

**Título:** Proceso de Modelización Matemática

**Autores:** Coirini Carreras Araceli, Giannone María Melania

**Profesores de MOPE:** Delgado Erika, Esteley Cristina, Villarreal Mónica, Viola Fernanda

**Carrera:** Profesorado en Matemática

**Fecha:** 22-11-2012

## **CLASIFICACIÓN**

97 Mathematical Education

## **PALABRAS CLAVES**

Tabla  
Experimentación  
Gráfico cartesiano  
Proporcionalidad directa  
Proyecto de Modelización Matemática  
Modelización Matemática

## **RESUMEN**

En el presente informe se describirán las prácticas realizadas en una escuela secundaria de la ciudad de Córdoba. Dichas prácticas se desarrollaron en dos divisiones de segundo año. Inicialmente se realizó una actividad experimental en grupo y luego se trabajó en proyectos de modelización con temas elegidos por los estudiantes. En las distintas secciones de este informe se aborda la actividad experimental y cómo se buscó constituir en objeto de enseñanza-aprendizaje los pasos del proceso de modelización. También se realiza un análisis de bibliografía sobre modelización matemática, intentando mostrar cuáles fueron los aportes que realizamos desde nuestra experiencia particular a la caracterización de dicho proceso.

Agradecemos a las profesoras de MOPE Mónica Villarreal, Cristina Esteley, Fernanda Viola y Erika Delgado, por el acompañamiento en esta experiencia y a la profesora a cargo de segundo año por permitirnos entrar a sus cursos. También agradecemos a Alberto Gattoni y Leonardo Rivarola por aclararnos dudas sobre física y facilitarnos material del laboratorio de enseñanza de la Física. Además a nuestros familiares y amigos que nos apoyaron incondicionalmente en esta etapa final de nuestra carrera.

*O que o professor deveria ensinar –porque ele próprio deveria sabê-lo- seria, antes de tudo, ensinar a perguntar. Porque o início do conhecimento, repito, é perguntar. E somente a partir de perguntas é que se deve sair em busca de respostas, e não o contrário.*

Freire & Faundez

## INDICE

	Página
<b>1. Introducción: presentando el escenario de las prácticas</b> .....	6
1.1. Caracterización de la institución.....	6
1.2. Información sobre los cursos.....	6
1.3. Descripción de los medios utilizados en el aula.....	7
1.4. Estilo de trabajo en las clases.....	9
1.5. Planificación anual de la profesora.....	9
<b>2. Nuestra práctica</b> .....	11
2.1. Primera parte: Actividad experimental.....	11
2.1.1. La motivación y los objetivos.....	11
2.1.2. La actividad experimental.....	12
2.1.3. La preparación de la actividad.....	15
2.1.4. La implementación de la actividad.....	16
2.1.5. El repaso y una primera evaluación.....	24
2.1.6. Los criterios de valuación.....	29
2.1.7. Las respuestas de los estudiantes en el cuestionario.....	32
2.1.8. Los resultados de la actividad experimental.....	36
2.2. Segunda parte: Proyecto de Modelización Matemática.....	37
2.2.1. La presentación del proceso de Modelización Matemática.....	37
2.2.2. El inicio: la búsqueda de temas y el planteo de problemas.....	41
2.2.3. El plan de trabajo y la búsqueda de datos.....	47
2.2.4. Los análisis de datos, los modelos y las conclusiones obtenidos.....	48
2.2.5. El informe final y la presentación.....	50
2.2.6. Las pautas para la realización del informe y de la presentación.....	51
2.2.7. Los criterios de valoración del proceso de modelización.....	53
2.2.8. Los resultados de la valoración.....	53
2.2.9. El final de nuestras prácticas.....	56
2.2.10. Reflexión sobre las prácticas.....	58
<b>3. Aportes de una experiencia de modelización</b> .....	58
3.1. Relacionando nuestra experiencia con la bibliografía.....	60
3.2. Retomando el interrogante.....	
<b>4. Anexo</b> .....	
<b>5. Bibliografía</b> .....	

## **Introducción**

En el presente informe se describirán nuestras prácticas realizadas en dos divisiones de segundo año de una escuela secundaria de la zona centro de la ciudad de Córdoba.

El trabajo está dividido en tres secciones. En la primera se tratará el contexto de las prácticas. En la segunda se observarán dos apartados: uno en el cual se presentará y se analizará una actividad experimental y otro que muestra la implementación de un proceso de modelización. En la tercera se comentará sobre un aspecto de las prácticas que consideramos relevante analizar desde la bibliografía.

### **1.Introducción: presentando el escenario de las prácticas**

En las siguientes sub-secciones se relatarán características generales del contexto de nuestras prácticas. Éstas se refieren a la institución, los cursos, los medios tecnológicos utilizados en el aula, el trabajo en clase y la planificación de la profesora.

#### **1.1. Caracterización de la institución**

El colegio en el cual realizamos las prácticas está ubicado en la zona centro de la ciudad de Córdoba, es confesional, mixto y público de gestión privada. El mismo posee nivel inicial, primario y secundario. La especialidad del ciclo orientado es Humanidades con Orientación en Ciencias Sociales. El colegio cuenta con salas de profesores, dirección y vicedirección, secretaría, gabinete de Informática, gabinete de Ciencias Naturales, biblioteca, natatorio, campo de deportes, salón polifuncional, cantina y comedor, patios amplios y una capilla propia. Posee cuatro pabellones principales de dos y tres plantas donde se distribuyen el nivel inicial, primario y secundario.

#### **1.2. Información sobre los cursos**

Las prácticas se desarrollaron en las divisiones “B” y “C” de segundo año. El número de alumnos en la división “B” es 31 -18 varones y 13 mujeres- y en la división “C” 34 -11mujeres y 23 varones. La división “B” tenía como practicante a Araceli y la “C” a Melania.

Las aulas son amplias, tienen ventanas, aire acondicionado y se encuentran en buen estado, cuentan con un pizarrón de tizas, una pizarra digital e interactiva y un escritorio para la profesora donde se localiza una computadora conectada a la pizarra. Además cada aula cuenta con una red local y acceso a wifi. Cada estudiante tiene una netbook personal que es obligatoria para asistir a clase. Los bancos son individuales y los estudiantes son distribuidos por el preceptor del curso de manera aleatoria en el aula.

Una particularidad de una de las aulas es que posee una tarima donde se encuentra el pizarrón y el escritorio del profesor. Esta tarima data del origen del colegio, alrededor de la década del 50. Este dispositivo era común en las aulas en aquella época y permitía que el docente quedara ubicado por encima del nivel donde estaban los bancos de los alumnos.

En la figura 1 se ilustra la tarima descrita anteriormente y se muestra la pizarra digital.

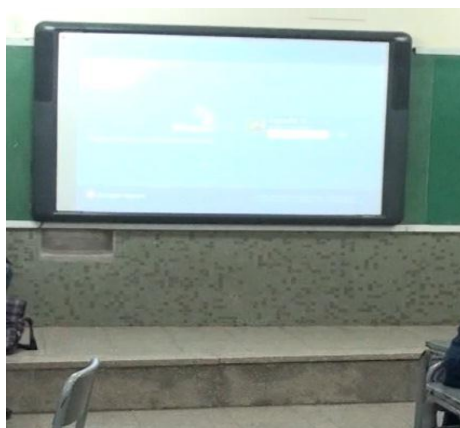


Figura 1: Pizarra digital y tarima

Los horarios de matemática en segundo “B” son los siguientes: miércoles 7:35-9:30 y jueves 11:20-12:35. Los horarios de segundo “C” son: miércoles 11:20-12:35, jueves 8:50-9:30 y viernes 7:35-8:50. Es decir, cada división tiene dos módulos<sup>1</sup> y medios semanales de clases de matemática.

