

FAMAF

FAMAF

Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación



EXPLORACIONES ANALÍTICAS Y
NUMÉRICAS DE LAS DESIGUALDADES
DE BEKENSTEIN EN
ELECTROMAGNETISMO NO LINEAL

TRABAJO ESPECIAL

Licenciatura en Física

Autor: Juan Manuel Diaz

Director: Marcelo Enrique Rubio

23 de marzo del 2023

Esta obra está bajo Licencia Creative Commons
Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0



Agradecimientos

Hay tanta gente que quiero agradecer y, aunque podría escribir un párrafo por cada una, prefiero dedicarme a estudiar para la defensa. Este logro no es individual, no soy el único que hizo posible este hermoso acontecimiento, sino que muchísimas personas han sido mi sostén y me han brindado apoyo constante e incondicional para llegar a concretarlo. No suelo ser muy bueno expresándome, pero bueno, voy a hacer el intento en los próximos párrafos y veo que sale. . .

En primer lugar quiero agradecer a Marcelo, mi director y mentor durante el transcurso de este último año. No solo cumpliste con creces con tu deber, sino que también me hiciste sentir muy cómodo y capaz. Espero que este solo sea el primero de muchos trabajos que realicemos juntos. Junto con el quiero incluir a muchos de los profesores que tuve en la carrera, que me han logrado transmitir un amor y pasión por la física inmenso, cosa que considero vital para todo profesional en cualquier ámbito.

A mis amigos, que son un montón y me han bancado en todo. Me gustaría nombrarlos uno por uno pero tampoco quiero que se suban al pony. Estos últimos cinco años han sido los mejores de mi vida y no me los imagino sin ustedes, me alegran la vida. Ya voy a hablar con cada uno para decirles algunas cositas aunque ya las sepan, pero quiero hacerles saber que los amo un montón y que siempre pueden contar conmigo. De todas formas, me gustaría destacar entre ellos a dos, Nacho y Agus. Y no lo hago únicamente porque les prometí que lo iba a hacer si me respondían un par de dudas, sino porque realmente tuvieron un impacto importante en mi desempeño académico y considero firmemente que este título debería ser de ellos (igual por favor no me lo saquen).

A mi familia, las personas más importantes de mi vida (y a las que amo con locura). Me dieron siempre la confianza y apoyo necesario y no hay palabras suficientes para expresar lo agradecido que estoy por eso. Mi mamá, que ha tenido que soportar infinidad de explicaciones sobre temas de la carrera sin siquiera saber lo que es un autovalor. Mi papá, que cuando le quería contar lo mismo me preguntaba si había visto el partido de River. Ambos han sido mis pilares e ídolos desde que tengo memoria, y este logro es en un porcentaje altísimo de ustedes también. Al banana del Mati, mi compañero de toda la vida, que por más que seamos tan diferentes en un montón de aspectos y nos peleamos bastante, no me imagino mi vida sin vos. Sos la persona que más amo en el mundo. Pero mi familia también esta

conformada por Bruno y Merlina, así que por último los quiero nombrar también a ellos. Bruno, sos un compañero bárbaro, cariñoso y juguetón, y te extraño todo el tiempo. En cuanto a la otra loquita, si bien recién nos estamos conociendo, te quiero un mundo, así que cuando termine de escribir esto te voy a despertar de la siesta que te estas tomando en mi falda para darte unos besitos.

Por último, a la universidad pública, gratuita y de calidad, que a veces la damos por sentado y que en realidad lastimosamente en este mundo resulta un privilegio.

Resumen

Desde su postulación en 1981 las desigualdades de Bekenstein han cobrado gran relevancia en física teórica, dado que proveen relaciones entre los distintos parámetros que describen un sistema, permitiendo un mejor entendimiento de su evolución dinámica. Aunque su mayor éxito se dio en el contexto de soluciones de agujeros negros en Relatividad General, en los últimos años han cobrado interés también en teorías electromagnéticas, y en particular en aquellas de naturaleza no lineal. Estas últimas generalizan la famosa teoría de Maxwell, la cual no resulta exitosa para modelar ciertos fenómenos astrofísicos de altas energías.

En este trabajo se estudió la validez de estas desigualdades para la recientemente propuesta teoría de electromagnetismo ModMax, la cual resulta de particular interés por ser la única extensión no lineal de la teoría de Maxwell que preserva dos de sus simetrías más importantes: la invariancia conforme y la invariancia ante rotaciones duales. En primer lugar, se analizó su problema de valores iniciales, demostrándose que es una teoría simétrica-hiperbólica, lo que implica que admite un problema de Cauchy bien puesto. Luego, para sistemas gobernados por sus ecuaciones, se probó analíticamente una serie de desigualdades geométricas que relacionan energía, carga, momento angular y tamaño. Por último, se realizaron simulaciones numéricas de ModMax y se verificaron los resultados obtenidos analíticamente. Junto a esto, se exploró numéricamente cómo la no linealidad provoca la generación de discontinuidades en las soluciones, las cuales dependen fuertemente de la suavidad del dato inicial y del valor del parámetro de “no linealidad” que caracteriza la teoría.

Palabras clave. Electromagnetismo, Electromagnetismo No Lineal, Desigualdades Geométricas, Desigualdades de Bekenstein, Sistemas Bien Puestos, Hiperbolicidad.

Índice general

Agradecimientos	1
Resumen	3
1. Introducción	7
1.1. Resultados previos	8
1.2. Organización del trabajo	9
2. Desigualdades geométricas en Electrodinámica no lineal	11
2.1. Electrodinámica no lineal	11
2.1.1. Estructura característica	13
2.2. Desigualdades geométricas	15
2.2.1. Desigualdades de Bekenstein	15
2.3. Hiperbolicidad y sistemas bien puestos	16
2.3.1. Hiperbolicidad en Electrodinámica no lineal	18
3. Electrodinámica ModMax	21
3.1. Aspectos generales	21
3.2. Tensor energía-momento y condición de energía	24
3.3. Campo eléctrico de una carga puntual	25
3.4. Hiperbolicidad simétrica	27
3.5. Desigualdades de Bekenstein en Electrodinámica ModMax . .	30
3.5.1. Desigualdad entre carga, energía y tamaño	30

3.5.2.	Desigualdad entre momento angular, energía y tamaño	34
3.5.3.	Desigualdad entre carga, energía y momento angular	36
4.	Simulaciones en ModMax I: Diferencias Finitas	39
4.1.	Ecuaciones de evolución y de vínculo	39
4.2.	Evolución en simetría planar	40
4.3.	Dominio numérico y cantidades de monitoreo	43
4.3.1.	Energía electromagnética	43
4.3.2.	Momento angular	43
4.4.	Descripción del método de Diferencias finitas	44
4.5.	Resultados	46
4.5.1.	Convergencia	48
4.5.2.	Energía y momento angular	50
5.	Simulaciones en ModMax II: Captura de choques	53
5.1.	Sistemas de Leyes de Conservación	53
5.2.	Descripción del método WENOZ-5	55
5.3.	Resultados	57
5.3.1.	Convergencia	59
5.3.2.	Energía y momento angular	60
5.4.	Exploración de las desigualdades geométricas	62
5.5.	Comparación de los métodos y formación de choques	64
6.	Conclusiones y Perspectivas	69

Introducción

En 1981, Jacob Bekenstein, motivado por la similitud entre el estudio de agujeros negros y las leyes de la termodinámica, daría inicio a la termodinámica de agujeros negros. Fue en este marco que postuló una serie de desigualdades geométricas que establecen ciertas relaciones entre los diferentes parámetros que los caracterizan, como su masa, carga, tamaño y momento angular [9]. Este tipo de relaciones contribuyen al entendimiento de la evolución dinámica de cualquier sistema físico al cual se le pueda asociar una entropía. Es por este motivo que las desigualdades de Bekenstein han sobrepasado el contexto en el que fueron postuladas, cobrando relevancia también en teorías clásicas de campos, tales como la Relatividad General y el Electromagnetismo.

En Relatividad General las desigualdades geométricas son de gran importancia, sobre todo en el ámbito de los agujeros negros. Estas nos permiten entender algunas de sus propiedades, dictaminando por ejemplo el máximo valor para su masa o su tamaño. Algunos de los problemas que han originado las desigualdades geométricas en esta teoría han sido el de la masa máxima que puede llegar a tener una estrella antes de colapsar y la máxima carga y momento angular que puede tener un agujero negro más allá del cual se convertiría en una singularidad desnuda. El primero fue estudiado por Chandrasekhar en los años treinta [15], mientras que el segundo surgió luego de que Reissner y Nordström [55, 48] encontraran la solución que describe a un objeto estático, simétricamente esférico y cargado eléctricamente.

En cuanto al Electromagnetismo, si bien la teoría de Maxwell es la más conocida, existen otras que la generalizan. Al no poseer la cualidad de ser lineales como la teoría de Maxwell, estas son denominadas teorías de electromagnetismo no lineal. Existen escenarios y regímenes donde estas teorías resultan de particular importancia, siendo utilizadas en áreas tales como electrodinámica cuántica [37], óptica no lineal [46], cosmología [57], astrofísica [2], entre otras. Un ejemplo de ellas es la famosa teoría de Born-Infeld [11], la cual tiene conexiones matemáticas con la teoría de cuerdas [58]. Si suponemos que las desigualdades de Bekenstein tienen validez universal, sería razonable utilizarlas para examinar y estudiar estas teorías, como ya fue hecho con Maxwell [24].

En este trabajo, se analizó la validez de las desigualdades de Bekenstein

de una teoría no lineal de Electromagnetismo propuesta recientemente, conocida como *Electrodinámica ModMax* [5]. Lo que motiva su estudio es el hecho de que es la única de estas teorías que preserva todas las simetrías de la teoría de Maxwell, incluyendo la invariancia ante rotaciones duales e invariancia conforme. En particular, fueron exploradas relaciones entre la energía electromagnética de una región acotada en el espacio con su distribución de carga interior y su momento angular.

Un aspecto insoslayable en el estudio de teorías clásicas de campos es el correspondiente Problema de Cauchy, y especialmente, bajo qué condiciones la teoría de interés admite un Problema de Cauchy “bien puesto”. Este concepto fue introducido de forma heurística por primera vez en los años veinte, de la mano de J. Hadamard [?]. En pocas palabras, establece que el conjunto de ecuaciones que describe la dinámica de un sistema físico es bien puesto si dado un dato inicial, existe una solución única, la cual depende continuamente del dato. La manera moderna de obtener criterios para garantizar esta condición matemática es a través de técnicas algebraicas, las cuales engloban el concepto de *hiperbolicidad*. En teorías no lineales de electromagnetismo, este último concepto ha sido estudiado en [1] (ver también [56]), dando condiciones necesarias y suficientes para que resulten bien puestas. En este trabajo, se analiza el problema de valores iniciales correspondiente a la teoría ModMax, logrando demostrarse que resulta bien puesta. Esta propiedad garantiza la existencia y unicidad de soluciones.

Se mencionan a continuación algunas contribuciones previas al estudio de Desigualdades geométricas en Relatividad General y en Electrodinámica no lineal, las cuales motivaron y dieron el puntapié inicial al estudio llevado a cabo en este trabajo.

1.1. Resultados previos

Las teorías de electromagnetismo no lineal han sido extensamente estudiadas a partir de la postulación del modelo de Born e Infeld [11] en 1934. Otro ejemplo muy conocido de estas teorías es la de Heisenberg y Euler, postulada solo dos años después y que consiste en una acción con correcciones no lineales a la teoría de Maxwell debido a efectos relacionados con la interacción electrón-positrón [34]. A partir de estos modelos, han surgido muchas otras teorías, con una gran variedad de aplicaciones en diferentes áreas de la física. En el año 2020, Bandos et. al. [5] propusieron una teoría de electromagnetismo no lineal con la particularidad de preservar todas las simetrías de la teoría de Maxwell. Desde su postulación, han surgido algunos trabajos sobre la misma, estudiando aspectos como soluciones de agujeros

negros acopladas ella [49, 6, 42], y su aplicación en fenómenos de birrefringencia [27].

Como se mencionó anteriormente, la hiperbolicidad de teorías de electromagnetismo no lineal ha sido estudiada en detalle en el pasado. En [1] se obtuvieron condiciones geométricas necesarias y suficientes que garantizan la hiperbolicidad simétrica de estas teorías, asegurando así la condición de Hadamard. En [56] se ha estudiado esta propiedad para la teoría Force-Free, una teoría no lineal de electromagnetismo que no se deriva de una densidad lagrangiana como las estudiadas en [1].

Finalmente, las desigualdades geométricas en sistemas físicos han sido también el foco de muchos trabajos. En Relatividad General se han obtenido resultados sobre todo en el contexto de agujeros negros [20, 16, 17, 21, 18, 25]. No obstante, el estudio de las desigualdades en Electromagnetismo es más reciente. Dain fue pionero en este tema, probando en 2015 la validez de las Desigualdades de Bekenstein para la electrodinámica de Maxwell [24]. Años más tarde, Peñafiel et. al. estudiaron las mismas desigualdades para la electrodinámica de Born-Infeld [50], llegando a probar la desigualdad general con carga nula y, en [51] la desigualdad general con momento angular nulo y simetría esférica, siguiendo exactamente los lineamientos desarrollados por Dain en su trabajo seminal. La intención de este trabajo es contribuir al estudio de las desigualdades geométricas en electrodinámica no lineal, tanto desde la perspectiva analítica como a partir de simulaciones numéricas.

1.2. Organización del trabajo

Este trabajo se estructura del siguiente modo. En el capítulo 2 se introducen algunos conceptos que serán fundamentales para el desarrollo posterior, revisando preliminares sobre la electrodinámica no lineal, sistemas bien puestos y desigualdades geométricas, haciendo particular énfasis en aquellas postuladas por Bekenstein.

El capítulo 3 está enfocado en la electrodinámica de ModMax, empezando por una introducción a la misma y a sus ecuaciones. En este capítulo se presentan los resultados analíticos del trabajo, los cuales incluyen la prueba de la hiperbolicidad simétrica de ModMax y el estudio de las desigualdades de Bekenstein. Por otra parte, la descripción de los sistemas simulados y resultados numéricos obtenidos mediante el método de Diferencias Finitas se encuentran en el capítulo 4. En el capítulo 5, se introduce otro método numérico llamado WENOZ-5 para el tratamiento de discontinuidades. Se presentan además los resultados correspondientes a ambos métodos desa-

rrollados, incluyendo en particular la verificación de la desigualdad entre carga y momento angular probada en el capítulo 2. En la última parte de este mismo capítulo se realiza una breve comparación entre ambos y un análisis de la aparición de choques según la suavidad del dato inicial. Finalmente, en el capítulo 6, se encuentra la conclusión del trabajo, donde se revisan los resultados más importantes obtenidos y sus implicancias, además de posibles trabajos futuros.

A lo largo de todo el escrito se trabajó con unidades tales que $c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$. Se consideró la signatura $(-, +, +, +)$, y las simulaciones numéricas fueron realizadas asumiendo la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Por último, se asumió la notación de sumación de Einstein, en la cual se suprime el símbolo de sumatoria en el producto tensorial. Para las derivadas parciales respecto de las coordenadas se empleó la notación ∂_t para la derivada respecto al tiempo, y ∂_i , para la derivada respecto a las coordenadas espaciales x, y, z ($i = 1, 2, 3$ respectivamente).

Desigualdades geométricas en Electrodinámica no lineal

En este capítulo se introducen las herramientas teóricas que serán desarrolladas en el trabajo. Se empieza presentando la Electrodinámica no lineal (ENL), con sus aplicaciones y propiedades generales. Luego, se incluye una breve introducción a las desigualdades geométricas, haciendo particular hincapié en las correspondientes al Electromagnetismo. Por último se presentan los conceptos relacionados con el de hiperbolicidad y de sistemas “bien puestos”.

2.1. Electrodinámica no lineal

De la teoría clásica de campos [43], es conocido que la densidad lagrangiana correspondiente a la Electrodinámica clásica es cuadrática en el tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$; esto es

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.1)$$

Esto implica que las ecuaciones dinámicas que se obtienen al variar la acción correspondiente resultan lineales, obteniendo

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (2.2)$$

$$\nabla_{[\mu} F_{\nu\sigma]} = 0, \quad (2.3)$$

donde ∇_μ es la derivada covariante compatible con la métrica del espacio-tiempo de fondo.

Sin embargo, es posible considerar correcciones a la acción clásica, extendiendo la teoría electromagnética a regímenes no lineales. Para ello, se parte de una densidad lagrangiana genérica de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(F, G), \quad (2.4)$$

donde F y G son los invariantes electromagnéticos

$$F = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \quad (2.5)$$

$$G = \frac{1}{4}{}^*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.6)$$

donde $*F^{\mu\nu} = (1/2)\epsilon^{\mu\nu\sigma\delta}F_{\sigma\delta}$ es el dual de Hodge del tensor de Maxwell, mientras que \mathbf{E} y \mathbf{B} son los campos eléctrico e inducción magnética respectivamente. De esta manera, las ecuaciones dinámicas obtenidas al variar la acción resultan [1]

$$\nabla_{\mu}(\mathcal{L}_F F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_G *F^{\mu\nu}) = J^{\nu}, \quad (2.7)$$

$$\nabla_{[\mu}F_{\nu\sigma]} = 0, \quad (2.8)$$

donde \mathcal{L}_F y \mathcal{L}_G corresponden a las derivadas parciales de \mathcal{L} respecto a F y G .

La primera propuesta de teoría electromagnética no lineal fue desarrollada en 1934 por Born e Infeld con el fin de evitar la singularidad del campo eléctrico de una carga puntual. Esta teoría presenta una familia de densidades lagrangianas que, cuando la métrica de fondo es la de Minkowski, tienen la forma

$$\mathcal{L}_{\beta} = \beta \left(1 - \sqrt{1 - \frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2\beta^2}} \right), \quad (2.9)$$

donde β es un parámetro que caracteriza la teoría. Para Born-Infeld, si $\beta \rightarrow \infty$, se recupera la Electrodinámica de Maxwell. Su trabajo marcó el nacimiento de la Electrodinámica no lineal (ENL), la cual ha cobrado una gran relevancia desde entonces. En la actualidad, las teorías de ENL poseen aplicaciones muy importantes en diversas áreas de la física. Por ejemplo, en la descripción de interacciones en algunos cristales dieléctricos [11] y su utilización en electrodinámica cuántica, donde efectos no lineales en la polarización del vacío son descritos efectivamente por la teoría de Euler-Heisenberg [34]. También son relevantes en cosmología y astrofísica, tanto en la física de agujeros negros para evitar singularidades al ser acopladas como materia o energía en las ecuaciones de Einstein, así como en modelos de inflación y energía oscura [40, 12].

Además de sus ecuaciones dinámicas, resulta útil caracterizar a las teorías electromagnéticas por medio de cantidades físicas o geométricas derivadas a partir de la densidad lagrangiana. Ejemplos de éstas son la energía electromagnética y el momento angular.

Para una hipersuperficie espacial \mathcal{S} , la energía electromagnética contenida en una región $\Sigma \subset \mathcal{S}$ está definida como [50]

$$\mathcal{E}(\Sigma) = \int_{\Sigma} [-\mathcal{L}_F \mathbf{E}^2 + 2\mathcal{L}_G G - \mathcal{L}] \quad (2.10)$$

Asimismo, el momento angular con respecto al centro de la esfera más pequeña que contiene a Σ y proyectado en una dirección arbitraria \mathbf{k} en \mathcal{S}

viene dado por [50]

$$\mathcal{J}_{\mathbf{k}}(\Sigma) = - \int_{\Sigma} \mathcal{L}_F(\mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})) \cdot \mathbf{k} \quad (2.11)$$

Por último, definimos la carga Q contenida en Σ como

$$Q(\Sigma) = \int_{\Sigma} \rho, \quad (2.12)$$

donde ρ es la densidad de carga eléctrica.

En la Electrodinámica de Maxwell la densidad lagrangiana solo depende del invariante F y su dependencia es lineal (2.1). De esta manera, tenemos que la derivada parcial con respecto al invariante F es menos uno y la derivada parcial respecto al invariante G es cero. Habiendo notado esto, las cantidades anteriores se reducen a las conocidas para esta teoría

$$\mathcal{E}(\Sigma) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad (2.13)$$

$$\mathcal{J}_{\mathbf{k}}(\Sigma) = \int_{\Sigma} (\mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})) \cdot \mathbf{k}, \quad (2.14)$$

$$Q(\Sigma) = \int_{\Sigma} \rho \quad (2.15)$$

2.1.1. Estructura característica

Entender la estructura característica de una teoría es esencial para conocer cómo se propaga la información, y a qué velocidad. Una manera de hacerlo es estudiar soluciones de tipo ondas planas, y obtener las correspondientes relaciones de dispersión. En particular, para una teoría de electromagnetismo no lineal, podemos analizar las soluciones de (2.7)-(2.8) si se imponen como ansatz ondas planas con covector de onda k_{μ} . Fue probado en [1] que, para el caso general en el que la densidad lagrangiana depende de F y G , el conjunto de covectores k_{μ} para los cuales se satisfacen las ecuaciones (2.7)-(2.8) debe cumplir la siguiente relación de dispersión:

$$ak^4 + Ql^2k^2 + Rl^4 = 0, \quad (2.16)$$

donde $k^2 = g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu$, con $g_{\mu\nu}$ la métrica de fondo, $l^2 = F^\mu{}_\nu F^{\lambda\nu} k_\mu k_\lambda$ y

$$a = 1 + 16\xi_2 G - 16\xi_3 F - RG^2, \quad (2.17)$$

$$Q = 8(\xi_1 + \xi_3 - RF/4), \quad (2.18)$$

$$R = 4(\xi_1 \xi_3 - \xi_2^2), \quad (2.19)$$

$$\xi_1 = \frac{\mathcal{L}_{FF}}{2\mathcal{L}_F}, \quad (2.20)$$

$$\xi_2 = \frac{\mathcal{L}_{FG}}{2\mathcal{L}_F}, \quad (2.21)$$

$$\xi_3 = \frac{\mathcal{L}_{GG}}{2\mathcal{L}_F} \quad (2.22)$$

Más aún, puede verse que el polinomio de cuarto orden dado en (2.16) se puede factorizar en dos polinomios de segundo grado, quedando así las siguientes dos ecuaciones [1]:

$$g_1^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0, \quad g_2^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0. \quad (2.23)$$

Los tensores $g_1^{\mu\nu}$ y $g_2^{\mu\nu}$ son lorentzianos, y se los denomina *métricas efectivas*, ya que ambas condiciones coinciden con las relaciones de dispersión de la ecuación de onda en espacio-tiempos con métricas $g_{\mu\nu}^1$ y $g_{\mu\nu}^2$ respectivamente. Las mismas están dadas por

$$g_1^{\mu\nu} = ag^{\mu\nu} + b_1 F^\mu{}_\lambda F^{\nu\lambda}, \quad (2.24)$$

$$g_2^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{b_2}{a} F^\mu{}_\lambda F^{\nu\lambda}, \quad (2.25)$$

donde

$$b_1 = \frac{Q + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (2.26)$$

$$b_2 = \frac{Q - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (2.27)$$

$$\Delta = Q^2 - 4aR. \quad (2.28)$$

Ha sido demostrado en [10] que las raíces de (2.23) siempre existen, dado que el discriminante es una suma de cuadrados, es decir, $\Delta = 4(N_1^2 + N_2^2)$, con

$$N_1 = (\xi_1 - \xi_3) - RF, \quad N_2 = 2\xi_2 - RG. \quad (2.29)$$

El estudio de los conos de propagación asociados a la métrica de fondo y a ambas métricas efectivas es relevante en cuanto a la hiperbolicidad del sistema, como se verá más adelante al introducir un teorema que establece una relación entre estos conceptos.

