

Métricas del espaciotiempo representando masa, estimada dinámicamente, y materia oscura

Federico Alejandro Geser

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física
de la
Universidad Nacional de Córdoba
como uno de los requisitos para obtener el grado
Licenciatura en Física
Director: Dr. Osvaldo Moreschi

Marzo 2013

Resumen

En este trabajo especial, presentamos una solución exacta de las ecuaciones de la relatividad general que ajusta correctamente datos observacionales del cúmulo de Coma, correspondientes a estimaciones dinámicas de la materia contenida en el mismo, y observaciones del shear (deformación óptica) producido por efecto de lente gravitacional débil. Hemos demostrado también que es posible mediante esta solución, satisfacer las condiciones de energía usuales.

Palabras Clave: relatividad general, lentes gravitacionales, materia oscura.

Clasificación:

04.20.-q, Classical general relativity

04.20.Jb, Exact solutions

98.62.Sb, Gravitational lenses and luminous arcs

95.35.+d, Dark matter (stellar, interstellar, galactic, and cosmological)

Agradecimientos:

A mi vieja, única compañía inquebrantable en todos estos años.

A mi viejo, que estuvo siempre presente a pesar de la distancia.

A mi hermano, que a pesar de la distancia temporal que nos separa, siempre supo entenderme y apoyarme.

A mi director, por la paciencia y las horas dedicadas en su oficina para lograr armar este trabajo.

Y en general a todos los que, durante la carrera, me apoyaron y acompañaron en algún sentido.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Introducción al trabajo	3
2. Marco teórico y antecedentes	5
2.1. Preliminares sobre relatividad general	5
2.2. Geometría del espaciotiempo esféricamente simétrico	6
2.3. Tensor energía-momento y condiciones de energía	7
2.4. Ecuaciones de campo	8
2.5. Lentes gravitacionales	8
2.5.1. Introducción a las lentes gravitacionales débiles	8
2.5.2. Escalares ópticos	11
2.5.3. Notación usada en el estudio de lentes gravitacionales	12
2.6. Solución previa sin contenido de materia	12
3. Distribución isotérmica de masa	15
3.1. Introducción al modelo isotérmico	15
3.2. Cálculo geométrico del modelo isotérmico	16
3.3. Modelando el cúmulo de Coma con densidad isotérmica de masa	18
3.3.1. Ajustando con los datos observacionales	18
3.3.2. Comparación con la componente estimada dinámicamente de la presión	22
3.3.3. Propiedades de la solución respecto de las condiciones de energía	24
4. Comentarios finales y conclusiones	27
4.1. Modelo Navarro-Frenk-White para la función masa	27
4.1.1. Introducción al modelo	27
4.1.2. Cálculo geométrico del modelo NFW	27
4.1.3. Ajuste el modelo NFW utilizando datos del cúmulo de Coma	28
4.2. Conclusiones y resultados de este trabajo	29
4.3. Expectativas a futuro	29

Índice de figuras

2.1. Definición de distancia angular	9
2.2. Esquema de la situación de lente gravitacional	10
3.1. Estimación del contenido de materia del cúmulo de Coma según [1].	19
3.2. Distribución de masa isotérmica para el cúmulo de Coma	20
3.3. Nuevo ajuste para describir las observaciones de lentes gravitacionales (shear) del cúmulo de Coma, compatibles con los estudios dinámicos de galaxias en el mismo.	20
3.4. Factor de la componente temporal de la métrica que ajustamos.	21
3.5. Densidad de masa-energía y componentes tangencial y radial del tensor de energía-momento para el cúmulo de Coma, ajustadas para el modelo isotérmico de masa.	22
3.6. Galaxias del cúmulo de Coma según su velocidad heliocéntrica [2].	23
3.7. Presión estimada dinámicamente y componente tangencial geométrica	23
3.8. Reajuste para describir las observaciones de lentes gravitacionales (shear) del cúmulo de Coma, compatibles con los estudios dinámicos de galaxias en el mismo, y con intención de forzar la geometría a satisfacer la condición de energía dominante. La curva de color amarillo representa el nuevo ajuste.	25
3.9. Densidad de energía-materia y componente radial del tensor de energía-momento satisfaciendo la condición de energía dominante.	26
4.1. Estimación del contenido de materia del cúmulo de Coma según [1] y ajuste con modelo NFW.	28

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción al trabajo

Un tema de gran interés en astrofísica es el estudio de las grandes distribuciones de masa en el Universo. Cuando se realizan estos estudios, se detectan una serie de manifestaciones que indicarían la existencia de materia extra a la que se observa por medio de la luz visible. Esta problemática da origen al llamado fenómeno de la materia oscura.

Una peculiaridad que tienen los sistemas que presentan fenomenología asociada a materia oscura, es que cuando se estudia alguno de ellos por distintos métodos, no existe concordancia en la estimación de la cantidad materia. Este aspecto no ha recibido mucha atención dentro de la comunidad de astrofísicos, interpretándose usualmente que dicha discordancia es debida a problema de errores sistemáticos. Aquí presentaremos una visión distinta a dicha problemática con una nueva solución a la misma.

En este trabajo vamos a proponer componentes para un tensor energía-momento que respete ciertos comportamientos observables del cúmulo de Coma, tratando de ajustar los datos obtenidos por técnicas de lente débil (weak lensing), y que a su vez representen el contenido de materia estimada dinámicamente que genera dicha geometría. Para esto utilizaremos un modelo de distribución de materia muy usado que es el llamado modelo isotérmico. Además, necesitaremos herramientas como la teoría de lentes gravitacionales, a la cual haremos una introducción a continuación.

Los tensores de energía-momento que encontremos serán contrastados con los criterios usuales, en el sentido de condiciones de energía, y comparación con otros resultados ya conocidos dentro del tema.

En forma sintética, queremos encontrar soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein que representen materia estimada dinámicamente y que ajusten la geometría determinada por objetos como el cúmulo de Coma, tomando como referencia los datos obtenidos utilizando técnicas de la teoría de lente débil.

Capítulo 2

Marco teórico y antecedentes

Aquí trataremos brevemente los estudios previos requeridos para el entendimiento de la hipótesis propuesta. Los conocimientos teóricos previos son importantes para el desarrollo de las posteriores cuentas y aproximaciones que haremos para tratar los modelos de interés.

2.1. Preliminares sobre relatividad general

Luego del éxito de la teoría de la relatividad especial como marco teórico que incluye la teoría electromagnética, y que explica los fenómenos que ocurren cuando los cuerpos se mueven a velocidades cercanas a las de la luz, Einstein se dio cuenta de que debería ser posible reformular las leyes de la física en el marco de la nueva estructura del espaciotiempo que surge de la relatividad especial. Su intento principal fue tratar de reformular la ley de la gravedad newtoniana, para lo cual se motivó por dos principios ya conocidos en la época[3]:

- *Principio de equivalencia:* Muy sucintamente, el principio dice que no es posible por observaciones locales, distinguir entre los efectos de un campo gravitatorio, con los efectos que uno vería en un sistema. En particular, esto implica que todos los cuerpos son influenciados por la gravedad. Es más, todos caen de la misma manera en un campo gravitacional. Esto lleva a pensar que dicho movimiento es independiente de la naturaleza del cuerpo, con lo que cuerpos en caída libre definen un conjunto preferencial de curvas en el espaciotiempo. Estas son las geodésicas.

Además, Einstein fue influenciado por el Principio de Mach, que afirma que a diferencia de lo que sucede en relatividad especial o en física pre-relativista, se acepta la idea de que todo el contenido de materia del universo afecta a la definición local de “no acelerado” o “no rotante”. De esta forma propuso su nueva teoría de la gravedad, en la cual todas las propiedades independientes del observador, e intrínsecas del espaciotiempo son descritas por una métrica no necesariamente plana como en relatividad especial. Justamente, la curvatura de la métrica toma en cuenta los efectos físicos gravitacionales, y esta curvatura viene dada por el contenido de materia del espaciotiempo, i.e. esta relacionada con el tensor de energía-momento. El marco más simple de la relatividad general puede escribirse de la siguiente forma:

El espaciotiempo es una variedad M sobre la que se define una métrica lorentziana g_{ab} que no es plana como asumida en relatividad especial. Las líneas mundo de cuerpos pequeños en caída libre son simplemente las geodésicas de dicha métrica.

En lo que sigue, haremos uso de la notación de índice abstracto, a menos que se explicita que no lo haremos.

Si además tomamos en cuenta la noción básica de covarianza que dice que con el tensor métrico g_{ab} y cantidades derivables de él, podemos escribir las ecuaciones de la física, tomando

en cuenta además los campos tensoriales que describan la distribución de materia. En particular, la ecuación que presenta Einstein, como ecuación de campo de la relatividad general, es la siguiente:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = -8\pi T_{ab} , \quad (2.1)$$

en donde:

- R_{ab} es el tensor de Ricci.
- R es el escalar de Ricci.
- g_{ab} es el tensor métrico.
- T_{ab} es el tensor energía-momento.
- G_{ab} es el tensor de Einstein.

Dicha ecuación relaciona la curvatura de la métrica con el contenido de materia, es de segundo orden y altamente no lineal en g_{ab} . Por otro lado, g_{ab} no puede calcularse de la ecuación dando T_{ab} pues no sabemos como darle sentido físico a este último si no conocemos g_{ab} , y es aquí donde radica la mayor dificultad de resolver las ecuaciones de Einstein como las conocemos.

2.2. Geometría del espaciotiempo esféricamente simétrico

En relatividad general, las simetrías vienen dadas por los llamados vectores de Killing ξ , que satisfacen que

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0 , \quad (2.2)$$

i.e. la derivada de Lie de la métrica en la dirección del Killing es nula. Decimos entonces que un espaciotiempo es estacionario si tiene un vector de Killing temporal. Si este vector es ortogonal a hipersuperficies, decimos que el espaciotiempo es estático. Por otro lado, si la métrica es invariante ante rotaciones, i.e. tiene un subgrupo de su grupo de isometrías (transformaciones que dejan invariante la métrica) que es isomorfo a $SO(3)$, decimos que el espaciotiempo es esféricamente simétrico.

