considerar como opción factible que la selección del tema sea realizada por la/s persona/s que se involucra/n en el proceso de MM.

A su vez, afirman que la búsqueda de datos experimentales y la creación de problemas se realizan simultáneamente. Victoria afirma *"Esas son cosas que se hacen a la par… que a medida que uno va experimentando, también…"* y Ludmila agrega: *"¿Va creando problemas?"*. Si bien Victoria responde *"Claro"* no explican ni profundizan lo dicho.

Posteriormente Victoria y Ludmila, al leer la descripción sobre abstracción, se detienen en las expresiones: lenguaje matemático y lenguaje natural. Ambas manifiestan dudas con respecto al significado de cada una de estas expresiones e intentan buscar ejemplos, quizás para ellas el lenguaje matemático abstracto es su lenguaje cotidiano de estudio y por lo tanto casi natural. Recuperan como ejemplo el modelado de un problema que realizan en la asignatura Programación Lineal, la misma se propone en el primer cuatrimestre de cuarto año donde se trabaja con diversos problemas que se modelan a partir de ecuaciones lineales que involucran un gran número de variables y restricciones, a su vez en esta asignatura en la mayor parte de los problemas que se presentan se propone como consigna "modelar". Particularmente refieren a una situación en la que se trabaja con la producción de campanas, Ludmila señala:

> *Como que yo cuando me dicen abstracción, entiendo que aquello que estoy viendo, que es concreto, que eligió una situación, por ejemplo, era una de las campanas* […]*, en Programación, cuando yo lo abstraje, ¿qué hice? Bueno, tenía que decir: el reloj que necesitaba para que diera vuelta…* […] *Como que sustraer del tema que yo elegí, las cosas que me interesan para poder resolver el problema que me planteé. Digamos, ¿expresarlo en el lenguaje matemático sería por ejemplo?*

Luego de estas discusiones entre las estudiantes Pablo retoma nuevamente el ejemplo que involucra la Ley de Torricelli: *"La ley de Torricelli* […] *Que se vaciaba el cilindro, yo puedo decir, que el cilindro se vacía porque tiene un agujero abajo* […] *Ese sería el lenguaje natural.* […] *Expresarlo en el lenguaje matemático sería la fórmula, la velocidad en la que se vacía".*

Durante la lectura debaten también con respecto a la afirmación: "cuando los datos conocidos no son suficientes, pueden ser creados nuevos métodos o el modelo debe ser modificado", que se presenta en la caracterización del subproceso de resolución y Ludmila ejemplifica *"Por* *ejemplo, para esto de que el tanque se vacía yo necesito saber también la gravedad.* […] *Pero no creo un nuevo método solamente agregué un dato ahí".* En esta afirmación, Ludmila propone agregar un parámetro y parte de conocer el modelo existente del fenómeno en estudio. Las preguntas que surgen entonces son ¿qué ocurriría si no lo conociera?, o ¿qué diría Victoria sobre esto ya que ella no conoce el fenómeno ni el modelo referido por Pablo? Esto de ninguna manera impide reconocer la claridad en las ideas presentadas por la estudiante. A su vez, es interesante destacar que ambos ejemplos involucran situaciones extramatemáticas que se representan a través de fórmulas algebraicas.

De modo general, apreciamos que al volver a leer la caracterización de los subprocesos del proceso de MM les otorga la posibilidad como grupo de repensar y analizar en profundidad algunas ideas y focalizar en otras que no son comprendidas directamente o no hacen/tienen sentido para ellos en ese momento, tales como: empleo de leguaje natural y matemático, creación de problemas y búsqueda de datos. Tales ideas, quizás captan su atención por distar de trabajos en el aula en los que se emplean metodologías de trabajo de tipo tradicional.

Seguidamente se preguntan qué deben realizar para dar respuesta a la consigna, es decir, interpretar el texto entregado. De modo automático leen la producción inicial en la que dan cuenta de su propia apreciación de MM antes de leer los aportes del autor y señalan que consideran que hay un vínculo entre ambas perspectivas, a pesar de destacar que esta relación se presenta: *"¡A grandes rasgos digamos!, ¡muy vagamente!"* Victoria en el marco de esta comparación destaca dos cuestiones con énfasis, por un lado, señala que le impacta que la validación forme parte del proceso de MM (diferencia con respecto a su perspectiva inicial en la que vincula el conjeturar con el modelizar) y, por otro, que realmente no comprende en profundidad el proceso de MM completo y particularmente las acciones que se realizan en el marco de los subprocesos que lo integran al no ponerlo en evidencia a través de un ejemplo concreto. Por esto, el grupo comienza a rastrear ejemplos.

Inmediatamente se acerca la profesora Laura al grupo y solicita que realicen una narración en la que den respuesta a la consigna y comienzan a interactuar con ella en torno al proceso de MM. Ludmila solicita ayuda a la profesora para pensar un ejemplo, frente a lo cual, la profesora, responde: *¿qué es un modelo para ustedes?* Los intercambios continúan en torno a dicha pregunta. Pablo plantea que un ejemplo de modelo es una persona con una determinada figura estética y la profesora Laura responde: *"Para vos, entonces, un modelo es una representación… Pampita Ardohain*[41] *sería un modelo".* Ludmila agrega:

[41] Modelo argentina.

> *Yo lo veo como algo a seguir, o algo a que imitar, o algo que puede usarse en diferentes cosas, a un modelo* [...]. *O sea, a mí se me hubiera ocurrido, por ejemplo, como resolver los sistemas de ecuaciones, que ahí usamos matrices, como matrices es algo que se puede usar en diferentes ámbitos de la matemática* [...], *eso sería una de las cosas.*

Apreciamos que la interacción se encuentra de algún modo direccionada por la profesora Laura, puesto que realiza preguntas y afirmaciones que la guían. Con respecto a lo señalado por Ludmila, la profesora señala que su ejemplo es una de las *"cosas"*, pero que anteriormente dijo *"ideal"* (el término ideal en realidad es introducido por la profesora y no se había empleado hasta el momento en el grupo). Esta afirmación reconduce la discusión que comienza a girar en torno a esta cuestión, dado que la alumna considera que el ideal suele utilizarse principalmente para personas, la profesora responde que también se puede aplicar en temas de geometría, sin embargo, inmediatamente pregunta por modelos de jugadores de fútbol. De este modo, evidenciamos que el grupo intenta recuperar ejemplos que involucran nociones matemáticas, posiblemente por encontrarse en un curso de geometría, no obstante, la intervención de la profesora cambia el hilo de ejemplificación motivada por la primera idea de modelos/ideal propuesta por Pablo.

Continúa el diálogo, principalmente, entre Ludmila y la profesora. Analizan los subprocesos del proceso de MM tomando como ejemplo un modelo de profesor/a ideal. En el marco de este diálogo, la profesora aclara que los modelos en geometría se pueden expresar en palabras (esto sería tal vez en lenguaje natural en el sentido de Bassanezi) y los invita a escribir su narrativa.

Inmediatamente Ludmila señala que se debe elegir un tema de interés, evidenciamos que amplían su perspectiva con respecto a sus ideas iniciales, dado que consideraban que en el tema no había nada para analizar. Nuevamente, en búsqueda de argumentación, Pablo pone a prueba la afirmación de su compañera al señalar que *"Para uno puede ser de interés y para otro no"*, Ludmila responde *¿Cuándo se te ocurre estudiar algo que no te interesa? Es muy difícil, a menos que te lo proponga otro"* y Victoria agrega *"Claro, pero vos dijiste cuando se te ocurre, ocurrirte no se te va a ocurrir, te lo tienen que proponer, así que...tema de interés".* Esta discusión muestra que Ludmila, por un lado, considera y hace explicita la posibilidad de elección de tema por parte de quien se involucra en el proceso de MM, tal vez dando preponderancia al interés personal como cuestión que motiva. Sin embargo, Victoria por otro lado, parece no considerar posible que quien/es se involucra/n con el proceso de MM logre/n seleccionar un tema, podría deberse a la dificultad de pensar en un tema o ausencia de vivencias y/o experiencias en las que como estudiantes proponen temas.

Con el fin de avanzar en la producción de la narrativa analizan los subprocesos del proceso de MM considerando como temática caracterizar al *"profesor* [/a] *que queremos* [quieren] *ser".* En general apreciamos la presencia de la voz de Ludmila con gran ímpetu, Pablo y Victoria se limitan a realizar breves intervenciones. Esta cuestión puede encontrarse influenciada por el diálogo previo, en el que claramente prevalece su voz en interacción con la docente donde no se ofrecen oportunidades para que Pablo y Victoria se involucren en la conversación. Sin embargo, este aspecto de ímpetu de la estudiante no impide a Victoria y Pablo solicitar justificaciones sobre las ideas. La estudiante (Ludmila) considera que los datos experimentales y el modelo se construye a partir de observar *"que este*[/a] *profesor*[/a] *tiene estas características, este*[/a] *otro*[/a] *tiene estas, y en el modelo diría, un*[/a] *profesor*[/a] *ideal debería ser: así, así, así y así".* A su vez, pregunta "*¿un problema para analizar sería si es posible que exista un profesor*[/a] *ideal?",* Victoria interviene señalando que deben cotejar con la realidad y que es posible modificar datos experimentales. Luego destacan que deben validar el modelo obtenido, analizar si tendrá a futuro una aplicación y que el proceso se repite. En este sentido, destacamos que realizan un minucioso recorrido por los subprocesos del proceso de MM e intentan comprender y ejemplificar cada uno de ellos en profundidad. Luego de esas reflexiones y juego de ideas, proponen su segunda narrativa como se detalla a continuación.

TABLA 36 | *Narrativa 2 Grupo 4 (Fuente propia).*

En el proceso de modelización deberá ser elegido un tema, se indagan y se obtienen datos sobre este, de los cuales se construirá el modelo al que se quiere llegar, y a partir de este, volver la mirada sobre los datos obtenidos para compararlos con aquellos que me brinda el modelo, en el caso de que estos sean similares, el modelo estará en condiciones para ser aplicado, sino de lo contrario, se lo modificará y se repite el proceso.

Del análisis realizado consideramos que se ponen en juego algunas cuestiones con énfasis que sintetizamos a través de la siguiente tabla.

TABLA 37 | *Red de sentidos a MM en la interacción del grupo 4 al realizar la narrativa 2 (Fuente propia).*

LENGUAJE NATURAL Y MATEMÁTICO
↓
FORMULACIÓN DE PROBLEMAS
↓
OBTENCIÓN DE DATOS EXPERIMENTALES
↓
SORPRESA RESPECTO A VALIDACIÓN COMO PARTE DEL PROCESO DE MM
↓
MODELO COMO IDEAL
↓
SELECCIÓN DEL TEMA
↓
MODIFICACIÓN, VALIDACIÓN Y APLICACIÓN COMO PARTES DEL PROCESO

En la interpretación de los aportes de Bassanezi (2002) señalan en un primer momento que encuentran cuestiones en común con respecto a su perspectiva inicial. Manifiestan sorpresa frente al trabajo con lenguaje natural y matemático, formulación de problemas y posibilidad de obtención de los datos experimentales. A su vez, consideran extraño el pensar a la validación como parte del proceso de MM.

Reconocen de modo detallado en un ejemplo la posibilidad de llevar adelante los subprocesos del proceso de MM, sin embargo, el modelo al que se llega no resulta matemático. Cabe mencionar que el ejemplo seleccionado puede encontrarse influenciado por las intervenciones de la profesora en momentos en los que intenta reflexionar junto al grupo acerca del modelo como ideal recuperando el aspecto relativo a "persona ideal". Además, durante los intercambios y aportes al interior del grupo amplían su mirada haciendo evidente la posibilidad de selección del tema por parte de quien/es se involucra/n en la modelización, aunque este hecho provoca, también, tensión entre aceptarlo o no como factible.

6.1.12. | GRUPO 4 - PRESENTACIÓN DE PRODUCCIÓN EN LA COMUNIDAD DE PRÁCTICA

Dado que inmediatamente después de que finalizan la narrativa 2 Pablo se retira de la clase, en este momento solo se encuentran presentes Victoria y Ludmila. Ludmila señala *"el proceso de modelización tenía que ver con esto de poder adaptar ciertas situaciones o ciertos contenidos de otras áreas que no sean necesariamente la matemática para poder ser trabajado con contenidos matemáticos"*, mostrando así el lugar preponderante otorgado inicialmente al vínculo entre trabajo extramatemático y MM.

A su vez, la alumna señala que la perspectiva del autor es más *"extensa"* que la planteada por el grupo y que no pueden afirmar con seguridad que existe relación entre lo que el autor plantea y su perspectiva, a pesar de explicitar que en ambos casos se elige un tema. Enfatiza en algunas acciones que se llevan adelante en el proceso de MM como ser *"sacar datos experimentales de ese tema y a partir de esos datos poder construir cierto modelo que sea aplicable",* ambas cuestiones podrían haber captado la atención por implicar acciones que quizás, no están acostumbradas a realizar diariamente en su trayectoria de formación.

6.2. | REFLEXIONES CON RESPECTO A SENTIDOS PREVIOS Y EN TORNO A INTERPRETACIONES DE LECTURAS EN LO QUE RESPECTA A MM

A modo de síntesis, encontramos que las estudiantes del grupo 1 a partir de vivencias y/o experiencias previas relacionan principalmente el proceso de MM con la aplicación en el sentido de Bassanezi (2002), al leer al autor se sorprenden por la posibilidad de emplear lenguaje natural, validar a partir de conocimientos de la persona que se encuentra modelizando y modificar el modelo obtenido que consideran un ideal.

El grupo 2 relaciona inicialmente el proceso de MM con una estrategia que se puede emplear en el marco de los procesos de enseñanza y de aprendizaje para potenciar la comprensión a partir de la aplicación de nociones matemáticas en diversas situaciones, tal como referenciamos, encontramos en estas ideas puntos de encuentro con la perspectiva contextual y de elicitación de modelos (Kaiser, 2020). Al leer los aportes de Bassanezi (2002) las futuras profesoras analizan los subprocesos y señalan: la posibilidad de formulación y emergencia de problemas durante el proceso de MM, que el modelo es algo deseado que puede construirse, debe ser validado y puede ser modificado y la posibilidad de modificar datos experimentales y aplicar el modelo si se validó previamente.

Las futuras profesoras que conforman el grupo 3 inicialmente consideran como indispensable disponer de un modelo, para abordar situaciones extramatemáticas, que se puede adecuar o modificar en función de la situación. Luego de leer los aportes de Bassanezi (2002) se sorprenden al observar que el autor considera a la validación como parte del proceso de MM y parecen encontrar diferencias con respecto al rol del modelo propuesto en su narrativa y el del autor, a pesar de esto parece que siguen considerando, especialmente, la adaptación de modelos dados.

El grupo 4 inicialmente interpreta modelizar con la reformulación o adaptación de un modelo que posibilita abordar y responder un problema, y relacionan MM con una actividad que se realiza en procesos de enseñanza y de aprendizaje en sinergia con el grupo 2 (Kaiser, 2020), considerando que luego de abordar nociones matemáticas se realizan problemas de aplicación (Bassanezi, 2002). En la interpretación de los aportes de Bassanezi (2002) se sorprenden por la posibilidad de: trabajo con lenguaje natural y matemático, formulación de problemas, obtención de los datos experimentales, considerar la validación como parte del proceso de MM, seleccionar el tema por parte de quien/es se involucra/n en la modelización (hecho que provoca tensión entre aceptarlo como factible o no).

Al estudiar los sentidos atribuidos a procesos de MM en el marco del desarrollo de estas primeras consignas encontramos cambios en las ideas que se ponen en juego en los grupos de futuras profesoras.

Los primeros sentidos se configuran a partir de vivencias y/o experiencias (posiblemente mayormente de experiencias) previas que ponen en relieve trayectorias de formación (Vezub, 2008). El conocer estos primeros sentidos, tal como se hace evidente en Vezub (2004), permite promover la transformación de ciertas prácticas rutinarias que pueden resultar necesarias de ser modificadas. En este sentido, consideramos que la reflexión y vivencias en torno a MM que promovemos puede resultar relevante como primera entrada al trabajo con MM como abordaje pedagógico.

Encontramos que la interacción resulta un motor fundamental para ampliar sentidos de cada una de las futuras profesoras, tal como lo señala Bajtín (2000). Al interior de cada uno de los grupos los debates permiten ir ampliando y cotejando ideas. A su vez, en el momento de lectura y producción de narrativas en torno a aportes de ideas de Bassanezi (2002) en lo que respecta a MM como abordaje pedagógico encontramos la puesta en escena del conocimiento interpretativo, haciendo evidentes atribuciones de sentidos continuas y progresivas en torno a la noción en juego, es decir, MM.

CAP VII

RECUPERAR Y REFLEXIONAR INDIVIDUALMENTE UNA VIVENCIA COLECTIVA DE PRODUCCIÓN DE UNA DEFINICIÓN

7.1. | INTRODUCCIÓN

En este capítulo estudiamos narrativas individuales donde cada una de las futuras profesoras (Ver tabla 19 A), presentes durante el Momento 3, explicita cómo vivieron el proceso de MM luego de transitar el primer proceso de modelización en el que producen una definición de poliedro (Momento 2).

A modo de resumen y en pos de recordar, el segundo momento se desarrolla cuando las futuras profesoras trabajan en una primera esfera de actividad de MM que consiste en determinar qué imágenes, de un conjunto de imágenes (tales como, fotos de monumentos históricos, adornos, etc.) u objetos concretos manipulables (por ejemplo, envases de productos, cuerpos construidos en cartulina, etc.) se pueden considerar poliedros. A partir de este problema las estudiantes producen una primera aproximación a la definición de poliedro a modo de caracterización escrita.

La consigna que responden y de la que obtenemos información para abordar el análisis que presentamos en este capítulo consiste en que, tomando como referencia el esquema del proceso de MM de Bassanezi (2002), describan el proceso seguido para arribar a una definición o modelo de la noción de "poliedro". Dentro del proceso de modelización, ¿cómo vivieron el subproceso de validación? Cabe mencionar que la pregunta específica con respecto a validación se propone en pos de obtener información que utilizamos en la parte 7 para estudiar sentidos otorgados a procesos de validación, si bien mencionaremos consideraciones al respecto no profundizaremos dicha cuestión en este capítulo.

Organizamos el análisis de las narrativas producidas por las futuras profesoras en torno al reconocimiento de tema, problema, modelo y subprocesos del proceso de MM en el sentido de Bassanezi (2002). Estas categorías resultan útiles debido a que la mayor parte de las estudiantes organizan sus producciones alrededor de las mismas. A su vez, agregamos una categoría denominada otras cuestiones en la que mostramos aspectos que las futuras profesoras mencionan en sus narrativas sin establecer una sinergia con algunas de las categorías que anteriormente mencionamos, a pesar de que, como explicitamos en el análisis muchas de las expresiones pueden vincularse con acciones ligadas a alguno de los subprocesos del proceso de MM o resultan de interés para comprender el sentido otorgado. Cuando en la narrativa de una futura profesora no reconocemos expresiones que se vinculen con alguna categoría, colocamos un guion a la derecha del nombre de la estudiante.

Para presentar y organizar el análisis de un trabajo individual, pero que se conforma a partir de interacciones previas y posteriores con grupos definidos, organizamos los resultados por cada uno de los grupos (Ver tabla 21). A su vez, los resultados se comunican retomando fragmentos de narrativa que cada futura profesora incluye explícita o implícitamente en la categoría considerada. En este último caso como investigadoras incluimos el fragmento en la categoría que corresponde según nuestra interpretación. Presentamos en general, de a dos o tres categorías seguidas. Posteriormente, reflexionamos con respecto a dichos fragmentos a la luz del corpus teórico.

7. 1. 1. I GRUPO 1: DEFINICIÓN COMO MODELO EMERGENTE DE UN PROCESO CÍCLICO

El grupo 1 se mantiene estable en todos los momentos y clases, por lo que se encuentra constituido por Larisa, Eugenia, Ailén y Marina. A continuación, presentamos fragmentos de sus narrativas en torno a las categorías tema y problema.

TABLA 38 I *Fragmentos de narrativas de grupo 1 en relación con el tema (Fuente propia).*

TEMA

- **Larisa:** -
- **Eugenia:** *Poliedros.*
- **Ailén:** -
- **Marina:** *Definición para los poliedros.*

TABLA 39 | *Fragmentos de narrativas de grupo 1 en relación con el problema (Fuente propia).*

PROBLEMA

- **Larisa:** -
- **Eugenia:** *Había figuras que cumplían estas propiedades y no eran poliedros* [Referencia a transitar por segunda vez el ciclo de MM, pues el primer modelo admitia figuras no poliédricas entonces lo modificaron]
- **Ailén:** *Clasificación de figuras según sus características geométricas.*
- **Marina:** -

En las narrativas individuales solo Eugenia y Marina explicitan el tema (Ver tabla 38), afirmando que el mismo es definición de poliedros y poliedros respectivamente. Ailén es la única que menciona el problema (Ver tabla 39), considerando el mismo como la clasificación de figuras geométricas, lo que puede vincularse con la acción de determinar si una respectiva figura es o no poliedro, clasificación que se realiza a partir de la experiencia de MM. A su vez, encontramos que Eugenia, en el marco de reflexionar con respecto a la primera caracterización de poliedro producida, menciona que ciertas figuras cumplían las condiciones impuestas y no resultan poliedros, lo que más adelante en nuestro análisis consideramos un problema, pues a partir del mismo se vuelve a realizar el proceso de MM en búsqueda de su respuesta (Ver tabla 39).

Con respecto a los subprocesos del proceso de MM tomamos a continuación partes de las narrativas que se vinculan con la experimentación y la abstracción.

TABLA 40 | *Fragmentos de narrativas de grupo 1 en relación con el subproceso de experimentación (Fuente propia).*

EXPERIMENTACIÓN

- **Larisa:** *Nos presentaron imágenes* [Ver figura 5] *en un papel con distintos objetos ficticios y de la realidad, esta fotocopia fue nuestro dato experimental. Luego analizamos las imágenes, las comparamos entre sí y estudiamos las características de cada una.*
- **Eugenia:** *Comenzamos analizando las características geométricas que un grupo de figuras presentaban* [Ver figura 5], *características individuales o que tenían en común entre sí. Luego se dividió este grupo de figuras en dos subgrupos, donde analizamos las características que tenían en común cada grupo, donde pudimos encontrar semejanzas entre las figuras del grupo 2* [Imágenes organizadas en 2 grupos en las que las del grupo 2 son consideradas poliedros, Ver figura 6].
- **Ailén:** *Se experimentó a través de las figuras de cartulina y las copias con las figuras para tratar de caracterizar a cada grupo de figuras* [Ver figura 6].
- **Marina:** *Empezamos caracterizando diferentes figuras* [Ver figura 5], *las cuales fueron divididas en dos grupos con ciertas características* [Ver figura 6].

TABLA 41 | *Fragmentos de narrativas de grupo 1 en relación con el subproceso de abstracción (Fuente propia).*

ABSTRACCIÓN

- **Larisa:** *Estas figuras* [presentadas en fotocopia] *fueron clasificadas en dos grandes grupos y se nos pidió que armáramos una lista de características que tenían en común. A partir de relacionar estas características con la definición de poliedro (abstracción), llegamos a un primer modelo.*
- **Eugenia:** *Al analizar las características que cada grupo encontró en común entre todas las figuras del grupo 2 pudimos llegar a una especie de definición de poliedro bastante general* […].
- **Ailén:** *Una vez seleccionadas* [la selección de] *las características* [refiere a las características de cada grupo de poliedros la clase 2] *llegamos a nuestro primer "modelo" de la noción de poliedro.*
- **Marina:** -

En todas las narrativas las futuras profesoras ponen de manifiesto que en la experimentación se caracterizan figuras tridimensionales (Ver tabla 40). Específicamente, Larisa hace referencia a lo realizado en la tercera consigna del escenario educativo (Ver tabla 7) en la que se propone analizar libremente las figuras dadas (Ver figura 5). Eugenia y Marina señalan como parte de este subproceso las acciones llevadas adelante en las consignas 3 y 4 (Ver tabla 7 y 8), dado que hacen explícita en su narrativa como parte de la experimentación tanto los momentos de caracterización general de las figuras como la caracterización por grupos de figuras (poliedros y no poliedros). Mientras que Ailén referencia acciones relacionadas con la consigna 4 (Ver tabla 8). Además, Larisa menciona los términos analizar, comparar y estudiar, y Eugenia analizar, evidenciando un trabajo minucioso con los datos experimentales.

Al considerar el subproceso de abstracción (Ver tabla 41) Eugenia y Ailén señalan que se lleva adelante al establecer características de los grupos de figuras y emplear dichas características para arribar a una primera definición de poliedro, cuestión que se vincula con la descripción de este subproceso realizada por Bassanezi (2002), dado que se seleccionan factores a considerar como relevantes y variables esenciales. Larisa agrega a esta última consideración que para llegar de las características a la definición se establecen relaciones entre características reconocidas, poniendo de manifiesto de este modo un proceso que involucra un vínculo entre los aspectos reconocidos por el grupo como relevantes que claramente va más allá de un mero establecimiento de características. Esto es, la caracterización no es un proceso que se cierre en sí mismo sino es un medio para ir más allá (avanzar en) en el proceso de abstracción.

A continuación, presentamos los fragmentos de narrativas que vinculamos con los subprocesos de resolución, modificación y validación.

TABLA 42 | *Fragmentos de narrativas de grupo 1 en relación con el subproceso de resolución (Fuente propia).*

RESOLUCIÓN

- **Larisa:** *A partir de relacionar estas características con la definición de poliedro (abstracción), llegamos a un primer modelo.*
- **Eugenia: -**
- **Ailén:** *Mediante la resolución* [no especifica qué se realiza en este subproceso] *matemática nos dirigimos a la validación de nuestro primer modelo* [referencia a la definición que menciona en el subproceso de abstracción].
- **Marina:** *Luego de este proceso* [refiere a modificar le primera definición producida], *se utilizaron palabras más del lenguaje matemático. Este modelo no nos parecía suficiente, ya que encontrábamos en el otro grupo de figuras algunas que presentaban dichas características. Esta fue la etapa de resolución.*

TABLA 43 | *Fragmentos de narrativas de grupo 1 en relación con el subproceso de validación (Fuente propia).*

VALIDACIÓN

Larisa: [Luego de atravesar la abstracción y la experimentación] *A partir de la obtención de nueva información, en nuestro caso, la recopilación de distintas definiciones de poliedros, de diferente material bibliográfico.*

Eugenia: *Buscamos en distintos libros o en Internet definiciones de poliedros y las fuimos comparando con la nuestra.*
[...]
El proceso de validación fue bastante largo, nos costó encontrar una definición que sea la correcta. Tuvimos que buscar en varios libros y realizar comparaciones y modificaciones, además de debatir en grupos sobre estas cuestiones pero pudimos llegar a un modelo final.

Ailén: *Se observó que una figura que no estaba en el grupo de poliedros, según nuestro modelo de poliedro* [Refiere a la primera definición que se produce en la comunidad de práctica] *debería pertenecer a este grupo.* [...]
Proceso de comparación entre el "modelo" y otros datos e información, como por ejemplo con las diferentes definiciones de los distintos libros, el cual se usó para ver si aceptábamos o no el modelo propuesto.

Marina: *Se comparó nuestro "modelo" actual con otros datos* [Podría referir a otras imágenes que buscan en Internet o son propuestas por compañeras, otras difiniciones, etc.] *que podrían influir en la definición.* […]
La etapa de validación fue larga y un poco difícil, ya que costó poder razonar acerca de nuestro modelo actual [Refiere a la definición final] *y de lo que queríamos en realidad. Hicimos muchas comparaciones en los distintos modelos: pensar en poliedros, por ejemplo, que no cumplan con la definición de modelo* [refiere a poliedro] *actual y así recopilar nueva información y ver qué podíamos modificar en la definición.*

TABLA 44 | *Fragmentos de narrativas de grupo 1 en relación con el subproceso de modificación (Fuente propia).*

MODIFICACIÓN

Larisa: *Decidimos modificar el modelo inicial a partir de estos nuevos datos experimentales* [refiere a las definiciones recuperadas de materiales bibliográficos], *para perfeccionar nuestro modelo y llegar a uno más ideal.*

Eugenia: [En la primera definición producida en la comunidad de práctica] *Surgió el problema de que había figuras que cumplían estas propiedades* [la definición], *pero no eran poliedros, por lo tanto volvimos a analizar la definición y le hicimos modificaciones* [...].

Ailén: *Entonces otra vez mediante los datos experimentales (figuras) analizamos los problemas y modificamos el modelo de la noción de poliedro* [inspirada en la validación].

Marina: *Se llegó a una vaga definición de poliedro, la cual contenía ya otras características o cambios, es decir, se pasó por la etapa de modificación, ya que algunos datos fueron descartados por no ser aceptados.*

El subproceso de resolución (Ver tabla 42) es mencionado por Ailén que no explicita acciones relacionadas en el desarrollo de este y por Marina que señala que se lleva adelante al utilizar términos del lenguaje matemático, consideración que posiblemente toma de la descripción de Bassanezi (2002).

Larisa, Eugenia y Ailén mencionan que en el marco del subproceso de abstracción (Ver tabla 43) producen el primer modelo, lo que podría vincularse quizás de modo más estrecho con la descripción del subproceso de resolución. Sin embargo, no lo distinguen explícitamente en su narrativa, haciendo evidente así la dificultad de diferenciar estrictamente los subprocesos, dado que en realidad los mismos se desarrollan a partir de idas y vueltas entre ellos que van configurando el proceso de MM.

Cabe destacar que las cuatro narraciones muestran una relación estrecha entre validación y modificación (Ver tablas 43 y 44). Larisa, Eugenia y Ailén manifiestan que la validación se lleva adelante a partir de la comparación de la propia producción con definiciones de poliedros obtenidas de libros de matemática, libros de texto de secundaria o Internet, lo que podría vincularse con una validación por autoridad, pero de modo reflexivo. Marina explicita que se compara la definición producida con datos, sin referenciar estrictamente definiciones, cuestión que puede vincularse con el empleo de otros datos e información que obtienen, por ejemplo, de Internet. Ailén y Marina también reconocen como parte de este subproceso el análisis de figuras tridimensionales realizado al estudiar si las mismas cumplen o no la definición producida, es decir, la comparación del modelo producido con datos empíricos que no necesariamente se corresponden con los dados inicialmente, sino que pueden obtenerse a partir de búsquedas y producciones realizadas en el proceso de MM. Por ejemplo, Marina afirma "*Pensar en poliedros, por ejemplo, que no cumplan con la definición* [inicialmente producida]". Además, Eugenia considera la validación a partir de los debates grupales.

Finalmente, Marina explicita que la validación no resulta una tarea sencilla y rápida, sino que resulta complejo razonar sí lo que se produce se relaciona realmente con lo deseado/buscado, y Eugenia en sinergia afirma que este subproceso implica un trabajo largo. Observamos que las aseveraciones realizadas muestran que el tema no es trivial e incluso, el definir, en este caso, no se resuelve buscando en Internet, pues para determinar una definición de poliedro a utilizar deben buscar, cotejar, discernir, analizar, entender y en todo caso luego aplicar esa definición.

Con respecto al subproceso de modificación (Ver tabla 44) Larisa afirma que se modifica el primer modelo producido a partir de las definiciones recuperadas de libros de textos, que considera datos experimentales que emergen del trabajo en el marco del proceso de MM, Eugenia señala que se modifica la definición porque había figuras que no se consideran poliedros pero cumplen la definición inicialmente producida en el Momento 2, Ailén considera que se emplean nuevamente las figuras iniciales para modificar y Marina explicita que la definición se modifica, dado que algunas características se descartan.

Finalmente, presentamos dos tablas. En la primera presentamos la noción de modelo que cada una de las estudiantes considera y luego otras cuestiones que podrían resultar relevantes para nuestro estudio.

TABLA 45 | *Fragmentos de narrativas de grupo 1 en relación con la noción de modelo (Fuente propia).*

MODELO

- **Larisa:** *Definición de poliedro.*
- **Eugenia:** *Definición de poliedro.*
- **Ailén:** *Noción de poliedro*
- **Marina:** *Definición que fue aceptada por todos como el ideal*

TABLA 46 | *Fragmentos de narrativas de grupo 1 en relación con otras cuestiones (Fuente propia).*

OTRAS CUESTIONES

- **Larisa:** -
- **Eugenia:** -
- **Ailén:** *Este proceso se repitió varias veces hasta que llegamos al modelo ideal.*
- **Marina:** *Luego de pasar varias veces por estas etapas (modificación, resolución, validación).*

Las cuatro dejan evidente en el escrito que el modelo (Ver tabla 45) al que arriban es la definición de poliedro, si bien esta cuestión se afirma en la consigna dada, es relevante enfatizar que todas las futuras profesoras que conforman este grupo lo afirman explícitamente en el marco de la narrativa. Coinciden (no siempre de modo explícito) en que para producir dicho modelo se lleva adelante un recorrido cíclico, esta cuestión, tal como mostramos en la tabla 46 es enfatizada por Ailén y Marina.

Del análisis realizado consideramos que en las cuatro narrativas algunas cuestiones emergen con énfasis que sintetizamos a través de la siguiente tabla.

TABLA 47 | *Red de sentidos a MM en las narrativas individuales del grupo 1 (Fuente propia).*

EXPERIMENTACIÓN A TRAVÉS DE FIGURAS Y DEFINICIONES

↓

VALIDACIÓN CONTRASTANDO CON DATOS EXPERIMENTALES, DEFINICIONES DE LIBROS E INFORMACIÓN RECOGIDA DE PÁGINAS DE INTERNET Y A PARTIR DE DEBATES COLECTIVOS

↓

MODIFICACIÓN DE MODELOS PRODUCIDOS

↓

LA DEFINICIÓN DE POLIEDRO ES EL MODELO EMERGENTE QUE PERMITE CLASIFICAR

↓

DESARROLLO CÍCLICO DEL PROCESO DE MM

De modo general y recuperando algunas apreciaciones que en casos son individuales destacamos que: consideran la experimentación a través de representaciones de figuras (dadas, buscadas y producidas) y de definiciones (de libros de textos de escuela secundaria, libros de geometría y de Internet), la validación como subproceso que requiere gran demanda cognitiva/reflexiva y se realiza a través de contrastar el modelo producido con datos empíricos (dados, buscados y producidos), tales como cotejar la definición producida con otras definiciones (modelos producidos por otros) o información y a partir de la interacción social, haciendo evidente el potencial de lo social como medio legítimo para validar y finalmente, una relación casi directa entre los subprocesos de modificación y validación.

Además, en todos los casos señalan explícitamente que durante el proceso modifican el modelo, reconocen a la definición de poliedro como modelo emergente y dan indicios, en algunos casos explícitos, de que se lleva adelante un desarrollo cíclico del proceso de MM.

De modo general, encontramos que las cuatro narrativas ponen en evidencia apropiación del proceso de MM en el sentido de Bassanezi (2002), pudiendo determinar acciones que se llevan adelante en los subprocesos y reconociendo el tema, problema en estudio y modelo.

7. 1. 2. GRUPO 2: POLIEDROS COMO TEMÁTICA A PARTIR DE LA QUE SURGEN PROBLEMÁTICAS

Del grupo 2 se encuentran presentes Micaela, Dianela, Guillermina y Zoe. En este momento se incorpora la narrativa de Zoe con las de las integrantes del grupo 2, dado que trabaja con este grupo en algunas clases en las que se aborda el proceso de producción de la definición de poliedro. En cambio, Valentina, que intervino en las narrativas anteriores con el grupo 2 se encuentra ausente.

Específicamente Zoe realiza un esquema en el marco de producción de narrativa que presentamos a continuación (Ver figura 7), puesto que resulta de utilidad para comprender fragmentos de la narrativa que tomamos e interpretamos en función de dicho esquema.

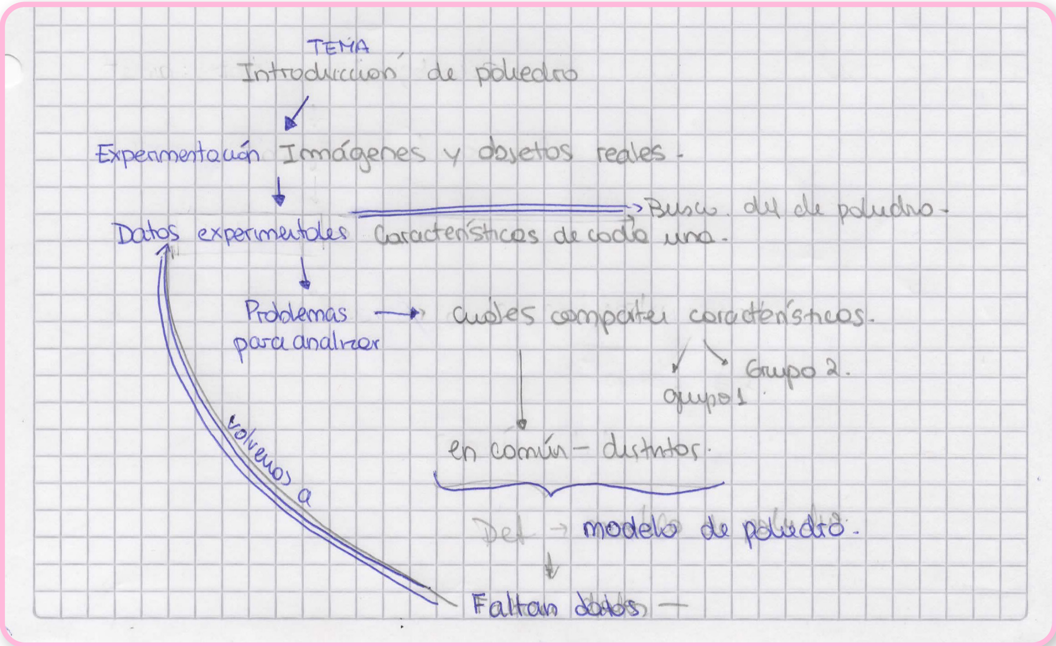


FIGURA 7 | *Esquema de MM producido por Zoe.*

A continuación, presentamos fragmentos que realizan las futuras profesoras del grupo en sus narrativas en relación con las categorías tema y problema.

TABLA 48 | *Fragmentos de narrativas de grupo 2 en relación con el tema (Fuente propia).*

TEMA
Daniela: *En la primer clase nos presentaron el tema dividiéndonos en grupos y dándonos imágenes y debíamos plantear sus características.*
Guillermina: *Figuras tridimensionales.*
Micaela: -
Zoe: *Introducción de Poliedro.*

TABLA 49 | *Fragmentos de narrativas de grupo 2 en relación con el problema (Fuente propia).*

PROBLEMA

Dianela: -

Gillermina: *Además analizamos el problema que surgió, acerca de a qué llamamos polígonos, caras, si son sólidos o no, etc.*

Micaela: *Se pudo armar* [a partir de la experimentación] *2 grupos de imágenes, en los cuales, las figuras de un grupo se diferenciaban de las del otro por tener ciertas características que las otras no cumplen. Nuestro problema a analizar fue determinar esas características y proporcionar un nombre a las figuras que comprendían dichos grupos.*

Zoe: [De datos experimentales coloca una flecha hacia problemas para analizar, ver figura 7] *Cuáles comparten características, Grupo 1 y Grupo 2* [refiere a los grupos de figuras tridimensionales]

Con respecto al tema (Ver tabla 48) Dianela señala que se vincula con las imágenes entregadas a las que deben establecer características, Guillermina referencia a las figuras tridimensionales (Ver figura 5) y Zoe a la introducción de poliedros. Desde nuestra perspectiva el tema general en juego es poliedros, sin embargo, es claro que el caracterizar las figuras y las propias figuras forman una parte sustancial del trabajo en el marco del proceso de MM y configuran el tema, pues sin figuras tridimensionales (fenómenos de las formas) no tendría sentidos clasificarlas para organizarlas. Recuperamos aportes de Freudenthal (1983) que se encuentran en estrecha relación, dado que el autor señala que se pueden organizar diferentes fenómenos a partir de conceptos, estructuras e ideas matemáticas. “Por medio de las figuras geométricas, como triángulo, paralelogramo, rombo o cuadrado, uno tiene éxito organizando el mundo de los fenómenos de los contornos” (p.28). De modo similar, consideramos que las figuras poliédricas permiten organizar los fenómenos de los objetos tridimensionales que guardan ciertas características. Las figuras (Ver figura 5) constituyen el inicio de trabajo con datos experimentales para luego dividirlas en grupos y aproximarse más aún al tema poliedros. En general, consideramos que la perspectiva de poliedro como tema se encuentran en estrecha relación con lo mencionado por las futuras profesoras en esta categoría.

Zoe y Micaela dan indicios de considerar al problema (Ver tabla 49) como determinar qué es un poliedro, y Guillermina destaca algunos problemas que emergen en el marco del proceso de producción de la definición de poliedro, como ser, qué es un polígono, si los poliedros son sólidos, etc. Esta última consideración realizada por la futura profesora resulta relevante, puesto que hace evidente que en el marco de un proceso de MM también pueden emerger diversidad de problemas a responder. En este sentido, tal como mencionamos en el capítulo 2 el/la profesor/a puede gestionar para determinar si interesa o no llevar la clase hacia el abordaje y resolución de esos nuevos problemas, que incluso, pueden involucrar el trabajo con nociones matemáticas (u otras) que no se prevén con anterioridad (Bonotto, 2007).

A continuación, avanzamos con la presentación de fragmentos textuales en torno a los subprocesos de experimentación y abstracción.

TABLA 50 | *Fragmentos de narrativas de grupo 2 en relación con el subproceso de experimentación (Fuente propia).*

EXPERIMENTACIÓN

Larisa: [...] *En grupos* [...] *nos plantearon las mismas imágenes* [que en la primera clase] *subdivididas en 2 grupos y nosotras mediante la observación de los objetos y sus características debíamos poner un nombre a cada grupo y sus características (Datos experimentales).*

Eugenia: *Al iniciar el tema, observamos figuras tridimensionales que las profesoras nos mostraron, donde entró en juego la experimentación, con la cual logramos entrar en contacto con los objetos y obtener características comunes.*

Micaela: *A partir de imágenes y representaciones de esas imágenes en objetos tangibles (las imágenes y los objetos fueron proporcionados por las profesoras) determinar ciertas características de cada imagen a fin de identificar características comunes de ellas (Experimentación - datos experimentales).*

Zoe: *Imágenes y objetos reales. Datos experimentales características de cada una.* [De datos experimentales coloca una flecha hacia] *Busco definición de poliedro.*

TABLA 51 | *Fragmentos de narrativas de grupo 2 en relación con el subproceso de abstracción (Fuente propia).*

ABSTRACCIÓN
Daniela: -
Guillermina: *Realizamos abstracción para obtener características sobre lo que pensamos que es un poliedro.*
Micaela: -
Zoe: -

El subproceso de experimentación (Ver tabla 50) se lleva adelante, según Guillermina, Micaela y Zoe al iniciar el reconocimiento de las figuras y determinar características libremente (Ver tabla 7). Específicamente resulta interesante que Micaela puntualiza que las figuras son entregadas por las profesoras, pues pareciera guardar coherencia con su mirada de la MM como vehículo en la que es el/la profesor/a tiene "el control" (Julie y Mudaly, 2007). Dianela considera que se realiza en el momento en el que se caracteriza a cada grupo de figuras (poliedros y no poliedros) (Ver tabla 8). Además, destacamos que Zoe coloca una flecha entre "características de cada una" y "busco definición de poliedro" (Ver figura 7), lo que puede mostrar que la futura profesora encuentra estrecha relación entre el momento en que caracterizan y definen. En general, consideramos que la consigna que involucra el análisis libre de las figuras tridimensionales puede ser vinculado con lo que Bassanezi (2002) denomina experimentación, puesto que se produce indagación e investigación de datos que se emplean. De este modo se pone en escena el aspecto, más empírico quizás, que se lleva adelante en el marco del proceso de producción de definición.

Con respecto al subproceso de abstracción (Ver tabla 51), el mismo solo se menciona explícitamente en la narrativa de Guillermina ligado a la acción de formular/establecer características de las diferentes figuras. En las otras narrativas las futuras profesoras no explicitan estrictamente en qué momento se realiza este subproceso, sin embargo, reconocen acciones en el marco de la descripción de otros subprocesos que pueden vincularse con este.

Presentamos posteriormente las expresiones vinculadas con los subprocesos de resolución, validación y modificación.

TABLA 52 | *Fragmentos de narrativas de grupo 2 en relación con el subproceso de resolución (Fuente propia).*

RESOLUCIÓN

- **Daniela: -** *Luego de un análisis y un debate de la clase se llega a una resolución matemática generando así una solución analítica para la definitiva definición de Poliedro.*
- **Guillermina:** *Analizamos definiciones de diferentes libros y páginas de Internet, las cuales eran muy escazas en el sentido de falta de información, ya que con esas definiciones encontramos cuerpos que consideraríamos poliedros pero que no lo son* [Refiere a que en las definiciones que encuentra se considerarían poliedros ciertas figuras que no se consideran poliedro en la definición de GEE]. *Este proceso es el de resolución matemática, el cual nos llevó a encontrar una solución, la definición "correcta" de poliedro que obtuvimos del libro de Puig* [Libro que se utiliza en las asignaturas de geometría del plan de estudios de la carrera].
- **Micaela: -**
- **Zoe: -**

TABLA 53 | *Fragmentos de narrativas de grupo 2 en relación con el subproceso de validación (Fuente propia).*

VALIDACIÓN

- **Daniela:** *Pasamos por un proceso de validación* […], *incorporamos más datos experimentales lo que genera modificaciones en la posible definición establecida anteriormente, luego de pasar por un proceso de validación.* […] *Por último se nos dan herramientas para sacar de ellas otras definiciones (más datos experimentales seguido de un proceso de validación).* […] *El proceso de validación se produjo bajo muchas idas y vueltas.*
- **Guillermina:** [Refiere al subproceso de resolución] *Así conseguimos llegar a una validación comparando la solución obtenida y datos reales e información disponible.*
- **Micaela:** *Ubicamos definiciones de libros de secundaria e Internet para validar nuestros datos. Una vez corroborado que los datos eran los correctos, en forma grupal como clase, llegamos a un modelo. Luego, comenzamos a validar, a ver si las figuras que dijimos no eran poliedros cumplían con no serlo según nuestra definición.*
- **Zoe: -**

TABLA 54 | *Fragmentos de narrativas de grupo 2 en relación con el subproceso de modificación (Fuente propia).*

MODIFICACIÓN
Daniela: *Lo que genera modificaciones en la posible definición establecida anteriormente.*
Guillermina: *Esto nos sirvió* [refiere a la experimentación] *para ir modificando y refinando la definición de poliedro y así llegar a una validación.*
Micaela: *A partir de un debate grupal, se concluye que los datos experimentales (características), no eran las correctas, había que modificarlas.*
Zoe: -

El subproceso de resolución (Ver tabla 52) es mencionado por Dianela y Guillermina, quienes señalan que en el marco de este mismo se obtiene la definición de poliedro, cuestión que puede vincularse con el empleo de lenguaje matemático mencionado en la caracterización dada (Bassanezi, 2002). Específicamente Dianela menciona que se llega a la definición luego de analizar y debatir y Guillermina a partir de analizar otras definiciones obtenidas de Internet y libros, mostrando un recorrido detallado y comprometido. Además, observamos que esta última estudiante señala la dificultad que produce el trabajar y escoger la definición de poliedro y la puesta en juego de reflexiones y comparaciones.

Guillermina explicita que la validación (Ver tabla 53) se realiza a partir de la comparación de la solución obtenida (definición) con datos o información disponible, no aclara qué cuestiones conforman los mismos. Al respecto, Micaela afirma que la comparación se realiza por un lado con las definiciones obtenidas de libros e Internet, y por otro lado con figuras. A su vez, Dianela en sinergia con lo planteado en las narrativas de sus compañeras destaca la obtención de datos experimentales (figuras y definiciones) como medio para validar y decidir con respecto a la modificación o no del modelo, y señala que el subproceso de validación se produce a partir de muchas idas y vueltas. Apreciamos algunos aspectos en lo mencionado anteriormente y vinculado a la validación que se relacionan con la idea de modificar la producción realizada, mostrando así ese lazo indisoluble entre los subprocesos de validación y modificación. También, observamos que las futuras profesoras dan cuenta de diversos modos de validación que se llevan adelante en el marco del proceso de MM en pos de lograr el mejor modelo que permita organizar las figuras en poliedros y no poliedros.

Con respecto a modificación (Ver tabla 54), Guillermina señala que sirve para refinar la definición de poliedro, Micaela que a partir de un debate grupal se deciden modificar las características establecidas y Dianela que lo que se modifica es la definición producida.

Avanzamos con los fragmentos que recuperamos con respecto a la noción de modelo y otras consideraciones.

TABLA 55 | *Fragmentos de narrativas de grupo 2 en relación con la noción de modelo (Fuente propia).*

MODELO

- **Daniela:** *En esta puesta en común* [refiere a la puesta en común que se realiza luego de que en la segunda clase analizan cada grupo de figuras tridimensionales] *se genera un modelo, algo a lo que se desea llegar, que es a una definición de "Poliedro" y se genera una posible definición grupal.*
- **Guillermina:** *Definición de poliedro.*
- **Micaela:** *Definimos el "modelo" de lo que sería un Poliedro a partir de esas características* [Refiere a las caracteristicas determinadas en la segunda clase para el grupo de poliedros] *trabajadas de las figuras.*
- **Zoe:** *Def: Modelo de poliedro.* [Ver figura 7, coloca flechas entre la expresión anterior y la que sigue] *Faltan datos, volvemos a datos experimentales.*

TABLA 56 | *Fragmentos de narrativas de grupo 2 en relación con otras cuestiones (Fuente propia).*

OTRAS CUESTIONES

Daniela: *Luego de la puesta en común* [refiere a la puesta en común de la que emerge una primera definición de poliedro en la clase 2] *surgieron problemas para analizar en referencia al porqué de las conclusiones a las cuales arribamos y del nombre "Poliedro" que se genera en el grupo 2 de las imágenes.*

Guillermina: *Con estos dos caminos* [refiere a resolución matemática y validación - experimentación] *que en realidad realizamos de manera conjunta, llegamos a una definición, la definición de la clase, la cual comparada con la definición presentada por las profesoras, estaba incompleta, en realidad no era definición, sino que eran características.*

Micaela: *El proceso que llevamos a cabo en clase parte de la cuestión de introducir el concepto de poliedro.*

Zoe: [Ver figura 7, Realiza una descripción de las consignas abordadas, señala que primero se describen en general características de las imágenes presentadas, segundo se presentan las mismas imágenes en dos grupo y deben encontrar características geométricas en común, colocar nombre y representar un cuerpo en *GeoGebra* que pertenezca a cada uno de los grupos] *Por último, analizamos y debatimos la definición de polígono y poliedro.*

Las cuatro narrativas dejan explícito que el modelo (Ver tabla 55) al que se llega en el marco del proceso de MM es la definición de poliedro. Observamos en particular que la afirmación de Micaela nuevamente deja evidencia de estar posicionada desde la MM como vehículo (Julie y Mudaly, 2007). En pos de profundizar en relación con los sentidos otorgados por parte de las futuras profesoras a procesos de MM, recuperamos expresiones de las futuras profesoras que no se incluyen dentro de alguno de los subprocesos y presentamos en la tabla Nº56. Dianela explicita que luego de la construcción de la primera definición de poliedro por parte de la comunidad de práctica surgen problemas con respecto al por qué de dicha producción, estas cuestiones pueden vincularse con características propias del subproceso de validación y la necesidad/búsqueda por parte de ellas mismas de la validación.

Guillermina señala que al llevar a cabo los subprocesos de resolución matemática y validación – experimentación logran producir la definición, sin embargo, destaca que la misma es una caracterización y no una definición, cuestión que puede provenir de una intervención docente que discutiremos posteriormente (en partes 5 y 6). Además, el señalar que el desarrollo de los subprocesos se realiza conjuntamente puede vincularse y dar evidencia de un reconocimiento del desarrollo cíclico del proceso. Micaela menciona que en la clase se introduce la definición de poliedro, cuestión que se vincula con la conformación y establecimiento del tema. Zoe, tal como se menciona anteriormente, describe las consignas que se llevan adelante durante la producción de la definición de poliedro y destaca que se discute la definición de poliedro y polígono, cabe mencionar que se producen importantes discusiones en torno a esta última figura, aunque no se profundiza, sin embargo, lo consideramos como un potencial problema a estudiar emergente del proceso de MM.

Del análisis realizado consideramos que en las cuatro narrativas algunas cuestiones emergen con énfasis que sintetizamos a través de la siguiente tabla.

TABLA 57 | *Red de sentidos a MM en las narrativas individuales del grupo 2 (Fuente propia).*

FIGURAS E IMÁGENES QUE CONFIGURAN EL TEMA DE INTRODUCCIÓN A POLIEDROS

↓

PROBLEMA A ABORDAR (QUÉ ES UN POLIEDRO COMO PROBLEMA) Y OTROS EMERGENTES DEL MISMO

↓

EXPERIMENTACIÓN A TRAVÉS DE FIGURAS

↓

LA DEFINICIÓN DE POLIEDRO ES EL MODELO QUE PERMITE CLASIFICAR

↓

VALIDACIÓN CONTRASTANDO CON DATOS EXPERIMENTALES, DEFINICIONES DE LIBROS E INFORMACIÓN DE INTERNET

Del análisis realizado proponemos algunas consideraciones a partir de las producciones de narrativas de las futuras profesoras que conforman el grupo 2 que muestran los sentidos atribuidos a MM.

Destacamos que, en general, consideran que poliedros es el tema en estudio y el problema (principal) determinar qué es un poliedro. A su vez, las estudiantes de este grupo destacan problemas emergentes en el marco del propio proceso de MM, como ser el debatir qué es un polígono.

Las futuras docentes reconocen en el marco del subproceso de experimentación momentos de análisis de las figuras y caracterización y análisis de grupos de figuras dadas, pero, en general, no hacen explícita la producción y búsqueda de nuevos datos experimentales como medios para validar la producción realizada y para producir modificaciones. Señalan que en el marco de la validación contrastan figuras, información y definiciones con el modelo producido y en algunos casos referencian esta fase como fundamental para decidir y producir modificaciones en el mismo. A su vez, todas determinan que el modelo producido es la definición de poliedro.