2.2. Desigualdades geométricas

Las desigualdades geométricas poseen una larga historia en la matemática. En un sistema físico, estas desigualdades nos muestran como los parámetros que lo caracterizan se restringen entre ellos, permitiéndonos estudiar su relación y evolución dinámica. Algunos de estos parámetros, los cuales cobrarán particular importancia en este trabajo, son la energía, la carga eléctrica y el momento angular, definidos en la sección anterior.

Las desigualdades geométricas han sido extensamente estudiadas en el contexto de los agujeros negros [20, 16, 17, 21, 18, 25], donde juegan un rol importante en la caracterización de los colapsos gravitatorios y están relacionadas con la conjetura de la censura cósmica y, en menor medida, en Electromagnetismo [24, 50].

2.2.1. Desigualdades de Bekenstein

Se cuenta que, mientras tomaban el té, el profesor John A. Wheeler y su estudiante Jacob Bekenstein intentaban descifrar que ocurriría con la segunda ley de la termodinámica si la taza cayera a un agujero negro. En este experimento, la entropía del té desaparecería una vez atravesado el horizonte de eventos, por lo que parecería que la segunda ley, que establece que la entropía no puede decrecer, sería violada en dicho proceso. Intentando resolver esta paradoja, a Bekenstein se le ocurrió la idea de asociar los conceptos de entropía (como medida de información) y de agujero negro [8]. La analogía formal surgiría en 1975, cuando Stephen Hawking publicó un teorema que establecía que el área de la superficie de un agujero negro no puede decrecer [33]. Fue años más tarde, en 1981, y en el mismo contexto, que Bekenstein propuso una desigualdad de carácter universal para objetos macroscópicos [9]

$$\frac{\hbar c}{2\pi k_B} S \leq \mathcal{E} \mathcal{R}, \quad (2.30)$$

donde \mathcal{E} es la energía total, \mathcal{R} el radio de la menor esfera que contiene al sistema, \hbar la constante reducida de Plank, c la velocidad de la luz en el vacío, k_B la constante de Boltzmann y S la entropía. Sin embargo, a partir de argumentos heurísticos, una generalización de esta última desigualdad fue propuesta por Bekenstein y Mayo [9]

$$\frac{\hbar c}{2\pi k_B} S \leq \sqrt{(\mathcal{E} \mathcal{R})^2 - c^2 \mathcal{J}^2} - \frac{Q^2}{8\pi}, \quad (2.31)$$

donde se han introducido el momento angular \mathcal{J} y la carga eléctrica Q del objeto. Si bien los argumentos físicos utilizados para postular estas des-

igualdades involucran a los agujeros negros, se conjetura que poseen validez universal. En particular, la desigualdad (2.31) implica además una serie de desigualdades entre diferentes cantidades geométricas de interés. Asumiendo que la entropía del sistema es siempre no negativa (es decir $S \geq 0$), (2.31) implica

$$\frac{Q^4}{64\pi^2\mathcal{R}^2} + \frac{c^2\mathcal{J}^2}{\mathcal{R}^2} \leq \mathcal{E}^2 \quad (2.32)$$

Al ser la velocidad de la luz c la única constante universal que aparece en esta desigualdad, el electromagnetismo resulta ser la teoría más indicada para analizarla. La desigualdad (2.32) puede ser a su vez llevada a dos casos particulares más simples: el caso donde el momento angular es cero ($\mathcal{J} = 0$) y el caso donde la carga eléctrica es cero ($Q = 0$). Para el primero obtenemos la desigualdad

$$\frac{Q^2}{8\pi\mathcal{R}} \leq \mathcal{E}, \quad (2.33)$$

mientras que para el segundo se obtiene la desigualdad cuasilocal para el dominio Σ circunscrito por la esfera de radio \mathcal{R}

$$\frac{c|\mathcal{J}(\Sigma)|}{\mathcal{R}} \leq \mathcal{E}(\Sigma) \quad (2.34)$$

A partir de la conjetura sobre su validez, las desigualdades presentadas anteriormente resultan herramientas razonables para caracterizar teorías de electromagnetismo no lineal en forma complementaria a otros criterios teóricos y experimentales existentes.

Para estas desigualdades se ha utilizado una medida de tamaño en particular ya mencionada: el radio de la esfera más pequeña que contiene al sistema. Sin embargo, esta no es la única. Existen una gran cantidad de medidas de tamaño y de ellas dependen las desigualdades presentadas. Una discusión más profunda sobre esto se encuentra en [22], donde se analiza una desigualdad geométrica entre el tamaño y el momento angular para cuerpos rígidos utilizando varias de ellas.

2.3. Hiperbolicidad y sistemas bien puestos

La gran mayoría de teorías que describen fenómenos físicos están formuladas a partir de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs). En el tratamiento analítico de estos sistemas, resulta esencial estudiar si el problema de valores iniciales es bien puesto. Este último concepto, introducido por J. Hadamard a principios del siglo pasado [31], implica que dado un dato inicial suave para las ecuaciones dinámicas (el cual satisface las correspondientes ecuaciones de vínculo si las hubiese) existe localmente

en el tiempo una solución única a las ecuaciones de evolución, la cual depende continuamente del dato inicial elegido; es decir, al perturbar levemente el dato inicial, la evolución no debe “variar mucho” o su variación debe estar “controlada” por la diferencia entre los datos iniciales. Esta condición, la cual será formalizada más adelante, resulta de suma importancia para garantizar la predictibilidad de una teoría [60, 3, 14].

El estudio del problema de valores iniciales en EDPs requiere herramientas provenientes del Análisis Funcional para demostrar ciertas desigualdades sobre los espacios funcionales a los que pertenecen las soluciones. Si bien esto resulta en general inconveniente para avanzar en el estudio de la teoría de interés, existe una manera algebraica (y algunas veces hasta sencilla) de probar si esta condición se satisface o no, la cual se conoce como Hiperbolicidad [1, 38]. La Hiperbolicidad no solo garantiza la unicidad de soluciones para un cierto conjunto de datos iniciales, sino también la preservación del decaimiento asintótico de la solución con respecto a dichos datos y estimaciones sobre el tiempo de existencia de las soluciones, entre otras [56].

Para introducir las definiciones de los conceptos mencionados anteriormente, es necesario establecer nuestro sistema de ecuaciones. Para comenzar, consideraremos sistemas lineales de primer orden de la forma

$$\partial_t \varphi^A + (\mathbb{A}^A_B(\mathbf{x}, t))^i \partial_i \varphi^B = f^A(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (2.35)$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$\varphi^A(\mathbf{x}, 0) = \varphi_0^A(\mathbf{x}) \quad (2.36)$$

Estas ecuaciones describen la dinámica de un conjunto de campos $\varphi^A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, o sea $\varphi^A = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)^\top$, que depende de las coordenadas espaciales $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ y la coordenada temporal t . De estas variables también dependen las funciones $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y las matrices $\mathbb{A}^j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, las cuales son dadas.

Definición II. 1. El sistema (2.35)-(2.36) es bien puesto para $t \in [0, T]$ si existe una única solución la cual que depende continuamente de los datos iniciales. Esto es, si existe una norma $\|\cdot\|$ y dos constantes C, α tales que para todo $t \in [0, T]$

$$\|\varphi(\mathbf{x}, t)\| \leq C e^{\alpha t} \|\varphi_0(\mathbf{x})\| \quad (2.37)$$

Una condición algebraica, necesaria y suficiente para garantizar que el sistema sea bien puesto en el sentido de la definición anterior, lo proporciona la noción de hiperbolicidad fuerte.

Definición II. 2. El sistema (2.35) se dice fuertemente hiperbólico si, para cualquier covector k_i , la matriz $A = \mathbb{A}^j k_j$ (llamada comúnmente símbolo principal) es diagonalizable con todos sus autovalores reales.

Definición II. 3. El sistema (2.35) es llamado simétrico-hiperbólico si es posible encontrar un simetrizador común \mathbb{H} para todos los posibles covectores k_j .

Un simetrizador \mathbb{H} es una forma bilineal definida positiva tal que $\mathbb{H}\mathbb{A}$ es simétrico, es decir, es un mapa que asocia un escalar a cada par de vectores y es lineal en cada uno de sus argumentos. Es importante recalcar que la condición de simetría hiperbólica es más fuerte que la de hiperbolicidad fuerte; es decir, si un sistema es simétrico hiperbólico, entonces es fuertemente hiperbólico, y por lo tanto es bien puesto.

Las definiciones anteriores pueden generalizarse a sistemas cuasilineales; esto es, permitiendo que la parte principal también dependa de los campos φ^A :

$$\partial_t \varphi^A + (\mathbb{A}^A_B(\varphi, \mathbf{x}, t))^i \partial_i \varphi^B = f^A(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (2.38)$$

Definición II. 4. El sistema (2.38) es llamado fuertemente hiperbólico si existe un simetrizador $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbf{x}, t, \varphi, k)$ que dependa de forma suave de sus argumentos, tal que $\mathbb{K}_{ij} = \mathbb{H}_{ia} \mathbb{A}_{aj}^b k_b$ sea también simétrico para todas las uno-formas k_j .

Debido al requerimiento de la suavidad que se imponen al sistema y a los coeficientes \mathbb{H}_{ij} , el sistema es fuertemente hiperbólico si y solo si la parte principal, con coeficientes $\mathbb{A}_{ij} = \mathbb{A}_{ij}^b k_b$, posee un conjunto completo de autovectores con autovalores reales [56].

2.3.1. Hiperbolicidad en Electrodinámica no lineal

Trabajando en el formalismo geométrico de Geroch [28], se pueden encontrar condiciones necesarias y suficientes que teorías y campos deben cumplir para tener un problema de valores iniciales bien puesto. En el caso de teorías de ENL, como fue probado en [1], esta condición se traduce en términos geométricos de la siguiente manera: el sistema es simétrico hiperbólico si y solo si los conos que surgen de las relaciones de dispersión (2.23) asociadas a las métricas efectivas definidas en (2.24) y (2.25) tienen una intersección no vacía. Se puede entonces establecer el siguiente teorema [1]:

Teorema II.1. Un sistema (en ENL) es simétrico hiperbólico si y solo si los conos de las dos métricas efectivas tienen intersección no vacía. Esta condición se cumple si o solo si

$$1 + 2 \left((FN_1 + GN_2) - \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \sqrt{F^2 + G^2} \right) > 0, \quad (2.39)$$

N_1 y N_2 están definidas en (2.17)-(2.29).

Electrodinámica ModMax

En este capítulo se presentan los resultados analíticos del trabajo, referidos a la teoría electromagnética de ModMax. Luego de revisar en detalle algunos aspectos generales de la misma y su relación con la Electrodinámica de Maxwell, se analiza el correspondiente problema de valores iniciales, demostrando la validez de un resultado general sobre hiperbolicidad simétrica para teorías de ENL. Finalmente, se prueba una serie de desigualdades geométricas en ModMax, las cuales relacionan la energía electromagnética, carga, momento angular y tamaño, analizando sus implicancias físicas.

3.1. Aspectos generales

La densidad lagrangiana de la Electrodinámica de Maxwell posee dos interesantes simetrías que no todas las teorías comparten. Estas son:

- Invariancia conforme: la densidad lagrangiana es una función homogénea de grado uno; es decir,

$$\mathcal{L}_M(\varphi F) = \varphi \mathcal{L}_M(F), \quad (3.1)$$

donde φ es un campo escalar suave.

- Invariancia ante rotaciones duales: Si $(F^{\mu\nu}, *F^{\mu\nu})$ es solución de las ecuaciones de Maxwell (2.2), luego $(F'^{\mu\nu}, *F'^{\mu\nu})$ dado por la transformación

$$\begin{pmatrix} F'^{\mu\nu} \\ *F'^{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \\ *F^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

también es solución, con $\alpha \in \mathbb{R}$ un ángulo arbitrario.

La invariancia conforme fue estudiada por primera vez en el Electromagnetismo de Maxwell por Bateman [7] y Cunningham [19]. Esta simetría está asociada a transformaciones que preservan ángulos en geometría, y está presente en teorías de campos conformes (CFT, por sus siglas en inglés) [59], en física de altas energías [4] e incluso en fenómenos críticos, donde las fluctuaciones comparten dicha simetría en el punto crítico [35]. En la Electrodinámica de Maxwell esta propiedad se cumple trivialmente, ya que

su densidad lagrangiana es lineal en el invariante F . Asimismo, Larmor [53] y Rainich [54] fueron los primeros en observar la invariancia ante rotaciones duales en Maxwell. Un estudio acerca de la cantidad conservada asociada a dicha simetría fue publicado en 1993 por Przanowski [52], quien notó que la transformación

$$\mathbf{E}' = \cos(\alpha)\mathbf{E} + \sin(\alpha)\mathbf{H}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{H}' = -\sin(\alpha)\mathbf{E} + \cos(\alpha)\mathbf{H}, \quad (3.4)$$

dejaba invariante las ecuaciones. Claramente, esta última es equivalente a la anteriormente mencionada, dada por la fórmula (3.2).

En el contexto de teorías no lineales de electromagnetismo, resulta natural preguntarse si existen teorías más generales que preserven alguna o ambas de estas simetrías, y la respuesta es afirmativa. En efecto, para un lagrangiano arbitrario $\mathcal{L}(F, G)$, la invariancia conforme se escribe como

$$\mathcal{L}(\varphi F, \varphi G) = \varphi \mathcal{L}(F, G), \quad (3.5)$$

mientras que, si además \mathcal{L} es suave en sus argumentos, una rotación dual se obtiene mediante la transformación

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial F'} \\ *F'^{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} \\ *F^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

donde hemos definido $\mathcal{L}' := 4\mathcal{L}(F', G')$.

Recientemente, Bandos et. al. propusieron una novedosa familia de teorías no lineales de electromagnetismo, la cual llamaron ModMax [5]. Esta familia es de particular interés debido a que es la única de electromagnetismo no lineal que preserva las dos simetrías de Maxwell anteriormente mencionadas, es decir, las dadas por (3.5) y (3.6). Su densidad lagrangiana depende de un parámetro $\gamma \in \mathbb{R}$ y viene dada por

$$\mathcal{L}_\gamma(F, G) = -\cosh(\gamma)F + \sinh(\gamma)\sqrt{F^2 + G^2} \quad (3.7)$$

En términos del campo eléctrico \mathbf{E} y el campo inducción magnética \mathbf{B} , el lagrangiano resulta

$$\mathcal{L}_\gamma = \frac{\cosh(\gamma)}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{\sinh(\gamma)}{2}\sqrt{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2} \quad (3.8)$$

Puede probarse que, si $\gamma < 0$, la teoría no resulta causal [5]. Por esta razón restringiremos nuestro análisis al caso $\gamma \geq 0$.

La introducción de un parámetro en el Lagrangiano es una característica de las teorías de electromagnetismo no lineal. Otro rasgo que caracteriza

a estas teorías es que, para un cierto valor o límite del parámetro que las describe, se recupere la Electrodinámica de Maxwell. En el caso de ModMax se puede observar que para $\gamma = 0$ se obtiene el Lagrangiano de Maxwell, esto es

$$\mathcal{L}_0(F, G) = \mathcal{L}_M(F) \quad (3.9)$$

En particular, cualquier resultado obtenido para ModMax debería aproximarse a lo que se obtendría en la Electrodinámica de Maxwell al hacer tender $\gamma \rightarrow 0$.

Notemos que, la aparición de una raíz cuadrada en el Lagrangiano de la teoría, la hace no analítica cuando F y G se acercan a cero. Este aparente problema será tratado en la siguiente sección y es solucionado al trabajar con el formalismo Hamiltoniano. Como es usual en teoría clásica de campos, el Hamiltoniano de ModMax se obtiene a partir de su Lagrangiano mediante una transformada de Legendre. En términos de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , dicho Hamiltoniano tiene la forma

$$\mathcal{H}_\gamma(\mathbf{D}, \mathbf{B}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathcal{L}_\gamma(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \quad (3.10)$$

donde \mathbf{D} es el vector desplazamiento eléctrico, la variable conjugada a \mathbf{E} . Se obtiene entonces que

$$\mathcal{H}_\gamma = \frac{1}{2} \left(\cosh(\gamma) (\mathbf{D}^2 + \mathbf{B}^2) - \sinh(\gamma) \sqrt{(\mathbf{D}^2 + \mathbf{B}^2)^2 - 4(\mathbf{D} \times \mathbf{B})^2} \right) \quad (3.11)$$

Las variables conjugadas a \mathbf{E} y \mathbf{B} son el ya mencionado vector desplazamiento eléctrico y el campo magnético respectivamente, las cuales vienen definidas de la manera usual a partir de \mathcal{L} ; esto es

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}} \quad (3.13)$$

Las relaciones que definen a las variables conjugadas se corresponden además con las “relaciones constitutivas” de la teoría electromagnética [5]. De manera análoga, es posible recuperar las variables originales a partir de aquellas conjugadas, tomando derivadas con respecto a la densidad hamiltoniana; esto es

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{D}} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{B}} \quad (3.15)$$

3.2. Tensor energía-momento y condición de energía

En teorías electromagnéticas no lineales, se define el tensor de energía-momento como [29]

$$T^{\mu\nu} = -\mathcal{L}_F T_M^{\mu\nu} + \frac{1}{4} T g^{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

donde $T_M^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento de la teoría de Maxwell, dado por

$$T_M^{\mu\nu} = F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda}), \quad (3.17)$$

y $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo. La traza de (3.16) viene dada por

$$T = -4(\mathcal{L} - F\mathcal{L}_F - G\mathcal{L}_G) \quad (3.18)$$

En particular, para la teoría de ModMax se tiene que

$$T^{\mu\nu} = \left(\cosh \gamma - \sinh \gamma \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}} \right) T_M^{\mu\nu} + \frac{1}{4} T g^{\mu\nu} \quad (3.19)$$

De la fórmula para la traza, puede verse que el tensor energía-momento de ModMax satisface $T = 0$. Esto era de esperarse, dada la simetría conforme que posee la teoría por construcción.

El tensor energía-momento de ModMax satisface la condición de energía dominante (DEC, por sus siglas en inglés), es decir, se cumple que

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) X^\mu X^\nu \geq 0, \quad (3.20)$$

para cualquier vector X^μ que sea temporal ($g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \leq 0$) y futuro dirigido ($g_{\mu\nu} X^\mu t^\nu > 0$, para algún t^μ temporal).

Para probar que $T^{\mu\nu}$ satisface la DEC debemos notar previamente que tanto $T_M^{\mu\nu}$ como $g_{\mu\nu}$ la cumplen, y que el conjunto de tensores energía-momento es un cono convexo, por lo que es condición suficiente que $\mathcal{L}_F < 0$ y $T \geq 0$ [29].

Recordando el Lagrangeano de la teoría dado en (3.7), tenemos

$$\mathcal{L}_F = - \left(\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}} \right) \quad (3.21)$$

$$\mathcal{L}_G = \sinh(\gamma) \frac{G}{\sqrt{F^2 + G^2}} \quad (3.22)$$

Luego, usando las identidades $\cosh(\gamma) \geq 0$ y $\cosh(\gamma) \geq \sinh(\gamma)$, válidas para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}$, la única forma de que se cumpla $\mathcal{L}_F \geq 0$ es que el

coeficiente que acompaña a $\sinh(\gamma)$ sea positivo y mayor a uno. En efecto, dicha condición nunca se cumple, ya que $\sqrt{F^2 + G^2} \geq |F|$ y, por lo tanto, el término entre paréntesis en (3.21) es siempre no negativo, garantizando la desigualdad (3.20).

Por último, a partir de $T^{\mu\nu}$ es posible definir la densidad de energía de la teoría como $u = T^{00}$. Para Modmax, se tiene

$$u = \left(\cosh \gamma - \sinh \gamma \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}} \right) u_M, \quad (3.23)$$

donde u_M es la densidad de energía en la teoría de Maxwell, dada por

$$u_M = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} \quad (3.24)$$

Notemos que $u \geq 0$ para cualquier valor de \mathbf{E} y \mathbf{B} , lo que además es consecuencia de la validez de la condición de energía dominante probada anteriormente.