Sabemos que el elemento de línea más general de un espaciotiempo esféricamente simétrico y estático está dado de la forma:

$$ds^2 = a(r)dt^2 - b(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) ; \quad (2.3)$$

expresión de la cual podemos leer las componentes de la métrica con la que vamos a trabajar. Conviene definir

$$b(r) = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)} . \quad (2.4)$$

Las ecuaciones que satisfacen las componentes de esta métrica son las conocidas ecuaciones de Einstein (2.1). Resolver dichas ecuaciones para encontrar las componentes libres que aparecen, es más complicado de lo que parece; como señalamos antes, sin embargo en ocasiones, como la presencia de simetría que estamos considerando, se puede proponer una forma funcional del tensor de energía-momento y de la métrica y resolver simultáneamente. Más específicamente, en nuestro caso, intentaremos encontrar las componentes del tensor de energía-momento T_{ab} que pueda describir los efectos de lente débil y la distribución de materia observada.

2.3. Tensor energía-momento y condiciones de energía

En relatividad general la descripción más completa de la materia es por medio del llamando tensor de energía-momento, siendo un caso particular el que la materia consista de un fluido perfecto. Considerando un conjunto de observadores seleccionados, con este objeto, podemos obtener toda la información que deseemos del fluido que estemos tratando, como por ejemplo la densidad de energía, o densidad de masa por unidad de volumen, la densidad de 4-momento en una dada dirección, el stress del fluido, etc. Sea u^a el vector temporal unitario que representa la 4-velocidad del fluido perfecto; luego su tensor energía-momento se expresa por:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(u_a u_b - g_{ab}) , \quad (2.5)$$

siendo P la presión del fluido de ρ su densidad de masa-energía.

Nosotros usaremos un tensor de energía-momento mas general, tomando en cuenta que los campos, que en el caso perfecto se asocian a la presión del fluido, no sean isotrópicos. Utilizaremos las componentes del tensor métrico esféricamente simétrico, de forma que:

$$T_{tt} = \rho g_{tt} \quad (2.6)$$

$$T_{rr} = -P_r g_{rr} \quad (2.7)$$

$$T_{\theta\theta} = -P_t g_{\theta\theta} \quad (2.8)$$

$$T_{\phi\phi} = -P_t g_{\phi\phi} , \quad (2.9)$$

en donde P_r y P_t toman en cuenta la anisotropía mencionada anteriormente y ρ es la densidad de energía.

Consideremos un observador con cuadrivelocidad v^a . Luego, $T_{ab}v^a v^b$ es la densidad de energía que mide ese observador. La condición débil de energía (*weak energy condition*) es la condición $T_{ab}v^a v^b \geq 0$ para todo v^a .

Reescribiendo las ecuaciones de Einstein de la forma

$$R_{ab} = -8\pi \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) , \quad (2.10)$$

con $T = T_{ab}g^{ab}$, podemos contraer:

$$R_{ab} v^a v^b = -8\pi \left(T_{ab} v^a v^b - \frac{1}{2} T \right) . \quad (2.11)$$

La condición fuerte de energía (*strong energy condition*) es casualmente pedir que el lado izquierdo de esta ecuación sea negativo. Pedimos en este caso que $T_{ab}v^a v^b \geq \frac{1}{2}T$ para todo v^a .

Se suele utilizar una tercer condición de energía que expresa que, si tenemos un vector que da la orientación futura en nuestra variedad, para todo vector v^a temporal y futuro, la contracción $T^a_b v^b$ que representa la 4-densidad de corriente de momento, debe ser un vector temporal futuro, o ser nulo, lo que equivale a decir que el flujo de energía tiene velocidad igual o menor que la de la luz. Esta es la condición dominante de energía (*dominant energy condition*).

Para el caso del tensor T_{ab} que usaremos, las condiciones de energía se escriben de la forma:

- Condición de energía debil: $\rho \geq 0$ y $\rho + p_i \geq 0$, $i = r, t$.
- Condición de energía fuerte: $\rho + P_r + 2P_t \geq 0$ y $\rho + p_i \geq 0$, $i = r, t$.
- Condición de energía dominante: $\rho \geq |p_i|$, $i = r, t$.

2.4. Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo generales para el caso de una geometría esféricamente simétrica, pueden escribirse de una forma compacta proponiendo que la componente $a(r)$ de (2.3) sea de la forma:

$$a(r) = e^{2\Phi(r)}. \quad (2.12)$$

Así, nuestro tensor de energía-momento toma la forma:

$$T_{tt} = \rho e^{2\Phi(r)} \quad (2.13)$$

$$T_{rr} = \frac{P_r}{\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)} \quad (2.14)$$

$$T_{\theta\theta} = P_t r^2 \quad (2.15)$$

$$T_{\phi\phi} = P_t r^2 \sin^2(\theta). \quad (2.16)$$

Mirando la ecuación (2.1), podemos inferir que, para la componente $[t, t]$,

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (2.17)$$

Si ahora definimos $m_g(r)$ de la forma

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} \equiv \frac{m_g(r)}{r^2}, \quad (2.18)$$

de la componente $[r, r]$ tenemos que:

$$m_g(r) = \frac{m(r) - 4\pi r^3 P_r(r)}{1 + \frac{2m(r)}{r^2}}. \quad (2.19)$$

Finalmente la ecuación para $[\theta, \theta]$ y para $[\phi, \phi]$ es la misma, y esta dada por:

$$\left(r \frac{dm_g}{dr} - 2m_g\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) + r^2 \frac{m_g}{r^2} \left(1 - \frac{m}{r} - 4\pi r^2 \rho\right) + r^3 \left(\frac{m_g}{r^2}\right)^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) - 4\pi r^3 \rho + m = 8\pi r^3 P_t. \quad (2.20)$$

Estas ecuaciones son generales para el caso esféricamente simétrico con un tensor de energía-momento del tipo que vamos a utilizar. Se pueden reemplazar las derivadas de $\Phi(r)$ por las de $a(r)$ mediante la sustitución adecuada, para obtener el equivalente a las ecuaciones de campo que vamos a utilizar para trabajar.

2.5. Lentes gravitacionales

2.5.1. Introducción a las lentes gravitacionales débiles

Una de las consecuencias de la teoría de la relatividad general de Einstein, es que los rayos de luz cambian su trayectoria en presencia de gravedad. Una de las pruebas realizadas a la teoría fue en 1919, cuando se midió la desviación angular aparente de las estrellas cerca del sol durante un eclipse solar total (Dyson, Eddington y Davidson 1920). Incluso Eddington notó que bajo ciertas condiciones, puede haber múltiples rayos de luz conectando una fuente con un observador. Finalmente fue Zwicky [4] el que llevo la teoría de lentes gravitacionales de

una simple curiosidad a un campo con gran potencial cuando apuntó que las galaxias pueden dividir imágenes de fuentes de fondo un ángulo suficientemente grande como para ser observado. Es así que hoy en día, las determinaciones más precisas de la masa de las regiones centrales de las galaxias se deben a mediciones de los efectos de lente gravitacional. Las aplicaciones de la teoría pueden clasificarse a grandes rasgos en tres grupos:

- El efecto de magnificación nos permite observar objetos que están muy lejos como para ser observados sin la lente, i.e. los objetos que consideramos “lentes” nos sirven de “telescopios cósmicos”.
- El efecto de lente depende únicamente de la distribución de masa de la lente, pero proyectada en dos dimensiones, y es independiente de la luminosidad o composición de la misma. Esto provee de una herramienta ideal para detectar y estudiar la materia oscura, y explorar el tamaño y estructura de condensaciones de masa en el universo.
- Muchas propiedades de sistemas de lentes individuales dependen de la edad y escala del universo en su totalidad. La constante de Hubble, la constante cosmológica, y el parámetro de densidad del universo pueden determinarse a través del efecto de lente.

Ver [5] para más información sobre el desarrollo histórico de la teoría de lentes gravitacionales.

Antes de introducir la teoría de lentes, vamos a definir las distancias angulares. Dado que el efecto de lente ocurre generalmente en un universo en expansión, que puede tener curvatura espacial, requerimos una definición para que nuestras expresiones se mantengan válidas. Vamos entonces a definir distancias inferidas de los ángulos y de las distancias transversales que tenemos. Si R es el tamaño propio de un objeto, y θ es el ángulo diametral observado, definimos la distancia angular como: $d_A = \frac{R}{\theta}$

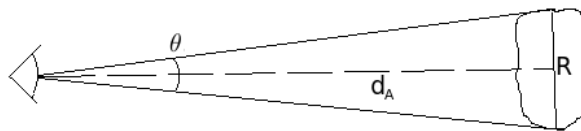


Figura 2.1: Definición de distancia angular

Relación válida evidentemente si $\theta \approx 0$, i.e. si d_A es grande comparado con R .

Veamos entonces una descripción más general de la situación de lente gravitacional [5], esquematizada en el siguiente gráfico:

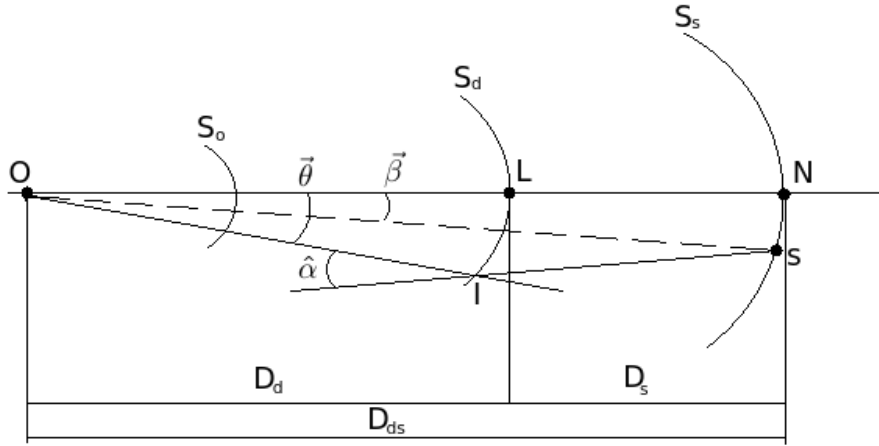


Figura 2.2: Esquema de la situación de lente gravitacional

en donde:

- S_s : esfera fuente de radio D_s (source sphere).
- S_d : esfera deflectora de radio D_d (deflector sphere).
- S_o : esfera observador (observer sphere).