### 1.3. Descripción de los medios utilizados en el aula

La institución cuenta con variados recursos tecnológicos, los más utilizados y relevantes son la pizarra digital, las netbooks de los estudiantes y la plataforma virtual.

La pizarra digital cuenta con programas vinculados con las materias matemática, educación tecnológica, ciencias naturales. Además cuenta con acceso a internet, procesador de texto, planillas de cálculo, reproductor de video, presentación en diapositivas, ActivInspire -programa que permite escribir con el lápiz óptico sobre otros documentos-, entre otros. Los software matemáticos que tiene instalado son: Graphmatica<sup>2</sup> y GeoGebra<sup>3</sup>.

La figura 2 muestra el software ActivInspire, donde se visualiza una actividad escrita con el lápiz óptico.

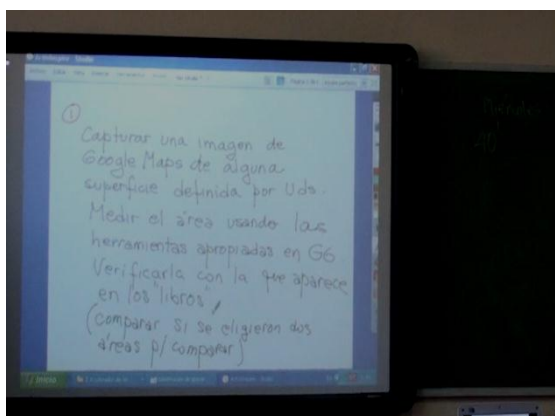


Figura 2: Actividad escrita con el ActivInspire

<sup>1</sup> Un módulo tiene una duración de 80 minutos.

<sup>2</sup> Graphmatica es un editor gráfico creado por Keith Hertzner que permite representar funciones, relaciones, inequaciones, etc. Asimismo permite calcular y graficar tangentes e integrales, hallar puntos críticos, soluciones de ecuaciones, intersecciones entre funciones, etc.

<sup>3</sup> GeoGebra es un software matemático interactivo libre, su creador es Markus Hohenwarter. Permite realizar construcciones a partir de puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas, entre otras, permitiendo el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo, la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales.

Las netbooks de los estudiantes están conectadas a una red interna que les permite vincularse a un programa maestro que posee la pizarra digital y a través del cual se pueden distribuir archivos a todos los estudiantes, mostrar las pantallas individuales de la netbook de cada estudiante, entre otras acciones. Además de procesador de texto, planillas de cálculo y presentación en diapositivas, las netbooks cuentan con software relacionado con diferentes asignaturas.

En la figura 3 se muestra el programa maestro. Cada rectángulo azul representa el estudiante que está conectado a este programa.



Figura 3: Programa maestro de la pizarra digital.

La plataforma es un espacio virtual donde los docentes de diferentes asignaturas -incluida matemática- cuentan con aulas virtuales donde pueden subir material teórico y práctico en formato digital, asignar tareas, realizar evaluaciones, entre otras prestaciones. Los estudiantes pueden acceder a dicho material a través de una cuenta otorgada por la institución. Además de la pizarra digital y las netbooks, también se utiliza el pizarrón tradicional y las carpetas.

La persona responsable del gabinete de informática de la institución nos habilitó un aula virtual para cada división, donde fuimos subiendo material y asignando tareas. La figura 4 muestra una captura de pantalla del aula virtual correspondiente a segundo "C".

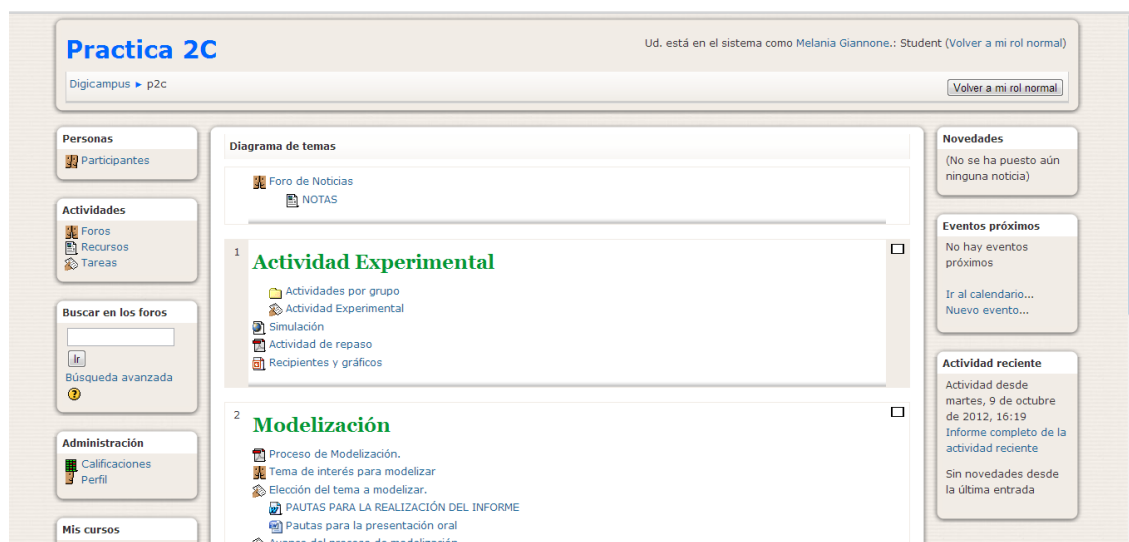


Figura 4: Plataforma virtual

La profesora de matemática, a cargo de las dos divisiones de segundo año en las cuales realizamos las prácticas, tiene un buen manejo de las tecnologías, en particular de las herramientas que brinda la pizarra digital. La profesora utiliza cotidianamente esas herramientas



en sus clases, haciendo y promoviendo un “uso no domesticado” (Borba & Penteado, 2001) de las tecnologías. En el desarrollo de las clases, también se emplea el pizarrón tradicional y las carpetas. El pizarrón se suele utilizar cuando los estudiantes pasan al frente a explicar o cuando la docente quiere aclarar una idea que no haya quedado clara; y las carpetas cuando no es posible realizar la tarea en la netbook por problemas técnicos o por dificultades para escribir la simbología matemática, por ejemplo para resolver ecuaciones.

La docente de matemática utiliza en sus clases bibliografía, ejercicios, simulaciones y videos en formato digital que sube a la plataforma para que los estudiantes accedan a esta información. Este material está disponible tanto para ser usado en el aula como en el hogar.

#### **1.4. Estilo de trabajo en las clases**

Las clases de matemática comenzaban con la participación de un estudiante que explicaba lo realizado la clase anterior, mientras la docente le hacía preguntas sobre el tema. Posteriormente, empezaban a trabajar en la actividad prevista para ese día, que por lo general estaba subida a la plataforma. Los estudiantes bajaban esta actividad y comenzaban a trabajar en las netbooks o en las carpetas. La docente generalmente se ubicaba en el fondo del curso y desde allí hacía pasar a los estudiantes para que resolvieran los ejercicios al frente mientras ella realizaba preguntas. Cuando los estudiantes estaban trabajando, generalmente en forma individual, la docente circulaba por el curso preguntando sobre las actividades y respondiendo dudas. No se observó el desarrollo de un tema específico de matemática de manera expositiva por parte de la docente, sino que las actividades que proponía promovían el descubrimiento de algunos conocimientos, por parte de los estudiantes, y luego ella formalizaba.

La clase tenía diferentes instancias de trabajo, una donde la docente explicaba la dinámica de la clase, otra sobre la realización de la actividad por parte de los estudiantes y una última sobre exposición de los chicos con un diálogo de carácter interrogativo y explicativo por parte de la profesora. En algunas oportunidades, se observó que la docente retomaba explicaciones que daban los estudiantes para poner en común algún contenido que creía importante para el tema que estaban desarrollando.