Un aparente problema surge en la definición dada en (3.23), ya que la densidad de energía es singular cuando F y G son ambos iguales a cero (si bien no diverge pues $\sqrt{F^2 + G^2} \geq |F|$). Esta configuración de los campos se da por ejemplo para las ondas planas, las cuales fueron estudiadas en el contexto de ModMax en [5]. Esta singularidad puede ser tratada al recurrir al formalismo Hamiltoniano. Para ModMax, cuando ambos invariantes son cero, tenemos que para $\gamma \geq 0$ [5]

$$\mathbf{D}^2 + \mathbf{B}^2 = 2 \cosh(\gamma) |\mathbf{D} \times \mathbf{B}|, \quad (3.25)$$

lo que implica que el Hamiltoniano de campo nulo es

$$\mathcal{H}|_{nulo} = |\mathbf{D} \times \mathbf{B}|, \quad (3.26)$$

y, como $T^{00}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = \mathcal{H}(\mathbf{D}, \mathbf{B})$, la singularidad queda resuelta.

3.3. Campo eléctrico de una carga puntual

En esta sección derivamos el campo eléctrico de una carga puntual en ModMax. Veremos que, a diferencia de lo obtenido para la teoría de Born-Infeld [11], el campo eléctrico resulta singular en la posición de la carga, obteniendo un comportamiento similar al presentado por la teoría de Maxwell.

El problema del campo eléctrico de una carga puntual fija es un problema de Electroestática, donde por definición se tiene $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Así como sucede en

Electrostática de Maxwell, las siguientes ecuaciones se satisfacen también para cualquier teoría de ENL:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}), \quad (3.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.28)$$

donde $\rho(\mathbf{r})$ es la distribución de carga libre, que para una partícula puntual de carga q ubicada en el origen de coordenadas esta dada por

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r}) \quad (3.29)$$

Combinando ambas ecuaciones, se debe resolver

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r}), \quad (3.30)$$

lo que es equivalente a

$$\nabla^2 \Phi = -q \delta(\mathbf{r}), \quad (3.31)$$

con $\mathbf{D} = -\nabla \Phi$. Recordando entonces que

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.32)$$

donde $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la función de Green dada por

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.33)$$

se obtiene

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (3.34)$$

Aquí, $r = |\mathbf{r}|$ es la coordenada radial medida desde la posición de la carga. A su vez,

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}} = -\mathcal{L}_F \mathbf{E} + \mathcal{L}_G \mathbf{B} \quad (3.35)$$

Recordando las expresiones para \mathcal{L}_F y \mathcal{L}_G dadas en (3.21), se tiene

$$\mathbf{D} = \left(\cosh(\gamma) - \frac{F \sinh(\gamma)}{\sqrt{F^2 + G^2}} \right) \mathbf{E} + \frac{G \sinh(\gamma)}{\sqrt{F^2 + G^2}} \mathbf{B} \quad (3.36)$$

Dado que $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, se obtiene que

$$\mathbf{D} = \left(\cosh(\gamma) - \frac{F}{|F|} \sinh(\gamma) \right) \mathbf{E}, \quad (3.37)$$

$$= (\cosh(\gamma) + \sinh(\gamma)) \mathbf{E}, \quad (3.38)$$

$$= e^\gamma \mathbf{E}, \quad (3.39)$$

donde la segunda igualdad vale ya que en este caso $F = \frac{-\mathbf{E}^2}{2}$, y por lo tanto $|F| = -F$. Así, finalmente tenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi e^\gamma r^3} \quad (3.40)$$

Como podemos ver, esta solución difiere de la de Maxwell en un factor $e^{-\gamma}$. Como γ es mayor o igual a cero, el campo eléctrico en ModMax diverge más lento hacia infinito cuando $r \rightarrow 0$ que aquel obtenido en Maxwell. Por último, se nota que si $\gamma = 0$, el resultado se reduce al de Maxwell, que es lo esperado en esta teoría.

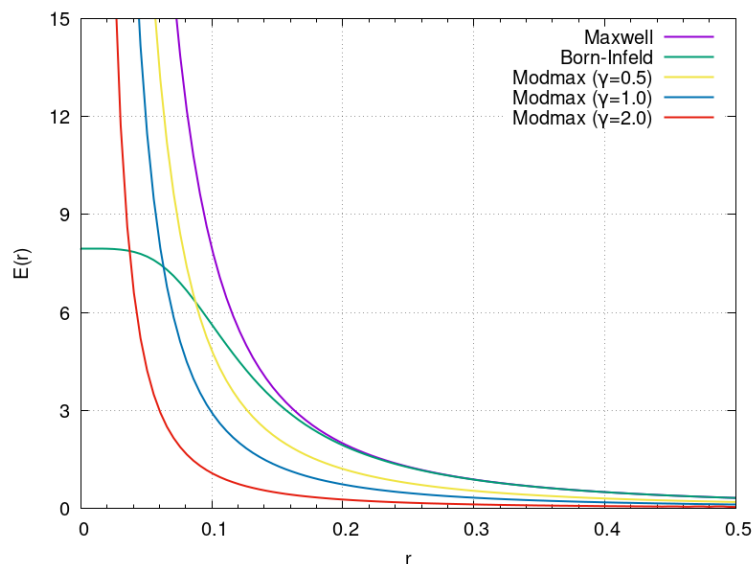


Figura 3.1: Campo eléctrico de una carga puntual de magnitud $q = 1$ en función de la distancia a la misma, para las teorías de Maxwell (curva morada, $\gamma = 0$), ModMax (curvas amarilla, azul y roja) y Born-Infeld (curva verde). Se tomó como parámetro de Born-Infeld $\beta = 10$.

3.4. Hiperbolicidad simétrica

A partir de los criterios y definiciones introducidos en el capítulo anterior, en esta sección demostraremos de manera directa el siguiente teorema:

Teorema III. 1. ModMax es una teoría simétrico-hiperbólica y, por lo tanto, su problema de valores iniciales es bien puesto.

Demostración. Esta propiedad es consecuencia directa del resultado general obtenido en [1] que establece que una teoría de ENL es simétrico-hiperbólica si y solo si existe intersección no vacía entre los conos de propagación correspondientes a sus dos métricas efectivas. Más aún, dicha condición

se garantiza si y solo si se cumple la desigualdad

$$1 + 2 \left((FN_1 + GN_2) - \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \sqrt{F^2 + G^2} \right) > 0, \quad (3.41)$$

donde

$$N_1 = (\xi_1 - \xi_3) - RF, \quad (3.42)$$

$$N_2 = 2\xi_2 - RG, \quad (3.43)$$

$$\xi_1 = \mathcal{L}_{FF}/2\mathcal{L}_F, \quad (3.44)$$

$$\xi_2 = \mathcal{L}_{FG}/2\mathcal{L}_F, \quad (3.45)$$

$$\xi_3 = \mathcal{L}_{GG}/2\mathcal{L}_F, \quad (3.46)$$

$$R = 4(\xi_1\xi_2 - \xi_2^2) \quad (3.47)$$

Recordando el Lagrangiano de ModMax, dado en (3.7), se tiene que las derivadas parciales involucradas en las cantidades anteriormente definidas son

$$\mathcal{L}_F = -\cosh(\gamma) + \sinh(\gamma) \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}}, \quad (3.48)$$

$$\mathcal{L}_G = \sinh(\gamma) \frac{G}{\sqrt{F^2 + G^2}}, \quad (3.49)$$

$$\mathcal{L}_{FG} = \mathcal{L}_{GF} = -\sinh(\gamma) \frac{FG}{(F^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.50)$$

$$\mathcal{L}_{FF} = \sinh(\gamma) \left(\frac{1}{\sqrt{F^2 + G^2}} - \frac{F^2}{(F^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (3.51)$$

$$\mathcal{L}_{GG} = \sinh(\gamma) \left(\frac{1}{\sqrt{F^2 + G^2}} - \frac{G^2}{(F^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (3.52)$$

Luego, las funciones ξ_1, ξ_2 y ξ_3 vienen dadas por

$$\xi_1 = \frac{\sinh(\gamma) \left(\frac{1}{\sqrt{F^2 + G^2}} - \frac{F^2}{(F^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{2 \left(-\cosh(\gamma) + \sinh(\gamma) \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}} \right)}, \quad (3.53)$$

$$\xi_2 = \frac{-\sinh(\gamma) \frac{FG}{(F^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}}}{2 \left(-\cosh(\gamma) + \sinh(\gamma) \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}} \right)}, \quad (3.54)$$

$$\xi_3 = \frac{\sinh(\gamma) \left(\frac{1}{\sqrt{F^2 + G^2}} - \frac{G^2}{(F^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{2 \left(-\cosh(\gamma) + \sinh(\gamma) \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}} \right)}, \quad (3.55)$$

y además se tiene que $R = 0$. A partir de los cálculos anteriores, obtenemos para N_1 y N_2

$$N_1 = \frac{\sinh(\gamma) \left(\frac{G^2 - F^2}{(F^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{2 \left(-\cosh(\gamma) + \sinh(\gamma) \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}} \right)} = \frac{\alpha_1}{\mathcal{L}_F}, \quad (3.56)$$

$$N_2 = \frac{-\sinh(\gamma) \left(\frac{FG}{(F^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\left(-\cosh(\gamma) + \sinh(\gamma) \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}} \right)} = \frac{\alpha_2}{\mathcal{L}_F}, \quad (3.57)$$

donde hemos introducido las funciones α_1 y α_2 dadas por

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \sinh(\gamma) \left(\frac{G^2 - F^2}{(F^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (3.58)$$

$$\alpha_2 = -\sinh(\gamma) \left(\frac{FG}{(F^2 + G^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (3.59)$$

con el fin de simplificar la notación.

Notemos además que $\mathcal{L}_F < 0$, ya que $\cosh(\gamma) > \sinh(\gamma)$ para $\gamma \in \mathbb{R}$ y que $\left| F/\sqrt{F^2 + G^2} \right| \leq 1$. Con estos resultados, la desigualdad original dada en (3.41) queda

$$1 + 2 \left(\frac{F\alpha_1 + G\alpha_2}{\mathcal{L}_F} + \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}{\mathcal{L}_F} \sqrt{F^2 + G^2} \right) > 0 \quad (3.60)$$

Haciendo los cálculos explícitos, se puede ver que

$$F\alpha_1 + G\alpha_2 = -\frac{\sinh(\gamma)F}{2\sqrt{F^2 + G^2}}, \quad (3.61)$$

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = \frac{\sinh(\gamma)}{2\sqrt{F^2 + G^2}} \quad (3.62)$$

Reemplazando en (3.60), basta entonces con probar que

$$1 + \frac{\sinh(\gamma)}{\mathcal{L}_F} \left(1 - \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}} \right) > 0, \quad (3.63)$$

o, lo que es equivalente escribiendo explícitamente \mathcal{L}_F

$$1 - \left(\frac{\sinh(\gamma) - \sinh(\gamma) \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}}}{\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}}} \right) > 0 \quad (3.64)$$

Esta última desigualdad es cierta si el factor entre paréntesis es menor a uno, lo cual se cumple como consecuencia de las identidades

$$\sinh(\gamma) < \cosh(\gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad (3.65)$$

$$F < \sqrt{F^2 + G^2} \quad (3.66)$$

Por lo tanto, al valer la desigualdad dada en (3.41), el sistema es simétrico-hiperbólico, lo cual prueba el teorema.

Pese a la simpleza de su derivación, este es quizás el resultado más importante del trabajo, e incentiva el estudio de las propiedades de esta teoría más a fondo, debido a la gran relevancia que tiene que una teoría física sea bien puesta, relacionándose con su poder de predictibilidad. Este resultado nos asegura entonces la existencia local y la unicidad de soluciones dado un dato inicial suficientemente suave. A su vez, lo obtenido motiva el estudio de soluciones numéricas de ModMax.

3.5. Desigualdades de Bekenstein en Electrodinámica ModMax

Una vez estudiado el problema de valores iniciales, nos preocupamos por explorar otras propiedades de la teoría de ModMax. Tal como se mencionó en la introducción, en esta sección analizamos las desigualdades geométricas anteriormente presentadas en ModMax. La primera de las desigualdades estudiadas relaciona la carga eléctrica y la energía electromagnética contenida en una región del espacio, dada por la fórmula (2.33). Veremos que en particular dicha versión de la desigualdad resulta en general incorrecta en ENL, lo que motiva a reformularla de manera consistente, y luego a probar su validez. En segundo lugar, estudiamos la desigualdad entre momento angular, energía y tamaño (2.34), y finalmente se prueba la desigualdad general (2.32), como consecuencia directa de los resultados anteriormente mencionados.

3.5.1. Desigualdad entre carga, energía y tamaño

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región con carga Q . Se conjetura la validez de la desigualdad

$$\frac{Q^2}{8\pi\mathcal{R}} \leq \mathcal{E}, \quad (3.67)$$

siendo \mathcal{E} la energía electromagnética contenida en Ω y \mathcal{R} el radio de la esfera más pequeña que contiene a Ω . El significado físico de esta desigualdad es

el siguiente: si un sistema tiene carga eléctrica, entonces posee una energía mínima dada por su carga. Esta desigualdad ha sido probada por Dain para la teoría de Maxwell [24]. Posteriormente, en [50] se estudió para la teoría de Born-Infeld, reportando su validez de manera errónea. Sin embargo, en un trabajo posterior escrito por los mismos autores, dicho error fue corregido rápidamente (ver Erratum [51]), donde se propuso una versión consistente de la desigualdad para teorías de ENL, probando su validez para esta última teoría y en simetría esférica.

Similar al caso de Born-Infeld, y antes de introducirnos en la versión corregida de la desigualdad, veremos que (3.67) tampoco es cierta en ModMax. Para ello, hay que notar que, junto con la demostración de la desigualdad en Maxwell, fue probada por Dain [24] una condición de rigidez: la igualdad en (3.67) es únicamente válida en la configuración electrostática dada por una cáscara esférica delgada con densidad de carga superficial constante y radio \mathcal{R} . Luego, para hallar el contraejemplo, basta probar que la densidad de energía u de ModMax puede ser menor que la densidad de energía u_M de la teoría de Maxwell en el caso donde se cumple la condición de rigidez, es decir, se debe probar que existe alguna configuración de los campos tal que $u < u_M^e$, donde el superíndice e refiere a la configuración electrostática (para la cual se cumple la igualdad).

Recordando las expresiones para las densidades de energía de (3.23) y (3.24), la diferencia $\Delta u := u - u_M^e$ resulta

$$\Delta u = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}^2 (\cosh(\gamma) - 1) + \mathbf{B}^2 \left(\cosh(\gamma) - \frac{\mathbf{B}^2}{\sqrt{\eta}} \sinh(\gamma) \right) \right), \quad (3.68)$$

donde

$$\eta = (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4\mathbf{E}^2\mathbf{B}^2 \cos^2(\alpha), \quad (3.69)$$

siendo α el ángulo comprendido entre los campos. Si tomamos ahora el caso particular $\alpha = \pi/2$, tenemos

$$\Delta u = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E}^2 (\cosh(\gamma) - 1) + \mathbf{B}^2 \left(\cosh(\gamma) - \frac{\mathbf{B}^2}{|\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2|} \sinh(\gamma) \right) \right) \quad (3.70)$$

Tomando además $\mathbf{B}^2 > \mathbf{E}^2$ y multiplicando por $\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$ obtenemos

$$(\Delta u)(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^4 e^{-\gamma} - \mathbf{E}^4 \cosh(\gamma) - \mathbf{E}^2 \mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^4) \quad (3.71)$$

A su vez, podemos pensar en \mathbf{B}^2 como $\mathbf{B}^2 = z\mathbf{E}^2$, siendo z cualquier número real mayor a uno (de tal forma que $\mathbf{B}^2 > \mathbf{E}^2$). Si reemplazamos y analizamos el signo

$$\text{sign}(\Delta u) = \text{sign}(z^2 e^{-\gamma} - z + (1 - \cosh(\gamma))), \quad (3.72)$$

querremos entonces ver que, para un dado γ , existe $z = \mathbf{B}^2/\mathbf{E}^2$ tal que la función $f(z) = z^2 e^{-\gamma} - z + (1 - \cosh(\gamma))$ es negativa. Esto es equivalente a que las raíces de $f(z)$ sean reales y distintas (recordando además que $z > 1$). Las raíces z_+ y z_- de $f(z)$ son

$$z_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4e^{-\gamma}(1 - \cosh(\gamma))}}{2e^{-\gamma}}, \quad (3.73)$$

$$z_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4e^{-\gamma}(1 - \cosh(\gamma))}}{2e^{-\gamma}} \quad (3.74)$$

En particular, notamos que

$$z_+ \geq e^\gamma \geq 1 \quad (3.75)$$

Como en la función cuadrática $f(z)$ el coeficiente que acompaña a z^2 es positivo, sus ramas apuntan hacia arriba. Teniendo esto en cuenta y el valor de z_+ podemos concluir que el signo de Δu será negativo en el intervalo $1 < z < z_+$ para todo γ , lo cual contradice el resultado de rigidez.

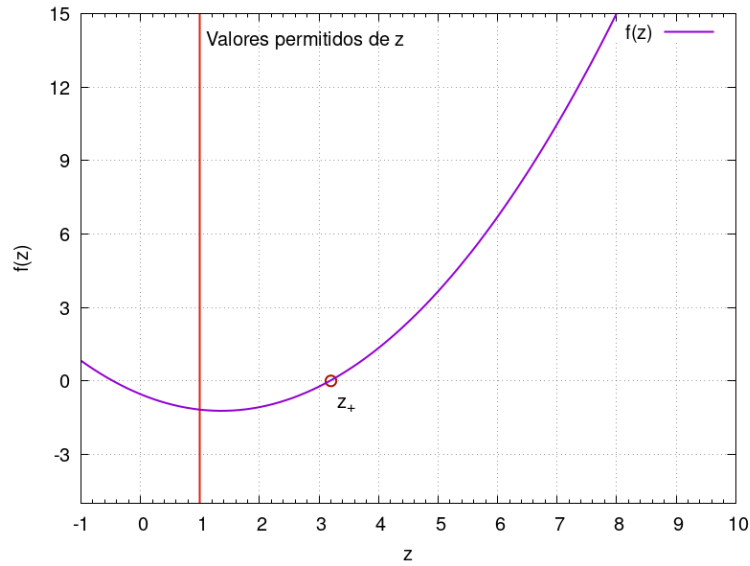


Figura 3.2: Gráfico de $f(z)$ para el caso $\gamma = 1$. Se logra ver una región donde la función es negativa, entre $z = 1$ y $z = z_+$, lo que muestra que la desigualdad (3.67) no es cierta en ModMax.

Sin embargo, como fue mencionado anteriormente, la última desigualdad analizada puede ser generalizada a electromagnetismo no lineal. La generalización es la siguiente [51]: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región con carga Q , entonces se cumple que

$$\mathcal{E} \geq \frac{Q}{2} \phi(\mathcal{R}), \quad (3.76)$$

donde $\phi(\mathcal{R})$ es el potencial eléctrico de dicha región, que representa el trabajo necesario para traer a Ω una carga unidad desde infinito.

Estudiaremos la desigualdad en Electrostática, donde $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. Comenzamos recordando que

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}^3} u, \quad (3.77)$$

donde u es la densidad de energía electrostática de ModMax, dada por

$$u = \frac{\mathbf{E}^2}{2}(\cosh(\gamma) + \sinh(\gamma)) = \frac{\mathbf{E}^2}{2}e^\gamma \quad (3.78)$$

Ahora, expresamos la energía total como suma de dos contribuciones: la energía dentro de la esfera de radio \mathcal{R} que contiene al sistema; es decir $\mathcal{E}(r < \mathcal{R})$, y la energía fuera, $\mathcal{E}(r > \mathcal{R})$. Tenemos entonces que

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(r < \mathcal{R}) + \mathcal{E}(r > \mathcal{R}), \quad (3.79)$$

$$= \int_{\mathcal{B}(\mathcal{R})} u + \int_{\mathbb{R}^3/\mathcal{B}(\mathcal{R})} u, \quad (3.80)$$

donde $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ es la bola de radio \mathcal{R} centrada en el origen. Notemos que, al ser u una cantidad positiva, resulta $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}(r > \mathcal{R})$.

En el lado derecho de (3.76) tenemos el potencial $\phi(\mathcal{R})$, que como representa el trabajo realizado para traer una carga puntual desde el infinito hasta el sistema, se tiene

$$\phi(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.81)$$

donde \mathcal{C} es el camino recorrido. En simetría esférica,

$$\phi(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}}^{\infty} E(r) dr \quad (3.82)$$

Para obtener explícitamente las cantidades definidas anteriormente, necesitamos la expresión para \mathbf{E} fuera de la esfera $\mathcal{B}(\mathcal{R})$. Para esto recordemos la ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.83)$$

Si integramos sobre el volumen Ω obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{D} = \int_{\Omega} \rho \quad (3.84)$$

Usando el teorema de Gauss, se tiene que

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{\Omega} \rho, \quad (3.85)$$

donde ahora la primera integral es sobre el borde del volumen Ω con normal $\hat{\mathbf{n}}$. En simetría esférica $\mathbf{D} = D(r)\hat{\mathbf{r}}$ y, como $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, habíamos visto en (3.37) que $\mathbf{D} = e^\gamma \mathbf{E}$. Si tomamos Ω como una bola de radio $r > \mathcal{R}$ centrada en el origen, entonces $\partial\Omega$ es la esfera de radio \mathcal{R} centrada en el mismo punto ($\mathcal{S}(\mathcal{R})$). El lado izquierdo de la última igualdad queda

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{\mathcal{S}(r)} D(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS, \quad (3.86)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D(r) r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (3.87)$$

Mientras que para el lado derecho tenemos

$$\int_{\Omega} \rho = \int_{\mathcal{B}(\mathcal{R})} \rho + \int_{\mathcal{B}(r)/\mathcal{B}(\mathcal{R})} \rho, \quad (3.88)$$

$$= Q + 0, \quad (3.89)$$

$$= Q \quad (3.90)$$

Recordando ahora que

$$\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}} = \frac{e^{-\gamma}Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.91)$$

podemos calcular $\mathcal{E}(r > \mathcal{R})$ y $\phi(\mathcal{R})$. En efecto,

$$\mathcal{E}(r > \mathcal{R}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{\mathcal{R}}^\infty \frac{e^\gamma}{2} \left(\frac{e^{-\gamma}Q}{4\pi r^2} \right)^2 r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi, \quad (3.92)$$

$$= \frac{e^{-\gamma}Q^2}{8\pi\mathcal{R}} \quad (3.93)$$

$$\phi(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}}^\infty \frac{e^{-\gamma}Q}{4\pi r^2} dr, \quad (3.94)$$

$$= \frac{e^{-\gamma}Q}{4\pi\mathcal{R}} \quad (3.95)$$

De esta forma vemos que $\mathcal{E}(r > \mathcal{R}) = (Q/2)\phi(\mathcal{R})$, y como $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}(r > \mathcal{R})$, se cumple (3.76).