Aquí S_o cumple el rol de “cielo” aparente, región que es capaz de ver el observador. Es según esta esfera que la fuente tiene posición angular $\vec{\beta}$ siempre y cuando no esté afectada por el campo gravitacional de la lente o deflector. Como en general hay desviación, la línea punteada \overline{OS} es simplemente la distancia física del observador a la fuente. Luego tenemos el camino real seguido por el rayo, cuyas asíntotas forman la línea \overline{OIS} . El ángulo entre ellas, i.e. $\hat{\alpha}$ es el ángulo de deflexión, y es causado por la distribución de materia L. Esto produce que en S_o la imagen de la fuente esté en realidad en la posición $\vec{\theta}$. Para todas las lentes que se tratan con teoría de lente débil, este ángulo de deflexión es pequeño, con lo que es válido aproximar estas esferas por sus planos tangentes. La separación entre el llamado eje óptico (línea \overline{ON}) y el camino real del rayo se designa con el vector $\vec{\xi}$, llamado también parámetro de impacto. Todos estos vectores que designan ángulos que hemos presentado, son de dos dimensiones, estando $\vec{\xi}$ en el plano de la lente y los otros en el plano tangente a S_o .

Dado que estamos trabajando en la aproximación de gravedad débil, tenemos como siempre un background que es plano, i.e. Minkowski. Los tamaños característicos están dados en este fondo espacial estático por lo que dada la definición de distancia angular que dimos, no necesariamente $D_s = D_{ds} + D_d$.

Ahora, incluso en la deflexión producida por un objeto esféricamente simétrico, el campo gravitacional está distorsionado, ya sea porque el objeto forma parte de una galaxia que le provee de campo gravitacional tidal, o porque hay otras galaxias cercanas a la línea de visión. En general, otras lentes distintas a la lente de Schwarzschild, cuyo ángulo de deflexión es el de Einstein,

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM D_{ds}}{D_d D_s}}, \quad (2.21)$$

u otras lentes esféricamente simétricas, y que proveen una imagen anular de la fuente, no tienen esta última propiedad. Esta expresión para el ángulo de Einstein se deduce de la ecuación de lente

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\alpha}(\vec{\xi}). \quad (2.22)$$

Esta última nos dice que, dados $\vec{\beta}$ y la distribución de materia del deflector, tenemos más de una solución $\vec{\xi}$, i.e. la misma fuente tiene varias imágenes en el cielo. Interpretada de otra manera, si tenemos la posición de la imagen $\vec{\theta}$ y es conocida la ley de deflexión $\hat{\alpha}(\vec{\xi})$, podemos conocer la posición original de la fuente $\vec{\beta}$. La forma de conocer esta ley de deflexión es la siguiente: para la lente de Schwarzschild, que representa una masa puntual M , uno encuentra que el ángulo de deflexión es:

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4MG}{\xi} \vec{\xi}. \quad (2.23)$$

Pensamos entonces en un conjunto de masas puntuales M_i cuyos parámetros de impacto son $\vec{\xi} - \vec{\xi}_i$ donde $\vec{\xi}_i$ es la posición de cada masa en el plano de la lente. Proponemos entonces que el ángulo de deflexión es en este caso:

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \sum_i 4M_i G \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_i}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_i|^2}. \quad (2.24)$$

Pasar a la distribución continua es como siempre, cambio M_i por $dM = \Sigma(\vec{\xi})d^2\xi$ donde $d^2\xi$ es el elemento de superficie en el plano de la lente y $\Sigma(\vec{\xi})$ la densidad de masa superficial en el mismo plano en la posición $\vec{\xi}$ que resulta de la densidad volumétrica proyectada al plano de la lente. Con todo esto, podemos expresar [5]:

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = 4G \int_{\mathcal{R}^2} d^2\xi' \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}, \quad (2.25)$$

donde integramos en todo el plano de la lente, asumiendo que $\Sigma(\vec{\xi})$ tendrá soporte compacto. Tengamos en cuenta las condiciones de validez de esta última ecuación:

- Campo gravitacional débil, i.e. ángulo de deflexión pequeño.
- Distribución de materia con $|\vec{v}| \ll 1$ i.e. casi estacionaria.
- No estudiar trayectorias en las vecindades de agujeros negros.

Recientemente, se realizó un trabajo [6] en el cual se encuentra que el ángulo de deflexión (2.25) en términos de las componentes del tensor de energía-momento para una distribución estacionaria, esféricamente simétrica y anisotrópica queda:

$$\alpha(\xi) = \xi \int_{-d_i}^{d_{is}} \left[\frac{3\xi^2}{r^2} \left(\frac{M(r)}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \rho(r) \right) + 4\pi (\rho(r) + P_r(r)) \right] dy, \quad (2.26)$$

con $r = \sqrt{\xi^2 + y^2}$ y donde ξ es el parámetro de impacto del rayo. Se ve claramente la dependencia con la componente radial P_r del tensor de energía-momento. Es por esta razón que estudiamos soluciones exactas de las ecuaciones de campo incluyendo estas componentes espaciales en el tensor de energía-momento.

2.5.2. Escalares ópticos

Los escalares ópticos, no son más que los números que describen la dinámica de una congruencia de geodésicas nulas (e.g. trayectorias de fotones). Podemos ver en [3] que, si ξ^a es tangente a las geodésicas nulas, y l^a un vector satisface que $l^a l_a = 0$, $\xi^a l_a = 1$, podemos definir el proyector

$$P_{ab} = g_{ab} + \xi_a l_b + l_a \xi_b, \quad (2.27)$$

de forma que si $B_{ab} = \nabla_b \xi_a$, se puede descomponer:

$$B_{ab} = W_{ab} + \sigma_{ab} + \theta P_{ab} , \quad (2.28)$$

siendo

$$W_{ab} = B_{[ab]} \quad (2.29)$$

la torsión o twist,

$$\theta = \frac{1}{2} B_{cd} P^{cd} \quad (2.30)$$

la expansión o Convergencia, y

$$\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \theta P_{ab} \quad (2.31)$$

el shear.

La torsión generalmente no nos interesa pues es nula si ξ^a es ortogonal a hipersuperficies (satisface el teorema de Frobenius). Si la congruencia de geodésicas nulas se asocia a las trayectorias de los fotones como dijimos, cada una de estas cantidades tiene un significado físico preciso, como la distorsión de las mismas (lo que provoca distorsión de la imagen en el caso de lente gravitacional), etc. Para cada distribución de materia, podemos calcular estos escalares y determinar los cambios producidos por el campo gravitacional en la imagen de algún objeto.

2.5.3. Notación usada en el estudio de lentes gravitacionales

Dado que la ecuación de lente (2.22) se refiere a vectores de dos dimensiones, podemos entonces reescribirla utilizando la notación de índice abstracto [6], de forma que queda:

$$\beta^a = \theta^a - \frac{D_{ds}}{D_s} \alpha^a(\vec{\theta}) . \quad (2.32)$$

Podemos entonces diferenciar dicha ecuación para obtener:

$$\delta \beta^a = A^a_b \delta \theta^b . \quad (2.33)$$

Tenemos entonces la matriz jacobiana A, que puede escribirse en términos de los llamados escalares ópticos, i.e. la convergencia κ y las componentes del shear γ_1, γ_2 de la forma:

$$A^a_b = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} , \quad (2.34)$$

y contiene información sobre la distorsión y el brillo de la imagen. Aquí puede verse bien como es que estos escalares ópticos nos hablan de la distorsión de la imagen, pues está explícita la relación entre imagen sin distorsión ($\vec{\beta}$) e imagen distorsionada ($\vec{\theta}$). Notar que cambiamos el nombre de los escalares respecto de la sección anterior, para evitar confusiones con otros símbolos utilizados en la teoría de lentes gravitacionales.

2.6. Solución previa sin contenido de materia

Nos basaremos para este trabajo en una geometría ya encontrada [7], que no tiene contenido de materia, pero que se demostró que ajusta adecuadamente los aspectos principales de la materia oscura.

La solución de las ecuaciones de campo esféricamente simétricas encontradas en [7], esta determinada por las ecuaciones de estado:

$$\rho(r) = 0 \quad (2.35)$$

$$P_t(r) = 0, \quad (2.36)$$

con lo que las componentes de (2.3) son entonces:

$$a(r) = \left(\frac{\ln(\frac{r}{\mu})}{\ln(\frac{r}{r_0})} \right)^2 \quad (2.37)$$

$$m(r) = 0, \quad (2.38)$$

en donde μ y r_0 son constantes. Resulta entonces que la componente radial del tensor de energía-momento toma la forma

$$P_r(r) = \frac{1}{4\pi r^2 \ln(\frac{r}{\mu})}. \quad (2.39)$$

La geometría tiene una singularidad de curvatura logarítmica en el radio interno $r = \mu$. La métrica alcanza asintóticamente el valor minkowskiano en el radio externo $r = r_0$. Para una discusión de las condiciones de energía en este tensor de energía-momento, ver [7]

En este trabajo, extenderemos los resultados de [7] para el caso no vacío, i.e. vamos a introducir materia a la geometría anterior. Haremos uso de los datos estimados dinámicamente en [1] para la distribución de materia del cúmulo de Coma, ajustando con un modelo bien conocido: el isotérmico.

Capítulo 3

Distribución isotérmica de masa

En este capítulo, vamos a desarrollar el primer modelo de objeto con masa estimada dinámicamente que represente al cúmulo de Coma, partiendo de la suposición de que este puede representarse por un fluido esféricamente simétrico que responde a una distribución de masa isotérmica. Vamos a dar forma al tensor de energía-momento y sacaremos conclusiones respecto de las propiedades físicas del resultado, como por ejemplo analizar las condiciones de energía.