De modo general, observamos que las futuras profesoras logran reconocer detalladamente ciertas acciones que realizan en el marco del proceso de MM, mostrando no solo apropiación del proceso de MM en el sentido de Bassanezi (2002), sino detallando con claridad lo realizado en vinculación con los aportes del autor en el marco de la vivencia, mostrando así el sentido otorgado al proceso de MM. Finalmente, señalamos que el esquema producido por Zoe pone de manifiesto la facilidad por parte de esta estudiante para representar cíclicamente el proceso vivido encontrando ciertas acciones y nociones como fundamentales al hacerlas explícitas en su propio esquema.

7.1.3. | GRUPO 3: DEFINICIÓN DE POLIEDRO COMO MODELO QUE PERMITE CLASIFICAR Y DAR RESPUESTA A LA PREGUNTA ¿QUÉ ES UN POLIEDRO?

En este momento se encuentran presentes Macarena y Yamila. Se añade la narrativa producida por Martina a este grupo porque trabaja a partir de la segunda clase y durante todo el proceso de producción de definición de poliedro con este grupo (momento 2), a pesar de no estar presente en los resultados presentados en el capítulo 6.

Agostina y Paula no se encuentran presentes, dado que cursaron esta asignatura en años anteriores y se presentan a algunas clases puntuales. Específicamente Paula participa de los parciales y trabajos prácticos, por lo que se encuentra, nuevamente, en el momento 5. La narrativa de Martina no se organiza, en general, estrictamente en torno a las categorías establecidas, por lo que en este caso la tabla Nº 65 resulta más extensa que en los otros grupos, de modo incipiente, consideramos que puede deberse a su ausencia a la primera clase en la que se debaten los aportes Bassanezi (2002).

Comenzamos recuperando fragmentos que hacen referencia al problema (Ver tabla 58), dado que del tema se explicitan breves referencias que tomamos en la tabla (Ver tabla 64) en la que se focaliza en torno a otras cuestiones.

TABLA 58 | *Fragmentos de narrativas de grupo 3 en relación con el problema (Fuente propia).*

PROBLEMA
Macarena: [El] *Problema que será definir "poliedro"*
Yamila: *Un problema para analizar puede ser esta observación de características que llevaron a separar unos cuerpos de otros.* [...] *Otro problema a analizar fueron las diferentes definiciones encontradas en diversos materiales de estudio, pertenecientes a diversos también niveles, como, libros de: secundaria, educación superior, búsqueda por Internet.*
Martina: -

Macarena considera que el problema (Ver tabla 58) es determinar qué es un poliedro. Yamila determina como problema, por un lado, y en estrecha relación con lo planteado por Macarena, el determinar características que llevan a separar los grupos de figuras tridimensionales en poliedros y no poliedros, y, por otro lado, analizar las definiciones de libros e Internet. Esta última consideración de Yamila puede encontrarse vinculada con una perspectiva en la que la modificación del modelo producido, por presentar diferencias con respecto a otros modelos, puede considerarse un nuevo problema a resolver, lo que implicaría la puesta en marcha de un nuevo ciclo de MM.

Retomamos a continuación fragmentos vinculados con los subprocesos de experimentación y abstracción. No presentamos tabla en relación con el subproceso de resolución, puesto que no encontramos consideraciones explicitas en las narrativas de Yamila y Martina, solo Macarena referencia el mismo aclarando que una misma frase se corresponde con los subprocesos de experimentación, abstracción y resolución. Esto último podría deberse a una forma de resolver pragmáticamente la dificultad de determinar acciones específicas en cada subproceso, puesto que se encuentran completamente relacionadas.

Consideramos en común, en el modo de narrar entre Macarena y Martina, que apelan a una red de ideas y consideraciones que las llevan a presentar sus perspectiva o vivencias sobre el proceso de MM de un modo tan integrado que es difícil reconocer en forma aislada cada una de las categorías que se escogen para el análisis.

TABLA 59 | *Fragmentos de narrativas de grupo 3 en relación con el subproceso de experimentación (Fuente propia).*

EXPERIMENTACIÓN

- **Macarena:** [Aclara que la frase corresponde a los subprocesos de experimentación, abstracción y resolución] *Aquí observamos las figuras dadas en la fotocopia por el docente y las figuras tridimensionales (las que pudimos manipular). Luego lo que vimos y apreciamos lo asociamos al conocimiento que teníamos previamente para la resolución del problema que será definir "poliedro".*
- **Yamila:** *Mediante la observación de un conjunto de cuerpos, que tomaremos como datos experimentales, hemos ido tomando características de los mismos las cuales clasificaron dichos cuerpos en dos grupos.*
- **Martina:** -

TABLA 60 | *Fragmentos de narrativas de grupo 3 en relación con el subproceso de abstracción (Fuente propia).*

ABSTRACCIÓN

- **Macarena:** [Ver tabla Nº 59]
- **Yamila:** *Mediante el proceso de abstracción se ha tratado de llegar al modelo, en nuestro caso, la definición de poliedro; nombre que se corresponde con uno de los grupos de cuerpos. Dicho modelo fue construido por la comunidad de la clase de geometría.*
- **Martina:** *Cuando la profesora nos preguntaba sobre esta última definición* [refiere a la primera definicion producida por la comunidad en la puesta en común de la clase 2] *algunas chicas respondieron de forma abstracta.*

Yamila considera que se lleva adelante la experimentación al observar los cuerpos dados (datos experimentales) y clasificarlos en dos grupos (poliedros y no poliedros) y señala que en la abstracción se construye como comunidad clase el modelo (definición de poliedro).

Macarena explicita que en los subprocesos de experimentación, abstracción y resolución se observan y manipulan las figuras y se asocia lo visto y apreciado con respecto a conocimientos disponibles para definir poliedro. Consideramos que quizás, menciona conocimientos previos con respecto a poliedros por haber cursado anteriormente la asignatura GEE y por lo tanto haber abordado algunas nociones y relaciones vinculadas con esta temática.

Con respecto a estos subprocesos, Martina solo menciona la abstracción, referenciando que algunas estudiantes responden de forma abstracta en momentos de producción de la definición de poliedro, no expresa con mayores detalles qué ideas se encuentran detrás de su afirmación, pero consideramos que quizás refiere al modo de presentar las características empleando lenguaje vinculado a nociones matemáticas. Es decir, puede reconocer el producto final de la abstracción, la manifestación tangible del proceso más que el proceso propiamente dicho.

En general, las estudiantes que conforman este grupo focalizan en un proceso integrado, donde las diversas acciones llevadas adelante redundan en una definición de poliedro que, desde luego, es modificada y repensada en diversos momentos.

Posteriormente, recuperamos de las narrativas las frases vinculadas con los subprocesos de validación y modificación.

TABLA 61 | *Fragmentos de narrativas de grupo 3 en relación con el subproceso de validación (Fuente propia).*

VALIDACIÓN

Macarena: *Para llevar a cabo esta etapa miramos la definición en el libro de cátedra y comparamos la misma con la que teníamos armada. Con mis compañeras, también lo discutimos en voz alta, cada grupo expuso sus ideas y en base a eso modificamos la definición según el caso (grupo).*

Yamila: *La validación, particularmente me ha parecido interesante. Por el hecho de que nunca había construido una definición utilizando esta progresión que se ha dado, lo cual me ayuda a razonar.*

Martina: *Cuando la profesora nos preguntaba sobre esta última definición* [refiere a la primera definición producida por la comunidad en la puesta en común de la clase 2] *algunas chicas respondieron de forma abstracta y otras a través de una validación.*

TABLA 62 | *Fragmentos de narrativas de grupo 3 en relación con el subproceso de modificación (Fuente propia)*

MODIFICACIÓN

Macarena: *En nuestro caso, si bien lo que concluimos coincide con lo del libro, teníamos dudas sobre la definición a la que arribamos porque en el libro no hay ninguna definición precisa de poliedro, simplemente define poliedro convexo. También nos generó dudas lo que expusieron los demás compañeros, sin embargo, nos quedamos con la definición del libro hasta que por último llegamos a la definición correcta con lo dicho la clase pasada.*

Yamila: *A partir de ellas* [definiciones obtenidas de diversos materiales], *analizamos si el modelo definido anteriormente fuese correcto o no. Una de estas definiciones la hemos hallado "completa" por lo cual se ha modificado el modelo primitivo, teniendo en cuenta que lo que realmente se había hecho era un listado de características.*

Martina: -

Macarena explicita que en el subproceso de validación (Ver tabla 61) se contrasta la definición del libro de cátedra con la producida en la clase, en este caso, apreciamos que hace referencia a "la definición", debido a que este grupo analiza, entre otras, la definición propuesta por las docentes y que finalmente se establece como adecuada y única para emplear en la asignatura, esta cuestión se explica en profundidad en la parte 6 (capítulo 11). A su vez, la estudiante hace referencia a los momentos de debate colectivo como medios para decidir modificar o no el modelo y nuevamente, al referenciar la modificación (Ver tabla 62), emplea la expresión "lo del libro" y explica que el libro Puig Adam (1980) no presenta estrictamente una definición de poliedro pero que se logra "la definición correcta" que coincide con la propuesta por las profesoras de la asignatura y finalmente es la legitimada en la clase. Es relevante destacar que Macarena cursó reiteradas veces GEE, e incluso, intentó acreditar la misma en examen final a pesar de no lograrlo, esta cercanía con la asignatura se muestra con un acuerdo constante con la modalidad de trabajo de la asignatura y con la perspectiva geométrica en la que se rige y piensa la matemática a partir del estudio del libro de la cátedra.

Yamila explicita que le resulta interesante la validación (Ver tabla 61) y que el modo en que se procede para construir la definición la ayuda a razonar y Martina explicita que en la puesta en común en la que se discute la primera definición de poliedro producida (clase 2) algunas compañeras responden a través de la validación, estas afirmaciones no nos permiten comprender en profundidad las ideas que se encuentran detrás de la producción escrita de estas estudiantes con respecto al subproceso de validación.

En relación con la modificación (Ver tabla 62), Yamila explicita que analiza el modelo en contraste con otras definiciones y que una de ellas (la propuesta por las docentes) resulta completa, por lo que se modifica teniendo en cuenta la misma, a su vez, señala que la definición producida por la clase es una caracterización y no una definición, cuestión que discutiremos en la parte 6 (capítulo 11).

Finalmente, avanzamos con la presentación de las categorías vinculadas con modelo y otras cuestiones.

TABLA 63 | *Fragmentos de narrativas de grupo 3 en relación con la noción de modelo (Fuente propia).*

MODELO

- **Macarena:** *Para arribar a la definición de poliedro realizamos los pasos que indica Bassanezi.*
- **Yamila:** *Se ha tratado de llegar al modelo, en nuestro caso, la definición de poliedro.*
- **Martina:** *Este modelo de "poliedro" encontrado a través de esta experiencia destaca la importancia y la diferencia que hay entre las características que puede tener un cuerpo y la manera de explicar esas características más detalladamente cuando uno pretende definirlo.*

TABLA 64 | *Fragmentos de narrativas de grupo 3 en relación con otras cuestiones (Fuente propia).*

OTRAS CUESTIONES
Macarena: -
Yamila: *No se ha partido directamente de un tema, sino de la experimentación.* [...]
Martina: *Nosotros el primer día de clase no teníamos definido el tema que en la segunda clase fuimos desarrollando.* [...] *Luego de escribir las características que reconocíamos y compartimos en una puesta en común con los distintos grupos. Encontramos que había palabras usadas en esas características que eran conceptos geométricos que usados como condiciones que cumple un determinado cuerpo podía llegar a definirse lo que es un poliedro.* [...] *Cuando tuvimos que seleccionar de diferentes textos las definiciones de poliedro que encontramos y reconocer si eran equivalentes con las que se habían tratado en clase, pudimos detectar que cada autor usa en geometría definiciones que a veces pueden llegar a quedar para algunas personas incompletas ya que son definiciones muy generales y otros usan palabras que no son necesarias a la hora de explicar una definición.*

Yamila y Martina señalan explícitamente que el modelo al que se arriba es la definición de poliedro. Macarena señala que al finalizar el proceso lo obtenido es la definición de poliedro, lo que puede vincularse con considerar la misma como modelo.

Con el fin de avanzar y recuperar los aportes de las futuras profesoras, analizamos algunas expresiones que no se enuncian específicamente dentro de alguna de las categorías. Marina afirma que en la primera clase no define el tema y Yamila destaca que no se comienza a trabajar en el marco del proceso de MM a partir de un tema, sino de la experimentación, estas afirmaciones pueden encontrarse influenciadas por reconocer al recuperar la vivencia una distancia con respecto a clases en las que se apela a una metodología tradicional en las que al comenzar se explicita el tema matemático a abordar, sino que ellas experimentan y producen.

A su vez, de la tabla 64 enfatizamos que Martina señala que en las características establecidas a cada grupo de figuras (Ver tabla 8) se presentan términos que son conceptos geométricos y a partir de emplearlos se puede definir poliedros, estas ideas pueden encontrarse relacionadas con los subprocesos de abstracción y resolución, al determinar características a utilizar y recurrir de modo progresivo al lenguaje matemático. La futura profesora, menciona también los momentos de análisis y contraste entre la definición producida y definiciones tomadas de libros de textos de secundaria y de geometría, lo que consideramos parte de las acciones que se llevan adelante en el subproceso de validación. Finalmente, destaca que pueden encontrarse diferentes definiciones para un determinado concepto y que ciertas definiciones pueden resultar incompletas para alguna persona particular, mostrando así una perspectiva amplia con respecto a la definición que muestra que la misma es arbitraria (Freudenthal,1973; Zaslavsky y Shir, 2005).

De modo general, algunas cuestiones que emergen con énfasis en el grupo sintetizamos en la siguiente tabla.

TABLA 65 | *Red de sentidos a MM en las narrativas individuales del grupo 3 (Fuente propia).*

DETERMINAR QUÉ ES UN POLIEDRO COMO PROBLEMA A ABORDAR

↓

EXPERIMENTACIÓN AL OBSERVAR, MANIPULAR Y CLASIFICAR CUERPOS

↓

LA DEFINICIÓN DE POLIEDRO ES EL MODELO EMERGENTE QUE PERMITE CLASIFICAR

↓

VALIDACIÓN CONTRASTANDO CON DEFINICIONES DE LIBROS

Apreciamos del análisis realizado que las estudiantes parecen considerar que el problema en estudio es determinar qué es un poliedro. A su vez, reconocen que en la experimentación se observan, manipulan y clasifican cuerpos. Cabe mencionar que no dejan evidencia, por ejemplo, de considerar que las definiciones (obtenidas de Internet y libros) constituyen nuevos datos experimentales al avanzar en la producción del modelo. Con respecto a la validación señalan la comparación del propio modelo (definición de poliedro) con definiciones tomadas de libros, en este sentido, este grupo no explicita que el análisis de las figuras/cuerpos constituye parte de este subproceso o el empleo de definiciones tomadas de Internet u otra información, estas cuestiones, quizás se encuentran influenciadas por considerar como conocimiento legitimo específicamente las definiciones de libros de geometría que resultan familiares y de confianza para ellas. Y que, en algunas vivencias previas en clases de matemática se valida o legitima el propio saber al contrastar con el legitimado por docentes o autoras/es de textos (escogidos por las/os profesoras/es).

Enfatizamos en común que este grupo hace referencia a un solapamiento y articulación entre los subprocesos que impiden, en muchos casos, diferenciar acciones específicas realizadas en cada uno de ellos. Además, valoran con gran ímpetu los momentos de debate colectivo al pensar en la producción realizada y el avance y retroceso en el marco del proceso de MM.

7.2. | REFLEXIONES CON RESPECTO A SENTIDOS PRODUCIDOS EN RELACIÓN CON MM LUEGO DE VIVIR UN PRIMER PROCESO DE MM

Consideramos que el estudiantado vive una primera esfera de actividad de MM geométrica, en la que la respuesta al problema se da a través de la definición de poliedro como medio que permite clasificar figuras tridimensionales. A continuación, recuperamos sentidos atribuidos por cada uno de los grupos. Si bien estos sentidos provienen de reflexiones individuales, encontramos puntos de encuentro entre las integrantes de los distintos grupos.

Las futuras profesoras que conforman el grupo 1 reconocen, entre otras cuestiones, que: la definición de poliedro es el modelo emergente, durante el proceso se modifica el modelo, el proceso se desarrolla cíclicamente, la experimentación se produce a partir de datos e información dada, buscada y producida, y en la validación se contrasta el modelo con datos empíricos e información (de libros, por ejemplo) y se legitima a partir de la interacción social.

Las estudiantes del grupo 2, en las narrativas consideran que: poliedros es el tema en estudio, el problema consiste en determinar qué es un poliedro (reconocen también problemas emergentes), en la experimentación analizan figuras, en la validación contrastan figuras e información con el modelo producido y la misma influye al decidir y producir modificaciones en el mismo.

Finalmente, las narrativas producidas por las integrantes del grupo 3 luego de la primera esfera de MM geométrica parecen considerar que el problema en estudio es determinar qué es un poliedro. A su vez, reconocen la experimentación (observan, manipulan y clasifican cuerpos) y la validación, con respecto a esta última señalan específicamente la comparación del propio modelo (definición de poliedro) con definiciones tomadas de libros.

Observamos en común en los sentidos de las futuras profesoras que dan cuenta que las figuras presentadas fueron desafiantes de modo tal que generaron problemas nuevos e inquietudes para resolver en los grupos y encontramos que enfatizan el valor de contar con el diagrama de Bassanezi (2002), pues da soporte para traer adelante un aspecto experimental del trabajo matemático también cuando la cuestión en discusión es interna. A pesar de esto, consideramos que quizás el enfatizar en la consigna que el modelo es la definición de poliedro direccionó ciertos sentidos en este momento.

Los sentidos producidos por las futuras profesoras muestran apropiación del proceso de MM en el sentido de Bassanezi (2002) y el reconocimiento de acciones que se realizan en cada uno de ellos. Algunas consideraciones incipientes nos invitan a reflexionar si la resolución podría eliminarse, y que se consideren las acciones que se realizan al abstraer el lenguaje natural a matemático como parte de la abstracción. Más aún, quizás el trabajo con lenguaje natural podría pensarse en la experimentación. Estas particularidades, quizás, podrían subdividir menos las acciones realizadas y, flexibilizar el trabajo con los procesos de MM. A su vez, reflexionamos con respecto a la abstracción si en esta última no sería necesario pensar en otros términos para caracterizarla que vayan más allá de la noción de variable o factores, es decir, es posible que algunas perspectivas restrinjan este subproceso a la producción de modelos aritméticos/algebraicos. Todas estas ideas que emergen del análisis realizado serían interesantes de profundizar en investigaciones futuras. Además, no evidenciamos sentidos atribuidos a la aplicación en el marco del proceso de MM, lo que consideramos puede vincularse con que no se lleva adelante dicho subproceso con énfasis en esta primera esfera de actividad.

En este capítulo, reflexionamos los sentidos atribuidos individualmente, lo que muestra apropiación por parte de cada una de las futuras profesoras. Más aún, podemos evidenciar que esta vivencia podría concebirse como experiencia por cada una de ellas. Destacamos, tal como señala Larrosa (2003) que cada experiencia es única, por lo que es relevante analizar narrativas individuales, sin embargo, pareciera que la trayectoria vivida en interacción hace que cada grupo vaya configurando una identidad grupal, puesto que hay sentidos evidentes que se fueron configurando con el equipo de trabajo y, por tanto, son comunes a todas las narrativas de cada uno de los grupos.

CAP VIII

VOCES EN ESCENA PARA REFLEXIONAR COMO GRUPO UNA VIVENCIA DE MM

8.1. | INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos resultados del estudio de información obtenida en las entrevistas grupales (momento 6). Estas entrevistas las realizamos aproximadamente 2 meses después de que finaliza la vivencia de MM con los tres grupos de futuras profesoras (Ver tabla 21) que se van constituyendo y estabilizando a medida que atraviesan las clases. Es decir, trabajan, en general, así agrupadas en los diversos momentos durante el desarrollo de la vivencia educativa de MM.

Para presentar el análisis seguimos el orden de expresiones en que se van desarrollando las entrevistas y recuperamos fragmentos de transcripciones de las voces, tanto de las estudiantes como de la investigadora (tesista), y el análisis e interpretación en torno a aportes teóricos. Específicamente, en este capítulo focalizamos en información que se vincula con sentidos otorgados a MM, sin embargo, señalamos que la entrevista contiene intervenciones previas y posteriores que no se reportan en este capítulo por no encontrarse directamente relacionadas con el objetivo en estudio que reportamos en este capítulo (Ver tabla 15).

Cabe mencionar que estas entrevistas se realizan posteriormente a los cinco momentos que constituyen la vivencia educativa. Es decir, ya han vivido distintas esferas de MM y reflexiones, tales como, la producción de definición de poliedro, el conjeturar posibles relaciones entre números de elementos de un poliedro, obteniendo de este proceso fórmulas algebraicas y el trabajo con problemáticas en torno al tema “Poliedros” que formulan libremente las estudiantes con el fin de lograr la puesta en juego de un proceso de modelización completo (Esteley, 2014).

Para analizar la información apelamos a la noción de modelo que proponen y a los subprocesos del proceso de MM que reconocen explícitamente durante la entrevista, así como a acciones que como investigadoras vinculamos con los mismos. Además, establecemos reflexiones entre ideas en juego en la entrevista y los referentes teóricos del presente estudio.

8. 1. 1. | GRUPO 1: SUBPROCESOS IMPLÍCITOS Y DESARROLLO CÍCLICO DEL PROCESO EN MOMENTOS DE TRABAJO EN INTERACCIÓN

En la entrevista del grupo 1 participan Eugenia, Marina, Ailén y Larisa. Se abordan diversas cuestiones y temáticas, particularmente, la discusión en torno a MM comienza a partir de una intervención de la investigadora: "*Si tienen que contarle a un/a compañero/a qué es un proceso de modelización matemática a partir de la experiencia vivida en GEE, ¿cómo se lo contarían?*", de modo inmediato se produce el siguiente diálogo:

> Eugenia: *Sería como lo que dijo hoy Ailén de buscar información* [Refiere a una expresión realizada por Ailén en preguntas previas], *trabajar en grupo, exponer, discutir, volver a buscar otras cosas.*
>
> Ailén: *Sí, porque bueno, yo le diría que empezamos primero buscando información, mirando las figuras, mirando las características, definiendo y bueno después, por ejemplo, le pondría cuando definimos poliedro lo que decía que las caras no estaban en distintos planos* [refiere a una de las condiciones establecidas, en la definición de poliedro que no consideran en el primer modelo producido y agregan luego del debate colectivo, que establece que dos caras contiguas deben pertenecer a distintos planos] *y bueno le mostraría por qué y de que ahí nos dimos cuenta de que otra condición era que las caras estén en distintos planos y esas cosas.*
>
> Marina: *Claro, y ahí volvés a retocar la definición.*
>
> Ailén: *Lo mismo de que si* [los poliedros] *eran vacíos o llenos, que también fue un problema.*

En estas primeras aproximaciones las futuras profesores evocan acciones llevadas adelante al producir la definición de poliedro y ponen de manifiesto condiciones que pueden relacionarse con el desarrollo del proceso de MM. Apreciamos que aluden inmediatamente a la vivencia de producir definiciones, sin considerar inicialmente los momentos de trabajo 4 y 5 (Ver tabla 4). Estas primeras intervenciones si bien no recuperan los subprocesos de Bassanezi (2002) explícitamente (con sus respectivos nombres), dejan entrever acciones realizadas en los mismos, específicamente, experimentación, validación y modificación.

Posteriormente, la investigadora invita a las futuras docentes a realizar un diagrama representativo del proceso de MM vivido. En el marco de producción de tal diagrama se efectúa el siguiente diálogo:

> Investigadora: *¿Podrían hacer un diagrama para explicarle a un compañero cómo vivieron el proceso de modelización matemática?*

Ailén: *Habíamos empezado con las imágenes primero.*

[…]

Larisa: *Como fuente de partida, poné el inicio a tal cosa.*

Eugenia: *¿Imágenes?*

Ailén: *Sí, diferentes imágenes, después que fuimos analizando las características, si los podíamos separar en grupos.*

Eugenia: *Después exposición, puesta en escena.*

Marina: *¿Qué? Puesta en común.*

[…]

Marina: *Y ahí sería volver al análisis, entonces ahí sería como problema, porque el problema de que nos dimos cuenta que había cosas que, va digo yo, no sé.*

[…]

Marina: *O sea lo que discutimos bueno, un problema, si estaba bien, estaba bien, ya era la definición.*

Eugenia: *Claro pero acá, de las cosas que no entendíamos que se yo, volvimos a analizarlas.*

Eugenia: *Que nosotras pusimos como inicio que teníamos las diferentes imágenes, después pusimos que analizamos las características, que hicimos una puesta en común, ahí surgió un problema, así que volvimos a analizar sus características.*

Larisa: *Pero eso si hay discordancias.*

[…]

Marina: *Y una vez que está bien.*

Ailén: *Claro.*

Marina: *Ya está.*

Investigadora: *¿Y cómo se dan cuenta que está bien?*

Marina: *Claro, por eso, seguimos dando vueltas en ese circulito hasta que…*

Ailén: *Sí, y en sí lo hicimos varias veces, cuando íbamos de que, si era vacío* [por vacío se refiere a no considerar los puntos interiores del poliedro en la definición]*, si no era vacío, que volvíamos.*

[…]

Ailén: *Las caras planas, no caras planas.*

Marina: *Ese es el circuito que pasaba todo el tiempo.*

En el marco de los intercambios presentados anteriormente, las futuras profesoras que configuran el grupo 1 realizan el siguiente diagrama inspiradas en el proceso de producción de definiciones.

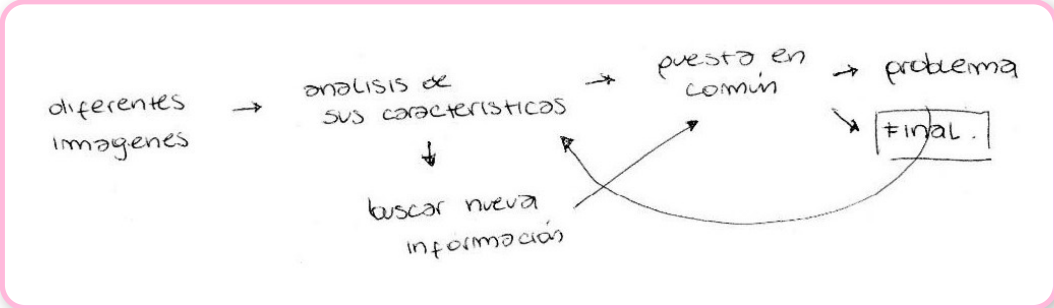


FIGURA 8 | *Diagrama del proceso de MM realizado por el grupo 1.*

Destacamos que, nuevamente, emergen diversas características vinculadas con los distintos subprocesos del proceso de MM y posibles conexiones entre ellos. Consideramos que en las voces de las futuras profesoras el análisis de las diferentes figuras dadas y la búsqueda de nueva información en pos de mejorar el modelo se vincula con la experimentación, el análisis de características de las figuras lo vinculamos con la abstracción y el modelo producido con la resolución. A su vez, destacan las puestas en común como medio para determinar la validez del modelo y decidir si es necesario modificarlo. También, en diversas oportunidades realizan consideraciones vinculadas con el desarrollo cíclico del proceso de MM aparentemente cargando de sentido esa particularidad, tal como es evidente en sus narrativas (analizadas en el capítulo 7).

Estas consideraciones muestran que, si bien parece que no recuerdan los nombres presentados en el diagrama de MM (Bassannezi, 2002), logran establecer acciones vinculadas a los subprocesos y diagramar el proceso de MM y sus idas y vueltas, como grupo recuerdan características fundamentales del mismo. Sin embargo, notamos que logran realizarlo en torno a un ejemplo particular, pero no de modo general. A pesar de ello, continuar con el ejemplo con el que inician la entrevista, estaría hablando de consistencia en el discurso al sostener el mismo tema (Bajtín, 2000) y con ello consistencia entre sentido y voz.

En lo realizado, las futuras profesoras logran expresar un ciclo de MM verbal y gráficamente. Muestran apropiación del trabajo y cargan de realidad (la realidad vivida) al proceso de MM.

Luego, la investigadora realiza una pregunta en la que intenta que se pongan de manifiesto consideraciones vinculadas a los momentos 4 y 5 (los otros procesos de MM, Ver tabla 4), pero no se producen discusiones al respecto. Inmediatamente, pregunta *"¿Cómo ven esto que están contando del proceso de modelización respecto a experiencias previas?,* y cada una de las integrantes del grupo ofrece una respuesta:

Ailén: *Capaz, no sé, no creo que sea la primera vez que hayamos hecho este proceso,*

> *capaz lo hacíamos inconscientemente y nunca me puse a pensar que hacíamos todos esos pasos para llegar* [a una respuesta o modelo].
>
> Marina: *Claro, ponele que capaz con un ejercicio no más. Vos lo haces, ponele que tenés la respuesta ahí, si no me dio, bueno, ¿qué pasó? Si hice mal lo voy a volver a hacer. Por ejemplo, no sé.*
>
> Larisa: *Para mí en el día a día a uno se le van presentando problemas y los va resolviendo.*
>
> Eugenia: *Sí, lo mismo, para mí para hacer, por ejemplo, cualquier ejercicio, no sé, recién del parcial, yo borre cuatrocientas mil veces, y si… ah no esto era así, ah no era, borrás, volvés a hacer. Hasta que crees que llegas a la respuesta.*

En las expresiones de las estudiantes, por un lado, destacan la posibilidad de modificación como cuestión que las atraviesa y recuperan continuamente al repensar la vivencia de MM, sin embargo, Marina y Eugenia en sus afirmaciones, parecieran considerar ejemplos en los que se llevan adelante o resuelven ejercicios o problemas en sentido clásico, encontrando como similares a la experiencia de MM por tener la posibilidad de modificar sus procedimientos cuando se presentan errores. Por otro lado, Ailén señala que quizás realizan experiencias previamente en las que se llevan a cabo procesos de MM en las que no se reflexionaba el propio proceso, sin especificar alguna de ellas. Además, Larisa destaca que en el día a día se presentan problemas para resolver sin realizar mayores consideraciones con respecto al vínculo de esta consideración con la vivencia o sobre la naturaleza de los problemas. Es intersante destacar que, en su expresión "día a día" uno puede dilucidar sus conexiones con aspectos de la realidad que podrían estar inmersos en el contexto matemático de su trayecto de formación o quizas fuera de él.

El desarrollo de la entrevista continúa en torno a preguntas que posicionan a las estudiantes, específicamente, en su rol de futuras docentes. Además, en este momento la investigadora entrega la misma imagen del proceso de MM que se aborda en las clases de GEE y pregunta *"Como futuros docentes, ¿creen que podrían llevarse a cabo una propuesta de enseñanza empleando el proceso de MM?"*

> Ailén: *A mí me parece bueno, va, es como que a mí me ayudó hacer toda la búsqueda, volver otra vez al principio, volver a las imágenes, para tratar de llegar a la definición de poliedro que sinceramente no tenía ni idea qué era un poliedro.* […] *Yo creo que nunca se me hubiera ocurrido, o sea, si no tendría esta experiencia tratar de pensar así un tema, capaz porque no tuve otras materias más adelante que se abocan a eso, pero hasta ahora nunca se me hubiera cruzado por la cabeza dar un tema así* […].
>
> Larisa: *Yo lo tomo como que uno cuando es profesora ya te dan temas que tenés que*

enseñarle en cada curso, y a partir de esos temas uno elige qué material va a utilizar, o sea, uno elige un modelo de cómo lo va a enseñar y de ahí lo pone en marcha en la clase y después bueno, analiza si los alumnos aprendieron realmente con esa técnica que implementaste o qué hay que cambiar y resolver para mejorar. […]

Ailén: *Yo creo que lleva a uno también a interiorizarse con el tema, porque si vos te paras y empezas a exponer el tema es como que hay algunos que no les interesa, no prestan atención, y por ahí ni entienden, pero al estar más involucrados, buscar información, mirando, es como que se me hace que es más entendible para uno, y te da más.*

Marina: *Sí también eso, de que te sirve para eso, para que se involucren más, de no decirle bueno esto es tal cosa, bueno ahora hagan, de empezar así, que se yo, diferenciando cosas, ponele en funciones, ¿esto es una función?, ¿qué diferencia hay?, o ni siquiera decirle qué es una función, qué diferencia hay entre esto y esto, cosas así.*

Investigadora: *¿Vos Euge que opinas?*

Eugenia: *Sí, lo mismo.*

En general, en su rol de futuras docentes valoran este tipo de abordaje pedagógico. Ailén considera positivo el trabajo con el proceso de MM y su desarrollo cíclico para producir la definición de poliedro y señala que esta experiencia le otorga la oportunidad de pensar la posibilidad de enseñar empleando MM, cuestión que previamente no se le hubiera ocurrido. Además, la estudiante destaca la posibilidad de interiorizarse con el tema y deja explícitas diferencias con respecto al trabajo tradicional en el aula en el que se expone un tema por el/la docente, lo que muestra que para ella el problema fue realmente auténtico, pues, no conocía la temática y el modelo.

Marina revaloriza la expresión de Ailén, lo que pone en escena la importancia del contraste de sentidos y el valor de una entrevista grupal. Esta estudiante ejemplifica que el tema funciones se podría enseñar de este modo, quizás por lo puntos de encuentros que se tendría al distinguir funciones de no funciones. Esto es, apela a un caso particular que ilustra lo enunciado por Ailén.

A su vez, Larisa realiza una afirmación en la que pone de manifiesto que como docente *"ya te dan temas que tenés que enseñarle en cada curso, y a partir de esos temas uno elige qué material va a utilizar",* consideración que deja evidencia de cómo el currículum traspasa las aulas y sus tiempos, pues, pareciera que el tema matemático a enseñar atraviesa completamente las decisiones docentes y quizás también puede restringir. Este aspecto no parece ser enunciado, por ejemplo, por Ailén, e incluso Marina quien reconoce un tema curricular, pero propone ir más allá de lo prescripto. Finalmente, Eugenia afirma coincidir con sus compañeras.

La última pregunta en relación con MM realizada por la investigadora es *"¿Qué aspectos de la enseñanza a partir del proceso de modelización matemática pueden provocar dificultades?"*

> Ailén: *Es que por ahí podés perder mucho tiempo de clases.*
>
> Marina: *Eso.*
>
> Ailén: *Si te dedicas todas las clases con este modelo.*
>
> Marina: *Claro.*
>
> Ailén: *Por ahí podés que en dos clases los chicos te entiendan un tema, y aplicando este modelo de modelización capaz que estás… y con la otra si lo diste en una clase capaz que no entienden, creo que la pérdida del tiempo es la mayor negatividad.*
>
> Marina: *Sí.*
>
> Investigadora: *¿Y sería pérdida de tiempo?*
>
> Ailén: *No.*
>
> Marina: *En realidad no, pero está todo el programa cuando tenés así de que tenés una restricción de tiempo sí. En sí no sería.*

Con respecto a esta última cuestión explicitan que les preocupa el tiempo que demanda este tipo de trabajo y las presiones de cumplir con el currículo, emplean la expresión *"pérdida de tiempo"* en reiteradas ocasiones. Cabe mencionar, en función de lo mencionado por las estudiantes que el tiempo es un factor que influye en el desarrollo de la asignatura GEE y los modos de evaluación propuestos por las profesoras. Sin embargo, Ailén señala cuestiones que dan indicio de que en otros tipos de enseñanza en los que la/el docente explica un tema se corre el riesgo de que el estudiantado no entienda.

Posteriormente realizan consideraciones respecto a realidades actuales de las aulas de secundaria en Argentina en relación con la posibilidad de que no todas/os las/os estudiantes trabajen con compromiso en el marco del proceso de MM. A partir de aportes de todas las integrantes del grupo se hace explícita la necesidad de que los procesos de MM en la escuela secundaria se desarrollen dentro del aula y descartan el trabajo en horarios extracurriculares. A su vez, señalan, como se muestra a continuación, la necesidad del compromiso del docente, de sus intervenciones y su actuación como guía.

> Ailén: *Y porque, bueno, también depende del profesor* [de la profesora], *si lo*[/a] *está mirando, incentivando que busquen o no, pero si vos los*[/as] *incentivas a cada grupo que vayan buscando que se interesen, que vean, que anoten, es como que va a ser más productivo esa pérdida de tiempo, en sí.*

> Investigadora: *¿Por qué decís pérdida de tiempo entre comillas?* [Gestualmente con sus manos expresa las comillas]
>
> Ailén: *Y porque no sería pérdida de tiempo.* [...]
>
> Larisa: *Claro, como que, uno como profesor lo tiene que ir guiando a los chicos* [las chicas], *tampoco les tiene que decir bueno tiene esto y que lo hagan en su casa, no. O sea, para ir motivándolos* [/as] *de a poco a que estudien ese tema que se tiene que dar. No dejarlos*[/as] *solos* [/as] *que hagan las cosas solos* [/as].

Exponemos en la siguiente tabla consideraciones que destacamos del análisis presentado.

TABLA 66 | *Red de sentidos en entrevista del grupo 1 (Fuente propia).*

TRABAJO CON FIGURAS Y BÚSQUEDA DE INFORMACIÓN (EXPERIMENTACIÓN)

↓

CARACTERIZACIÓN DE FIGURAS Y PRODUCCIÓN DE DEFINICIÓN

↓

ACCIONES LIGADAS A VALIDACIÓN COMO MODO DE LEGITIMAR EN INSTANCIAS COLECTIVAS

↓

MODIFICACIÓN DE MODELOS PRODUCIDOS

↓

DESARROLLO CÍCLICO DEL PROCESO DE MM

↓

INTERACCIÓN Y TRABAJO COLABORATIVO DENTRO DEL AULA

↓

POTENCIAL EN EL TRABAJO CON MM QUE DEMANDA MUCHO TIEMPO

En sus enunciados, las futuras profesoras no logran evocar o representar en palabras los nombres de los subprocesos del proceso de MM en el sentido de Bassanezi (2002). Sin embargo, a partir del ejemplo de producción de definiciones reconocen acciones que se vinculan con los subprocesos de experimentación, abstracción, resolución, validación y modificación. Destacamos que enfatizan en diversas ocasiones respecto a la posibilidad de búsqueda de información y a la posibilidad de modificación de la producción, cuestiones que resultan esenciales en instancias de MM. Resaltan, en diversas expresiones y en las flechas que presentan en el diagrama, el aspecto cíclico del proceso de MM, específicamente focalizan en el ciclo experimentación-resolución-validación-modificación.

A su vez, motivadas por preguntas de la investigadora, en momentos finales de la misma, manifiestan que antes de la experiencia no habían tenido oportunidades para pensar y reflexionar respecto al proceso de MM. Señalan como interesante y posible apelar a procesos de MM en el aula de matemática de la escuela secundaria y consideran que podrían realizarlo en sus aulas en el futuro al desempeñarse como profesoras, específicamente realzan la importancia de las intervenciones docentes e interacciones que emergen y pueden producir un trabajo colaborativo y matemáticamente rico, sin embargo, en reiteradas ocasiones muestran preocupación respecto al tiempo que demanda este tipo de trabajo y sus influencias en el desarrollo del currículo preestablecido.

Finalmente, hacemos evidente la consistencia en el discurso de las estudiantes, tal como señala Bajtín (2000) el enunciado, su estilo y su composición, se determina por el aspecto temático y por el aspecto expresivo, o sea por la actitud valorativa de las hablantes hacia dicho aspecto temático. En este sentido, el grupo constantemente recupera la temática, transformando su vivencia de producción de definición en una verdadera experiencia que las atraviesa no solo individualmente (Larrosa, 2003) sino también, grupalmente. Estos sentidos grupales y la coherencia, tal como señala Britzman (2003) se ponen de manifiesto en una voz individual, pero que, sin dudas, las permite participar en una comunidad, al comunicar sentido a otras y, por tanto, evidenciar la comprensión como proceso social.

8. 1. 2. | GRUPO 2: SUBPROCESOS IMPLÍCITOS A PARTIR DE LOS QUE SE PRODUCE CONOCIMIENTO EN INTERACCIÓN

Invitamos a participar de esta entrevista a Dianela, Guillermina, Micaela y Valentina porque trabajan juntas en la mayor parte del desarrollo de las clases en las que se pone en juego la vivencia educativa de MM en la asignatura GEE. Valentina no responde los e-mails de invitación, sus compañeras afirman que esto se debe a que abandonó la carrera Profesorado en Matemática por cuestiones de índole personal. Además, Micaela se retira en la mitad de la entrevista porque debe ir a su trabajo, por lo que no se hace presente su voz en las discusiones en torno a MM, pero si en otros momentos de la entrevista.

A su vez, Zoe no fue inicialmente invitada a la entrevista, dado que trabaja en algunas clases, pero no en todas con el grupo. Sin embargo, en momentos de realización de la misma se presenta manifestando su deseo de participar y que su voz sea escuchada, se hace evidente como "la voz como representación, implica presencia y escucha" (Esteley, 2014, p.137).

El deseo de Zoe proviene de una situación vivida en la cuarta clase de la vivencia educativa de MM, en la que el grupo (conformado por Micaela, Guillermina, Dianela y Zoe) formula el problema a estudiar, con el que lleven adelante un proceso de MM completo (Esteley, 2014). Este momento, tal como mencionamos en la tercera parte de la tesis, constituye el trabajo práctico de la asignatura que es necesario aprobar para regularizar y promocionar. Las futuras docentes afirman que el problema[42] es propuesto por Zoe, sin embargo, la estudiante no participa de la clase 5 en el que los grupos analizan y abordan el mismo, por lo que la Profesora Laura decide que Zoe debe realizar otro trabajo práctico diferente al de sus compañeras (Ver tabla 13, consigna que propone validar la relación de Euler). Como grupo explicitan no estar de acuerdo, por ser ella quien propone la idea para formularlo, pero deben aceptar la decisión docente. Esta situación estimula a Zoe a querer ser parte de la entrevista en búsqueda de que su voz sea escuchada.

En el marco de la entrevista, la investigadora con el fin de introducir la temática MM señala *"Tomando como referencia las tres primeras semanas de cursado de GEE y la experiencia educativa vivida cuando se trabajó con el tema poliedros, ¿cómo le contarían a un compañero qué significa hacer matemática o qué significó en ese entorno?"*

> Dianela: *Sería, partimos desde una base, una idea previa que teníamos, ya sea nosotras que cursamos antes la materia…*
>
> Guillermina: *Eso estaba pensando.*
>
> Dianela: *O Micaela que, o sea, tenía menos base, por así decirlo.*
>
> Guillermina: *Como que compararía digamos, los* [y las estudiantes] *que teníamos algunos indicios y los* [las] *que no y más o menos explicarle que tratamos entre todos* [todas] *de llegar a una producción.*
> Zoe: *Para mí sería interesante ver qué opinaría alguien que no está en nuestro entorno para ver cómo, o sea, qué es lo que piensa cuando le hablas de poliedro, de una figura, porque cada uno* [una] *tiene una base muy distinta, capaz por la escuela, pero capaz que no, entonces sería interesante.*
> […]

[42] *"Nosotras pensamos que si tenemos distintas figuras geométricas (triángulos, rectángulos, cuadrados, pentágonos, etc.) al unirlos podemos formar poliedros (considerando sus puntos interiores). Pero, ¿siempre se puede? (tomando cualquier figura y cantidad)".*

> Guillermina: *Claro, la investigación, visualización, o sea, esto de poner las imágenes así, me gustó por el hecho de que tuvimos distintas perspectivas digamos respecto de lo que podría ser o no un poliedro y con imágenes que uno ve todos los días o no.*
>
> Dianela: *Y también la puesta en común entre los grupos los distintos días al finalizar, también llevaban a conclusiones y a ideas generales, al explicar, porque por ahí algún grupo no había pensado en algo y cuando lo exponen…*
>
> Investigadora: *Claro, ¿y cómo le contarían a un/a compañero/a lo que hicieron?*
>
> Guillermina: *O sea, fue tratar de buscar una definición de lo que es un poliedro…*
>
> Dianela: *Mediante diversos experimentos, con diversos experimentos…*
>
> Guillermina: *Claro, con diversas herramientas también, porque no fue solo el papel, sino que estuvimos trabajando con algunos elementos de estos dibujos.* […] *Trabajamos en grupos y que tratamos de llegar entre todos a una definición.*

Señalan en primer lugar que las estudiantes que conforman el grupo parten del trabajo con distintos conocimientos previos, dado que Micaela, a diferencia del resto, no cursó en años anteriores la asignatura GEE. Guillermina destaca que entre todas logran una producción, esta última aseveración de la futura profesora, se vincula con una reflexión de la vivencia que posiciona a las estudiantes como estudiantes activas que producen conocimiento.

Inmediatamente, Zoe destaca que le resultaría interesante abordar este trabajo con otras personas que no se encuentren en su entorno, consideramos que quizás refiere a personas que no estudian Profesorado en Matemática. Además, Guillermina señala dos cuestiones como positivas, por un lado, los momentos de investigación y visualización y por otro, el hecho de emplear imágenes de cosas que observan a diario, otorgando especial valor a los dibujos como herramientas/connotación realista. Dianela agrega y valora los momentos de debate colectivo y destaca el potencial de explicar lo realizado para avanzar en la producción matemática, parece que como grupo el impacto de la producción colectiva en la producción de conocimientos y la carga de sentidos se ahondan. Estas últimas consideraciones pueden vincularse con acciones que se realizan en instancias de experimentación y validación (Bassanezi, 2002).

La investigadora nuevamente pregunta *"Cómo contarían la experiencia vivida a un/a compañero/a".* Enfatizan que en la misma tratan de buscar la definición de poliedro empleando imágenes y material concreto y trabajando en grupos. Esto da indicios de cuestiones vinculadas con experimentación y resolución (debido a la mención de construcción de la definición de poliedro/modelo), y claramente, del lugar de la definición como modelo que se emplea para responder la problemática en el marco de la MM.

Con el fin de recuperar otros momentos de la experiencia educativa, posteriormente, la investigadora señala *"También habían formulado un problema",* sin embargo, las afirmaciones versan, principalmente, sobre la emoción de enojo de Zoe por no ser parte del grupo en el momento de evaluación y de sus compañeras por haberse sentido mal o incómodas con esta situación que no consideran justa. En particular, respecto al problema formulado afirman:

> Zoe: *Si con cualquier cara* [refiere a cualquier figura geométrica] *y cualquier número* [refiere a cantidad de figuras geométricas] *se puede formar un poliedro.*
>
> Dianela: *Que había explotado el poliedro* [refiere a que en momentos de resolución del problema formulado intentan armar un poliedro con ciertas figuras geométricas plásticas de un material llamado Polydron y la misma se desarma al querer cerrarla, pues, no encastraban las figuras seleccionadas].
>
> Guillermina: *No, o sea, la idea estaba, o sea…*
>
> Dianela: *Era muy didáctica.*
>
> Guillermina: *Claro.*
>
> Dianela: *O sea, creo que eso te permitía que te enganches con lo que proponía porque, bueno, si bien no era de gran…, o que no tenías que hacer muchas cosas, pero te incentivaba a querer formar, a querer ver cómo poder lograr armar* [refiere a armar figuras poliédricas con Polydron].
>
> Zoe: *Sí, y si se podía realmente.*
>
> Dianela: *Si era posible.*
>
> Guillermina: *Claro, el tema de la manipulación del Polydron y ver cómo se podía, cómo no.*
>
> Dianela: *Y bueno, ahí estabas creando.*
>
> Guillermina: *Produciendo.*
>
> Dianela: *Produciendo conocimiento.*

En estas últimas afirmaciones las futuras profesoras recuperan la vivencia de formular y resolver un problema en el que establecen conjeturas con el fin de determinar bajo qué condiciones es posible construir un poliedro, enfatizan el uso de Polydron como la tecnología empleada en el marco del mismo y consideran que resulta un modo de trabajo didáctico, posiblemente por la posibilidad de experimentar recurriendo al material concreto para luego conjeturar. Se hace evidente así que recuperan acciones vinculadas con los subprocesos de experimentación y resolución principalmente, donde el modelo toma la forma de conjetura/propiedad. La entrevista continúa con el siguiente diálogo:

Investigadora: *¿Ustedes Identifican alguna diferencia o similitud entre los modos de trabajo que se propusieron en dichas clases de Geometría Euclídea Espacial con respecto a otras clases en cursos de matemática?*

Dianela: *Yo creo que sí, porque, o sea, en las clases habitualmente das los contenidos teóricos y aplicas la teoría en la práctica, en cambio acá partimos de nuestros conocimientos propios y mediante preguntas y prácticas que íbamos haciendo íbamos construyendo lo teórico que era la definición de poliedro.*

Guillermina: *Igual depende de las materias también, porque nosotros ahora en el taller de geometría estamos haciendo eso, de tener conocimientos nuestros y después aprendemos. O sea, nos dan para hacer algo, por ejemplo, y después nos dicen como se hace o, como las definiciones, nos piden que busquemos nosotros definiciones y después nos dan la oficial digamos.*

[…]

Dianela: *Cómo hacer circunferencias en papel.*

Guillermina: *Claro.*

Zoe: *Entonces fuimos probando cada una con su papel hasta que llegamos, cada una lo pudo hacer y después la profesora explicó otra forma de hacerlo que capaz era la misma que habías usado o capaz una forma distinta.*

Dianela compara la metodología empleada en el marco de la vivencia de MM con las de otras asignaturas, identificando en la primera el abordaje exploración-teoría y en la segunda el abordaje teoría-práctica. Sus compañeras agregan que esta cuestión depende de la asignatura y recuerdan un trabajo realizado en Taller de Geometría (materia de segundo cuatrimestre de tercer año del plan de estudios) en el que encuentran puntos en común con respecto a la metodología utilizada en GEE. A su vez, observamos que previamente no conocían la definición de poliedro y que, por tanto, el modelo que dio respuesta al problema fue dicha definición.

Posteriormente, la investigadora realiza una pregunta en relación con MM, *"¿Recuerdan que hablamos de la modelización matemática?, si tuvieran que contarle a un/a compañero/a el proceso de modelización a partir de la experiencia vivida en GEE, ¿qué le dirían?"*, y Guillermina, en sinergia con lo que como grupo venían planteando, responde *"Es más o menos lo que venimos hablando ya de la metodología de trabajo, de cómo experimentamos nosotros el trabajar primero, así sin saber a qué nos estábamos refiriendo y después con las definiciones formales"*. Luego la investigadora propone que hagan un diagrama y las estudiantes manifiestan que no se acuerdan y prefieren pasar de pregunta, decisión que es respetada por la investigadora que continúa preguntando *"¿estas experiencias con modelización les eran algo familiar?, ¿habían trabajado de este modo?"*

Guillermina afirma en primer lugar que no y señala que la metodología de trabajo que se propone normalmente en GEE hace el desarrollo de la materia muy pesado, afirmación compartida por Dianela y Zoe. Luego, recuperan un trabajo realizado en Matemática Discreta I (asignatura de segundo cuatrimestre de tercer año del plan de estudios):

> Zoe: […] *Uno era leer sobre un texto y no me acuerdo lo que teníamos que hacer, pero el otro estaba más bueno porque teníamos que elegir un tema de matemática discreta y tenemos que, que se yo, plantear problemas para presentar en una clase, o sea, eso es lo que había hecho. Yo elegí la parte de combinatoria y traté de escribir problemas que sean lo más didácticos posibles para una clase, dependen los intereses, también teníamos que ver para que grado de secundaria.*
>
> Guillermina: *Claro, era como en dos partes la materia, la teoría y la práctica que se hace siempre, y ese trabajo que ya tenía que ver más con la didáctica digamos, que nosotros cuando nos dijo así es como que nos gustó el trabajo por el tema de que tenés acercamiento digamos a decir ¡Bueno, voy a preparar una clase!*
>
> Zoe: *Lástima que ese trabajo era muy lindo para presentarlo en la clase porque, no lo presentamos con los* [las] *compañeros* [compañeras] *porque no llegamos, pero estaba bueno también ver qué opinión tenían los* [las] *demás porque yo no quería, de mi parte quería eso, ver qué opinaba el resto si era mucho, si era poco para un aula, que la profe me diga y también ver lo que habían hecho los otros.*
>
> Guillermina: *Es como una primera planificación digamos, pero quedó ahí digamos.*

El recuerdo con respecto a la vivencia en la asignatura Matemática Discreta I puede deberse a que en el trabajo realizado se posicionan como futuras docentes y parece ser el lugar que escogieron para mirar y dar sentido a su trayectoria de formación y las actividades/sujetos/materiales que la atraviesan. En este sentido, enfatizan en ciertas acciones propias de lo que será su futuro profesional: leer un texto, formular problemas y planificar. De este modo, quizás encuentran relación con la vivencia de MM celebrada en la asignatura GEE por hacer en ambas discusiones educativas y didácticas. Estas modalidades, en muchos casos, distan de trabajos en asignaturas de matemática específicas del Profesorado en Matemática en el que realizamos el estudio. Luego de esta intervención se dialoga respecto a cuestiones vinculadas con su futuro rol como docentes de matemática.

> Investigadora: *Como futuras docentes, ¿creen que podrían llevarse a cabo una pro-*

puesta de enseñanza empleando el proceso de Modelización Matemática?