3.5.2. Desigualdad entre momento angular, energía y tamaño

En esta sección probaremos la desigualdad (2.34) para ModMax; que relaciona el momento angular, la energía y el tamaño del sistema. Dain probó en [24] que, para la teoría de Maxwell, la DEC es una condición suficiente para su validez. Al ser la DEC una condición sobre el tensor energía-momento que prohíbe propagación superluminal, sería razonable relacionar

la desigualdad (2.34) con la causalidad de la teoría. La desigualdad nos dice básicamente que la energía total del sistema debe ser mayor a la energía cinética angular del mismo. Más aún, al ser su cociente proporcional a la velocidad angular media del sistema, (2.34) nos dice que esta cantidad debe ser menor a uno (es decir, que la velocidad de la luz c). Sin embargo, en [50] fue estudiada la relación entre el cumplimiento de la desigualdad aquí tratada y la causalidad de las teorías de ENL, habiéndose encontrado que existe al menos una de estas teorías que no es causal pero satisface (2.34).

Se demostrará entonces el siguiente teorema:

Teorema III. 2. Consideremos una distribución de partículas cargadas en la región Σ sin carga neta ($Q = 0$). Sea el radio \mathcal{R} definido como aquel de la esfera mas chica, centrada en x_0 , y que contiene a Σ . Si vale la Electrodinámica de ModMax, entonces

$$\mathcal{E}(\Sigma)\mathcal{R} \geq |\mathcal{J}(\Sigma)|, \quad (3.96)$$

donde $\mathcal{J}(\Sigma)$ es el momento angular de la región Σ con respecto a x_0 definido anteriormente.

Demostración. Para el caso de ModMax tenemos, utilizando (2.11) y (3.21), tenemos

$$\mathcal{J}_\Sigma = \mathcal{J}(\Sigma) = \int_\Sigma \left(\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) \frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}} \right) (\mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})) \cdot \hat{k} \quad (3.97)$$

Recordando que $|\int f(x)| \leq \int |f(x)|$ y usando que $|(\mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})) \cdot \hat{k}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{E}||\mathbf{B}||\hat{k}| = |\mathbf{x}||\mathbf{E}||\mathbf{B}|$ se puede escribir

$$|\mathcal{J}_\Sigma| \leq \int_\Sigma \left| \cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{\sqrt{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}} \right| |\mathbf{x}||\mathbf{E}||\mathbf{B}| \quad (3.98)$$

Notemos además que

$$-1 \leq \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{\sqrt{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}} = \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{\sqrt{\eta}} \leq 1 \quad (3.99)$$

Luego, el término dentro del valor absoluto en (3.98) es mayor a cero, ya que $\gamma \geq 0$. Para demostrar el teorema podemos calcular la diferencia entre el lado izquierdo y el derecho de la desigualdad (3.96) y ver que siempre es mayor a cero. Recordemos que

$$\mathcal{E}_\Sigma = \mathcal{E}(\Sigma) = \int_\Sigma u, \quad (3.100)$$

donde u en ModMax, a partir de (3.23), esta dada en función de los campos por

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \left(\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{\sqrt{(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}} \right) \quad (3.101)$$

Luego, teniendo en cuenta las desigualdades anteriores, obtenemos la siguiente para la diferencia entre ambos lados (dividida por \mathcal{R})

$$\mathcal{E}_\Sigma - \frac{|\mathcal{J}_\Sigma|}{\mathcal{R}} \geq \int_\Sigma \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2} \left(\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{\sqrt{\eta}} \right) \quad (3.102)$$

$$- \int_\Sigma \frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}} |\mathbf{E}||\mathbf{B}| \left(\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{\sqrt{\eta}} \right) \quad (3.103)$$

$$\geq \int_\Sigma \frac{1}{2} \left(\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{\sqrt{\eta}} \right) \quad (3.104)$$

$$\times \left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 - 2 \frac{|\mathbf{x}|}{\mathcal{R}} |\mathbf{E}||\mathbf{B}| \right) \quad (3.105)$$

Pero además $|\mathbf{x}|/\mathcal{R} \leq 1$, entonces tenemos

$$\mathcal{E}_\Sigma - \frac{|\mathcal{J}_\Sigma|}{\mathcal{R}} \geq \int_\Sigma \frac{1}{2} \left(\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{\sqrt{\eta}} \right) (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 \quad (3.106)$$

Ya habíamos determinado que el primer factor era positivo, por lo tanto el integrando y la integral también lo son. Como la diferencia de ambos es entonces mayor a cero, tenemos que se cumple (3.96).

3.5.3. Desigualdad entre carga, energía y momento angular

Asumamos que la densidad de carga ρ para un tiempo t_0 tiene soporte compacto en la región Σ y vale la electrodinámica de ModMax. Entonces queremos ver ahora si, en t_0 , la carga total Q contenida en Σ , la energía electromagnética total \mathcal{E} y el momento angular $\mathcal{J}(\Sigma)$ con respecto a x_0 cumplen la siguiente desigualdad en simetría esférica

$$\mathcal{E} \geq \frac{Q}{2} \phi(\mathcal{R}) + \frac{|\mathcal{J}(\Sigma)|}{\mathcal{R}} \quad (3.107)$$

Esta última desigualdad es la general de Bekenstein en el caso de teorías de ENL. Para probarla se hará uso de los casos particulares antes probados.

La energía total del sistema \mathcal{E} puede ser separada en dos partes

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}^3/\Sigma} u + \int_{\Sigma} u, \quad (3.108)$$

El segundo término es $\mathcal{E}(\Sigma)$, por lo que puede ser reemplazado por $|\mathcal{J}(\Sigma)|/\mathcal{R}$ para, teniendo en cuenta (3.96), llegar a la desigualdad

$$\mathcal{E} \geq \int_{\mathbb{R}^3/\Sigma} u + \frac{|\mathcal{J}(\Sigma)|}{\mathcal{R}} \quad (3.109)$$

En el caso de simetría esférica, el primer término es $\mathcal{E}(r > \mathcal{R})$. Fue probado anteriormente en (3.92) que, para esta simetría, $\mathcal{E}(r > \mathcal{R}) = (Q/2)\phi(\mathcal{R})$, con lo que tenemos

$$\mathcal{E} \geq \frac{Q}{2}\phi(\mathcal{R}) + \frac{|\mathcal{J}(\Sigma)|}{\mathcal{R}}, \quad (3.110)$$

que es exactamente lo que se quería demostrar. Notemos además que, si elevamos al cuadrado se obtiene

$$\mathcal{E}^2 \geq \left(\frac{Q}{2}\phi(\mathcal{R})\right)^2 + \left(\frac{|\mathcal{J}(\Sigma)|}{\mathcal{R}}\right)^2 + \frac{Q}{\mathcal{R}}\phi(\mathcal{R})|\mathcal{J}(\Sigma)| \quad (3.111)$$

Como el último término en el lado derecho es no negativo, entonces la desigualdad probada implica la siguiente

$$\mathcal{E}^2 \geq \left(\frac{Q}{2}\phi(\mathcal{R})\right)^2 + \left(\frac{|\mathcal{J}(\Sigma)|}{\mathcal{R}}\right)^2 \quad (3.112)$$

Simulaciones en ModMax I: Diferencias Finitas

En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos al simular las ecuaciones de la Electrodinámica ModMax mediante el método de Diferencias Finitas. Para ello se evolucionaron numéricamente las ecuaciones dinámicas en una dimensión espacial. Luego de presentar explícitamente las ecuaciones que se evolucionaron, sus simetrías y propiedades, se muestran soluciones obtenidas y se analiza la convergencia del método. Además, se obtienen numéricamente cantidades de monitoreo como la energía, carga y momento angular, para luego poder verificar una de las desigualdades geométricas discutidas en el capítulo 3.

4.1. Ecuaciones de evolución y de vínculo

El sistema de ecuaciones dinámicas de cualquier teoría no lineal de electromagnetismo puede escribirse de manera muy similar a las ecuaciones de Maxwell en medios continuos. En efecto, la evolución de los campos \mathbf{D} y \mathbf{B} viene dada por las ecuaciones

$$\partial_t \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}, \quad (4.1)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (4.2)$$

donde \mathbf{J} es la densidad de corriente eléctrica. A su vez, estos campos están sujetos a las ecuaciones de vínculo

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.4)$$

donde ρ es la densidad de carga libre. De manera análoga al electromagnetismo de Maxwell, las fuentes (ρ, \mathbf{J}) no pueden darse arbitrariamente: es fácil ver que, como consecuencia de las ecuaciones (4.1) y (4.3), éstas deben cumplir la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4.5)$$

Todo el contenido “no lineal” en las ecuaciones anteriores se encuentra en la relación entre (\mathbf{D}, \mathbf{B}) y (\mathbf{E}, \mathbf{H}) .

Para las simulaciones numéricas realizadas en este trabajo, se evolucionaron en el tiempo los campos desplazamiento eléctrico \mathbf{D} e inducción magnética \mathbf{B} a partir de (4.1)-(4.2). Como se mostró en el capítulo 2 (y posteriormente se especificó al caso de la Electrodinámica de ModMax en el capítulo 3), los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{H} pueden expresarse en términos de \mathbf{D} y \mathbf{B} por medio de relaciones constitutivas *no lineales*, las cuales se derivan directamente de la acción de la teoría. Una vez escritas dichas relaciones de manera explícita en las ecuaciones, el Problema de Cauchy resulta entonces bien formulado si se dan los campos vectoriales \mathbf{D} y \mathbf{B} a $t = 0$, eligiéndolos de manera de garantizar que los vínculos (4.3)-(4.4) se satisfagan¹.

En la próxima sección presentamos el sistema explícito de ecuaciones que evolucionaremos numéricamente para la Electrodinámica ModMax (3.7). En particular, en este trabajo nos restringimos al caso no trivial más simple posible, en el que solo tenemos dependencia de los campos en una coordenada espacial y el tiempo. Además, utilizamos los vínculos para reducir el número de variables dinámicas no triviales, como veremos a continuación.

4.2. Evolución en simetría planar

Presentamos ahora el problema específico que implementaremos numéricamente para la teoría de ModMax, tanto en este capítulo como en el próximo. Se considera un Ansatz para los campos con dependencia únicamente en la coordenada espacial z y el tiempo t ; esto es

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(t, z), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(t, z) \quad (4.6)$$

Una consecuencia directa del Ansatz (4.6) es que al imponer el vínculo (4.4), necesariamente debe ser $B_z = B_z(t)$, es decir que B_z no depende de z . A su vez, de la ecuación de vínculo (4.3) para \mathbf{D} se tiene que D_z debe ser tal que

$$\partial_z D_z = \rho, \quad (4.7)$$

siendo ρ la densidad de carga libre.

En este trabajo exploramos soluciones para el caso en el que $\mathbf{J} = 0$ y ρ es constante en todo el dominio numérico (notar que esta elección de las fuentes satisface trivialmente la ecuación de continuidad (4.5)). Es fácil ver a partir de las ecuaciones de evolución (4.1)-(4.2) que, para este Ansatz

¹De manera análoga a lo que sucede en Maxwell, es fácil ver del sistema (4.1)-(4.4) que ambos vínculos propagan correctamente, de modo que basta con dar un dato inicial que los satisfaga para garantizar su validez en todo tiempo posterior

y esta elección de las fuentes, necesariamente debe ser B_z una constante y D_z independiente del tiempo. Luego, para cada elección de ρ , el campo estacionario D_z queda fijado a $t = 0$, y podemos tomar $B_z = 0$.

Con todo esto, las variables dinámicas resultan $D_x(t, z)$, $D_y(t, z)$, $B_x(t, z)$ y $B_y(t, z)$, siendo posible escribir el sistema de ecuaciones de evolución como

$$\partial_t \varphi + \mathbb{A}(\varphi) \partial_z \varphi = 0, \quad (4.8)$$

donde

$$\varphi = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

colecta las variables dinámicas, y $\mathbb{A}(\varphi)$ es una matriz cuyas entradas son funciones no lineales dadas. Referiremos a dicha matriz como la “parte principal” del sistema (4.8).

Para obtener \mathbb{A} , hacemos uso de las ecuaciones (4.1). Al escribirlas en componentes, resulta

$$\partial_t D_x = -\partial_z H_y + F_1, \quad (4.10)$$

$$\partial_t D_y = \partial_z H_x + F_2, \quad (4.11)$$

$$\partial_t B_x = \partial_z E_y + F_3, \quad (4.12)$$

$$\partial_t B_y = -\partial_z E_x + F_4, \quad (4.13)$$

donde E_x , E_y , H_x y H_y son funciones de D_x , D_y , B_x y B_y (las cuales conocemos, pero debemos calcular), y $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)^\top$ son términos de fuente (es decir que no contienen derivadas de los campos dinámicos). Para hallar todas estas funciones, haremos uso de la formulación Hamiltoniana introducida en el capítulo anterior. En particular, tomando las derivadas indicadas en las ecuaciones (3.14) y (3.15), se obtiene

$$\mathbf{E} = \alpha_1 \mathbf{D} + \beta_1 \mathbf{B}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{H} = \alpha_2 \mathbf{D} + \beta_2 \mathbf{B}, \quad (4.15)$$

donde

$$\alpha_1 = \cosh(\gamma) - \frac{\sinh(\gamma)(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)}{\sqrt{(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2}}, \quad (4.16)$$

$$\beta_1 = -\frac{2 \sinh(\gamma)(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})}{\sqrt{(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2}}, \quad (4.17)$$

$$\alpha_2 = -\frac{2 \sinh(\gamma)(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})}{\sqrt{(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2}}, \quad (4.18)$$

$$\beta_2 = \cosh(\gamma) + \frac{\sinh(\gamma)(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)}{\sqrt{(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2}} \quad (4.19)$$

Teniendo en cuenta estos resultados, la parte principal resulta

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_2}{\partial D_x} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_x} B_y & \frac{\partial \alpha_2}{\partial D_y} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_y} B_y + \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial B_x} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_x} B_y & \frac{\partial \alpha_2}{\partial B_y} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_y} B_y + \beta_2 \\ -\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_x} D_x - \frac{\partial \beta_2}{\partial D_x} B_x - \alpha_2 & -\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_y} D_x - \frac{\partial \beta_2}{\partial D_y} B_x & -\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_x} D_x - \frac{\partial \beta_2}{\partial B_x} B_x - \beta_2 & -\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_y} D_x - \frac{\partial \beta_2}{\partial B_y} B_x \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_x} D_y - \frac{\partial \beta_1}{\partial D_x} B_y & -\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_y} D_y - \frac{\partial \beta_1}{\partial D_y} B_y - \alpha_1 & -\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_x} D_y - \frac{\partial \beta_1}{\partial B_x} B_y & -\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_y} D_y - \frac{\partial \beta_1}{\partial B_y} B_y - \beta_1 \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial D_x} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_x} B_x + \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial D_y} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_y} B_x & \frac{\partial \alpha_1}{\partial B_x} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial B_x} B_x + \beta_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial B_y} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial B_y} B_x \end{bmatrix}$$

Finalmente, los términos de fuente resultan, explícitamente,

$$F_1 = -\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_z} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_z} B_y \right) \rho, \quad (4.20)$$

$$F_2 = \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_z} D_x + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_z} B_x \right) \rho, \quad (4.21)$$

$$F_3 = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_z} D_y + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_z} B_y \right) \rho, \quad (4.22)$$

$$F_4 = -\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_z} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_z} B_x \right) \rho \quad (4.23)$$

Notamos que, en vacío, dichos términos se anulan, resultando el sistema homogéneo.

La derivación detallada y explícita de estas relaciones, así como de las derivadas que aparecen en las entradas de la matriz anterior se encuentran en el Apéndice B del trabajo.

4.3. Dominio numérico y cantidades de monitoreo

El dominio espacial de las soluciones simuladas numéricamente en este trabajo consiste en un cubo \mathcal{C} de arista L , cuyas direcciones principales se corresponden con los ejes coordenados (x, y, z) . No obstante, dado que la dependencia funcional de los campos dinámicos es en sólo una coordenada espacial, no resulta necesario realizar un código 3D para las simulaciones.

Durante la evolución dinámica, es posible calcular numéricamente los valores de la energía electromagnética y el momento angular en términos de los campos de evolución a partir de las definiciones dadas en el capítulo 2. El objetivo es tener un control en el tiempo de dichas cantidades, en particular para verificar la validez de las desigualdades geométricas estudiadas en el capítulo anterior, corroborando lo obtenido analíticamente. Por otra parte, resulta interesante el estudio de la dependencia de estas cantidades con el parámetro γ de la teoría de ModMax.

4.3.1. Energía electromagnética

La expresión de la energía en función de los campos, teniendo en cuenta la definición (2.10), y asumiendo la dependencia funcional de las variables de evolución resulta

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{L^2}{2} \int_z (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \mathcal{L}_F dz, \quad (4.24)$$

donde hemos visto que los campos eléctrico e inducción magnética son funciones no lineales conocidas de las variables de evolución.

4.3.2. Momento angular

Para las componentes cartesianas del momento angular tenemos, a partir de la definición (2.11),

$$\mathcal{J}_x(t) = - \int_{\mathcal{C}} (y(E_x B_y - E_y B_x) - z(E_z B_x - E_x B_z)) \mathcal{L}_F d^3x, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{J}_y(t) = - \int_{\mathcal{C}} (z(E_y B_z - E_z B_y) - x(E_x B_y - E_y B_x)) \mathcal{L}_F d^3x, \quad (4.26)$$

$$\mathcal{J}_z(t) = - \int_{\mathcal{C}} (x(E_z B_x - E_x B_z) - y(E_y B_z - E_z B_y)) \mathcal{L}_F d^3x, \quad (4.27)$$

donde las integrales son sobre todo el dominio \mathcal{C} , y

$$\mathcal{L}_F = -\cosh(\gamma) + \sinh(\gamma) \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{\sqrt{(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2}} \quad (4.28)$$

Para el Ansatz considerado en las simulaciones, donde sólo hay dependencia espacial en z y siendo $B_z = 0$, estas componentes se reducen a

$$\mathcal{J}_x(t) = L^2 \int \left(z E_z B_x - \frac{L}{2} (E_x B_y - E_y B_x) \right) \mathcal{L}_F dz, \quad (4.29)$$

$$\mathcal{J}_y(t) = L^2 \int \left(z E_z B_y + \frac{L}{2} (E_x B_y - E_y B_x) \right) \mathcal{L}_F dz, \quad (4.30)$$

$$\mathcal{J}_z(t) = -\frac{L^3}{2} \int E_z (B_x + B_y) \mathcal{L}_F dz \quad (4.31)$$

Claramente, para calcular explícitamente estas cantidades en el código numérico, deben reemplazarse los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} por sus expresiones en función de \mathbf{D} y \mathbf{B} , los cuales son los campos evolucionados.

Presentamos a continuación los resultados obtenidos al evolucionar las ecuaciones (4.10)-(4.13), a partir de la implementación del método de Diferencias Finitas. El objetivo es analizar las soluciones obtenidas y compararlas en el rango de validez del método, es decir, donde converge al orden de precisión esperado, tanto en tiempo como en espacio.

4.4. Descripción del método de Diferencias finitas

Para la evolución numérica de los campos dinámicos, se implementó el método de diferencias finitas (también referido como método de líneas) [38]. La idea general de este método es la siguiente. Se comienza por discretizar el dominio espacial, el cual en este caso basta con considerar solo el eje z , dado que los campos dinámicos dependen únicamente de dicha coordenada en espacio. Elegido un paso h , se introduce la grilla

$$z_i = z_0 + (i - 1) h, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.32)$$

La relación entre h y N queda fijada por

$$h = \frac{L}{N - 1}, \quad (4.33)$$

siendo L el largo total del dominio en la dirección z y N el número total de puntos de grilla. Luego, cualquier función $f(z)$ viene definida sobre la grilla anterior del siguiente modo:

$$f_i := f(z_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.34)$$

Estas son llamadas funciones de grilla, y entonces cualquier función real definida en el dominio considerado es reemplazada por un vector de N componentes. Si además dicha función depende del tiempo, se aproxima

$$f(t, z) \rightarrow \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Asimismo, las derivadas espaciales son reemplazadas por operadores de diferencias finitas, los cuales corresponden a aproximaciones algebraicas en términos de las funciones de grilla f_i . Por ejemplo, la derivada primera de f con respecto a z puede aproximarse por el operador de diferencias finitas centradas

$$(\partial_z f)(z) \rightarrow (Df)_i := \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \quad i = 2, \dots, N-1, \quad (4.36)$$

mientras que para los valores de los extremos ($i = 1$ e $i = N$), suelen usarse operadores a izquierda o derecha (entre otras posibles elecciones), dependiendo de la precisión deseada. La aproximación anterior es de segundo orden de precisión (es decir el error de truncamiento local es $\mathcal{O}(h^2)$). De manera análoga, existen operadores de diferencias finitas para aproximar derivadas espaciales de orden superior.