3.1. Introducción al modelo isotérmico

Uno de las representaciones de la materia que se usa con mucha frecuencia para modelar la distribución de masa en diversos sistemas astrofísicos son los llamados fluidos isotérmicos. Estos son fluidos simples representados por un gas ideal [8], cuya ecuación de estado termodinámica en el contexto de la física newtoniana, esta dada por:

$$P = \frac{\rho k_b T}{m}, \quad (3.1)$$

donde k_b es la constante de Boltzmann y m es la masa molecular. Además, sabemos que existe una relación entre la presión y la velocidad promedio de cada uno de los elementos constituyentes. En condiciones ideales la velocidad promedio de dispersión de cada elemento debe satisfacer para este modelo la siguiente estadística sencilla:

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{1}{3} \bar{v}^2. \quad (3.2)$$

Esta es la condición de isotropía, pues estamos diciendo que en promedio, la distribución de velocidades tiene el mismo peso en todas las direcciones. Con esto obtenemos que $P = \rho \bar{v}_x^2 = \rho \bar{v}_y^2 = \rho \bar{v}_z^2$. Si mantenemos entonces la temperatura del gas constante $T = T_0$ en todos lados, obtenemos una ecuación de estado del tipo:

$$P = K_P \rho, \quad (3.3)$$

$$K_P = \frac{k_b T_0}{m}. \quad (3.4)$$

Notemos que entonces $K_P = \frac{\bar{v}^2}{3}$, quedando

$$P = \frac{1}{3} \bar{v}^2 \rho. \quad (3.5)$$

De los estudios de estos sistemas autogravitantes[8] se tiene que la distribución de masa toma la forma

$$m(r) = \begin{cases} \frac{M}{R}r & r < R \\ M & r \geq R \end{cases} . \quad (3.6)$$

Este modelo asume que las estrellas u otros objetos masivos que conforman una galaxia, o las galaxias que conforman un cúmulo, se comportan como las partículas presentes en un gas ideal.

3.2. Cálculo geométrico del modelo isotérmico

La guía para el cálculo de la geometría del modelo es generalizar el resultado previo[7], sin contenido de masa, para el caso en que la masa coincida con la atribuida a un sistema isotérmico. Para ello se introduce una función auxiliar $f(r)$ en la componente temporal de la métrica; con el objeto de tomar en cuenta los necesarios nuevos grados de libertad del sistema. En vez, la función $m(r)$ que aparece en la componente radial de la métrica, se tomará la forma funcional dictada por el modelo isotérmico; esto es, la dada por la expresión (3.6). Es de esperar entonces que la componente tangencial del tensor de energía-momento sea no nula en este caso, a diferencia de [7].

Proponemos entonces una métrica de la forma:

$$ds^2 = f(r) \left(\frac{\ln(\frac{r}{\mu})}{\ln(\frac{r_0}{\mu})} \right)^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2 , \quad (3.7)$$

en donde μ y r_0 son constantes.

La idea ahora es determinar la función $f(r)$. La manera en que hacemos esto es pedir que la componente radial P_r coincida con aquella encontrada en el trabajo [7]. La justificación para fijar la geometría bajo esta condición, es que ya se ha visto que la geometría sin masa representa adecuadamente fenómenos de materia oscura; por lo que se busca introducir los mínimos cambios posibles que puedan representar la masa inferida por técnicas dinámicas.

Se observa que permanece la singularidad logarítmica en el radio interno μ ; como en el caso anterior, pero esto no es un problema dado que uno no intenta describir la distribución de masa en esa región.

El tensor de energía-momento que escribimos para este fluido tiene la siguiente forma:

$$T_{tt} = \rho(r) f(r) \left(\frac{\ln(\frac{r}{\mu})}{\ln(\frac{r_0}{\mu})} \right)^2 , \quad (3.8)$$

$$T_{rr} = \frac{P_r(r)}{\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)} , \quad (3.9)$$

$$T_{\theta\theta} = r^2 P_t(r) , \quad (3.10)$$

$$T_{\phi\phi} = r^2 \sin(\theta)^2 P_t(r) . \quad (3.11)$$

Usando las ecuaciones de Einstein (2.1) se obtienen las ecuaciones de campo para cada componente. La componente $[t, t]$ nos da la ecuación 2.17, lo cual es esperable dada la simetría. De la componente $[r, r]$:

$$P_r(r) = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{-r^2 \ln(\frac{r}{\mu}) \frac{df(r)}{dr} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) - 2f(r)r \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) + 2f(r) \ln(\frac{r}{\mu}) m(r)}{r^3 f(r) \ln(\frac{r}{\mu})} \right) , \quad (3.12)$$

y de la $[\theta, \theta]$:

$$\begin{aligned}
P_t(r) = & -\frac{1}{32\pi}(-2f(r)\frac{df(r)}{dr}\ln(\frac{r}{\mu})r^2 + 2f(r)m(r)\frac{df(r)}{dr}\ln(\frac{r}{\mu})r \\
& + 4m(r)f(r)^2 + 4\ln(\frac{r}{\mu})f(r)^2r\frac{dm(r)}{dr} \\
& - 4f(r)^2\ln(\frac{r}{\mu})m(r) + 4\ln(\frac{r}{\mu})f(r)r^2\frac{d^2f(r)}{dr^2} \\
& + 2\ln(\frac{r}{\mu})f(r)r^2\frac{dm(r)}{dr}\frac{df(r)}{dr} + (\frac{df(r)}{dr})^2\ln(\frac{r}{\mu})r^3 \\
& + 4f(r)^2r\frac{dm(r)}{dr} - 4f(r)\frac{df(r)}{dr}r^2 + 8f(r)m(r)\frac{df(r)}{dr}r \\
& - 2\ln(\frac{r}{\mu})f(r)r^3\frac{d^2f(r)}{dr^2} \\
& + 2m(r)(\frac{df(r)}{dr})^2\ln(\frac{r}{\mu})r^2)/(r^3\ln(\frac{r}{\mu})f(r)^2) .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

No mencionamos la ecuación para $[\phi, \phi]$ pues es idéntica a la que se obtiene para $[\theta, \theta]$. Como podemos observar, la ecuación para $[t, t]$ es la misma que habíamos discutido anteriormente para una geometría esféricamente simétrica. La ecuación (3.12) constituye la ecuación para $f(r)$ que se puede expresar en forma compacta por:

$$\frac{d(\ln(f(r)))}{dr} = K \frac{\ln(\frac{r}{\mu}) + 2}{r \ln(\frac{r}{\mu})} , \tag{3.14}$$

en donde K es una constante cuyo valor esta dado por

$$K = 2\frac{M}{R} \frac{1}{(1 - \frac{2M}{R})} ; \tag{3.15}$$

y además hemos reemplazado $m(r)$ y P_r por sus valores en la región $r < R$.

La ecuación (3.14) es integrable, y su solución es de la forma:

$$f(r) = C \left(r \left(\ln \left(\frac{r}{\mu} \right) \right)^2 \right)^K , \tag{3.16}$$

en donde C es una constante que será ajustada luego, pidiendo que la $f(r)$ sea unitaria para algún radio determinado por el sistema con el cual estemos trabajando.

La ecuación restante (3.13) puede entenderse como el cálculo de P_t en término de las otras funciones ya calculadas. En este caso, a diferencia de los resultado obtenidos en [7], esperamos que sea distinta de cero. Simplemente sustituimos los valores que tenemos de $f(r)$, $m(r)$, P_r , obteniendo:

$$\begin{aligned}
P_t(r) = & -\frac{1}{32r^2(\ln(\frac{r}{\mu})^2\pi R)}K(-4R\ln(\frac{r}{\mu}) + 8M\ln(\frac{r}{\mu}) + 8M + 2MK(\ln(\frac{r}{\mu}))^2 + 8MK\ln(\frac{r}{\mu}) - 4R \\
& - K(\ln(\frac{r}{\mu}))^2R - 4K\ln(\frac{r}{\mu})R + 8MK - 4KR) .
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Esto puede mejorarse con un pequeño trabajo algebraico de forma que nos queda:

$$P_t(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{M}{R} \frac{1}{(\ln(\frac{r}{\mu}))^2} \left(1 + \ln(\frac{r}{\mu}) + K \left(1 + \ln(\frac{r}{\mu}) + \frac{(\ln(\frac{r}{\mu}))^2}{4} \right) \right) . \tag{3.18}$$

Podemos reemplazar en la anterior expresión el valor de la densidad de masa

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dm(r)}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{M}{R}, \quad (3.19)$$

con lo que obtenemos:

$$P_t(r) = \frac{\rho(r)}{(\ln(\frac{r}{\mu}))^2} \left(1 + \ln\left(\frac{r}{\mu}\right) + K \left(1 + \ln\left(\frac{r}{\mu}\right) + \frac{(\ln(\frac{r}{\mu}))^2}{4} \right) \right). \quad (3.20)$$

En la sección que sigue aplicaremos esta geometría a un caso astrofísico de interés como es el cúmulo de Coma.

3.3. Modelando el cúmulo de Coma con densidad isotérmica de masa

3.3.1. Ajustando con los datos observacionales

La idea es tomar datos observacionales del cúmulo de Coma para ajustar la geometría encontrada anteriormente. Para esto vamos a utilizar información obtenida del cúmulo pensado como sistema dinámico [1], y datos obtenidos del estudio de lente gravitacional débil del mismo [9],[10].

Vamos a introducir un parámetro que permita que las distancias que utilicemos estén en megaparsecs y las masas en masas solares al momento de hacer los gráficos pertinentes, además de tomar en cuenta todos los factores de unidades que hacen falta, i.e.

$$\Gamma = \frac{GM_{\odot}}{c^2 Mpc} = 4,786568 \times 10^{-20}, \quad (3.21)$$

Siendo $G = 6,693 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ la constante de gravitación universal, $c = 2,99792 \times 10^8 \frac{m}{s}$ la velocidad de la luz en vacío y $M_{\odot} = 1,9891 \times 10^{30} kg$ una masa solar. Este factor se introduce de la forma $\frac{M}{R} = \Gamma \frac{m^*}{r^*}$ Vamos a utilizar los datos obtenidos de [1], según los cuales, si

$$m(r) = \Gamma \frac{m^*}{r^*} r, \quad (3.22)$$

entonces:

$$\frac{m^*}{r^*} = 2,5 \times 10^{14}; \quad (3.23)$$

donde r se asume es el valor de la coordenada radial en unidades de Mpc.