Guillermina: *Yo creo que sí* [...]. *Esto serviría para poder incentivar o motivar más a los alumnos* [las alumnas], *que les interese más la matemática porque es como que yo me acuerdo cuando iba a la secundaria te presentaban el tema y hacías los ejercicios y después te daban problemas y vos decías, ¿cómo aplico eso a los problemas?, cosa que tendría que haber sido al revés me parece. No sé, que te den primero los problemas, entonces ves más o menos, que sería esto, o sea, con los conocimientos previos que tenés o tratar de resolverlo o llegar a algo y después que te presenten cómo se hace o herramientas para hacerlo.*

Investigadora: *¿Y ustedes chicas qué opinan?*

Dianela: *Yo creo que sí, que se puede emplear este método, pero tiene que estar bien organizado...*

Guillermina: *Claro.*

Dianela: *Y... o sea, si bien los dejas libremente que creen y que interaccionen entre los grupos guiar bien porque...*

Guillermina: *Claro, ver bien las herramientas digamos.*

Dianela: *Sí, porque, por ejemplo, si hay alguien que no se interesa y no hace, no presta atención, o cosa así. Yo creo que sí, pero en una escuela secundaria como que tenés que saber incentivarlos y guiar bien.*

Al posicionarse como futuras profesoras coinciden en que es posible llevar adelante en el aula de secundaria procesos de MM. Guillermina explicita que considera que de este modo las/os estudiantes podrían motivarse más y comparte su vivencia/experiencia personal en la escuela secundaria en la que se desarrollan las clases de matemática siguiendo el orden tema-ejercicios-problemas (metodología tradicional) y destaca que deberían organizarse al revés. Estas ideas emergentes a partir de reflexionar la vivencia, resultan especialmente relevantes en una estudiante que no ha cursado con anterioridad asignaturas de didáctica. Dianela agrega que si bien es importante incentivar para que los estudiantes creen e interaccionen, la/el docente debe posicionarse en su rol de guía, atenta/o a estudiantes que quizás no prestan atención o no se interesan. Seguidamente, la investigadora pregunta *"¿Qué aspectos pueden ser positivos?"* y las futuras docentes responden:

Dianela: *Yo creo que el ver y observar, por ejemplo, en este caso los cuerpos, y poder interaccionar con, por ejemplo, Micaela que no había cursado antes la materia, o sea, diferentes lados, está bueno.*

Zoe: *Que se interesen también, que no piensen que, muchos piensan que son puras fórmulas, como de reemplazo y como que no es solamente eso.*

Guillermina: *Claro, y es como que todo el mundo te dice ¿la matemática de qué me sirve?, o es todo mecánico y cosas así, siendo que con esto lo podés llevar a la vida cotidiana.*

Dianela: *También te permite pensar si la noción que vos tenés de, por ejemplo, un polígono, poliedro está bien o está mal.*

Destacamos lo mencionado por las futuras profesoras con respecto a la posibilidad de que las/os estudiantes tengan la oportunidad de tener una cultura matemática que vaya más allá de la aplicación de fórmulas y de un reconocimiento de la misma vinculada a un trabajo mecánico, valorando la experiencia y/o vivencia por considerar que la misma permite llevar la disciplina más a la "vida cotidiana" y pensar y repensar los conocimientos disponibles. Esto muestra, el establecimiento de una conexión con la realidad empírica, tangible, pues las imágenes (reales y creadas) logran motivar la conexión con la realidad fuera de la matemática al trabajar con MM. Quizás motivadas por el esquema de Bassanezi (2002). Estas consideraciones resultan un aporte importante, debido a que hacen evidente que la experiencia educativa de MM las atravesó e invitó a pensar otras opciones de enseñanza de la matemática que, parece, pueden resultar superadoras respecto a metodologías tradicionales. Finalmente, la investigadora interviene y pregunta: *"¿Y qué aspectos creen que pueden provocar dificultades?":*

Dianela: *El tiempo que lleva, porque...*

Guillermina: *Pensaba lo mismo.*

Zoe: *Estoy pensando en el tiempo que… porque aparte en la secundaria con todo lo que tendrías que dar…*

Guillermina: *Por eso, tendría que estar bien organizado para…*

Dianela: *Yo creo que también lo relaciono porque fueron tres semanas de cursado, que a nosotros tres semanas es mucho, y entonces es tiempo que se ocupó para una definición y demás, por eso digo.*

Guillermina: *Claro, fue como mucho tiempo para una sola cosa. Como que para nosotras empezamos la clase y nos dijeron poliedro y bueno, nosotros ya queríamos saber qué era un poliedro, pero bueno después de que vos haces todo el análisis, la investigación, o sea, te sirve para interpretar bien la definición, pero sí, el tiempo.*

Guillermina: *Y el problema que nosotras hicimos capaz que querés resolverlo de una forma y te cuesta y pensás bueno vamos a hacerlo de otra y ahí ya, ese es el tema, o* *sea, está bueno pensar un problema y resolverlo, pero capaz que esa respuesta no la tiene el otro, o que varían las respuestas.*

Zoe: *Para mí cuando pensás en un problema sobre un tema es como que te terminas de sacar las dudas que tenés sobre el tema, me parece a mí, como que te empezás a preguntar si realmente tenés bien claro lo que estás dando, lo que significa, entonces, me parece a mí.*

Dianela: Y*o creo que ponés en juego todas las cuestiones que estábamos viendo hasta el momento, porque cuando determinábamos qué figura le dábamos a cada uno, poníamos, veíamos, a ver como se podían unir y de qué forma.*

Guillermina: *Claro, y capaz que eso que veíamos nosotros el otro grupo no lo veía o veía otra cosa.*

Dianela: *Claro, y teníamos que tener en cuenta* [...] *si con lo que nosotros no veíamos de que no se podía armar capaz que otro sí lo podía armar entonces, eso.*

Al pensar en las dificultades que trae aparejado el trabajo con MM en el aula de matemática las futuras docentes coinciden que el tiempo que demanda este tipo de trabajo puede ser una limitación importante considerando el currículum prescripto y la carga de la/el docente de tener que cumplir el mismo. Particularizando en la experiencia en la asignatura GEE, Dianela explica que se destinan en la propuesta tres semanas al estudio del tema poliedros, coincidimos que en un cuatrimestre de 14 semanas es una demanda importante, más aún considerando que en los exámenes finales y parciales se evalúa la totalidad del programa y ellas tienen el objetivo último de acreditar la asignatura, es decir, la estudiante focaliza en los conceptos aprendidos, pero no en todo el proceso.

Destacan el colectivo como productor y facilitador de un trabajo colaborativo, es decir, el grupo como comunidad (Forman, 2014). Asimismo, encontramos en las afirmaciones de las futuras profesoras que reconocen que en los procesos de MM y específicamente en los momentos de intercambio es posible obtener distintas respuestas al interior de un grupo y entre grupos, es decir, distintos sentidos que se topan de modo tal de potenciar la producción y discusión matemática.

Además, enfatizan en el momento de formulación y estudio de un problema, señalando que el problema que formulan para su resolución involucra idas y vueltas al interior del grupo, pero también debe repensarse a partir del aporte de los otros grupos y por tanto lleva tiempo, sin embargo, consideran importante esta instancia que brinda la oportunidad, como menciona Zoe de *"sacar las dudas"* y poner en juego todos los conocimientos disponibles.

A continuación, sintetizamos en formato de tabla, algunas consideraciones realizadas en el análisis.

TABLA 67 | *Red de sentidos en entrevista del grupo 2 (Fuente propia).*

PRODUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

↓

INVESTIGACIÓN Y VISUALIZACIÓN EMPLEANDO IMÁGENES (EXPERIMENTACIÓN)

↓

ACCIONES LIGADAS A VALIDACIÓN COMO MODO DE LEGITIMAR EN INSTANCIAS COLECTIVAS

↓

BÚSQUEDA Y PRODUCCIÓN DE DEFINICIÓN DE POLIEDRO (RESOLUCIÓN)

↓

CLASES QUE PRESENTAN DIFERENCIAS RESPECTO A OTRAS EN LAS QUE SE USAN METODOLOGÍAS TRADICIONALES

↓

FORMULACIÓN DE PROBLEMAS COMO RECURSO POTENCIAL EN INSTANCIAS DE FORMACIÓN

↓

INTERACCIÓN Y TRABAJO COLABORATIVO DENTRO DEL AULA

↓

POTENCIAL EN EL TRABAJO CON MM QUE DEMANDA MUCHO TIEMPO

En el análisis realizado evidenciamos que las futuras profesoras en diversos momentos de la entrevista afirman que en la vivencia de MM se construyen/producen diversos conocimientos, destacando con especial relevancia la producción de la definición de poliedro. En estos procesos de producción de conocimientos señalan acciones que pueden relacionarse con los subprocesos de experimentación, resolución, validación y modificación (Bassanezi, 2002). En este sentido, interesa destacar que, en los procesos de MM recuperados, producción de definición de poliedro y formulación y resolución de problema propio, enfatizan en lo realizado al experimentar recurriendo a imágenes y material concreto y en el modelo obtenido (no emplean este término), definición y conjeturas/propiedades.

Con respecto a la formulación del problema, como grupo reconocen de gran valor la vivencia, en el sentido que brinda la oportunidad de terminar de comprender el tema en estudio y preguntar/problematizar todas las inquietudes. Parece que este grupo fue atravesado completamente por el momento de formulación del problema.

Como futuras docentes encuentran importantes diferencias en el trabajo realizado en la experiencia empleando MM como abordaje pedagógico respecto a experiencias previas, destacan los momentos de debate colectivos como fundamentales para pensar, repensar, contrastar y legitimar la producción propia. A su vez, señalan que en el aula de matemática el/la profesor/a debe tomar el rol de guía en pos de que todas/os las/os estudiantes se involucren y aporten a este tipo de trabajo que consideran de gran valor, a pesar de esto, afirman que demanda mucho tiempo lo cual puede influir negativamente por la presión que le significa desarrollar la mayor "cantidad" de contenidos a fin de cumplir con las prescripciones curriculares.

8.1.3. | GRUPO 3: PROCESO AL QUE INGRESAN ESTUDIANTES Y DOCENTES Y SE OBTIENE LA DEFINICIÓN DE POLIEDRO LUEGO DE DIVERSAS ETAPAS

En la entrevista participan Macarena y Yamila que trabajan en el grupo 3 desde el comienzo de la vivencia educativa de MM. Victoria trabaja en la primera clase, donde se discute respecto a quehacer matemático, validación y MM y se caracterizan distintas figuras tridimensionales (Ver tabla 21), con el grupo 4 y luego se incorpora al grupo 3, por lo que participa de esta entrevista; sin embargo, aclaramos que Victoria no se encuentra presente en el momento de producción de narrativas (Información analizada en el capítulo 7). Martina se incorpora a este grupo desde la segunda clase, por lo que también su voz se hace presente en esta entrevista. Para comenzar el diálogo y recuperar consideraciones relacionadas a la experiencia de MM, la investigadora señala: *"Si tuvieran que contarle a un/a compañero/a qué es el proceso de modelización a partir de la experiencia vivida en Geometría, ¿qué le dirían?"*, lo que incentiva la siguiente interacción:

> [...]
>
> Martina: *Sí, el proceso tiene una entrada.* [...] *Como entrada pondríamos para que haya el resultado tendría que ser la entrada vendría a ser nosotros* [nosotras], *o sea, si no hay alumnos* [alumnas] *no le podés explicar a nadie, la entrada son los* [las] *alumnos* [alumnas], *la otra entrada principal también es que haya docentes que tengan interés en dar los conocimientos que se van a dar en esa materia, después hay lo que vendrían a ser.*
>
> Yamila: *¿El objetivo?*

Martina: *Sí, el objetivo es lo último.*

Yamila: *Sí, a eso se quiere llegar a lo último.*

Martina: *A aprender la materia, pero cuando ella [docente] había dado un proceso de modelado…*

Macarena: *Sí.*

Martina: *En la materia* [GEE] *y en una parte, no me acuerdo, no sé si le decía enfoques. No sé, lo que te decía era, sí vos tenés alumnos* [alumnas] *que es lo más importante y un* [una] *docente que los pueda guiar y brindarles a la vez conocimientos que ellos* [ellas] *traigan y darles bibliografía, todo se va haciendo, no me acuerdo si esas son las variables y las salidas es siempre que haya un aprendizaje en la materia.*

Las primeras afirmaciones resultan inconexas, parece que ponen en palabras ideas, pero la experiencia de Martina en la carrera de Analista Industrial se impone instaurando la idea de interpretar todo como diagramas, en el que se determina siempre una entrada, una salida y en medio un proceso. Es decir, esta estudiante cambia el tema sobre el que se centra la interacción y por lo tanto el diálogo se obtura (Bajtín, 2000).

Martina afirma que se deben tener disponibles estudiantes y docentes (interesadas/os en dar los conocimientos que se abordan en la asignatura), el objetivo es que las/os estudiantes aprendan la materia y las/os docentes deben *"guiar y brindarles a la vez conocimientos que ellos* [ellas] *traigan y darles bibliografía"*. Parecería que la voz de Marina busca interpretar la vivencia a partir de una evocación que la expresa en los términos a los que está acostumbrada, y lleva a ese terreno con el que se siente cómoda la situación vivida. A su vez, recupera modos de trabajo habituales del Profesorado en Matemática en los que al inicio de una asignatura el/la docente provee la bibliografía a emplear. Sin embargo, el empleo del término *"proceso"* por parte de la investigadora, parece que influye en las aseveraciones de Martina, puesto que intenta entender la asignatura a partir de un proceso que posee entrada y salida. La entrevista continúa como se muestra a continuación:

Investigadora: *¿Y podrían hacer un diagrama que represente el proceso de modelización que vivieron en GEE?*

Macarena: *Sí.* […] C*hicas a ver voy a ser sincera, yo sinceramente es como que hice el proceso, pero es como que no me termino de cerrar bien qué es eso. Capaz que en modelos...*

Martina: *Yo tengo ganas, yo tengo otra formación, yo estoy haciendo la tesis para recibirme de analista industrial.*

Macarena: *Yo confío en vos Martina. Ustedes confíen en mí.*

Investigadora: *A partir de la experiencia chicas.*

Martina: *Si se hace un proceso justamente primero tenés que tener claras tres etapas.*

Investigadora: *¿Martina qué estás estudiando?*

Martina: *La tesis para analista industrial y los analistas ven todo como un proceso, o sea, todo tenés que verlo como un proceso, sino no ves nada. Te puedo definir entrada para mí qué es, yo primero te digo la red de mí proceso. ¿Vieron? Nosotros tenemos entrada y la entrada dijimos son los alumnos* [alumnas] *y el* [la] *Profesor* [profesora], *para que se ubiquen la entrada y la salida la vemos todas.*

Macarena: *La salida debe ser la definición.*

Yamila: *Sí.*

Martina: *¿Con la definición o con el proceso del cuatrimestre?*

Investigadora: *Puede ser con la definición.*

Estos intercambios muestran en principio una cierta resistencia por parte de Macarena a formular un esquema de MM, por afirmar que no terminó de cerrar bien su reconocimiento de los procesos de MM, lo que puede vincularse con una falta de comprensión o seguridad total con respecto al proceso de MM. En este sentido, cabe mencionar que durante la vivencia de MM la voz de Macarena siempre es escuchada con respeto y valor por compañeras y docentes por haber cursado previamente GEE y posicionarse como líder, quizás la perplejidad que provoca esta pregunta la desconcierta.

Martina focaliza sus aportes en una vivencia que se encuentra transitando en otra carrera que estudia, analista industrial, en la que según señala *"todo"* se ve como un proceso, es por esto que asume la dirección de la consigna. La estudiante, influida por sus esferas de actividades como futura analista industrial, apela a una metáfora del análisis industrial. Martina intenta interpretar la vivencia como un "proceso de enseñanza". Al término proceso le atribuye el sentido que se le otorga en la otra carrera que cursa: hay una entrada (docente y estudiantes), una salida (el aprendizaje de nociones de GEE), y etapas en el medio (en las que intenta incorporar lo que sus compañeras le van aportando con respecto a la vivencia atravesada).

A su vez, parece que Macarena cede el liderazgo a Marina con la frase *"Yo confío en vos Martina. Ustedes confíen en mí"* y sus compañeras aceptan sin cuestionar tomando a Martina como portavoz del grupo. Consideramos que, también, lo dicho por Martina es tan alejado de lo que han vivido como grupo que el resto no puede decir nada, parece haber discursos sin diálogo.

Destacamos que Martina vuelva a recuperar el proceso entrada (alumnos/as, profesor/a)-salida. Sin embargo, Macarena interviene reseñando la producción de la definición, cuestión que es reafirmada por Yamila y redirecciona la formulación del esquema en torno al proceso de producción de definiciones. La discusión entre las futuras profesoras continúa a partir de estas consideraciones con el fin de producir el esquema, como se muestra:

Martina: *Entre la entrada y la salida siempre hay otras etapas.*

Macarena: *La parte del material, ¿dónde la enchufas?, ¿en la entrada o en el medio?*

Martina: *No, no, la entrada es muy clara, ¿sí?, tiene alumnos y el profesor* [...] *Después entre la entrada y la salida, ¿qué otras etapas había?*

Macarena: *Alguna definición intermedia, algo medio.*

Martina: *Miralo como etapa.*

Investigadora: *¿El resto chicas?, ¿qué opinan?*

Macarena: *Bueno, buscas material, discutís, usamos el software.*

Martina: *¿Cómo lo llamarías a eso?, como etapas, si lo tenés que ver como etapas.*

Macarena: *¿Investigación? No ni idea, esta chica* [refiere a Martina] *tiene el proceso.*

Investigadora: *Chicas no importa tanto cada término específico sino cómo ustedes contarían y diagramarían el proceso de modelización a partir de la experiencia en geometría.*

Yamila: *Bueno, yo diría fue un proceso...*

Martina: *¿Qué dijo ella recién?, ¿es un proceso de qué?*

Victoria: *De modelización.*

Martina: *Entonces si tenemos alumnos y tenemos el profesor podemos generar, antes de generar el modelo, ¿sí?, de aprendizaje o enseñanza, no sé cómo lo llama, sí igual es como la etapa de intercambio de conocimientos, ¿cómo les gustaría llamarla?*

Macarena: *¿Discusiones?, o sea, intercambio, debate.*

Yamila: *Intercambio poné, ¿está bien?*

Victoria: *Sí.*

Martina: *Igual ellas nos habían dado un...*

Yamila: *Sí, pero no recuerdo.*

Macarena: *Sí, yo tampoco.*

Martina: *Encima esa clase fue la que yo falté, después me dio la hoja, pero no sé qué onda. Pongo intercambio, o sea, si tenés en la entrada el intercambio y, ¿qué más ven?*

Como hemos señalado, Martina asume el liderazgo en la elaboración del esquema de MM, que basa en su experticia de formación en otro campo profesional. Realiza preguntas a sus compañeras, cuyas respuestas, acepta o refuta en función de sus conocimientos. Macarena, acatando el empleo del proceso como entrada-salida propuesto por Martina, pregunta dónde se debe colocar el material, haciendo referencia a las figuras tridimensionales y señala que entre la entrada y salida se tiene *"alguna definición intermedia"*. En este momento, Macarena, por un lado, se comienza a alejar de la estructura de Martina y por otro lado busca adaptarse a ese discurso. Estas cuestiones, pueden vincularse con el empleo de datos experimentales desde el comienzo del proceso y la posibilidad de modificación del modelo. También los medios utilizados, parecen atravesar la vivencia educativa vivida (Borba y Villarreal, 2005).

La investigadora interviene en búsqueda de que todas las estudiantes del grupo coloquen su voz en escena, sin embargo, Martina vuelve inmediatamente al rol asumido. Macarena interviene afirmando *"Buscas material, discutís, usamos el software"*, a partir de lo que añaden entre entrada y salida la palabra *"intercambio"*. Esto pone de manifiesto el rol preponderante en el marco de la vivencia de lo social para recuperar lo vivido y la conexión que busca Macarena con lo dicho antes, intentando volver a la vivencia. Posteriormente, señalan que en las clases de GEE se trabaja con un esquema de MM, pero no recuerdan el mismo (cómo es y qué dice). Prosiguen en la producción del esquema, Macarena retoma la voz y, por tanto, incentiva el recuerdo de lo vivido en la vivencia en GEE:

Macarena: *Bueno, habíamos buscado material nosotras me acuerdo.*

Victoria: *Para mi hubo más una aproximación también a la realidad, ellas nos habían traído los…*

Yamila: *La manipulación de los...*

Macarena: *Claro la experimentación.*

Martina: *Claro, exacto, está la experimentación y el proceso de modelado.*

Victoria: *Pero eso fue como después para mí.*

Yamila: *Para mí fue en el medio, antes de llegar acá.*

Victoria: *Sí, sí.*

Macarena: *Antes del intercambio, capaz que…*

Victoria: *Manipular cosas, viste sus características, las comparaste.*

Martina: *Podemos ir, no sé, ¿cómo quieren que lo llame?, ¿reconocimiento?*

Victoria: *Sí.*

Macarena: *Sí, manipulación.*

Martina: *Porque sino yo pongo cuatro así, entrada, intercambio, modelización, a la salida, y juego, de la entrada al intercambio, o sea de la entrada al intercambio hubo reconocimiento.*

Macarena: *Yo te tiro todo lo que sé y vos hace tu…*

Victoria: *Ordenalo como quieras.*

Macarena: *Sí.*

Martina: *Sí, capaz que me como, de la entrada al intercambio hubo reconocimiento.*

Macarena: *Sí.* […] *De figuras geométricas.*

En el diálogo apreciamos que Macarena reconoce la búsqueda de material y Victoria señala que se aproximaron a la realidad en el proceso de MM, esta última consideración parece que se produce por el hecho de haber manipulado los cuerpos representados en materiales manipulativos. Evidenciamos que la polifonía de voces en torno a estas cuestiones hace emerger el término "*experimentación*". A su vez, señalan que la experimentación se realiza antes de los intercambios, por lo que quizás con el término *"intercambios"* refieren a debates colectivos en los que participan estudiantes y docente, y no a los desarrollados al interior de cada uno de los grupos. Finalmente, Martina propone colocar los términos: entrada, intercambio, modelización y salida; y entre ellos algunas acciones que se realizan, consideración que es aceptada por las futuras profesoras que conforman el grupo.

Es importante señalar que Martina no se aleja de su esquema mental/metáfora, pero, en el marco de los intercambios en momentos comienza a adaptarse y recordar lo vivido junto a sus compañeras. Continúan con intercambios en pos de formular el esquema:

Martina: *O sea, éstas serían nuestras etapas generales, ¿sí? De la entrada al intercambio hubo reconocimiento, ¿reconocimiento de qué tipo?*

Macarena: *De figuras Polydron* […]. *Hacíamos figuras con eso, más las que habían traído ellas* [Refiere a las profesoras].

[…]

Martina: *Entonces entre estos reconocimientos, el intercambio y la modelización, ¿qué hicimos nosotras siempre?*

Macarena: *Es que no termino de entender el concepto de modelización yo.*

Victoria: *¿Entre el intercambio y la modelización qué hicimos?*

Macarena: *Para mí la modelización es todo lo que hicimos en realidad.*

Martina: *Pero para llegar a modelar algo, ¿antes qué hicimos?, ¿lo logramos enseguida?*

Macarena: *No, no, hicimos todo…*

Martina: *Experimentamos, ¿sí?, y ahí en la experimentación estaría el uso de software.*

Yamila: *La manipulación de distintos cuerpos, la búsqueda bibliográfica.*

Macarena: *Sí, creo que esto acá del intercambio, la experimentación, esas cosas surgieron varias veces digamos, no fue que experimentamos, investigamos y ahí ya salió directamente es como que los pasamos varias veces por eso estaba…* […] *Claro, porque por ejemplo experimentábamos, sacábamos una conjetura y volvíamos a experimentar y te dabas cuenta que faltaba algo, es como que no fue algo rápido digamos.*

Yamila: *¿Esto era un tema?* […]

Macarena: *Objetivo encontrar una definición de poliedro.*

Martina: *O profesor con un objetivo claro. Porque si ella hubiera entrado y nos hubiera dicho, ¿qué saben de geometría?, y capaz que nos quedábamos con la idea de punto y no íbamos más.*

La interacción les posibilita como grupo determinar que entre el comienzo del proceso de MM y el intercambio (de la comunidad clase de GEE) reconocen las figuras en estudio y en el marco de la experimentación emplean el software, manipulan cuerpos y buscan bibliografía. Al discutir con respecto a qué se realiza entre intercambio-modelización, Macarena afirma que considera que todo es modelización, es decir, el proceso completo. Sin embargo, Martina continúa firme en su perspectiva y parece no considerar lo que señala su compañera. Además, Macarena señala que el proceso se lleva adelante varias veces, por ejemplo, al detectar que le falta algo a una conjetura, la misma se modifica, lo que se vincula con el subproceso de modificación en el sentido de Bassanezi (2002) y se explicitan consideraciones vinculadas con el desarrollo cíclico del proceso. Yamila introduce el término *"tema"* refiriéndose a poliedros y sus compañeras afirman que es un *"objetivo encontrar una definición de poliedro"*, lo que puede vincularse con la temática y el problema en estudio. A partir de los intercambios que se llevan adelante las futuras profesoras del grupo 3 presentan el siguiente esquema.

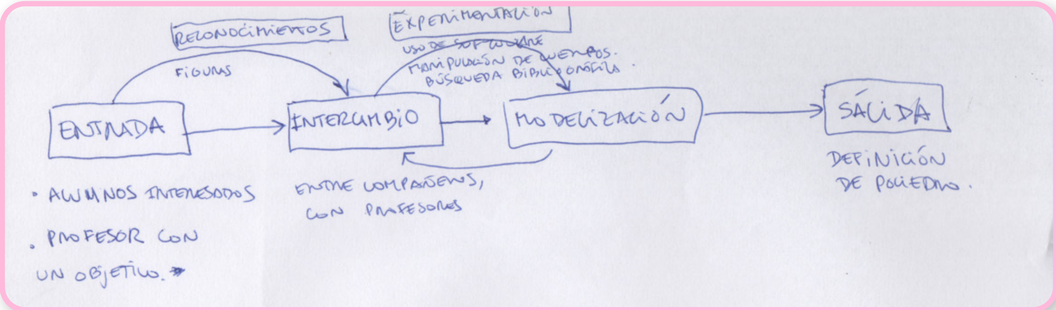


FIGURA 9 | *Diagrama del proceso de MM realizado por el grupo 3.*

El esquema realizado finalmente resulta razonable en relación con la vivencia de MM. Al volver al tema propuesto/planteado por la investigadora el diálogo comienza a fluir, ya que se comparte tema. A pesar de la obstrucción que implica la carga de sentidos de Martina, inspirada en proceso de producción industrial, las estudiantes comienzan a evocar ideas. Sin embargo, esas ideas y sentidos (desarrollados en el marco del proceso de producción de un modelo) vienen mediados por una metáfora que tiene otra carga de sentido. Acá el choque/contraste de sentidos es importante, ya que se fueron produciendo en distintas esferas de actividades (Bajtín, 2000).

Finalmente, como grupo logran producir, adaptarse y colaborar en pos de construir una imagen colectiva del esquema presentado. Es decir, se logra encausar el discurso y dar forma a las enunciaciones, para recuperarse como productoras de matemática.

Evidenciamos que en el mismo hacen explicito que lo que "sale" del proceso de MM es la definición de poliedro, por lo que, posiblemente refieran al modelo, a pesar de no emplear dicho término. A su vez, en las flechas hacen evidente la consideración de desarrollo que implica un ida y vuelta entre subprocesos/fases. Seguidamente la investigadora les muestra el esquema de Bassanezi (2002) a las estudiantes y afirma: *¿Y cómo ven esto que me están contando respecto a experiencias previas?, ¿era algo familiar?, ¿no era algo familiar?* [...] *No sé si recuerdan este esquema que es el que trabajamos en clase, primero definimos qué es poliedro, pero después trabajamos con problemas e incluso ustedes determinaron y respondieron un propio problema. Como futuras docentes, ¿creen que podrían llevarse a cabo una propuesta de enseñanza empleando el proceso de Modelización Matemática?*

> Macarena: *Sí, en realidad es como que me parece que es algo que lo hacemos siempre. O sea, es como que no es algo extraño, lo que pasa por ahí que verlo más teóricamente es distinto. O sea, nunca me siento a hacer un cuadro así a analizar lo que hago, ¿me entendés?, pero es como que pasa esto.*

Yamila: *Yo creo que siempre estamos modelizando, pero no somos conscientes en sí que lo estamos haciendo.*

Macarena: *Yo también pienso lo mismo.*

Martina: *Sí, para mí la idea de modelo, por eso digo yo por ahí lo veo desde otro enfoque, la idea de modelo es siempre justamente ver en el caso de los matemáticos, es ver qué tema vos querés mostrar.*

Investigadora: *¿El modelo de poliedro estaba trabajado previamente?*

Martina: *No estaba trabajado como modelo, como un proceso vendría a ser. Pero si bien la idea de poliedro creo que todos la teníamos.*

Victoria: *No todas la teníamos. No, a ver, yo creo que uno más de una vez lo hace y cuando está estudiando esto de modelizar, quizás no siempre, pero creo que lo hacemos aunque no seamos conscientes de… Y para enseñar con esto tenés que sentarte y ver cómo planificar también, las clases, los tiempos, los modos.*

Estas primeras apreciaciones, en las que se posicionan en el rol de futuras docentes, con respecto a procesos de MM parecen mostrar que todo lo que hacen en matemática se puede pensar como un proceso de modelización. Macarena pone de manifiesto que no es un modo de trabajo frecuente el de reflexionar las propias acciones en el marco de la carrera. Incluso, como grupo, destacan como particular esta experiencia por invitar a la reflexión en torno al proceso, lo que consideramos puede resultar sorprendente por vincularse con aspectos de formación en didáctica, cuestión que parece no acostumbran a realizar en asignaturas de matemática. Además, interesa señalar que Victoria afirma que previamente no tenía conocimientos con respecto a la noción de poliedro, mostrando así que el modelo fue realmente producido y nuevo para ella. A su vez, esta estudiante enfatiza en la necesidad de planificar clases, tiempos y modos para poder enseñar apelando a MM. La entrevista continúa de la siguiente manera:

Investigadora: *¿Y qué aspectos pueden ser positivos?, ¿y cuáles pueden ser negativos?*

Macarena: *Es como que se termina de entender bien mediante esta manera de enseñanza, está bueno, pero creo que lleva mucho tiempo y si tenés que llegar con el programa es como que por ahí terminas haciendo la clase magistral, o sea, es como que me gusta esta manera de trabajar, pero siento que a veces cuando no llegas con el programa es como que te conviene toda la vida la otra digamos porque es como que investigar…*

Victoria: *Tenés dos módulos de ochenta en la semana* [Refiere al horario semanal estimado en un curso de matemática en escuela secundaria].

Macarena: *Viste es como que está buena y sirve un montón, pero uno por ahí como profesor* [profesora] *quiere llegar y como que bueno, te terminás inclinando por la otra porque es como que preparás vos las clases y no…*

Martina: *O sea, yo creo que podés preparar una clase como si fuera un modelado pero es una forma de enseñar totalmente diferente a la que uno* [una] *está acostumbrado* [acostumbrada] *a escuchar, si bien ella como dice, no llegas con el plan de estudio yo creo que si vas asimilando los temas que vas dando, ¿sí?, para que los* [las] *chicos* [chicas] *empiecen a pensar los temas como si fueran modeladores* [modeladoras] *creo que los* [las] *haces pensar más que venir un día y escribir la definición de entrada y que después vengan y la repitan.*

Macarena: *Sí.*

Martina: *O sea, lo veo totalmente positivo desde el hecho de hacer pensar a alguien desde una idea hasta una definición general y lo veo, no sé, como negativo no le veo, o sea, que se yo, negativo…*

Victoria: *¿Vos ya habías dado clases Martina?*

Martina: *Sí, yo doy clases.*

Investigadora: *¿Yamila qué opinas?*

Yamila: *Lo mismo que las chicas, tiene más parte positiva que negativa, lo negativo puede ser eso que dijo Macarena no más, que el tratar que todo sea modelado que juegue en contra un poco el tiempo, nada más.*

Martina: *O también por ahí lo negativo es como si se va a dar algo nuevo puede ser que a los chicos no les guste. No les guste pensar, no se quieran tomar el tiempo de pensar, entonces rechacen y digan: ¡no, mejor escribíme la definición!*

Victoria: *Sí, eso te puede pasar. Incluso más de una vez acá en la facultad al principio se sienta esperando que te hagan eso.*

Investigadora: *¿En qué sentido?*

Victoria: *Que uno más de una vez al principio nos sentamos y decimos: Bueno decime como es la definición, escribíme la demostración.*

Macarena: *Sí, es verdad.*

Victoria: *Pero bueno, es un desafío como futura docente también que se yo.*

Macarena: *Sí es verdad, y que no te den todo servido en bandeja.*

Victoria: *Claro.*

Por un lado, al pensar aspectos positivos de la enseñanza apelando a MM las futuras profesoras destacan que: este tipo de metodología posibilita terminar de comprender el tema en estudio, realmente sirve para entender, es una forma de enseñar totalmente diferente a lo que se acostumbra y las/os estudiantes deben pensar mucho más que en otro tipo de vivencias educativas en las que repiten nociones matemáticas. Por otro lado, al considerar lo negativo enfatizan en el tiempo que demanda este trabajo cuando se quiere cumplimentar un programa preestablecido, específicamente Macarena destaca que la clase magistral (tradicional) la prepara el docente, por lo que el desarrollo en el aula es mucho más ágil. Esto se vincula con la toma de posición de un rol activo de los estudiantes que demanda mucho más tiempo al hacerlos “investigar” (como menciona Macarena) que si el/la profesor/a expone el tema.

Es de interés destacar que las futuras profesoras explicitan que otra cuestión negativa que podría pasar en el aula se vincula, quizás, con una negación por parte de las/os estudiantes de pensar e involucrarse en estos procesos. Al respecto, Victoria señala que incluso ellas en las asignaturas de matemática en una clase esperan que el/la docente explicite definiciones y demostraciones y que este tipo de vivencias diferentes también resulta un desafío para ellas como futuras docentes.

Estas consideraciones muestran, que quizás un mayor número de vivencias educativas en las que las futuras profesoras tomen un rol activo y produzcan ideas matemáticas pueden resultar positivas en pos de que en su posterior desarrollo como docentes coloquen en ese lugar a sus estudiantes, dado que como señala Larrosa (2003) la experiencia atraviesa y cobra sentido a medida que es vivida, cuestión que puede influir en el desarrollo de la identidad docente por parte de las integrantes del grupo. En la siguiente tabla exponemos algunas consideraciones que destacamos del análisis presentado.

TABLA 68 | *Red de sentidos en entrevista del grupo 3 (Fuente propia).*

PROCESO CON ENTRADA (ESTUDIANTES Y DOCENTES) Y SALIDA (DEFINICIÓN DE POLIEDRO - RESOLUCIÓN)

↓

PRODUCCIÓN DE DEFINICIONES INTERMEDIAS (MODIFICACIÓN)

↓

INTERACCIÓN Y TRABAJO COLABORATIVO DENTRO DEL AULA

↓

EXPERIMENTACIÓN MANIPULANDO CUERPOS, EXPLORANDO EN EL SOFTWARE Y BUSCANDO BIBLIOGRAFÍA

↓

TEMA/OBJETIVO: DEFINIR POLIEDRO

↓

DESARROLLO CÍCLICO DEL PROCESO

↓

POTENCIAL EN EL TRABAJO CON MM QUE DEMANDA MUCHO TIEMPO

Las estudiantes del grupo 3 focalizan en el proceso como tal, destacando que se configura a partir de diversas etapas. Reconocen explícitamente el subproceso de experimentación y dan cuenta que a partir del proceso se logra una definición de poliedro, especificando que el tema/objetivo es definir poliedro. A su vez, señalan que en el marco del proceso formulan definiciones intermedias, lo que da cuenta de la posibilidad de modificación de la producción y mejora en pos de lograr una definición que consideren más adecuada y que el experimentar e investigar se realiza varias veces en el marco del proceso, lo que muestra un reconocimiento del desarrollo cíclico del mismo.

La voz de Martina y los sentidos que ella atribuye a MM impregnan los sentidos de sus compañeras. No obstante, a partir de reflexiones colectivas y de repensar/reflexionar la vivencia, las estudiantes logran evocar sus propias ideas y palabras para luego producir sentidos a MM que van más allá de lo mencionado por Martina. De este modo, interpretan, repiensan y muestran que la experiencia producida por la vivencia transitada adquirió un carácter no pasajero.

Finalmente, al posicionarse como futuras docentes destacan como potencial esta metodología de enseñanza encontrándola diferente respecto a metodologías tradicionales en las que se llevan adelante clases magistrales, particularmente enfatizan en el hecho que hay que “pensar” y que en este caso “no te den [dan] todo servido en bandeja”, a pesar de destacar que lleva mucho tiempo para un/a docente que debe cumplir con las demandas que impone el currículum prescripto.

8.2. | REFLEXIONES CON RESPECTO A SENTIDOS PRODUCIDOS A MM LUEGO DE ATRAVESAR UNA VIVENCIA DE MM

Los resultados que reportamos en este capítulo reflejan que luego de vivir un escenario de MM completo, en el que las estudiantes atraviesan tres procesos de MM, cada grupo pone de relieve ciertos aspectos de este. Las integrantes del grupo 1 reconocen acciones que se vinculan con los subprocesos de experimentación, abstracción, resolución, validación y modificación, a pesar de no nombrarlos explícitamente, y enfatizan en: la búsqueda de información, la posibilidad de modificación de la producción y el aspecto cíclico del proceso de MM.

Las estudiantes del grupo 2 afirman que en la vivencia construyen/producen conocimientos (entre otros, definición de poliedro), reconocen acciones que pueden relacionarse con los subprocesos de experimentación, resolución, validación (destacan los momentos de debate colectivos como fundamentales para pensar, repensar y legitimar la producción) y modificación. A su vez, señalan el momento de formulación de problemas, y destacan que brinda la oportunidad de terminar de comprender el tema en estudio y preguntar/problematizar todas las inquietudes.

Finalmente, en la entrevista del grupo 3, las futuras profesoras focalizan en el proceso como tal, reconocen explícitamente el subproceso de experimentación, dan cuenta que a partir del proceso se logra una definición de poliedro (especificando que el tema/objetivo es definir poliedro), señalan acciones que pueden vincularse con la posibilidad de modificación de la producción y reconocen que el proceso se desarrolla cíclicamente.

De modo general, los tres grupos logran adaptarse en la entrevista y, en el marco de interacciones sociales recordar con reflexiones profundas la vivencia de MM atravesada en el curso de GEE. Cabe mencionar que cada grupo refleja ciertas particularidades. Específicamente, las integrantes del grupo 2 en general se posicionan como docentes, si bien en momentos logran reconocerse como productoras de matemática en el marco de la vivencia. Sin embargo, pareciera atravesarlas con fuerza el hecho de pensarse como futuras profesoras privilegiando lo didáctico. A su vez, en los grupos se hacen presentes algunas expresiones que muestran que la reflexión en torno al proceso de MM en sí mismo les permite apropiarse del mismo, por lo que el considerar la MM como contenido (Julie y Mudaly, 2007) en sí mismo parece ser positivo en el marco de la formación de futuras/os profesoras/es.

En los tres grupos encontramos un reconocimiento de acciones que pueden vincularse con el proceso de MM como abordaje pedagógico en el sentido que se toma en esta investigación. En general, parecería que la vivencia adquirió un carácter no pasajero para las futuras profesoras, la producción de sentidos por parte de estas estudiantes pone de manifiesto que los procesos de MM fueron comprendidos, aceptados y significativos. Incluso, las entrevistas realizadas un tiempo después de la vivencia educativa hacen evidente cómo la producción de sentidos por parte de estas estudiantes parece atravesar el tiempo y espacio en el que se lleva adelante la vivencia convirtiéndose la misma en una verdadera experiencia (Larrosa, 2003).

A MODO DE CIERRE DE LA CUARTA PARTE

A partir del análisis realizado, con relación a sentidos atribuidos a procesos de MM por parte de las futuras profesoras, observamos que cada persona puede otorgar diferente sentido en relación con las vivencias y/o experiencias que desarrolla y va desarrollando y el modo que la atraviesa. Además, es relevante que el sentido puede variar, como presentamos en el análisis realizado, sin embargo, destacamos que el mismo no satura.

Al reflexionar con respecto a sentidos atribuidos a MM, reconocemos en el análisis realizado, a partir de las voces de las estudiantes, cinco clases empíricas o tipos principales de sentidos vinculados con MM. Estos son MM como: adaptación, aplicación, ejemplificación, método de enseñanza y de aprendizaje y MM como abordaje pedagógico. A continuación, los describimos y ejemplificamos.

- Adaptación: Con este tipo nos referimos al empleo de diversos modelos dados o producidos en diferentes situaciones que se adaptan a nuevas realidades similares modificando variables, información, parámetros, etc. relativos a la situación considerada. En este caso, consideramos que no se conoce con certeza qué modelo (de los diversos disponibles para quien modeliza) se pondrá en juego ante un nuevo problema. Por ejemplo, en el grupo 3, las estudiantes refieren a este tipo de sentido cuando señalan: *Por ejemplo, vas a tener un problema similar y lo vas a poder resolver con lo mismo.* […] *Todos los temas, todos los problemas similares* […] *Los vas a resolver con la misma ecuación* […]. *En este caso quien adapta el modelo debe com-*

IF-2023-00267925-UNC-ME#FFYH

prometerse con un trabajo matemático de identificación de tipos de problemas, evocaciones de modelos y discernimiento a fin de emplear y adaptar un determinado modelo disponible al problema en juego.

- Aplicación: Este tipo se refiere a la utilización de modelos ya conocidos (aprendido/conocido en una clase o por otro medio) a una cierta situación nueva, inmediatamente después de conocer dicho modelo. Es decir, hacemos referencia a situaciones en las que después de estudiar un determinado modelo, este se aplica en diversos problemas que presentan variaciones mínimas en contenido, pero no en condiciones generales. Por ejemplo, el grupo 1, podría estar apelando a este tipo de sentido cuando afirma *"Ejemplos prácticos que requieran la aplicación de lo propuesto* [creado] *anteriormente"*. En este tipo de sentido se asume que quien se vincula con el trabajo matemático aplica un mismo modelo en problemas inmediatamente después de conocer dicho modelo.

- Ejemplificación: Este tipo de sentido se relaciona con la aplicación, puesto que, inmediatamente después de estudiar un modelo determinado, se puede otorgar un ejemplo en el que el mismo se utilice, en este caso hacemos referencia a situaciones donde es el/la docente o quien enseña quien proporciona el ejemplo. Por ejemplo, cuando el grupo 4 señala el análisis de un ejemplo práctico de *"La ley de Torricelli* […] *Que se vaciaba el cilindro, yo puedo decir, que el cilindro se vacía porque tiene un agujero abajo* […]*".* Pensamos que podría incluirse en este tipo de sentido si en la situación que se considera el ejemplo de apli-cación de Ley de Torricelli se aborda inmediatamente después de dar la ley, y este ejemplo, se proporcionaría por el/la docente. En este caso es un docente (o quien enseña) quien comunica y manipula matemáticamente las ideas, mientras que quien escucha o lee debe comprender el tema y aplicación en esa situación particular.

- Método de enseñanza y aprendizaje: En este tipo de sentido consideramos el empleo de aplicaciones, ejemplos y adaptaciones en las clases como herramientas que potencian la apropiación de un determinado conocimiento, es decir, vinculado con la MM como vehículo (Julie y Mudaly, 2007). Por ejemplo, cuando el grupo 2 señala *"Una madre lleva a cabo un proceso de modelización matemática, cuando intenta enseñarles a sus hijos* [hijas] *llevando los problemas a situaciones cotidianas".* Es decir, priorizar el empleo de determinados problemas cotidianos que pueden aportar a la reflexión, comprensión y uso de un contenido. Observamos que también se podría considerar en este tipo de sentido la MM como contenido a estudiar en sí mismo (Julie y Mudaly, 2007) que a su vez posibilita la emergencia de diversos conocimientos: matemáticos, tecnológicos, etc. Estas ideas se podrían vincular con ciertas afirmaciones que realizan las estudiantes en las entrevistas grupales, por ejemplo, cuando el grupo 3 afirma *"Po-*

dés preparar una clase como si fuera un modelado, pero es una forma de enseñar totalmente diferente a la que uno [una] *está acostumbrado* [acostumbrada] […], *para que los* [las] *chicos* [chicas] *empiecen a pensar los temas como si fueran modeladores* [modeladoras]".

- Proceso de MM como abordaje pedagógico: En este tipo de sentidos referenciamos a las situaciones en las que se promueve la puesta en juego de un escenario de MM que se focaliza, específicamente, en MM como abordaje pedagógico. Se vincula con la organización del trabajo matemático en clase en torno a los subprocesos que intervienen en un proceso de MM dando lugar a diversas actividades que caracterizan a la ciencia matemática, tales como, experimentar, validar, etc. Destacamos que este sentido es el que se busca promover en la vivencia del escenario de MM diseñado en esta investigación. A modo de ejemplo recuperamos la siguiente frase:

> *Sí, creo que esto acá del intercambio, la experimentación, esas cosas surgieron varias veces digamos, no fue que experimentamos, investigamos y ahí ya salió directamente es como que los pasamos varias veces por eso estaba…* […] *Claro, porque por ejemplo experimentábamos, sacábamos una conjetura y volvíamos a experimentar y te dabas cuenta que faltaba algo, es como que no fue algo rápido digamos.*

Además, el sentido producido a MM como abordaje pedagógico puede analizarse en relación con el reconocimiento de: tema, problema, los distintos subprocesos y las acciones que se vinculan con cada uno de estos últimos. Al analizar sentidos producidos a MM, también reconocemos como relevante estudiar si la persona que atribuye sentidos considera que el tema y problema/s, por ejemplo, pueden ser determinados por el estudiantado. También, el reconocer la puesta en juego de ideas que se vinculan con el desarrollo cíclico del proceso, la posibilidad de obtención y producción de datos e información, la diversidad de modos de validación, etc. Esto podría mostrar una atribución de sentido que se distingue de la resolución de problemas en sentido clásico, más próxima a los tipos reconocidos anteriormente (adaptación, aplicación y ejemplificación).

En el marco de los principales tipos de sentidos reportados anteriormente encontramos también que presentan ideas relacionadas con trabajos que priorizan contextos principalmente matemáticos, así como el desarrollo matemático (*e.g. Claro es lo mismo, no sé, como modelo para un cálculo de áreas, siempre que te dan las áreas negativas no hay áreas negativas*) y otras que enfatizan la puesta en juego de contextos vinculados con cuestiones externas a la matemática, cercanas a la vida cotidiana de la/el estudiante en relación con su propio espacio-temporal (e.g. *Cuando les enseño a mis alumnos que son de primaria, como cuando les decís cuando tu mamá te manda al kiosco y le pagas con tanto ¿cómo sabes cuánto…?*) u otras no tan cercanas (e.g. *Por ejemplo, para esto de que el tanque se vacía yo necesito saber también la gravedad*). Estas particularidades, también proporcionan información con respecto a los sentidos producidos en el ámbito del trabajo en aula. De este modo, las estudiantes parecen considerar ideas de Bassanezi (2002), pero a la vez logran recuperarlas y otorgarle sentido en el marco de sus trayectorias de formación.

Todas las ideas mencionadas anteriormente, puestas de manifiesto en las voces de las futuras profesoras nos han sido fundamentales para estudiar el sentido producido al escenario educativo vivido. Además, es relevante señalar que varias de las cuestiones mencionadas en este párrafo coinciden con algunas discusiones presentes en la literatura relativa a la MM en ámbitos educativos. Observamos que en el caso en estudio reportado, el sentido entra como una manera de articular vivencia y experiencia como elemento de motivación, de guía de las acciones (Guzmán Gómez y Saucedo Ramos, 2015).

De modo general, lo informado en esta parte, recupera voces de las futuras profesoras que ponen en evidencia variaciones en las atribuciones de sentidos a procesos de modelización matemática al vivir una experiencia educativa donde estos mismos procesos se ponen en juego. Tales variaciones se van configurando y reconfigurando a lo largo de diferentes momentos del trabajo en aula en complemento con distintas actividades de MM propuestas en la vivencia educativa.

Específicamente, en el análisis de las narrativas individuales apreciamos el modo en que cada estudiante recupera y dota de sentido la vivencia colectiva que transmuta luego en experiencia personal. Observamos que, el hecho de vivir la experiencia de transitar por un proceso de MM les otorga la oportunidad de apropiarse del mismo, reconociendo las acciones realizadas en cada subproceso. Notamos, tal como menciona Britzman (2003) cómo la experiencia vivida involucra la capacidad de cargarla de sentido, reflexionar y actuar.

Tal como se menciona, las voces y con ello el sentido sobre el proceso de MM varían, a su vez, interesa señalar que también las narraciones (orales o escritas) varían y se reconfiguran como medio para reflexionar, relatar y representar la experiencia (Carter, 1993). De manera similar, al repensar la complejidad del trabajo de MM vivido en los distintos momentos y describirlo oralmente o en forma escrita, las futuras profesoras expresan conocimientos relativos a lo matemático o al proceso de MM mismo. Primero se expresan en interacciones orales que ponen en juego perspectivas, saberes y/o vivencias individuales que luego se reúnen en un escrito que condensa las ideas de todas las integrantes del grupo (Da Ponte et al., 2003).

En términos generales, se puntualiza que con lo reportado evidenciamos un trabajo con futuras profesoras en matemática en el que se pone en juego un proceso de MM en el que se trabaja con referentes empíricos tangibles, privilegiando una actividad de naturaleza intramatemática. Tal decisión y desafío, se toma a fin de introducir la MM en un curso de matemática en un ámbito de una universidad que instala ciertas restricciones propias a fin de dar cuenta de demandas externas a la propia institución. En proyección, también evidenciamos estas consideraciones en las voces de las futuras profesoras en el marco de las entrevistas. Todos los grupos dejan evidencia explícita en la que dan cuenta de la demanda importante de tiempo que requiere el trabajo con MM en el aula y ponen de manifiesto la necesidad de docentes formadas/os que puedan acompañar y actuar como guías en el desarrollo de estos procesos, esto es destacarían al docente como puente para tal proceso (Lewis, 2021). Estas ideas, ponen de relieve dos cuestiones: por un lado, la aparente necesidad de un cambio curricular si se incorpora esta metodología en el aula. Por otro lado, la necesidad de que en asignaturas de matemática específica en carreras de formación docente se discutan cuestiones educativas considerando el desarrollo profesional futuro, dado que, claramente, es insuficiente la discusión educativa en unas pocas materias de didáctica y práctica. En sinergia con los aportes de Larrosa (2003) destacamos que, al ser personas de experiencia, en ocasiones, tendemos a reproducir lo que vivimos, por lo que la inclusión de discusiones y actividades en torno a MM en la formación docente puede redundar en una inserción mayor a la actual en la escuela secundaria acorde a los actuales requerimientos presentes en Diseños Curriculares de diversas jurisdicciones de Argentina.

QUINTA PARTE

SENTIDOS Y VALIDACIÓN EN EL ESCENARIO DE MM

SENTIDOS Y VALIDACIÓN EN EL ESCENARIO DE MM

Los diferentes procesos que hemos hecho que nos han ayudado a validar de una u otra manera, o sea, ya sea por el software, por la manipulación de los elementos, por los diferentes conceptos que hemos tenido de diferentes bibliografías y hemos llegado a algo. No sé si eso sería… ¡sí!, es una forma de validar.
(Yamila, 2018, entrevista grupal)

En esta parte de la tesis abordamos el segundo y tercer objetivo de investigación, a saber: 2 - estudiar atribución de sentidos por parte de futuras profesoras a procesos de validación al vivir escenarios educativos de MM y 3 - analizar modos de validación que emergen del trabajo matemático de futuras profesoras al vivir escenarios educativos de MM.

Para avanzar en la concreción de tales objetivos, en los capítulos 9 y 10 analizamos la información que nos permite focalizar en el primero de ellos. En el capítulo 11, realizamos lo propio con el segundo. Sin embargo, dado que estos objetivos se configuran en torno a la noción de validación, es preciso reconocer que los avances y resultados obtenidos en los capítulos 9 y 10 ofrecen pistas para interpretar los resultados del capítulo 11.

Es importante destacar que en los capítulos 9 y 10 apelamos a la misma información producida en el trabajo de campo que en la parte 4 para realizar el análisis, por lo que la presentación de análisis y resultados se desarrolla de modo similar a la parte 4. Finalmente, presentamos las categorías que guían el estudio y conclusiones vinculadas con ambos objetivos.

CAP IX

RECUPERAR SENTIDOS PRODUCIDOS A VALIDACIÓN PARA REFLEXIONAR LO NUEVO

9.1. | INTRODUCCIÓN

En este capítulo avanzamos con el estudio sobre los primeros sentidos atribuidos a la validación o a los procesos de validación por parte de las futuras profesoras. Para dar cuenta de esto recuperamos información producida en el momento 1, en tanto, analizamos la información producida en los momentos 3 y 6 en el capítulo 10.

Con el fin de recuperar ideas que ofrecen elementos para reconocer e interpretar las atribuciones de sentidos por parte de las futuras profesoras, analizamos en primer lugar las primeras narrativas en las que las futuras profesoras dan cuenta de qué piensan o que ideas tienen acerca de procesos de validación y las transcripciones de audio que se generan en el marco de producción de las mismas. En segundo lugar, analizamos las narrativas en las que interpretan sobre estos procesos luego de leer e interpretar aportes de Bassanezi (2002) en los que se describe el proceso de MM y específicamente, el subproceso de validación en el marco de dicho proceso, y la caracterización de procesos de validación propuesta por Balacheff (2000), también analizamos las transcripciones de los debates que se producen al interior de cada grupo. Además, presentamos breves consideraciones, a partir de transcripciones registradas en audio y video del momento en aula en el que comparten sus producciones con todo el curso.

En este capítulo se hacen presentes las voces que participan del momento 1 (Ver tabla 20). Como se explica en la parte 4, los objetos materiales que sintetizan las ideas y atribuciones de sentido de los cuatro grupos durante el momento 1 se corresponden con sus narrativas. Esas narrativas provienen de un fructífero intercambio entre las integrantes de cada grupo.

Para realizar el análisis de la información que reportamos en este capítulo intercalamos fragmentos de voces o narraciones de las futuras profesoras, registros elaborados en el trabajo de campo con interpretaciones y análisis de los mismos, tal como mencionamos en el capítulo 5.

Tenemos en cuenta inicialmente como principales categorías analíticas los sentidos vinculados con la validación euclidiana (Reid y Knipping, 2010), la validación en el sentido de

Lakatos (1986) y el lugar otorgado a la acción de conjeturar en el marco de la validación y la descripción de pruebas empíricas e intelectuales de Balacheff (2000).