Dado que esta discretización puede realizarse para cada tiempo t , cualquier ecuación diferencial de primer orden en el tiempo para el campo f se aproxima numéricamente como

$$\partial_t f + L(f) = g \quad \rightarrow \quad \frac{df_i(t)}{dt} + [L(f)]_i = g_i \quad (4.37)$$

donde $[L(f)]_i$ representa la discretización por medio de operadores de diferencias finitas del operador $L(f)$ (el cual puede contener derivadas espaciales de cualquier orden), y g_i son las funciones de grilla correspondientes al término de fuente g . La ecuación

$$\frac{df_i(t)}{dt} + [L(f)]_i = g_i, \quad (4.38)$$

no es más que un sistema de N ODEs para la coordenada temporal t , cuyas variables son las funciones $f_i(t)$. El mismo puede ser integrado en el tiempo por medio de diversos métodos, aunque el más famoso y efectivo resulta el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Este método es de cuarto orden porque aproxima la solución exacta con un error de truncamiento local que resulta² $\mathcal{O}((\Delta t)^4)$, donde Δt es el paso temporal.

²y donde se asume que la solución tiene cinco derivadas continuas [13].

Para implementar este método, se desarrolló un código numérico en lenguaje Fortran90. Para el interior de la grilla, se implementaron operadores de diferencia finita centrados, de segundo y cuarto orden. En particular, para el operador de cuarto orden se consideró

$$(Df)_i = \frac{f_{i-2} - 8f_{i+1} + 8f_{i-1} - f_{i+2}}{12h} \quad (4.39)$$

Para los puntos extremos, se usaron discretizaciones a derecha e izquierda, las cuales satisfacen la propiedad SBP (*summation by parts*), que ante la imposición de ciertas condiciones es análoga a la integración por partes y que trasforma la suma de producto de secuencias en otras sumas, usualmente simplificando su computación. Por último, se incluyeron términos de disipación numérica en las ecuaciones, con el fin de suavizar pequeñas oscilaciones de alta frecuencia y pequeña amplitud, alrededor de la solución numérica, y producto de la discretización espacial [38]. En particular, dado que se emplearon operadores de diferencia de cuarto orden de precisión, se consideró una disipación pequeña empleando operadores de Kreiss-Oliger de sexto orden [30] dados por

$$\mathcal{D}f_i = \sigma \frac{f_{i+3} - 6f_{i+2} + 15f_{i+1} - 20f_i + 15f_{i-1} - 6f_{i-2} + f_{i-3}}{64h}, \quad (4.40)$$

donde σ regula la fuerza de la disipación. Para las simulaciones de este trabajo tomamos $\sigma = 0,1$. Además, se consideraron condiciones de contorno periódicas para todas las simulaciones realizadas.

4.5. Resultados

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos para el sistema anteriormente introducido, mediante el método de Diferencias Finitas.

Como datos iniciales se consideraron funciones gaussianas para los campos D_x , D_y , B_x y B_y ; esto es

$$, \quad (4.41)$$

$$D_y(z) = -\frac{A}{2}e^{-(z-z_c)^2/\lambda^2} + A_0, \quad (4.42)$$

$$B_x(z) = -\frac{A}{3}e^{-(z-z_c)^2/\lambda^2} + A_0, \quad (4.43)$$

$$B_y(z) = \frac{A}{4}e^{-(z-z_c)^2/\lambda^2} + A_0, \quad (4.44)$$

$$(4.45)$$

donde A es la amplitud de la gaussiana correspondiente al dato para D_x , z_c y λ son respectivamente el centro y la varianza de todas ellas, y $A_0 = 0,1$. Como se mencionó anteriormente, para las simulaciones en vacío se tomó $D_z = B_z = 0$, mientras que para el caso con fuentes se consideró $\rho = 0,1$. La evolución para estos dos casos resultó ser prácticamente idéntica, habiendo diferencias más marcadas únicamente en los valores de la energía y el momento angular.

En los siguientes gráficos se muestran, a un tiempo fijo ($t = 1,5$), las soluciones para diferentes valores del parámetro γ de ModMax en el caso $\rho = 0$. Para las simulaciones se consideró una grilla de largo $L = 5$, siendo $z_0 = 0$. Como parámetros del dato, se tomaron $A = 1$, $z_c = 2,5$ y $\lambda = 0,25$. Además, el paso temporal Δt fue tomado aproximadamente como $dt = 0,0034$, mientras que el paso espacial h como $h = 0,0625$.

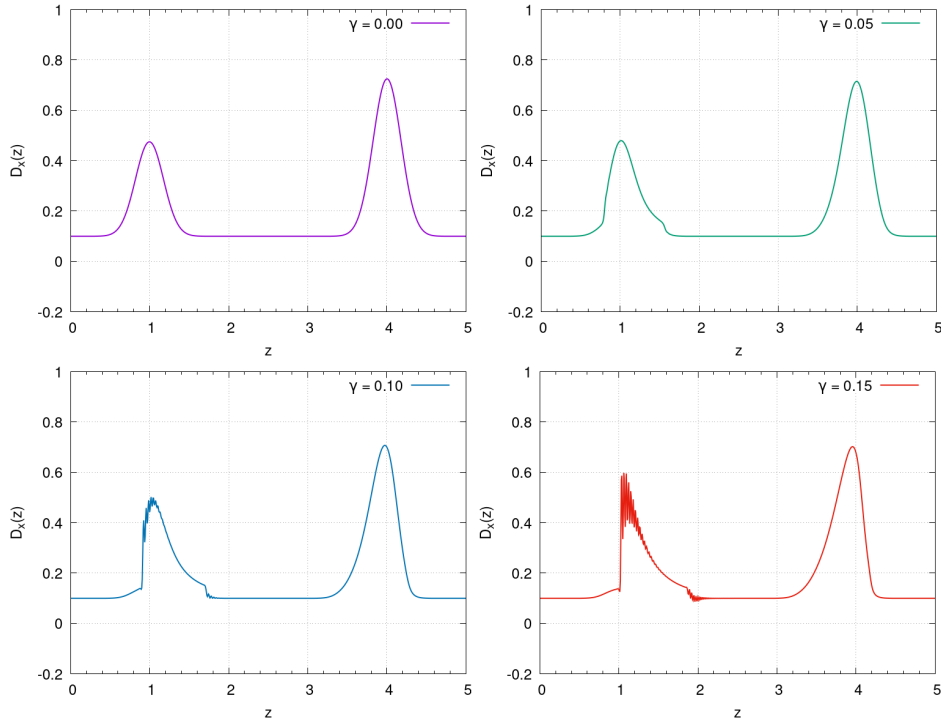


Figura 4.1: Componente D_x en función de la posición z a tiempo $t = 1,5$ y con diferentes valores de γ para $\rho = 0$ utilizando el método de Diferencias Finitas. Se logra ya ver la formación de ondas de alta frecuencia en los valores más altos del parámetro.

Notemos que, al aumentar el valor de γ , la dinámica se aleja cada vez más de la correspondiente a la electrodinámica de Maxwell ($\gamma = 0$). Además, se

puede observar la formación de discontinuidades, las cuales se hacen presente más rápido mientras mayor sea el valor de γ . A partir de un cierto valor de este parámetro, es decir al considerar teorías cada vez más y más no-lineales, dichas discontinuidades generaban pequeñas inestabilidades, que hacían que la simulación se rompa. Luego, resulta natural preguntarse si dichas discontinuidades son físicas o no; es decir, si se trata de la dinámica esperada para la solución predicha por la teoría, o si hay problemas con el método o esquema numérico usado. Una manera de explorar este hecho es rehacer las simulaciones, pero distintas resoluciones espaciales y temporales y ver cómo cambian las soluciones. Se observó que las soluciones cambian de manera notoria, no pudiendo entonces tratarse de una solución física (confiable). Para verificar correctamente si el esquema numérico es apto para las ecuaciones y parámetros deseados, se realiza un test de convergencia tanto en espacio y en tiempo, como se ilustra a continuación.

4.5.1. Convergencia

Para poder confiar en la validez de los resultados obtenidos para este método, es importante hacer un análisis de su convergencia. Este análisis fue realizado en función del parámetro de la teoría γ tanto para la coordenada temporal como la espacial. Para esto se utilizó el coeficiente de precisión $Q(t, k)$.

El coeficiente de precisión $Q(t, k)$ es una función del tiempo que nos indica el orden del método numérico utilizado y es empleado para corroborar el funcionamiento del mismo. Este coeficiente esta dado por [38]

$$Q(t, k) = \log_2 \left(\frac{\|u(t, k) - u(t, k/2)\|}{\|u(t, k/2) - u(t, k/4)\|} \right) \quad (4.46)$$

donde u es la solución obtenida, que depende del tiempo y de k , que nos indica el paso temporal o espacial, según sea el caso. Además, la norma utilizada en este caso es la L^1 . Cambiando dt o dz (según estudiemos la convergencia en el tiempo o en el espacio) en el código podemos obtener $u(t, k)$, $u(t, k/2)$, y $u(t, k/4)$ a partir de tres corridas, para luego computar el coeficiente.

Para el método de Diferencias Finitas, (4.46) este coeficiente debiera ser cercano a 4 si se realiza un test de convergencia en el tiempo, dado que el método de integración temporal empleado (RK4) es de cuarto orden de precisión. Para la convergencia en espacio, el valor de Q depende del orden de precisión de los operadores diferencia finitas empleados. Dado que para estas simulaciones se implementaron operadores de cuarto orden para la derivada centrada, el coeficiente en cuestión también debiera estar cercano

al mismo número. En las siguientes figuras puede observarse el valor del coeficiente en ambos casos en función de t .

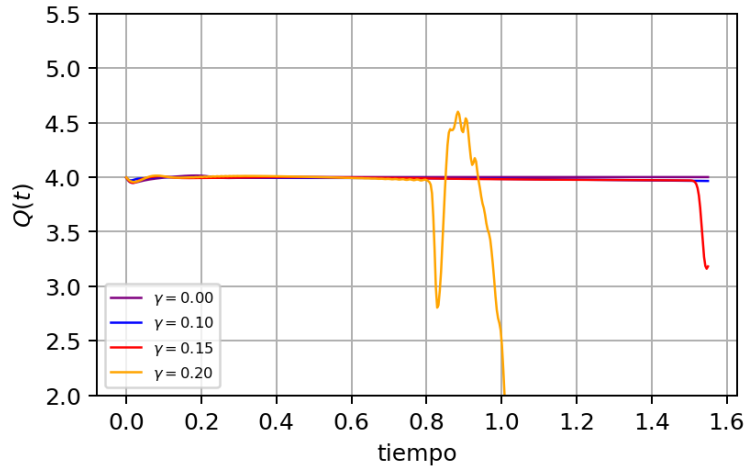


Figura 4.2: Orden de precisión del método RK4 de integración temporal en función del tiempo para el método de Diferencias Finitas con diferentes valores de γ . Para las curvas correspondientes a $\gamma = 0$, $\gamma = 0,1$ y $\gamma = 0,15$ se obtiene el valor esperado para el coeficiente. Para $\gamma = 0,2$ esto ya no se cumple, por lo que los resultados obtenidos pierden validez.

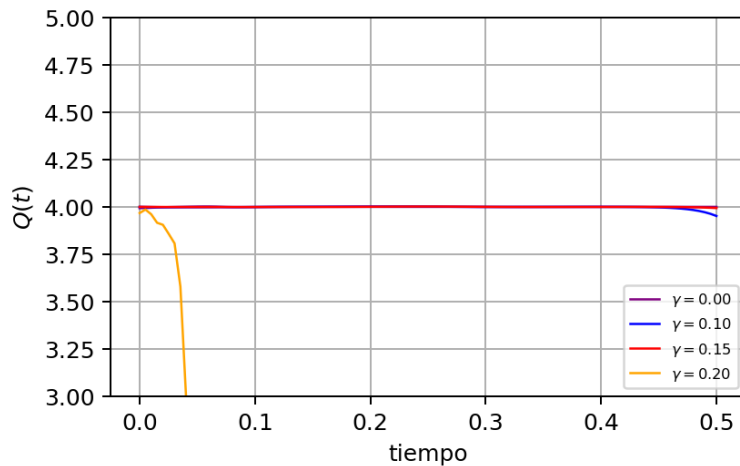


Figura 4.3: Orden de precisión en espacio, en función del tiempo para el método de Diferencias Finitas con diferentes valores de γ . Para las curvas correspondientes a $\gamma = 0$, $\gamma = 0,1$ y $\gamma = 0,15$ se obtiene el valor esperado para el coeficiente. Para $\gamma = 0,2$ esto ya no se cumple, por lo que los resultados obtenidos pierden validez.

Se puede notar tanto en (4.2) como en (4.3) que aumentando el valor de γ los métodos dejan de converger a partir de un cierto tiempo. Si bien para las curvas correspondientes a $\gamma = 0$, $\gamma = 0,1$ y $\gamma = 0,15$ se obtiene el valor esperado para el coeficiente, este no es el caso para $\gamma = 0,2$, lo que invalida los resultados numéricos obtenidos para este valor del parámetro (y superiores). Concluimos entonces que, para estudiar la dinámica no lineal de ModMax con valores más altos de γ , resulta necesario cambiar el esquema numérico por uno que propague las discontinuidades correctamente, lo cual se presentará en el siguiente capítulo.

4.5.2. Energía y momento angular

A pesar de la formación de choques, las soluciones brindadas por este método numérico resultan plausibles siempre que el método converja con el orden de precisión esperado. En particular, para valores suficientemente pequeños de γ , vemos que los choques no se forman a tiempos tempranos en la evolución, y que la convergencia resulta óptima. Luego, tiene sentido estudiar las cantidades de monitoreo energía y momento angular, y en particular verificar la desigualdad geométrica (2.34), que involucra ambas cantidades y que fue probada analíticamente en el capítulo anterior.

En los siguientes gráficos se muestra el valor de la energía y el momento angular para diferentes valores de t con los mismos valores de dt y dz mencionados anteriormente y para los casos $\rho = 0$ (izquierda) y $\rho = 0,1$ (derecha).

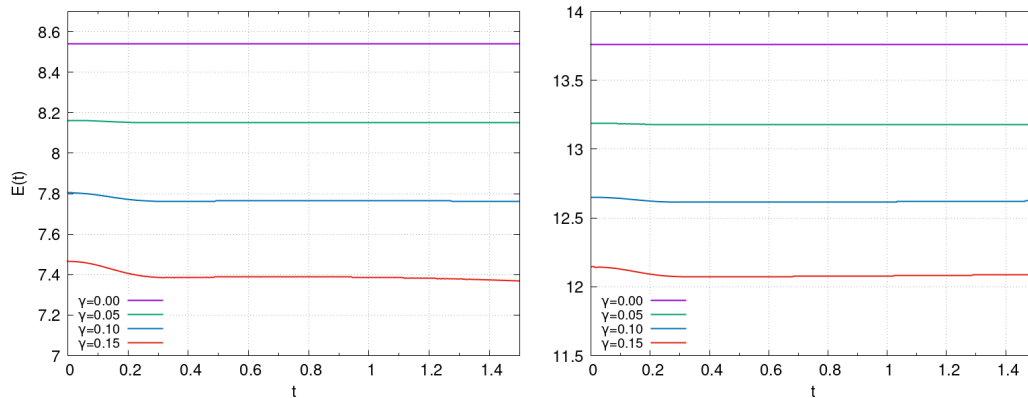


Figura 4.4: Energía respecto de t para diferentes valores de γ para los casos $\rho = 0$ (izquierda) y $\rho = 0,1$ (derecha) a partir del método de Diferencias Finitas. Si bien cuando se agrega materia las energías resultan más altas, se logra ver en ambos casos un decaimiento de la cantidad calculada.

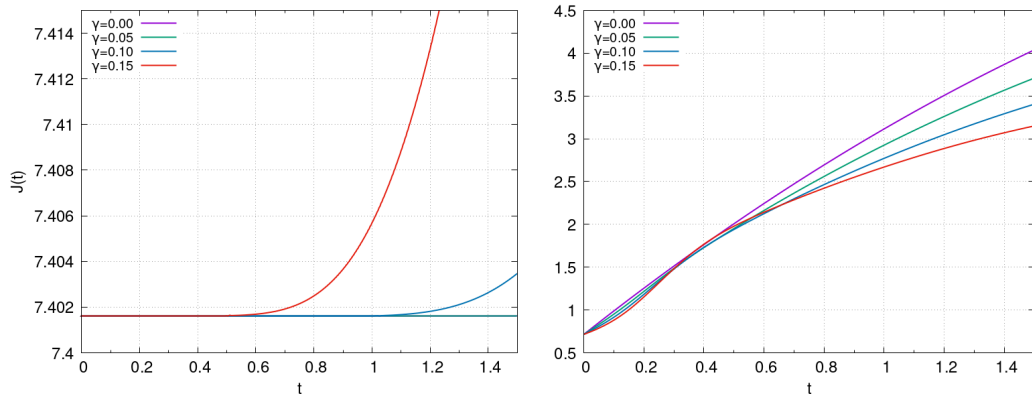


Figura 4.5: Momento angular respecto de t para diferentes valores de γ para los casos $\rho = 0$ (izquierda) y $\rho = 0,1$ (derecha) a partir del método de Diferencias Finitas. El valor del momento angular decrece con γ al agregar fuente.

La energía muestra, tanto en el caso $\rho = 0$ como en el caso $\rho = 0,1$, un claro decaimiento con respecto a γ . Esto puede esperarse si recordamos la densidad de energía para ModMax, dada en (3.23). Por otro lado, la dependencia del momento angular con el parámetro γ resulta más compleja.

Como ya fue mencionado, ante la aparición de discontinuidades y oscilaciones localizadas de alta frecuencia en las soluciones encontradas, las cuales invalidan las soluciones numéricas obtenidas mediante el método de Diferencias Finitas al aumentar el parámetro γ , se optó por recurrir a un método de captura de choques: el método WENO.

Simulaciones en ModMax II: Captura de choques

En este capítulo se introduce el método WENO de captura de choques, que fue empleado debido a la aparición de las discontinuidades que fueron observadas para el método de Diferencias Finitas. El método WENO nos permite explorar las propiedades del sistema mencionado a mayores valores de γ . Se presentan así resultados sobre la evolución y cantidades de monitoreo del sistema tratado en el capítulo anterior en el caso $\rho = 0$ para un mayor rango del parámetro de la teoría. A partir de la obtención de la energía y el momento angular se pudo analizar nuevamente desigualdad (2.34) probada analíticamente.

5.1. Sistemas de Leyes de Conservación

De manera análoga a lo que ocurre con las ecuaciones de Maxwell, cualquier teoría no lineal de electromagnetismo proveniente de una densidad lagrangiana $\mathcal{L}(F, G)$ satisface ecuaciones de evolución conocidas en Matemática como “sistemas de leyes de conservación” [44]. En una dimensión espacial, estos sistemas tienen la forma

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \tag{5.1}$$

donde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un vector m -dimensional de cantidades conservadas (como masa, momento o energía en un problema de dinámica de fluidos). Que estas cantidades sean conservadas quiere decir que $\int u_j(x, t) dx$ es una constante en el tiempo, donde la integral se calcula en todo el dominio espacial de u . La función $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, con componentes $f_j(u)$, es denominada función de flujo. La condición de hiperbolicidad fuerte para estos sistemas es entonces que la matriz Jacobiana $\mathbb{J}_u(f)$, de dimensiones $m \times m$, sea diagonalizable con autovalores reales para todo u , lo que implica que existe un sistema completo de m autovectores linealmente independientes para cualquier solución u de (5.1). Como vimos antes, esta es una condición necesaria y suficiente para que el problema de valores iniciales del sistema (5.1) sea localmente bien puesto. Un ejemplo clásico de este tipo de ecuaciones lo conforman las Ecuaciones de Euler, que describen la dinámica de fluidos ideales.

Al tratar las ecuaciones de leyes de conservación surgen algunos problemas. Las soluciones, como ocurre en los ejemplos mencionados anteriormente, presentan discontinuidades (o choques), producto de que las curvas características del sistema se intersectan en algún instante de tiempo. Estas discontinuidades hacen que las soluciones no satisfagan la PDE localmente, ya que las derivadas no están siempre definidas. Sin embargo, esto puede corregirse expresando las ecuaciones en su forma integral, lo que las hace válidas aunque las mismas sean discontinuas [44]. Sumado a este problema, surge el de la no unicidad de las soluciones, lo cual no es deseado al intentar describir de manera determinista la evolución de un sistema físico a partir de una dada configuración inicial. Para subsanar esta última patología, suele procederse de dos maneras distintas (de las cuales se obtiene la misma solución única, en la gran mayoría de los casos): (i) o bien se introduce un pequeño término difusivo de la forma $\varepsilon \partial_x^2 u$ (siempre en una dimensión espacial, a modo ilustrativo) en las ecuaciones de evolución y así garantizar solución única y suave haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$, o (ii) del conjunto de soluciones obtenidas, se elige aquella que satisfaga la “condición de entropía”, la cual tiene un significado matemático preciso y bien definido para cualquier sistema de leyes de conservación¹ [44].