Esta relacion entre la masa y el radio lo obtenemos del siguiente gráfico [1]:

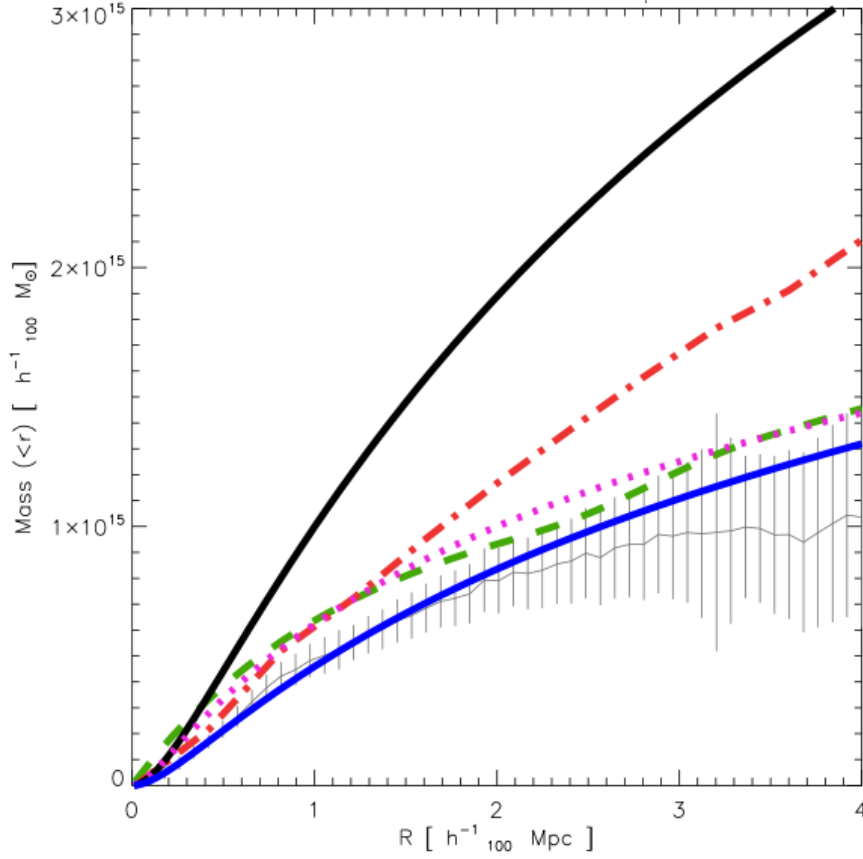


Figura 3.1: Estimación del contenido de materia del cúmulo de Coma según [1].

Notar que los autores de [1] usaron unidades en término del parámetro h_{100}^{-1} ; que en nuestros cálculos usamos como 0,72.

Todas estas estimaciones se obtienen de los datos observacionales obtenidos mediante técnicas dinámicas, las cuales pueden leerse en [11]. Tenemos por ejemplo la llamada técnica de Cáusticas, que permite estimar velocidades de escape de las galaxias del cúmulo, que luego sirven para dar una estimación de la masa del mismo. Además, el mismo método presentado por [11], sugiere la posibilidad de medir la masa del cúmulo utilizando solo información de corrimientos al rojo y coordenadas celestes de las galaxias que lo componen.

Con estos datos podemos calcular la función masa, que tiene el siguiente comportamiento para el caso isotérmico:

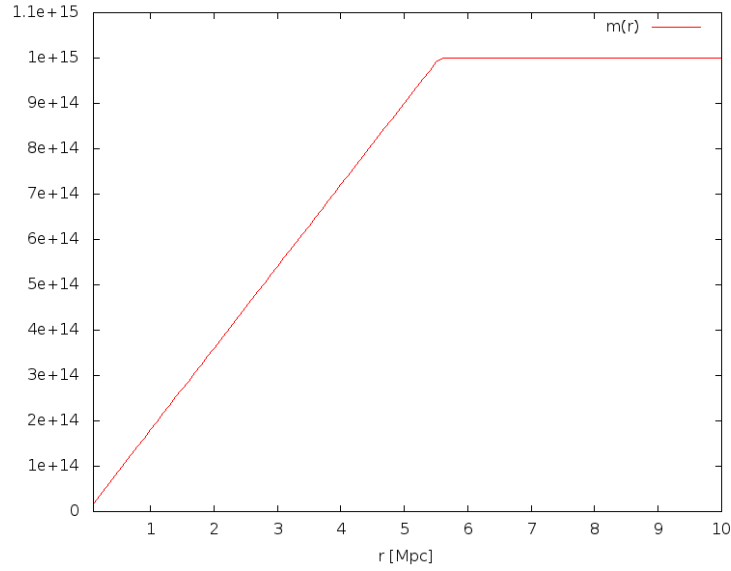


Figura 3.2: Distribución de masa isotérmica para el cúmulo de Coma

donde estamos asumiendo que la densidad es nula para valores $r > r^*$.

Para poder ver que forma tienen nuestras soluciones P_r , f , y P_t necesitamos ajustar el valor del parámetro libre μ que aparece por todos lados como $-\ln(\mu)$. Para esto vamos a usar los datos en [10] y [9]. Ajustando el shear del cúmulo de Coma, mediante estos datos observados, se obtiene:

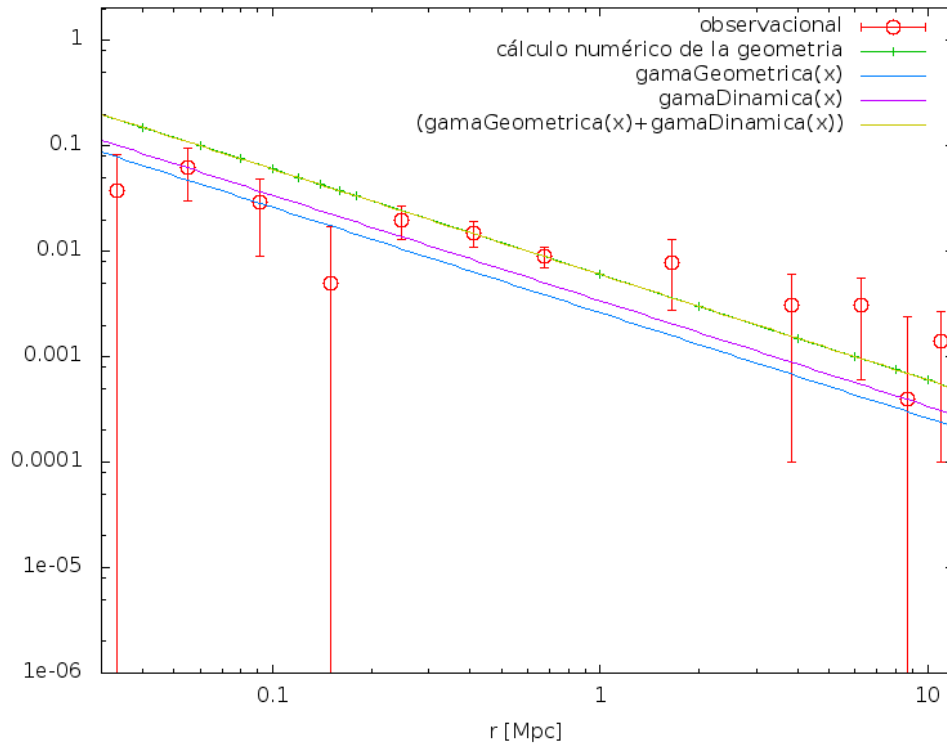


Figura 3.3: Nuevo ajuste para describir las observaciones de lentes gravitacionales (shear) del cúmulo de Coma, compatibles con los estudios dinámicos de galaxias en el mismo.

De donde estimamos que $-\ln(\mu) = 54381,2$. Este valor se obtiene de ajustar en el gráfico anterior para obtener una adecuada descripción del shear observado para el cúmulo de Coma,

3.3. MODELANDO EL CÚMULO DE COMA CON DENSIDAD ISOTÉRMICA DE MASA 21

dados el valor de $\frac{m^*}{r^*}$ inferido de los estudios dinámicos de las galaxias en el cúmulo.

De esta manera demostramos que es posible describir los dos tipos de observaciones por medio de esta construcción geométrica, reemplazando los datos que tenemos en las expresiones para f , P_t y P_r . Para ajustar el valor de C en f , pedimos que $f(r^*) = 1$, i.e. queremos volver a tener la componente temporal de la métrica obtenida en [7] cuando llegamos a la región donde la masa es constante ($r > r^*$). De esta forma, obtenemos:

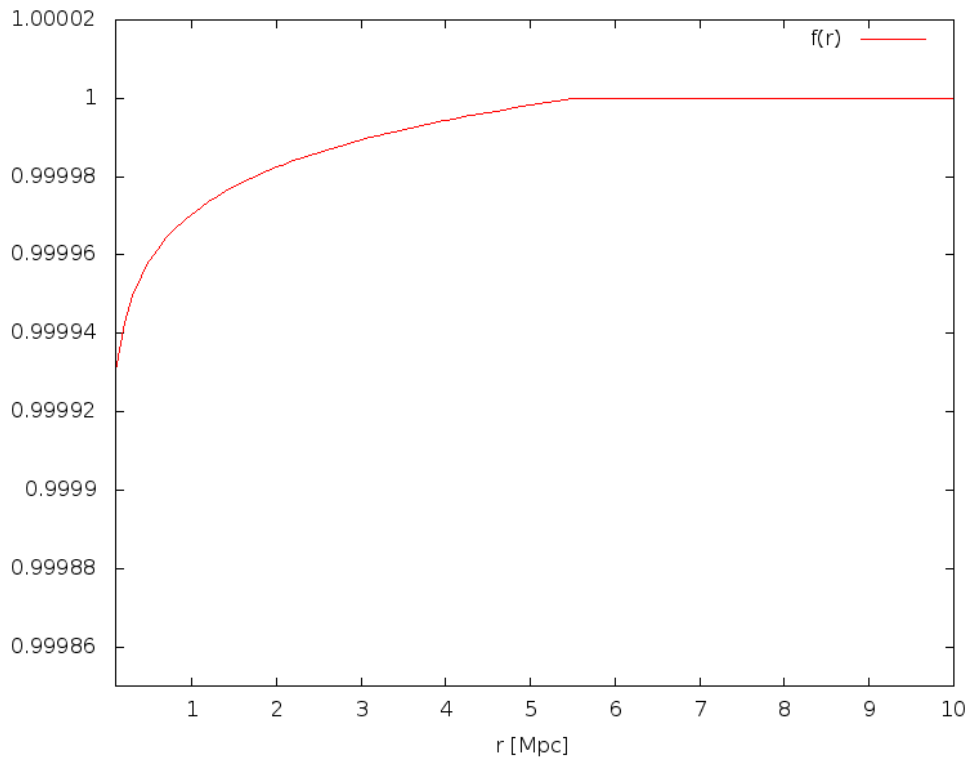


Figura 3.4: Factor de la componente temporal de la métrica que ajustamos.