Al analizar las expresiones escritas u orales de las estudiantes sobre validación, observamos que estas remiten a términos y expresiones tanto de Balacheff (2000) como de Bassanezi (2002). De este modo a fin de facilitar la comprensión de nuestros análisis, a continuación, recuperamos la siguiente cita del trabajo de Balacheff:

> Utilizaremos la palabra razonamiento para designar la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información. Le asignaremos el término procesos de validación a esta misma actividad cuando tenga como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración) (Balacheff, 2000, p.13).

Con respecto a validación en el marco de la MM, la caracterización presentada por las investigadoras tomando aportes de Bassanezi (2002) conlleva una comparación entre la solución obtenida en la resolución del modelo matemático y los datos reales u otra información disponible. Es un proceso de decisión de aceptación o no del modelo inicial. El grado de aproximación deseado será un factor preponderante en la decisión.

Cabe mencionar que en el marco del análisis hacemos referencia a las expresiones “información o datos disponibles” e “información o datos emergentes”. En el primer caso consideramos disponible en el sentido de la Real Academia Española que hace referencia a una cosa que se puede disponer libremente de ella o que está lista para usarse o utilizarse. (Real Academia Española, s.f.). En el marco del escenario educativo de MM consideramos que la información disponible, en general, se conforma por las imágenes de figuras tridimensionales dadas tanto en imágenes como en material manipulativo, pues están dadas (por investigadoras y docentes) y no requieren ser buscadas por las futuras profesoras. Esto es la disponibilidad es inmediata. En el segundo caso, consideramos datos o informaciones emergentes empleados/as durante momentos de validación aquellos/as que se generan en el marco del escenario de MM. Esto implica que surgen durante el proceso de modelización propiamente dicho o en momentos de reflexión sobre lo que se va haciendo. Es decir, estos datos o informaciones no son provistos/as por las docentes o las investigadoras. Pueden ser definiciones buscadas en libros o en Internet, imágenes producidas en software, buscadas en Internet u otras, etc. Cabe mencionar que empleamos el significado figurativo del término emergente. En síntesis, los datos o informaciones emergentes son provistos por las propias futuras profesoras a fin de encontrar respuestas a sus interrogantes y no se producen por evocaciones de conocimientos ya estudiados.

9.1.1. | GRUPO 1 - NARRATIVA 1: FORMULACIÓN DE CONJETURAS Y DEMOSTRACIÓN EUCLIDIANA

Las futuras profesoras que constituyen el grupo 1 comienzan la reflexión con respecto a procesos de validación en torno a dos actividades que, como señala Hanna (2020) se consideran centrales en el trabajo matemático. Eugenia afirma *"Para mí sería una vez que encontraste algo"*, Marina interrumpe *"Como que hiciste algo, representar, que te lo acepten"* y Eugenia ratifica esto. Sin embargo, Ailén agrega *"Mediante una demostración, esas cosas"*, lo que nuevamente es reafirmado por Eugenia. Observamos que hacen referencia a acciones que pueden vincularse con las actividades de conjeturar (Hanna, 2020) y demostrar (Reid y Knipping, 2010). Observamos consideraciones relacionadas con la primera acción en el empleo de términos como encontrar o hacer "algo", lo que creemos que se vincula con la formulación de conjeturas, y la segunda con aceptar, posiblemente dichas conjeturas, a través de demostraciones.

Posteriormente, siguen con otras preguntas y hablando de diversos temas, sin embargo, al regresar a esta idea mantienen una coherencia al interior del discurso, puesto que Ailén afirma *"¿Qué entienden por proceso de validación?, ¿qué habíamos dicho? ¡Ah!, lo de demostrar, comprobar eso que creaste".* Idea que es acordada por sus compañeras a través de diversos términos y/o expresiones, por ejemplo: demostrar, comprobar, comprobar que es cierto, que es válido. En el marco de estas ideas surge la discusión en relación con la generalización, Ailén afirma *"Sería demostrar de manera general para todos* [todas]" y Marina aclara *"Sí claro, como demostramos las cosas nosotras digamos, las propiedades y esas cosas"*. Consideramos que estas ideas podrían vincularse con formas o modos de probar del estilo de Euclides, entendiendo que de este modo la demostración realizada es válida en la comunidad matemática y adoptando una estructura que implica comenzar con el enunciado de un/a teorema/propiedad y concluir con una demostración (Reid y Knipping, 2010).

Ailén pregunta con respecto al modo en que se podrían comprobar los axiomas, entre todas reconocen que los mismos son aceptados. Sin embargo, Larisa y Marina ponen de manifiesto ejemplos que consideramos se encuentran en relación con el primer axioma del libro "Curso de Geometría Métrica" de Puig Adam (1980), a saber: "Reconocemos la existencia de infinitos entes llamados «puntos»[43], cuyo conjunto llamaremos «espacio»" (p. 4). Larisa señala "[…] *Para mi viene sobre el estudio del átomo ponele, para demostrar que en el espacio hay puntos* […]. *Está formado por puntos que esos vendrían a ser los átomos, bueno después los átomos adentro tienen electrones"*. Mientras, Marina toma actitud crítica con el ejemplo anterior

[43] Las comillas se presentan de este modo en el texto original.

por considerar que los puntos no tienen dimensión y ejemplifica *"Yo lo hubiera pensado de una computadora y píxeles en el monitor. Pero los puntos no tienen nada, son puntos".* Ailén muestra perplejidad por los ejemplos de sus compañeras. Sin embargo, consideramos que estas ideas pueden buscar la comprensión de los axiomas a partir de un paralelismo con una realidad conocida y visible. Estos sentidos, podrían vincularse con la aceptación de axiomas a partir de pruebas empíricas (Balacheff, 2000), de comparar con la realidad, a pesar de que el grupo no hace explicita esta consideración.

En línea con lo mencionado anteriormente, observamos que quizás las futuras profesoras consideran, en general, el conocimiento geométrico como un conocimiento que da cuenta de algunas realidades o "mundos" (e.g. los átomos y los píxeles de computadora). Se trata de asumir que los objetos matemáticos resultan de representar ciertas realidades, en sinergia con lo mencionado por Bunge (1974). Pues, este autor afirma que cada teoría específica es, de hecho, un modelo matemático de una parte de la realidad.

Regresan a la narrativa y retoman lo tratado inicialmente, debaten el uso del término propuesto o creado con respecto a lo que se valida, decidiendo finalmente emplear este último término. Inmediatamente, Marina afirma *"Hay que demostrar"* y Larisa agrega *"Aplicando las leyes lógicas"*, finalmente deciden emplear el término *"Verificación"*, sin fundamentar tal decisión.

Continúan la discusión en relación con el dominio de validez de las afirmaciones, Marina explica *"Que es válido porque si vos creás algo que no es para todos vas a poner: no para todos. Digamos vas a especificar lo que hacés"*. Ailén agrega que deben añadir en la narrativa que la verificación se realiza con una demostración, y Larisa responde *"¿Aplicando las leyes lógicas?"*. Ailén no acepta la propuesta de Larisa, y afirma *"Pero en cálculo no demostramos todo con leyes lógicas"*. Quizás se debe a que en cálculo no hacen explícita la presentación desde los axiomas con el estilo típico de prueba de Euclides (Reid y Knipping, 2010), aunque si lo hacen en geometría. Además, observamos que el empleo de la afirmación *"crear algo"* podría vincularse con la acción de formular conjeturas, puesto que luego hacen referencia a que ese *"algo"* se debería demostrar y en general, en su trayectoria profesional (Vezub, 2008) en la carrera Profesorado en Matemática suelen demostrar teoremas, propiedades, conjeturas, etc.

Discuten en relación con estas afirmaciones, Larisa explica *"Por eso si la estructura está bien hecha de lo que hiciste. Porque vos podés poner cualesquiera dos premisas y concluís algo que nada que ver"*, refiere a la coherencia entre hipótesis y tesis en una propiedad o teorema, Eugenia agrega *"Claro, pero para mí a través de una demostración, y la demostración en general engloba todo"*. Estas afirmaciones las llevan a reflexionar con respecto a la importancia de la escritura que se debería emplear en la conjetura/propiedad/teorema y demostración.

como medio de comunicación, hacen referencia, por ejemplo, a libros que resultan más o menos entendibles por su presentación y claridad.

Luego, se acerca la Profesora Laura al grupo de estudiantes y Marina le explica "[…] *Un enunciado que se entienda digamos, que no sea tan rebuscado. Yo lo digo porque, por ejemplo, vos lees un libro y por ahí no lo entendés y capaz lo encontrás en otro y está mejor escrito, ponele capaz es la misma propiedad, pero enunciada diferente. O que no tenga cosas de sobra o que falten* […] *Que sobre no importa, pero si falta"*. Entre dichas afirmaciones de la estudiante la profesora ratifica lo dicho, sin embargo, frente a la última afirmación pregunta *"¿No importa si sobran?, ¿qué hago si las tengo con esas que me sobran?, ¿las dejo a un costado, no sé para que las tengo?"*. Las estudiantes se ríen sin dar respuesta y la profesora se retira del grupo.

Las futuras profesoras vuelven a la producción de la narrativa. En este momento, nuevamente, surge la inquietud con respecto a qué deberían validar en matemática. Marina, al hablar de la validación señala *"A través de una demostración. Porque lo único sería el axioma, porque las otras cosas las demostrás a todas, va, no sé a una definición"*. Eugenia responde *"No, porque ponele eso ahí pusimos definición, pero ahí significaría inventar una definición"* y se genera el siguiente intercambio:

> Ailén: *Es que para mí sí, puede venir alguno un día e inventar otra letra del abecedario, vos podés decir cómo se puede poner uno a inventar otra letra del abecedario* […]
>
> Marina: *Ponele vos decís, ¿qué es un cuadrado? Vos respondes que es un cuadrilátero, yo te digo que no, que es la unión de dos rayas así, o sea ponele de dos rectas así y la intersección de los semiplanos de rectas… yo te digo eso y viste como el triángulo que decían en geometría, bueno y vos con triángulo decís que capaz un cuadrilátero que tiene una base, una altura, capaz decís así, perdón un triángulo. Capaz inventás una así, mezclando…*
>
> Ailén: *Bueno, pero también tenés que demostrar.*
>
> Eugenia: *Claro, tampoco podés inventar cualquier cosa.*

Estas líneas de ideas resultan interesantes en la presente investigación, puesto que uno de los objetivos se vincula con la producción de definiciones. En este sentido, destacamos que al validar las estudiantes encuentran que toda afirmación en matemática se debería demostrar, a excepción de axiomas. Incluso, pareciera que tienen dudas con respecto al lugar de la validación en el contexto de un trabajo matemático en el que se producen definiciones, consideración que no logran aclarar. Sin embargo, las frases nos invitan a reflexionar que quizás, nunca han tenido vivencias y/o experiencias en sus trayectorias de formación (Vezub, 2008) para producir definiciones o al menos alguna que puedan evocar. Finalmente, presentan la siguiente narrativa.

TABLA 69 | *Narrativa 1 Grupo 1 (Fuente propia).*

Por proceso de validación entendemos que es la verificación de que lo que se creo es válido a través de una demostración.

Del análisis realizado consideramos que se ponen en juego algunas cuestiones enlazadas con énfasis que sintetizamos a través de la siguiente tabla.

TABLA 70 | *Red de sentidos atribuidos a procesos de validación en la interacción del grupo 1 al realizar la narrativa 1 (Fuente propia).*

CREACIÓN Y DEMOSTRACIÓN

↓

DEMOSTRACIÓN EUCLIDIANA

↓

AXIOMAS VALIDADOS EMPÍRICAMENTE

↓

DOMINIO DE VALIDEZ Y ESCRITURA FORMAL

↓

VALIDACIÓN EN DEFINICIONES

Del análisis realizado encontramos que el sentido otorgado a validación por parte del grupo se vincula, principalmente, con la idea de demostración en el sentido de Euclides. Además, como grupo proponen la idea de creación, lo que encontramos relacionado con la formulación de conjeturas y resulta relevante, dado que, por ejemplo, en Lakatos (1986) en la perspectiva de pruebas y refutaciones el establecimiento de conjeturas forma parte de la validación. Sin embargo, al hablar de creación referencian que lo creado debería ser verdadero al admitir una demostración.

Focalizan en los modos adecuados de escribir afirmaciones matemáticas apelando a un lenguaje que resulte comprensible y en el dominio de validez de dichas definiciones. Estas acciones también se vinculan con el establecimiento de conjeturas. Finalmente, resulta relevante que como grupo consideran que la validación es una parte fundamental de la matemática, pues, se pone en escena la necesidad de validar todos los objetos matemáticos, incluso, axiomas y definiciones.

9.1.2. | GRUPO 1 - NARRATIVA 2: INVESTIGADOR/A QUE RAZONA Y COMPARA

Del análisis realizado en el capítulo 6 al focalizar en los sentidos atribuidos a MM en este momento observamos que el grupo de futuras profesoras se sorprende frente a la afirmación "grado de aproximación deseada" que se emplea en la descripción del subproceso de validación (Bassanezi, 2002) y enfatizan que consideraban (en sus sentidos iniciales) que la validación la realizaba una persona externa a quien está modelizando.

Luego de reflexionar con respecto al proceso de MM leen la caracterización de validación de Balacheff (2000). Eugenia, inmediatamente capta su atención y focaliza en el término "*eventualmente*" presente en la caracterización de procesos de validación y aclara *"Una prueba o una demostración. Igual dice eventualmente, o sea como que no siempre".*

Marina se ofrece a leer la caracterización de Balacheff (2000) por explicitar que no la comprende. En el marco de dicha lectura afirma *"Es decir, tenés la información y producís nueva.* […] *O sea, razonamiento y proceso de validación es lo mismo"* y Eugenia añade *"Yo pensé como que, como que acá lo toma como que vos mismo lo hacés…"*. Las estudiantes focalizan en ciertas ideas que captan su atención, ponen en escena dos consideraciones que mantienen presentes durante la producción de la narrativa, la posibilidad de producir información y que quien investiga valida.

Ailén, busca relaciones entre los sentidos iniciales y las perspectivas de los autores. Afirma *"Éste* [Hace referencia a Bassanezi] *se va más a lo que dijimos nosotros, es como que compara la solución obtenida con datos reales. Y es como si acepta o no el modelo que propuso, mientras éste* [Hace referencia a Balacheff] es como que… […]. *Llama validación a la actividad que tiene por fin asegurarse de la validez de una proposición",* Larisa agrega *"Hacer la comparación entre la solución y los datos* [Hace referencia a Bassanezi]*"* y Ailén señala *"Y además va a ser verificar una proposición para producir una explicación. Mediante una prueba o una demostración también es bien matemático* [Hace referencia a Balacheff]". Encuentran relación entre la perspectiva de Balacheff (2000) y la propia por hacer referencia a la prueba y demostración. Posiblemente, al referenciar comparación entre solución y datos no ven reflejada la prueba pragmática como objeto de validación empírica. Esta línea de ideas puede vincularse con el reconocimiento de formas de probar del estilo de presentación euclidiana (Reid y Knipping, 2010).

Al comenzar con la narrativa Larisa retoma la idea inicial *"En ambos casos es decisión de uno mismo* [una misma] *que investiga, la validación de lo propuesto. Es decisión del* [de la] *que investiga…"*. Eugenia agrega *"A través de un razonamiento interno sería"*, y Ailén *"A través de un razonamiento y a través de la comparación entre los datos obtenidos y los datos reales"*. En el intento de interpretar y sintetizar las perspectivas encuentran algunos puntos en común, por ejemplo, que el/la investigador/a es quien valida a través de razonamiento interno y comparación entre el modelo obtenido y los datos reales, esta última cuestión es propuesta por ellas en el marco de un proceso dialógico/multilógico que se focaliza en un tema que las interpela/moviliza. Así con las ideas de autores y el intercambio entre ellas van atribuyendo sentidos (Bajtín, 2000). Continúan produciendo la narrativa sin añadir nuevas ideas, presentando, la siguiente.

TABLA 71 | *Narrativa 2 Grupo 1 (Fuente propia).*

Según ambos autores es decisión del investigador [de la investigadora]*, a través de un razonamiento interno y la comparación entre la solución obtenida del modelo y los datos reales, si el nuevo modelo es el adecuado o no.*

Presentamos a través de la siguiente tabla sintéticamente ideas que se enfatizan y enlazan en las voces de las futuras profesoras.

TABLA 72 | *Red de sentidos atribuidos a procesos de validación en la interacción del grupo 1 al realizar la narrativa 2 (Fuente propia).*

INVESTIGADOR/A QUE VALIDA

↓

PRUEBA Y DEMOSTRACIÓN

↓

RAZONAMIENTO INTERIOR

↓

COMPARACIÓN ENTRE MODELO Y DATOS REALES

Para el grupo resulta relevante el hecho de que ambos autores realizan consideraciones que se vinculan con que la persona que valida es quien se encuentra investigando, posiblemente, quien conjetura y/o modeliza.

En un primer momento, encuentran vínculos entre sus sentidos iniciales y la idea de prueba o demostración propuesta por Balacheff (2000). Sin embargo, en un segundo momento al producir la narrativa no lo tienen en cuenta, focalizan en la idea de razonamiento (considerándolo interno y posiblemente poniendo de manifiesto la necesidad de un diálogo interior que busca dar sentido a los razonamientos que se van realizando) y en ideas vinculadas con validación en el marco de la MM.

9.1.3. | GRUPO 1 - PRESENTACIÓN DE PRODUCCIÓN A LA COMUNIDAD DE PRÁCTICA

La intervención por parte del grupo es sintética. Marina afirma *"Bueno nosotras* [a] *la primera parte* [se refiere a la narrativa inicial, ver sección 9.1.1.] *como que la vimos de otra manera porque como que nosotras creamos algo, o sea, como que teníamos algo y probábamos su veracidad digamos con una demostración, pero ya sabíamos que estaba bien, digamos era para demostrar, como una demostración por ejemplo o algo de eso. Como que no pensábamos que era rever con lo que teníamos, ver otras cosas".* Focalizan en la posibilidad que otorga la perspectiva de los autores en relación con la modificación de la producción matemática, a diferencia de sus sentidos iniciales en los que parecía que la conjetura establecida no se podía modificar, sino que se debía demostrar. La profesora les pregunta qué diferencia encuentran entre los aportes de los autores y Ailén responde *"La diferencia es que nosotras suponíamos que lo que demostrábamos estaba bien, que no lo volvíamos a analizar a ver si había alguna diferencia, para rever lo que habíamos propuesto, y esa es la diferencia para nosotras".*

Estas breves intervenciones enfatizan en sentidos iniciales vinculados con la validación realizada a partir de demostraciones de afirmaciones correctas (no modificables) y sentidos posteriores a la lectura en los que parecería se pueden emplear validaciones empíricas y modificar las conjeturas, afirmaciones, modelos, etc.

9.1.4. | GRUPO 2 - NARRATIVA 1: VALIDACIÓN ORGANIZADA EN CIERTOS PASOS EN LOS QUE SE RECURE A CONCEPTOS Y HERRAMIENTAS VALIDADAS PREVIAMENTE

Al reflexionar con respecto a procesos de validación, Micaela inmediatamente afirma *"Validación es como validar, es algo, es como dar algo como válido. Cuando algo es válido"* y Dianela agrega *"Es verdadero"*. Tales ideas son compartidas y acatadas por todas las integrantes que toman en consideración el hacer verdadero, eliminando, quizás, la opción de refutación dentro de la validación.

Dianela se detiene en la expresión proceso de validación, consideración que lleva a Guillermina a vincular la expresión procesos con la frase *"Dar pasos"*. El grupo focaliza en la escritura de la narrativa. Valentina afirma *"El proceso que lleve al resultado correcto, o sea, que lleve a obtener lo que se está buscando"* y Dianela señala *"Mediante el empleo de diferentes herramientas válidas se llega a la demostración"*. Así, surge la idea de validación a través de demostración. A su vez, como grupo, referencian en diversas oportunidades que hablar de procesos se vincula con establecer pasos.

Avanzan en la línea mencionada. Micaela ejemplifica el motivo por el cual al referenciar procesos se deben tener en consideración pasos afirmando *"Para obtener el resultado válido digamos. Porque proceso es una serie de pasos, ¿no? El proceso de levantarse, qué hacemos, bueno abrís los ojos, te levantás de la cama"*. Valentina, en el intento de avanzar en la producción de la narrativa va tomando nota y pregunta, *"¿Son todos aquellos pasos o procesos?"* Y Micaela responde *"Pasos a seguir, va creo"*. Esta última afirmación es debatida por el grupo, que considera que no es adecuado hablar de pasos a seguir, puesto que de este modo se piensa en un único proceso. A modo de ejemplo Valentina expresa *"No son todos aquellos pasos utilizados porque no necesitás seguir, como dijo ella* [creemos que refiere a la Profesora Laura] *para demostrar algo no siempre lo vamos a hacer todos de la misma manera. Son los pasos que nosotras utilizamos para llegar a demostrar correctamente lo que nosotras queremos, llegar a obtener el resultado que nosotras queremos sería"*.

Guillermina agrega *"O para llevar a cabo una demostración de…"*, la estudiante es interrumpida por Micaela que señala *"No sé si demostración, porque dice en el trabajo matemático.* […] *En una de esas no estoy haciendo una demostración.* […] *Al resultado deseado, o sea lo que nosotros queremos hacer"*. En el marco de dichas ideas Dianela acata, afirmando *"No, si es verdad por ejemplo una ecuación"*. Consideramos que como grupo encuentran que una opción para validar resultados obtenidos, posiblemente propiedades y/o teoremas, es emplear la demostración. Sin embargo, la polifonía de voces (Bajtín, 2000) como motor las hace avanzar e ir convirtiendo ideas propias individuales en una voz del grupo que las represente y, redunda en una mirada más amplia que reconoce la posibilidad de modos de validación utilizados, por ejemplo, durante la resolución de una ecuación.

Posteriormente, Dianela propone agregar otra consideración, *"Yo pondría algo de que* [...] *en ese proceso se van utilizando…"* y se lleva a cabo el siguiente diálogo:

> Micaela: *Las herramientas que dijimos anteriores.*
>
> Dianela: *Herramientas válidas. Herramientas...*
>
> Guillermina: *Contenid… eh no, conceptos, propiedades.*
>
> Valentina: *Se vuelcan, es como que deberíamos volcar todos esos conocimientos.* [...] Todos aquellos, aprendidos.
>
> Dianela: *Y herramientas. Y ya validadas con anterioridad, porque no vas a utilizar algo que no es válido porque te quita el proceso válido.*

Estas ideas parecen encontrarse en relación con modos de probar del estilo de Euclides, en las que para validar una conjetura se emplean las propiedades validadas anteriormente y los conceptos disponibles. A su vez, también estas ideas pueden encontrarse en relación con la presentación, por parte de la Profesora Laura, de la asignatura en relación con el método axiomático deductivo. De los intercambios presentados y analizados surge la siguiente narrativa.

TABLA 73 | *Narrativa 1 Grupo 2 (Fuente propia).*

Lo que entendemos por "proceso de validación" [el empleo de comillas se toma textual del original] *en instancias del trabajo matemático, son todos aquellos pasos utilizados para lograr llegar al resultado válido. En estos pasos se vuelcan todos aquellos conocimientos y herramientas adquiridas y ya validadas con anterioridad.*

En los intercambios con el fin de producir la narrativa las estudiantes enfatizan y enlazan ciertas líneas de ideas que recuperamos en la siguiente tabla.

TABLA 74 | *Red de sentidos atribuidos a procesos de validación en la interacción del grupo 2 al realizar la narrativa 1 (Fuente propia).*

HACER VERDADERO ALGO
↓
PASOS/PROCESO
↓
DEMOSTRACIÓN
↓
EMPLEO DE CONOCIMIENTO Y HERRAMIENTAS VALIDADAS

Observamos que el grupo se concentra en la consigna y en la búsqueda de dar una respuesta produciendo la narrativa y desarrollando ideas linealmente. Enfatizan en la idea de que al validar se establece la verdad de una afirmación (u otra/o similar) sin hacer explícita la opción de que al validar se refute la producción (como se propone en el Diseño Curricular de la Provincia de Santa Fe para Ciclo Básico de la Educación Secundaria, 2014).

A su vez, consideran que, al hablar en la consigna de proceso, se hace referencia a llevar adelante ciertos pasos, pero que no necesariamente se encuentran preestablecidos. Esta última consideración puede vincularse con una perspectiva por parte de las estudiantes que otorga la oportunidad a quien valida de producir un proceso de validación y que no necesariamente deberá reproducir, por ejemplo, una demostración. A su vez, evidencian que para validar deberían emplear conocimientos disponibles o herramientas validadas, alejándose quizás así, de la puesta en juego de validaciones más empíricas y priorizando el trabajo vinculado con pruebas intelectuales en el sentido de Balacheff (2000).

9.1.5. | GRUPO 2 - NARRATIVA 2: INFORMACIÓN QUE SURGE DEL PROCESO DE VALIDACIÓN O VALIDACIÓN DE SOLUCIONES

El grupo 2, en el marco de interpretación de los aportes de Bassanezi (2002) en relación con MM, al referenciar el subproceso de validación focaliza en la acción de comparar el modelo y la información, es decir, en modos de validar pragmáticos (Balacheff, 2000).

Al leer los aportes de Balacheff (2000) Guillermina interviene *"Claro tiene razón, es asegurar algo para producir una explicación. No, yo lo diría al revés, producir una explicación para…* [posiblemente refiera a asegurar algo]". En dicha afirmación la futura profesora hace referencia a un reconocimiento de presentación de la matemática que, posiblemente, se vincula con el estilo de prueba euclidiana, donde se presenta un teorema o propiedad y luego la prueba (Reid y Knipping, 2010).

Posteriormente, como grupo interactúan poniendo de manifiesto la falta de comprensión del motivo por el cual se introduce la consigna con respecto a MM y validación en el marco del curso GEE. Esta consideración, puede deberse a falta de vivencias y/o experiencias educativas en las que en cursos de matemática se introducen discusiones vinculadas principalmente a la Didáctica de la Matemática y a lo que será el futuro desarrollo profesional.

El grupo vuelve a leer cada una de las caracterizaciones de validación entregadas y realiza aportes en relación con sus interpretaciones buscando puntos de encuentro y desencuentro. Dianela afirma *"Bueno en esta habla de manipular la información* [Refiere a Balacheff] *y en esa habla de comparar* […]. *Pero este habla de comparación entre soluciones* [Refiere a Bassanezi]". Micaela agrega *"Proceso de decisión de aceptación* [Refiere a Bassanezi], *y acá dice razonamiento, o sea como que le asignan el término de proceso de validación a razonamiento* [Refiere a Balacheff]". Luego Dianela realiza un significativo aporte que es recuperado por sus compañeras:

> Dianela: *Acá habla de validación cuando ya tenés una solución* [Refiere a Balacheff]. […] *Una posible solución y acá habla ya primero de la información. Como que este proceso de validación lo empieza antes no cuando ya tenés una posible solución.* […] *Pero a la vez dice también dice que asegurarse la validez de una proposición que sería también que cuando tenés una solución* [Refiere a Bassanezi].

Las estudiantes hacen una comparación minuciosa en la que van teniendo en cuenta ciertos términos comunes o que vinculan, como ser, información, comparación/manipulación, solución/proposición. Observamos que ponen en juego ciertas acciones vinculadas con el desarrollo del conocimiento interpretativo, como ser, interpretar, dar sentido, análisis de producciones diversas, etc. (Mellone et al., 2020).

Con las ideas anteriores y la voz predominante de Dianela avanzan en la producción de la narrativa. Guillermina señala *"La* […] *validación vendría a ser un proceso que empieza cuando se recibe la información"*, Dianela responde:

> *No, que para mí podemos decir como que la validación, no es la palabra, pero* [...] *desde que se toma la información hasta que se obtiene una solución, una explicación.* [...] *No solamente cuando se tiene una solución.* [...] *La validación es el proceso que abarca...* [...] *Desde el momento en que se adquiere la información para producir una nueva información.*

Valentina toma nota y va repreguntando en la búsqueda de avanzar en la escritura de la narrativa. Las ideas anteriores muestran que, al cotejar las caracterizaciones de los autores, parecería que enfatizan en la idea de considerar el proceso de validación desde la formulación de modelos o conjeturas (Lakatos, 1986). Incluso, la posibilidad de que emerjan nuevas nociones en el marco del propio proceso de validación.

Posteriormente, agregan dos consideraciones. Micaela señala *"Y se la manipula, o sea, como que a esa información se la manipula para obtener, para producir nueva información* [...]*. Es decir, que el proceso de validación comienza antes de lo que dice éste* [Refiere a Balacheff]*, antes de obtener la solución analítica o numérica"*. Es decir, enfatizan en la manipulación de información y en la idea de que el proceso de validación para Balacheff (2000) comienza con la manipulación de información, lo que consideran previo a lo planteado por Bassanezi (2002), pues este último habla de validar un modelo producido. A partir de los debates anteriores presentan la siguiente narrativa.

TABLA 75 I *Narrativa 2 Grupo 2 (Fuente propia).*

La validación es un proceso que abarca desde al momento en que se adquiere la información, se la manipula para así llegar a la producción de nueva información, es decir, el proceso de validación comienza para Balacheff antes del de Basanezzi que plantea su utilización una vez obtenida una posible solución analítica o numérica.

Las estudiantes enfatizan y enlazan las siguientes ideas que recuperamos sintéticamente a continuación.

TABLA 76 | *Red de sentidos atribuidos a procesos de validación en la interacción del grupo 2 al realizar la narrativa 2 (Fuente propia).*

PRESENTACIÓN EUCLIDIANA
↓
INFORMACIÓN, COMPARACIÓN/MANIPULACIÓN, SOLUCIÓN/PROPOSICIÓN
↓
PROCESO DE VALIDACIÓN COMO MEDIO DEL QUE EMERGE INFORMACIÓN

El grupo, al igual que en el caso anterior, se focaliza en la producción de la narrativa de un modo lineal. Observamos que, en un primer lugar, ciertas afirmaciones se vinculan con modos de presentación euclidiana de la matemática. A medida que avanzan, en un segundo lugar, explicitan la posibilidad de que el proceso de validación incluya la formulación de conjeturas o incluso que en el marco del mismo se produzca información al tomar aportes de Balacheff (2000) o considerando aportes de Bassanezi (2002) focalizan en la validación de una solución.

Consideramos relevante también la comparación que realizan entre los aportes de ambos autores encontrando que en uno se compara información y en el otro se manipula y que en uno se habla de solución y en el otro de proposición, cuestión que podría vincularse con la posibilidad de que estas estudiantes consideren que una proposición podría configurar el modelo que da respuesta a una problemática.

9.1.6. | GRUPO 2 - PRESENTACIÓN DE PRODUCCIÓN A LA COMUNIDAD DE PRÁCTICA

El grupo dos en el debate colectivo explica brevemente lo considerado en las narrativas. La profesora les pregunta qué pensaron con respecto a validación y las intervenciones resultan breves. Se desarrolla el siguiente intercambio:

> Micaela: *Tomamos proceso como una serie de pasos que se utilizan para llegar a un resultado válido, entonces…*
>
> Dianela: *Mediante el empleo de conocimientos y herramientas que se van adquiriendo.*
>
> Micaela: *Y vimos que el autor Balacheff dice manipulación de información y no-*

sotras, ¿cómo era?

Dianela: *Lo relacionamos con las herramientas y el conocimiento.*

Micaela: *Con las herramientas y el conocimiento.*

Profesora Laura: *¿O sea que ustedes consideran, digamos, que lo que ustedes pensaban que es validación coincide en alguna medida con lo que dice Balacheff?*

Micaela: *Balacheff, sí.*

De la presentación realizada por las futuras profesoras del grupo dos no encontramos evidencia que nos permita avanzar en los resultados, pues, observamos que se limitan a reproducir oralmente lo escrito.

9.1.7. | GRUPO 3 - NARRATIVA 1: VERACIDAD Y DEMOSTRACIÓN O FALSEDAD Y CONTRAEJEMPLO

En el inicio del intercambio al interior del grupo 3 en relación con procesos de validación Macarena señala *"Para mí ver si una proposición es verdadera o falsa, me parece que eso de demostrarlo o dar un contraejemplo, o sea ver si una proposición es válida o no"* y Yamila agrega *"Claro, el análisis y la investigación"*. Las primeras afirmaciones ponen de manifiesto la posibilidad de refutar una afirmación en consonancia con lo planteado, por ejemplo, por los Diseños Curriculares de la Educación Secundaria (2014) de la provincia de Santa Fe. A su vez, consideramos que el término investigación introducido por Yamila, puede vincularse con la atribución de sentidos amplios en relación con validación.

Paula pone a prueba lo mencionado, preguntando *"¿Pero ahí entra la demostración para vos?"*, Macarena responde *"No, porque si es falsa, o sea, das un contraejemplo"* y Paula nuevamente cuestiona *"Por ejemplo si yo en geometría hago algo en GeoGebra y me doy cuenta de que, bueno eso es verdadero…"*. Esta afirmación realizada por Paula es aceptada por todas las integrantes del grupo que señalan que en ese caso se tiene una validación. La perspectiva del grupo permite ampliar los sentidos iniciales, observamos que se podrían tener diversas pruebas, pragmáticas o intelectuales (Balacheff, 2000), realizadas con medios digitales, en las que no se aplique estrictamente el modo de proceder típico de una demostración en sentido euclidiano (Reid y Knipping, 2010).

En relación con estas ideas comienzan la escritura de la narrativa. Yamila dicta *"Por procesos de validación en instancias de trabajo matemático se entiende el análisis… Dale que se me acaban las ideas también… en instancias de trabajo matemático se entiende el análisis"*, y Macarena agrega *"De proposiciones, es decir, verificar si son verdaderas o falsas"*. Macarena en todo momento se posiciona como líder del grupo, tal es así que sus primeras ideas con respecto a verdad o falsedad forman parte de la narrativa. Incluso, el resto de las integrantes le realizan preguntas para que ella tome la iniciativa y determinación de las respuestas. Por ejemplo, Agostina pregunta *"¿Son solamente proposiciones lo que se valida?"* y Macarena señala *"Sí, las conjeturas, proposiciones, son lo mismo. Sí, una afirmación digamos y ver si es verdadera o falsa. En caso de que sean ciertas se las demuestran de lo contrario…",* y Agostina interrumpe *"Y en caso contrario se desarrollará un contraejemplo"*. Es importante señalar que estas ideas se pueden vincular con el trabajo tradicional con proposiciones que puede desarrollarse en el aula de matemática, en donde las afirmaciones resultan verdaderas (se demuestran) o falsas (se determina un contraejemplo).

Posteriormente, Macarena señala una nueva idea:

> *Capaz que también sea, viste cuando buscás algo, encontrar no sé, que se yo, viste como hacen los físicos, buscan alguna ley que describa algo en particular y citaste ciertas hipótesis y como que querés demostrarlo te das cuenta que faltan cosas, bueno para mí cuando tenés que ver qué es lo que tenés que agregar, qué es lo que falta, si faltan hipótesis, que se yo, capaz que eso también forma parte de ese proceso.*

El resto de las participantes no cuestiona sustancialmente esa idea. Sin embargo, con aportes de todas hacen referencia a que en ese caso se debe modificar, agregando o quitando condiciones con el fin de lograr la veracidad de la afirmación. En el marco de este debate y de analizar cómo agregarlo en la narrativa, Macarena deja explícito que para ella la acción de modificar es parte del proceso de validación. Estos pensamientos pueden mostrar, quizás, algunos rasgos de los procesos de pruebas y refutaciones desde la perspectiva de Lakatos (1986). A su vez, destacamos que en las prácticas de GEE hay consignas en las que se deben analizar afirmaciones en pos de determinar su veracidad o falsedad y, en el último caso, se propone agregar hipótesis para lograr que la misma sea verdadera, lo que también puede encontrarse relacionado con lo mencionado por Macarena (estudiante que ha cursado más de una vez la asignatura GEE). Finalmente, a partir del intercambio grupal, producen la siguiente narrativa.

TABLA 77 | *Narrativa 1 Grupo 3 (Fuente propia).*

Por procesos de validación en instancias del trabajo matemático se entiende el análisis de proposiciones para refutar o afirmar la veracidad de las mismas. En caso de ser válidas se demostrarán y en caso contrario se desarrollará un contraejemplo.

Las estudiantes enfatizan y enlazan las siguientes ideas que recuperamos sintéticamente a continuación.

TABLA 78 | *Red de sentidos atribuidos a procesos de validación en la interacción del grupo 3 al realizar la narrativa 1 (Fuente propia).*

VERACIDAD O FALSEDAD

↓

DEMOSTRACIÓN O CONTRAEJEMPLO

↓

VALIDACIONES DIVERSAS (PRAGMÁTICAS O INTELECTUALES)

↓

MODIFICACIÓN DE AFIRMACIONES

Las futuras profesoras en la narrativa enfatizan en la acción de analizar la veracidad o falsedad de una determinada proposición, incluso, explicitan que para establecer la verdad de una proposición se haría mediante una demostración, en caso contrario, se recurre a un contraejemplo. Desde esta perspectiva, encontramos que posiblemente focalicen en proposiciones de carácter universal, pues no se puede refutar con un contraejemplo una de carácter existencial.

Enfatizamos en algunas consideraciones del análisis a pesar de que no las hacen evidente en la narrativa. Debaten al interior del grupo la posibilidad de utilizar, por ejemplo un software, lo que podría habilitar el establecimiento o descubrimiento de conjeturas con el mismo y el empleo de diversidad de pruebas, tanto pragmáticas o como intelectuales. Finalmente, resulta relevante el hecho que señalan que en el marco de los procesos de validación se pueden producir modificaciones en las proposiciones.

9.1.8. | GRUPO 3 - NARRATIVA 2: VERIFICACIÓN EN MM Y VALIDACIÓN

Al interpretar los aportes de Bassanezi (2002) y producir la narrativa en relación con procesos de MM las estudiantes ponen de manifiesto que les capta la atención el hecho de que la validación forme parte del proceso de MM y que es un subproceso necesario de ser llevado adelante al modelizar para analizar si el modelo presenta error o grandes diferencias con respecto al problema al que responde.

Posteriormente, Agostina se retira. Al leer la caracterización de procesos de validación de Balacheff (2000), Paula rápidamente señala *"Esta es más parecida a lo que nosotras escribimos* [...]. *Así que pensamos como Balacheff",* Macarena añade *"*[...] *Esta es como comparar la solución con la vida real digamos, con lo que pasa en la vida real"* y Paula nuevamente interviene afirmando *"Si se adapta a lo que estabas buscando, algo así. Para mí esto es más como la verificación de un problema, cuando vos encontrás por ejemplo el valor de la x, ver si verifica o no la ecuación"*. En estas primeras ideas observamos que las estudiantes vinculan la comparación que se propone en la MM, entre el modelo producido y los datos e información con una verificación, encontrando diferencias con relación a lo que consideran validación, posiblemente relacionado con la idea de demostración.

Las estudiantes avanzan en torno a estas mismas ideas y se sostiene el siguiente diálogo:

> Macarena: *Para mí implica, bueno, una vez que conjeturaste ver si es verdad o no es verdad y ver como se adapta, o sea, eso tendría que ver con una cuestión de adaptación digamos, ver si se adapta a la vida real digamos, o lo que sea, ¿entendés? Es como que son las dos cosas.*
>
> Paula: *Me cuesta relacionarlos.* [...] *Este* [Hace referencia a Bassanezi] *lo tomo más para resolución de problemas y este* [Hace referencia a Balacheff] *para demostrar. Más teórico, por eso me cuesta relacionarlos* [...].

Prosiguen en la producción de la narrativa. Buscan responder a la consigna sin debatir ideas, sino que se focalizan en avanzar retomando las perspectivas de cada una. Yamila afirma *"Implica el razonamiento, ¿de los resultados?"* y Macarena explica *"Para mí implica de alguna manera verificar que el resultado que obtuviste o la conjetura, la conclusión que obtuviste es aplicable...* [...] *Implica verificar que la conclusión obtenida se adecua a lo que está ocurriendo en la vida real"*. Destacamos que Macarena emplea el término conjetura y hace referencia a la acción de obtener la misma. Además, a Paula le produce inquietud lo señalado, porque considera que están limitando la respuesta a los aportes de Bassanezi (2002), de este modo *yo digo que es algo como que es razonable, el resultado que llegas o la verificación"*, y Macarena añade *"Implica verificar que la conclusión obtenida es lógica"*.

A partir de estos intercambios producen la siguiente narrativa.

TABLA 79 | *Narrativa 2 Grupo 3 (Fuente propia).*

Según las lecturas a Bassanezi y Balacheff podemos entender que un proceso de validación en el ámbito del trabajo matemático implica verificar que la conclusión obtenida pueda encontrar fundamentos razonables o lógicos.

Las estudiantes enfatizan y enlazan las siguientes ideas que recuperamos sintéticamente a continuación.

TABLA 80 | *Red de sentidos atribuidos a procesos de validación en la interacción del grupo 3 al realizar la narrativa 2 (Fuente propia).*

VALIDACIÓN EN MM

↓

VERIFICACIÓN

↓

CONJETURAR

↓

VALIDACIÓN Y RAZONAMIENTO

Las futuras profesoras se sorprenden con respecto a la propuesta de considerar el proceso de validación en el marco de la MM (Bassanezi, 2002). Posteriormente surgen ideas, tales como: vincular la verificación a la MM, quizás haciendo referencia a validaciones empíricas, dar cuenta de la posibilidad de verificar y relacionar la validación en el sentido de Balacheff con la acción de razonar, posiblemente remitiendo a pruebas intelectuales o demostraciones.

9.1.9. GRUPO 3 - PRESENTACIÓN DE PRODUCCIÓN A LA COMUNIDAD DE PRÁCTICA

En la presentación Yamila señala que pensaron de la misma manera que el grupo 4 (presenta previamente su producción) y enfatiza en que las afirmaciones válidas se deben demostrar y que las falsas se refutan con un contraejemplo.

Macarena agrega que la caracterización de Balacheff se aproxima a lo que consideran y que, en realidad, en Bassanezi (2002) *"Como que tenés que llegar de alguna manera a un resultado y compararlo con lo de la vida real o no sé cómo explicarlo.* [...] *Si tiene sentido más que nada lo que concluiste"*. Finalmente destaca *"Apuntábamos más a bueno, conjeturar y bueno, después ver si eso es cierto o no* [...]".

Nuevamente ponen en escena que encuentran vínculos entre los sentidos iniciales propios y lo propuesto en Balacheff (2000). Resultado, quizás, más alejado del trabajo de Bassanezi donde pareciera predominar la validación empírica, sin embargo, hacen evidente la necesidad de contextualizar el resultado.

9.1.10. GRUPO 4 - NARRATIVA 1: ACEPTACIÓN Y REFUTACIÓN COMO PARTES DE PROCESOS DE VALIDACIÓN

El grupo 4 comienza la reflexión en torno a procesos de MM con una intervención de Ludmila que señala *"Yo lo veo como qué validez tiene lo que nosotros creemos verdad, o no sé, me hace acordar a la verificación en las ecuaciones. No sé si es validar. ¿Validar es decir que algo tiene verdad?"* y Victoria pregunta *"¿Justificar?"*. El grupo continúa poniendo a prueba constantemente las ideas propias y ajenas. Esta primera afirmación realizada por Ludmila vincula la validación con la acción de verificar, sin embargo, la intervención breve de Victoria abre el hilo de ideas hacia otro punto. Ludmila afirma:

> *Por qué decimos que esto es verdad, y, por qué esto no lo es. O, por qué esto se puede decir acá y no lo dije antes* [...]. *Y validar quiere decir también, o sea, como los axiomas que ninguno se contradice. Tienen reglas que esa verdad no contradiga ninguna otra verdad, eso también tendríamos que poner, porque sería parte de justificar. Pensá, vos estás haciendo algo en matemática, ¿qué hace que lo que vos hacés sea verdad?, ¿qué lo hace...*

Tanto Victoria como Pablo aceptan estas ideas de Ludmila y hacen referencia a dos términos que resultarían fundamentales al pensar en el trabajo matemático, validar y justificar.

Observamos que la primera idea puede considerar como parte de la validación el aceptar o refutar una afirmación. Además, las posteriores consideraciones se relacionan con el modo de presentación euclidiana en el que a partir de axiomas se van estableciendo proposiciones y justificando (Reid y Knipping, 2010). Cabe mencionar que lo mencionado por Ludmila, también, se relaciona con la presentación realizada por la docente al inicio de la clase para explicar la modalidad de trabajo que se lleva a cabo en la asignatura GEE.

Luego, comienzan a escribir la narrativa. Victoria señala *"No siempre es como reafirmar el error, sino también encontrar un contraejemplo que te da que eso no se cumple"* y Ludmila añade *"Sí, pero al contraejemplo lo encontrás si lo demostraste para todos. Si vos decís para algunas cosas pasa esto, no te basta con un contraejemplo. Tenés una demostración que hacer* […]. *Deja de ser verdad cuando demostraste una inconsistencia"*. La primera afirmación realizada por Victoria podría vincularse con no focalizar en la búsqueda de errores que se manifiestan, por ejemplo, en una conjetura o demostración. Sin embargo, entra en juego la idea de refutación. Victoria parece focalizar en la búsqueda de contraejemplos por tomar proposiciones de carácter universal, a diferencia de Ludmila que plantea que también se puede refutar empleando otros métodos, considerando, posiblemente, proposiciones no universales.

Victoria añade *"Vos decís, pensás algo… che, ¿y será que si pasa esto entonces pasa esto? Y no decís, encontrás un ejemplo que no"*. Prosiguen con la producción de la narrativa. Ludmila resume las ideas anteriores con el fin de avanzar en la escritura afirmando *"Y justamente eso es el proceso de validación, lo que vos estás diciendo. Si cuando nosotros encontramos algo que contradice lo que decimos que es verdad es que hay un error"*. Y Pablo añade *"*[…] *Es aquel proceso mediante el cual nosotros le damos validez, legitimidad a ciertos enunciados* […]. *A ciertas proposiciones"*. La idea de Victoria se relaciona con la actividad de conjeturar. Incluso, los intercambios al interior del grupo podrían mostrar alguna aproximación o rasgos del proceso de pruebas y refutaciones en el sentido de Lakatos (1986).

Ludmila pone a prueba lo planteado por Pablo, preguntando *"¿Qué significa legitimidad para ustedes?", el estudiante responde "Hacer verdadero.* […] *Haciendo teorías o enunciados* […]. *Consiste en ser justificado sin contradecir las proposiciones anteriores"*. Nuevamente, surgen ideas que se vinculan con el desarrollo de nociones matemáticas que no contradigan lo ya aceptado, posiblemente, siguiendo la presentación euclidiana (Reid y Knipping, 2010).

Continúan en esa línea de ideas. Pablo señala *"Justifico la teoría…* […] *A través de los argumentos, de los axiomas, de los…"*, Ludmila pregunta *"¿Argumentos serían axiomas por ejemplo?, ¿sí?"*. Es decir, consideran que para validar pueden emplear axiomas, definiciones, teoremas, etc., que constituyen las nociones matemáticas ya aceptadas.

Luego, retoman la idea relacionada con refutación de afirmaciones. Afirman que no deben presentar contradicciones y, finalmente, Pablo afirma: *"Si es verdadera es porque está demostrada"*. A partir de estos intercambios producen la siguiente narrativa.

TABLA 81 | *Narrativa 1 Grupo 4 (Fuente propia).*

> *Entendemos por proceso de validación aquel mediante el cual podemos otorgar legitimidad a cierta teoría o enunciado. Durante este proceso, la justificación de la teoría se realiza a través de un conjunto de argumentos (axiomas, teoremas demostrados, definiciones) o es descartada, al encontrar un contraejemplo o contradicción con una proposición ya verdadera.*

El grupo enfatiza y enlaza las siguientes consideraciones que recuperamos a continuación sintéticamente.

TABLA 82 | *Red de sentidos atribuidos a procesos de validación en la interacción del grupo 4 al realizar la narrativa 1 (Fuente propia).*

VERIFICACIÓN

↓

ACEPTACIÓN O REFUTACIÓN

↓

FORMULACIÓN DE CONJETURAS

↓

JUSTIFICACIÓN Y USO DE ARGUMENTOS

El grupo avanza en la producción de la narrativa focalizando en diversas cuestiones y poniendo a prueba las afirmaciones que van realizando cada una/o.

Los primeros sentidos vinculan la actividad de verificar con la de validar, sin embargo, estas ideas se amplían a partir de la interacción y los aportes de las diferentes voces (Bajtín, 2000). Emergen con énfasis las ideas de aceptar y refutar, considerando que la primera se realiza apelando a pruebas intelectuales en el sentido de Balacheff (2000) y que la refutación puede realizarse a través de contraejemplos o contradicción de proposiciones válidas. Finalmente, señalan que en la justificación que se lleva adelante en el marco de la validación se recurre a axiomas, definiciones, teoremas, etc. ya aceptados en esa teoría, mostrando así, una perspectiva de validación que se vincula con el modo de presentar el método axiomático por Euclides (Reid y Knipping, 2010).

9.1.11. | GRUPO 4 - NARRATIVA 2: COMPARAR Y RAZONAR EN LA VALIDACIÓN DE MODELOS

Al reflexionar con respecto a MM a partir de la lectura de Bassanezi (2002) el grupo muestra impacto con respecto a considerar que la validación forma parte del proceso de MM. Sin embargo, al avanzar en el análisis enfatizan que la validación del modelo obtenido es necesario para determinar si es posible aplicarlo en momentos posteriores.

Al leer los aportes de Balacheff (2000) se encuentran presentes Victoria y Ludmila, dado que Pablo se retiró. La primera aseveración que realiza Ludmila es *"El proceso de validación tiene que ver con el razonamiento"*. Luego, afirman que lo que dice el autor es lo mismo que escribieron en la narrativa donde ponían de manifiesto sus sentidos (Ver tabla 81), sin embargo, en la búsqueda de producir una narrativa empiezan a repensar algunas consideraciones.

Victoria afirma *"Bueno creo que es más que con el tema analizado, con los datos que vos sacás de la realidad* [Hace referencia a Bassanezi]*"* y Ludmila, focalizando en Balacheff (2000) señala *"¿Validar solamente es razonar?"*, es decir, vuelve al primer término, que parecería la atraviesa, al leer la caracterización propuesta por el autor. Con el fin de avanzar en la escritura, Victoria señala *"Estoy como sacando los verbos, como haciéndome el esquema mental de que es una, de lo que dice…"*.

Las estudiantes van tomando ideas de cada una de las caracterizaciones de los autores. Ludmila señala *"Razonar es manipular información… La información que manipulamos son los datos experimentales. Y la nueva información sería, ¿qué?, ¿el modelo?"* y Victoria responde:

> *Sí, eso es la nueva información que producís. Pero todo este proceso que hacés tiene un fin después, sobre que ese modelo es válido y hacer una explicación, entonces tenés que pensar en lo que puede llegar a ser o no ser.*

En la afirmación, Victoria hace evidente la posibilidad de producir matemática a partir de encontrar el modelo que dé respuesta al problema. Luego, Ludmila hace referencia a la comparación que se podría llevar adelante para validar en los procesos de MM y señala *“Yo para aclarar que es concordar con los datos experimentales. Que sea coherente, que sea verdadero que realmente eso nos lleve a lo que realmente queremos llegar.”* En esta línea de ideas, las estudiantes deciden emplear, tomando aportes de ambos autores, dos verbos que se vincularían con acciones a realizar al validar: razonar y comparar. Posteriormente, leen la narrativa producida y Victoria manifiesta dudas con respecto a la misma, pero finalmente, no propone cambios.

TABLA 83 | *Narrativa 2 Grupo 4 (Fuente propia).*

Validar significa razonar y comparar si lo que se propone como modelo otorga resultados que concuerdan con los datos experimentales, es decir, resultados coherentes y verdaderos. Validar es decidir si el modelo es aplicable o no, y en el primer caso elaborar una explicación (demostración) sobre este.

El grupo enfatiza y enlaza las siguientes consideraciones que recuperamos a continuación sintéticamente.

TABLA 84 | *Red de sentidos atribuidos a procesos de validación en la interacción del grupo 4 al realizar la narrativa 2 (Fuente propia).*

VALIDACIÓN COMO SUBPROCESO DEL PROCESO DE MM

↓

DEMOSTRACIÓN

↓

RAZONAR

↓

COMPARAR

Las futuras profesoras manifiestan desconcierto por la presencia del subproceso de validación como una parte de la MM y encuentran una relación estrecha entre la caracterización de Balacheff (2000) y la idea inicial que tenían de lo que implica validar. A su vez, encontramos que siguen haciendo referencia a la demostración como un medio eficaz para afirmar un determinado modelo o proposición, predominando de este modo el posible trabajo con pruebas intelectuales (Balacheff, 2000).

Finalmente, destacamos que enfatizan en los términos razonar y comparar empleados por los autores, por vincularlos, posiblemente con acciones necesarias a realizar para validar.

9.1.12. | GRUPO 4 - PRESENTACIÓN DE PRODUCCIÓN A LA COMUNIDAD DE PRÁCTICA

Al presentar a toda la clase lo realizado solo habla Ludmila, explicando la idea puesta en juego al interior del grupo:

> *Nosotros teníamos, o sea, la idea que teníamos de validación es bastante similar a lo que proponen los autores habíamos puesto que es el proceso en el que nosotros otorgamos legitimidad a cierta teoría o enunciado que estamos proponiendo, y durante ese proceso decimos bueno, tiene que haber una justificación con cosas, con contenidos que ya sabemos, con argumentos, axiomas, teoremas o definiciones, o esto puede ser descartado porque encontramos algún contraejemplo o encontramos alguna contradicción con algo que ya sabemos que es verdad, habíamos puesto eso en el proceso de validación. Y entendemos que es más o menos lo mismo que proponen los autores porque ellos dicen bueno, es un razonamiento, y este razonar me dice si el modelo que estoy proponiendo me da el resultado que yo espero, digamos sería ese razonar, ese comparar entre los datos experimentales que yo obtuve y los datos que el modelo otorga digamos y ver si esos datos son parecidos es porque el modelo es bueno y si no es parecido es porque hay que modificarlo o cambiar de camino.*

La futura profesora focaliza en la producción realizada en el primer momento y al cotejarla con lo analizado en función de la lectura enfatiza en la acción de razonar. Es relevante destacar que Ludmila desde el primer momento en que lee la caracterización de Balacheff (2000) focaliza en esta idea otorgando sentido así al resto del escrito.