Como vimos en la sección anterior, una consecuencia directa de los inconvenientes que surgen al evolucionar numéricamente este tipo de sistemas es que los métodos clásicos de discretización de derivadas espaciales por medio de operadores de diferencias finitas no resultan efectivos para resolver en las regiones de discontinuidades. Sin embargo, dado que los mismos siguen siendo válidos lejos de las discontinuidades, una forma de tratar el problema es combinar métodos de diferencias finitas en las regiones suaves y de alguna manera intentar localizar las discontinuidades de una manera más precisa. Estos métodos son denominados de “seguimiento de choque” y son más utilizados en problemas en una dimensión. Otro tipo de métodos, los de “captura de choques” (o métodos *shock capturing*), buscan aproximaciones automáticas de las soluciones discontinuas, siendo un ejemplo de estos los métodos WENO (Weighted Essentially Non Oscillatory) [44].

¹Un ejemplo físico donde se opta por la opción (ii) mencionada anteriormente ocurre en el estudio de la dinámica de los gases, donde la segunda ley de la termodinámica coincide con la condición de entropía para dicho sistema. Esta prescripción resulta entonces suficiente para reconocer las discontinuidades que son físicas en el problema y optar por la solución que modela correctamente el fenómeno de interés.

5.2. Descripción del método WENOZ-5

Los métodos ENO (Essentially Non Oscillatory) fueron introducidos por primera vez en 1987 por Harten, Engquist, Osher y Chakravarthy [32] y han sido utilizados para obtener soluciones numéricas a sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. La idea general es realizar una reconstrucción de las funciones flujo a partir de sus promedios de celda, por medio de polinomios a trozos. Con el fin de evitar considerar celdas donde se tengan discontinuidades, se elige un estencil de manera adaptativa. Una generalización de estos métodos ENO fue propuesta por Liu, Osher y Chan [45]; y revisada posteriormente por Jiang y Shu [36], la cual denominaron WENO (Weighted essentially nonoscillatory), agregando funciones peso en los polinomios y generando así mayor orden de precisión espacial. En particular, el método WENOZ-5 implementado en este trabajo, reconstruye las funciones de flujo a quinto orden en precisión espacial, a partir del procedimiento que esquemizamos a continuación.

El primer paso es considerar la siguiente aproximación semi-discreta para la ecuación (5.1):

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \left(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \right), \quad (5.2)$$

donde de manera análoga al método de líneas introducido en la sección anterior, $u_i(t) = u(t, x_i)$, h es el paso espacial y $f_{i\pm\frac{1}{2}}$ son las aproximaciones respectivas del flujo $f(u)$ en los puntos $x_{i+\frac{1}{2}} := (x_i + x_{i+1})/2$ y $x_{i-\frac{1}{2}} := (x_i + x_{i-1})/2$. Para garantizar la estabilidad del método, se considera la descomposición de Lax-Friedrichs para el flujo; esto es

$$f(u) = f_+(u) + f_-(u), \quad (5.3)$$

donde

$$f_{\pm} = \frac{1}{2} (f(u) \pm \alpha u), \quad (5.4)$$

siendo α el radio espectral del Jacobiano $\mathbb{J}_u(f)$, el cual se corresponde con la máxima velocidad de propagación que admite el sistema, esto es

$$\alpha = \max_u \{ |\lambda(\mathbb{J}_u(f))| \} \quad (5.5)$$

Luego, para aproximar las contribuciones $f_{i\pm\frac{1}{2}}^+$ y $f_{i\pm\frac{1}{2}}^-$, se procede del siguiente modo. Si llamamos $v_{j+1/2}$ a la cantidad que desea reconstruirse, consideramos un estencil de cinco puntos para los promedios \bar{v}_{j+k} ($k = -2, -1, 0, 1, 2$)

y a partir de ellos calculamos tres aproximaciones con diferentes estenciles:

$$v_{j+1/2}^{(1)} = \frac{1}{3}\bar{v}_{j-2} - \frac{7}{6}\bar{v}_{j-1} + \frac{11}{6}\bar{v}_j, \quad (5.6)$$

$$v_{j+1/2}^{(2)} = -\frac{1}{6}\bar{v}_{j-1} + \frac{5}{6}\bar{v}_j + \frac{1}{3}\bar{v}_{j+1}, \quad (5.7)$$

$$v_{j+1/2}^{(3)} = \frac{1}{3}\bar{v}_j + \frac{5}{6}\bar{v}_{j+1} - \frac{1}{6}\bar{v}_{j+2}, \quad (5.8)$$

Así, se aproxima $v_{j+1/2}$ como

$$v_{j+1/2} = \sum_{k=1}^3 w_k v_{j+1/2}^{(k)}, \quad (5.9)$$

donde

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{l=1}^3 \alpha_l}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.10)$$

Las funciones α_k vienen dadas por

$$\alpha_k = d_k \left(1 + \frac{\tau}{\beta_k + \epsilon} \right), \quad (5.11)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{13}{12}(v_{i-2} - 2v_{i-1} + v_i)^2 + \frac{1}{4}(v_{i-2} - 4v_{i-1} + 3v_i)^2, \\ \beta_2 &= \frac{13}{12}(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(v_{i-1} - v_{i+1})^2, \\ \beta_3 &= \frac{13}{12}(v_i - 2v_{i+1} + v_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2})^2 \end{aligned}$$

El parámetro ϵ en (5.11) se toma muy pequeño, con el fin de evitar eventuales divisiones por cero, y $\tau := |\beta_1 - \beta_3|$. Finalmente, para los coeficientes d_k se toma

$$d_1 = \frac{1}{16}, \quad d_2 = \frac{5}{8}, \quad d_3 = \frac{5}{8}, \quad (5.12)$$

lo que garantiza que la reconstrucción sea de quinto orden de precisión, es decir

$$v_{j+1/2} = \sum_{k=1}^3 d_k v_{j+1/2}^{(k)} + \mathcal{O}(h^5) \quad (5.13)$$

Un procedimiento completamente análogo se tiene para aproximar $v_{j-1/2}$.

Una vez reconstruido el flujo, se procede a la integración en el tiempo. Para ello, se emplea un método de Runge-Kutta de tercer orden de precisión, el cual parece ser óptimo para métodos *shock-capturing*, dado que preserva

una condición conocida como TVD (*total variation diminishing*), garantizando estabilidad de precisión cuando aparecen discontinuidades [45]. Este método de integración temporal es de tres pasos, y se procede como sigue: Si definimos el operador

$$L(u^n) := -\frac{1}{h} \left(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \right), \quad (5.14)$$

es decir el miembro derecho de la ecuación (5.1), la evolución temporal es como sigue:

$$\begin{aligned} u_i^1 &= u_i^n + \Delta t L(u^n), \\ u_i^2 &= \frac{3}{4} u_i^n + \frac{1}{4} u_i^1 + \frac{1}{4} \Delta t L(u^1), \\ u_i^{n+1} &= \frac{1}{3} u_i^n + \frac{2}{3} u_i^2 + \frac{2}{3} \Delta t L(u^2). \end{aligned}$$

5.3. Resultados

Para este método, se utilizaron como condiciones iniciales las mismas gaussianas para D_x , D_y , B_x y B_y , mientras que tanto D_z como B_z fueron tomados igual a cero².

En este caso los valores utilizados fueron $A = 1$, $x_c = 2,5$ y $\lambda = 0,25$. Debido a la dificultad que presenta este método en cuanto a las condiciones de contorno, la simulación fue realizada hasta tiempos tales que los picos en las soluciones no llegaran hasta los extremos. El valor de la variable z fue variado entre 0 y 5.

Podemos observar en los siguientes gráficos $D_x(z)$ para diferentes tiempos y con diferentes valores de γ .

²Se deja el análisis incluyendo materia para ser realizados en estudios posteriores

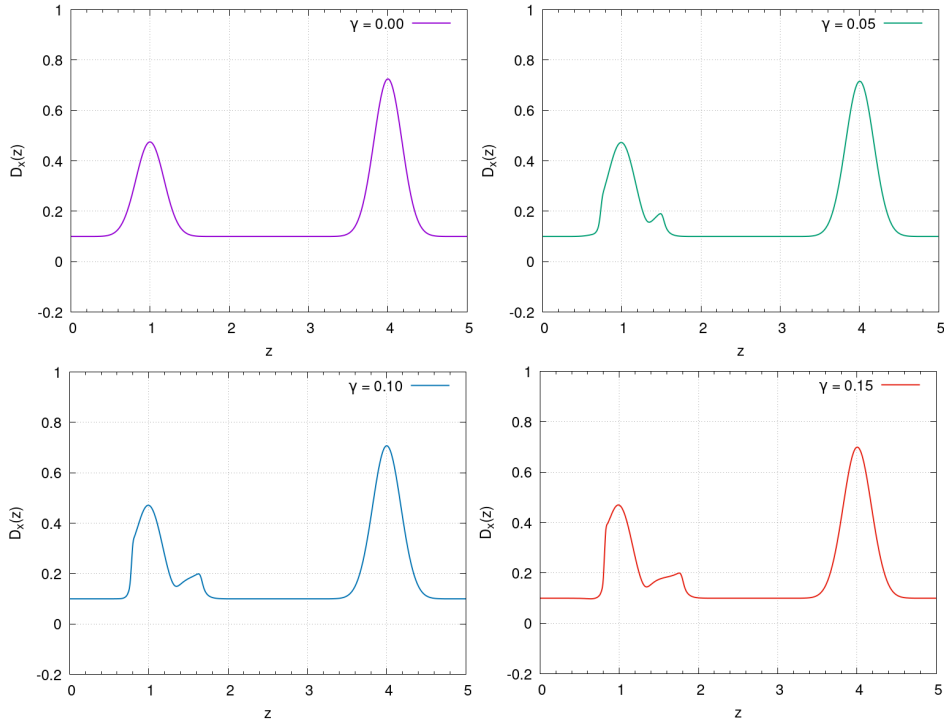


Figura 5.1: Componente D_x en función de la posición z a tiempo $t = 1,5$ y con diferentes valores de γ para $\rho = 0$ utilizando el método WENO. Se logra ver cómo se propagan las discontinuidades que comienzan a formarse, sin la aparición de oscilaciones de alta frecuencia, pues han sido tratadas con éxito por este método.

A diferencia del método anterior, en este caso se puede ver que las oscilaciones localizadas de alta frecuencia ya no están. Para estas simulaciones fue utilizado el mismo paso espacial dz que para el método de Diferencias Finitas. En el caso del paso temporal, este depende de las velocidades de propagación. Las velocidades de propagación de la teoría son las velocidades a las que se mueven los diferentes picos de la solución. Estas están dadas por los autovalores de la parte principal de la ecuación, es decir, de la matriz previamente definida como \mathbb{A} . Para la electrodinámica de Maxwell los autovalores son 1 y -1 (que corresponden a la velocidad de la luz c), ambos con doble degeneración. Sin embargo, para ModMax, estas velocidades dependerán de γ . El paso temporal dt es igual a una constante de proporcionalidad por el cociente entre el paso espacial y la mayor de las velocidades de propagación.

5.3.1. Convergencia

Podemos analizar también la convergencia de este método. De la misma forma que con el código de Diferencias Finitas, se utilizó el coeficiente de precisión (4.46). Si bien fue mencionado que en este caso los intervalos temporales dependen de las velocidades de propagación, se puede proceder dividiendo en la definición del paso temporal según la precisión que se busque, o bien, tal como se hizo en este caso, tomar un valor de dt suficientemente chico. En el siguiente gráfico se observa como varía el cociente $Q(t, k)$ en función del tiempo.

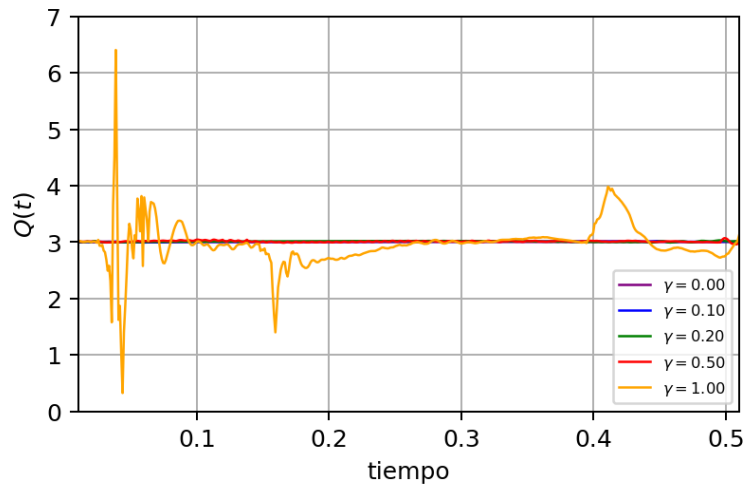


Figura 5.2: Orden de precisión del método RK3 de integración temporal en función del tiempo para el método WENO con diferentes valores de γ . Para las curvas correspondientes a $\gamma = 0$, $\gamma = 0,1$, $\gamma = 0,15$, $\gamma = 0,2$ y $\gamma = 0,5$ se obtiene el valor esperado para el coeficiente. Para $\gamma = 1$ se observa que la convergencia deseada se pierde, aunque oscila alrededor del valor esperado.

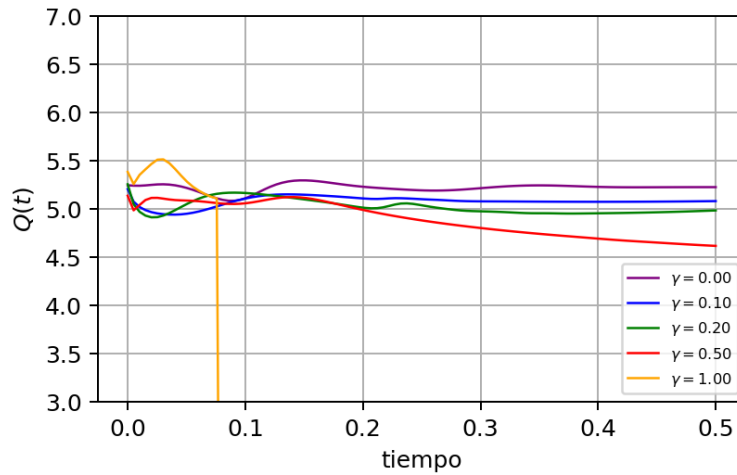


Figura 5.3: Orden de precisión del método de integración espacial en función del tiempo para el método WENO con diferentes valores de γ . Para las curvas correspondientes a $\gamma = 0$, $\gamma = 0,1$, $\gamma = 0,15$, $\gamma = 0,2$ y $\gamma = 0,5$ se obtiene el valor esperado para el coeficiente. Para $\gamma = 1$ esto ya no se cumple, por lo que los resultados obtenidos pierden validez.

Si bien en el método WENO, como fue mencionado anteriormente, el paso temporal depende de las velocidades de propagación, en este caso fue tomado un paso temporal dt inicial fijo de 0,0005.

Notamos claramente que para $\gamma = 1$ el método ya no converge, dejando así de ser válido cualquier resultado a partir de este valor. Si se cambia el dato inicial a uno más suave se puede incluso llegar a valores más altos de γ que los mostrados en los gráficos anteriores.

Por última, notamos que el método WENO nos permite aumentar el valor del parámetro γ sin tener los problemas vistos en el método anterior.

5.3.2. Energía y momento angular

Nuevamente, como fue realizado para el método de Diferencias Finitas, podemos obtener la dependencia de las cantidades de monitoreo energía y momento angular respecto al tiempo para diferentes valores del parámetro γ . En los gráficos (5.4) y (5.5) se muestran los resultados obtenidos.

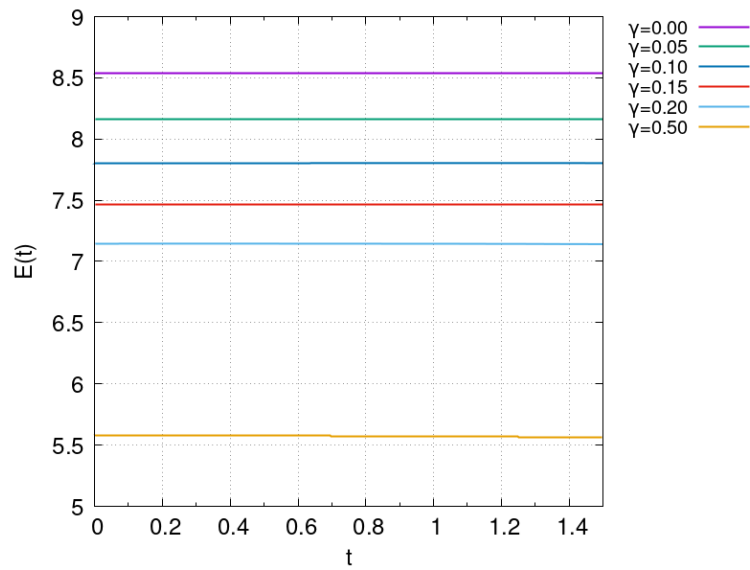


Figura 5.4: Energía respecto de t a partir del método WENO para diferentes valores de γ . Notamos que su valor es similar a los obtenidos para el método de Diferencias Finitas en su rango de validez, observando nuevamente un decaimiento con el parámetro.

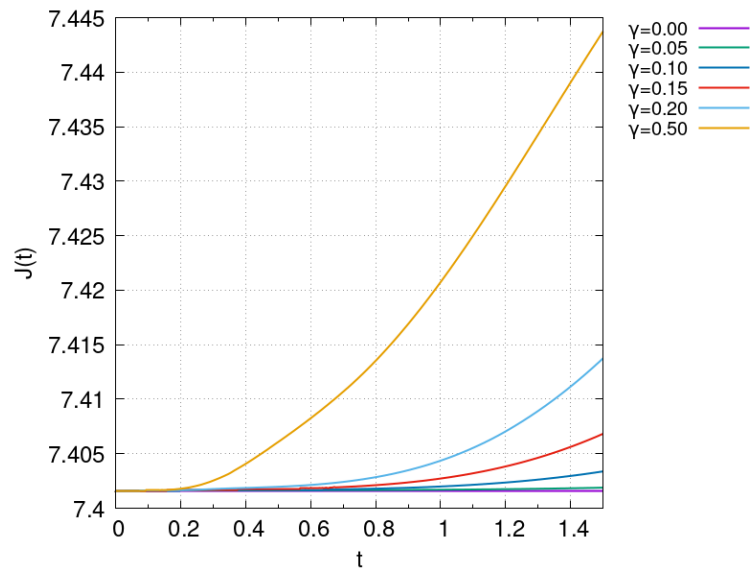


Figura 5.5: Momento angular respecto de t a partir del método WENO para diferentes valores de γ . Notamos que su valor es similar a los obtenidos para el método de Diferencias Finitas en su rango de validez, observando nuevamente un crecimiento con el parámetro.

Tanto para la energía como para el momento angular se obtuvieron resultados similares a los obtenidos para el método de Diferencias Finitas en el caso sin fuentes, con la única diferencia de que para este método los resultados cubren un rango mayor de valores de γ .

5.4. Exploración de las desigualdades geométricas

La desigualdad (2.34) fue estudiada para ambos métodos. En los dos casos se pudo verificar el resultado analítico obtenido, logrando ver que la desigualdad si se cumple.

Ya fue mencionado que la medida de tamaño utilizada en las desigualdades corresponde al radio de la esfera más pequeña que contiene a todo el sistema. Como en nuestro caso estamos tomando como sistema una caja cuadrada de lados con longitud $L = 5$, entonces el radio de la esfera que debemos utilizar es $\mathcal{R} = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2}/2 = \sqrt{75}/2 \approx 4,33$.

Para el método de Diferencias Finitas el análisis fue realizado hasta $\gamma = 0,15$. Si este valor es aumentado, como ya fue mencionado anteriormente, las soluciones difieren demasiado de las del método WENO debido a los choques, por lo que su estudio sería en vano. En el siguiente gráfico se muestra el valor del cociente entre el producto de la energía y \mathcal{R} y el valor de la componente más grande del momento angular para los valores de t simulados.

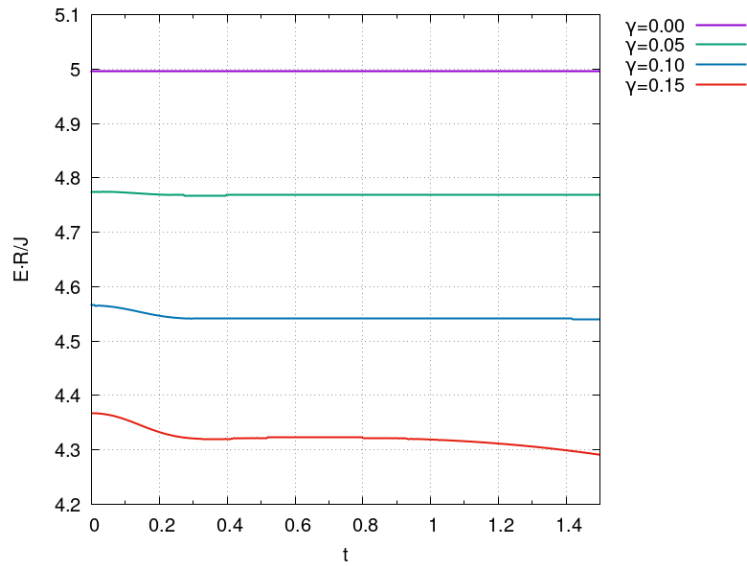


Figura 5.6: Comprobación de la desigualdad entre la energía y el momento angular para diferentes valores de γ en función del tiempo para el método de Diferencias Finitas. Si el cociente es mayor que uno la desigualdad se cumple. Se puede observar que el cociente decrece al aumentar el parámetro.

Al ser este cociente mayor a uno, vemos que entonces el numerador es mayor que el denominador, asegurando el cumplimiento de la desigualdad (2.34).