La relación de la docente con los estudiantes era de respeto mutuo permitiendo así que la clase se desarrolle en un ambiente propicio para el aprendizaje.

#### **1.5. Planificación anual de la profesora**

Las expectativas generales de la docente son:

- *“Buscar regularidades en situaciones cuyo principal contenido esté centrado en la matemática o en situaciones fuera de ella pero donde se pueda obtener una representación matemática.*
- *Representar las regularidades encontradas mediante distintos textos propios de la matemática (gráficos, tablas, expresiones analíticas, etc.) y traducir de una forma de representación en otra.*
- *Manipular las distintas representaciones obtenidas y controlar los cambios que esto significa en otra representación disponible. Por ejemplo, resolver ecuaciones, calcular la medida de ángulos en una configuración, resolver ejercicios combinados, etc.*
- *Identificar las representaciones óptimas para resolver un problema y seleccionar los recursos materiales apropiados (por ejemplo, papel y lápiz, calculadora, software, etc.)*
- *Reconocer la necesidad teórica y práctica de los distintos conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales e irracionales)*
- *Resolver ecuaciones, inecuaciones y sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas con soluciones en distintos conjuntos numéricos.*
- *Reconocer relaciones entre elementos de una figura geométrica y aplicar la propiedad correspondiente en ejercicios y problemas.*

- *Elaborar argumentaciones formales de propiedades de las operaciones en los distintos conjuntos numéricos.*
- *Elaborar argumentaciones formales de propiedades de distintas figuras geométricas.*
- *Usar herramientas como el GeoGebra para construir pruebas de algunas propiedades de figuras”.*

Las estrategias metodológicas que la docente pretende implementar son la modelización matemática como estrategia de enseñanza, experimentos matemáticos, exposiciones dialogadas, ejercitación y desarrollo de proyectos de modelización de temas elegidos por los estudiantes.

Los contenidos están estructurados en tres ejes centrales sobre temas matemáticos:

Expresiones analíticas, ecuaciones y relación de proporcionalidad directa  
 Conjuntos numéricos (enteros y racionales)  
 Estudio de las relaciones entre figuras geométricas y entre sus elementos

Cada eje contiene dos unidades donde se especifican los contenidos. También se detallan actividades y procedimientos previstos para el desarrollo del contenido. Algunas actividades que menciona son la toma de apuntes, la participación en clase, la lectura de material, el uso de plataforma y software, la recolección de datos fuera del ámbito escolar, la actividad grupal de laboratorio, resolución individual en el aula y en el hogar de actividades, presentación de informes escritos y orales, actividades intramatemáticas y extramatemáticas.

Luego de hacer un análisis comparativo entre la planificación y los diseños curriculares de la provincia, podemos destacar que la planificación se adecua a ellos.

A través de las observaciones realizadas en las clases de segundo año y de la planificación de la docente, se pudo observar la combinación de diferentes formatos curriculares y pedagógicos. De acuerdo a las características de los diferentes formatos que aparecen descriptos en *Diseño Curricular ENCUADRE GENERAL* (2011), se pudo distinguir la presencia de los siguientes: “materia”, “seminario”, “taller”, “proyecto” y “laboratorio”. Reconocemos la presencia de estos formatos puesto que la docente presentó un plan con contenidos matemáticos a desarrollar durante el año. Por otra parte, también por las actividades y la labor que promueven la participación activa y la reflexión crítica de los estudiantes. Por último, en su planificación propone el trabajo con pequeños proyectos de modelización, lo cual implica que los estudiantes realicen tareas como: selección de un tema no-matemático de interés e identificación de una problemática, formulación de hipótesis, toma de datos, obtención de conclusiones y generalizaciones.

Una particularidad de dicha planificación es que la docente expresa, en una nota aclaratoria, que:

*“[...] el desarrollo de los contenidos no seguirán, necesariamente, el orden lineal en que son presentados a continuación, debido a las estrategias metodológicas generales previstas”.*  
 (p. 2, Planificación Anual).

El mes antes de comenzar las prácticas -en el cual se llevaron a cabo las observaciones- los contenidos que se estuvieron trabajando fueron principalmente: números enteros, operaciones, ecuaciones, representación en la recta numérica y ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano. Todos estos contenidos presentes en el segundo eje y en la primera unidad del mismo.

## **2. Nuestra práctica**

Podemos dividir las actividades realizadas durante la práctica en dos partes. La primera referida a una actividad experimental grupal inicial y la segunda sobre un proyecto de modelización matemática.

### **2.1. Primera parte: Actividad experimental**

En las siguientes sub-secciones se relatarán aspectos particulares de la actividad experimental. Entre ellos los objetivos, la descripción, la preparación y la implementación de la actividad. Luego, se mostrarán el cuestionario evaluativo, algunas respuestas de los estudiantes sobre este cuestionario, los resultados y los criterios de evaluación.

#### **2.1.1. La motivación y los objetivos**

Previo al inicio de nuestras prácticas, la profesora nos describe las actividades que han realizado los estudiantes y los contenidos vistos hasta el momento. Destaca lo siguiente:

*“Los alumnos ya han tenido una experiencia de trabajar sobre pequeños proyectos definidos por ellos mismos, presentaron en forma digital sus trabajos, y los expusieron a sus compañeros.*

*2° año B: los alumnos (en grupos de dos integrantes) definieron un problema de cálculo de variados elementos que componían algún problema real, y elaborar una planilla Excel que, fórmulas mediante, permitían el cálculo de esos elementos.*

*2° año C: los alumnos (en grupo de dos integrantes) definieron un fenómeno de la realidad en donde pudieran identificar dos variables (independiente y dependiente) y otras que se mantengan controladas. Realizaron recolección de datos (mediante experimentos inventados, o con el modelo ya predeterminado) en tablas, construyeron el gráfico cartesiano de la relación, ajustaron datos usando Graphmatica, y encontraron una fórmula de la relación en los casos más simples.*

*No se identificó a lo largo de la experiencia los pasos de un proceso de modelización que, en realidad, se estaban llevando a cabo.*

*En cuanto a los contenidos, para el momento de realizar las prácticas, pueden estar trabajados los contenidos relacionados con: relaciones entre variables, proporcionalidad directa (escala, porcentaje, densidad, velocidad, etc.), números enteros, ecuaciones con una incógnita y con dos resueltas por métodos principalmente gráficos. Con respecto al año pasado, se realizaron variados estudios sobre cuerpos geométricos, mediciones de área, perímetro y área”. (Archivo enviado por la profesora).*

La profesora nos propone para las prácticas brindar a los alumnos una segunda experiencia de modelización matemática y constituir en objeto de aprendizaje las etapas de un proceso de modelización. En el transcurso de estas prácticas se hicieron consultas y se tomaron decisiones con el equipo de trabajo conformado por las profesoras de la materia MOPE, la profesora a cargo de segundo año de la escuela y nosotras, las practicantes.

A partir de la propuesta de la profesora, planificamos una actividad grupal en la que los estudiantes pudieran experimentar. Al mismo tiempo, tal actividad nos permitiría ejercer un mayor control sobre la gestión de la clase (ya que elaboraríamos una guía pauta de trabajo) e iniciar un vínculo más fluido con los estudiantes.

Los objetivos que pretendíamos alcanzar con esta primera actividad eran:

- Transitar los pasos de modelización mediante una pequeña experiencia de laboratorio que contemple: experimentación y toma de datos, formulación de hipótesis, búsqueda de información, representación gráfica y analítica, elaboración de conclusiones.
- Consolidar el trabajo en grupo y la comunicación oral al resto del curso sobre lo realizado.

### 2.1.2. La actividad experimental

En esta actividad se estudió cómo varía la altura del nivel de agua en recipientes de diferente forma conociendo el volumen de líquido que se ha ingresado en los mismos.