A su vez, encuentran diferencias entre los aportes de los autores en el sentido en que en uno se propone razonar como acción fundamental y en el otro comparar. Parece que como grupo lo resuelven considerando que un modo de razonar es a través de la comparación, abriendo quizás en la última afirmación la posibilidad de la puesta en juego de pruebas pragmáticas (Bassanezi, 2002; Balacheff, 2000).

9.2. | REFLEXIONES CON RESPECTO A SENTIDOS PREVIOS Y EN TORNO A INTERPRETACIONES DE LECTURAS EN LO QUE RESPECTA A VALIDACIÓN

A partir del análisis realizado observamos que las futuras profesoras del grupo reconocen la validación en el marco del trabajo matemático focalizando en ciertas cuestiones.

De modo sintético el grupo 1 focaliza en un primer momento en la validación que se realiza recurriendo a una demostración en el sentido de Euclides, enfatizando, entre otros, la necesidad de emplear lenguaje adecuado matemáticamente para establecer afirmaciones. Al analizar las caracterizaciones dadas focalizan en que la persona que valida es quien investiga, encuentran vínculos entre los sentidos iniciales y los aportes de Balacheff (2000) y enfatizan en la acción de razonar y en ideas vinculadas con validación en el marco de la MM.

Observamos que el grupo 2 considera la validación como medio para establecer una afirmación, hacen referencia al empleo de conocimientos disponibles y propiedades demostradas previamente para lograr producir, lo que consideramos, pruebas intelectuales en el sentido de Balacheff (2000). Luego de leer los autores remiten a ciertos modos de presentación euclidianos de la matemática, señalan la posibilidad de que el proceso de validación incluya la formulación de conjeturas o incluso que en el marco del mismo se produzca información, enfatizan en las acciones de comparar y manipular información y señalan que se puede obtener una solución o proposición.

Las estudiantes que conforman el grupo 3 inicialmente hacen referencia a la posibilidad de emplear una demostración para establecer la veracidad de una afirmación o un contraejemplo para mostrar su falsedad, debaten acerca de la formulación y validación de conjeturas empleando un software y señalan que en el marco de los procesos de validación se pueden producir modificaciones en las proposiciones. Luego de leer los aportes de los autores se sorprenden con respecto a la propuesta de considerar el proceso de validación en el marco de la MM y la vinculan con la verificación, a diferencia de las ideas en juego en el marco de leer a Balacheff, que focalizan en la acción de razonar.

El grupo 4 en un primer momento vincula la actividad de verificar con la de validar, en un segundo momento las estudiantes focalizan en el aceptar empleando pruebas intelectuales (Balacheff, 2000) y refutar utilizando contraejemplos o fundamentando con contradicción de proposiciones válidas. Finalmente, enfatizan en la validación vinculada con el modo de presentar el método axiomático por Euclides (Reid y Knipping, 2010). Luego de leer a los autores, manifiestan desconcierto por la presencia del subproceso de validación como una parte de la MM, encuentran relación estrecha entre la caracterización de Balacheff (2000) y sus ideas iniciales, enfatizan en el razonar y comparar como acciones fundamentales al validar.

Encontramos que los primeros dos grupos refieren inicialmente a la validación como medio para aceptar una afirmación y los grupos 3 y 4 enfatizan en la posibilidad de aceptar o refutar. A su vez, observamos que solo el grupo 3 inicialmente realiza afirmaciones explícitas que podrían vincularse con la puesta en juego de diversos tipos de validaciones, entre ellos, las pruebas pragmáticas (Balacheff, 2000).

Señalamos que encontramos cambios en los sentidos iniciales y en las interpretaciones realizadas luego de leer los autores. A pesar de esto, parecería que en general no ponen en escena diversos modos de validar que se encuentran alejados de las demostraciones que acostumbran a realizar.

Finalmente, consideramos que el lugar preponderante otorgado por todos los grupos a las pruebas intelectuales (Balacheff, 2000) y a las demostraciones en el sentido euclidiano (Reid y Knipping, 2010) podrían encontrarse influencias por ser estudiantes avanzadas de Profesorado en Matemática y estar acostumbradas a recurrir a estos modos de validación en las diferentes asignaturas en su trayectoria profesional (Vezub, 2008), por la presentación realizada por la docente del curso o por encontrarse en un curso de GEE en el que las demostraciones se realizan siguiendo el método euclidiano (Reid y Knipping, 2010).

CAP X

VOCES CON RELACIÓN A VALIDACIÓN LUEGO DE VIVIR EL ESCENARIO EDUCATIVO

10.1. | INTRODUCCIÓN

En este capítulo avanzamos en los sentidos atribuidos a validación por parte de las futuras profesoras luego de vivir los momentos 2, 4 y 5 (Ver tabla 17) en los que desarrollan procesos de MM.

En primer lugar, presentamos resultados del estudio de las narrativas individuales que realizan luego de vivir el primer proceso de MM (momento 2). En el capítulo 7 al estudiar sentidos atribuidos a MM presentamos las producciones vinculadas a validación (Ver tablas 43, 53 y 61), entre otros. En este capítulo revisitamos el análisis realizado con el fin de profundizarlo y avanzar con reflexiones, presentamos el mismo organizado por grupos de modo análogo a lo realizado en el capítulo 7.

En segundo lugar, avanzamos con los resultados obtenidos de las tres entrevistas grupales. Estas entrevistas se llevan adelante luego de que las futuras profesoras viven los procesos de MM que se desarrollan en los momentos 2, 4 y 5 (Ver tabla 17).

Para el análisis si bien tenemos en consideración las principales categorías analíticas empleadas en el capítulo 9, focalizamos en algunas particularidades que presenta la validación en el marco de la MM, puesto que en lo analizado se recuperan acciones llevadas adelante en el escenario de MM. Es por esto que también tenemos en cuenta, entre otros, los aportes de Blum (2007) y Blum y Leiß (2006); Hankeln, (2020), entre otros autores presentados en la segunda parte, sección 3.1.

También, buscamos identificar modos de validación que surgen en las voces de las futuras profesoras, teniendo en cuenta las consideraciones realizadas en la sección 3.1.4. a saber: comparación entre el modelo y los datos o informaciones disponibles o emergentes durante el proceso de MM, empleo de conocimientos matemáticos disponibles o emergentes (propiedades, teoremas, definiciones), demostraciones y/o pruebas diversas, contraste con hipótesis formuladas en el marco del desarrollo del proceso de modelización, utilización de conocimientos de distinta índole derivados de la experiencia personal o compartida, empleo de conocimientos propios de áreas no matemáticas como ser historia, artes, economía, física, religión, política, etc. Finalmente, reconocemos si hacen referencia a validación de resultados, modelos y/o supuestos, atendiendo a los aportes de Hankeln (2020).

10.1.1. | VALIDACIÓN EN NARRATIVAS INDIVIDUALES: COMPARACIONES CON DATOS, INFORMACIÓN Y LO SOCIAL COMO ASPECTOS FUNDAMENTALES AL VALIDAR

En el capítulo 7 al estudiar sentidos atribuidos a MM a partir de la información obtenida de las narrativas individuales, avanzamos con los sentidos producidos a validación. En esta sección presentamos un resumen de lo obtenido en: 7.1.1. (análisis del grupo 1), 7.1.2. (análisis del grupo 2) y 7.1.3. (análisis del grupo 3) (información en tablas: 43, 53 y 61) y presentamos resultados en relación con los sentidos atribuidos a la validación en dichas narrativas individuales.

Considerando que transitar un proceso implica tomar acciones a fin de lograr el objetivo que motiva el propio proceso, destacamos sentidos que implican acciones puestas en juego durante el subproceso de validación de un modelo propuesto o durante el avance en la producción de un modelo. En los sentidos atribuidos por las estudiantes se consideran con prevalencia tres acciones. Una de ellas se vincula con buscar definiciones u otra información relevante en textos u otros medios a fin de cotejar parcial o totalmente el trabajo realizado o el modelo que se propone. Otra de ellas lleva a contrastar el modelo producido con información ya disponible o creada durante el proceso de MM, a fin de comparar con la realidad y eventualmente encontrar un contraejemplo para analizar cuan generalizable es el modelo. Y, por último, dialogar acerca de propuestas y/o refutaciones que emergen al interior del grupo, reflexionar y llegar a un consenso a fin de validar el modelo. En los tres casos se fueron haciendo uso de saberes matemáticos, no-matemáticos y/o experiencial.

A continuación, recuperamos voces que nos informan de cada uno de los tres tipos de acciones relativas al proceso de validación. En todos los casos se cita el nombre de una estudiante y entre paréntesis el grupo de pertenencia.

- Buscar definiciones u otra información relevante en textos u otros medios. A modo de ejemplo recuperamos que Eugenia (Grupo 1) señala *"Buscamos en distintos libros o en Internet definiciones de poliedros y las fuimos comparando con la nuestra"*. A su vez, Dianela (Grupo 2) afirma *"Incorporamos más datos experimentales lo que genera modificaciones en la posible definición establecida anteriormente, luego de pasar por un proceso de validación"* y Macarena (Grupo 3) menciona *"Miramos la definición en el libro de cátedra y comparamos la misma con* *la que teníamos armada"*. En los ejemplos, observamos en las voces la búsqueda de diversas definiciones, distintos datos experimentales (puede referir a definiciones, figuras, etc.) y específicamente a la definición del libro de la asignatura GEE (definición que las docentes agregan al material en 2018 y en la clase se la entregan específicamente a Macarena).

- Contrastar el modelo producido con información ya disponible o creada. A modo de ejemplo, Ailén (Grupo 1) señala *"Se observó que una figura que no estaba en el grupo de poliedros, según nuestro modelo de poliedro* [Refiere a la primera definición que se produce en la comunidad de práctica] *debería pertenecer a este grupo* [...]*"* y Micaela (Grupo 2) *"Comenzamos a validar, a ver si las figuras que dijimos no eran poliedros cumplían con no serlo según nuestra definición"*. En los ejemplos presentados encontramos que focalizan en analizar si las imágenes cumplen la definición.

- Dialogar, reflexionar y consensuar. Eugenia (Grupo 1) señala *"De debatir en grupos sobre estas cuestiones"*, Zoe (Grupo 2) *"Analizamos y debatimos la definición de polígono y poliedro"* y Martina (Grupo 3) *"Luego de escribir las características que reconocíamos y compartimos en una puesta en común con los distintos grupos. Encontramos que había palabras usadas en esas características que eran conceptos geométricos que, usados como condiciones que cumple un determinado cuerpo, podía llegar a definirse lo que es un poliedro"*. En estas acciones, las estudiantes ponen de manifiesto que en el marco de la validación el intercambio y consenso en la comunidad de práctica resulta fundamental para decidir modificar o no el modelo. Estas acciones se relacionan con los aportes de Frejd y Bergsten (2018). Estos autores señalan que el subproceso de validación requiere negociación entre quienes se involucran en el proceso de MM, en este caso, futuras docentes y docentes.

En general notamos que en todas las narrativas las futuras profesoras hacen referencia a la validación de las definiciones (modelos) que se van produciendo en el proceso de MM (Hankeln, 2020).

A su vez, observamos expresiones que resultan relevantes en relación con sentidos atribuidos a validación. Eugenia (Grupo 1) señala *"El proceso de validación fue bastante largo, nos costó encontrar una definición que sea la correcta"*, Marina (Grupo 1) afirma *"La etapa de validación fue larga y un poco difícil, ya que costó poder razonar acerca de nuestro modelo actual* [Refiere a la definición final] *y de lo que queríamos en realidad"* y Dianela (Grupo 2) menciona *"El proceso de validación se produjo bajo muchas idas y vueltas"*. Estas afirmaciones muestran explícitamente que el subproceso de validación implica reflexiones profundas acerca de las producciones realizadas, en muchos casos poniendo de manifiesto la necesidad de volver a empezar con el propio proceso de MM. Tal como señalan Blum y Leiß (2006) involucra acciones de autorregulación, autoevaluación y de monitoreo del trabajo completo e incluso, como señala Blum (2007) la validación muchas veces estimula un trabajo largo y reflexivo.

En relación con esto último, Yamila (Grupo 3) menciona *"La validación, particularmente me ha parecido interesante. Por el hecho de que nunca había construido una definición utilizando esta progresión que se ha dado, lo cual me ayuda a razonar"*. Esta estudiante enfatiza en el potencial que otorga el razonamiento realizado (Balacheff, 2000) en el marco de producción de la definición. Además, pone de manifiesto que el subproceso de validación le resulta interesante, posiblemente por las acciones llevadas adelante en el marco de la misma.

Al analizar las narrativas individuales encontramos que las futuras profesoras que constituyen los tres grupos ponen de manifiesto la puesta en juego del subproceso de validación de diversos modos. Enfatizamos que en todos los grupos se hacen presente afirmaciones que proponen la validación a través de contraste entre el modelo con los datos empíricos (en muchos casos se referencia a objetos reales) o definiciones. Incluso, en general el debate colectivo resulta un motor fundamental para reflexionar sobre la producción realizada y seleccionar la definición/modelo a emplear en la asignatura.

En general, en todas las narrativas de modo implícito o explícito se señala que se validan las distintas definiciones (previas y última) y que este subproceso requiere de un trabajo que involucra profundas reflexiones, en sinergia con lo señalado por Blum (2007).

10.1.2. | ENTREVISTA GRUPO 1: ANALIZAR Y REPLANTEAR DEFINICIONES PARA ACEPTARLAS

Tal como se menciona anteriormente, en esta entrevista participan Marina, Ailén, Eugenia y Larisa. En las primeras intervenciones en relación con validación el grupo se sorprende al pensar en este término, lentamente e incluso señalando que no recuerdan, intentan evocar una idea de validación. Se generan los siguientes intercambios:

> Investigadora: *En esas tres semanas, ¿cómo se ven respecto a la validación?*
>
> Eugenia: *¿De si validamos la definición que hicimos?*
>
> [...]
>
> Marina: *Cuando ya damos por hecho que tomamos esa definición y no la vamos a cambiar.*
>
> Investigadora: *¿Cómo validaron?*

Marina: *Y, a través de todo el proceso que hicimos. Investigar y volver a ver y poner en común, si había diferencias o similitudes.*

Eugenia: *Claro.*

Investigadora: *¿Creen que se validó?*

Marina: *En la clase.*

Ailén: *No sé, yo cuando habíamos dado una primera definición de que no habíamos puesto de que las caras contiguas tenían que estar en distintos planos y después cuando hicieron el gráfico y dijeron que todos los cuadraditos podría ser un poliedro es como que ahí estaríamos validando lo que habíamos definido antes o razonado antes y estaría mal, porque después de ahí llegamos a que las caras contiguas tienen que estar en distintos planos, yo es como que veo eso como validación, pero no sé.*

[…]

Larisa: *Es como que volver a ver, volver a analizar qué era lo que yo quería proponer, si se cumple eso o no, como dijo ella, de que, o sea, decir de si está bien o está mal lo que nosotros vamos a definir.*

Investigadora: *¿Cómo determinan si está bien o está mal?*

Larisa: *Y a partir del principio, o sea, lo que nosotros queremos proponer, o sea, si queremos buscar que sea un cubo buscamos, o sea, lo que termina siendo un cubo y decimos bueno esto es correcto decir de un cubo o esto no, según lo que se vea en la figura.*

Observamos que la primera idea que plantea Eugenia hace referencia a que lo que se valida es la definición, es decir el modelo (Hankeln, 2020). Marina añade que la validación se realiza cuando la definición/modelo se acepta, esto puede vincularse con considerar que en el proceso de MM la validación es la que determina la aceptación o modificación o refutación del modelo (Bassanezi, 2002).

Posteriormente, al reflexionar con respecto a modos de validación llevados adelante en el escenario de MM referencian el aspecto cíclico del proceso en sí mismo, y enfatizan en el investigar, discutir y analizar diferencias y similitudes (posiblemente refieran al contraste realizado entre definiciones).

En particular, Ailén enfatiza en una situación desarrollada en la que como grupo clase deciden modificar la propuesta de definición de poliedro producida, dado que Macarena realiza una representación en el pizarrón de una figura plana que podría considerarse poliedro según dicha definición. Este ejemplo puede vincularse con validación realizada al comparar el modelo con datos emergentes durante el proceso de MM (propuesto por una estudiante) y la utilización de conocimientos de distinta índole derivados de la experiencia personal o compartida. Luego, Larisa siguiendo la idea de Ailén ejemplifica el contraste entre datos empíricos (figuras cúbicas) y una definición de cubo para determinar si esta última es adecuada. Es decir, supone inspeccionar un modelo concreto para determinar sus características y luego comparar con el modelo (definición) planteada. Continua el diálogo en torno a una intervención de la investigadora:

> Investigadora: *Por ejemplo, si un estudiante afirma que contó el número de vértices, aristas y caras de 10 poliedros convexos y que en todos los casos se verifica la relación de Euler. Luego dice que eso es suficiente para afirmar que se cumple el teorema de Euler. ¿Les parece que validó?*
>
> Ailén: *No.*
>
> Investigadora: *¿Por qué no?*
>
> Ailén: *Porque ahí sería para ciertos casos especiales, pero dentro de todos.*
>
> Marina: *Verificó el teorema.*
>
> Ailén: *Claro. Pero dentro de todos los poliedros que existen podría haber alguno que no lo cumpla. No sé si con eso validaría. Es lo mismo que si nos piden demostrar tal teorema.*
>
> Investigadora: *¿Consideran sinónimos validar y demostrar?*
>
> Eugenia: *Claro.*
>
> Ailén: *No sé, para mí sí.*
>
> Eugenia: *Para mi creo que sí, no estoy segura. Validar no sé…*
>
> Ailén: *Validar no es lo mismo que verificar.*
>
> Marina: *O sea como que demostrar lo tenemos pensado…*
>
> Eugenia: *Como que tendría que mostrar algo que lo cumpla, no sé.*
>
> Ailén: *Sí, no sé. No sé si validar sería para todos o no, no sé.*
>
> […]
>
> Larisa: *Sí yo veo como que demostrar y validar vendría a ser lo mismo.*
>
> Marina: *Estoy en duda.*

Al presentar el ejemplo precipitadamente Ailén señala que no se valida en el ejemplo propuesto por la investigadora, dado que se emplearon casos especiales y podría darse el caso de que algún poliedro no cumpla la relación. A su vez Marina afirma que en ese caso se verificó.

En esta línea de ideas entra en escena la relación entre validación y demostración. Si bien algunas afirmaciones parecerían mostrar una relación casi directa entre estos términos, presentan incertidumbre, sin consensuar una perspectiva hasta este momento. Posteriormente, se genera el siguiente diálogo:

> Investigadora: *Otro estudiante dice que realizó lo mismo con 1500 poliedros convexos diferentes, y expresa "consideré todos los casos especiales". ¿Qué piensan ustedes?*
>
> Marina: *Si es verdad que vio todos.*
>
> Ailén: *Si no se olvidó de ninguno.*
>
> Marina: *Si considerás quizás los casos especiales sí, porque, o sea, con algunos estás generalizando y los casos especiales.*
>
> Eugenia: *Para mí si estamos considerando que es lo mismo que una demostración, no.*
>
> Marina: *¿Por qué?*
>
> Larisa: *Claro.*
>
> Eugenia: *Siguen siendo casos y no es para todos.*
>
> Larisa: *Claro, si se ve que el caso 1500 era el caso general, ahí sí. Se tiene que saber antes, se tiene que demostrar que ese es el caso general, que los otros son los casos especiales y ahí lo que ya probó.*
>
> Eugenia: *Pero para mí igual ahí si es como que está validando, porque es como que está buscando, no sé cómo explicarlo, a ver si hay algo que no se cumpla y entonces busca otro y prueba y no sé.*
>
> Investigadora: *¿Qué procesos les parece que siguieron estos estudiantes?*
>
> Ailén: *No sé.*
>
> Marina: *Prueba y error, o sea que fueron probando, probando y les dio, y bueno y probó con los casos especiales y le dio.*

Al plantear explícitamente el problema de la generalización observamos que las estudiantes parecen considerar que se estaría llevando adelante un proceso de validación. Eugenia explicita que, si bien con el proceso propuesto se estaría validando, no se podría afirmar que se estaría demostrando. Incluso, Larisa parece concordar con esta perspectiva, haciendo referen-cia a la necesidad de demostrar. Al poner a prueba la idea inicial de validación a través de una prueba empírica (Balacheff, 2000) en la que se recurren a pocos casos particulares ampliando el análisis en relación con la selección de objetos parecen aceptar la opción de validar, aunque como grupo, parecen priorizar la demostración matemática como eficaz para establecer una una conjetura (Reid y Knipping, 2010). La entrevista prosigue de la siguiente manera:

Investigadora: *Si consideramos que validar es establecer razones de por qué algo se verifica, ¿qué les parece?*

Eugenia: *Y no, porque no dio las razones.*

Ailén: *Había un problema de Discreta* [Hace referencia a Matemática Discreta II]*, el de los árboles, que había que probar que, si tiene un vértice o tres, y que bueno, que yo fui probando con, bueno, si tenía un vértice de grado tres, si tenía dos vértices de grado tres, si tenía tres vértices de grado tres…*

Marina: *Y se cumplía siempre, y se cumplía siempre.*

Ailén: *Claro.*

Marina: *Pero no es una demostración.*

Ailén: *Para mí eso es una validación, pero no sé, entro en un dilema.*

Marina: *Como que sí para mí hasta ese punto, y después bueno, si hay otro caso extremo.*

Larisa: *Pero es válido para eso, para esos casos es válido, pero si después encuentra otro caso y no es válido.*

Las futuras profesoras prosiguen evocando ideas y ejemplos en la misma línea. Parecería que para Ailén y Marina la validación se podría llevar a cabo de modos que no sigan la demostración matemática clásica, sin embargo, Larisa y Eugenia parecen requerir de esta última para aceptar una determinada conjetura. Esto puede deberse a las vivencias que en general han transitado durante su trayectoria de formación (Vezub, 2008) en la carrera Profesorado en Matemática donde las conjeturas dadas o producidas se suelen demostrar.

Finalmente, en el marco de una pregunta general de la investigadora con respecto a los aspectos positivos o negativos de lo vivido en el escenario de MM emergen algunas afirmaciones que podrían vincularse con validación y exponemos a continuación:

Ailén: *A mí me pareció bien como nueva propuesta* […]. *Pero a mí me gustó la forma de dar, para mí fue nueva.*

Marina: *O sea estuvo bueno por ahí para ver que no siempre lo que vos ves está bien, ponele cuando nosotras buscamos la definición de poliedro, ah sí, es ésta y estaba mal ponele la que buscamos en los libros y esas.*

Ailén: *Claro.*

Marina: *De que por ahí tener que decir, ¿está bien esto?*

Ailén: *Claro, replantearte, ponele en la definición de los libros no te aparecía* […] *que* *las caras tienen que estar en distintos planos, o cosas así.*

Larisa: *Yo creo que estuvo bueno para tener otro método distinto de cómo se dan las clases, para ver una nueva forma, como introducir.*

Eugenia: *Sí, también, para tomarlo también.* [. . .] *Claro, para cuando nosotras demos clases.*

En las afirmaciones de las estudiantes observamos que enfatizan en el potencial de analizar las definiciones de poliedro para establecer la definición que emplearían y que les permitiría discriminar figuras poliédricas de no poliédricas. Hacen referencia a la novedad que otorga esta vivencia para ellas como futuras docentes y reflexionan con respecto al análisis detallado que requiere la selección de libros de textos o bibliografía a emplear a futuro en sus clases, incluso, señalan que lo vivido podría constituirse en una inspiración para formular clases a futuro. Tales consideraciones nos invitan a considerar que como equipo fueron atravesadas por lo vivido, otorgando sentido y transformándola así en una experiencia (Guzmán Gómez y Saucedo Ramos, 2015). Destacamos que solo referencian en este momento lo realizado al producir la definición de poliedro, posiblemente, por configurar el trabajo más novedoso e impactante para ellas como futuras docentes.

Del análisis realizado consideramos que se ponen en juego algunas cuestiones enlazadas con énfasis que sintetizamos a través de la siguiente tabla.

TABLA 85 | *Red de sentidos atribuidos a procesos de validación en la entrevista del grupo 1 (Fuente propia).*

VALIDACIÓN DE DEFINICIÓN

↓

ACEPTACIÓN DEL MODELO

↓

CONTRASTE ENTRE PRODUCCIÓN E INFORMACIÓN Y/O DATOS

↓

DEBATE SOCIAL

↓

VALIDACIÓN Y DEMOSTRACIÓN COMO PROCESOS DIFERENTES

↓

REPLANTEAR Y ANALIZAR LA PRODUCCIÓN

Como grupo al reflexionar con respecto a la experiencia vivida focalizan en la producción de la definición de poliedro y específicamente en la validación de la misma (Hankeln, 2020). Hacen referencia a modos de validación que se vinculan principalmente con la comparación entre el modelo y, lo que podría ser (no explicitan qué comparan), los datos o informaciones disponibles o emergentes durante el proceso de MM o análisis de conocimientos matemáticos disponibles o emergentes (definiciones) y a la utilización de conocimientos disponibles en el marco de debates.

También observamos que encuentran algunas diferencias entre validación y demostración, considerando que en el marco de la primera podrían recurrir, por ejemplo, a pruebas diversas (Balacheff, 2020). Finalmente, enfatizan que el trabajo realizado puede poner de manifiesto la necesidad de replantear y analizar la propia producción e incluso la disponible en bibliografía y destacan que la experiencia desarrollada podría incentivar un modo de trabajo futuro que desconocían.

10.1.3. | ENTREVISTA GRUPO 2: MOSTRAR Y DEMOSTRAR EN UNA EXPERIENCIA QUE ATRAVIESA

Como explicitamos en la cuarta parte de la tesis participan de esta entrevista Dianela, Guillermina, Micaela y Zoe. Destacamos que Zoe es la única de las integrantes de este grupo que realiza el trabajo práctico en relación con validación de la relación de Euler (Ver tabla 13). La entrevista con relación a validación inicia de la siguiente forma:

> Investigadora: *En la experiencia de las tres primeras semanas de cursado en GEE se habló bastante acerca de la validación, ¿cómo se ven ustedes en el trabajo con validación en estas semanas?*
>
> Zoe: *Eso es lo que yo no había entendido, que me había tocado hacer a mí.* […] *Porque me parece que la consigna que me habían dado a mí era sobre eso, no me acuerdo.* […] *Que yo no había entendido qué era validar realmente, que validar era demostrar, eso es lo que a mí me dieron a entender, porque me dijeron que todo lo que yo había hecho estaba mal, entonces dijimos qué hacemos, y ahí quedó.*
>
> Guillermina: *Claro, porque lo que ustedes habían llevado eran ejemplos, así era…*
>
> Zoe: *Sí, ahora no me acuerdo.*
>
> Guillermina: *O sea, no es que habían demostrado, sino que habían mostrado.*
>
> Zoe: *Que había otros incluso* [Refiere a poliedros no convexos que cumplen la relación de Euler].
>
> Guillermina: *Claro, así era.*

Zoe: *Habíamos mostrado los estrellados* [Refiere a poliedros estrellados] *también, pero no me acuerdo bien como era la consigna, pero al final no me quedó claro qué era realmente validar.*

Al referenciar a la validación inmediatamente Zoe recuerda la consigna que lleva a cabo al final del escenario de MM para dar cuenta de la validación de la relación de Euler (Ver tabla 13). En el marco de la misma esta estudiante junto a Juana (solo participa de ese momento en el escenario educativo de MM) responden la consigna, dado que conforma el trabajo práctico necesario de acreditar para obtener la regularidad y/o promoción en la asignatura.

En este trabajo las estudiantes en primer lugar prueban que la relación de Euler se cumple para algunos poliedros convexos. Luego, en la búsqueda de encontrar ejemplos de poliedros cóncavos que no la cumplen, encuentran que todos los poliedros cóncavos en los que prueban la relación también la verifican y afirman "El hecho de que se cumpla la relación de Euler no nos garantiza que el poliedro analizado sea convexo". Esta conclusión las interpela de modo tal que proponen interrogantes que abordan en su trabajo, por ejemplo: "¿Por qué para estos poliedros no convexos se cumple la relación de Euler?, ¿qué características presentan estos poliedros?, ¿existe alguna regularidad entre los mismos?". Posteriormente realizan una investigación y análisis para avanzar en la respuesta a sus propias preguntas. Este trabajo fue desaprobado por la profesora del curso que buscaba que las estudiantes focalicen y presenten las pruebas dadas en el libro de cátedra, tomadas de Sánchez Mármol y Pérez Beato (1961) y Lakatos (1986).

Observamos que la aclaración realizada por Zoe muestra apropiación de la validación trabajada en el marco del proceso de MM, reconociendo el potencial de formular preguntas y problemas en el marco de analizar una conjetura, lo que podría presentar rasgos relacionados con el modo de validar propuesto en Lakatos (1986). Esta estudiante, incluso en la clase en la que presentan dicho trabajo afirma "Yo no entendí que había que buscar en realidad el teorema y explicar la demostración", a modo de defender la propia producción realizada. En general, como grupo se muestran sorprendidas por los gestos que realizan de no entendimiento de la desaprobación y de lo solicitado por la docente (Notas de campo). Incluso Guillermina, al afirmar que el grupo de Zoe mostró, pero no demostró, parece manifestar desconcierto.

Posteriormente, continua la entrevista:

Investigadora: *¿Y ustedes piensan que validaron en esas tres primeras semanas?* [...]

Dianela: *Yo creo que por ejemplo lo validamos en el sentido de que pudimos, logramos hacer, por ejemplo, nuestra actividad que planteamos en el problema con las definiciones, poliedros y otros que no lo eran, yo creo que, si bien no lo demostrás haciendo la creación de uno, estás validando estos conceptos.*

Investigadora: *¿Qué podrían decir hoy del vínculo entre validación y demostración?*

[…]

Zoe: *¿Cuál sería la diferencia entre validar y demostrar?, es que yo en realidad terminé entendiendo como que significaría lo mismo.*

Guillermina: *Claro.*

Zoe: *Me quedé yo con eso nada más, después no me fijé, porque mi otro compañero había demostrado la fórmula, creo que era la fórmula de Euler, entonces me quedé* como que asocié eso con una demostración, pero él después lo había explicado.

Investigadora: *¿Y ustedes?*

Zoe: *No habíamos demostrado con mi compañera, nosotras entendimos algo totalmente distinto, por eso después tuvimos que hacer el trabajo de nuevo, ese fue el problema que tuvimos nosotras.*

En primer lugar, encontramos que Dianela considera que han validado en el marco del desarrollo del escenario de MM. Esta estudiante muestra apropiación del problema vinculado con establecer una definición de poliedro considerándolo propio y enfatizando en que han creado. A su vez, podría remitir a la idea de validación a partir de realizar una comparación entre el modelo y los datos o informaciones emergentes durante el proceso de MM, por evocar el posible análisis de poliedros y no poliedros.

En segundo lugar, Zoe muestra que la vivencia la atraviesa de modo tal que pone en duda que lo realizado en el trabajo práctico (validación de relación de Euler) no sea una validación, pues, lo vivido previamente la remite a entender la validación en un sentido más amplio. En este marco de ideas, entre ellas recuperan vivencias y/o experiencias que no se vinculan con el objetivo de investigación. La investigadora busca retomar la temática:

Investigadora: *Chicas, con respecto a lo que estábamos hablando, en esas tres semanas de cursado de geometría espacial, respecto a la validación, ¿qué piensan?*

Dianela: […] *Yo creo que demostrarlo con palabras como hizo Pablo es una forma, pero si vos llegás a la construcción, por ejemplo, de un cuerpo, yo creo que ves que esas propiedades se cumplen. Y ahí hay una validación.*

Guillermina: *Sí, yo creo que sí, y capaz te van a decir, bueno ahora demostralo, lo validaste, ahora demostralo, ese es el tema.*

Entrevistadora: *Y, por ejemplo, si un estudiante afirma que contó el número de vértices, aristas y caras de 10 poliedros convexos y que en todos los casos se verifica la* *relación de Euler. Luego dice que esto es suficiente para afirmar que la propiedad es verdadera. ¿Qué les parece?*

Guillermina: *Y que no.*

Dianela: *No.*

Guillermina: *No, porque es lo que hablamos cuando tenemos que dar contraejemplos y esas cosas, que pruebe para uno, dos o diez casos no significa que se cumpla para todos.*

Dianela: *No está demostrado.*

Guillermina: *Claro, no está demostrado.*

Dianela: *Si bien se cumple para una figura, para esa figura se valida.*

Guillermina: *O sea, si se cumple para una se valida para esa figura.*

Dianela: *Pero para otra puede que no.*

Guillermina: *Ahí es donde entra en juego la demostración.*

En los intercambios generados observamos que como grupo consideran como opción la puesta en juego de validaciones empíricas, incluso, como plantea Dianela, una forma de validación podría vincularse con la actividad de construcción en pos de visualizar las propiedades. Zoe introduce nuevamente en este momento la diferencia entre validar y demostrar, considerando que se estaría validando en el caso de probar la relación de Euler en algunos poliedros. Sin embargo, como grupo consideran que se debería demostrar (como lo realizó Pablo recurriendo a demostraciones de libros) para que la relación se considere establecida para todo poliedro. Cabe mencionar que como grupo las estudiantes se encuentran atravesadas por la experiencia vivida por Zoe, por lo que la validación a través de demostración podría ser el modo de proceder adecuado para establecer una conjetura. La entrevista continúa de la siguiente manera:

Investigadora: *Y otro estudiante explicita que realizó lo mismo con 1500 poliedros convexos diferentes, y expresa: consideré todos los casos especiales. ¿Qué les parece a ustedes?*

Guillermina: *Y yo sigo en lo mismo de que si no hay una demostración, o sea, es lo que me quedó de estos 5 años que estoy en la facultad. O sea, si no tenés una demostración…*

Dianela: *General.*

Guillermina: *Claro.*

[…]

Dianela: *¿Cómo sabe que esos son todos los especiales y no se le escapó uno?, no hay forma*. […] *¿Qué tuvieron en cuenta para esos 150?, ¿1500?*

Guillermina: *Uno 10 y el otro 1500. Bueno, ese que consideró todos los casos especiales, o sea, es como decía ella, no sabes si están todos los casos, validó para esos 1500.*

[…]

Zoe: *Y no, pero en realidad es algo que lo vas aprendiendo acá mientras hacés la carrera, te enseñan eso, que no podés afirmarlo para todos, no podés estar tan seguro. Con 1500 te queda la duda entonces no se puede afirmar.*

En estas afirmaciones ponen de relieve sentidos otorgados a partir de la experiencia vivida en el marco de la carrera Profesorado en Matemática, donde para aceptar una propiedad se requiere de una demostración. Esto último podría vincularse con una validación por autoridad. Incluso, determinan que, en caso que se pruebe para 1500 poliedros (tomando casos especiales) solo sería válido para esos 1500, sin considerar, por ejemplo, que quizás, los casos especiales podrían posibilitar ampliar el dominio de validez de la relación de Euler.

Finalmente, la investigadora pregunta si quisieran agregar algo más, y surgen algunas afirmaciones que podrían vincularse con sentidos atribuidos a validación:

Dianela: *Te permite cuestionarte a vos mismo también, de qué pensamiento tenías acerca de algo y si de verdad estás bien.*

Guillermina: […] *Estábamos acostumbrados a eso del teorema, de ver si estaba bien la demostración que habíamos hecho o no* […].

Zoe: *Pero también estaba pensando cuando hicimos Geometría Plana que hacíamos demostraciones* […] *y la docente venía y leía toda la demostración y decía esto está bien, esto está mal, está bien como concluye* […].

Estas últimas aseveraciones que recuperamos ponen en escena experiencias educativas que parecen vincularse con el hecho de realizar en otros momentos demostraciones y que las mismas sean aceptadas o no por parte de la docente, es decir, por autoridad. Sin embargo, la afirmación de Dianela muestra que la estudiante valora lo realizado en el marco del escenario de MM por haber tenido la oportunidad de cuestionarse a sí misma y analizar la propia producción realizada.

Del análisis realizado consideramos que se ponen en juego algunas cuestiones enlazadas con énfasis que sintetizamos a través de la siguiente tabla.

TABLA 86 | *Red de sentidos atribuidos a procesos de validación en la entrevista del grupo 2 (Fuente propia).*

VALIDACIÓN, FORMULACIÓN DE PREGUNTAS Y ESTABLECIMIENTO DE CONJETURAS

↓

MOSTRAR Y DEMOSTRAR

↓

VALIDACIÓN Y DEMOSTRACIÓN COMO PROCESOS DIFERENTES

↓

VALIDACIÓN POR PARTE DE QUIEN TRANSITA EL MM

Observamos que al interior del grupo atraviesa con fuerza la experiencia vivida por una de las participantes con relación a la validación, incluso, la constitución y consolidación del grupo parece ser tan fuerte que la situación vivida por dicha estudiante atraviesa por completo al grupo, constituyendo así, un sentido como grupo con respecto a validación (Bajtín, 2000).

Zoe en el trabajo realizado para validar la relación de Euler (junto a otra compañera que no participa de la entrevista) muestra apropiación del proceso de MM y específicamente de la validación en ese proceso, buscando formular problemas, estableciendo conjeturas y validándolas. Sin embargo, la producción de estos sentidos y la consideración grupal con respecto a la posibilidad de establecer diversas validaciones se encuentran de algún modo obturadas por la perspectiva de establecer una demostración formal requerida por la docente del curso. Interesa destacar que como grupo en todo momento hacen referencia a la validación de la fórmula de Euler que consideramos un modelo en el marco de desarrollo del escenario educativo (Hankeln, 2020).

Como grupo encuentran diferencias entre la acción de mostrar y demostrar, a pesar de que parecen valorar el realizar la primera de ellas. Incluso, destacan el potencial de que quien decide validar es quien transita el proceso de MM o incluso establece la conjetura. En general, observamos que la experiencia de estas estudiantes podría ser relevante para repensar posibles modos de validación en el aula de matemática e incluso, diferentes, de lo vivido en la trayectoria profesional hasta el momento (Vezub, 2008).

10.1.4. | ENTREVISTA GRUPO 3: ANÁLISIS DE VERACIDAD Y FALSEDAD APELANDO A DIFERENTES MEDIOS

En la entrevista del grupo 3 participan Martina, Macarena, Yamila y Victoria. En el marco de diversas ideas que se van desarrollando se genera el siguiente intercambio en el que comienza el diálogo en torno a validación:

> Investigadora: *En las tres primeras semanas de cursado en GEE se habló bastante acerca de la validación, ¿cómo se ven ustedes en el trabajo con validación en estas tres semanas de cursado?*
>
> Martina: *Yo creo que algunas cosas las pudimos validar.* [...]
>
> Macarena: *Yo creo que validar es como que conjeturás algo y ver si es verdadero o falso, me imagino eso.*
>
> Victoria: *Si se cumple para todos.*
>
> Macarena: *Claro.*
>
> Yamila: *Sí.*
>
> Investigadora: *¿Y cómo se ven ustedes en el trabajo con validación en estas semanas?*
>
> Yamila: *Sí, a través de las experiencias, de la manipulación como decíamos, de ver el software...* [...] *De las distintas fuentes bibliográficas que utilizamos.*
>
> Victoria: *Desde la búsqueda de conceptos también, porque uno al principio, o sea, como vos veías el ejemplo concreto, pero lo tenías que llevar a que se dé para todos los poliedros, ¿qué metemos dentro de los poliedros?*
>
> Macarena: *Sí, es como que cada una tenía una idea de lo que era poliedro y es como que después lo podías validar si era verdadero, por ejemplo...*
>
> Martina: *O sea, lo validamos vendría a ser informalmente.*
>
> Macarena: *Con el software, por ejemplo* [...], *porque hay una plantilla que dice poliedro* [...], *si pensabas que* [...] *una pelota era un poliedro ibas graficando con el software y veías que ninguno te quedaba una pelota por ahí, es como que uno venía con las ideas previas e ibas validando con las herramientas que tenías, el software o las figuras que armabas con el rompecabezas este del departamento* [Hace referencia al material manipulativo Polydron].
>
> Yamila: *Los diferentes procesos que hemos hecho que nos han ayudado a validar*

de una u otra manera, o sea, ya sea por el software, por la manipulación de los elementos, por los diferentes conceptos que hemos tenido de diferente bibliografía y hemos llegado a algo.

Observamos que las futuras profesoras del grupo ponen en juego dos líneas de ideas. Las primeras parecen relacionarse con los sentidos iniciales, en los que hacen referencia a la validación realizada al aceptar o refutar una afirmación. Las segundas evocan específicamente a la producción de la definición de poliedro llevada adelante en el marco del escenario de MM.

Como grupo identifican distintos modos de validación puesto en juego. Hacen referencia al empleo de conocimientos matemáticos disponibles (definiciones) y la comparación entre el modelo y los datos o informaciones emergentes durante el proceso de MM. Incluso, enfatizan en los medios empleados en el marco de la validación, lo que pone de manifiesto que la cognición incluye herramientas (medios) de forma esencial para producir conocimientos. Medios que son constitutivos del conocimiento y transforman no solo las prácticas y los contenidos sino también los modos de conocer (Borba y Villarreal, 2005).

En general, hacen referencia principalmente a la validación de la definición, lo que podría vincularse con la validación del modelo. Sin embargo, también encontramos en la afirmación de Macarena que remite a la validación de supuestos, al referenciar, por ejemplo, la refutación de que una pelota es un poliedro (Hankeln, 2020). Luego, la entrevista continua de la siguiendo forma:

Investigadora: *¿Qué podrían decir del vínculo entre validación y demostración?*

Macarena: *Y es como que están relacionados, no es lo mismo, pero están relacionados.* […] *Es como cuando tenés una conjetura y vos sospechas si es verdadera o falsa, es como que si es falso das un contraejemplo y si es verdadero lo terminás demostrando, esa sería la manera de validarla, o encontrar un contraejemplo o demostrar, pero no siempre validar es demostrar.*

[…]

Investigadora: *Por ejemplo, un estudiante afirma que contó el número de vértices, aristas y caras de 10 poliedros convexos y que en todos los casos se verifica la relación de Euler. Luego dice que esto es suficiente para afirmar que la relación se cumple para poliedros convexos. ¿Qué les parece a ustedes?*

Macarena: *Y que debe demostrar, no le va a quedar otra.*

Victoria: *Es una generalidad.*

Macarena: *Con revisar algunos por ahí encontrás otro poliedro que es convexo y que no cumpla Euler digamos.*

Investigadora: *Y, por ejemplo, si otro estudiante dice que realizó lo mismo con 1500 poliedros…*

Macarena: *Tampoco.*

Investigadora: *Pero también expresa "consideré todos los casos especiales". ¿Qué les parece a ustedes?*

Martina: *Justamente vos en la validación podés encontrar ejemplos para validar cosas y en la demostración vos demostrás para casos en general. O sea, no vas a encontrar en una demostración un contraejemplo.*

Macarena: *Ahí es como conjeturar, yo si no terminás demostrando no terminás, falta validar.*

Martina: *Si dijeron que demostraron, o sea validaron…*

[…]

Victoria: *¿Pero la validación va antes o después de la demostración?*

Macarena: *Para mi validar es antes, es como que validar o dar contraejemplo o demostrás, para mí. Es una o la otra.*

Martina: *Por eso yo puedo validar algo con un contraejemplo.*

Investigadora: *Por ejemplo, existen números tales que (a+b)2=a2+b2, ¿qué pasa en ese caso?*

Victoria: *No, porque dijiste existe, no dijiste que era para todos, dijiste que para algunos.*

Macarena: *Claro, por eso, cuando estamos hablando de definición y todas esas cosas es un para todo, o yo al menos lo veo así, o sea definiste algo y dijiste que es para todos.*

Martina: *Sí, porque vos demostrás para todos.*

Observamos que al referenciar la noción de validación y demostración las futuras profesoras de este grupo se alejan de las ideas vinculadas con lo vivido en el marco del escenario de MM y regresan a sus sentidos iniciales. Incluso, la expresión de Victoria podría referenciar una jerarquía entre validación y demostración. Posiblemente, influenciadas por sus experiencias de formación en su trayectoria profesional (Vezub, 2008) en las que en las asignaturas realizan demostraciones o buscan contraejemplos y específicamente en geometría se siguen los métodos y modos de validar propios de Euclides (Reid y Knipping, 2010).

También consideramos que el liderazgo de Macarena influye en los sentidos otorgados por el resto de las integrantes del grupo, pues ella se posiciona en todos los momentos de trabajo de este modo y, en general, parece ser autorizada por la profesora del curso GEE.

> Martina: *Para mí vos validás, o sea,* [...] *es más creo que yo te digo a vos decime un ejemplo de poliedro que vos conozcas.*
>
> Macarena: *El cubo.*
>
> Martina: *Ella me dice el cubo, ¿sí? Está bien. Pero si me hubiera dicho, no sé, yo la veo a la validación como una forma que todos pueden llegar a ver con un ejemplo lo que yo estoy diciendo,* [...] *a la demostración sí o sí la voy a usar para todos los cuerpos que a mí se me ocurran nombrar. No es lo mismo validar que demostrar.*
>
> Yamila: *Veo más general me parece a la validación y a la demostración más puntual.*
>
> Investigadora: *¿Creen que validó de alguna manera este estudiante que contó en 1500 poliedros la relación de Euler?*
>
> Martina: *Sí, él validó. O sea, lo que no hizo fue justamente, porque vos validás cuando vos encontrás cosas, pero no por eso estás demostrando.*
>
> Yamila: *Sí, para mí si validó con esos 1500.*
>
> Macarena: *Para mí es como que conjeturó, me quedo con eso.*
>
> Yamila: *No demostró.*
>
> Macarena: *Claro.*
>
> Victoria: *Para mí es más como dice Macarena, conjeturó, vio que para estos se cumple, pero no demostró que es válido para todos.*
>
> Martina: *Claro, pero validar es eso, no lo asegurás, es a partir de la experiencia.*

Encontramos que al avanzar en el diálogo e intercambio las estudiantes ponen en juego otras ideas, ampliando así sentidos producidos (Bajtin, 2000). En general, si bien afirman en reiteradas oportunidades que para establecer una conjetura de modo general es necesario demostrar, consideran la opción de validar a través de diversos métodos, incluso, a partir de ejemplos particulares, tal como lo propone Martina.

A partir del análisis realizado observamos que se ponen en juego algunas cuestiones enlazadas con énfasis que sintetizamos a través de la siguiente tabla.

TABLA 87 | *Red de sentidos atribuidos a procesos de validación en la entrevista del grupo 3 (Fuente propia).*

VERACIDAD Y FALSEDAD

↓

VALIDACIÓN A TRAVÉS DE COMPARACIÓN CON DATOS, INFORMACIÓN Y CONSTRUCCIÓN

↓

EMPLEO DE DIVERSOS MEDIOS PARA VALIDAR

↓

VALIDACIÓN Y DEMOSTRACIÓN COMO PROCESOS DIFERENTES

Las futuras profesoras que constituyen el grupo en primer lugar determinan que el proceso de validación podría emplearse para analizar la veracidad o falsedad de una conjetura. Sin embargo, rápidamente, al evocar lo vivido en el escenario de MM referencian la validación a través de la comparación de producción con objetos y definiciones. También enfatizan en el uso de diversos medios para validar, por ejemplo, empleando el software o material manipulativo para construir, visualizar y verificar las conjeturas establecidas.

Observamos que como grupo consideran que para aceptar como verdadera una conjetura es necesario demostrarla y que para refutarla se debería encontrar un contraejemplo, consideración que coincide con los sentidos producidos inicialmente.

10.2. | REFLEXIONES CON RESPECTO A SENTIDOS PRODUCIDOS A VALIDACIÓN LUEGO DE VIVIR PROCESOS DE MM

Tomando como referencia la información y análisis precedentes, advertimos que las futuras profesoras inicialmente ofrecen ideas que vinculan los procesos de validación con la demostración, prevaleciendo, el método axiomático deductivo y modos de probar relacionados con los modos euclidianos (Reid y Knipping, 2010). Observamos que al interior de algunos grupos surgen consideraciones en relación con validaciones en las que se apela a pruebas empíricas (Balacheff, 2000), sin embargo, en las narrativas no focalizan en estas ideas.

Posteriormente, se pone en juego el primer proceso de MM, del que surge una definición de poliedro a emplear en la asignatura GEE. Al reflexionar sobre dicha vivencia en las narrativas individuales emergen ideas con respecto a validación que distan de las iniciales. Observamos que mencionan la posibilidad de validar definiciones (modelos) que se van produciendo en el proceso de MM (Hankeln, 2020). A su vez, reflexionan con relación a diversos modos de validación, como ser, comparación entre las definiciones producidas y otras definiciones obtenidas de diversos libros, comparación entre las definiciones y datos empíricos o información (como ser representaciones de figuras tridimensionales obtenidas de Internet, producidas con software, dadas en material manipulativo, imágenes, etc.) y análisis de la producción en el marco de la interacción (al interior de los grupos o con la comunidad de práctica). En relación con esto último encontramos que la validación social puede resultar fundamental, en términos de Frejd y Bergsten (2018), requiere negociación entre quienes se involucran en el proceso de MM.

Posteriormente, vivencian los momentos 3 y 4 del escenario educativo, en los que surge la relación de Euler como modelo y formulan y resuelven sus propios problemas (o validan la relación de Euler). Los grupos 1 y 3, en las entrevistas grupales focalizan en la vivencia del proceso de MM en el que producen la definición de poliedro y, específicamente, mencionan la validación de la misma (Hankeln, 2020). A diferencia del grupo 2 que enfatiza en la validación de la relación de Euler motivadas por la experiencia vivida por Zoe.

En general, en las entrevistas las estudiantes referencian modos de validación que se vinculan principalmente con la comparación entre el modelo y los datos o informaciones disponibles o emergentes durante el proceso de MM, el análisis de conocimientos matemáticos disponibles o emergentes (definiciones) y la utilización de conocimientos disponibles en el marco de debates al interior de la comunidad de práctica. Todos los grupos encuentran diferencias entre validación y demostración, considerando que en el marco de la primera podrían recurrir, por ejemplo, a pruebas diversas (Balacheff, 2020). Observamos que en los sentidos parecen ampliarse las opciones para llevar adelante la validación en el aula de matemática con respecto a lo vivido en la trayectoria profesional hasta el momento (Vezub, 2008).

Observamos que varias expresiones o frases empleadas por las futuras profesoras tanto en las narrativas individuales como en las entrevistas, enfatizan que la validación resulta un proceso complejo de llevar adelante, tal como señala Blum (2007) largo y reflexivo, que involucra, como mencionan Blum y Leiß (2006) acciones de autorregulación, autoevaluación y de monitoreo del trabajo completo.

CAP XI

MODOS DE VALIDACIÓN EN ESCENA EN LOS PROCESOS DE MM

11.1. | INTRODUCCIÓN

En este capítulo focalizamos en el estudio de modos de validación puestos en juego por las futuras profesoras en el marco del escenario educativo de MM. A tal fin recuperamos producciones de los momentos 2, 4 y 5 (Ver tabla 17).

Para el análisis tenemos en consideración las categorías analíticas empleadas en los capítulos 9 y 10. En particular, en el capítulo 10 identificamos ciertas acciones que las futuras profesoras ponen de manifiesto de forma implícita o explícita que se pueden enmarcar en modos de validación. Más precisamente, tomando como referencia los avances presentados en los dos capítulos anteriores, preguntamos: ¿qué objetos matemáticos validan? y ¿a qué acciones y recursos acuden para validar? En este capítulo adentramos en las producciones matemáticas a fin de profundizar el estudio en relación con el objetivo 3.

Organizamos el análisis en este capítulo por momentos de trabajo en aula. Estudiamos los modos de validación, en primer lugar, de lo acontecido en el momento 2 del que emerge la definición de poliedro como modelo, en segundo lugar, del momento 4 del que emerge como modelo la relación de Euler (y otras relaciones) y en tercer lugar de los problemas propuestos por cada uno de los grupos y de los grupos que responden la consigna que invita a validar la relación de Euler. Con el fin de sintetizar el análisis realizado dando cuenta del panorama general, presentamos ejemplos de los modos de validación puestos en juego en cada uno de los momentos. Focalizamos en ejemplos ilustrativos de cada modo de validar identificado para cada consigna de los respectivos momentos, pero sin perder de vista el escenario general. Tales ejemplos surgen del análisis de toda la información producida. Además, los consideramos ilustrativos por reconocerlos como relevantes, interesantes y como auténticos ejemplificadores de la categoría en juego o modo de validación identificado.

11.1.1. | MOMENTO 2: VALIDACIÓN DE UNA DEFINICIÓN PRODUCIDA EN EL MARCO DE UN PROCESO DE MM

En el marco del momento 2 se ponen en juego 3 consignas (Ver tabla 4). Organizamos el estudio de la información en torno a cada una de ellas. En el marco de la consigna 2 (ver tabla 7) las estudiantes libremente caracterizan imágenes dadas y, en general, sus respectivas representaciones en materiales manipulativos. Observamos que en el desarrollo de la consigna prevalece la validación de supuestos (por ejemplo: una figura es o no prisma, tiene o no 6 caras, etc.) en el sentido de Hankeln (2020).

A continuación, recuperamos transcripciones que nos informan de modos de validación. En todos los casos se cita el nombre de una estudiante y entre paréntesis el grupo de pertenencia.

- Validación de un supuesto empleando conocimientos matemáticos disponibles (propiedades, teoremas, definiciones, etc. ya estudiados y evocados o recién presentados por las docentes). Por ejemplo, en el grupo 3 observamos el siguiente diálogo:

> Macarena: *Es un poliedro, no es convexo para mí.*
>
> Yamila: *¿Puede ser regular?*
>
> Macarena: *Regular no, son distintas las caras.* [...] *Irregular es lo contrario a regular, con que no tenga todos los polígonos regulares o las mismas caras ya es irregular.*

En el intercambio encontramos que recurren a conceptos previos (e.g. poliedro convexo, regular e irregular, polígonos regulares) para afirmar que una determinada figura es un poliedro convexo y refutar que es poliedro regular.