Para el método WENO se procedió de la misma manera, ahora con la posibilidad de aumentar el valor de γ , llegando hasta $\gamma = 0,5$. El valor del cociente en función de t en este caso esta dado por el siguiente gráfico

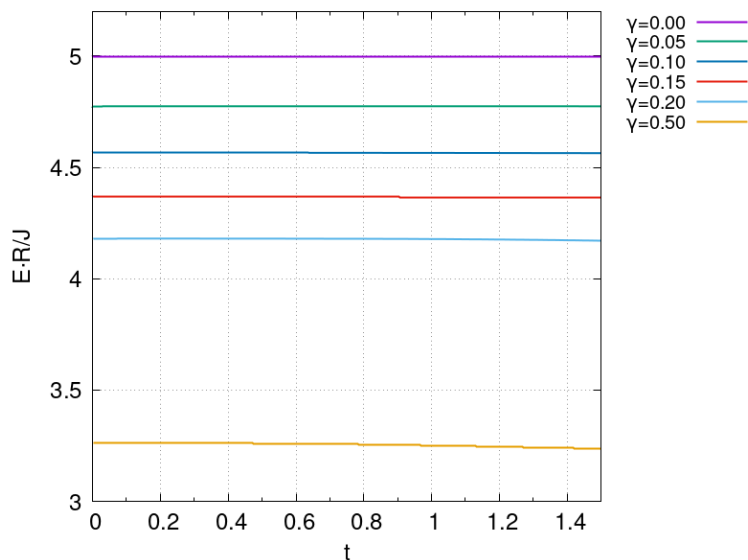


Figura 5.7: Comprobación de la desigualdad entre la energía y el momento angular para diferentes valores de γ en función del tiempo para el método WENO. Si el cociente es mayor que uno la desigualdad se cumple. Se puede observar que el cociente decrece al aumentar el parámetro.

Nuevamente, al ser el cociente mayor que uno, concluimos que la desigualdad (2.34) se cumple en este sistema.

5.5. Comparación de los métodos y formación de choques

Como fue establecido anteriormente, al aumentar el parámetro γ el sistema deja de ser lineal y comienzan a formarse ondas de choque. Mientras mayor sea el parámetro más nos alejamos de la electrodinámica de Maxwell y se observan más rápido las discontinuidades. Es justamente esta característica de la electrodinámica de ModMax que hizo necesaria la utilización del método WENO para tratar con las ecuaciones, dejando de lado el de Diferencias Finitas.

Podemos comparar ambos métodos para diferentes valores de γ y a diferentes tiempos en el gráfico (5.8), observando así como el método WENO trata con los choques.

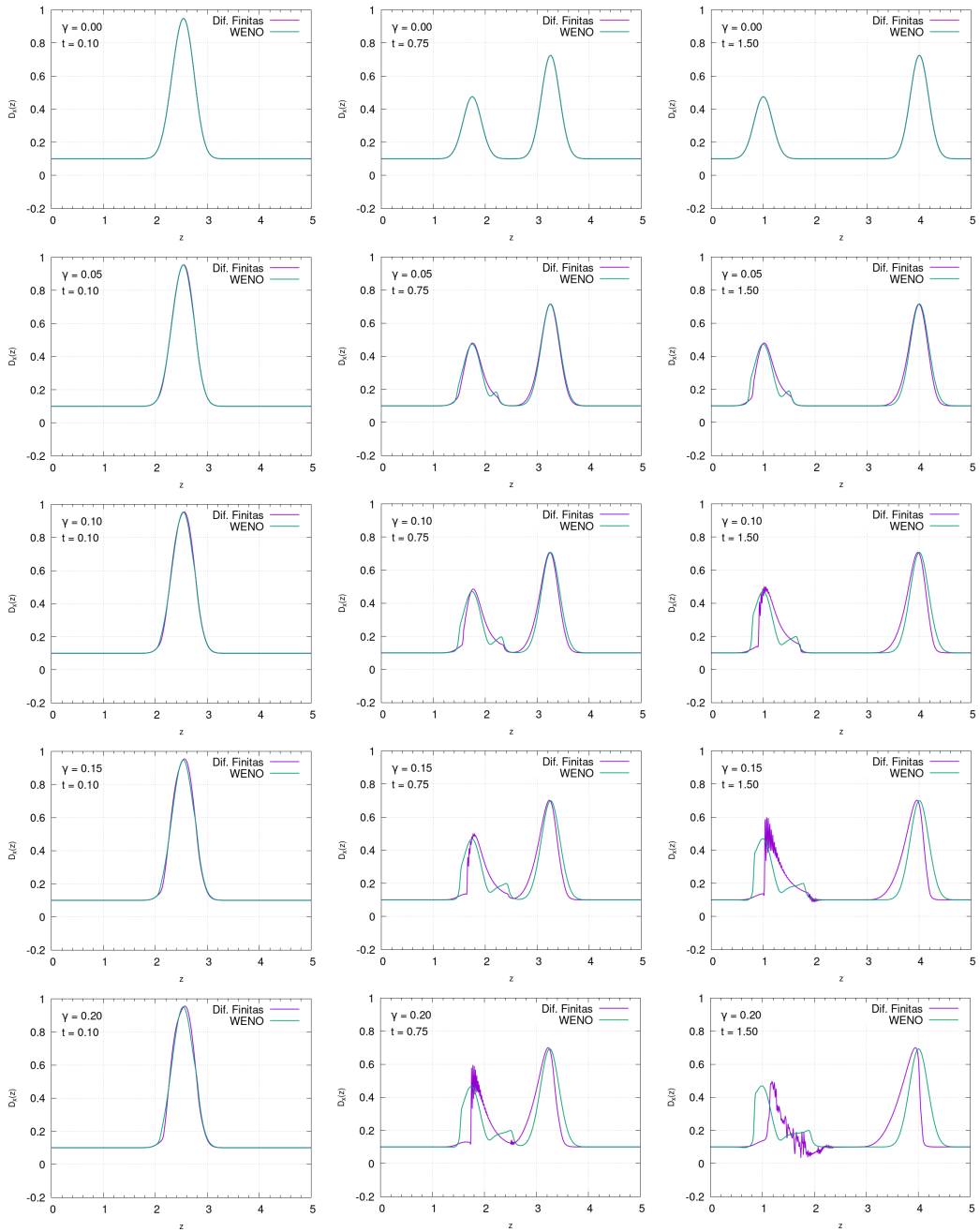


Figura 5.8: Componente D_x en función de z para diferentes tiempos y valores de γ con ambos métodos. Cada fila contiene gráficos con un único valor del parámetro ($\gamma = 0$, $\gamma = 0,05$, $\gamma = 0,1$, $\gamma = 0,15$ y $\gamma = 0,2$) y cada columna contiene un único valor de t . Puede notarse como se manifiestan los choques al aumentar el valor de γ y como son tratados con éxito por el método WENO. También, en el caso de Maxwell ($\gamma = 0$), las evoluciones resultan iguales.

El único caso en el cual ambas coinciden exactamente es el correspondiente a $\gamma = 0$, es decir, cuando se recupera Maxwell. Ya aumentando el valor del parámetro se empiezan a notar diferencias, sobre todo a mayores tiempos.

La formación de choques también se relaciona con los datos iniciales. En este trabajo los datos iniciales dependen de dos cantidades que pueden ser variadas: la amplitud A y la varianza λ . Cambios en estos parámetros influirán en la suavidad de las soluciones a tiempos posteriores y en la formación de discontinuidades. En el gráfico (5.9) se puede observar la dependencia del tiempo de formación de los choques t_c (es decir, el tiempo en el que se logra ver por primera vez un choque en la solución numérica) en función de la amplitud para un valor fijo de la varianza ($\lambda = 0,25$). Por otro lado, en el gráfico (5.10), se muestra lo mismo pero ahora cambiando el valor de la varianza con una amplitud constante ($A = 0,5$).

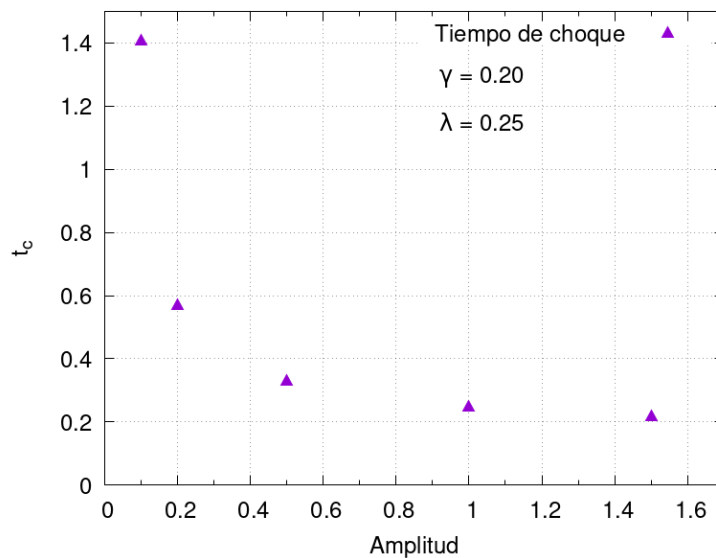


Figura 5.9: Tiempo en el cual se produce el primer choque en función de la amplitud A que caracteriza al dato inicial (4.41). Puede verse que el tiempo de choque t_c disminuye al aumentar la amplitud A .

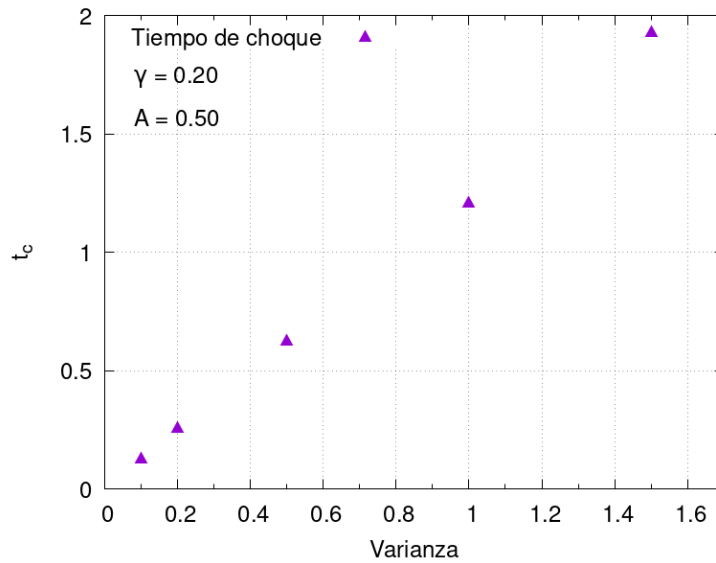


Figura 5.10: Tiempo en el cual se produce el primer choque en función de la varianza λ que caracteriza al dato inicial (4.41). Puede verse que el tiempo de choque t_c aumenta al aumentar la varianza λ .

Puede claramente observarse que el tiempo de choque t_c disminuye con la amplitud y aumenta con la varianza. Esto nos indica algo que podía esperarse: mientras más suave es el dato inicial más tiempo tarda en aparecer un choque. Este resultado está relacionado con un resultado presentado en [39] para sistemas de la forma del estudiado, que nos dice que, si el dato inicial es suficientemente suave con amplitud suficientemente pequeña, el sistema no desarrolla ondas de choque a tiempo finito.

Conclusiones y Perspectivas

En este trabajo se estudiaron propiedades matemáticas y se realizaron simulaciones numéricas de la teoría ModMax de electromagnetismo no lineal. Esta teoría resulta significativa por ser la más general que preserva invariancia conforme e invariancia ante rotaciones duales. Ambas simetrías son satisfechas en el Electromagnetismo clásico de Maxwell, siendo éste un caso límite de la teoría ModMax.

En primer lugar, se estudió analíticamente el problema de valores iniciales correspondiente. Para ello, se hizo uso de un resultado sobre hiperbolicidad en teorías no lineales de electromagnetismo. A partir del mismo, en este trabajo se demostró que ModMax es una teoría simétrico hiperbólica. Esto significa que la misma admite un Problema de Cauchy localmente bien puesto; es decir que, para todo dato inicial suave (el cual debe satisfacer las ecuaciones de vínculo correspondientes), existe localmente una única solución a las correspondientes ecuaciones de evolución, la cual además depende continuamente del dato elegido. Esta propiedad resulta esencial para cualquier teoría física, dado que permite predecir de manera unívoca el estado o la dinámica del sistema de interés a partir de su condición inicial, garantizando así el poder de predictibilidad de la teoría.

En un segundo lugar, se analizó la validez de las Desigualdades de Bekestein en la teoría de ModMax. Estas desigualdades son relevantes dado que relacionan cantidades físicas y/o geométricas bien definidas (como la energía electromagnética, la carga y el momento angular), permitiendo así un mejor entendimiento de la dinámica del sistema. Si bien esta serie de desigualdades se cumple para la teoría de Maxwell, el estudio de su validez en teorías no lineales de electromagnetismo presenta algunas dificultades, siendo necesario incluso reformular algunas de ellas de manera consistente. En este trabajo se demostró analíticamente, para la teoría de ModMax, que:

- toda región acotada en el espacio, de tamaño \mathcal{R} y con momento angular \mathcal{J} (en el sentido electromagnético), debe tener una energía mínima dada por el cociente \mathcal{J}/\mathcal{R} ;
- toda región esférica de radio \mathcal{R} con carga eléctrica Q en su interior y vacío en el exterior, debe tener una energía electromagnética mínima que depende del cociente Q^2/\mathcal{R} ;

- toda región esférica de radio \mathcal{R} con carga eléctrica Q en su interior, vacío en el exterior, y con momento angular J (en el sentido electromagnético) admite una energía electromagnética mínima que depende de las contribuciones Q^2/\mathcal{R} y J/\mathcal{R} .

En tercer y último lugar, se implementaron numéricamente las ecuaciones de evolución de la teoría ModMax para un sistema sencillo con dependencia de los campos en una dimensión espacial. Como se mencionó anteriormente, la hiperbolicidad de ModMax asegura la unicidad de la solución (localmente en el tiempo), provistos datos iniciales suficientemente suaves. A tal fin, se desarrollaron dos códigos numéricos que implementan diferentes esquemas. El primero es un esquema estándar en el que las derivadas espaciales se reemplazan por operadores de diferencias finitas, mientras que la integración en el tiempo viene dada por el clásico método de Runge-Kutta de cuarto orden. Se observó que para valores suficientemente pequeños del parámetro γ de no-linealidad de la teoría, se logra la convergencia deseada tanto en espacio como en tiempo. Esto permite garantizar que el método responde según lo esperado, y calcular de manera precisa las cantidades que nos interesa estudiar. La simpleza de los sistemas numéricos estudiados se debe a que no se han encontrado en la literatura trabajos donde se realicen simulaciones numéricas de esta teoría, siendo entonces exploradas por primera vez en este.

Al ir aumentando el valor del parámetro γ , comenzaron a observarse inestabilidades y discontinuidades en las simulaciones, las cuales aparecían con mayor frecuencia y a tiempos cada vez más pequeños. Como consecuencia de esto, el orden de convergencia tanto en tiempo como en espacio dejó de ser aquel esperado, lo que invalida el uso del esquema numérico utilizado para regímenes altamente no lineales (es decir para γ suficientemente grande). Una pregunta que surge en esta instancia es si dichas discontinuidades son físicas o si son producto de inestabilidades proporcionadas por el método numérico. Esto puede entenderse al analizar el sistema de ecuaciones de evolución de cualquier teoría no lineal de electromagnetismo como un sistema de leyes de conservación. Es bien sabido que estos sistemas son propensos a la formación de choques, los cuales tienen un significado preciso tanto en matemática como en física. Por lo tanto, es de esperarse que, para valores suficientemente grandes del parámetro γ de la teoría ModMax, aparezcan discontinuidades a tiempos tempranos en la simulación. Esto motivó la implementación de un método numérico más apto, el cual fuera capaz de propagar discontinuidades en la evolución, optando así por el método WENOZ-5. Este último es de alto orden de precisión tanto en tiempo como en espacio, y nos permitió estudiar la propagación de choques en ModMax y la dinámica no lineal de la teoría para valores más grandes de γ , logrando el orden de convergencia esperado. Para ambos métodos, y en sus respec-

tivas regiones de validez, se logró comprobar la desigualdad (2.34) probada analíticamente. Sumado a esto, se estudiaron la energía y el momento angular en función del tiempo para diferentes γ . Por último, en la sección final, se pudo observar como el método WENO es capaz de tratar de forma efectiva con las discontinuidades, verificando además que la suavidad de los datos iniciales tiene un impacto importante en su formación.

Como perspectivas futuras, quedan algunos aspectos que sería interesante explorar. Uno de ellos es la desigualdad de la carga y la energía (2.33) que, si bien fue probada en simetría esférica, debería analizarse su validez en general. Por otra parte, las desigualdades geométricas consideradas en este trabajo dependen también de la medida de tamaño empleada, por lo que, en trabajos futuros, sería atractivo poder estudiarlas analíticamente considerando distintas medidas tamaño bien definidas en geometría riemanniana. En cuanto a las simulaciones numéricas, sería de interés generalizar esta implementación a full-3D, y emplear la teoría como materia en potenciales aplicaciones astrofísicas. Finalmente, se podría realizar un trabajo similar a este pero para otras teorías de electromagnetismo no lineal. En particular, fue propuesta recientemente una generalización de ModMax presentada en [41], la cual posee como casos límite no solo a ModMax, sino también a Born-Infeld. Esta generalización parece prometedora, dado que logra remover la singularidad del campo eléctrico de una carga puntual, una de las motivaciones más importantes por las cuales extensiones no lineales a la electrodinámica de Maxwell han cobrado relevancia en física teórica.

Apéndice A: aplicación al átomo hidrogenoide mediante teoría de perturbaciones

En este apéndice estudiamos una aplicación de la teoría ModMax a la Mecánica Cuántica. A partir de la utilización de teoría de perturbaciones independiente del tiempo, podemos analizar la corrección a primer orden en Ze^2 a la energía del estado fundamental del átomo hidrogenoide, siendo Z el número atómico y e la carga del electrón. Este tratamiento fue realizado anteriormente para la teoría de Born e Infeld en [47], logrando establecer una cota para el parámetro que la caracteriza. El Hamiltoniano del átomo hidrogenoide, sin tener en cuenta correcciones por estructura fina e hiperfina, será

$$\hat{H} = \hat{K} + \hat{V}, \quad (6.1)$$

donde

$$\hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad (6.2)$$

$$\hat{V} = -\frac{Ze^2}{4\pi r}e^{-\gamma}, \quad (6.3)$$

corresponden a los operadores energía cinética y potencial de Coulomb en la teoría de ModMax, difiriendo este último únicamente en un factor $e^{-\gamma}$ del de Maxwell. Para analizar el problema en el contexto de la teoría de perturbaciones es conveniente sumar y restar el potencial de Coulomb de Maxwell \hat{V}_M e identificar como nuestro Hamiltoniano no perturbado como aquel de Maxwell para el átomo hidrogenoide, tomando como perturbación la diferencia entre los potenciales de Coulomb de ModMax y Maxwell. Tendremos entonces

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \delta\hat{H}, \quad (6.4)$$

$$\hat{H}_0 = \hat{K} + \hat{V}_M, \quad (6.5)$$

$$\delta\hat{H} = \hat{V} - \hat{V}_M = -g(\gamma)\frac{Ze^2}{4\pi r}, \quad (6.6)$$

donde $g(\gamma) = e^{-\gamma} - 1$. Como hemos aprendido en los cursos de Mecánica Cuántica, para obtener la corrección a primer orden de la energía del estado fundamental, se debe calcular el valor de expectación de la perturbación respecto al estado fundamental del Hamiltoniano no perturbado, es decir, el estado fundamental del átomo hidrogenoide. Recordemos que las funciones de onda del átomo hidrogenoide dependen de los números cuánticos n , l y m , relacionados con la coordenada radial, el momento angular total y la

componente z de este último respectivamente. Dichas funciones son de la forma

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | nlm \rangle = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (6.7)$$

donde $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ son los armónicos esféricos y las funciones $R_{nl}(r)$ contienen la dependencia radial de la función de onda total y están dadas por

$$R_{nl}(r) = \left[\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]} \right]^{1/2} \left(\frac{2Z}{na_0} \right)^{l+3/2} r^l e^{-\frac{Zr}{na_0}} L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2Zr}{na_0} \right), \quad (6.8)$$

siendo $L_{n-l-1}^{2l+1}(\frac{2Zr}{na_0})$ las funciones asociadas de Laguerre y a_0 el radio de Bohr. En particular, para el estado fundamental se tiene

$$\psi_{100}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | 100 \rangle = \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \frac{e^{-\frac{Zr}{a_0}}}{\sqrt{\pi}} \quad (6.9)$$

La corrección a primer orden de la energía del estado fundamental $\delta E_0^{(1)}$ será

$$\delta E_0^{(1)} = \langle 100 | \delta \hat{H} | 100 \rangle = -g(\gamma) \frac{Ze^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi_{100}(\mathbf{r})|^2}{r} d^3r \quad (6.10)$$

Haciendo el cálculo explícito, se obtiene finalmente para el átomo de hidrógeno ($Z = 1$)

$$\delta E_0^{(1)} = -\frac{g(\gamma)}{a_0} \frac{e^2}{4\pi} \quad (6.11)$$

Experimentalmente, lo que se mide es la frecuencia. En el caso del átomo de hidrógeno, la frecuencia asociada a su estado fundamental esta dada por $\nu_0 = |E_0|/h$, donde h es la constante de Planck. Su valor experimental, expresado en megahercios (MHz), es [47]

$$\nu = \nu_0 \pm \sigma_\nu = (3288086856, 8 \pm 0, 7) MHz, \quad (6.12)$$

donde σ_ν es el error experimental asociado a la medición.

Finalmente, al imponer que la corrección calculada sea menor que la energía asociada al error experimental en la frecuencia medida, es decir, $h\sigma_\nu \geq |\delta E_0^{(1)}|$, se obtiene la desigualdad (la otra no arroja condiciones sobre γ)

$$\gamma \geq -\ln \left(1 + \frac{4\pi a_0}{e^2} h\sigma_\nu \right) \quad (6.13)$$

Sin embargo, la cantidad en el lado derecho es siempre menor a cero y, como consecuencia de la causalidad de la teoría, γ debe ser siempre mayor o igual a cero. Por lo tanto la desigualdad vale para todo los valores de γ que nos interesan y la corrección siempre entra en el rango de valores establecido por el error experimental.