El experimento consistía en colocar una cantidad constante de agua en dos recipientes no graduados: uno en el cual la relación entre la altura del nivel del líquido y el volumen de agua ingresado para alcanzar esa altura era de proporcionalidad directa -recipiente de sección constante- y el otro no. Luego, cada vez que se echaba agua, medir la altura que alcanzaba el líquido en cada recipiente. Estos datos se registraban en una tabla. Además se elaboraron hipótesis e identificaron variables, se graficaron los datos en Graphmatica y se obtuvieron conclusiones.

Cada curso se dividió en siete grupos conformados según la decisión de los propios alumnos y se colocaron un nombre. En segundo B los nombres de los grupos eran: “Wendy Padilla”, “Los  $\pi$ ”, “Minutos para el 10”, “Las Superpoderosas”, “Cajugusdel”, “Raíz Cuadrada” y “Los Yinius”. En segundo C se colocaron los siguientes nombres: “Los Descartables”, “Los Matemáticos”, “Los Pitagóricos”, “Los Einstein”, “Los Borbotones”, “Las Despeinadas” y “Los Cartesianos”. La actividad se desarrolló en el laboratorio de la escuela que cuenta con siete mesas y material para cada una. A cada grupo se le entregó una guía de trabajo impresa y dos recipientes diferentes. A continuación se muestra la guía de uno de los grupos y en la figura 5 los pares de recipientes de los grupos restantes.

#### **NOMBRE DEL GRUPO:**

#### **Actividad experimental**

**Objetivo:** Estudiar cómo varía la altura del nivel de agua en recipientes de diferente forma conociendo el volumen de líquido que se ha ingresado en los mismos, mediante la exploración, la recopilación y el análisis de los datos experimentales.

#### **Materiales:**

- Dos recipientes no graduados.
- Probeta
- Un instrumento de medición.
- Pipeta.
- Vaso de precipitado.
- Embudo.
- Fibrón.
- Agua.
- Rejilla.

#### **Procedimiento:**

1-Coloquen en cada recipiente no graduado 40 cm<sup>3</sup> de agua, marcar con el fibrón la altura alcanzada por el líquido y registrar estos datos en la tabla que está a continuación.

Repitan este procedimiento ocho veces para cada recipiente. Recuerden registrar el dato correspondiente al estado inicial de cada recipiente.

Volumen de agua colocada (cm <sup>3</sup> )	Altura Recipiente 1 (cm)	Altura Recipiente 2 (cm)
--	-----------------------------	-----------------------------


**2-** Formulen hipótesis relacionando la altura del nivel del agua en el recipiente y el volumen del líquido ingresado en cada recipiente, teniendo en cuenta la forma de cada uno.

**3-** Identifiquen cuáles son las variables dependiente, independiente que están presentes en la experiencia que realizaron. ¿Reconocen alguna variable controlada en este experimento?

**4-** Abran dos documentos en Graphmatica, uno para cada recipiente, y realicen las siguientes tareas:

**a).** Nombren los archivos con los nombres de los recipientes como aparece a continuación:



Recipiente 1



Recipiente 2

**b).** Confeccionen una tabla con los datos obtenidos en la experiencia considerando las variables identificadas. Es posible que sea necesario cambiar el rango de la cuadrícula para poder visualizar los puntos.

**c).** Copien cada gráfico con la herramienta: Edición → Copiar gráfico como BMP → Color, y péguenlo en un procesador de texto.

**5-** De acuerdo a lo obtenido en ambos gráficos elaboren una conclusión de acuerdo a las hipótesis planteadas. Pueden tener en cuenta como guía las siguientes observaciones:

- A medida que aumenta el volumen de agua en el recipiente, qué ocurre con la altura del nivel del líquido.
- Cómo varía la altura del nivel del líquido entre un registro y el siguiente.
- Ver la relación entre los puntos graficados en el Graphmatica y la forma del recipiente.
- En la experiencia, ¿encontraron alguna relación de proporcionalidad entre el volumen y la altura del nivel del líquido? ¿Influye en esta relación la forma del recipiente?

**6-** Realizar por grupo un breve informe en un procesador de texto que incluya:

- Título de la actividad: “Actividad experimental” e integrantes del grupo.
- Variables identificadas.
- Hipótesis planteadas.
- Imágenes de los gráficos.

-Conclusión.

7-Por grupo suban a la plataforma el informe en el espacio “Actividad Experimental”.

8-Breve presentación oral por grupo exponiendo las hipótesis, el gráfico y la conclusión obtenida sobre el recipiente 2. Pueden utilizar PowerPoint, Prezi, procesador de texto.

NOTA: recordar que el mililitro (ml) es una unidad de volumen, cuya equivalencia con el centímetro cúbico ( $\text{cm}^3$ ) es:  $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$

**IMPORTANTE:**

Se tendrán en cuenta las siguientes pautas al momento de evaluar:

- Presentación a tiempo del informe final en formato digital.
- Exposición oral y grupal del informe.
- Realización individual de un cuestionario digital sobre la actividad experimental.



Figura 5: Pares de recipientes correspondientes a cada grupo

El tiempo que se dedicó a esta actividad, desde la experimentación hasta la presentación oral, fue de dos semanas aproximadamente. A continuación se presenta la distribución del tiempo dedicado a esta actividad:

- Presentación de la actividad
  - Toma y registro de datos experimentales en el laboratorio
  - Formulación de hipótesis e identificación de variables
  - Obtención de gráficos de los datos
- } 2 módulos
- Conclusiones
  - Confección del informe escrito y de la presentación
  - Exposición oral grupal
- } 2 módulos
- Actividad de repaso
  - Cuestionario evaluativo
- } 1 módulo

### 2.1.3. La preparación de la actividad

Previo a comenzar las prácticas, realizamos el experimento con cada uno de los recipientes para determinar la cantidad de agua que se le colocaría, para decidir las parejas de recipientes y para saber el volumen máximo de cada uno. Además, esto nos permitió anticipar posibles dificultades que surgirían para los estudiantes al realizar la actividad. Una de las dificultades detectadas fue la elección del instrumento para medir la altura. La resolvimos diseñando el instrumento que se muestra en la figura 6.



Figura 6: Instrumento de medición

Éste se utiliza colocando la varilla a la altura del nivel de líquido en el recipiente de manera que coincida con ambas reglas.

Otra dificultad que observamos fue el grosor del vidrio y concavidad de la base de algunos recipientes que, como se muestra en la figura 7, influía en la medición de la altura del nivel del agua. Esto llevó a que descartemos algunos recipientes cuyas características afectarían demasiado en la medición.



Figura 7: Recipientes descartados de la actividad por el grosor del vidrio y concavidad de la base.

#### 2.1.4. La implementación de la actividad<sup>4</sup>

La primera tarea que realizaron los grupos fue tomar los datos experimentales y registrarlos en la tabla de la actividad. Algunas de las dificultades que percibimos en los estudiantes fueron referidas al uso del instrumento de medición; al logro, dentro de lo posible, de la precisión en las mediciones; a colocar la cantidad de agua exacta en la probeta; a qué hacer con la concavidad y el grosor del vidrio que presentaba la base de algunos recipientes y que influían en la toma de datos. También hubo dificultades para interpretar, en el enunciado de la actividad, a qué se refería el “estado inicial” del recipiente y cómo registrar adecuadamente los datos en la primera columna de la tabla. Por ejemplo, algunos grupos escribían siempre el incremento constante -figura 8- y no el volumen de agua acumulada en el recipiente -figura 9.

Volumen de agua colocada (cm <sup>3</sup> )	Altura Recipiente 1 (cm)	Altura Recipiente 2 (cm)
120	0	0
120	3,1	2
120	4,6	3,2
120	6,6	4,2
120	8	5,3
120	10	6,4
120	11,6	7,5
120	13,3	9,5
120	15	11,9

Figura 8: Tabla con incremento constante.