- Validación de un supuesto a partir de analizar el mismo contrastando con datos o información emergentes o recogida durante el proceso de MM. Los datos o la información pueden provenir de distintas fuentes como libros de texto, Internet, entre otras. Eugenia (Grupo 1) afirma *"No, me parece que es prisma, o sea depende de la..."* [Buscan en Internet y visualizan imágenes de prismas] y Larisa responde *"Prisma rectangular"*. Es decir, buscan imágenes en Internet de prismas y a partir de la visualización afirman que la figura cumple con ser prisma rectangular.

- Validación de un supuesto a partir de analizar los datos o informaciones disponibles durante el proceso de MM. La información proviene, en general, de la observación e inspección de modelos concretos o imágenes visuales dados/as (Ver figura 5). Por ejemplo, Micaela (Grupo 2) señala: *¿Y esta de acá?* [Refiere a la representación en material concreto], *ésta tiene menor volumen que el cubo.* Y Guillermina (Grupo 2) responde *"Muy bien, tiene un cubo"*. Es decir, analizan una figura dada en material concreto para establecer una conjetura. El cuerpo dado, tiene menor volumen que el cubo.

- Validación de un supuesto a partir de la utilización de conocimientos de distinta índole derivados de la experiencia personal o compartida. Por ejemplo, Ludmila (Grupo 4), señala *"Pero no sé, que más. Que lo usas para tomar…* [Refiere a la representación en material concreto del vaso] *"*. Es decir, al reconocer la figura con un vaso, a partir de su experiencia previa con dicho objeto, afirma que el mismo se puede emplear para beber. De este modo, en el contexto de la tarea propuesta en el marco de un trabajo de MM, la estudiante se habilita a agregar condiciones de la realidad no matemática.

De modo general, observamos que en el desarrollo de la consigna 2, si bien no se encuentran validando un modelo, pues están comenzando con la puesta en juego del proceso de MM, se detienen en validar diversos supuestos que emergen al interior de los grupos e incluso, en el debate colectivo. Supuestos estos que van dando sostén al trabajo matemático. Algunos grupos se detienen en analizar sus supuestos teniendo en cuenta características geométricas y otros a partir de características no matemáticas. Quizás la disponibilidad de tiempo (30 minutos) resulta escasa para que las estudiantes tengan oportunidad de profundizar ideas. Pues, para validar sus supuestos podrían apelar a propiedades, definiciones, etc., para analizar diversas características que emergen en las interacciones, como ser convexidad, clasificación en prismas, pirámides, entre otros. Destacamos que el validar supuestos en MM es importante, pues son las condiciones que luego pueden ir seleccionando para producir un modelo que dé respuesta a la problemática en estudio.

En el marco de la consigna 4 (Ver tabla 4), en la que las futuras profesoras caracterizan dos grupos de figuras tridimensionales, trabajan en un primer momento en 5 grupos de estudiantes y luego, se reagrupan en dos grupos para debatir lo realizado y avanzar en la producción de potenciales definiciones de poliedro (Ver tabla 20). Los 5 grupos que denominamos A (Eugenia y Marina), B (Larisa y Ailén), C (Valentina, Dianela y Micaela), D (Yamila, Macarena y Guillermina) y E (Martina, Victoria y Zoe). En la reagrupación, se congregan por un lado las estudiantes de los grupos A, B y C y por el otro las de los grupos D y E. En este capítulo focalizamos en modos de validación, sin embargo, es relevante destacar que en la parte 6 presentamos las producciones emergentes del trabajo geométrico realizado por las futuras profesoras.

Para presentar el análisis realizado avanzamos en uno o dos ejemplos que identificamos por categorías en relación con modos de validación llevados adelante por las estudiantes tanto en el primer trabajo en grupos de futuras profesoras (de dos o tres integrantes) como en el trabajo en el que se integran los grupos de estudiantes. Comenzamos con el primer grupo.

que se conforma por Marina, Larisa, Eugenia, Ailén, Micaela, Dianela y Valentina (Grupos 1 y 2 tabla 20). Del mismo modo que en el análisis de lo sucedido en la consigna 3, recuperamos transcripciones que nos informan de modos de validación.

- Validación de supuestos empleando conocimientos matemáticos disponibles (propiedades, teoremas, definiciones). Por ejemplo, Valentina afirma *"Si son regulares éstos"*, Dianela responde *"No, si vos elegís un punto de acá y un punto de acá y los unís…"* y Valentina añade *"No, no es lo mismo regular que… regular e irregular que cóncavo y convexo, vos te estás refiriendo a eso"*. En el marco de este breve intercambio se pone en juego una propiedad vinculada con el análisis de convexidad para refutar, pues, Dianela busca validar que el cuerpo no es regular, consideración que Valentina refuta a partir de señalar la confusión entre los términos involucrados (que refieren a regularidad y convexidad, respectivamente).
- Validación de un supuesto a partir de analizar el mismo contrastando con datos o información emergentes o recogida durante el proceso de MM. Los datos o la información pueden provenir de distintas fuentes como libros de texto, Internet, entre otras. Por ejemplo, Larisa señala *"No sé, no estoy segura de qué significa polígono"*, Ailén responde *"Mmm sí. Y buscá la definición de polígono* [Buscan en Internet], *¿qué habíamos dado como definición de polígono?* En el ejemplo observamos que las estudiantes buscan en Internet la definición de polígono para analizar si una determinada figura cumple o no la definición, por lo que recurren a infor-mación no dada para avanzar en la validación de un supuesto.
- Validación de un supuesto a partir de analizar los datos o informaciones disponibles durante el proceso de MM. La información proviene, en general, de la observación e inspección de modelos concretos o imágenes visuales dados/as (Ver figura 5). Por ejemplo, en el marco de analizar las representaciones en material concreto de las figuras Ailén señala *"Estos de acá es como que todos tienen una base plana"*. Es decir, a partir de la manipulación y visualización establece el supuesto de que la base de esas figuras es plana.
- Validación de un supuesto a partir de la utilización de conocimientos de distinta índole derivados de la experiencia personal o compartida. Por ejemplo, al analizar las figuras, Ailén señala *¿Éste está lleno?* y Valentina a partir del empleo de conocimientos que posiblemente provengan de su experiencia cotidiana responde *"No, al obelisco se puede entrar y subir al obelisco, no está lleno. No es una cosa maciza o sea se puede entrar, tiene escalera, se puede subir"*.

Encontramos que las estudiantes al reunirse entre ellas focalizan en lograr una producción compartida, pero no analizan la caracterización producida revisando si realmente las mismas resultan excluyentes. Por esto, no encontramos evidencia en sus intercambios de validación del modelo.

A continuación, avanzamos con el segundo grupo de estudiantes que se conforma por Macarena, Yamila, Guillermina, Zoe, Victoria y Martina (Grupos 3 y 4 tabla 20). Del mismo modo que en el análisis de lo sucedido en la consigna 3, recuperamos transcripciones que nos informan de modos de validación puestos en juego por este grupo.

- Validación de supuestos empleando conocimientos matemáticos disponibles (propiedades, teoremas, definiciones). A modo de ejemplo, encontramos que Victoria pregunta al interior del grupo *"¿Qué es un poliedro convexo?"* y Zoe responde *"Yo no me acuerdo la definición, pero vos tenés en cada cara, un plano que contenga la cara, para un lado del plano tiene que estar contenido todo el poliedro"*. Luego, analizan empleando la caracterización proporcionada por Zoe si las figuras dadas son o no convexas.

- Validación de un supuesto a partir de analizar el mismo contrastando con datos o información emergentes o recogida durante el proceso de MM. Los datos o la información pueden provenir de distintas fuentes como libros de texto, Internet, entre otras. Este grupo de estudiantes en diversos momentos recurren a la búsqueda de información variada en el material de la asignatura GEE de otros años y en el libro de geometría métrica Puig Adam (1980) para aceptar y refutar afirmaciones. Por ejemplo, Macarena señala *"Dejame que tome el apunte* [Refiere al material de la asignatura de GEE de otros años], *algo, porque capaz que ninguno de éstos de acá sea poliedro"* y Guillermina leyendo el material responde *"Ah, puede ser, vamos a buscar la definición de poliedro.* […] *Los lados de una cara pertenecen a otra y sólo a otra"*. Y Macarena establece entonces *"Claro, esto* [Refiere a la imagen 12, Ver figura 5] *no sería entonces un poliedro"*. Es decir, determinan que una figura no es poliedro a partir de analizar la definición de poliedro convexo del libro de cátedra de GEE, posiblemente, debido a que la definición de poliedro se incorpora al apunte en el año 2018 y no la tienen disponible en el apunte de los años anteriores.

- Validación de un supuesto a partir de analizar los datos o informaciones disponibles durante el proceso de MM. La información proviene, en general, de la observación e inspección de modelos concretos o imágenes visuales dados/as (Ver figura 5). Por ejemplo, Macarena le solicita un determinado cuerpo a la Profesora Laura y al observarla señala *"Claro, entonces ya no cumple, porque esa arista tendría que ser compartida con estas caras nomas, con dos y acá van cuatro ya. Bien, ahí ya le encontramos el defecto"*. Es decir, requiere observarla en material concreto para analizar una condición y descartarla como posible poliedro.

- Validación a partir de sugerencias y/o afirmaciones de una Profesora. Observamos en este grupo que en diversas ocasiones realizan preguntas a la docente para sortear inquietudes. Por ejemplo, surge la duda al interior del grupo con respecto a qué es un polígono, entonces requieren a la Profesora Laura para consultarle, Macarena afirma *"Acá, esto, polígono convexo no es, pero no sé si es cóncavo"* y la Profesora Laura responde *"¿Cómo definieron poligonal?, fíjate"* y le entrega el libro Puig Adam (1980). Esta intervención y propuesta de empleo de un determinado material bibliográfico resulta fundamental para refutar que, por ejemplo, la imagen 11 es un poliedro (Ver figura 5).

Posteriormente, se realiza un debate colectivo en el que ambos grupos presentan su producción. En el marco de este debate observamos que prevalece la voz de la Profesora Laura y de Macarena. Encontramos que no parece haber espacio de validación de los modelos producidos por cada uno de los grupos a partir de preguntas de las propias estudiantes, sino que cada grupo expone y la Profesora en momentos realiza preguntas, privilegiando la voz de Macarena. En este marco y teniendo en cuenta que nuestro objetivo consiste en estudiar modos de validación enfatizamos en dos situaciones.

- La Profesora Laura pregunta en reiteradas oportunidades si la imagen 11 sería o no poliedro (Ver figura 5) incentivando a Macarena a validar su respuesta, pero esta estudiante no avanza en responder y el resto de las estudiantes no interviene.
- Cuando el grupo (1 y 2) que reportamos en primer lugar presenta su producción, la Profesora Laura avanza en refutar su producción afirmando *"¿Éste sería un poliedro para ustedes?, y está en el grupo uno. Éste es el 12* [Tiene el material concreto de la figura 12 en la mano que se conforma por dos pirámides con una arista común, Ver figura 5]. *Acá éste tiene caras, vértices y aristas, no tiene huecos y sin embargo aparecía en el otro grupo en el que no le habíamos puesto poliedros"*. En esta situación las estudiantes no responden y tampoco continúa la discusión.

De modo general, en el cierre de la clase no encontramos la validación del modelo. Puesto que, focalizan en afirmar o refutar supuestos y las dos consideraciones mencionadas anteriormente que podrían incentivar la validación o refutación no se discuten.

En la clase siguiente, inicialmente se destinan unos minutos para que cada grupo, teniendo en cuenta las discusiones de la clase anterior, establezca una caracterización de los grupos de figuras. Las estudiantes, se agrupan del siguiente modo: grupo 1 (Larisa, Ailén, Eugenia y Marina), grupo 2 (Micaela, Guillermina, Dianela y Valentina) y grupo 3 (Macarena, Yamila, Victoria, Martina y Pablo).

Al interior de los grupos en estos primeros intercambios observamos que los modos de validar predominantes son los mismos que en la clase anterior. A pesar de esto, destacamos que en los grupos emergen ideas que se sustentan en lo sucedido durante la clase anterior.

Por ejemplo, el grupo 1 hace referencia a que las imágenes 12 y 17 (Ver figura 6) no se encuentran en el grupo de poliedros porque concurren más de dos caras en una misma arista, posiblemente influenciadas por las ideas presentadas por sus compañeras en la clase anterior, es decir, validan a partir de conocimientos puestos en juego por sus compañeras y enfatizados y aceptados por la profesora. De igual modo, el grupo 2 hace referencia a que las imágenes 2 y 8, 11 y 17 (Ver figura 6) no son poliedros por no tener caras poligonales, supuesto que se sustenta en una propuesta de la profesora que se acerca al grupo y les sugiere buscar en el libro Puig Adam (1980) la definición de línea poligonal. Ambas validaciones podrían relacionarse con una validación por autoridad, pues es la docente quien muestra aceptar dichas ideas.

Posteriormente, se realiza un debate grupal donde emerge la siguiente definición de poliedro.

TABLA 88 | *Respuesta a consigna 4 comunidad clase (Fuente propia).*

Poliedro: Caras planas, vértices y aristas. No posee huecos. Las caras son polígonos. Por aristas concurren solamente dos caras que se encuentran en distintos planos.

En el marco de la discusión de la que emerge la caracterización anteriormente presentada, la Profesora Laura pregunta al grupo 1 por qué no es polígono una de las caras de la imagen 11 (la delimitada por dos líneas poligonales) y Larisa afirma *"Tiene un hueco"*. Así la Profesora Laura propone al grupo 2 que expliciten la idea que tenían al respecto (sugerida por ella con anterioridad a partir de la lectura del libro Puig Adam, 1980) y Guillermina señala *"Nosotras decíamos a qué llamábamos polígono, y bueno, en la cara de la figura 11 digamos, la de arriba, hay dos líneas poligonales cerradas"* y Macarena añade *"Como en la 8"*. En estos intercambios observamos que validan a partir de conocimientos emergentes en el proceso de MM y, puestos en escena a partir de dialogar, reflexionar y consensuar. Tales acciones, se vinculan con sentidos atribuidos por las futuras profesoras a la validación luego de vivir el escenario de MM.

Observamos que hasta este momento se validan supuestos en el sentido de (Hankeln, 2020), pero ningún grupo propone validar o refutar el modelo producido. Es decir, las estudiantes analizan en profundidad cada una de las imágenes dadas. La validación de este primer modelo (Ver tabla 88) es incentivada por la Profesora Laura a partir de la siguiente pregunta *"¿Eso me permite a mi asegurar que eso me va a definir a los poliedros?"*.

Luego de reflexiones de las futuras profesoras Macarena interviene:

Nosotras lo que pensamos es que la definición a la que llegamos que está ahí en el pizarrón es como que si vos no aclarás que las caras contiguas, o sea las que concurren en una arista no están en distintos planos es como que podés tener el desarrollo plano de la figura y eso no es un poliedro.

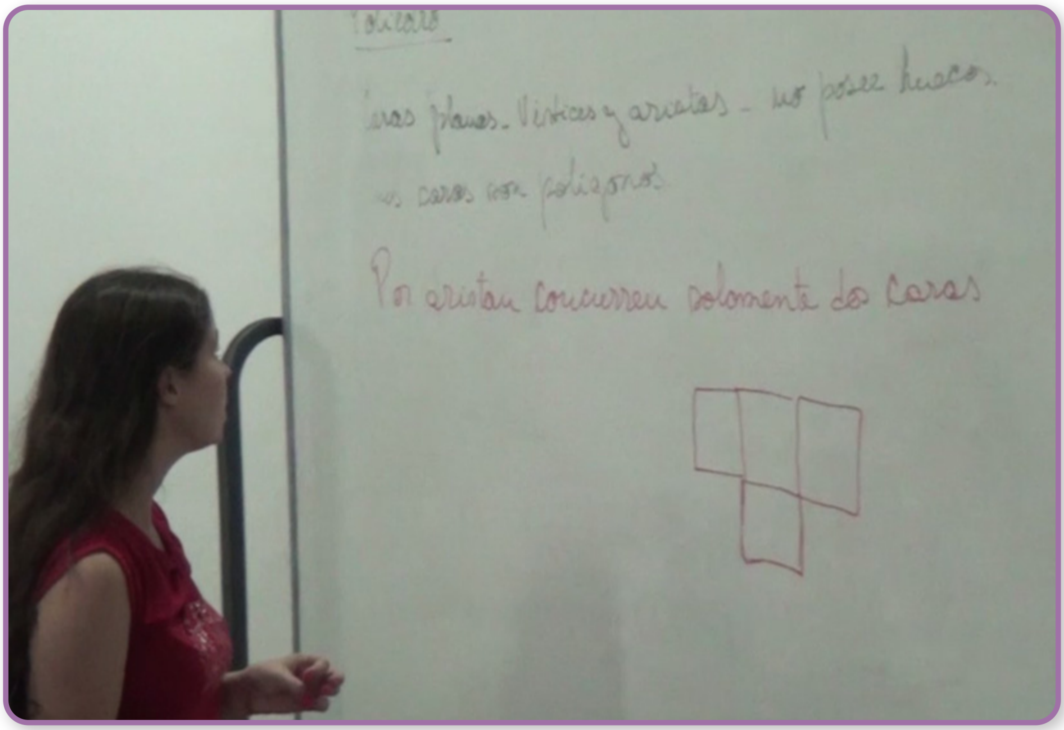


FIGURA 10 | *Validación de primera definición producida por la clase.*

A partir de la propuesta de Macarena de agregar la representación plana como dato empírico que se emplea para analizar y validar el primer modelo, como grupo deciden modificarlo. Para esto, en un primer momento Macarena propone agregar *"Las caras contiguas están en distinto plano"* (caracterización que toma del material de la asignatura GEE del año 2017 para poliedros convexos), consideración que Guillermina propone modificar por "*Por aristas concurren solamente dos caras que se encuentran en distintos planos"*.

Posteriormente, abordan la consigna 5 (Ver tabla 9) en la que buscan y analizan diversas definiciones de poliedro con el fin de cotejar y analizar la propia. Las estudiantes continúan agrupadas del mismo modo. Para estudiar los modos de validación que emergen en los intercambios de los grupos y en la presentación a la comunidad clase, como en los casos anteriores, presentamos ejemplos de intervenciones de las futuras profesoras que consideramos como representantes de cada uno. Encontramos validación de diferentes supuestos y de definiciones, que llamaremos modelos, no siempre equivalentes.

- Validación de un supuesto a partir de analizar el mismo contrastando con datos o información emergentes o recogida durante el proceso de MM. Los datos o la información pueden provenir de distintas fuentes como libros de texto, Internet, entre otras. Por ejemplo, Larisa (Grupo 1) señala *"Pero si son cuatro poliedros por separado sí sería serían poliedro* [Refiere a la imagen 17]" (Ver Figura 6). Es decir, analizan a partir de una definición que emerge del proceso de MM el supuesto de si una determinada figura tridimensional es o no poliedro o qué modificaciones se le deberían realizar para que sea poliedro.

- Validación de un supuesto a partir de la utilización de conocimientos de distinta índole derivados de la experiencia personal o compartida. Por ejemplo, Guillermina (Grupo 2) *"No, el hueco, eso no… no es plano"*, Dianela responde *"Plano es plano"* y Micaela agrega *"Si vos pasas la mano no te hundís…"*. En este caso las estudiantes validan si una determinada cara de una figura tridimensional es plana (Imagen 11, Figura 6), a partir de un análisis que toma en consideración una experiencia que se basa en pasar la mano y sentir si es liso o no.

- Validación de modelo empleando conocimientos matemáticos disponibles (propiedades, teoremas, definiciones). A modo de ejemplo, Marina (Grupo 1) señala *"Y pero dice caras poligonales"* y Ailén (Grupo 1) responde *"Claro, caras poligonales se supone que son planas"*. Es decir, encuentran términos redundantes al analizar una definición basadas en el concepto de poligonal. Observamos otro ejemplo, cuando Yamila (Grupo 3) señala: "*No te dice ni siquiera a qué se refiere con cuerpo, ¿tiene volumen?, ¿una altura?, ¿vez que te dice tiene altura? Si tiene altura ya te deja de decir que es algo chatito. Es como que digamos, algunos conceptos los tiene metidos sin haberlos definido previamente"*. En este caso, Yamila emplea conocimientos acerca de qué debe cumplir una definición para considerarse como adecuada en el marco de una teoría axiomática particular.

- Validación de un modelo a partir de analizar los datos o informaciones disponibles durante el proceso de MM. La información proviene, en general, de la observación e inspección de modelos concretos o imágenes visuales dados/as (Ver figura 5). Por ejemplo, el grupo 1, en la producción escrita que presenta a la comunidad de práctica afirma que una definición de poliedro que analizan es *"Tienen todas sus caras planas"* y señalan que *"Algunas imágenes que cumplen esta definición serían la 2, 8, 11, 12 y 17 pero estos no son poliedros. Agregaríamos las condiciones de nuestra definición"*. Es decir, validan apelando al análisis de las imágenes dadas y proponen la modificación de la misma. Observamos un ejemplo similar en el grupo 2, cuando Dianela señala *"Que tienen todas sus caras poligonales son poliedros"* y Valentina responde *"Entonces ésta entraría"*.

- Validación de un modelo a partir de analizar el mismo contrastando con datos o información emergentes o recogida durante el proceso de MM. Los datos o la información pueden provenir de distintas fuentes como libros de texto, Internet, entre otras. Por ejemplo, en el grupo 2 al analizar definiciones realizan una búsqueda de la noción de cuerpo en Internet para determinar si dicha definición resulta adecuada o no. Micaela señala *"¿En el diccionario de Google?"* y Valentina afirma *"Dice, cuerpo geométrico…"*. Luego, validan la definición en función de dicha definición emergente.
- Validación de un modelo a partir de la utilización de conocimientos de distinta índole derivados de la experiencia personal o compartida. A modo de ejemplo, Eugenia señala *"Para mí una superficie es algo plano"*, Marina agrega *"Claro, como un plano, el plano es una superficie para mí"* y Ailén señala *"Para mí es como la piel de algo"*. Las estudiantes a partir de su experiencia con la noción de superficie analizan su significado en una definición para decidir no considerarla como potencial modelo a utilizar.
- Validación a partir de sugerencias y/o afirmaciones de una Profesora. Por ejemplo, Martina señala *"Profe, nosotros acá también buscamos lo que dice Wikipedia de poliedro. Además de la definición formal* [Refiere a una definición dada por la Profesora Laura al grupo, esto se detallará en parta 6]" y la Profesora Laura responde *"Entonces, lo que ustedes tienen que ver es, si esto que está acá, es equivalente a lo que vimos y si en realidad define lo que ustedes consideran que es"*, consideración que incentiva al grupo a seguir validando en dicha línea.

Reconocemos la complejidad de los procesos de MM que promueven la creación de un modelo y conocimientos que permitan clasificar para conformar clases de cuerpos. Si bien avanzamos sobre esto en la sexta parte, cabe indicar que las estudiantes fueron dotando de sentido a la selección y validación de supuestos en el marco de un proceso de MM al cual le atribuyeron. La selección de supuestos que dan marco al modelo (provisorio) que se construye es un aspecto fundamental al momento de modelar. Poder validar esos supuestos resulta dificultoso, pero es en las confrontaciones o contrastes con conocimientos propios o ajenos que los supuestos se consolidan.

También, la validación y confrontación de los primeros modelos provisorios e incluso de los producidos en el marco de interesantes debates entre todas las futuras profesoras y profesoras potencian la reflexión con respecto a lo realizado y la necesidad de modificar ciertas características a fin de encontrar el modelo que mejor se aproxima a la problemática en juego.

11.1.2. | MOMENTO 4: VALIDACIÓN AL ESTABLECER RELACIONES ENTRE NÚMEROS DE CARAS, VÉRTICES Y ARISTAS DE POLIEDROS

En el momento 4 se desarrolla la consigna 7 (Ver tabla 11) que invita a formular conjeturas en relación con números de vértices, caras y aristas de poliedros y propone un trabajo de exploración con el software *GeoGebra*. Esta consigna se desarrolla en un total de 100 minutos. Esta última consideración es relevante, pues, si se considera tanto la formulación como la validación de conjeturas, la disponibilidad de tiempo acotada puede haber afectado en la producción impidiendo avanzar más de lo posible a cada grupo de futuras profesoras.

Durante este momento se encuentran presentes 3 grupos. El grupo 1 formado por Larisa, Eugenia, Marina y Ailén, el grupo 2 constituido por Micaela, Dianela, Guillermina y Zoe y el grupo 3 conformado por Macarena, Yamila, Paula, Victoria y Martina.

En el desarrollo de esta consigna observamos que las futuras profesoras en general cuentan números de caras, vértices y aristas y luego intentan establecer relaciones probando con diferentes operaciones para vincular tales números. En ese trabajo predominan validaciones a través de pruebas empíricas en las que cotejan si la relación establecida se cumple para distintas figuras tridimensionales. Es por esto que decidimos focalizar el análisis en la presentación de la producción a la comunidad clase y las discusiones que se generan en relación con la validación en tal momento de la clase.

En el debate colectivo cada grupo presenta su producción. En primer lugar, acuerdan que: la letra C denota número de caras de la figura tridimensional, V número de vértices de la figura tridimensional y A número de aristas de la figura tridimensional.

El grupo 1 comienza presentando su producción y se genera el siguiente diálogo:

> Marina: *Vimos que la cantidad de aristas es mayor que la cantidad de vértices y caras, y que la suma de los vértices y las caras es mayor que el de las aristas.*
>
> Profesora Laura: *Esa es una primera relación que ustedes encontraron, ¿cómo encontraron esa relación?*
>
> Marina: *Probando.*
>
> Ailén: *Fuimos viendo en cada figura.* [...] *Después que la suma de vértices, aristas y caras es un número par.*
>
> Profesora Laura: *¿Siempre es un número par?*
>
> Marina: *En las que probamos es un número par.*

Ailén: *Otra particularidad que encontramos es que en las pirámides la cantidad de caras y de vértices es la misma.*

Profesora Laura: *O sea, la relación que ustedes encontraron relacionando los tres elementos que les pedía, es que C+V+A siempre les da un número par.*

Marina: *También que la suma de caras más vértices es mayor que la cantidad de aristas.*

Profesora Laura: *Buenos acá también podrían haber hecho alguna relación entre esos elementos que encontraron y tratar de relacionar los tres elementos que les pedía, pero bueno, lo que ustedes encontraron es eso.* [. . .] *¿Y cómo hicieron para decir esto se cumple?*

Marina: *Lo primero que hicimos fue contar todos los vértices, caras y aristas, y después fuimos viendo qué de cada imagen tenían en común, ahí encontramos qué tenían en común las pirámides y con las otras no, por eso dijimos que eso es solo para las pirámides y fuimos buscando, sumando.*

Profesora Laura: *Pero siempre a partir de contar.*

La profesora registra en el pizarrón lo propuesto por las estudiantes tal como se muestra a continuación.

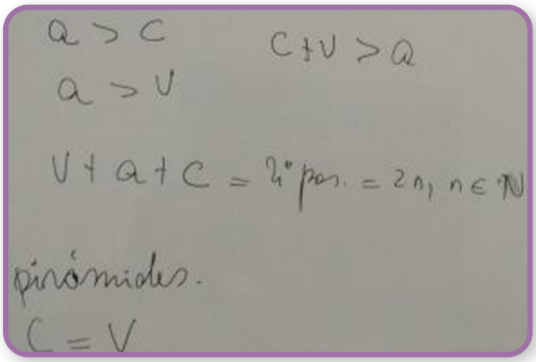


FIGURA 11 | *Pizarrón con conjeturas propuestas por el grupo 1.*

Observamos que las futuras profesoras del grupo 1 encuentran 5 relaciones. Al interior del grupo validan empíricamente a partir de información disponible, esto es, recurren a las figuras tridimensionales dadas apelando a las representaciones en material concreto para contar y contrastar las conjeturas que establecen. En la presentación a toda la clase no avanzan en los modos de validación, pues no se pone a prueba el análisis de la veracidad o falsedad de las conjeturas posiblemente por el escaso tiempo disponible.

Seguidamente presenta el grupo 2 su producción:

Guillermina: *Nosotras primero estuvimos buscando relación entre aristas y caras, entre vértices y caras. Primero* [...] *nosotras contábamos la cantidad de lados que tenía cada cara y después la dividíamos por dos, porque eran contiguas dos a dos.* [...]. *La suma de los lados de todas las caras dividido 2 nos daba la cantidad de aristas.*

Profesora Laura: *O sea, buscaron una relación, ¿podía no cumplirse esa relación que buscaron las chicas?*

Guillermina: *En las que probamos nosotras en todas se cumple.*

Profesora Laura: *Y, ¿por qué podemos asegurar que se cumple en todos?*

Micaela: *Por definición de poliedro.* [...] *Que en cada arista no concurren más de dos caras.*

Profesora Laura: Claro, en cada arista sí o sí concurren dos caras por lo tanto esa relación tiene que cumplirse si yo lo que tengo es un poliedro. O sea, fíjense ahí encuentran una relación que tienen un modo de decirme que se cumple para todos sin necesidad de contar. O sea, yo puedo contar, pero después tengo un modo de poder asegurarlo.

Guillermina: *Encontramos para los poliedros convexos que 2.C-2=A. Eso fuimos probando con poliedros convexos y se cumplía, cuando probamos con un cóncavo no se cumplió.* [...]

Profesora Laura: O sea, si bien no lo puedo generalizar, sí puedo asegurar que en los cóncavos no.

Guillermina: [...] *La última que encontramos, relacionamos primero vértices y aristas y nos dimos cuenta que A-V+2=C. Bueno, a partir de ahí fuimos sacando, despejando vas encontrando.*

Micaela: *Queríamos encontrar la relación entre aristas y vértices y dijimos, bueno, ya que el número de aristas siempre es mayor que el número vértices, ¿qué pasa si las restamos? Y en cada figura que probamos siempre nos faltaban 2 para llegar al número de caras.* [...] *Armamos esa ecuación y a partir de esa ecuación probamos, digamos, bueno si tengo el número de caras y el número de aristas te puedo conseguir el número de vértices. Entonces dijimos: ¡Guau, Generalizamos!* [...]

Profesora Laura: *¿Y ese se les cumplió para el cóncavo también?*

Micaela y Guillermina: *Sí.*

Micaela: *De los que teníamos acá en clase que nosotras pudimos probar se cumple en todos, ninguno no se cumplió esa relación. Probamos con el 13 porque tiene una forma bastante particular* [Similar a una letra I en tres dimensiones, Ver figura 5], *puede ser que no la cumpla y contamos y se cumplió.*

En el pizarrón lo propuesto se registra lo siguiente de lo propuesto por el grupo 2.

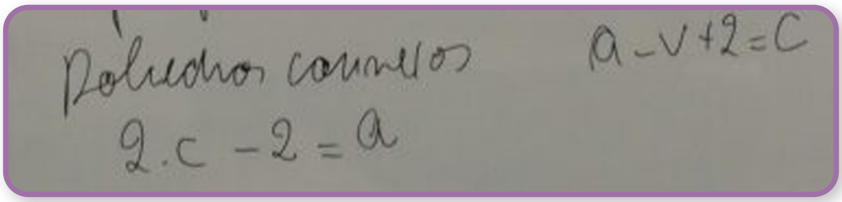


FIGURA 12 | *Pizarrón con conjeturas propuestas por el grupo 2.*

El grupo 2 propone tres conjeturas. La primera no es explicitada por la Profesora Laura en el pizarrón, posiblemente por poner en juego la variable cantidad de lados de cada cara, pues, tal variable no se propone para ser utilizada en la consigna. Con relación a esta primera conjetura, que propone sumar la cantidad de lados de cada cara que conforma al poliedro y dividir dicho número entre dos para obtener la cantidad de aristas, destacamos que las estudiantes la validan a partir de un conocimiento matemático disponible. Específicamente, recurren a una condición de la definición de poliedro aplicando la misma. Por lo que aplican el modelo anteriormente producido (Bassanezi, 2002) para validar un modelo nuevo.

Con relación a la conjetura para poliedros convexos observamos que la refutan para poliedros cóncavos apelando a un contraejemplo y la establecen para poliedros convexos a partir de validaciones a través de pruebas empíricas que consisten en contrastar que la misma es válida en las figuras dadas, pero no avanzan en el análisis de la conjetura en la comunidad clase.

Además, este grupo propone la relación de Euler mostrando entusiasmo por poder emplear tal fórmula para encontrar la cantidad de alguno de los tres elementos (vértices, caras y aristas) conociendo la cantidad de dos de ellos. Destacamos que si bien recurren a una validación a través de pruebas empíricas (Balacheff, 2000) en las que verifican en ciertas figuras la conjetura, las estudiantes buscan un caso que consideran podría no cumplir la relación planteando explícitamente el problema de la generalización de la conjetura y asumiendo, que posiblemente, por cumplir dicho ejemplo la conjetura es verdadera. En relación con lo mencionado, señalamos que de la caracterización de pruebas empíricas de Balacheff (2000) lo realizado por las futuras profesoras se vincula con una experiencia crucial, en la que se verifica una conjetura en un caso "complicado" y se asume que, si se verifica en tal caso, se verificará siempre.

Finalmente, exponen el trabajo realizado las estudiantes del grupo 3:

Macarena: *Sí, llegamos a la misma fórmula.*

Profesora Laura: *¿Cómo llegaron?, ¿a la misma y la escribieron así igual que ellas?*

Macarena: *Sí, es la misma: C+V=A+2* [...].

Martina: *Contamos en cada cuerpo la cantidad de caras, de aristas y de vértices y después tratamos de llegar a una relación.*

Paula: *Empezamos a relacionarlos.* [...] *Yo empecé sumando vértices y caras y después los comparaba con la cantidad de aristas que tenía, entonces siempre me faltaba 2 para llegar al número de la suma.*

Macarena: *Claro, usamos el software y manipulamos los cuerpos.* [...] *Como yo ya sabía cómo era la fórmula para los poliedros convexos que es aquella digamos* [Señala relación de Euler escrita en el pizarrón] *y ya está demostrada, entonces yo sé que es verdadera para todo poliedro convexo. Mi duda era si para los cóncavos también, entonces yo empecé a experimentar con los cóncavos y veía que funcionaba, pero en realidad era una conjetura porque yo no lo demostré para ver si es válido para todos. Tampoco puedo decir que es falsa la conjetura porque no encontré contraejemplo digamos.*

El grupo 3 propone como conjetura la relación de Euler. Si bien señalan que la conjetura es la misma que la propuesta por el grupo 2, destacamos que las mismas son equivalentes, pero no las establecen con el mismo razonamiento tal como se evidencia en la explicación proporcionada por Micaela y Paula respectivamente. Además, establecen la conjetura a partir de validaciones empíricas contando en las imágenes dadas. Macarena explicita que como conoce la fórmula para poliedros convexos y su respectiva demostración, prueba en cóncavos la misma y descubre que siempre se verifica, incluso, esta estudiante realiza la siguiente representación (Ver figura 13) en el software para visualizar y mostrar que la relación es válida en pirámides, pues al mover el deslizador se pueden observar un número de ejemplos (pirámides) que verifican la relación tan grande como se quiera.

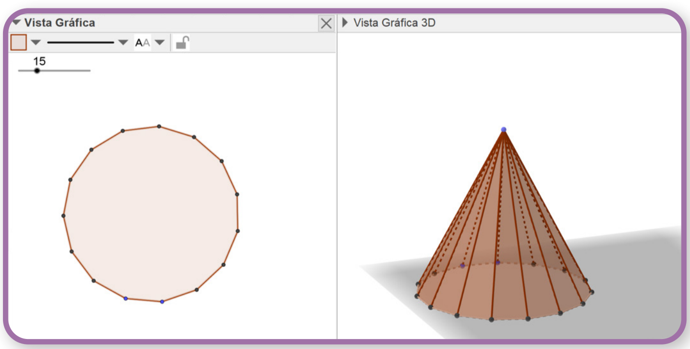


FIGURA 13 | *Representaciones en software propuestas por el grupo 3.*

La Profesora Laura no registra en el pizarrón la escritura alternativa de la relación de Euler propuesta por este grupo y, retomando lo señalado por Macarena se desarrolla el siguiente diálogo:

> Profesora Laura: *Bien,* [...] *ella dice, para los convexos sabe que se cumple porque conoce que hay una demostración para los convexos, pero no sabe qué pasa para los cóncavos. Se cumplió para éstos, pero hasta ahí es lo que sabemos.* [...] *Esa relación que ustedes fueron encontrando, lo que ustedes hicieron, ¿lo validaron?, ¿cómo lo validaron?*
>
> Martina: *Nosotras lo validamos a través de contar manualmente que se compruebe la igualdad que habíamos planteado, contándolo de modo manual y también lo contábamos con el software.*
>
> Micaela: *Sí, hicimos lo mismo.*
>
> Guillermina: *Claro, probando.*
>
> Larisa: *Viendo que esas propiedades se verifiquen en todos los poliedros que teníamos en las copias.*
>
> Profesora Laura: *Por ahora la relación de Euler es una conjetura que validamos con algunos ejemplos.*

Observamos que los tres grupos afirman reconocer en las acciones llevadas adelante la validación de las fórmulas producidas a partir de analizar las figuras dadas en los grupos de futuras profesoras 1 y 2, y en el grupo 3 las estudiantes también al recurrir a figuras representadas en el software *GeoGebra*. Consideramos relevante señalar que la decisión docente de no avanzar en el análisis con relación a la veracidad o falsedad de todas las relaciones propuestas por las futuras profesoras puede deberse por un lado a la poca disponibilidad de tiempo, por otro, a la necesidad de cumplir con los contenidos del programa de la asignatura que propone el abordaje de la relación de Euler y no necesariamente la formulación de conjeturas relativas a esa relación.

11.1.3. | MOMENTO 5: VALIDACIÓN EN PROBLEMÁTICAS FORMULADAS POR LAS FUTURAS PROFESORAS Y RELACIÓN DE EULER

Para avanzar en el estudio de modos de validación puestos en juego por las futuras profesoras en este momento apelamos a la producción de cinco grupos. Los grupos 1 (Larisa, Eugenia, Ailén y Marina), 2 (Micaela, Dianela, Guillermina y Valentina) y 3 (Macarena, Yamila, Martina, Paula y Victoria) desarrollan la Consigna 8 - primera opción (Ver tabla 12) en la que formulan y resuelven una problemática (Ver tabla 14). Los grupos 4 (Zoe y Juana) y 5 (Pablo) llevan a cabo la consigna 8 - segunda opción (Ver tabla 13) en la que se propone que validen la relación de Euler.

En esta sección focalizamos en los modos de validación puestos en juego por cada grupo en la presentación a la comunidad clase de lo realizado y en la producción escrita que entregan a la Profesora Laura, pues en las transcripciones de la clase en la que las estudiantes avanzan en la resolución del propio problema no emergen otros modos de validación esencialmente diferentes a lo ya presentado en los momentos 2 y 4. Cabe recordar que lo realizado en este momento forma parte de una de las evaluaciones de la asignatura para obtener la regularidad y/o promoción.

El grupo 1 formula la siguiente problemática *"Durante estas clases el problema que nos surgió es que en las definiciones aparecen términos que no comprendíamos, por ejemplo: superficie y sólido y esto nos dificultó poder comprenderlos"*. A partir de esto realizan una exploración en la búsqueda de analizar dichos términos y determinar qué término resulta más adecuado emplear en una u otra situación.

En la presentación explicitan que inicialmente buscaban *"Comprender el término de superficie en la definición de poliedros",* puesto que consideraban *"Por superficie algo plano, por ejemplo, cada cara del poliedro era una superficie, pero no en su totalidad"*, esto muestra una hipótesis por parte de las estudiantes con relación a la problemática. La misma es validada por el grupo a partir de analizar la misma recurriendo a datos o información emergentes o recogida durante el proceso de MM. En este caso, los datos o la información provienen de Internet y libros de geometría. En relación con lo mencionado afirman *"Llegamos a comprender que la superficie a la que hace referencia la definición es el conjunto de las caras del poliedro, siendo cada una de ellas un polígono"*.

Posteriormente, señalan que surge otra problemática, específicamente Ailén afirma *"Si área era lo mismo que superficie, porque en las definiciones en algunas lo tomaba, decía el área de la superficie y entonces ahí era, no era lo mismo área que superficie"*. Este nuevo problema que surge en el desarrollo del proceso de MM las lleva a buscar y analizar nueva información. Validan este supuesto al analizar datos o información emergente, en particular, nuevas definiciones obtenidas de Internet e imágenes de desarrollos planos de poliedros.

Finalmente, se genera el siguiente diálogo:

> Ailén: *La otra problemática que se nos había presentado era entender a qué se refería con sólido y si cuando hablaba de sólido era que el poliedro estaba lleno o vacío. Y si sólido era lo mismo que cuerpo porque en algunas definiciones aparecía sólido y en las otras nos hablaba de un cuerpo". Entonces nosotras también investigamos en diferentes bibliografías de libros y de Internet y sacamos las siguientes definiciones que: Se llama cuerpo sólido o simplemente sólido a la porción del*

espacio limitada por superficies planas o curvas; Un sólido o cuerpo geométrico es una figura geométricamente de tres dimensiones, largo, ancho y alto, que ocupa un lugar en el espacio y tiene volumen.

Marina: *Y de esas dos definiciones dedujimos eso de lleno o vacío, deducimos que es indistinto porque según…*

Ailén: *Claro, para nosotros llenos era algo que era macizo sería un prisma de madera, todo del mismo material. Y vacío nos referíamos a eso* [Señala la pirámide en cartulina], *una de cartulina que adentro tenía aire, esa era nuestra idea.*

Larisa: *Que no importa cómo se lo tome que siempre vamos a encontrar una largo, un ancho y alto.*

Ailén: *Y bueno, y leyendo las definiciones llegamos a concluir que sólido y cuerpo habla de lo mismo, hace referencia a lo mismo en las definiciones.*

Observamos que las futuras profesoras recurren para validar los supuestos que van estableciendo a datos o información emergente y disponible. Además, recurren específicamente a una figura tridimensional dada (pirámide construida en cartulina dada) como medio para validar con un ejemplo que se cumple lo que afirman y explicar tal afirmación.

El grupo 2 propone como problema *"Si tenemos distintas figuras geométricas (triángulos, rectángulos, cuadrados, pentágonos, etc.) al unirlos podemos formar poliedros. Pero, ¿siempre se puede? (tomando cualquier figura y cantidad)"*. Inmediatamente después del problema señalan *"Nuestra idea es ver que la respuesta va a depender de distintas características de las figuras y lo analizaremos en la clase con los demás grupos utilizando el Polydron y otros elementos (figuras regulares, irregulares, circulares)"*. Esta última afirmación se conforma como hipótesis que da respuesta al problema y validan a partir del empleo de datos o información emergente, recurriendo al material didáctico Polydron (Conjunto de polígonos de plástico que poseen bisagras para unirse y formar cuerpos. Tal material se dispone en la facultad en la que realizamos la investigación).

Durante la clase en la que como grupo abordan la problemática experimentan con este material. En la presentación entregan diferentes figuras a las futuras docentes de todos los grupos y afirman *"Intenten armar, ver si pueden formar sin que sobren ni que falten, o sea usando todas, exactamente todas si pueden formar un poliedro. Si es posible que ustedes con estas piezas armen un poliedro, ¿sí?"*. A modo de ejemplo presentamos a continuación un grupo de figuras entregadas por las futuras profesoras del grupo 2.

FIGURA 14 | *Ejemplo de figuras entregadas para analizar si forman un poliedro por parte del grupo 2.*

Con relación al ejemplo anterior (Ver figura 14) Micaela explica *"Ahí por ejemplo no se pueden cerrar, o sea no llegan a juntarse los triángulos. Lo que pasó es que el triángulo tiene la altura igual a la apotema del hexágono, entonces, ¿qué pasa? no es posible"*. En este sentido, validan que su hipótesis es verdadera a partir de datos o información emergente que se conforma por el análisis de las figuras que se pueden construir con Polydron y recurren a conocimientos matemáticos disponibles.

En el ejemplo presentado anteriormente y otros las futuras profesoras del grupo 2 señalan *"No siempre vamos a poder obtener poliedros, ya que va a depender de la cantidad de polígonos, de la relación entre sus lados, de las alturas de los mismos y de la forma"*.

Posteriormente hacen referencia a un nuevo problema que emerge en el desarrollo del problema anterior. Micaela afirma:

> *¿Qué pasa con los círculos? Porque nosotros hablamos de que un poliedro se puede formar con figuras planas, polígonos. Pero un círculo también es una figura plana, entonces pensamos, si tenía dos círculos, ¿con que otra figura plana los podría llegar a unir? Está el rectángulo, pero ¿qué pasa?, hay que doblarlo y ahí salió la definición de cuerpo redondo, que es eh un cuerpo que tiene una o más caras curvas. Son todas figuras planas que al curvar el rectángulo los podés unir a las tres, pero esto ya no es un poliedro porque tiene una cara curva que es el rectángulo.* […] *Y los círculos no son polígonos. Pero nosotros en todo el recorrido hablamos de figuras planas enton-ces quise hacer esa separación.*

Es decir, validan nuevamente recurriendo a datos o información emergente, otorgando en todo momento en la toma de decisiones un rol preponderante al análisis con material concreto de las afirmaciones realizadas. Incluso, avanzan en la presentación de una clasificación de cuerpos redondos.

El grupo 3 propone la siguiente problemática:

> *Con las características descriptas en los poliedros, el concepto de ángulo no se menciona. Dado los contenidos estudiados en geometría plana acerca de polígonos, nos preguntamos si existen o no ángulos en el espacio y cómo se definen, miden y clasifican, si existen ángulos exteriores.*

Inicialmente, Martina señala *"Encontrábamos ángulos cuando dos lados concurrían en un vértice, si tomamos el espacio y tomamos tres aristas en vez de dos lados concurrentes en un vértice, ¿podemos llegar a la misma definición que lo que hacíamos en Geometría Plana?"*. El grupo establece inicialmente una hipótesis y afirman:

> Victoria: *Entonces, bueno, para empezar a indagar un poco* [...] *usamos la vista gráfica de 3D y decidimos graficar un tetraedro. Que era uno de los poliedros más sencillo para analizar* [...] *Empezamos a intuir, bueno en el poliedro en cada vértice concurren tres aristas, o en el caso del icosaedro en cada vértice concurren cinco, entonces empezamos a intuir que esa podía ser, por ahí iba la definición de ángulo del poliedro y a la vez también tenemos la situación de que en cada arista concurren dos caras, en el caso del tetraedro, entonces ahí también podemos...*
>
> Martina: *Decir ahora que, en el espacio, no sólo para llamar a ángulos necesitamos la concurrencia de aristas, sino que ahora tenemos la concurrencia de caras también.*
>
> Macarena: *Bueno, nosotras indagamos en varios materiales, pero hicimos más que nada hincapié en las definiciones del Puig Adam.*

Observamos que las futuras profesoras inicialmente para validar la hipótesis establecida recurren a datos o información emergente a partir de la experimentación con el software *GeoGebra* y de conocimientos matemáticos previos vinculados con la noción de ángulo plano. Sin embargo, posteriormente recurren al libro Puig Adam (1980) que conforma la bibliografía obligatoria de la asignatura GEE. La presentación continúa con una presentación de Macarena apoyada de representaciones que realiza en el pizarrón de las definiciones de ángulo diedro, ángulo triedro y ángulo poliedro. En este caso, las estudiantes parecieran responder su propio problema y validar la respuesta por autoridad, apelando al libro que utilizaron en sus vivencias previas en GEE.

Una vez presentadas tales definiciones Paula afirma *"Siguiendo con las preguntas que nos habíamos hecho al principio ahora que ya tenemos las definiciones diferentes pensamos, como* *hacíamos en el plano, nos preguntamos ahora si los ángulos que tenemos en el espacio también los podemos medir"*.

Avanzan siguiendo los aportes de Puig Adam (1980) y afirman que deben recurrir al concepto de sección recta. Se producen las siguientes explicaciones:

> Paula: *Lo que estoy midiendo en realidad es un ángulo plano que va a ser la medida del diedro. Si nos preguntamos ahora qué pasa con los triedros y los ángulos poliedros, queremos trazar la sección recta que dijimos que tenía que ser perpendicular a una de las, a una arista, no voy a poder en este caso saber si también va a ser perpendicular a la otra, entonces tengo un problema. Entonces lo que encontramos es que solamente voy a poder medir diedros en los triedros y en los ángulos poliedros también.*
>
> Martina: *Bien, con respecto a los ángulos exteriores, si hay ángulos exteriores también para medir en los poliedros también volvimos a jugar con la idea de ir del plano al espacio y rescatamos lo que aprendimos de la Geometría Plana que nos decían que los ángulos exteriores eran siempre los que estaban adyacentes a los ángulos interiores del polígono, ¿sí? Bajo esa afirmación dedujimos que en un ángulo exterior de un poliedro sólo es posible hablar de ángulos exteriores en los diedros, como dijimos anteriormente que son los que se pueden medir, ¿sí?*
>
> Macarena: *En mi caso yo había cursado* [Refiere a la asignatura GEE] *y habíamos visto medición de diedros digamos y nunca se mencionaba sobre las mediciones de los demás ángulos, de hecho, en los libros es como que tampoco estaba mencionado que los triedros no se pueden medir, ni el por qué.*
>
> Paula: *Lo concluimos nosotras.*

Encontramos que las estudiantes, a pesar de validar las afirmaciones basadas en lo propuesto en el libro Puig Adam (1980), logran establecer una conjetura y recurrir también para validarla a conocimientos matemáticos disponibles.

Posteriormente presenta Pablo su producción (Grupo 5). Este estudiante en la clase en la que aborda la respuesta a la consigna que lo invita a validar la relación de Euler para poliedros convexos trabaja junto a la Profesora Laura. Esta última le entrega las dos demostraciones que se proponen en el libro de la asignatura GEE que se toman de los libros Sánchez Mármol y Pérez Beato (1961) y Lakatos (1986). En la presentación focaliza en explicar paso a paso la demostración del libro Sánchez Mármol y Pérez Beato (1961). Es decir, valida por autoridad, repitiendo una demostración de un libro.

Finalmente, se genera el siguiente diálogo que da comienzo al trabajo de Juana y Zoe (Grupo 4) en relación con la misma consigna.

Profesora Laura: *Bien. Lo que vamos a hacer es, como las chicas también tienen que trabajar con el teorema de Euler, vamos a ver si trabajaron con la misma o con otra demostración, perdón, ¿con qué trabajaron ustedes?*

Zoe: *Sí, pero no planteamos…*

Juana: *Claro creo que entendimos mal o malinterpretamos la consigna.*

Profesora Laura: *No importa, ¿ustedes trabajaron con Euler?, pasen y lo vemos.*

Pablo: *¿Quiere que haga la de Lakatos también o no?*

Profesora Laura: *Ah, podría ser, pero espera que las chicas demuestren, después demostrás la de Lakatos.*

Observamos que la Profesora Laura parecería considerar que la validación que deberían hacer en este caso consiste en reproducir o producir una demostración. Las estudiantes comienzan su presentación afirmando lo siguiente:

Juana: *Lo que nosotras nos planteamos fue el tema de, como ya estaba la demostración en el libro y cuando hablaba de validarla, lo que intentamos fue que bueno tomamos la demostración como que la leyeron, la estudiaron.*

Zoe: *Como que está bien.*

Juana: *Lo tomamos como cierto, que está bien, no lo vamos a volver a demostrar porque ya está demostrado. Lo que hicimos fue como tomar varios ejemplos para poder dar a entender lo que dice la consigna o lo que falta entender de parte de la demostración. Pero lo que nosotras vamos a hacer no es demostrar.*

Las estudiantes inicialmente manifiestan que emplean otros métodos de validación que distan de una demostración que podría leerse en el libro. El análisis de la validación comienza a partir de recuperar las definiciones de poliedro convexo y cóncavo. Posteriormente, validan el modelo (relación de Euler) a partir de verificar con datos o información emergentes o recogida durante el proceso de MM. Los datos o la información se configuran a partir de diversas imágenes de poliedros convexos que obtienen de Internet.

Seguidamente, realizan el mismo proceso en diversas figuras tridimensionales cóncavas. Juana afirma *“Cuando los analizamos, los contamos y todo llegamos a que la relación se volvía a cumplir, pero no son convexos, sino son cóncavos. Entonces llegamos a que el recíproco del teorema de Euler no es cierto”*. En relación con esto se preguntan *“¿Por qué para estos poliedros no convexos se cumple la relación de Euler?, ¿qué características presentan estos poliedros?, ¿existe alguna regularidad entre los mismos?”*. En el marco de búsqueda de respuestas a estas preguntas realizan tablas en las que intentan establecer relaciones, por ejemplo, analizar números de aristas que concurren por vértices, sin embargo, afirman no encontrar alguna relación que les permita avanzar o concluir fundamentando por qué no logran encontrar contraejemplos.

Finalmente, analizan diversas figuras tridimensionales estrelladas y se sorprenden porque la relación se sigue cumpliendo. Cabe mencionar que en ningún momento la Profesora Laura hace referencia a la definición de poliedro propuesta (Ver tabla 96) que se basa en aportes de Puig Adam (1980) y Lakatos (1986), que busca eliminar de la misma las figuras que no cumplen dicha relación. Se genera el siguiente diálogo:

> Juana: *Claro, nuestro problema fue el encontrar poliedros que eran cóncavos y que si cumplían con la condición.*
>
> Profesora Laura: *¿Y eso a ustedes les parece que es validar matemáticamente el teorema de Euler?*
>
> Juana: *No, porque tomamos ejemplos específicos.*
>
> Profesora Laura: *Aja, ¿y entonces?, ¿qué pasó con la consigna?*
>
> Juana: *La malinterpretamos.*

Observamos que las futuras profesoras conjeturan y validan a partir de analizar diversas figuras tridimensionales que emergen en el desarrollo de la consigna. Incluso, hacen explícito el problema de la generalización buscando ejemplos complejos que podrían no cumplir la relación de Euler. Es decir, en el desarrollo del escenario educativo Zoe al reflexionar sobre la acción de validar entra en crisis (conflicto entre continuidades y cambios) y opta por un cambio (no demostrar formalmente en el sentido legitimado).