Apéndice B: Cálculo explícito de $\mathbb{A}(\varphi)$

Podemos pensar a los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} de la forma

$$\mathbf{E} = \alpha_1 \mathbf{D} + \beta_1 \mathbf{B}, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{H} = \alpha_2 \mathbf{D} + \beta_2 \mathbf{B}, \quad (6.15)$$

donde α_1 , α_2 , β_1 y β_2 son funciones de los campos \mathbf{D} y \mathbf{B}

Ahora podemos reemplazar estas expresiones en las ecuaciones de evolución (4.10), obteniendo

$$\partial_t D_x = -\partial_z H_y, \quad (6.16)$$

$$\partial_t D_y = -\partial_z (\alpha_2 D_y + \beta_2 B_y), \quad (6.17)$$

$$\partial_t D_x = -(\partial_z \alpha_2 D_y + \alpha_2 \partial_z D_y + \partial_z \beta_2 B_y + \beta_2 \partial_z B_y) \quad (6.18)$$

Además, podemos escribir las derivadas de los coeficientes α_2 y β_2 como

$$\partial_z \alpha_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \varphi_i} \partial_z \varphi_i, \quad (6.19)$$

$$\partial_z \beta_2 = \frac{\partial \beta_2}{\partial \varphi_i} \partial_z \varphi_i \quad (6.20)$$

Expandiendo las sumas y agrupando términos llegamos a

$$\begin{aligned} \partial_t D_x &= - \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_x} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_x} B_y \right) \partial_z D_x \\ &\quad - \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_y} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_y} B_y + \alpha_2 \right) \partial_z D_y \\ &\quad - \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_x} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_x} B_y \right) \partial_z B_x \\ &\quad - \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_y} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_y} B_y + \beta_2 \right) \partial_z B_y \end{aligned}$$

Podemos hacer cuentas similares para el resto de componentes. Obtene-

mos así las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\partial_t D_y &= \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_x} D_x + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_x} B_x + \alpha_2 \right) \partial_z D_x \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_y} D_x + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_x} B_y \right) \partial_z D_y \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_x} D_x + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_x} B_x + \beta_2 \right) \partial_z B_x \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_y} D_x + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_y} B_x \right) \partial_z B_y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t B_x &= \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_x} D_y + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_x} B_y \right) \partial_z D_x \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_y} D_y + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_y} B_y + \alpha_1 \right) \partial_z D_y \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_x} D_y + \frac{\partial \beta_1}{\partial B_x} B_y \right) \partial_z B_x \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_y} D_y + \frac{\partial \beta_1}{\partial B_y} B_y + \beta_1 \right) \partial_z B_y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t B_y &= - \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_x} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_x} B_x + \alpha_1 \right) \partial_z D_x \\
&- \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_y} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_x} B_y \right) \partial_z D_y \\
&- \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_x} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial B_x} B_x + \beta_1 \right) \partial_z B_x \\
&- \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_y} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial B_y} B_x \right) \partial_z B_y
\end{aligned}$$

Ahora podemos escribir la matriz \mathbb{A} explícitamente, obteniendo

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_x} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_x} B_y & \frac{\partial \alpha_2}{\partial D_y} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_y} B_y + \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial B_x} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_x} B_y & \frac{\partial \alpha_2}{\partial B_y} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_y} B_y + \beta_2 \\
-\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_x} D_x - \frac{\partial \beta_2}{\partial D_x} B_x - \alpha_2 & -\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_y} D_x - \frac{\partial \beta_2}{\partial D_y} B_x & -\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_x} D_x - \frac{\partial \beta_2}{\partial B_x} B_x - \beta_2 & -\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_y} D_x - \frac{\partial \beta_2}{\partial B_y} B_x \\
-\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_x} D_y - \frac{\partial \beta_1}{\partial D_x} B_y & -\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_y} D_y - \frac{\partial \beta_1}{\partial D_y} B_y - \alpha_1 & -\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_x} D_y - \frac{\partial \beta_1}{\partial B_x} B_y & -\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_y} D_y - \frac{\partial \beta_1}{\partial B_y} B_y - \beta_1 \\
\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_x} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_x} B_x + \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial D_y} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_y} B_x & \frac{\partial \alpha_1}{\partial B_x} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial B_x} B_x + \beta_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial B_y} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial B_y} B_x
\end{bmatrix}$$

Nos queda entonces calcular los coeficientes y sus derivadas respecto a las componentes de los campos. Para hacer esto se hará uso del Hamiltoniano de ModMax, dado en (3.11), que puede ser escrito de la forma

$$\mathcal{H} = \cosh(\gamma)s - \sinh(\gamma)\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad (6.21)$$

donde

$$s = \frac{1}{2}(\mathbf{D}^2 + \mathbf{B}^2), \quad (6.22)$$

$$\xi = \frac{1}{2}(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2), \quad (6.23)$$

$$\eta = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \quad (6.24)$$

En el caso de vacío, recordando que las componentes z son cero, tenemos

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial D_x} \hat{x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial D_y} \hat{y}, \quad (6.25)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B_x} \hat{x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B_y} \hat{y} \quad (6.26)$$

Las dos ecuaciones anteriores pueden ser reescritas, mediante la regla de la cadena, de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial D_x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial D_x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial D_x} \right) \hat{x} \\ &+ \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial D_y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial D_y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial D_y} \right) \hat{y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial B_x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial B_x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial B_x} \right) \hat{x} \\ &+ \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial B_y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial B_y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial B_y} \right) \hat{y}, \end{aligned}$$

donde las derivadas de \mathcal{H} son

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = \cosh(\gamma), \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = \frac{-\sinh(\gamma)\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} = \frac{-\sinh(\gamma)\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad (6.29)$$

Remplazando, se llega a

$$\mathbf{E} = \left(\cosh(\gamma) - \frac{\sinh(\gamma)\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) \mathbf{D} + \left(\frac{-\sinh(\gamma)\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) \mathbf{B}, \quad (6.30)$$

$$\mathbf{H} = \left(\frac{-\sinh(\gamma)\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) \mathbf{D} + \left(\cosh(\gamma) + \frac{\sinh(\gamma)\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) \mathbf{B} \quad (6.31)$$

Recordando (6.14), podemos entonces reconocer

$$\alpha_1 = \cosh(\gamma) - \frac{\sinh(\gamma)(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)}{\sqrt{(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2}}, \quad (6.32)$$

$$\beta_1 = -\frac{2 \sinh(\gamma)(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})}{\sqrt{(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2}}, \quad (6.33)$$

$$\alpha_2 = -\frac{2 \sinh(\gamma)(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})}{\sqrt{(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2}}, \quad (6.34)$$

$$\beta_2 = \cosh(\gamma) + \frac{\sinh(\gamma)(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)}{\sqrt{(\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2}} \quad (6.35)$$

Finalmente podemos calcular sus derivadas respecto de las componentes de los campos. Notemos además que las derivadas de β_1 serán iguales a las derivadas de α_2 y que las derivadas de β_2 serán iguales a las de α_1 (a excepción de un signo). Las derivadas son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial D_x} &= \frac{4 \sinh(\gamma) ((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) B_x - 2(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2 D_x)}{((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial D_y} &= \frac{4 \sinh(\gamma) ((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) B_y - 2(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2 D_y)}{((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial B_x} &= \frac{4 \sinh(\gamma) ((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) D_x + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2 B_x)}{((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial B_y} &= \frac{4 \sinh(\gamma) ((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) D_y + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2 B_y)}{((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_1}{\partial D_x} &= \frac{2 \sinh(\gamma) \left(2 (\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) D_x - (\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 B_x \right)}{((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2)^{3/2}}, \\
\frac{\partial \beta_1}{\partial D_y} &= \frac{2 \sinh(\gamma) \left(2 (\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) D_z - (\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 B_z \right)}{((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2)^{3/2}}, \\
\frac{\partial \beta_1}{\partial B_x} &= \frac{-2 \sinh(\gamma) \left((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 D_x + 2 (\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) B_x \right)}{((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2)^{3/2}}, \\
\frac{\partial \beta_1}{\partial B_y} &= \frac{-2 \sinh(\gamma) \left((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 D_y + 2 (\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) B_y \right)}{((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2)^{3/2}}, \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_x} &= \frac{\partial \beta_1}{\partial D_x}, \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_y} &= \frac{\partial \beta_1}{\partial D_y}, \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_x} &= \frac{\partial \beta_1}{\partial B_x}, \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_y} &= \frac{\partial \beta_1}{\partial B_y}, \\
\frac{\partial \beta_2}{\partial D_x} &= -\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_x}, \\
\frac{\partial \beta_2}{\partial D_y} &= -\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_y}, \\
\frac{\partial \beta_2}{\partial B_x} &= -\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_x}, \\
\frac{\partial \beta_2}{\partial B_y} &= -\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_y}
\end{aligned}$$

Ahora, en el caso donde D_z tiene dependencia lineal con z y ρ es constante, de tal manera que $D_z(z) = z\rho$, y B_z es cero, las ecuaciones de evolución (4.1) para este caso presentaran cambios. Si bien tanto (6.14) como (6.32) siguen siendo válidas, podemos agregar estas dos nuevas componentes de la siguiente manera

$$\partial_z \alpha_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \varphi_i} \partial_z \varphi_i + \frac{\partial \alpha_2}{\partial D_z} \partial_z D_z + \frac{\partial \alpha_2}{\partial B_z} \partial_z B_z, \quad (6.36)$$

$$\partial_z \beta_2 = \frac{\partial \beta_2}{\partial \varphi_i} \partial_z \varphi_i + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_z} \partial_z D_z + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_z} \partial_z B_z, \quad (6.37)$$

de tal manera que

$$\begin{aligned}
\partial_t D_x &= - \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_x} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_x} B_y \right) \partial_z D_x \\
&- \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_y} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_y} B_y + \alpha_2 \right) \partial_z D_y \\
&- \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_x} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_x} B_y \right) \partial_z B_x \\
&- \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_y} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_y} B_y + \beta_2 \right) \partial_z B_y \\
&- \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_z} D_y + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_z} B_y \right) \rho,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t D_y &= \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_x} D_x + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_x} B_x + \alpha_2 \right) \partial_z D_x \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_y} D_x + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_x} B_y \right) \partial_z D_y \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_x} D_x + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_x} B_x + \beta_2 \right) \partial_z B_x \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial B_y} D_x + \frac{\partial \beta_2}{\partial B_y} B_x \right) \partial_z B_y \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_z} D_x + \frac{\partial \beta_2}{\partial D_z} B_x \right) \rho,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t B_x &= \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_x} D_y + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_x} B_y \right) \partial_z D_x \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_y} D_y + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_y} B_y + \alpha_1 \right) \partial_z D_y \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_x} D_y + \frac{\partial \beta_1}{\partial B_x} B_y \right) \partial_z B_x \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_y} D_y + \frac{\partial \beta_1}{\partial B_y} B_y + \beta_1 \right) \partial_z B_y \\
&+ \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_z} D_y + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_z} B_y \right) \rho,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t B_y &= - \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_x} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_x} B_x + \alpha_1 \right) \partial_z D_x \\
&- \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_y} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_x} B_y \right) \partial_z D_y \\
&- \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_x} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial B_x} B_x + \beta_1 \right) \partial_z B_x \\
&- \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial B_y} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial B_y} B_x \right) \partial_z B_y \\
&- \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_z} D_x + \frac{\partial \beta_1}{\partial D_z} B_x \right) \rho
\end{aligned}$$

Las derivadas de los coeficientes son similares a las del resto de componentes, debido a la simetría de los invariantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_z} &= \frac{4 \sinh(\gamma) \left((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) B_z - 2(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2 D_z \right)}{((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2)^{3/2}}, \\
\frac{\partial \beta_1}{\partial D_z} &= \frac{2 \sinh(\gamma) \left(2 (\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2) (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) D_z - (\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 B_z \right)}{((\mathbf{D}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B})^2)^{3/2}}, \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial D_z} &= \frac{\partial \beta_1}{\partial D_z}, \\
\frac{\partial \beta_2}{\partial D_z} &= -\frac{\partial \alpha_1}{\partial D_z}
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] F. Abalos, F. Carrasco, E. Goulart, and O. Reula. Nonlinear electrodynamics as a symmetric hyperbolic system. *Phys. Rev. D*, 92(8):084024, 2015.
- [2] M. Abishev, Y. Aimuratov, Y. Aldabergenov, N. Beissen, Z. Bakytzhan, and M. Takibayeva. Some astrophysical effects of nonlinear vacuum electrodynamics in the magnetosphere of a pulsar. *Astroparticle Physics*, 73:8–13, 2016.
- [3] M. Alcubierre, A. Corichi, J. A. Gonzalez, D. Nunez, B. Reimann, and M. Salgado. Generalized harmonic spatial coordinates and hyperbolic shift conditions. *Phys. Rev. D*, 72:124018, 2005.
- [4] A. D. Alhaidari. *Conformal Invariance in Quantum Field Theory*. PhD thesis, UCLA, 1987.
- [5] I. Bandos, K. Lechner, D. Sorokin, and P. K. Townsend. Nonlinear duality-invariant conformal extension of maxwell’s equations. *Phys. Rev. D*, 102:121703, Dec 2020.
- [6] J. Barrientos, A. Cisterna, D. Kubiznak, and J. Oliva. Accelerated black holes beyond Maxwell’s electrodynamics. *Phys. Lett. B*, 834:137447, 2022.
- [7] H. Bateman. The conformal transformations of a space of four dimensions and their applications to geometrical optics. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-7(1):70–89, 1909.
- [8] J. D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333–2346, Apr 1973.
- [9] J. D. Bekenstein. Universal upper bound on the entropy-to-energy ratio for bounded systems. *Phys. Rev. D*, 23:287–298, Jan 1981.
- [10] G. Boillat. Nonlinear electrodynamics: Lagrangians and equations of motion. *Journal of Mathematical Physics*, 11(3):941–951, 1970.
- [11] M. Born, L. Infeld, and R. H. Fowler. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 144(852):425–451, 1934.

- [12] N. Bretón. Nonlinear electrodynamics and cosmology. *Journal of Physics: Conference Series*, 229(1):012006, may 2010.
- [13] R. Burden, J. Faires, and A. Burden. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 2015.
- [14] G. Calabrese, I. Hinder, and S. Husa. Numerical stability for finite difference approximations of Einstein’s equations. *J. Comput. Phys.*, 218:607–634, 2006.
- [15] S. Chandrasekhar and S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1998.
- [16] M. E. G. Clement and J. L. Jaramillo. Black hole Area-Angular momentum-Charge inequality in dynamical non-vacuum spacetimes. *Phys. Rev. D*, 86:064021, 2012.
- [17] M. E. G. Clement, J. L. Jaramillo, and M. Reiris. Proof of the area-angular momentum-charge inequality for axisymmetric black holes. *Class. Quant. Grav.*, 30:065017, 2013.
- [18] M. E. G. Clement, M. Reiris, and W. Simon. The area-angular momentum inequality for black holes in cosmological spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 32(14):145006, 2015.
- [19] E. Cunningham. The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-8(1):77–98, 1910.
- [20] S. Dain. Geometric inequalities for axially symmetric black holes. *Class. Quant. Grav.*, 29:073001, 2012.
- [21] S. Dain. Geometric inequalities for black holes. *Gen. Rel. Grav.*, 46:1715, 2014.
- [22] S. Dain. Inequality between size and angular momentum for bodies. *Phys. Rev. Lett.*, 112:041101, Jan 2014.
- [23] S. Dain. Inequality between size and angular momentum for bodies. *Phys. Rev. Lett.*, 112:041101, Jan 2014.
- [24] S. Dain. Bekenstein bounds and inequalities between size, charge, angular momentum, and energy for bodies. *Phys. Rev. D*, 92:044033, Aug 2015.
- [25] S. Dain and M. E. Gabach-Clement. Geometrical inequalities bounding angular momentum... *Living Rev. Rel.*, 21(1):5, 2018.

- [26] A. Dehghani, M. R. Setare, and S. Zarepour. Self-energy problem, vacuum polarization, and dual symmetry in Born–Infeld-type U(1) gauge theories. *Eur. Phys. J. Plus*, 137(7):859, 2022. [Erratum: *Eur.Phys.J.Plus* 137, 1090 (2022)].
- [27] C. Ferko, L. Smith, and G. Tartaglino-Mazzucchelli. Stress Tensor Flows, Birefringence in Non-Linear Electrodynamics, and Supersymmetry. 1 2023.
- [28] R. P. Geroch. Partial differential equations of physics. In *46th Scottish Universities Summer School in Physics: General Relativity*, 2 1996.
- [29] G. W. Gibbons and C. A. R. Herdeiro. Born-infeld theory and stringy causality. *Phys. Rev. D*, 63:064006, Feb 2001.
- [30] B. Gustafsson, H. Kreiss, and J. Olinger. *Time Dependent Problems and Difference Methods*. A Wiley-Interscience Publication. Wiley, 1995.
- [31] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivés partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, 13:49–52, 1902.
- [32] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. R. Chakravarthy. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, iii. *Journal of Computational Physics*, 71(2):231–303, 1987.
- [33] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43(3):199 – 220, 1975.
- [34] W. Heisenberg and H. Euler. Consequences of Dirac Theory of the Positron. *arXiv e-prints*, page physics/0605038, May 2006.
- [35] N. Javerzat and M. Bouzid. Evidences of conformal invariance in 2d rigidity percolation. *arXiv e-prints*, page arXiv:2210.06271, Oct. 2022.
- [36] G.-S. Jiang and C.-W. Shu. Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journal of Computational Physics*, 126(1):202–228, 1996.
- [37] A. i. e. i. f. C. Keser, Y. Lyanda-Geller, and O. P. Sushkov. Nonlinear quantum electrodynamics in dirac materials. *Phys. Rev. Lett.*, 128:066402, Feb 2022.
- [38] H. Kreiss and O. Ortiz. *Introduction to Numerical Methods for Time Dependent Differential Equations*. Wiley, 2014.
- [39] H.-O. Kreiss, O. E. Ortiz, and O. A. Reula. Stability of Quasi-linear Hyperbolic Dissipative Systems. *Journal of Differential Equations*, 142(1):78–96, Jan. 1998.

- [40] S. Kruglov. Inflation of universe by nonlinear electrodynamics. *International Journal of Modern Physics D*, 29:2050102, 10 2020.
- [41] S. Kruglov. On generalized modmax model of nonlinear electrodynamics. *Physics Letters B*, 822:136633, 2021.
- [42] S. I. Kruglov. Magnetic black holes with generalized ModMax model of nonlinear electrodynamics. *International Journal of Modern Physics D*, 31(4):2250025, Jan. 2022.
- [43] L. Landau. The Classical Theory of Fields. 2003. [Textbook Publishers].
- [44] R. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics ETH Zürich, Department of Mathematics Research Institute of Mathematics. Springer Basel AG, 1992.
- [45] X.-D. Liu, S. Osher, and T. Chan. Weighted essentially non-oscillatory schemes. *Journal of Computational Physics*, 115(1):200–212, 1994.
- [46] S. Mikhailov. Nonlinear Electrodynamical Properties of Graphene and Other Two-Dimensional Materials. *arXiv e-prints*, page arXiv:1810.00831, Oct. 2018.
- [47] P. Niau Akmansoy and L. G. Medeiros. Constraining Born–Infeld-like nonlinear electrodynamics using hydrogen’s ionization energy. *Eur. Phys. J. C*, 78(2):143, 2018.
- [48] G.ö.m@. On the Energy of the Gravitation field in Einstein’s Theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, 20:1238–1245, Jan. 1918.
- [49] R. C. Pantig, L. Mastrototaro, G. Lambiase, and A. Övgün. Shadow, lensing, quasinormal modes, greybody bounds and neutrino propagation by dyonic ModMax black holes. *Eur. Phys. J. C*, 82(12):1155, 2022.
- [50] M. L. Peñafiel and F. T. Falciano. Bekenstein inequalities and nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 96:125011, Dec 2017.
- [51] M. L. Peñafiel and F. T. Falciano. Erratum: Bekenstein inequalities and nonlinear electrodynamics [phys. rev. d 96, 125011 (2017)]. *Phys. Rev. D*, 98:049902, Aug 2018.
- [52] M. Przanowski. Mystery of the duality rotation. In *International Conference on Aspects of General Relativity and Mathematical Physics*, pages 123–146, 1993.

- [53] M. Przanowski and A. Maciol/ek-Niedźwiecki. Duality rotation as a lie-bäcklund transformation. *Journal of Mathematical Physics*, 33(12):3978–3982, 1992.
- [54] G. Y. Rainich. Electrodynamics in the general relativity theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 27(1):106–136, 1925.
- [55] H. Reissner. Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einsteinschen theorie. *Annalen der Physik*, 355(9):106–120, 1916.
- [56] O. A. Reula and M. E. Rubio. Ill posedness of force-free electrodynamics in euler potentials. *Phys. Rev. D*, 95:064005, Mar 2017.
- [57] P. Sarkar and P. K. Das. Emergent cosmology in models of nonlinear electrodynamics. *New Astron.*, 101:102003, 2023.
- [58] K. G. Savvidy. Born-Infeld action in string theory. Other thesis, 6 1999.
- [59] A. Stern and A. Pinzul. Noncommutative AdS_2 II: The Correspondence Principle. 11 2022.
- [60] M. Tiglio, L. Lehner, and D. Neilsen. 3-D simulations of Einstein’s equations: Symmetric hyperbolicity, live gauges and dynamic control of the constraints. *Phys. Rev. D*, 70:104018, 2004.