Volumen de agua colocada (cm <sup>3</sup> )	Altura Recipiente 1 (cm)	Altura Recipiente 2 (cm)
0	0	0
120	3,1	2
240	4,6	3,2
360	6,6	4,2
480	8	5,3
600	10	6,4
720	11,6	7,5
840	13,3	9,5
960	15	11,9

Figura9: Tabla con volumen de agua acumulada.

Buscamos solucionar estas dificultades recorriendo cada grupo, explicando nuevamente la actividad y mostrando cómo se utilizaba el instrumento de medición. Para obtener mayor precisión en las mediciones surgieron algunas estrategias por parte de los estudiantes, como por ejemplo restar el grosor del vidrio de la base en cada medición y utilizar una pipeta para colocar la cantidad exacta de agua en la probeta antes de verterla en el recipiente. Otros alumnos decidieron despreocuparse de dichos bordes. Respecto a los grupos que habían completado la tabla como se muestra en la figura 8, se dialogó con los integrantes preguntando acerca del experimento, para que ellos mismos comprendieran que el estado inicial correspondía al punto (0,0) y que el volumen de agua en el recipiente iba aumentando en cada medición.

Algunos grupos, habiendo realizado pocas mediciones, observaron que en el recipiente en el cual la relación altura-volumen era de proporcionalidad directa, el incremento de la altura del nivel del agua se mantenía constante. En consecuencia, completaron la tabla sin hacer el experimento y luego tomaron las mediciones faltantes para comprobar esa hipótesis.

En lo referido a la identificación de variables una de las dificultades que surgió fue confundir las variables dependiente, independiente y controlada. Los estudiantes ya habían trabajado estos conceptos con un material de la docente (disponible en la plataforma virtual de Matemática). En dicho material se las definía así:

*“La variable independiente es la variable que es manejada su variación por la persona que estudia el fenómeno, cambiándole valores para ver que sucede. La variable dependiente es la que cambia su valor dependiendo del cambio que experimente la otra variable, es decir,*

<sup>4</sup> A fin de facilitar la lectura, en esta sección el lector encontrará imágenes repetidas del mismo recipiente en diferentes lugares del texto. Consideramos que esta repetición ayuda a una mejor comprensión evitando tener que buscar figuras en páginas anteriores para interpretar lo que se quiere expresar respecto de los recipientes analizados.



*la independiente. La variable controlada es la que se deja constante para poder ver qué sucede con las otras dos.”*

Buscamos resolver la dificultad en la identificación de las variables dialogando con los grupos retomando el material de la profesora y revisando la experimentación.

Las hipótesis que formulaban los estudiantes surgían a partir de los datos experimentales y de la forma de los recipientes. Algunas hipótesis formuladas por los estudiantes, que reflejan lo dicho anteriormente, son las siguientes:

*“Dado que la sección el **recipiente 1** [figura 10] tiene una forma cúbica, cada vez que se colocan  $40\text{ cm}^3$  de volumen de agua, aumenta  $0,6\text{ cm}$  el nivel del agua”.*



Figura 10: Recipiente 1 del grupo “Los Descartables”.

*“El **recipiente 2** [figura 11] es cilíndrico pero a determinada altura, el diámetro aumenta, por lo tanto la capacidad de agua que puede entrar, también aumenta. Entonces cuando el agua alcanza a esa parte del recipiente, la altura del agua disminuye, en comparación con las alturas anteriores”.*



Figura 11: Recipiente 2 del grupo “Los Descartables”.

No hubo complicaciones con la formulación de hipótesis, ya que en los trabajos que los estudiantes habían realizado anteriormente, ésta fue una de las tareas que llevaron a cabo.

Por otra parte, no hubo complicaciones para graficar los puntos y ajustar el “rango de la cuadrícula” en el Graphmatica. Debemos destacar que unas semanas antes de comenzar nuestras prácticas, la docente había repasado la ubicación de puntos en los ejes cartesianos usando este software. Los estudiantes mostraron un buen manejo de la herramienta.

El grupo “Los Einstein” confeccionó el gráfico que se presenta en la figura 13, a partir de los datos que obtuvieron del recipiente que se muestra en la figura 12



Figura 12: Recipiente 1 del grupo “Los Einstein”.

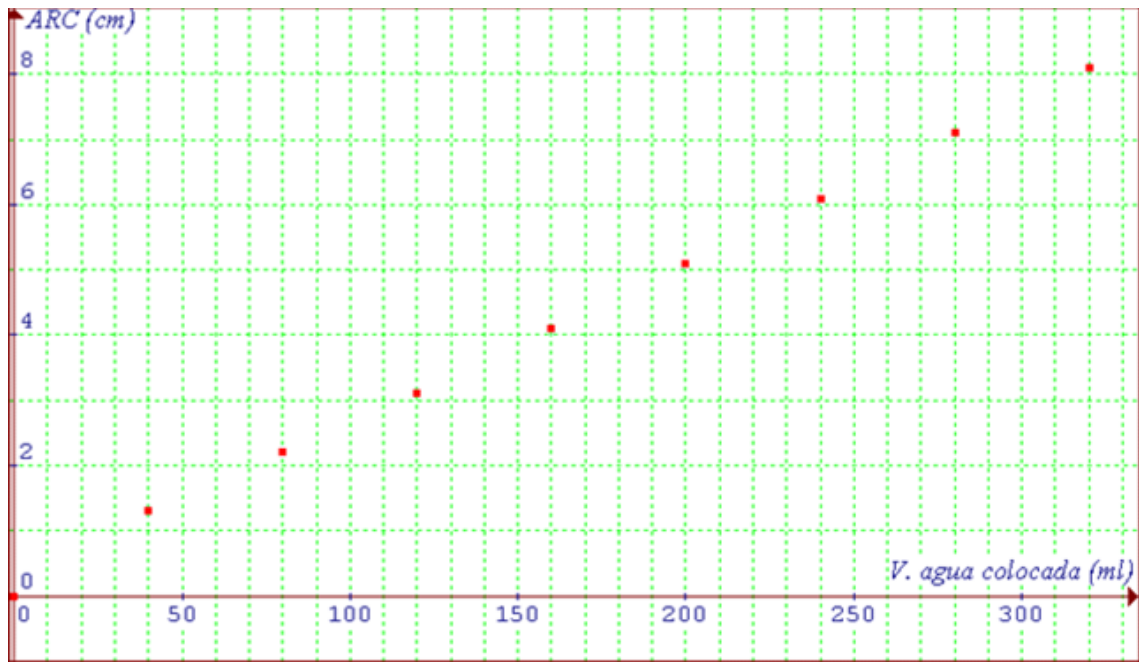


Figura 13: Gráfico correspondiente al recipiente 1 del grupo “Los Einstein”.

Podemos observar que es aproximadamente una relación de proporcionalidad directa.

El grupo “Los Pitagóricos”, a partir del recipiente que se muestra en la figura 14, realizó el gráfico correspondiente al mismo que se presenta en la figura 15



Figura 14: Recipiente 2 del grupo “Los Pitagóricos”.