11.2. | REFLEXIONES DE MODOS DE VALIDACIÓN PUESTOS EN JUEGO EN EL ESCENARIO EDUCATIVO DE MM

Consideramos a partir del análisis de lo acontecido en el trabajo matemático de las futuras profesoras al abordar los diversos problemas que los modos de validación puestos en juego resultan diversos y los describimos en detalle en el cierre de esta parte.

En los diferentes momentos se promueven diversos intercambios, tanto al interior de los grupos de estudiantes como en momentos de debate colectivo, en los que se cuestiona la producción realizada y se analiza críticamente en relación con los modelos producidos que dan respuesta a cada una de las problemáticas. Es evidente que el subproceso de validación, tal como lo señala Blum (2007) promueve desafíos sustanciales en el trabajo que se va realizando. Incluso, en oportunidades este subproceso pone de manifiesto la necesidad de comenzar nuevamente el proceso de MM.

En ciertas oportunidades, como por ejemplo en la producción de diversas relaciones entre números de caras, vértices y aristas de poliedros, el tiempo limita los modos de validación puestos en juego por las futuras profesoras. Pues tal como señala Borromeo Ferri (2018) resulta una barrera en el trabajo con MM la demanda de tiempo que requiere. Sin embargo, esta autora enfatiza en la necesidad de que en la validación el/la profesor/a tome el rol de guía, ya que es fundamental que el estudiantado cuestione el resultado matemático en función del problema.

Es evidente que los modos de validación puestos en juego se vinculan con cada uno de los modelos emergentes. En este sentido, observamos como señala Bassanezi (2002) que mientras más complejo es el modelo, más compleja resulta la validación a realizar.

Señalamos en primer lugar que validar la definición de poliedro producida resulta de gran demanda para las futuras profesoras por implicarles reflexionar y revisar conocimientos previos e incluso, analizar detalladamente cada término que se emplea en el marco de la misma. En segundo lugar, validar las relaciones entre números de caras, vértices y aristas de poliedros implica un análisis profundo, sin embargo, destacamos que a pesar que para la relación de Euler es posible recurrir a una demostración en ciertos libros el resto de fórmulas no son analizadas y esto podría permitir la puesta en juego de propiedades para aceptarlas o refutarlas según corresponda. En tercer lugar, observamos que, al validar supuestos, hipótesis y modelos en los problemas que proponen las futuras profesoras en general surgen nuevas preguntas que las estudiantes buscan indagar para convencerse y terminar de comprender el trabajo realizado. Esto último resulta de especial interés, pues, parecería que en el abordaje de problemas de MM las acciones desarrolladas en el subproceso de validación podrían ofrecer oportunidades para la generación de nuevos problemas a abordar.

A MODO DE CIERRE DE LA QUINTA PARTE

En esta parte estudiamos sentidos atribuidos a validación en el marco de un escenario de MM y los modos de validación que emergen. Consideramos que los sentidos producidos por las futuras profesoras varían a medida que vivencian diversos momentos en relación con la validación en sí misma y con reflexiones en torno a la misma.

Observamos que inicialmente las futuras profesoras atribuyen sentidos a la validación que se vinculan con el trabajo con demostraciones siguiendo el método euclidiano (Reid y Knipping, 2010). Al avanzar en reflexiones en relación con validación y llevar adelante diversos modos amplían esta idea considerando también formas de validación en las que se recurre por ejemplo a un trabajo empírico. Consideramos que los sentidos producidos a validación traccionan entre vivencias previas al escenario de MM, reflexiones con relación a aportes autores, la vivencia del escenario de MM y las vivencias posteriores al escenario de MM.

En general, el trabajo con demostraciones que las estudiantes reconocen hacer en la carrera Profesorado en Matemática y lo propuesto en el escenario educativo de MM por momentos parece producir conflictos en las estudiantes, más aún cuando en las evaluaciones de la asignatura GEE la producción de demostraciones parece adquirir un papel sustancial. Estas marcas muestran, también, ciertas acciones llevadas adelante en la trayectoria educativa de las futuras profesoras (Vezub, 2013) y una marca de identidad profesional que podría influir en las formas de ser docente a futuro (Graven y Lerman, 2013).

En definitiva, consideramos que los sentidos parecen arraigados en relación con las actividades llevadas adelante (Bajtín, 2000) y las prácticas que se promueven en el ámbito de la carrera Profesorado en Matemática. Sin embargo, las futuras profesoras en general ponen en juego el conocimiento interpretativo (Mellone et al., 2020) para avanzar y reflexionar en torno a los cambios que se van proponiendo. Es decir, desarrollan capacidad de agencia actuando intencional y reflexivamente.

Al estudiar sentidos atribuidos a validación por las futuras profesoras luego de vivir el escenario educativo de MM observamos que ellas mismas hacen evidentes ciertas acciones que podrían mostrar modos de validación puestos en juego. Al avanzar en el estudio de las producciones realizadas, principalmente geométricas, encontramos tipos o modos de validación.

Observamos que validan supuestos (consideraciones breves que se afirman o refutan en el marco del desarrollo del proceso de MM), hipótesis (consideraciones iniciales en relación con la problemática en general que pueden establecerse o refutarse) o modelos. Incluso, lo que en un determinado proceso de MM puede ser un supuesto en otro puede ser un modelo o una hipótesis ser supuesto en otro. En particular, determinamos los siguientes modos de validación:

- Validación de un supuesto, hipótesis o modelo a partir de analizar recurriendo a datos o información disponible durante el proceso de MM. Por ejemplo, Ailén del grupo 1 señala *"Se observó que una figura que no estaba en el grupo de poliedros, según nuestro modelo de poliedro* [Refiere a la primera definición que se produce en la comunidad de práctica] *debería pertenecer a este grupo* [...]". En este caso validan la definición/modelo producida por el grupo a partir del análisis e inspección de imágenes visuales dadas por las docentes.

- Validación de un supuesto, hipótesis o modelo a partir de analizar datos o información emergentes durante el proceso de MM. Por ejemplo, Macarena (Grupo 3) señala *"Dejame que tome el apunte* [Refiere al material de la asignatura de GEE de otros años], *algo, porque capaz que ninguno de éstos de acá sea poliedro"*. Es decir, analiza el supuesto de si determinada figura es o no poliedro a partir del análisis de información que obtiene por sí misma. Esta información es seleccionada por la estudiante, incluso, en caso de buscar información en otro lugar podría modificarse la respuesta establecida.
- Validación de un supuesto, hipótesis o modelo a partir de la utilización de conocimientos de distinta índole derivados de la experiencia personal o compartida. Por ejemplo, Valentina (Grupo 2) al analizar si una determinada figura es llena o vacía afirma *"No, al obelisco se puede entrar y subir al obelisco, no está lleno. No es una cosa maciza o sea se puede entrar, tiene escalera, se puede subir"*. Es decir, valida un supuesto a partir de su experiencia con ese objeto determinado.
- Validación de un supuesto, hipótesis o modelo empleando conocimientos matemáticos disponibles (propiedades, teoremas, definiciones). A modo de ejemplo, Zoe (Grupo 2) al hablar de poliedros convexos señala *"Yo no me acuerdo la definición, pero vos tenés en cada cara, un plano que contenga la cara, para un lado del plano tiene que estar contenido todo el poliedro".* Es decir, en este caso valida el supuesto de que un poliedro es convexo a partir de un conocimiento matemático disponible que aplica.
- Validación a partir de sugerencias y/o afirmaciones de una Profesora. Por ejemplo, cuando en el grupo 3 la Profesora Laura por una respuesta de las estudiantes responde *"¿Cómo definieron poligonal?, fíjate"* y le entrega el libro Puig Adam (1980). Es decir, aquí las estudiantes validan por autoridad, no toman decisión con respecto a qué datos o información utilizar, sino que validan a partir de lo que directamente afirma la profesora.

Observamos que las estudiantes en general se involucran con los procesos de MM llevados adelante validando su propia producción de diversos modos, tal como se hace evidente anteriormente.

Destacamos que como señala Borromeo Ferri (2018) el/la profesor/a debe guiar en el desarrollo del subproceso de validación. Aún más, consideramos que es el/la docente quien debe habilitar espacios para generar la puesta a prueba de la producción entre estudiantes e incentivar que sean ellas/os mismas/os quienes se pregunten si los supuestos, hipótesis y modelos en juego en el desarrollo del proceso de MM resultan adecuados o no. Esta cuestión quizás se limita en el trabajo con MM llevado adelante por la gran demanda de tiempo que implica analizar cada producción y ponerla a prueba, no solo por parte de el/la profesor/a, sino también del propio estudiantado.

SEXTA PARTE

EXPLORACIONES EN RELACIÓN CON PROCESOS DE MM Y DE DEFINICIÓN

EXPLORACIONES EN RELACIÓN CON PROCESOS DE MM Y DE DEFINICIÓN

Yo creo que en ninguna clase habíamos tenido esto de
buscar e investigar para llegar a una definición,
es como que, leemos un libro, está la definición y es la definición,
fue la primera cátedra en la que tuvimos que hacer la búsqueda.
No sé las chicas que piensan. Para mí fue la primera y fue la única.
(Ailén, entrevista grupal, 2018)

En esta parte de la tesis focalizamos el estudio en el último objetivo de investigación propuesto, a saber: explorar potencialidades y limitaciones de los vínculos entre procesos de MM y procesos de definición. Este objetivo, tal como mencionamos en la primera parte surge en el marco del desarrollo de la investigación y es de carácter exploratorio. Abordar este objetivo se constituye en un gran desafío en el proceso de trabajo y escritura de la tesis.

CAP XII

VINCULOS ENTRE MM Y DEFINICIONES

12.1. | INTRODUCCIÓN

En este capítulo estudiamos información que obtenemos durante el desarrollo de las primeras tres clases de la asignatura GEE en las cuales se lleva adelante la producción de la definición de poliedro[44] y de las entrevistas grupales. Para organizar el análisis presentamos aportes empíricos obtenidos de cada una de las consignas que se llevan a cabo en el momento 2 (Ver tabla 4) y discusiones teóricas en relación con procesos de producción de definiciones y procesos de MM. Además, retomamos algunas expresiones de las futuras profesoras en las entrevistas grupales y reflexionamos en torno a las mismas con relación al objetivo considerado.

Es relevante destacar que en el análisis realizado en las partes 4 y 5 observamos, de modo incipiente, que las futuras profesoras reconocen haber vivido un proceso de MM al producir la definición de poliedro, incluso, hacen referencia a que el modelo que daría respuesta al problema es la definición y a diversas acciones que se relacionan con la MM como abordaje pedagógico. Cabe señalar que en Cruz et al. (2020) encontramos resultados similares al estudiar sentidos atribuidos a una vivencia de producción de definiciones con futuras/os profesoras/es, quienes vinculan la experiencia vivida con los diferentes subprocesos que componen el proceso de MM. En general, en estas situaciones las/os docentes y futuras/os docentes interpretan el proceso de construcción y análisis de definiciones en términos de un proceso de MM.

A continuación, avanzamos con el estudio de lo sucedido en cada una de las consignas y en las entrevistas grupales. Para analizar la información en este capítulo focalizamos en MM como abordaje pedagógico y en las acciones que se desarrollan en cada uno de los subprocesos explicados en la sección 2.2.2. de la parte 2, a saber: experimentación, abstracción, resolución, validación, modificación y aplicación (Bassanezi, 2002). También, reflexionamos sobre lo anterior considerando los momentos que Ouvrier-Buffet (2011; 2013; 2015) describe

[44] En la actualidad coexisten diversas definiciones no equivalentes de poliedro. Tal consideración se hace evidente en el propio trabajo empírico de la investigación, e incluso Lakatos (1986) avanza en discusiones en relación con esta afirmación.

en el marco de un proceso de producción de definiciones descriptos en 3.3.3.: momento “en acción”, momento de transición entre el momento “en acción” y momento “cero”, momento “cero”, momento “formalizado” y momento “axiomático”.

En general, en este capítulo presentamos información vinculada con la primera problemática desarrollada en el escenario de MM que invita a estudiar qué figura/s (de un grupo de figuras dadas) representa un poliedro. La información se obtiene durante del trabajo que se desarrolla en las clases en las que se aborda tal problemática y de las entrevistas grupales. Cabe mencionar que, en esta parte, a diferente de cuarta y quinta parte, recuperamos en varias oportunidades las voces docentes. Esto es así pues tales voces, tuvieron un rol predominante a lo largo de todo el proceso de producción de una definición.

12.1.1. | ESTABLECIMIENTO DE CARACTERÍSTICAS PARA COMENZAR UN PROCESO

En la puesta en juego de la consigna 3 (Ver tabla 7) las estudiantes libremente determinan características que poseen las imágenes dadas. A continuación, avanzamos con descripciones en relación con el trabajo realizado por cada grupo para dar cuenta de dicha consigna.

El grupo 1 (formado por Larisa, Marina, Eugenia y Ailén) focaliza en analizar cada una de las figuras teniendo en cuenta características geométricas. Las futuras profesoras remiten a términos conocidos por ellas o emplean términos que se inspiran en imágenes de figuras geométricas que buscan en Internet y las encuentran similares a las dadas, como ser, paraboloide, hiperboloide, cilindro, prisma y pirámide. A su vez, en los casos en que no encuentran un nombre conocido para atribuirle a una figura, cuentan números de caras de esta.

El grupo 2 (formado por Micaela, Dianela, Guillermina y Valentina) comienza analizando si las figuras dadas son huecas o no. Luego, las estudiantes identifican y enumeran bases y caras y comparan las figuras dadas entre sí y con otras que consideran conocidas (por ejemplo: cubo y cilindro).

Las futuras profesoras que conforman el grupo 3 (Macarena, Yamila, Paula y Agostina) remiten a características que consideran familiares y que abordaron en años anteriores en el cursado tradicional de la asignatura GEE en la primera clase. Por ejemplo, convexidad, regularidad y noción de poliedros. Posteriormente, cuentan en las representaciones en material concreto cantidad de aristas, vértices y caras.

El grupo 4 se conforma por Victoria y Ludmila. Las estudiantes, primero focalizan en colores, transparencias y usos que se pueden dar (ejemplo, vaso para tomar). Luego analizan si los consideran llenos o no, formas de bases y si se pueden levantar o no. Destacamos que en el marco del trabajo al interior del grupo Ludmila afirma "*¿Esto sería tipo extraer datos experimentales?*", lo que muestra que la estudiante encuentra una relación entre lo recientemente leído de Bassanezi (2002) con relación al subproceso de experimentación y lo que se encuentran realizando.

De modo general, observamos que las futuras profesoras focalizan en características diferentes, en algunos grupos en características geométricas y en otros identifican características generales.

En el marco del debate colectivo cada grupo interviene brevemente para compartir las características identificadas. Posteriormente se genera el siguiente intercambio:

> Profesora Laura: *Fíjense que aparecieron muchas, muchos términos, que tienen que ver con cuestiones de la geometría, porque apareció cilindro, cono, base, caras, apareció vacío, lleno, o sea, muchas, muchos conceptos, o sea, características que ustedes fueron encontrando que después las vamos a ir recuperando, pero ustedes lo único que tenían que hacer acá y lo que hicieron es mirar estos poliedros, estas figuras, no son poliedros todos, estas figuras que tiene acá, estas imágenes, las imágenes o los objetos tridimensionales que tienen para tocar y empezar a ver algunas características. ¿Estamos en qué partecita del proceso? Nosotros dijimos vamos a tomar un tema y vamos a hacer un proceso de modelización, ¿en qué partecita del proceso estamos?*
>
> Macarena: *La experimentación.*
>
> Micaela: *Experimentación.*
>
> Profesora *Laura: Experimentación, o sea, tenemos los datos experimentales, experimentamos, tenemos un problema para analizar que son las características de todas estas figuras, pero en esa parte estamos, no nos olvidemos que lo que vamos a hacer es el proceso de modelización según el esquema que propone Bassanezi para llegar a un modelo que ya vamos a ver, porque el tema no lo tenemos definido, por ahora tenemos estos objetos.*

En las expresiones las futuras profesoras y la profesora muestran que identifican ciertas acciones que realizan y se vinculan con la experimentación. En relación con el subproceso de experimentación (Bassanezi, 2002) identificamos acciones que llevan a cabo en este momento, como ser: indagar, investigar, obtener datos, etc. Además, encontramos acciones vinculadas con el momento "en acción" (Ouvrier-Buffet, 2013), en el que se promueve el explorar y reconocer ideas, objetos y resultados.

También, es relevante señalar que tanto en el subproceso de experimentación (Bassanezi, 2002) como en el momento "en acción" (Ouvrier-Buffet, 2013) se hace referencia a la posible emergencia de nuevos problemas y la puesta de manifiesto de posibles modificaciones a realizar en el problema en cuestión. Ambas consideraciones podrían llevarse a cabo en el marco del desarrollo de esta u otra consigna, por ejemplo, cuando incipientemente una persona que se encuentra modelizando determina durante la experimentación que la información y los datos no se podrán obtener para resolver el problema y por tanto decide modificar este último.

De modo general, consideramos que, si bien en el marco de un proceso las acciones que se llevan a cabo son diversas y podrían encontrarse ciertos rasgos de otros subprocesos, parecerían haberse desarrollado acciones tanto de la experimentación como del momento cero.

12.1.2. | DIFERENCIACIÓN DE GRUPOS DE FIGURAS TRIDIMENSIONALES PARA AVANZAR EN UN PROCESO

El trabajo en relación con la caracterización de los dos grupos de figuras (Ver tabla 7) dados se lleva adelante en la segunda clase (consigna 4). Sin embargo, antes de comenzar con la consigna de trabajo se genera un intercambio entre toda la clase con el fin de recuperar ideas puestas en juego en la clase anterior.

En un principio remiten a las características que recuerdan se habían mencionado y la profesora las registra en el pizarrón, como se muestra a continuación (Figura 15):

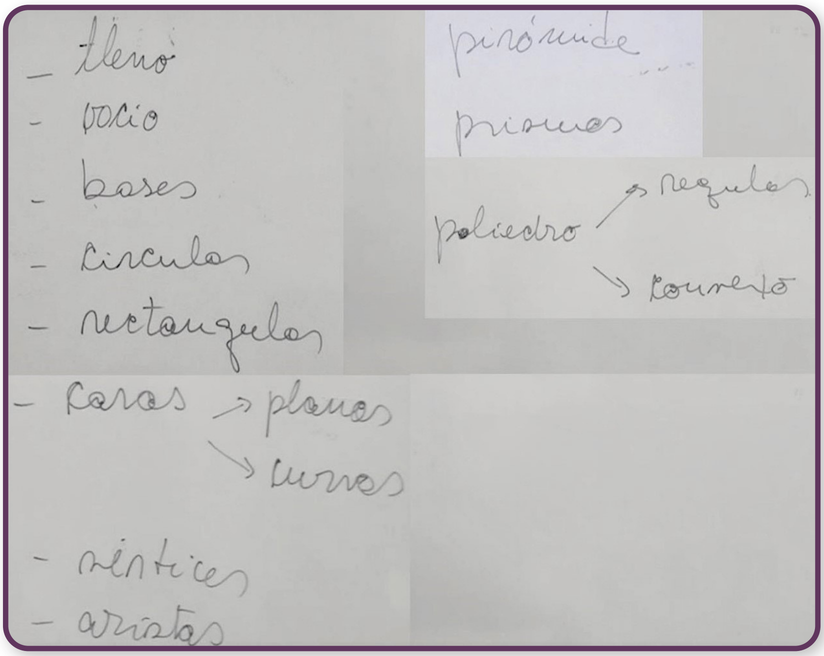


FIGURA 15 | *Características de las imágenes presentadas.*

IF-2023-00267925-UNC-ME#FFYH

Profesora Laura: *Recordamos un poquito que la clase pasada estuvimos hablando* [...]. *Lo que hicimos la clase pasada fue primero determinar qué es para ustedes un modelo, cómo se visualiza ese modelo en el esquema de Bassanezi* [...]. *Cómo se insertaba el modelo en ese proceso, qué significaba el modelo en ese proceso* [...] *¿qué es el modelo dijimos? Así vamos repasando para que ella que no vino, ¿qué dijimos?, ¿el modelo qué es?*

Guillermina: *Algo ideal.*

Profesora Laura: *Un ideal, ¿qué dijiste?*

Marina: *Lo que deseamos que sea ideal.*

Guillermina: *Lo deseado.*

Profesora Laura: *Lo deseado, un ideal, eso es lo que habíamos visto. Y lo que ahora, nosotros habíamos visto es que de ese esquema que habíamos visto, habíamos trabajado solo una parte, o sea, ni siquiera tenemos definido el tema todavía, por eso el tema ahí aparece de ese modo* [Mueve sus manos realizando la representación de una nube]. *Todavía estamos viendo qué hacer con eso* [...].

Posteriormente, la profesora presenta la consigna y las estudiantes comienzan a trabajar en caracterizar cada grupo de figuras dadas (Ver tabla 8 y figura 6), en un primer momento en 5 grupos que denominamos A, B, C, D, E. A continuación, avanzamos con la presentación de las producciones realizadas por los grupos para luego interpretarlas en términos del proceso de MM y del proceso de producción de definiciones. Aclaramos que si bien observamos que en las producciones se evidencian algunos errores (e.g. cuando el grupo 2 refiere que no todos los polígonos son convexos) no los explicitamos ni tratamos por dos motivos. Primero, el análisis de errores no se vincula directamente con los objetivos de investigación. Segundo, la emergencia de errores está prevista en el trabajo con MM como así también, a posteriori, una validación y de ser necesario modificación de lo producido. Ante esta relatividad de la adecuación de una determinada respuesta, en nuestra investigación no se asigna un rol relevante al estudio de los errores.

El grupo A conformado por Eugenia y Marina produce la siguiente respuesta.

TABLA 89 | *Respuesta a consigna 4, grupo A (Fuente propia).*

Grupo 2: Poliedros. • *Todas tienen aristas, vértices y caras.* • *Son sólidos (llenos).* • *Tienen al menos dos caras iguales.* *Como no encontramos características en común en el grupo 1, anotamos la diferencia con respecto al grupo 2.* *Grupo 1: Varios.* • *No todos tienen aristas, vértices y caras.* • *No todos son sólidos.*

El grupo B conformado por Larisa y Ailén produce la siguiente respuesta.

TABLA 90 | *Respuesta a consigna 4, grupos B (Fuente propia).*

Grupo 1: Características: son más circulares, más curvos, están vacíos. *Grupo 2: Características: más puntiagudos, tienen todas caras planas, la mayoría de ellas son triangulares, todos tienen vértices y aristas y están llenos. Poliedros cóncavos y convexos.*

El grupo C conformado por Valentina, Dianela y Micaela produce la siguiente respuesta.

TABLA 91 | *Respuesta a consigna 4, grupos C (Fuente propia).*

Grupo 1: No todos tienen caras, aquellos que tienen caras no todas son lisas, no todos tienen vértices ni aristas. No todos son poliedros. *Grupo 2: Todos tienen sus caras planas, vértices y aristas. Son poliedros. Cuerpos geométricos compuestos por polígonos convexos.*

En las producciones al interior de cada uno de los grupos, destacamos que emergen analogías entre las imágenes dadas, se seleccionan características, incluso, en los tres grupos se referencia la palabra poliedro. Estos tres grupos posteriormente proponen una respuesta común.

TABLA 92 | *Respuesta a consigna 4 grupos A, B y C (Fuente propia).*

Grupo 1: No todos tienen vértices, caras o aristas, no todas sus caras son polígonos, algunos tienen huecos.

Elegimos como figura dos conos invertidos con sus vértices en común.

Grupo 2: Todos tienen aristas, caras y vértices, todas sus caras son planas, no tienen huecos.

Elegimos como figura una pirámide de 4 caras, con base triangular.

El grupo D conformado por Yamila, Macarena y Guillermina produce la siguiente respuesta.

TABLA 93 | *Respuesta a consigna 4, grupo D (Fuente propia).*

Grupo 1: Figuras no poliédricas.

Algunas de ellas son cuerpos redondos como ser la pelota, bolita," la hélice", tarro de dulce de leche y vaso; mientras que la unión de las pirámides y los corazones poseen una arista la cual esta compartida por más de dos caras contiguas. Además, la torta, la pirámide azteca y el prisma hueco poseen caras no poligonales.

Grupo 2: Figuras poliédricas:

Las figuras dadas son superficies poliédricas, es decir, un conjunto finito de polígonos que tienen las siguientes características:

1- Cada lado de una cara es compartido con otra y solo otra.

2- Las caras contiguas están en distinto plano.

Convexas: Icosaedro, dodecaedro, pirámide, obelisco y toblerone.

No convexas: Las estrellas y la "i"

Regulares: El icosaedro y el dodecaedro.

No regulares: Los restantes.

El grupo E conformado por Martina, Victoria y Zoe produce la siguiente respuesta.

TABLA 94 | *Respuesta a consigna 4, grupo E (Fuente propia).*

Grupo 1: Características: Visualizamos en estos cuerpos la no convexidad. Por ejemplo, si tomamos dos puntos cualesquiera de la superficie poliédrica y los unimos, podemos ver que no todos los segmentos que estos forman estarán contenidos en el poliedro. Además, podemos distinguir dos grandes grupos: los que ruedan y los que tienen base.   *Grupo 2:*   *Características: Todos los cuerpos del segundo grupo están formados por caras planas, vértices y aristas. Además, en todos estos cuerpos reconocemos que existe al menos un plano que divide al cuerpo de forma simétrica.*

En el trabajo en que se juntan los grupos D y E deciden emplear la producción del grupo D, agregando inicialmente: *"Notamos dos grandes grupos entre estos cuerpos los cuales son: los cuerpos que ruedan y los que tienen base. Además, hay cuerpos que son huecos y que son sólidos".*

En momentos de trabajo colectivo en relación con esta producción se ponen en escena diversas ideas y la Profesora Laura toma nota en el pizarrón de lo que establecen los grupos, sin embargo, no se logra en la clase establecer una potencial definición común para el grupo.

En el marco de los intercambios que se generan la Profesora Laura realiza ciertas preguntas que invitan a las estudiantes a reflexionar con respecto a ciertas acciones llevadas adelante en relación con el proceso de MM. A modo de ejemplo presentamos el siguiente diálogo:

> Profesora Laura: [...] *Ella dice eso es una superficie poliédrica y yo cuando le pregunto ¿qué es eso?, ¿qué estoy haciendo de lo que aparece en ese, en ese esquemita* [Refiere al esquema del proceso de MM]?
>
> Macarena: *La abstracción para mí.*
>
> Profesora Laura: *Bueno, ella dice abstracción, yo le estoy pidiendo, ahí le estoy pidiendo, ¿ella está validando lo que yo le pregunto?, dándome esos ejemplos.* [...] *¿Eso no es validar?*
>
> Guillermina: *Sí, porque está tratando de justificar por qué ella opina que es, piensa que es una superficie poliédrica.*

Profesora Laura: *Puede que sea correcto o incorrecto, no estamos hablando de eso, estamos hablando de qué significa en ese esquema* […]. *Bueno, ¿qué es lo que está haciendo ella? Tratando de explicarme a mí lo que ella entiende por superficie poliédrica* […].

Observamos que inicialmente Macarena menciona la puesta en juego de la abstracción, posiblemente por reconocer ciertas acciones realizadas en relación con la descripción de este subproceso. También, en los intercambios se manifiesta la posibilidad de validar supuestos en el marco del proceso de MM recurriendo a una determinada definición (superficie poliédrica) y, quizás indirectamente, de modificar la producción. Posteriormente, se desarrollan importantes discusiones en relación con las producciones de cada uno de los grupos. Finalmente, la Profesora Laura interviene con ciertas ideas que muestran qué se busca con este trabajo de MM, específicamente, focaliza en el modelo a producir para dar respuesta a la problemática.

Profesora Laura: *La idea nuestra del modelo que estamos buscando es ver si logramos en estas clases encontrar una definición de poliedro de acuerdo a lo que nosotros tenemos idea de lo que es un poliedro. O sea, nuestro ideal de poliedro sería el modelo, nosotros vamos a ir buscando a ver si podemos definir y si cuando definimos realmente estamos tomando todos, o estamos dejando algunos afuera si no ponemos todas las características. Si lo que pusieron ustedes o lo que pusieron ellas son equivalentes, o si lo que puso alguna me incluye otras figuras que a lo mejor no son poliedros. ¿Cuál es el modelo?*

Varias: *Poliedro.*

Profesora Laura: *Poliedro y quiero encontrar de ese poliedro la resolución matemática que como dijimos el…* […] *en geometría métrica no vamos a tener una solución analítica, ni vamos a tener una solución numérica, sino que seguramente lo vamos a tener expresado en palabras.* […]. *Estamos tratando de definir un poliedro, ese es el que nosotros tenemos, ese ideal que sería probablemente, aparentemente los que están en el grupo dos* [Refiere al grupo 2 de figuras tridimensionales]. […] *Esas características que ustedes me dan sería la resolución matemática que están expresando en palabras, ¿qué hacemos? Para saber si esa definición que nosotros estamos dando o esas características que estamos dando nos va a permitir llegar a una definición, lo que hacemos es tratar de validarlo con los datos experimentales. Entonces no está mal porque acá dijimos eso es un proceso y es un ciclo que vamos a ir haciendo, es una primera aproximación al modelo y el modelo es un poliedro y lo que quiero hacer es definirlo y tendré que ir viendo qué características le agrego y le saco y le pongo, cómo las voy este determinando para que en realidad sea un poliedro.*

La Profesora Laura pone en escena que han validado a través del empleo de datos experimentales, el modelo que se busca es la definición de poliedro y las primeras caracterizaciones realizadas pueden ser modificadas. Además, hace referencia a la posibilidad de establecer modelos con diversas formas.

Consideramos que en este primer trabajo predominaron la puesta en juego de acciones vinculadas con la abstracción en el sentido de Bassanezi (2002), puesto que cada grupo selecciona las características a considerar y establecen relaciones entre ellas. También encontramos que en algunas producciones se apela, principalmente, a lenguaje natural en el sentido de Bassanezi (2002), por ejemplo, en el grupo B (Ver tabla 90), mientras que en otras se recurre a diversos términos propios de la geometría, por ejemplo, en el grupo D (Ver tabla 93).

Con relación al proceso de producción de definiciones descripto por Ouvrier-Buffet (2013), consideramos que predomina la puesta en juego de la transición entre el momento "en acción" y "cero", ya que se producen las primeras categorías a partir de la clasificación y se denominan los grupos de figuras/categorías. Además, se establecen relaciones diversas entre los términos y conceptos en escena.

Cabe mencionar que tanto el proceso de MM como el de producción de definiciones posibilitan el desarrollo cíclico entre los subprocesos o momentos respectivamente. En este sentido, si bien identificamos las acciones llevadas adelante con algún subproceso (Basssanezi, 2002) o momento (Ouvrier-Buffet, 2013), consideramos que podrían hacerse presentes ciertas acciones o aspectos de otros.

Posterior a lo presentado, en la siguiente clase se destinan unos minutos al cierre de esta consigna y establecimiento de una posible definición. Emerge la siguiente definición de poliedro que ya presentamos en la parte 5 en la tabla 88.

TABLA 95 | *Respuesta a consigna 4 comunidad clase (Fuente propia).*

Poliedro: Caras planas, vértices y aristas. No posee huecos. Las caras son polígonos. Por aristas concurren solamente dos caras que se encuentran en distintos planos.

Dicha definición es la primera consensuada por toda la clase y proviene de fructíferos intercambios, e incluso, modificaciones sobre primeras aproximaciones a la noción de poliedro. Detrás de la misma hay un importante trabajo exploratorio, de establecimiento de características y relaciones estas. La Profesora Laura una vez consensuada la definición afirma *"Esta va a ser una primera aproximación a ese modelo al que estamos apuntando a definir.* [...] *Vamos a tomar como provisoria esa definición, como un borrador de ese modelo al que queremos llegar que aparentemente nos estaría definiendo poliedro".*

Consideramos que en el trabajo matemático abordado en el marco del desarrollo de la consigna 4 emerge un modelo/definición que podría dar respuesta a la problemática con relación a qué figuras son poliédricas. En relación con el proceso de MM consideramos que en el marco de la puesta en común se lleva adelante el subproceso de resolución, en el que se sustituyen términos de uso cotidiano por términos matemáticos, logrando así un modelo.

Cabe señalar que las primeras caracterizaciones presentadas por cada uno de los grupos de futuras profesoras también podrían considerarse modelos que aportaron para constituir la definición. Observamos que dichas caracterizaciones, en términos del proceso de definición de Ouvrier-Buffet (2013) podrían considerarse como definiciones en acción, que son enunciados que se constituyen como herramientas para encontrar una definición cero. Esta autora, hace referencia al momento "cero" cuando se establecen una o varias definiciones que pueden tener un carácter provisorio. En las producciones de las futuras profesoras podría considerarse como definición cero la presentada en la tabla 95 y establecida por la comunidad de práctica.

12.1.3. | ANÁLISIS DE DIVERSAS DEFINICIONES EN LA BÚSQUEDA DE CONSENSUAR

Una vez consensuada la primera definición se pone en juego la consigna 5 (Ver tabla 9). En la misma las futuras profesoras buscan diversas definiciones de poliedro para analizar, cotejar entre ellas y con la producida. Para esto las estudiantes trabajan en tres grupos: grupo 1 (Larisa, Ailén, Eugenia y Marina), grupo 2 (Micaela, Guillermina, Dianela y Valentina) y grupo 3 (Macarena, Yamila, Victoria, Martina y Pablo).

Cada grupo toma definiciones a analizar. Observamos que, de modo general, analizan a partir de contrastar si las figuras tridimensionales dadas cumplen o no con cada una de las definiciones y las cotejan entre ellas. También buscan en Internet otras figuras tridimensionales que emplean como nuevos datos experimentales.

Las futuras profesoras que conforman el grupo 1 analizan una definición de un libro de texto destinado a la escuela secundaria y tres definiciones del libro Pruebas y Refutaciones de Lakatos (1986). Consideran que tres de ellas (las dos de secundaria y una del libro de Lakatos) no resultan adecuadas por encontrar figuras tridimensionales que según las mismas serían poliedros y pertenecen al grupo 1 de figuras dadas en la consigna 4 (las que se consideran en GEE como no poliedros). La cuarta definición que toman afirma:

> Un poliedro es un sistema de polígonos dispuestos de modo que en cada arista se encontrasen exactamente dos polígonos y fuese posible ir del interior de un polígono al interior de otro siguiendo un camino que no cruce nunca una arista por un vértice (Lakatos, 1986, p.20).

Con respecto a esta última, las estudiantes afirman no entender a qué se refiere el autor con la segunda condición, por lo que consideran que la definición producida por la comunidad de práctica clase de GEE debería ser la adecuada y establecida para emplearse durante el desarrollo de la asignatura. La profesora les muestra dos pirámides unidas por un vértice (ver figura 16) y destaca que este cuerpo se excluye con la condición establecida en la definición

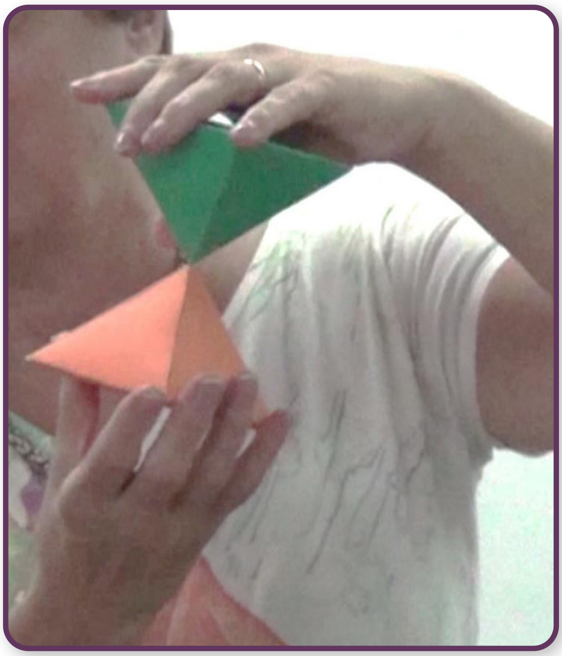


FIGURA 16 | *Ejemplo de cuerpo mostrado por la docente para ilustrar qué figura excluye la condición de la definición de Lakatos (1986).*

Las futuras profesoras afirman que siguen sin comprender y por tanto consideran que la definición producida por la clase sigue siendo la adecuada y más sencilla de comprender.

El segundo grupo de futuras profesoras analizan tres definiciones que obtienen de páginas de Internet y dos de libros de secundaria. A partir del análisis realizado afirman que en general la más completa es la producida por la clase GEE. Sin embargo, proponen una modificación a la misma que emerge de discusiones realizadas al interior del grupo en momentos de cotejar definiciones. Dianela afirma *"Al realizar el análisis descubrimos que había cosas redundantes, por ejemplo"* y Valentina interrumpe señalando *"Claro, porque al establecer que las caras son polígonos ya podemos asegurar que la figura tiene vértices, caras y aristas. Y que no son huecos".* El grupo 1 manifiesta estar de acuerdo con esta propuesta.

Finalmente, el grupo 3 analiza 4 definiciones. Toman una de Internet, una de un libro de texto destinado al nivel secundario, la del libro "Curso de Geometría Métrica" de Puig Adam (1980) y una de una fotocopia (sin fuente explícita) entregada a Macarena por parte de la Profesora Laura. Afirman que las dos primeras resultan incompletas. También señalan que el libro Puig Adam (1980) define solo poliedro convexo y que la última es la más completa.

Con respecto a esta última Macarena afirma: *"Esta definición que tenemos acá digamos completa la definición de Puig Adam"*, y afirma *"leo la última".*

TABLA 96 | *Respuesta a consigna 4 comunidad clase (Fuente propia).*

Llamaremos superficie poliédrica al conjunto de un número finito de polígonos, llamados caras de la superficie, que cumplan las siguientes condiciones:

- *Cada lado de una cara pertenece también a otra y sólo otra. Ambas caras se llaman contiguas.*
- *Dos caras contiguas están en distinto plano.*
- *Dos caras no contiguas pueden unirse por una sucesión de caras contiguas.*
- *Dos caras no contiguas no pueden tener más punto común que un vértice y si lo tienen deben pertenecer ambas a un mismo ángulo poliedro.*

La superficie poliédrica se llama convexa si además de las condiciones de la definición anterior se cumple que el plano de cada cara deja en un mismo semiespacio a las demás.

Llamaremos poliedro al conjunto de los puntos de la superficie poliédrica y los interiores a la misma. Los vértices y lados de las caras se llaman vértices y aristas del poliedro. Si la superficie que determina el poliedro es convexa el poliedro se llama convexo, de lo contrario lo llamaremos poliedro cóncavo.

Luego de leer la definición Macarena señala *“Bueno, acá explica bien qué es un poliedro y la clasificación. Comparando con lo que teníamos antes* [Refiere a la definición producida por la clase GEE] *ahí es como que falta la clasificación, por ejemplo”*. Posteriormente se genera un diálogo entre Martina, Macarena, la Profesora Laura y la Profesora Gabriela en el que se hace evidente que muchos términos que se emplean en la definición anterior deberían ser definidos con anterioridad, que en la misma se incluye la clasificación que no forma parte de la definición estrictamente y que se describen y hacen explícitos elementos inmediatamente después de la definición.

Finalmente, la Profesora Laura afirma *“Bueno, veamos de todas las definiciones que estuvimos trabajando les parece a ustedes que es la que podríamos tomar en función de que nos deja más claro lo que es un poliedro”.* Macarena inmediatamente responde *“Ésta, para mí la última, la más completa* [Refiere a la definición de la tabla 96]”. Luego se produce silencio, Dianela señala *“Esa porque da la clasificación”* y La Profesora Laura explica:

> *No se llega a esa definición sin todo el proceso que nosotras hicimos, o sea, cuando ustedes leen en un libro una definición, ¿ustedes creen que es la primera que le surgió al autor/a?, O sea, un poco la idea es que ustedes piensen qué es una definición, cómo se obtiene, qué significa hacer una definición. Esa definición ultima que es la que a ustedes les pareció la más completa y es la que vamos a acordar utilizar está en el módulo y nos llevó creo 20 años construirla.*

Cabe mencionar que hasta el año 2018 no se abordaba la definición de poliedro en la asignatura GEE. Sin embargo, mientras se desarrollaban las clases las profesoras producen la presentada en la Tabla 96. La decisión de finalizar proponiendo dicha definición, sin reconsiderar las ideas de los estudiantes no es una decisión consensuada previamente con las investigadoras. Si bien se entiende que esta decisión es tomada quizás por la necesidad de cumplir con el programa de la asignatura, consideramos que se produjo un truncamiento del proceso de MM al establecer una definición sin tener en cuenta totalmente las voces y producciones de las futuras profesoras. No obstante, la riqueza del trabajo de los estudiantes no queda oculta y serán consideradas en ámbitos investigativos.

Observamos que en el desarrollo de esta consigna del proceso de MM se ponen en escena acciones vinculadas con la validación y modificación. Por ejemplo, la propuesta de los grupos de modificar ciertas características, por ejemplo, quitar la aclaración de que las caras “no tienen huecos” por ser polígonos. Esta propuesta de modificación surge al interior de los grupos 1 y 2 al validar apelando a diversas definiciones.

Del proceso de MM propuesto por Ouvrier-Buffet (2013) consideramos que en el marco de trabajo al interior de los grupos de futuras profesoras se proponen modificaciones de la producción inicial a partir, principalmente, del análisis de figuras tridimensionales y otras definiciones. La autora explicita que este accionar potencia la comprensión y acceso a un concepto.

Los cambios propuestos por los grupos 1 y 2 podrían generar una definición como la siguiente: "El poliedro es un cuerpo con caras poligonales en el que por aristas concurren solamente dos caras que se encuentran en distintos planos". La producción de esta definición podría enmarcarse momento "formalizado" (Ouvrier-Buffet, 2013), puesto que la misma produce un cambio en relación con la abstracción en juego con respecto al momento "cero". A su vez, en el marco del proceso de MM (Bassanezi, 2002) podría considerarse esta definición como producida para dar respuesta al problema y por tanto configurarse como el modelo (subproceso de resolución) que da respuesta a la problemática.

Finalmente, consideramos que la definición propuesta por las docentes y que se emplea en la asignatura GEE a partir de dicho momento en la asignatura GEE podría configurar el momento "axiomático", en el que se obtiene una definición considerada "teórica" por incluirse en una teoría axiomática particular (Ouvrier-Buffet, 2013). Con relación al proceso de MM esta definición sería la que se emplearía en el subproceso de aplicación en problemas posteriores (Bassanezi, 2002).

12.1.4. | POLIFONÍA DE VOCES EN RELACIÓN CON PROCESOS DE PRODUCCIÓN DE DEFINICIONES

En esta sección recurrimos a respuestas dadas por las futuras profesoras en el marco de las entrevistas grupales con relación a producción de definiciones a fin de avanzar en reflexiones con respecto a si ellas reconocen haber vivido dicho proceso o no.

En la entrevista del grupo 1 (Ailén, Larisa, Marina y Eugenia) se produce el siguiente diálogo:

> Investigadora: *En las primeras tres clases trabajamos acerca de la definición de poliedro, ¿ustedes creen que lograron producir una definición?*
>
> Ailén: *Sí, para mí sí. A partir de las siguientes definiciones o lo que teníamos, los objetos para mirar.*
>
> Marina: *Los aportes de cada uno también. Porque nosotras decíamos unas cosas y las otras* [decían] *otras.*
>
> Ailén: *Y como que entre todas fuimos produciendo una definición de poliedro.*
>
> Larisa: *Sí, me parece que sí. También como que nos ayudó a visualizar lo que vendría*

a ser, porque viste que uno se tiene que imaginar primero cada cosa para después poder saber de qué se está hablando cuando se define.

[…]

Ailén: *Fuimos viendo qué características tenían algunas* [Refiere a las figuras tridimensionales] *y cuáles no, y a partir de ahí es como que también fuimos armando la definición.* […] *Yo ahora que ya sé que vimos lo que es un poliedro es como que esto se asemeja mucho más y te ayuda más a entender lo que es el poliedro que decir, caras planas, polígonos y eso. Es como que está más completa y hoy que tengo en mi cabeza lo que sería un poliedro se asemeja más a la definición o a la gráfica.* […] *Yo creo que en ninguna clase habíamos tenido esto de buscar e investigar para llegar a una definición, es como que, leemos un libro, está la definición y es la definición, fue la primera cátedra que tuvimos que hacer la búsqueda, no sé las chicas que piensan. Para mí fue la primera y fue la única.*

Observamos que las futuras profesoras que conforman el grupo 1 reconocen haber producido la definición de poliedro. Al reflexionar mencionan ciertas acciones realizadas, como ser, consensuar entre grupos, explorar imágenes tridimensionales y objetos, buscar, investigar, entre otras. Tales acciones pueden vincularse con los modos de proceder en procesos de MM. Las estudiantes, además, referencian que el trabajo realizado favorece el desarrollo de la imagen conceptual (Vinner, 1991). También, hacen referencia a que el escenario de MM vivido en el que se construye la definición de poliedro se evoca como la primera y única vivencia de producción de definiciones.

Las estudiantes del grupo 2 (Zoe, Guillermina, Dianela y Micaela) en relación con la misma temática generan el siguiente diálogo:

Investigadora: *En la experiencia vivida en GEE en las tres primeras semanas de cursado, ¿consideran que lograron producir una primera aproximación a la definición de poliedro?*

Guillermina: *Y yo creo que sí.*

Micaela: *Sí.*

Dianela: *Sí, porque empezamos con una idea y fuimos incorporando otras herramientas…*

Micaela: *Mediante la discusión entre bancos…* […] *Estuvo bueno porque mediante la discusión entre los que no sabíamos nada y los que sabían y así pudimos armar digamos una definición que sea amoldaba a la definición que teníamos en el libro.*

Guillermina: *Claro.*

Dianela: *Fue interesante ver como los distintos libros trataban la definición de diferentes maneras y tenían diferentes consideraciones, no tenían en cuenta siempre y había varias definiciones que ninguna por ahí completaba bien, se complementaban.*

Micaela: *Todas las definiciones que vimos en los libros, si las juntábamos, tampoco hacíamos la definición de poliedro que nosotros teníamos.*

Guillermina: *Siempre faltaba algo, o como que estaba de más.*

Al igual que el grupo 1, las futuras profesoras del grupo 2, afirman haber producido la definición de poliedro y enfatizan en acciones llevadas adelante, por ejemplo, discutir entre compañeras producciones y analizar definiciones. A continuación, avanzamos con el diálogo desarrollado con el grupo 3 (Macarena, Yamila, Martina y Victoria) en relación con la producción de definiciones, específicamente consideraciones vinculadas con esto emergen de la voz de Yamila:

Yamila: *Creo que sí, que hemos producido conocimiento,* […] *no creo que es algo innovador, algo nuevo. Pero sí dentro de nuestro estudio, de la forma en que nosotros estudiamos, por ejemplo, esto que empezamos al principio de esta materia de cómo ir produciendo por ejemplo la definición de poliedro, la fuimos armando, y bueno a mí me gustó la idea esa, porque yo dije: bueno yo me voy a poner la cabeza como que no soy recursante que arranco de cero, y bueno, lo pude captar mucho mejor que años anteriores que he venido acá.*

Investigadora: *¿El resto consideran que lograron producir una primera aproximación a la definición de poliedro?*

Macarena: *Sí, o sea...*

Martina: *Yo creo que sí, va, yo desde mi punto de vista creo que sí, de hecho, es como que justamente nosotras que nos juntamos teníamos recursantes y nuevas,* […] *pero yo soy constructora, y sí tenía mucha geometría como le decía a ella* [Refiere al abordaje de geometría en la carrera Licenciatura en Matemática Aplicada que estudiaba anteriormente], *descriptiva, nunca un enfoque teórico, en cuanto a desarrollo, o sea, fue más constructivo, totalmente constructivo.* […] *Vos en esta producción notás que hay una mejora, o sea, que entendés, como lo podés relacionar con algo de lo ya dado creo que hay producción.*

Victoria: *A mí me ayudó un montón porque yo estaba re-perdida. Y con ellas sí, trabajar en grupo con ellas a mí me había ayudado un montón, porque incluso hacían preguntas que yo ni siquiera me las habría hecho, me acuerdo cuando en las clases con ellas explicándome cosas, por ahí sí, a mí me había ayudado un montón como* *introducción a lo que fue después la materia, sí, fue súper útil a que si de una me hubiesen venido con conceptos o cosas dadas.*

El grupo 3 también afirma que se construye una definición de poliedro. Incluso, las futuras profesoras reconocen que el modo de trabajo propuesto es potencial por permitir mayor apropiación de los conceptos y comprensión en general de la asignatura. Destacamos que encuentran diferencias con respecto al modo convencional de abordar estos temas en la asignatura y el realizado en el escenario de MM.

De modo general, observamos que los tres grupos de futuras profesoras consideran haber producido una definición de poliedro e identifican ciertas acciones llevadas adelante que podemos relacionar con las que se proponen al interior de los distintos subprocesos del proceso de MM (Bassanezi, 2002). También, reconocen que todo el trabajo que involucra la producción de definición de poliedro resulta favorable para el abordaje del resto de contenidos de la asignatura.

A MODO DE CIERRE DE LA SEXTA PARTE

Del estudio realizado en la cuarta parte reconocemos que las futuras profesoras se apropian de ciertas particularidades del proceso de MM reconociendo como familiar algunos subprocesos del proceso de MM y el potencial de producir modelos. En el mismo, las futuras profesoras reconocen haber llevado adelante un proceso de MM del que emerge una definición de poliedro.

En el marco de la presente parte identificamos en la producción geométrica (principalmente) de las estudiantes que llevan adelante ciertas acciones que se pueden vincular con el proceso de producción de definiciones en términos de Ouvrier-Buffet (2013; 2016).

A continuación, presentamos una tabla en la que vinculamos los subprocesos de MM con los momentos considerados por la autora al conceptualizar la producción de definiciones. En dicha tabla no hacemos referencia a equivalencia entre ambos procesos, sino que consideramos que las acciones que se llevan adelante podrían relacionarse.

TABLA 97 | *Relación entre subprocesos de proceso de MM y momentos de producción de definiciones (Fuente propia).*

SUBPROCESOS DEL PROCESO DE MM (BASSANEZI, 2002)	MOMENTOS DEL PROCESO DE PRODUCCIÓN DE DEFINICIÓN OUVRIER-BUFFET (2013; 2016)
Experimentación	En acción
Abstracción	Transición entre "en acción" y "cero"
Resolución	Transición entre "en acción" y "cero" / Cero
Validación	Cero / Formalizado
Modificación	Cero / Formalizado
Aplicación	Formalizado

Destacamos que la totalidad de estudiantes que participan de la vivencia educativa de MM reconocen luego de vivir la misma que la definición puede ser considerada el modelo que da respuesta a la problemática en estudio y encuentran acciones realizadas al producir dicha definición vinculadas con los subprocesos de MM. En este sentido, consideramos que el problema de clasificación de figuras tridimensionales puede resolverse a través de la producción de la definición, pues la misma se constituye como objeto matemático abstracto que esclarece la problemática.

Observamos que parece que la vivencia atraviesa de tal forma a las futuras profesoras que no hacen referencia explícita a la irrupción del proceso de MM, sino que se apropian de la definición valorando la producción realizada para comprender dicha temática y otras desarrolladas en la asignatura GEE. Incluso, el trabajo exploratorio con figuras geométricas y definiciones favorece el descubrimiento de la posibilidad de tener en matemática diversas definiciones no siempre equivalentes y la creación de la imagen conceptual (Vinner, 1991).

El análisis realizado evidencia que el escenario educativo, y específicamente, el primer proceso de MM desarrollado promueve la posibilidad de abordar procesos de producción de definiciones en el aula de matemática apelando a MM como abordaje pedagógico. Consideración esta que puede ofrecer oportunidades para pensar una nueva forma de trabajo en el aula de matemática en el que se producen encuentros y confrontaciones entre diferentes ideas y sentidos sobre poliedros u otras nociones.

SÉPTIMA PARTE

UN FINAL CON NUEVOS COMIENZOS

UN FINAL CON NUEVOS COMIENZOS

Ningún problema puede ser resuelto
en el mismo nivel de conciencia en el que se creó
(Albert Einstein)

Esta última parte de la tesis invita a reflexionar el proceso de investigación llevado adelante que tiene como finalidad central "construir conocimiento y, por medio de ello, apuntar a nuevas posibilidades de relación con el trabajo educativo" (Rockwell, 2009, p.38). Esperamos que el proceso desarrollado y la tesis que se construye a partir de constantes idas y vueltas entre voces diversas sea un elemento que brinde un aporte para reflexionar en torno a la formación de profesoras/es.

En el marco de la investigación llevamos adelante "un trabajo constante de escuchar y observar, registrar, leer y escribir, analizar y dudar; retomar la experiencia y recorrer numerosas veces el mismo ciclo de actividad" (Rockwell, 2009, p.196) que esperamos se perciba a través de la lectura.

A partir de las ideas anteriormente mencionadas avanzamos en esta última parte con el capítulo XIII, en el que presentamos conclusiones, limitaciones del estudio y futuras líneas de investigación que se generan en el marco de la tesis.

CAP XIII

CONCLUSIONES

13. 1. CONCLUSIONES, LIMITACIONES DEL ESTUDIO Y PERSPECTIVAS FUTURAS

En la investigación realizada la atribución de sentidos, la validación y la producción de definiciones resultan elementos fundamentales en el marco de un escenario de MM en el que participan futuras profesoras en matemática y las profesoras de una asignatura del campo de la matemática.

En la búsqueda de producir información que analizamos para dar cuenta de los objetivos de investigación llevamos adelante una investigación de diseño, en la que como investigadoras diseñamos un escenario educativo de MM para implementar en la asignatura GEE de un Profesorado en Matemática de una universidad pública argentina. Consideramos que el diseño realizado nos permite, por un lado, poner en juego en una asignatura de geometría discusiones que avanzan más allá de los objetos propios de este dominio de la matemática, involucrando reflexiones de la didáctica de la matemática en relación con el futuro rol profesional a desarrollar por parte de las futuras profesoras. Por otro lado, permite abordar contenidos predeterminados en el programa de la asignatura, atendiendo demandas curriculares actuales y favoreciendo la producción por parte de las futuras profesoras y el desarrollo del conocimiento interpretativo, además del matemático y didáctico.