En el próximo gráfico se muestra el comportamiento de las componentes del tensor de energía-momento.

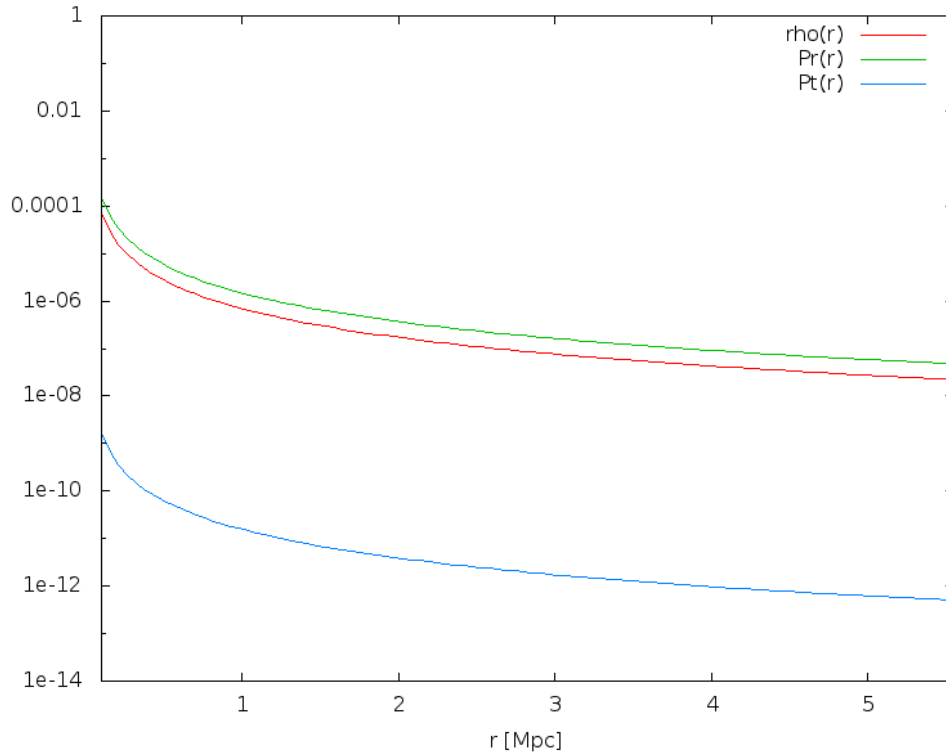


Figura 3.5: Densidad de masa-energía y componentes tangencial y radial del tensor de energía-momento para el cúmulo de Coma, ajustadas para el modelo isotérmico de masa.

Se observa aquí que la componente radial P_r , aunque del mismo orden de magnitud de la densidad ρ ; se mantiene consistentemente por encima de la misma. Es por esto que esta versión del modelo no satisface la condición dominante de la energía, pero comentaremos más sobre este problema y su posible solución luego.

3.3.2. Comparación con la componente estimada dinámicamente de la presión

Sabemos que el modelo isotérmico tiene de por sí un valor de presión intrínseco asociado a la materia estimada dinámicamente presente, que ya vimos en la parte teórica, dada por la ecuación (3.1). Necesitamos entonces conocer la velocidad cuadrática media de las galaxias presentes en el cúmulo de Coma. Del trabajo de la referencia [2] podemos inferir un valor aproximado de la velocidad radial de las galaxias, asumiendo que cerca del centro del cúmulo, las velocidades tangenciales y las radiales promedio tienen el mismo peso, de forma que $\bar{v}^2 = 3\bar{v}_r^2$, i.e. estamos asumiendo una distribución esférica de velocidades 3.2. Vamos a graficar de esta forma $P = \bar{v}_r^2 \rho$. Dado que el gráfico de [2], mostrado en la figura 3.6, tiene información sobre la velocidad heliocéntrica o de recesión de las galaxias, tomamos el valor medio $\bar{v}_H = 7000 \frac{km}{s}$ correspondiente a la mayor cantidad de galaxias cerca del centro de cúmulo, como origen para medir las velocidades de separación entre galaxias.

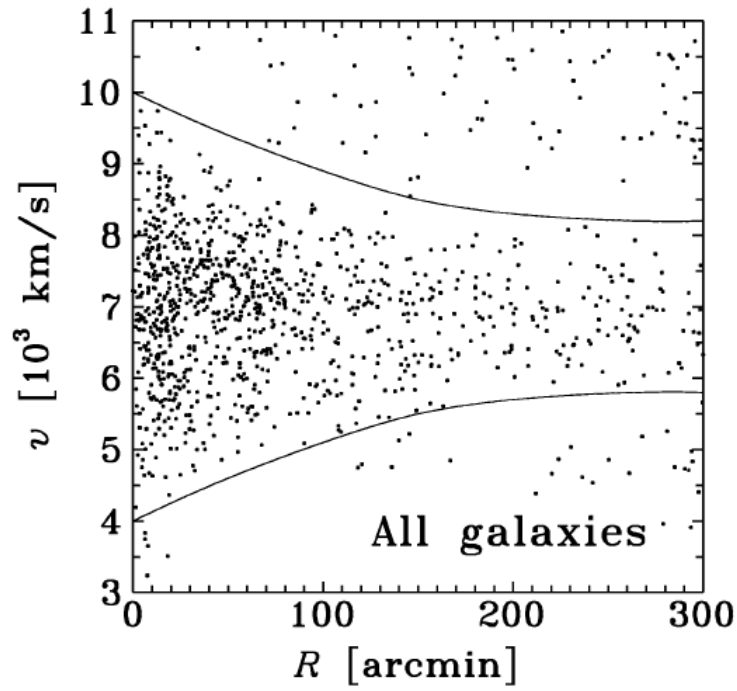


Figura 3.6: Galaxias del cúmulo de Coma según su velocidad heliocéntrica [2].

De aquí inferimos que $\bar{v}_r \sim 1000 \frac{km}{s}$. Notemos que este valor es aproximado al utilizado por [4] $\bar{v}_s \sim 707,106 \frac{km}{s}$.

Usando esta estimación, ponemos en el mismo gráfico la componente geométrica tangencial y la newtoniana para compararlas, dado que la geométrica tangencial es la que aparece como consecuencia de tomar en cuenta el tensor de energía-momento con contenido de masa estimada dinámicamente.

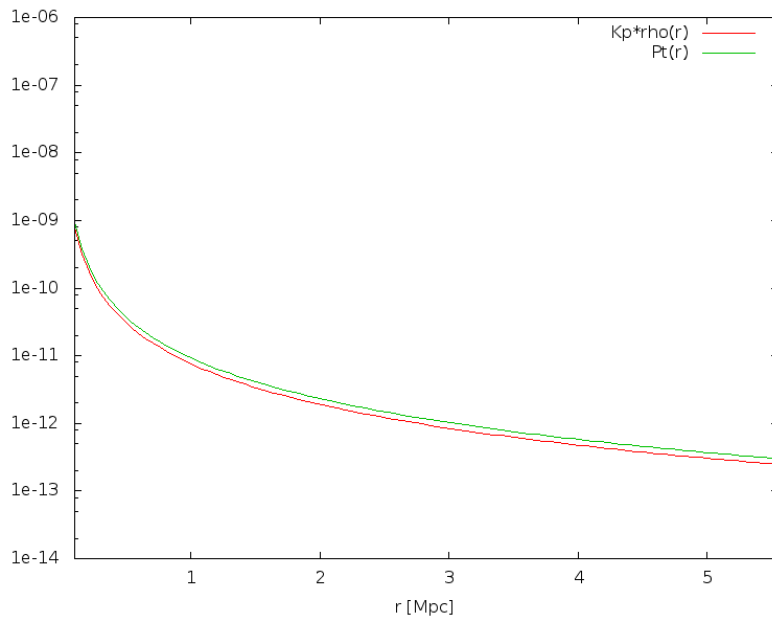


Figura 3.7: Presión estimada dinámicamente y componente tangencial geométrica

Como se puede apreciar, estas dos cantidades coinciden dentro del mismo orden de magnitud; lo que argumenta a favor de la consistencia al modelo.

Notar que estamos diciendo que, con sólo pensar al cúmulo de Coma como un sistema de materia dinámica, es posible ajustar una geometría que tome en cuenta los efectos de lente gravitacional débil.

3.3.3. Propiedades de la solución respecto de las condiciones de energía

Vamos a chequear la consistencia de las condiciones de energía mas usuales en el tensor de energía-momento que encontramos anteriormente, con el objeto de verificar algunas de las propiedades físicas esperables de un tensor de este tipo. Como vimos, estas condiciones son para nuestro T_{ab} :

- **Condición de energía débil:** $\rho \geq 0$ y $\rho + p_i \geq 0$, $i = r, t$. La primera parte de la condición débil se satisface automáticamente como puede verse en la Figura 3.5. No hace falta verificar las otras partes, dado que por construcción ρ , P_r , y P_t son siempre positivas en el rango de la variable r donde estamos estudiando las soluciones. De aquí es evidente que se satisface la condición de energía débil.
- **Condición de energía fuerte:** $\rho + P_r + 2P_t \geq 0$ y $\rho + p_i \geq 0$, $i = r, t$. No hace falta probar nada en este caso por positividad de los campos.
- **Condición de energía dominante:** $\rho \geq |p_i|$, $i = r, t$, podemos ver de la figura 3.5 que la condición dominante no se cumple, pues $P_r(r) > |\rho(r)|$, $\forall r$

Esta última observación, sin embargo, no parece representar ningún escollo para este trabajo. Se debe notar aquí que el gráfico 3.5 muestra que ρ y P_r son del mismo orden de magnitud dentro de todo el rango de interés de la variable radial. También se debe remarcar que el comportamiento de $\rho(r)$ es determinado por el estudio dinámico de la distribución de galaxias; mientras que el comportamiento de $P_r(r)$ es fijado por el ajuste de la geometría para que puede representar con mucha precisión las observaciones de lente débil. En ambos estudios observacionales existen errores, debido a las mediciones, y a los modelos teóricos utilizados.