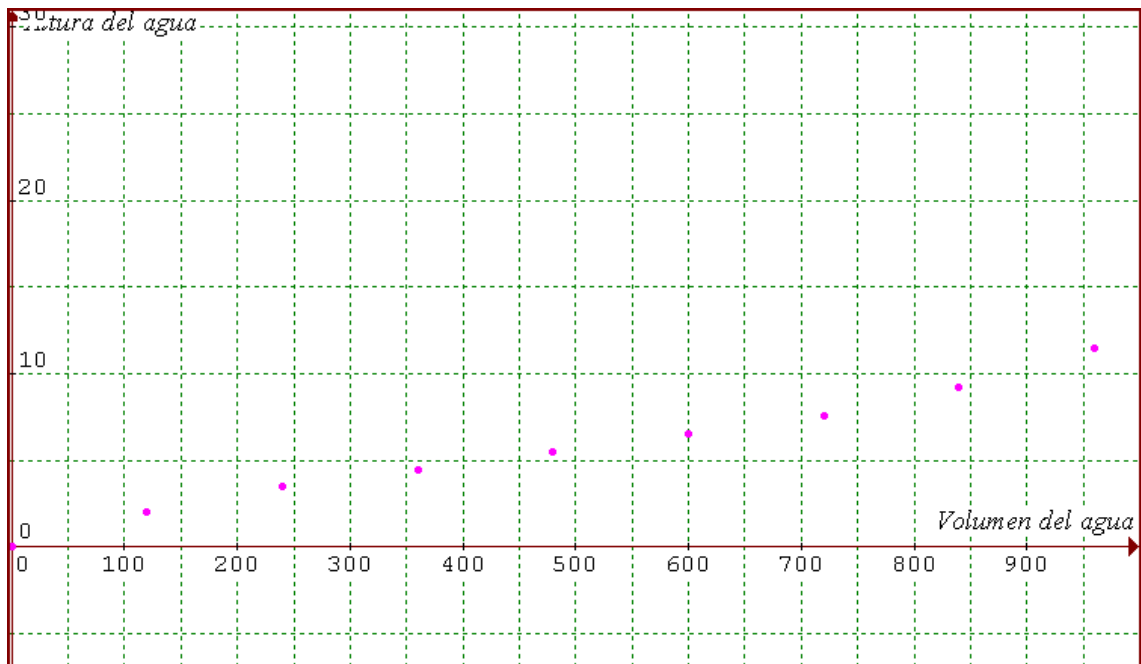


Figura 15: Gráfico correspondiente al recipiente 2 del grupo “Los Pitagóricos”.

Las siguientes conclusiones referidas al recipiente de la figura 14 fueron extraídas del informe de ese grupo. Las oraciones en **negrita** son sus hipótesis y lo que sigue, las justificaciones sobre la veracidad de estas hipótesis.

**“Si la forma del recipiente donde se coloca el agua es irregular, la variación de la altura del nivel del agua variará irregularmente. Verdadera. Porque no existe ninguna relación de proporcionalidad directa.**

**En la parte cilíndrica del recipiente 2, el aumento del nivel del agua irá disminuyendo hasta cierto punto, en el que comenzará a aumentar. Verdadera. Ya que en la parte del medio (esférica) del recipiente 2 hay más capacidad de agua por lo que el nivel del agua aumentará menos.**

**En la parte regular del recipiente 2 (cilindro superior), el nivel del agua aumenta de forma regular. Verdadera. Porque si la forma del recipiente donde se coloca el agua es regular, la variación de la altura del nivel del agua siempre será regular”.**

Aquí podemos observar que este grupo hizo una hipótesis general del recipiente 2, que caracterizan como “irregular”. A fin de analizar la variación del nivel del agua en el recipiente, lo dividieron en tres partes: (1) cuando la variación de la altura del nivel del agua va disminuyendo, (2) cuando comienza a aumentar y (3) la parte del cilindro superior (ver figura 16).

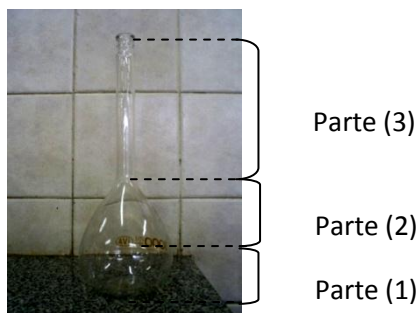


Figura 16: Partes del recipiente 2 del grupo “Los Pitagóricos”.

Durante el desarrollo de esta actividad los grupos expusieron, en una puesta en común, los recipientes con los que habían trabajado, las variables que identificaron y las hipótesis que formularon. En estas presentaciones se observó fluidez al hablar y uso de terminología adecuada.

Todos los grupos realizaron el informe de acuerdo a las pautas establecidas en la actividad y la mayoría confeccionó una presentación del recipiente 2 -aquel que no presentaba una relación de proporcionalidad directa entre la altura del nivel del líquido y el volumen de agua colocado- utilizando PowerPoint o Prezi.

En los informes y en las presentaciones orales, los estudiantes definieron los recipientes como regulares o irregulares dependiendo de la relación que había entre las dos variables consideradas. Generalmente, los análisis que hicieron los estudiantes sobre el recipiente 1 manifestaban que el incremento de la altura del nivel de agua era “gradual”, “constante”, “siempre igual”, “secuencial”, y algunos grupos concluyeron que existía una relación de proporcionalidad directa. Mientras que sobre el recipiente 2 basaron su análisis expresando que no existía una variación regular en la altura del nivel del agua debido a la forma del recipiente o a los datos experimentales.

A continuación se presentan algunas conclusiones obtenidas por los grupos que reflejan lo dicho anteriormente.

El grupo “Wendy Padilla” expresó en la presentación oral:

*“En el recipiente 1 [figura 17], existe una relación de proporcionalidad directa entre la altura del nivel del líquido y el volumen de agua, aumentando 0,5 cm de altura del nivel del agua cada 20cm<sup>3</sup> de volumen agregado, ya que como el radio es el mismo en todos los puntos de éste, siempre aumenta.”*



Figura 17: Recipiente 1 del grupo “Wendy Padilla”.

*“En el recipiente 2 [figura 18], no existe una secuencia constante en el aumento del nivel del agua cuando se agrega la misma, aumentando así su volumen: ya que el radio de este recipiente varía en los distintos puntos. Quiere decir que a medida que vamos aumentando la cantidad de volumen de agua agregada, la altura del agua va a aumentar pero de forma irregular, porque si por ejemplo partimos por sección el recipiente, de forma paralela a la base, en cada sección el radio va a ser distinto entonces la altura del agua va a aumentar irregularmente”.*



Figura 18: Recipiente 2 del grupo “Wendy Padilla”.

Aquí se muestra que el grupo concluyó que en el recipiente 1 había una “relación de proporcionalidad directa” y en el recipiente 2 no existía tal relación pensando a ésta como la ausencia de una “secuencia constante”. También se puede observar la caracterización del recipiente 2, definiéndolo a partir de secciones paralelas a la base.

El grupo “Los Einstein” escribió en el informe la siguiente conclusión:

*“No pudimos encontrar una relación de proporcionalidad directa con respecto a la altura del agua contenida en ninguno de los recipientes, pero si pudimos observar una cierta regularidad en cuanto a como iba creciendo la altura del agua en el recipiente nº 1 [figura 19], ya que por un largo período se observa que la altura del agua aumentaba de 1cm en 1cm, por lo cual asimila ser una relación de proporcionalidad directa (aunque no lo llega a ser). Esto está dado por la forma del envase, que el “diámetro” del envase es casi siempre del mismo ancho. Lo contrario sucede con el envase nº2 [figura 20], que presenta irregularidades con respecto al diámetro del mismo (se va ensanchando, y después vuelve a disminuir)”.*



Figura 19: Recipiente 1 del grupo “Los Einstein”.



Figura 20: Recipiente 2 del grupo “Los Einstein”

Este grupo no dejó de lado los errores de medición y las imperfecciones del recipiente, por lo cual sus conclusiones son netamente a partir de los datos experimentales.

El grupo “Los Matemáticos” -refiriéndose a las hipótesis que habían planteado- expresó oralmente:

*“La hipótesis del recipiente 1 [figura 21], dice que la altura en este recipiente aumenta de 0,5 cm en 0,5 cm [...] eso era porque el recipiente mantenía siempre la misma forma [...] la altura variaba pero mantenía siempre la misma secuencia”.*



Figura 21: Recipiente 1 del grupo “Los Matemáticos”.