El llevar adelante el escenario educativo de MM en un entorno educativo auténtico presenta grandes desafíos. En nuestra investigación, contamos con la conformidad de las profesoras de la asignatura GEE, y en particular, con la excelente predisposición de la Profesora Laura para implementarlo en el aula. En este sentido, interesa señalar que posiblemente la profesora atribuye sentido a su primera vivencia como docente con un trabajo de MM e incluso, tales sentidos parecen variar en diversas afirmaciones que va realizando durante las interacciones con las estudiantes. A modo de ejemplo, observamos que la noción de modelo como ideal y de modelo en formato de texto en geometría, parece atravesarla positivamente. Sin embargo, consideramos que para docentes que asumen como fundamental el trabajo con demostraciones euclidianas en el marco de la asignatura GEE, el hecho de no recurrir a ese tipo de demostraciones durante la totalidad del escenario educativo puede haber sido interpretado por ellas como una cuestión de incompletitud o falta del escenario.

Creemos que la gran cantidad de consignas densas en trabajo propuestas en el escenario educativo puede haber limitado en ciertos momentos las posibilidades de accionar de las futuras profesoras impidiendo ahondar en ciertas ideas que surgen en cada uno de los momentos. Esta gran cantidad de consignas e información construida y analizada en el ámbito de investigación, produce importantes desafíos con relación a criterios de selección que permitan dar cuenta de los objetivos de investigación, focalizando en determinadas acciones, pero sin perder de vista el escenario general y lo acontecido en él.

Más aún, la vivencia densa en actividades, interacciones y producciones, implica que tal densidad se vea reflejada en toda la información producida y sistematizada. Esto exige a las investigadoras un cuidado de selección de datos empíricos al momento de comunicar. Además, señalamos que, así como los sentidos no saturan (Arán, 2006), lo que presentamos y discutimos en esta tesis tampoco lo hace, pues consideramos que los problemas de investigación no resultan acabados, aunque den cuenta de la mejor manera posible de los objetivos propuestos. Esta idea pone en escena la confrontación y tensión de sentidos por parte de quien investiga y comunica el objeto de estudio en el sentido de Achilli (2005), como el “producto final al que se llega luego de múltiples construcciones teóricas y empíricas” (p. 94).

Señalamos como relevante y positivo que la Profesora Laura es también investigadora en educación matemática. En este sentido facilita a través de su voz los registros en audio y video. Pues, en todo momento aclara en los audios el número de grupo que interviene, el número de figura tridimensional que están discutiendo, nombres de estudiantes que intervienen, etc. lo que facilita la transcripción y por tanto la validez de la información en estudio.

Retomamos en primer lugar los dos primeros objetivos de investigación, en los que proponemos estudiar atribución de sentidos por parte de futuras profesoras a procesos de MM y de validación al vivir el escenario educativo donde estos mismos procesos se ponen en juego. Señalamos que tanto con relación a MM como validación evidenciamos en el análisis variación en los sentidos producidos a medida que varían las actividades en las que se encuentran inmersas las futuras profesoras. En este sentido, consideramos importante que en las carreras de formación de profesoras/es no solo se avance con la puesta en juego de diversas situaciones en aula en la que las/os estudiantes tomen un rol activo, crítico y como productoras/es, sino que también se ofrezcan momentos de reflexión exclusivos en relación con lo vivido. Pues, la reflexión y el volver a mirar lo hecho parece favorecer la apropiación por parte del estudiantado, incluso, las palabras escogidas permiten avanzar en el reconocimiento del sentido atribuido.

En línea con lo anterior y en sinergia con Lewis (2021), consideramos que abordar de modo fragmentada en la educación la MM como vehículo y contenido puede resultar contraproducente. La idea de pensar en un puente entre ambas parece ser más acertada, considerando que es la/el docente quien intenta tender dicho puente entre las dos visiones epistemológicas de MM a través de sus intervenciones. Este modo de abordaje permite nutrir el desarrollo de la MM en el estudiantado como contenido y a la vez promover la consecución de objetivos curriculares. Estas ideas nos invitan a tomar en cuenta estas afirmaciones también en relación con validación, es decir, proponemos también tender un puente entre la validación como contenido en sí mismo y como vehículo que se puede emplear de diversos modos en el aula.

Subrayamos que, durante el desarrollo del escenario educativo de MM y en momentos de producción grupal, al interior de cada grupo se identifica una polifonía de voces (Bajtín, 2000) espontáneas y libres que permiten evocar ideas, sensaciones, imágenes, etc. Tal polifonía transmuta a una voz única con la cual se comunica lo pensado, imaginado. Esto nos informa no solo en variaciones de sentidos al comparar momentos sino también en variaciones de estilos al interior de un mismo momento. Cabe indicar que, como señala Bajtín (2000), en el discurso -atravesado por tema/contenido y estilo- reside el sentido atribuido por sus autoras. De este modo, podemos considerar que la propia actividad de comunicar a otras termina de conformar las primeras ideas y sentidos, recuperando del modo más adecuado las incertidumbres vividas. Esto implica elegir nuevas palabras para significar y comprender (Villarreal y Esteley, 2017; Britzman, 2003) o cambiar de estilo (Bajtín, 2000).

En relación con el tercer objetivo de esta investigación, que focaliza en modos de validación puestos en juego por las futuras profesoras en el marco del escenario de MM, consideramos que logramos avanzar en el establecimiento de una caracterización de modos de validación emergentes del trabajo. Es relevante destacar que la MM parece conformarse como un terreno fértil para que sean las estudiantes quienes se pregunten y analicen la validez de supuestos, hipótesis y modelo por decisión propia para primero convencerse a ellas mismas y luego a otras, sin embargo, resultaría interesante indagar modos en que la MM podrían promover validaciones en las se recurra a más pruebas intelectuales (Balacheff, 2000). Con relación a esto último señalamos que en el marco del escenario de MM desarrollado, el disponer de más tiempo, menos urgencias por cubrir ciertos contenidos y puentes o andamios adecuados, podrían promover el análisis de la validación de la relación de Euler y otras relaciones con profundidad.

La concreción del cuarto objetivo que surge en el desarrollo de la investigación, referido a explorar potencialidades y limitaciones de los vínculos entre procesos de MM y procesos de definición, nos ofrece elementos para considerar favorable el abordaje de la producción de definiciones a partir del uso de la MM como abordaje pedagógico. En este sentido, el trabajo realizado en esta investigación ofrece aportes mostrando una forma posible de implementar actividades de producción de definición en el nivel superior. Tal consideración, avanza en una respuesta a lo señalado por Ouvrier-Buffet (2013).

Esto último, también puede ofrecer medios para repensar los propios procesos de construcciones de definiciones en el ámbito de la formación de profesoras/es, o nociones geométricas a las que se otorga sentido y que se aceptan como transitorias con posibilidad de ser revisadas o modificadas. En ese contexto de producción, la definición deja de ser absoluta o neutra y representa del mejor modo el problema que la motiva.

De modo general, queremos resaltar que cada vivencia en formación inicial y continua de profesoras/ es resulta relevante en la conformación de identidad que va determinando ciertos modos de ser o llegar a ser docente. Es por esto que cada vivencia que se transforma en experiencia podría atravesar las formas de llegar a ser de cada futuro/a profesor/a. En esta línea de ideas, reconocemos que las/os autoras/es que retomamos para hablar de identidad (Losano, et al., 2018; Graven y Lerman, 2020) y experiencia (Larrosa, 2003) focalizan en construcción de identidad personal y experiencia atravesada por parte de una persona. Sin embargo, en los resultados reportados en los que avanzamos en reconocer voces que son parte de una comunidad de práctica (Goos, 2020), observamos que los grupos de futuras profesoras que participan del escenario educativo van adquiriendo ciertos rasgos y características particulares en la medida en que sus integrantes aportan improntas propias. En ese sentido, consideramos que, para cada colectivo o grupo, se va perfilando una identidad del grupo o grupal que le da peculiaridad al colectivo y que le permite diferenciarse de otros grupos. De este modo la vivencia va atravesando a cada colectivo y lo vivido se transmuta en experiencia grupal.

Observamos que cada pequeña vivencia y/o experiencia que las estudiantes recuerdan y remiten a través de sus voces fueron conformando la trayectoria profesional (Vezub, 2013), poniendo de manifiesto la importancia de cada acción que se propone en el aula. En este sentido, las voces de las futuras profesoras en el desarrollo del escenario educativo de MM no solo nos informan acerca de sus sentidos sobre MM y sus correspondientes variaciones, sino que también traen adelante cuestiones relevantes para la formación docente. Esas voces contextualizadas en el marco de una vivencia de MM, hablan de la importancia de la colaboración entre las futuras profesoras e incluso en el proceso de validar y definir en matemática. Asimismo, hacemos evidente la importancia de promover el desarrollo del conocimiento interpretativo que atraviesa las acciones que llevan adelante las/os docentes en el día a día e incluso de la capacidad de agencia promoviendo la consecución de metas que se guían en la razón (Zavala y Castañeda, 2014).

Cabe mencionar que, en el estudio, si bien no se profundiza en torno a esta cuestión, toman un rol importante y determinante en relación con la construcción de nociones matemáticas y didácticas los medios en juego. En diversas ocasiones las futuras docentes referencian estrictamente la tecnología que media el proceso de producción (fotocopia, material manipulativo, software, etc.), razonamiento, reflexión y las diversas interacciones e intercambios que se producen. Por lo que consideramos sería interesante en futuros estudios profundizar en torno a ambas consideraciones. E incluso, preguntar sobre qué característica puede adquirir el razonamiento (en el sentido de Balacheff, 2000) acorde a los medios escogidos al validar en el marco de un proceso de MM.

Asimismo, consideramos que podría resultar relevante continuar esta investigación y documentar ciertas propuestas educativas que se ponen en práctica en la formación de futuras/os docentes en matemática en las que se apela a MM, reconociendo los sentidos atribuidos a la MM que se encuentran detrás de las mismas.

También, concebimos como líneas futuras de investigación el estudio de intervenciones docentes e interacciones que se generan en el aula que podrían favorecer el desarrollo de los procesos de MM y, específicamente, potenciar en ciertas acciones llevadas adelante como el validar y en los puentes que se pueden crear para hacer avanzar el subproceso de validación. En línea con lo sucedido en el desarrollo del escenario educativo de MM y el trabajo con figuras tridimensionales que provienen de imágenes de diversos objetos, creemos que puede resultar interesante estudiar y analizar la noción de realidad desde una óptica epistemológica y didáctica en la MM, con el fin de discutir posibilidades futuras de trabajo con MM en el nivel nacional para luego contrastar con el ámbito internacional.

Consideramos importante reconocer como investigadoras las potencialidades de la MM en la formación de profesores/as y el buscar modos de adecuarse a los diferentes contextos educativos. Esta cuestión está en línea con ciertos debates de la investigación internacional en MM que buscan definir un balance entre la enseñanza de la MM para el desarrollo de habilidades para la comprensión del mundo y la MM para aprender contenidos matemáticos prescriptos (Stillman y Brown, 2019). A su vez, estas cuestiones se podrían considerar con más detalles en futuros estudios que contrasten estudios sobre MM en el ámbito de universidades nacionales argentinas. Aportando de ese modo información sobre tendencias locales con ese tipo de trabajo y condiciones que propician u obturan una u otra opción en el sentido marcado por Stillman y Brown (2019). A pesar de ello, como lo enfatiza Sadovsky (2005) el sentido (en este caso sobre MM) no es natural, no es evidente, hay que buscar modos de construirlo e instituirlo, y claro, situarlo.

Las variaciones de sentido sobre la MM y todo el proceso documentado en este estudio, pueden ofrecer medios para: propiciar un trabajo matemático centrado en modelización en cursos de matemática superior, fomentar aprendizajes y reflexiones no solo en torno a lo matemático sino también alrededor de futuras prácticas docentes y promover espacios de trabajo colaborativo entre los futuras/os docentes. Consideramos importantes estos aspectos para pensar en la formación actual de profesoras/es en matemática.

Destacamos que las relaciones entre las estudiantes y los modos de producir matemática se forjan a partir de sus experiencias en distintos ámbitos. Las trayectorias y experiencias personales de formación constituyen la matriz desde la que interpretan y dan sentido a los temas, debates y tareas que se discuten en sus entornos de aprendizaje (Vezub, 2009).

Finalmente, a modo de cierre, pero como parte de un comienzo con diversas líneas de investigación emergentes a abordar, recuperamos lo señalado por Rockwell (2009):

> Considero que se ha hecho análisis etnográfico solo cuando se modifica sustancialmente la concepción inicial del proceso que se estudia; cuando, a consecuencia de la construcción de nuevas relaciones, se puede dar mejor cuenta del orden particular, local y complejo del proceso estudiado; cuando la descripción final es más rica y más coherente que la descripción inicial; cuando se abren nuevos caminos de investigación, siempre en proceso de construcción, siempre inconclusos. (p. 67).

BIBLIO GRAFÍA

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIBLIOGRAFÍA

15th International Congress on Mathematical Education. (2024). Disponible en: https://icme15.com/

Abel, T., Searcy, M. E. y Salinas, T. (2020). Sense-making with the Mathematical Modelling Process: Developing a Framework for Faculty Practice. En G.A. Stillman, G. Kaiser y C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-making* (pp.119-128). Springer.

Achilli, E. (2005). *Investigar en Antropología Social. Los desafíos de transmitir un oficio.* Laborde.

Aleksandrov, A. D. (2003). Visión general de la matemática. En D. Aleksandrov, A. N.

Kolmogorov, M.A. Laurentiev y otros (Eds.), *La matemática: su contenido, métodos y significado.* (10ª ed.) (M. López Rodríguez, trad.). Alianza.

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO.* Síntesis.

Arán, P. O. (2006). *Nuevo Diccionario de la Teoría de Mijaíl Bajtín*. Ferreyra Editor.

Araújo, J. (2019). Toward a Framework for a Dialectical Relationship Between Pedagogical Practice and Research. En G. A. Stillman y J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Ma-thematical Modelling Research in Education* (pp. 21-36). *Springer.*

Bajtín, M. (1999). *Estética de la creación verbal.* (10ª ed.). (T. Bubnova, trad.). Siglo XXI editores.

Bajtín, M. (2000). *Yo También Soy (fragmentos sobre el otro)* (T. Bubnova, trad.). Taurus.

Bakker, A y van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example from Statistics Education. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 429-466). Springer.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools.* CD-Bèta Press.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. (P. Gómez, trad.). Una Empresa Docente. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/document

Balacheff, N. (2002). The researcher epistemology: A deadlock for educational research on proof. En F.L. Lin (Ed.), *Proceedings of 2002 international conference on mathematics: Understanding proving and proving to understand* (pp. 23-44). NSC y NTNU.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM Mathematics Education, 40*(3), 501-512.

https://doi.org/10.1007/s11858-008-0103-2

Balacheff, N. (2019, junio). L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration [sesión de conferencia]. XXVIe Colloque CORFEM, Estrasburgo, Francia. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02981131/document

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baraldi, V. (1996). *El Lugar de la didáctica en la formación docente: historia de una problemática compleja*. Universidad Nacional del Litoral.

Barany, M. (2017). Of Polyhedra and Pyjamas: Platonism and Induction in Meaning-Finitist Mathematics. En E. de Freitas, N. Sinclair y A. Coles (Eds.), *What Is a Mathematical Concept?* (pp. 19-35). Cambridge University Press.

Bassanezi, R. (1994). Modelling as a teaching-learning strategy. *For the Learning of Matehematics, 14*(2), 31-35. https://flm-journal.org Articles/3F5FBE0A2D6EB346EB0517CC861388.pdf

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* (3ª ed.). Contexto.

Bassanezi, R. C. y Biembengut, M. S. (1997). Modelación matemática: una antigua forma de investigación - un nuevo método de enseñanza. *Números, 32*, 13-25. http://sinewton.es/revista_numeros/032/

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16*(2), 105-125. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol16/vol16-2/vol16-2-6.pdf

Bishop, A. (1991). *Enculturación matemática*. Paidós.

Blomhøj, M y Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications, 22*(3), 123-139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: A theory for practice. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. V. Lambdin, F. Lester, A. Wallby y K. Wallby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education.

Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling - Categorising the TSG21 papers. En M. Blomhøj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp.1-17). Roskilde University.

Blum, W. (2007). Mathematisches Modellieren – zu schwer für Schüler und Lehrer? *Beiträge zum Mathematikunterricht, 25*(3), 3-12. http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2007/Blum.pdf

Blum, W. y Leiß, D. (2006). "Filling up" – In the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. En M. Bosch (Ed.), *European Research in Mathematics Education IV: Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1623-1633). Universitat Ramon Llull y ERME.

Bonotto, C. (2007). How to replace the word problems with activities of realistic mathematical modelling? En W. Blum, P. L. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 185-192). Springer.

Borasi, R. (1992). *Learning Mathematics Through Inquiry*. Heinemann.

Borba M. y Villarreal M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. Springer. https://doi.org/10.1007/b105001

Borel, E. (1962). La definición en Matemáticas. En F. L. Lionnais (Ed.), *Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático* (pp. 25-35). Eudeba.

Borge, B. (2015). Modelos y representación en el Estructuralismo Empirista de Bas van Fraassen. *Praxis Filosófica, 41*, 27-42. https://doi.org/10.25100/pfilosofica.v0i41.3179

Borko, H., Dole, S., Esteley, C., Huang, R., Karsenty, R., Miyakawa, T., Da Ponte, P., Potari, D, Robutti, O. y Trouche, L. (2019). *Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups - discussion document.* ICMI Study 25. https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/Publications/ICMI%20Study%2025/updated%20DD/201114%20ICMI25Proceedings6.13.2020.pdf

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Borromeo Ferri, R. (2021) Mandatory Mathematical Modelling in School: What Do We Want the Teachers to Know? En F.K. Leung; G.A. Stillman; G. Kaiser y K.L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 103-118). Springer.

Borromeo Ferri, R. y Lesh, R. (2013). Should interpretation systems be considered as models if they only function implicitly? En G.A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, J. P. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 57-66). Springer.

Borsani, V., Cicala, R. y Duarte, B. (2014). Presencias en la virtualidad: reflexiones a partir de una experiencia de formación docente para profesores de matemática. En G. Astudillo, P. Willging y N. Ferreyra (Eds.), *Memorias REPEM* (pp.145-156). Universidad Nacional de La Pampa.

Boubée, C., Rey, A.M. y Sastre Vázquez, P. (2018). Errores en situaciones de validación: análisis de una categoría emergente en un estudio con alumnos universitarios. En P. Lestón (Ed.), *Acta del XII Congreso Argentino de Educación Matemática* (pp. 1037-1046). Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Alianza.

Britzman, D. P. (2003) *Practice Makes Practice*. University of New York.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (D. Fregona, trad.). Zorzal.

Buenrostro, P. y Ehrenfeld, N. (2019). Math Teachers Sensemaking and Enactment of the Discourse of “Perseverance”. En S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines y C. Munter (Eds.), *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 451-459). University of Missouri.

Cammisi, M.E., Kiener, F. y Scaglia, S. (2016). El rol de las interacciones y del contexto en la construcción del sentido. En G. Astudillo, P. Willging y P. Dieser (Eds.), *Memorias REPEM* (pp. 244-253). Universidad Nacional de La Pampa.

Carnelli, G., Falsetti, M., Formica, A. y Rodríguez, M. (2008). Un estudio del aprendizaje de validación matemática a nivel pre-universitario en relación con distintas interacciones en el aula. *SUMA, 58*, 25-40. https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/58/025-040.pdf

Carter, K. (1993) The Place of Story in the Study of Teaching and Teacher Education. *Educational Researcher, 22*(1), 5-18. https://doi.org/10.2307/1177300

Castorina, J.A., y Sadovsky, P. (2018). Docencia y conocimiento. Los saberes docentes y la producción de conocimiento sobre la enseñanza. *Desde la Patagonia Difundiendo Saberes, 165*(26), 8-12. https://desdelapatagonia.uncoma.edu.ar/wp-content/uploads/2018/12/Revista-26-Castorina-y-Sadovsky.pdf

Charlot, B. (2008). *La relación con el saber, formación de maestros y profesores, educación y globalización.* Trilce.

Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela.* (A. Blanco, trad.). Zorzal.

Confrey, J. (2006). The Evolution of Design Studies as Methodology. En R. Keith Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). Cambridge University Press.

Consejo Interuniversitario Nacional. (2012). *Propuesta de estándares para la acreditación de las carreras de profesorado universitario en matemática.* http://www.cin.edu.ar/comisiones/asuntos-academicos-material-en-tratamiento/subcomision-de-profesorados/

Corfield, D. (2017). Homotopy Type Theory and the Vertical Unity of Concepts in Mathematics. En E. de Freitas, N. Sinclair y A. Coles (Eds.), *What Is a Mathematical Concept?* (pp.125-142). Cambridge University Press.

Cruz, M. F., Götte, M. y Mantica, A. M. (2017). La actividad matemática de clasificar. Concepciones de futuros profesores. En B. Iaffei y K. Temperini (Eds.), *VI Jornadas de Educación Matemática y III Jornadas de Investigación en Educación Matemática*: memorias (pp. 295-304). Universidad Nacional del Litoral.

Cruz, M. F., Hurani, A. y Esteley. C. (2021, 15 de octubre). Futuras/os docentes tomando decisiones al producir modelos en instancias de modelización matemática [ponencia]. Tercer congreso de educación matemática técnica y profesional CEMTYP 2021, San-tiago de Chile, Chile. https://www.youtube.com/watch?v=Kw6NOlGV3Zw

Cruz, M. F.; Esteley, C. y Scaglia, S. (2020). Una experiencia de formación para futuros profesores: producir matemática en un contexto de modelización matemática. *Educación Matemática, 32*(1), 189-216. https://doi.org/10.24844/em3201.09

Cruz, M.F., Esteley, C. y Scaglia, S. (2018). Validar, justificar, demostrar en voces de futuros profesores en matemática. En N. Di Franco (Ed.), *VII Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 105-116). Universidad Nacional de la Pampa.

Cruz, M.F., Mantica, A. M. y Gallo, M. (2020). Experiencia de modelización matemática llevada a cabo con futuros profesores. *Números, 103,* 13-28. https://drive.google.com/file/d/1B-96h_7h5LB3C10biRINeh6HIih8h4IN/view

Cruz, M.F., Mántica, A. M., y Götte, M. (2016). Cómo utilizan los estudiantes de profesorado de Matemática a la demostración como herramienta de prueba. Estudio de un caso al caracterizar familias de poliedros. En G. Astudillo, P. Willging, y P. Dieser (Eds.), *Memorias REPEM* (pp. 120-129). Universidad Nacional de La Pampa.

Cruz, M.F., Scaglia, S. y Esteley, C. (2020). Experiencia de modelización matemática con profesores y futuros profesores. En Y. Morales-López y Á. Ruíz. (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2019* (pp. 2767-2774). Comité Interamericano de Educación Matemática.

Da Ponte, J. P. (2001). Investigating Mathematics and Learning to Teach Mathematics. En F.L. Lin y T. Cooney (Eds.), *Making Sense of Mathematics Teacher Education* (pp. 53-72). Springer.

Da Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: Essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 413-417. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9195-7

Da Ponte, J.P., Segurado, M.I. y Oliveira, H. (2003). A collaborative project using narratives: What Happens when Pupils Work on Mathematical Investigations? En A. Perter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen y A. Begg (Eds.), *Collaboration in teacher education: Examples from the context of mathematics education* (pp. 85-97). Kluwer.

Da Ponte, J.P., y Chapman, O. (2016). Prospective Mathematics Teachers' Learning and Knowledge for Teaching. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3ª ed.) (pp. 275-296). Routledge.

Davis, B. y Renert, M. (2014). *The math teachers know*. Routledge.

Davis, B. y Sengupta, P. (2020). Complexity in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2ª ed.) (pp. 113-117). Springer.

Davis, P. y Hersh, D. (1989). *Experiencia Matemática*. Labor.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2* (pp. 248-255). University of Stellenbosch.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns*. Scientific American Library.

Dewey, J. (1958). *Experiencia y educación*. Losada.

Doerr, H.M., Ärlebäck, J.B. y Misfeldt, M. (2017). Representations of Modelling in Mathematics Education. En G.S. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 71-81). Springer.

Duarte, B. (2010). *Cuestiones didácticas a propósito de la enseñanza de la fundamentación en matemática* [tesis de doctorado no publicada, Universidad de San Andrés]. Repositorio Institucional Universidad de San Andrés.

Durand-Guerrier, V. (2020). Logic in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2ª ed.) (pp. 478-481). Springer.

Durand-Guerrier, V., Meyer, A. y Modeste, S. (2019). Didactical Issues at the Interface of Mathematics and Computer Science. En G. Hanna, D. Reid y M. De Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (pp. 115-138). Springer.

Engel, A. (1969). The relevance of modern fields of applied mathematics for mathematical education. *Educational Studies in Mathematics, 2*(2/3), 257-269. https://www.jstor. org/stable/i277244

Ensor, P. (2001). From preservice mathematics teacher education to beginning teaching: A study in recontextualizing. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(3), 296–320. https://doi.org/10.2307/749829

Ernest, P. (1991) *The Philosophy of Mathematics Education*. Routledge.

Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: Voces y Sentidos* [tesis de doctorado, Universidad Nacional de Córdoba]. Repositorio Ins-titucional Universidad Nacional de Córdoba. https://ffyh.unc.edu.ar/publicaciones/tienda/publicaciones-de-investigacion/seicyt-posgrado/tesis/desarrollo-profesio-nal-en-escenarios-de-modelizacion-matematica-voces-y-sentidos/

Esteley, C. y Cruz, M. F. (2021). Producción de sentidos sobre modelización: el caso de un grupo de futuras profesoras. *Quadrante, 30*(2), 269-292. https://doi.org/10.48489/quadrante.23937

Even, R. y Ball, D. (Eds.). (2009) *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8

Fabbri, L. (2013). *Apuntes sobre Feminismos y construcción de Poder Popular.* Puño y Letra. https://kolectivoporoto.cl/wp-content/uploads/2015/11/Fabbri-Luciano-Apuntes-sobre-feminismos-y-construcci%C3%B3n-de-poder-popular.pdf

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 139-162. https://doi.org/10.1007/BF01273689

Flick, U (2012). *Introducción a la investigación cualitativa*. (3ª ed.). Morata.

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N.Climent (Eds.), *XVII Conferencia Investigación en Educación Matemática* (pp. 275-282). SEIEM.

Forman, E. (2014). Communities of Practice in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 78-81). Springer.

Fregona, D., Smith, S., Villarreal, M. y Viola, F. (Eds.). (2017). *Formación de profesores que enseñan amatemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la Educación Matemátic*a. Universidad Nacional de Córdoba. https://www.researchgate.net/publication/321696764_Formacion_de_profesores_que_ensenan_matematica_y_practicas_educativas_en_diferentes_escenarios_Aportes_para_la_Educacion_Matematica

Freitas, M. T. (2007). V*ygotsky e Bakhtin* (4ª ed.). Ática.

Frejd, P. y Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling: ideas for education. *ZDM Mathematics Education, 5*0(2), 117-127. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0928-2

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies Mathematics, 1* , 3-8. https://www.jstor.org/stable/3481973

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Reidel Publishing Company. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Kluwer.

Gazzetta, M. (1989). *A modelagem como estratégia de aprendizagem da Matemática em cursos de aperfeiçoamento de profesores* [tesis de maestría no publicada, Universidade Estadual Paulista]. Repositorio Institucional Universidade Estadual Paulista.

Geng, G., Smith, P. y Black, P. (Eds.). (2017). *The Challenge of Teaching. Through the Eyes of Pre-service Teachers*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-10-2571-6

Giddens, A. (1997). *Modernidad e identidad del yo*. (J. L. Gil Aristu, trad.). Península.

González, V. y Rodríguez, M. (2006). Un modelo para evaluar la validación matemática. *Revista* E*ducación Matemática, 18*(3), 103-124. http://www.revista-educacion-matematica. org.mx/descargas/vol18/3/vol18-3-03_REM_18-4.pdf

Goos, M. (2014). Communities of Practice in Mathematics Teacher Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 82-84). Springer.

Goos, M. (2020). Communities of Practice in Mathematics Teacher Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2ª ed.) (pp. 107-110). Springer.

Graven, M. y Lerman, S. (2020). Mathematics Teacher Identity. En S. Lerman (Ed.). *Encyclope-*

dia of Mathematics Education (2ª ed.) (pp. 597-600). Springer.

Grossi, S. y Sgreccia, N. (2016). Perspectivas docentes acerca de habilidades de representación y comunicación de lo tridimensional. En R. Otero (Comp.) *Actas del Segundo Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática y Tercer Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática* (pp. 73-79). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Guzmán Gómez, C. y Saucedo Ramos, C. (2015). Experiencias, vivencias y sentidos en torno a la escuela y a los estudios. Abordajes desde las perspectivas de alumnos y estudiantes. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 20*(67), 1019-1054. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14042022002

Hankeln, C. (2020). Validating with the Use of Dynamic Geometry Software. G. A. Stillman, G. Kaiser y C. E. Lampen. (Eds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-making* (pp. 277-286). Springer.

Hanna, G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2ª ed.) (pp. 107-110). Springer.

Hanna, G. y De Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 40*(2), 329-336. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0073-4

Hanna, G. y De Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6

Hanna, G., Reid, D. y De Villiers, M. (Eds.) (2019). *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1

Herbst, P. y Balacheff, N. (2009). Proving and knowing in public: The nature of proof in a classroom. En D. Stylianou, M. Blanton y E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 40–63). Routledge.

Herbst, P., Fujita, T., Halverscheid, S. y Weiss, M. (2017). *The Learning and Teaching of Geometry in Secondary Schools. A modeling perspective*. Routledge. https://doi. org/10.4324/9781315267593

Hersh, R. (1998). *What is Mathematics, Really?* Oxford University.

Holland, D., Skinner, D., Lachicotte, W., y Cain, C. (1998). *Identity and agency in cultural worlds.* Harvard University Press.

Imms, W. y Kvan, T. (Eds.). (2021). *Teacher Transition into Innovative Learning Environments*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-15-7497-9

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Zorzal.

Itzcovich, H. (Ed.). (2007). *La matemática escolar.* Aique.

Julie, C. y Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn y M. Niss. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 503-510). Springer.

Kaiser, G. (2020). Mathematical Modelling and Applications in Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2ª ed.) (pp. 553-561). Springer.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 38*(8), 302-310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Kazez, R. (2009). Los estudios de casos y el problema de la selección de la muestra: aportes del sistema de matrices de datos. *Subjetividad y procesos cognitivos, 13*(1), 71-89. http://dspace.uces.edu.ar:8180/xmlui/handle/123456789/727

Keazer, L. M., y Menon, R. S. (2015/6). Reasoning and sense making begins with the teacher. *The Mathematics Teacher, 109*(5), 342-349. https://doi.org/10.5951/mathteacher.109.5.0342

Kornblit, A (Coord.). (2007). *Metodologías cualitativas en ciencias sociales. Modelos y procedimientos analíticos* (2ª ed.). Biblos.

Lakatos, I. (1986). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático* (2ª ed.) (C. Solís, trad.). Alianza.

Larrosa, J. (1996). *La experiencia de la lectura*. Laertes.

Larrosa, J. (2003). *Entre las lenguas. Lenguaje y educación después de Babel.* Laertes.

Larrosa, J. (2006). *Sobre la experiencia*. Aloma.

Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica*. (L. Botella, trad.). Paidós.

Lerman, S. (2001). A Review of Research Perspectives on Mathematics Teacher Education En F.L. Lin y T. Cooney (Eds.), *Making Sense of Mathematics Teacher Education* (pp. 33-52). Springer.

Lewis, S., T. (2021) Theorizing 'Modelling as Bridge' Between Content and Vehicle. En F. K.

Leung, G.A. Stillman, G. Kaiser y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 45-54). Springer.

Lin, F.L. y Cooney, T. (Eds.). (2001). *Making Sense of Mathematics Teacher Education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0828-0

Lincoln, Y. S. y Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Sage.

Losano, L. (2011). *Procesos situados de aprendizaje en cursos básicos de programación: volverse un miembro de una comunidad* [tesis de doctorado, Universidad Nacional de Córdoba]. Repositorio Institucional Universidad Nacional de Córdoba. https://ffyh.unc.edu.ar/publicaciones/tienda/publicaciones-de-investigacion/seicyt-posgrado/tesis/procesos-situados-de-aprendizaje-en-cursos-basicos-de-programacion-volverse-un-miembro-de-una-comunidad/

Losano, L., Fiorentini, D. y Villarreal, M. (2018). The development of a mathematics teacher's professional identity during her first year teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 287-315. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9364-4

Maaß, K. (2006) What are modelling competencies? *ZDM Mathematics Education, 38*(2), 113-142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Magallanes, A. y Konic, P. (2016). Una perspectiva de integración curricular para el profesorado de matemática. En G. Astudillo, P. Willging, P. y P. Dieser (Eds.), *Memorias REPEM* (pp. 428-437). Universidad Nacional de La Pampa.

Magallanes, A., Esteley, C., Lopez, S. y Colaneri, D. (2014). Un proyecto basado en educación matemática crítica para prevenir contaminación por falta de red cloacal. En G. Astu-dillo, P. Willging y N. Ferreyra. (Eds.), *Memorias REPEM* (pp. 203-212). Universidad Nacional de La Pampa.

Mantica, A. M. y Dal Maso, M. S. (Comp.). (2011) *La geometría en el Triángulo de las Bermudas. Reflexiones y aportes para recuperarla en el aula*. Universidad Nacional del Litoral.

Mantica, A.M. y Renzulli, F. (2014). Entrada en el trabajo geométrico para la validación de conjeturas formuladas por estudiantes de la escuela secundaria. Análisis de una actividad para enunciar criterios de congruencia de triángulos. En G. Astudillo, P. Willging y N. Ferreyra (Eds.), *Memorias REPEM* (pp. 72-80). Universidad Nacional de La Pampa.

Mariotti, A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 185-216). Sense Publishers.

Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219-248. https://doi.org/10.1023/A:1002985109323

Markiewicz, M. E., Milanesio, B. A., y Etchegaray, S. C. (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *UNIÓN, 17*(62), 1-21. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/232

McMillan, J.H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa* (5ª ed.). Pearson.

Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P. y Pacelli, T. (2020). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education, 22*(2), 154-167. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710557

Mercer, N. (2013). The Social Brain, Language, and Goal-Directed Collective Thinking: A Social Conception of Cognition and Its Implications for Understanding How We Think, Teach, and Learn. *Educational Psychologist, 48*(3), 148-168. https://doi.org/10.1080/00461520.2013.804394

Mina, M., Esteley, C. y Alterman, N. (2019). Sobre la modelización matemática en diseños curriculares. El caso del Ciclo Básico de la Educación Secundaria de la Provincia de Córdoba. En O. Falconi y L. Abrate. (Comp.), *XI Jornadas de Investigación en Educa-ción. "Disputas por la igualdad: hegemonías y resistencias en educación* (119-130). Universidad Nacional de Córdoba.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios Matemática*. https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-secundaria-matematica

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2014). *Diseño Curricular de Santa Fe para Ciclo Básico de la Educación Secundaria.* https://www.santafe.gov.ar/index.php/educacion/content/download/218364/1135170/file/Anexo%20III%20Resol%202630-14.pdf

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la Nación. (2018). *Marco Nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática.* https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/marco_nacional_para_la_mejora_del_aprendizaje_en_matemaetica-digital-ok.pdf

Moreno Verdejo, A., Adamuz-Povedano, N., Cañadas, M.C., Fernández-Ahumada, E., García Pérez, M.T., Sánchez-Matamoros García, G., Ramírez-Uclés, R. y Serradó, A. (2022). Matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria. En L. J. Blanco Nieto, N. Climent Rodríguez, M. T. González Astudillo, A. Moreno Verdejo, G. Sánchez-Matamoros

García, C. de Castro Hernández y C. Jiménez Gestal (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 172-198). Universidad de Granada.

Muller, E. y Burkhardt, H. Applications and Modelling for Mathematics - Overview. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 267-274). Springer.

National Council of Teachers of Mathematics. (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making.* https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Focus_in_High_School_Mathematics/FHSM_Executive_Summary.pdf

Neiman, G. y Quaranta, G. (2006). Los estudios de caso en la investigación sociológica. En I. Vasilachis de Gialdino (Coord.), *Estrategias de investigación cualitativa* (pp. 213-238). Gedisa.

Niss, M. (2015). Prescriptive modelling – challenges and opportunities. En G. A. Stillman, W. Blum y M. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 67-79). Springer.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 165-182. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9272-3

Ouvrier-Buffet, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa* d*ialectique avec la preuve Étude épistémologique et enjeux didactiques.* [tesis de doctorado, Université Paris - Diderot]. Repositorio Institucional Université Paris – Diderot https://www.researchgate.net/publication/281566557_Modeling_of_the_defining_activity_in_mathematics_and_of_its_dialectic_with_the_proving_process_Epistemological_study_and_didactical_challenges

Ouvrier-Buffet, C. (2015). A model of mathematicians' approach to the defining processes. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *CERME 9. Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2214-2220). Charles University in Prague.

Philip, D. (1986). The nature of proof. En M. Carss (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education* (pp. 352-358). Springer.

Pimm, D. (2017). Making a Thing of It: Some Conceptual Commentary. En E. de Freitas, N. Sinclair y A. Coles (Eds.), *What Is a Mathematical Concept?* (pp. 269-283). Cambridge University Press.

Pochulu, M., Font. V. y Rodríguez, M. (2015). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática través del diseño de tareas. *RELIME, 19*(1), 71-98. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1913

Pollak, H.O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics, 2*, 393-404. https://doi.org/10.1007/BF00303471

Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica. Tomo I - Fundamentos*. Patronato de Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros Industriales.

Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61* (1-2), 39-65. https://doi.org/10.1007/s10649-006-7136-7

Ravn, O. y Skovsmose O. (2019). *Connecting Humans to Equations.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-01337-0

Real Academia Española. (s.f.). Disponible. En *Diccionario de la lengua española*. Consultado el 20 de marzo de 2023, de https://dle.rae.es/disponible

Real Academia Española. (s.f.). Sistema. En *Diccionario de la lengua española*. Consultado el 15 de agosto de 2022, de https://dle.rae.es/sistema?m=form

Real Academia Española. (s.f.). Validación. En *Diccionario de la lengua española*. Consultado el 14 de septiembre de 2022, de https://dle.rae.es/validaci%C3%B3n?m=form

Reid, D. y Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789460912467

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M. y Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration. *ZDM Mathematics Education, 48*(5), 651-690. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0797-5

Rocha, L. y Fiorentini, D. (2009). Percepções e reflexões de professores de matemática em início de carreira sobre seu desenvolvimento profissional. En D. Fiorentini, R. C. Grando, y R. Miskulin (Orgs.), *Práticas de Formação e de Pesquisa de Professores que Ensinam Matemática* (pp. 125-141). Mercado de Letras.

Rockwell, E. (2009). *La experiencia etnográfica: historia y cultura en los procesos educativos*. Paidós.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy*. Zorzal.

Sadovsky, P. (Coord.). (2010). *La enseñanza de la matemática en la formación docente para la escuela primaria*. Ministerio de Educación de la Nación.

Sadovsky, P. y Sessa, C. (2004). Reportaje para estar seguros. https://www.suteba.org.ar revista-la-educacin-en-nuestras-manos-n-71-mayo-de-2004-1332.html

Sanchez Mármol, L. y Pérez Beato, M. (1961). *Geometría métrica, proyectiva y sistemas de representación*. SAETA.

Scaglia, S. y Kiener, F. (2015). La construcción del sentido en matemática desde distintas perspectivas. *Novedades Educativas, 292,* 40-46.

Schaefer, L. y Sgreccia, N. (2016). Conocimiento especializado del contenido al enseñar a medir segmentos y ángulos a futuros profesores en matemática. En R. Otero (Comp.) *Actas del Segundo Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática y Tercer Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática* (pp. 66-72). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Selling, S. K., Garcia, N. y Ball, D. L. (2016) What Does it Take to Develop Assessments of Mathematical Knowledge for Teaching?: Unpacking the Mathematical Work of Teaching. *The Mathematics Enthusiast, 13*(1), 35-51. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1364

Sevinc, S. y Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: a case of modeling-based teacher education courses. *ZDM Mathematics Education, 50*, 301-314. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9

Sgreccia, N. (Coord.). (2018). *Procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en matemática*. FahrenHouse.

Shing Leung, K. F., Stillman, G., Kaiser, G. y Wong, K. L. (2021). *Mathematical Modelling Education in East and West*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *EMA, 6*(1), 3-26. https://es.scribd.com/document/329407266/Skovsmose-2000-Escenarios-EMA

Skovsmose, O. (2005). Meaning in Mathematics Education. En J. Kilpatrick, C. Hoykles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (83-104). Springer.

Sriraman. B. y Mousoulides, N. (2020). Quasi-empirical Reasoning (Lakatos). En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (2ª ed.) (pp. 703-705). Springer.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos.* Morata.

Stillman, G. A., Kaiser, G. y Lampen, C.E. (Eds.). (2020). *Mathematical Modelling Education and Sense-making*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4

Stillman, G., Blum, W. y Kaiser, G. (Eds.), (2017). *Mathematical Modelling and Applications. Crossing an Researching Boundaries in Mathematics Education.* Springer.

https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1

Stylianides, A.J. y Harel, G. (Eds.). (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving. An International Perspective.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70996-3

Survey Team 4. The 14th International Congress on Mathematical Education. (2021). *The Teaching and Learning of Mathematical Modelling and Interdisciplinary Mathematics Educations*. https://www.icme14.org/static/en/news/50.html?v=1650633141101

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

The Design-Based Research Collective. (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8. https://doi.or-g/10.3102/0013189X032001005

Topic Study Group 16. The 14th International Congress on Mathematical Education. (2021). *Reasoning, argumentation and proof in mathematics education.* https://www.icme14.org/ueditor/jsp/upload/file/20190121/1548052288382093427.pdf

Topic Study Group 22. The 14th International Congress on Mathematical Education. (2021). *Mathematical Applications and Modelling in Mathematics Education.* https://www.icme14.org/ueditor/jsp/upload/file/20181222/1545476609427011116.pdf

Torroba, E., Etcheverry, N., Reid, M., Evangelista, N. y Villarreal, M. (2007). Modelización en la formación de profesores de matemática: relato de una experiencia. *Yupana, 4*(7), 27-38.

Umland, K. y Sriraman, B. (2020). Argumentation in Mathematics. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2ª ed.) (pp. 61-63). Springer.

Valero, P. y Skosvmose, O. (2012). *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (P. Perry, trad.). Universidad de los Andes.

Valles, M. S. (2002). *Cuadernos metodológicos. Entrevistas cualitativas.* Centro de Investigaciones Sociológicas.

Vezub, L. F. (2004). Las trayectorias de desarrollo profesional docente: algunos conceptos para su abordaje. *IICE, 22*, 13-12. http://repositorio.filo.uba.ar/handle/filodigital/9899

Vezub, L. F. (2008). *Trayectorias de Desarrollo Profesional Docente. La construcción del oficio en los profesores de Ciencias Sociales Sentidos* [tesis de doctorado no publicada, Universidad de Buenos Aires]. Repositorio Institucional Universidad de Buenos Aires.

Vezub, L. F. (2011). ¿Qué cuentan las trayectorias de desarrollo profesional de los docentes sobre su oficio? En A. Alliaud y D. H. Suárez (Coord.), *El saber de la experiencia: na-rrativa, investigación y formación docente* (pp. 159- 200). Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales.

Vezub, L. F. (2013). Hacia una pedagogía del desarrollo profesional docente: modelos de for-mación continua y necesidades formativas de los profesores. *Páginas de Educación, 6*(1), 97-124.

VII Jornadas de Educación Matemática y IV Jornadas de Investigación en Educación Matemá-tica - Universidad Nacional del Litoral. (2021). https://www.fhuc.unl.edu.ar/ver-noticia/?nid=48176

VIII Reunión Pampeana de Educación Matemática - Universidad Nacional de la Pampa. (2020). http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/

Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A. y Sánchez- Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de mode-lación para la clase de matemática. *Espaço Plural, 18*(36), 219-251. https://www.redalyc.org/pdf/4459/445955647011.pdf

Villarreal, M. y Esteley, C. (2014). Las potencialidades de la narrativa en la formación de profe-sores. *Revista de Enseñanza de la Física, 26*(1), 23-36. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/revistaEF/article/view/9497

Villarreal, M. y Esteley, C. (2017). Futuros profesores de matemática: narrativas de sus prime-ras prácticas en escenarios de modelización. En D. Fregona, S. Smith, M. Villarreal y F. Viola (Eds.), *Formación de profesores que enseñan matemática y prácticas educativas en diferentes escenarios. Aportes para la Educación Matemática* (pp. 25-50). Universidad Nacional de Córdoba.

Villarreal, M., Esteley, C. y Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM Mathematics Education, 50*(6), 327-341. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0925-5

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematicas. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Kluwer Academic Publishers.

Westaway, L. y Graven, M. (2019). Exploring grade 3 teachers' resistance to 'take up' progressive mathematics teaching roles. *Mathematics Education Research Journal, 31*, 27-46. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0237-7

Winicki-Landman, G y Leikin, R. (2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions. Part 1. *For* *the Learning of Mathematics, 20*(1), 17-21. https://www.jstor.org/stable/i40009630

XIII Congreso Argentino de Educación Matemática - Universidad Nacional de la Plata (2018). http://ocs.congresos.unlp.edu.ar/index.php/CAREM/XIII/index

Zandieh, M. y Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*(2), 57-75. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.01.001

Zaslavsky, O. y Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317-346. http://www.jstor.org/stable/30035043

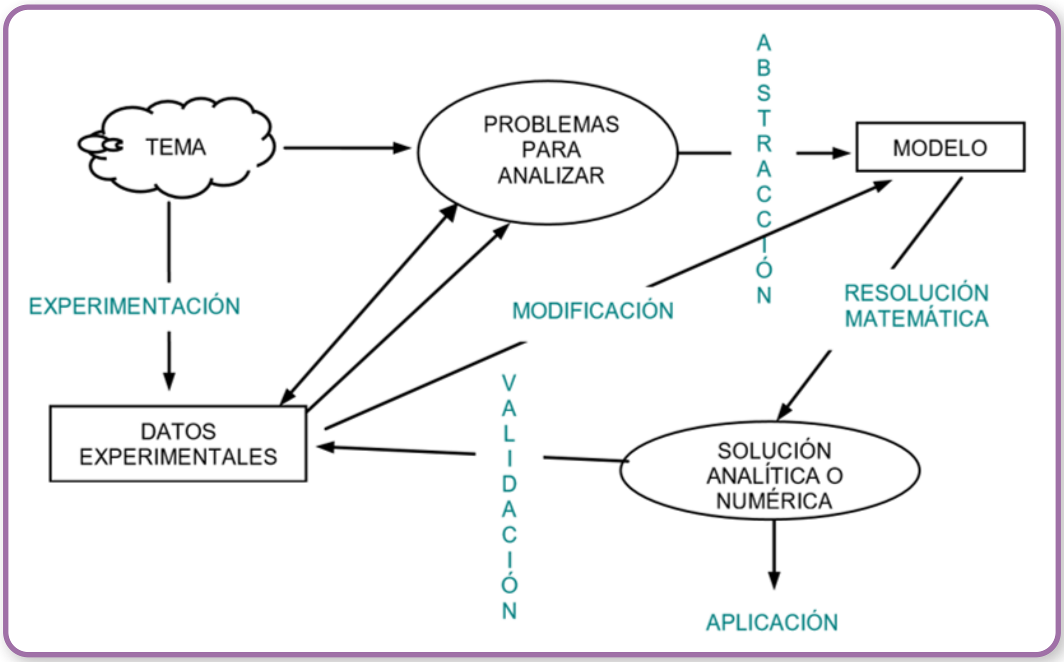
Zavala, M. A. y Castañeda, S. (2014). Fenomenología de agencia y educación. Notas para el análisis del concepto de agencia humana y sus proyecciones en el ámbito educativo. *Magister, 26*(2), 98-104. https://reunido.uniovi.es/index.php/MSG/article/view/13733/12382

ANEXO

ANEXO

1. ESQUEMA DEL PROCESO DE MM Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SUBPROCESOS DEL PROCESO DE MM ENTREGADOS A LAS FUTURAS PROFESORAS EN CLASE

FIGURA 17 | *Esquema de proceso de MM, tomado de Esteley (2014), p.54.*



Definiciones o caracterizaciones de diferentes términos o frases presentes en el esquema anterior:

EXPERIMENTACIÓN: obtención de datos experimentales o empíricos que ayudan a la comprensión del problema, a la modificación del modelo y la toma de decisiones acerca de su validez. Es esencialmente un proceso de laboratorio y/o de estudio estadístico o bibliográfico dependiendo de la naturaleza del estudio.

ABSTRACCIÓN: proceso de selección de las variables esenciales y formulación en lenguaje natural del problema o situación real. En esta fase se comienza a vincular las variables seleccionadas.

RESOLUCIÓN: el modelo matemático es construido cuando se substituye el lenguaje natural por el lenguaje matemático. El estudio del modelo depende de su complejidad y puede ser un proceso numérico. Cuando los datos conocidos no son suficientes, pueden ser creados nuevos métodos o el modelo debe ser modificado.

VALIDACIÓN: comparación entre la solución obtenida en la resolución del modelo matemático y los datos reales u otra información disponible. Es un proceso de decisión de aceptación o no del modelo inicial. El grado de aproximación deseado será un factor preponderante en la decisión.

MODIFICACIÓN: en caso de que la aproximación entre los datos reales y la solución del modelo no sea aceptada por quien o quienes trabajan en el estudio, se deben modificar las variables o la ley de formación que da cuenta de las posibles relaciones entre las mismas y, con eso, el modelo original es modificado y el proceso se inicia nuevamente.

APLICACIÓN: la modelización eficiente o eficaz, en el marco del estudio, permite realizar previsiones, tomar decisiones, explicar y entender la cuestión sobre la que se está trabajando. Permite participar del mundo real con la capacidad de producir cambios.

2. FUENTES DE IMÁGENES EMPLEADAS EN EL DISEÑO DEL ESCENARIO DE MM

TABLA 98

IMAGEN	FUENTE
	Disponible en (Última consulta, abril, 2023): http://t1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd-9GcQoce54FyRqdDSpl3qihzR DBJm7jKxXv-vBendsuzbuqXOPzKHxC
	Disponible en (Última consulta, abril, 2023): https://entrecupcakesygalletas.wordpress.com/2012/03/03/mi-primera-tar-ta-de-dos-pisos-cuadrada/
	No se pudo verificar la disponibilidad actual del sitio del cual se extrajo

IF-2023-00267925-UNC-ME#FFYH

No se pudo verificar la disponibilidad actual del sitio del cual se extrajo

Disponible en (Última consulta, abril, 2023):
https://www.cronista.com/negocios/tres-ciudades-argentinas-entre-las-mas-caras-para-comprar-una-propiedad-en-america-latina/

No se pudo verificar la disponibilidad actual del sitio del cual se extrajo

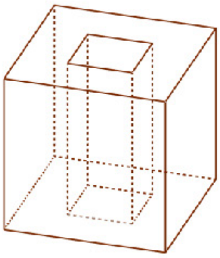
Disponible en (Última consulta, abril, 2023):

http://3.bp.blogspot.com/-99BA03sr_Xk/T-rqiC9UM9I/AAAAAAAAMDE/aTBjysGARoU/s1600/poliedros2.JPG

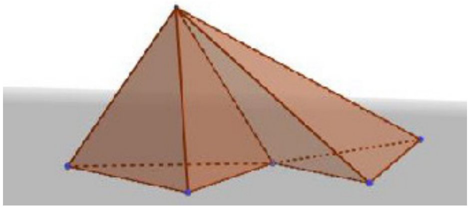
Disponible en (Última consulta, abril, 2023):
https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Templo_de_Kukulc%C3%A1n.jpg

No se pudo verificar la disponibilidad actual del sitio del cual se extrajo

Disponible en (Última consulta, abril, 2023):
https://importienda.mercadoshops.com.ar/MLA-873132279-chocolate-toblerone-grande-360g-importado-suiza-_JM#&gid=1&pid=2

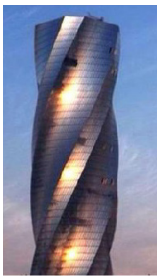


Construcción realizada en *GeoGebra* (Fuente propia)



Construcción realizada en *GeoGebra* (Fuente propia)

No se pudo verificar la disponibilidad actual del sitio del cual se extrajo



Disponible en (Última consulta, abril, 2023):
https://thearchitecturedesigns.com/dance-of-light-an-architectural-marvel-180-meter-tall-twisted-towers-unveiled-in-china/

Disponible en (Última consulta, abril, 2023):
https://www.batallon.es/figuras-de-papel-mache/6248-figuras-de-papel-mache-estrella-colgar-6-puntas-16-4051836125115.html

	No se pudo verificar la disponibilidad actual del sitio del cual se extrajo
	Disponible en (Última consulta, abril, 2023): https://www.youtube.com/watch?v=qRq66_p0uxI
	Disponible en (Última consulta, abril, 2023): https://es.dreamstime.com/fotos-de-archivo-libres-de-regal%C3%ADas-bolas-chinas-del-masaje-de-la-mano-image29066338

Universidad Nacional de Córdoba
1983/2023 - 40 AÑOS DE DEMOCRACIA

Hoja Adicional de Firmas
Informe Gráfico

Número: IF-2023-00267925-UNC-ME#FFYH

CORDOBA, CORDOBA
Miércoles 12 de Abril de 2023

Referencia: Cruz, María Florencia - TESIS

El documento fue importado por el sistema GEDO con un total de 370 pagina/s.

Marina Salas
Jefe de División
Mesa de Entradas Facultad de Filosofía y Humanidades
Universidad Nacional de Córdoba