Vemos entonces que parecería posible realizar ajustes a nuestra geometría para forzarla a satisfacer la condición dominante de energía y que todavía la curva de ajuste esté entre los valores de las barras de error de las mediciones del shear [10], [9]. Reajustamos entonces proponiendo que nuestro valor del parámetro μ sea tal que $-\ln(\mu) = -2\ln(\mu_i) = 2 \times 54381,2 = 108762,5$, en donde $-\ln(\mu_i)$ es el valor que dimos inicialmente para hacer el ajuste. Eso hace que la curva de ajuste cambie de posición en el gráfico 3.3, sin salirnos de la barra de error de la medición con incerteza menor, i.e. la ubicada en $r = 0,6757$, según datos de [10], [9]. El gráfico que se obtiene es el siguiente:

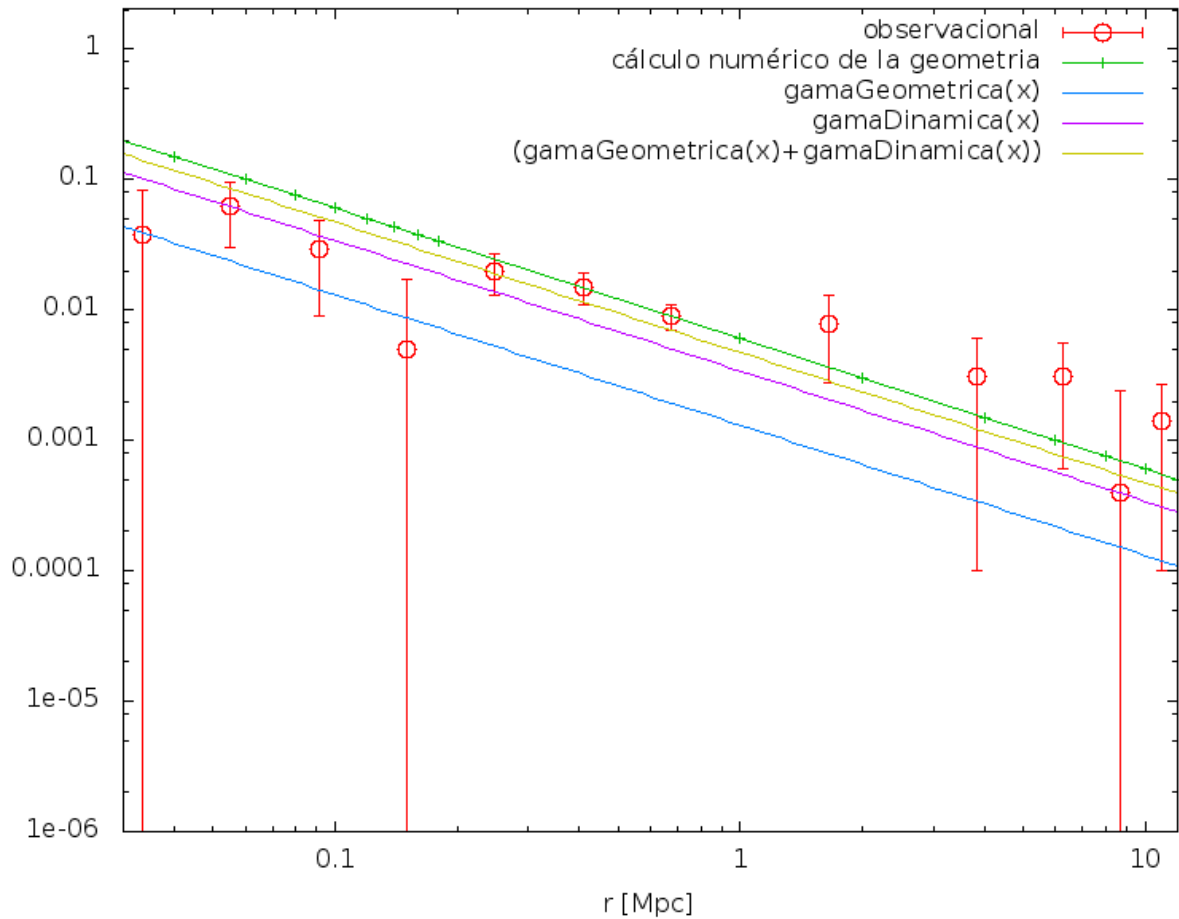


Figura 3.8: Reajuste para describir las observaciones de lentes gravitacionales (shear) del cúmulo de Coma, compatibles con los estudios dinámicos de galaxias en el mismo, y con intención de forzar la geometría a satisfacer la condición de energía dominante. La curva de color amarillo representa el nuevo ajuste.

Finalmente, si utilizamos este de valor $-\ln(\mu)$ para ajustar nuestros campos, podemos verificar como se acerca ρ a P_r considerablemente, logrando que se satisfaga la condición de energía dominante, situación representada en el siguiente grafico:

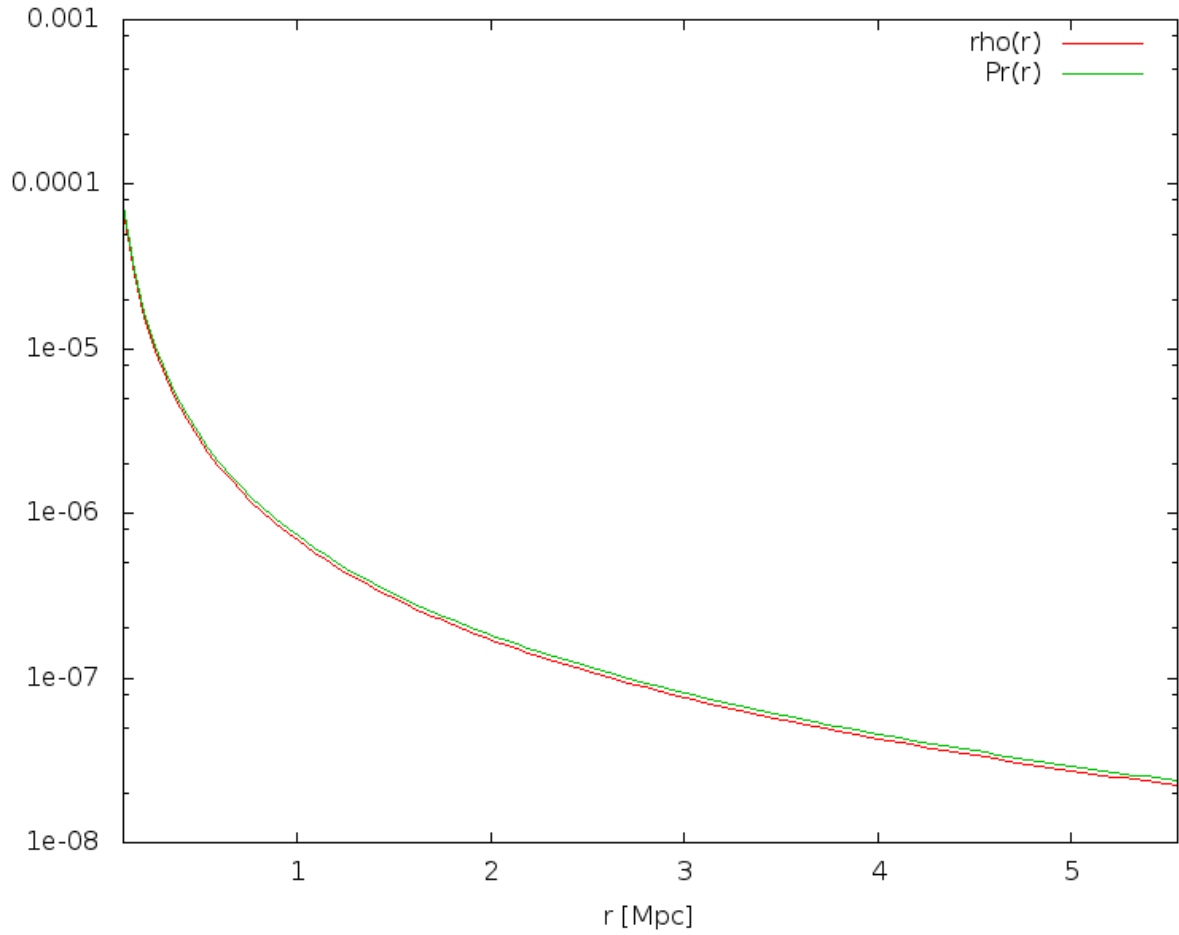


Figura 3.9: Densidad de energía-materia y componente radial del tensor de energía-momento satisfaciendo la condición de energía dominante.

Es posible entonces, dentro de las barras de error de las mediciones observacionales del cúmulo de Coma de [10], [9], ajustar nuestra geometría satisfactoriamente, representando además mediciones de materia dinámica [1].

Acabamos de demostrar que es posible satisfacer la condición dominante de energía de esta forma.

Capítulo 4

Comentarios finales y conclusiones

4.1. Modelo Navarro-Frenk-White para la función masa

El modelo isotérmico usado en el presente trabajo es muy exitoso para un gran número de situaciones astrofísicas; sin embargo es muy sencillo y es deseable estudiar si se puede hacer uso de perfiles más complejos para representar la distribución de materia determinada dinámicamente.

En este sentido el modelo de NFW aparece como la alternativa natural a ser estudiada. El modelo de NFW introduce un parámetro más en la descripción de la función que describe la masa, como función del radio; y tiene mucha aceptación en la comunidad astrofísica como modelo universal para grandes concentraciones de materia. Es por esto que es interesante ver si las ideas geométricas aplicadas en este trabajo, se pueden ajustar al modelado de NFW.

Nuevamente, el objetivo es calcular la geometría requiriendo una descripción adecuada de las observaciones y estimaciones dinámicas de la distribución de materia para el cúmulo de Coma.

4.1.1. Introducción al modelo

El modelo NFW [12] describe la posible densidad de los halos de materia oscura de la forma de la densidad dada por:

$$\rho_{NFW} = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{r_s}\right)\left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}, \quad (4.1)$$

donde r_s y ρ_0 son constantes ajustadas en cada caso. Notar que al igual que en el modelo isotérmico, tenemos que ajustar parámetros libres, con lo que vamos a necesitar de información experimental sobre el cúmulo del Coma al momento de aplicar nuestro modelo. Varios de estos datos los podemos tomar de las mismas fuentes que antes, en el caso isotérmico ([1],[10], [9]). La versión integrada de esta densidad nos da la masa hasta determinado radio r , de la forma:

$$m(r) = M_{NFW}(r) = 4\pi r_s^3 \rho_0 \left(\ln\left(1 + \frac{r}{r_s}\right) - \frac{\frac{r}{r_s}}{1 + \frac{r}{r_s}} \right). \quad (4.2)$$

Esta es la función de masa que usaremos más adelante, encontrada por el ajuste de cálculos numéricos por Navarro, Frenk y White [12].