*“En el recipiente 2 [figura 22], al disminuir el espacio el agua tiende a subir cada vez más con respecto al registro anterior, aumentando su altura. Y no tenemos una secuencia exacta, por eso no encontramos una relación de proporcionalidad directa, porque va variando”.*



Figura 22: Recipiente 2 del grupo “Los Matemáticos”.

Aquí se puede observar que hacen un análisis cuantitativo del recipiente 1, con ello expresan que encontraron una secuencia en la variación de la altura. Mientras que en el recipiente 2 hacen un análisis cualitativo afirmando que “al disminuir el espacio el agua sube más” y que no existe una relación de proporcionalidad directa debido a que no hay una “secuencia exacta”.

Podemos destacar algunas particularidades de los informes que realizaron los estudiantes. Entre ellas la confección de la tabla realizada por el grupo “Minutos para el 10” que se muestra en la figura 23.

Volumen de agua colocada (cm <sup>3</sup> )	Altura del recipiente 1(cm)	Altura de recipiente 2(cm)
0	0 <sup>+1,3</sup>	0 <sup>+1</sup>
50	1,3 <sup>+0,5</sup>	1 <sup>+0,4</sup>
100	1,8 <sup>+0,5</sup>	1,8 <sup>+0,8</sup>
150	2,3 <sup>+0,5</sup>	2,2 <sup>+0,8</sup>
200	2,8 <sup>+0,5</sup>	3 <sup>+0,8</sup>
250	3,3 <sup>+0,5</sup>	3,8 <sup>+0,8</sup>
300	3,8 <sup>+0,5</sup>	4,6 <sup>+0,8</sup>
350	4,3 <sup>+0,5</sup>	5,4 <sup>+1,4</sup>
400	4,8 <sup>+0,5</sup>	6,8

Figura 23: Tabla confeccionada por el grupo “Minutos para el 10”.

Aquí podemos observar que los valores que están en el superíndice corresponden a los incrementos de la altura del nivel del agua que los chicos obtuvieron en su experimento. Es importante notar que esa manera de registrar los datos ayuda a diferenciar una relación de proporcionalidad directa de otra que no lo es.

La siguiente particularidad corresponde a la formulación de hipótesis del grupo “Los Einstein”:

*“La primera hipótesis que surgió fue que el segundo recipiente, al tener un diámetro que se iba ensanchando, iba a tener más volumen, y por lo tanto, la altura del líquido, iba a ser menor.*

*Para entender las hipótesis, es necesario comprender lo que nosotros consideramos como ‘diámetro’ en este experimento. Le llamamos diámetro del ancho del recipiente, al diámetro de unas circunferencias imaginarias realizadas haciendo cortes paralelos a cada base de los recipientes”.*

Aquí podemos ver que este grupo definió lo que entendía por diámetro de un recipiente, ya que el diámetro es una definición que corresponde a una figura plana.

El mismo grupo confeccionó el siguiente gráfico -figura 24- para verificar la siguiente hipótesis: “En algún momento del experimento, la altura de los dos recipientes serían iguales [...]”

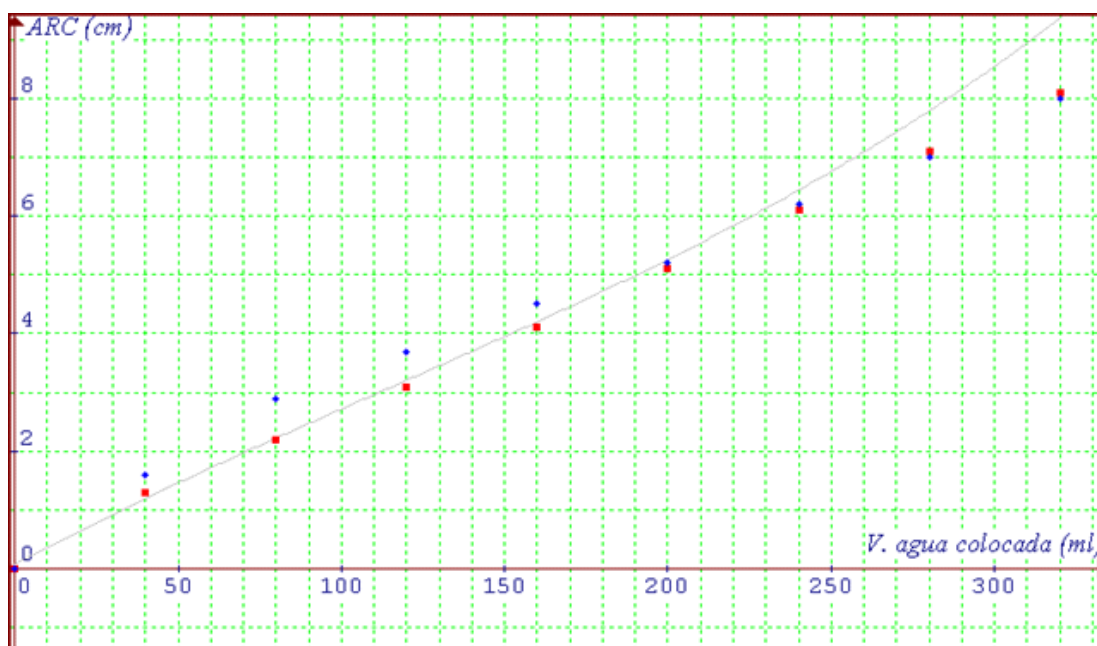


Figura 24: Gráfico confeccionado por el grupo “Los Einstein”.

El siguiente fragmento fue extraído del análisis del gráfico anterior realizado por el grupo en la presentación oral:

*“Nosotros hicimos un gráfico que están representadas las alturas de ambos recipientes. Los puntos rojos [cuadrados] que representa el primer recipiente y el azul [circulares] el segundo recipiente. Ahí se puede ver cómo fueron variando...nunca llegó a alcanzar la misma altura, por 0,1 cm pero puede ser por un error de medición, puede haber sido al colocar el agua...”*

En este análisis de los estudiantes, se puede observar su decisión al querer vincular los dos recipientes, despreciando la forma de cada uno. Además, se observa su consideración sobre los errores en la medición, afirmando que debido a ellos no pudieron asegurar en su totalidad una de las hipótesis planteadas.

Cuando planificamos la actividad experimental supusimos que los análisis que realizarían los grupos acerca del recipiente 1 serían similares y que las diferencias estarían en los recipientes 2. Así, decidimos que los estudiantes presentaran en forma oral sus análisis del recipiente 2 y nosotras hacer un cierre del recipiente 1.

Dicho cierre comenzó retomando el objetivo de la actividad experimental y las conclusiones que obtuvieron los estudiantes sobre el recipiente 1. Luego, se les mostró una simulación en GeoGebra que consiste en un recipiente cilíndrico al cual se le van colocando 40 cm<sup>3</sup> de agua y simultáneamente, se muestra en los ejes cartesianos los puntos correspondientes a la altura que alcanza el nivel del agua en el recipiente en función de la cantidad de agua colocada en el mismo. En la figura 25 se pueden ver cuatro capturas de pantalla de esta simulación. Para mostrar cada paso de la simulación se preguntaba a los estudiantes cómo iba variando la altura del nivel del

agua a medida que se agregaba  $40 \text{ cm}^3$  de agua y los estudiantes respondían el valor numérico adecuado. Luego se les preguntó: “si colocamos cualquier volumen de agua en el recipiente, ¿cómo hacemos para encontrar qué altura alcanza?” A través del diálogo se llegó a que la relación que mantenían las variables era de proporcionalidad directa. Además se buscó la constante de proporcionalidad de la relación que muestra la simulación.