4.1.2. Cálculo geométrico del modelo NFW

Como se comentó anteriormente, la idea es calcular los factores libres de la métrica (3.7), intentando otra vez mantenernos cerca de la geometría resultado de [7]. Inicialmente, todo es de

la misma forma que en el capítulo 3, con lo que podemos valernos de las ecuaciones de Einstein (2.17), (3.12) y (3.13). La ecuación (2.17) es una de las ecuaciones de campo que describimos en la parte teórica, y ya se utilizó para conocer la función de masa (4.2). Notemos además que esta ecuación es exactamente igual a la de la teoría newtoniana, pero por las simetrías de nuestra geometría, es consistente utilizarla en cálculos geométricos.

Nuevamente la idea es tomar $P_r(r) = \frac{1}{4\pi r^2 \ln(r/\mu)}$ para ajustar adecuadamente las mediciones observacionales del shear, donde reemplazando $m(r)$ por $M_{NFW}(r)$ en (3.12) podemos obtener luego de trabajar algebraicamente, la siguiente ecuación diferencial para $f(r)$:

$$\frac{d(\ln(f(r)))}{dr} = \frac{r \ln(r/\mu) \left(r \left(1 + \frac{r}{R} \right) - 2C \left[\left(1 + \frac{r}{R} \right) \ln \left(1 + \frac{r}{R} \right) - \frac{r}{R} \right] \right)}{2C \left(\ln \left(\frac{r}{\mu} \right) + 2 \right) \left[\left(1 + \frac{r}{R} \right) \ln \left(1 + \frac{r}{R} \right) - \frac{r}{R} \right]}, \quad (4.3)$$

donde $r_s = R$ y $C = 4\pi r_s^2 \rho_0$ para poder manipular más fácilmente. Notar que esta ecuación es bastante más complicada para su resolución que (3.14).

4.1.3. Ajuste el modelo NFW utilizando datos del cúmulo de Coma

El ajuste de la función masa de NFW, dada por (4.2), para ρ_0 y r_s está mostrado en el gráfico siguiente.

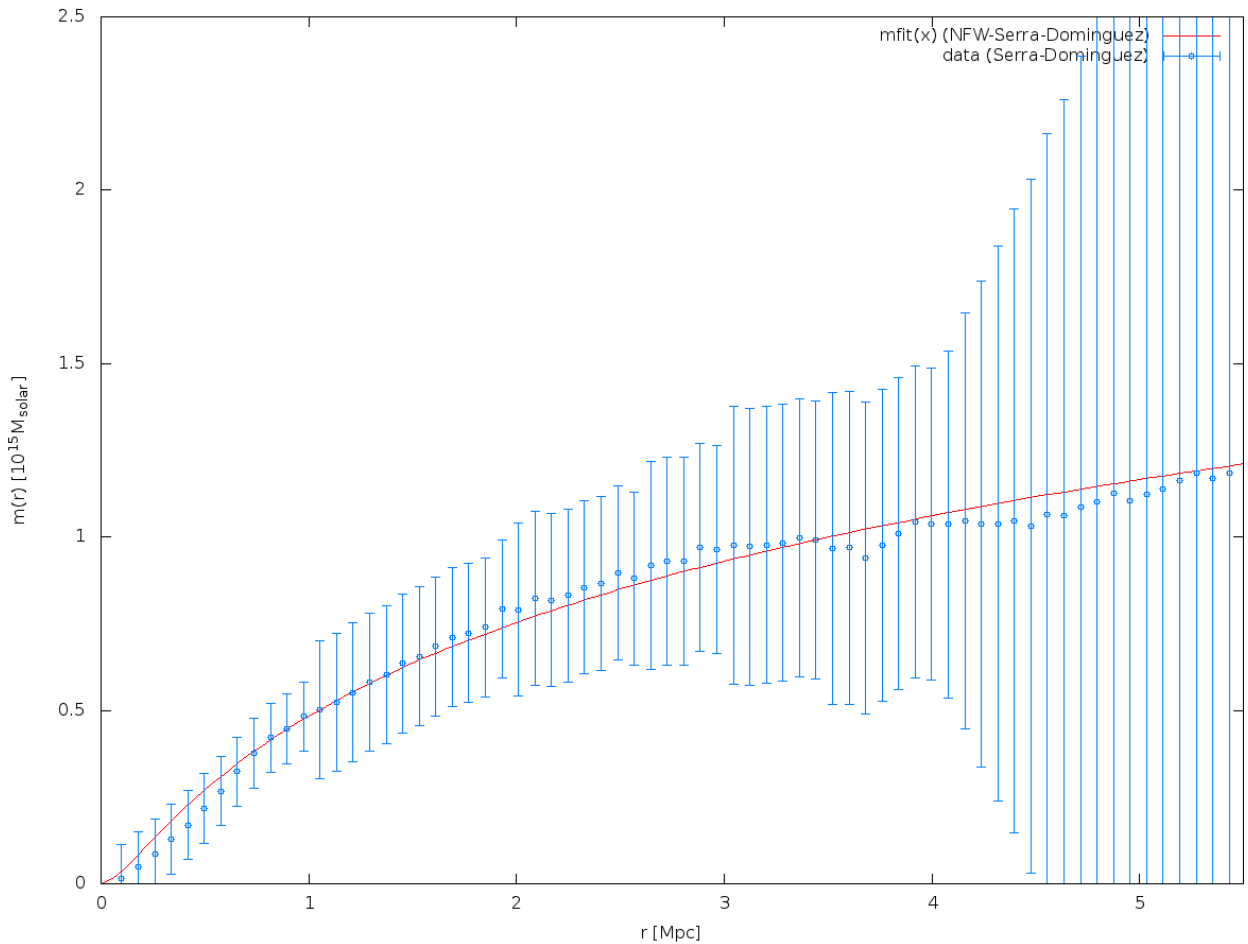


Figura 4.1: Estimación del contenido de materia del cúmulo de Coma según [1] y ajuste con modelo NFW.

Los valores obtenidos por el ajuste son $\rho_0 = 4,84096$ y $r_s = 0,203242$.

Se puede ver que podemos proseguir con el programa anterior, donde deberíamos concentrarnos en el ajuste de la geometría para poder describir los datos observacionales de lente débil; pero ahora haciendo uso de la geometría que tiene tanto la componente $m(r)$ dada por el perfil NFW y contribución de la componente espacial del tensor energía-momento. Esperamos completar este estudio en breve.

4.2. Conclusiones y resultados de este trabajo

En este trabajo se han extendido las ideas geométricas de trabajos anteriores a la descripción de dos fuentes de estimación de la distribución de materia en un sistema astrofísico real, el cúmulo de galaxias de Coma.

Hemos demostrado que es posible ajustar con esta geometría las estimaciones de la distribución de materia debido a estudios dinámicos de la distribución de galaxias, y al mismo tiempo es posible describir las observaciones de lente gravitacional débil que provoca la geometría del sistema. Esto se ha hecho asumiendo un tensor energía-momento que tiene una peculiar componente espacial en la dirección radial, respecto del centro de simetría asumido.

Hemos visto que incluso es posible ajustar los parámetros para satisfacer todas las condiciones de energía; incluyendo la condición dominante de energía; que no era satisfecha por el trabajo previo.

En este trabajo no se ha estudiado las razones para la aparición de las componentes espaciales del tensor energía-momento; sólo nos hemos concentrado en la posibilidad de construir un modelo de espaciotiempo completo que esté de acuerdo en las observaciones que involucran materia oscura, sin recurrir a la introducción de artificios extras.

4.3. Expectativas a futuro

Entendemos a este estudio como un estímulo para trabajos futuros. Por un lado, es interesante continuar proponiendo modelos que ajusten de mejor manera los datos observacionales, como por ejemplo completar los detalles del modelo NFW antes propuesto, utilizar otros perfiles de masa, y comparar los resultados con el modelo isotérmico de este trabajo.

Por otro lado, deseamos hacer una relación entre las estimaciones dinámicas de la distribución de masa con la cantidad de materia promedio calculada por medio de nucleosíntesis en el Universo temprano. Esto es para completar la imagen que se tiene de la llamada materia oscura; dado que se pretende describir cuánto de esta corresponde a la componente bariónica y cuanto a otro tipo de materia.

Referencias

- [1] A. L. Serra and M. J. L. Dominguez Romero. Measuring the dark matter equation of state. *MNRAS Letters*, 415:L74–L77, 2011.
- [2] Ewa L. Lokas and Gary A. Mamon. Dark matter distribution in the Coma cluster from galaxy kinematics: breaking the mass-anisotropy degeneracy. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 343:401, 2003.
- [3] R. Wald. *General Relativity*. The Chicago University Press, 1984.
- [4] F. Zwicky. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *Astrophys.J.*, 86:217–246, 1937.
- [5] P. Schneider, J. Ehlers, and E.E. Falco. *Gravitational lenses*. Springer-Verlag, 1992.
- [6] Emanuel Gallo and Osvaldo M. Moreschi. Gravitational lens optical scalars in terms of energy- momentum distributions. *Phys. Rev.*, D83:083007, 2011.
- [7] Emanuel Gallo and Osvaldo Moreschi. Peculiar anisotropic stationary spherically symmetric solution of Einstein equations. *Mod.Phys.Lett.*, A27:1250044, 2012. 6 pages, 5 figures.
- [8] Tremaine S. Binney T. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 1987.
- [9] Raphael Gavazzi et al. A weak lensing study of the Coma cluster. *A&A(Lett.)*, 498:L33–L36, 2009.
- [10] Kubo J.M., Stebbins A., Annis J., Dell’Antonio I.P., Lin H, Khabanian H., and Frieman J.A. The mass of the Coma cluster from weak lensing in the Sloan digital sky survey. *The Astrophysical J.*, 671:1466–1470, 2007.
- [11] Antonaldo Diaferio and Margaret J. Geller. Infall regions of galaxy clusters. *Astrophys.J.*, 481:633–643, 1997.
- [12] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D.M. White. The Structure of cold dark matter halos. *Astrophys.J.*, 462:563–575, 1996.