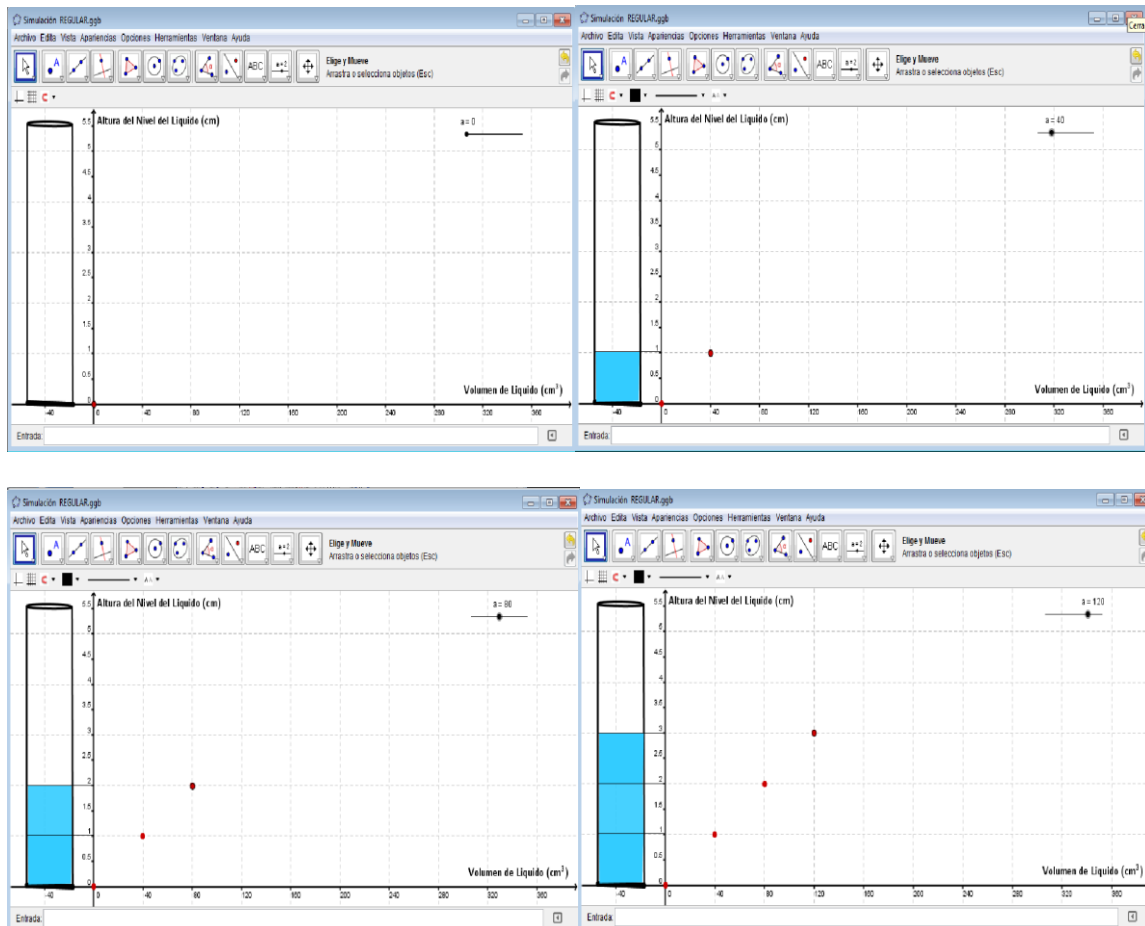


Figura 25: Capturas de pantalla de la simulación

Luego de este cierre, cada grupo presentó de manera oral con algún soporte digital - PowerPoint, Prezi, Word, video- las variables, las hipótesis, el gráfico y las conclusiones sobre el recipiente 2. La presentación de todos los grupos llevó aproximadamente 80 minutos.

### 2.1.5. El repaso y una primera evaluación

Como estaba finalizando el segundo trimestre, la profesora del curso nos solicitó que colocáramos una nota basada en la actividad experimental desarrollada. Entonces decidimos que esta nota se constituiría a partir de la evaluación de tres tareas: la entrega del informe final (30% de la nota final), la presentación oral en grupo (20 % de la nota final) y un cuestionario individual (50% de la nota).

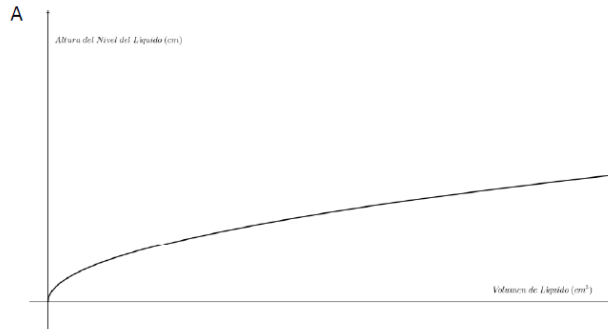
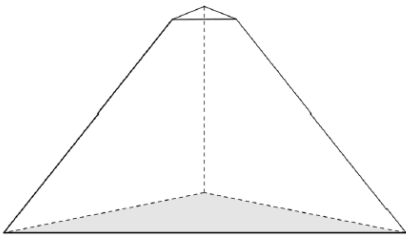
Antes de realizar el cuestionario, hicimos una actividad de repaso. En la misma se mostraban imágenes de distintos recipientes y diferentes gráficos cartesianos que representaban relaciones entre el volumen de agua colocado en un recipiente arbitrario y la altura del nivel alcanzado por el agua en el mismo. La finalidad de esta actividad era relacionar cada recipiente con el correspondiente gráfico. A continuación mostramos esta actividad.



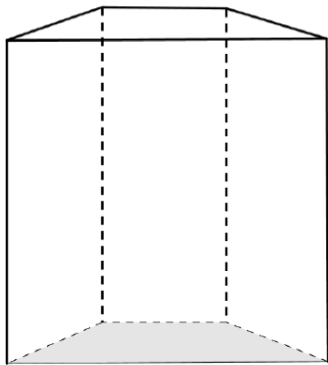
ACTIVIDAD

Un grupo de estudiantes realizó una experiencia similar a la que hicieron ustedes y obtuvieron un gráfico de cada recipiente, pero el viento les voló las hojas de dichos gráficos. Identifiquen cada gráfico con su recipiente y justifiquen con sus palabras por qué decidieron relacionar ese recipiente con ese gráfico.

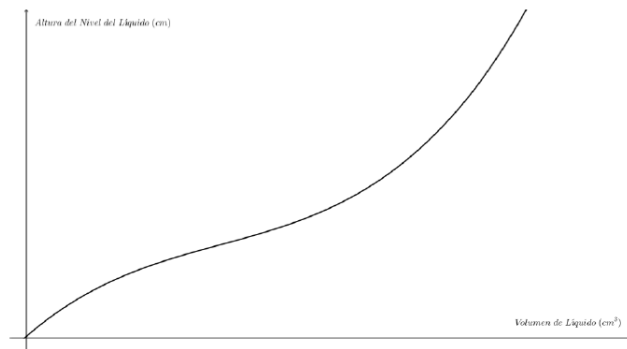
1



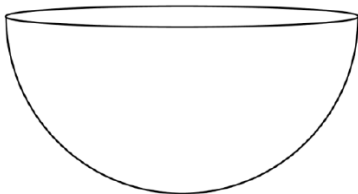
2



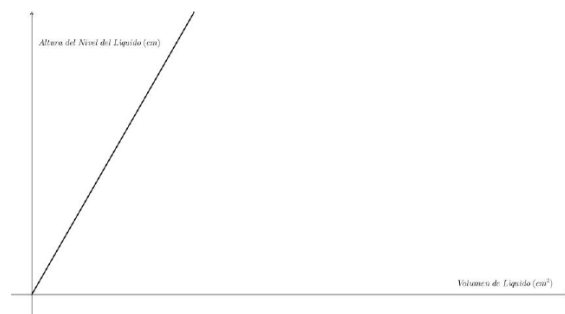
B

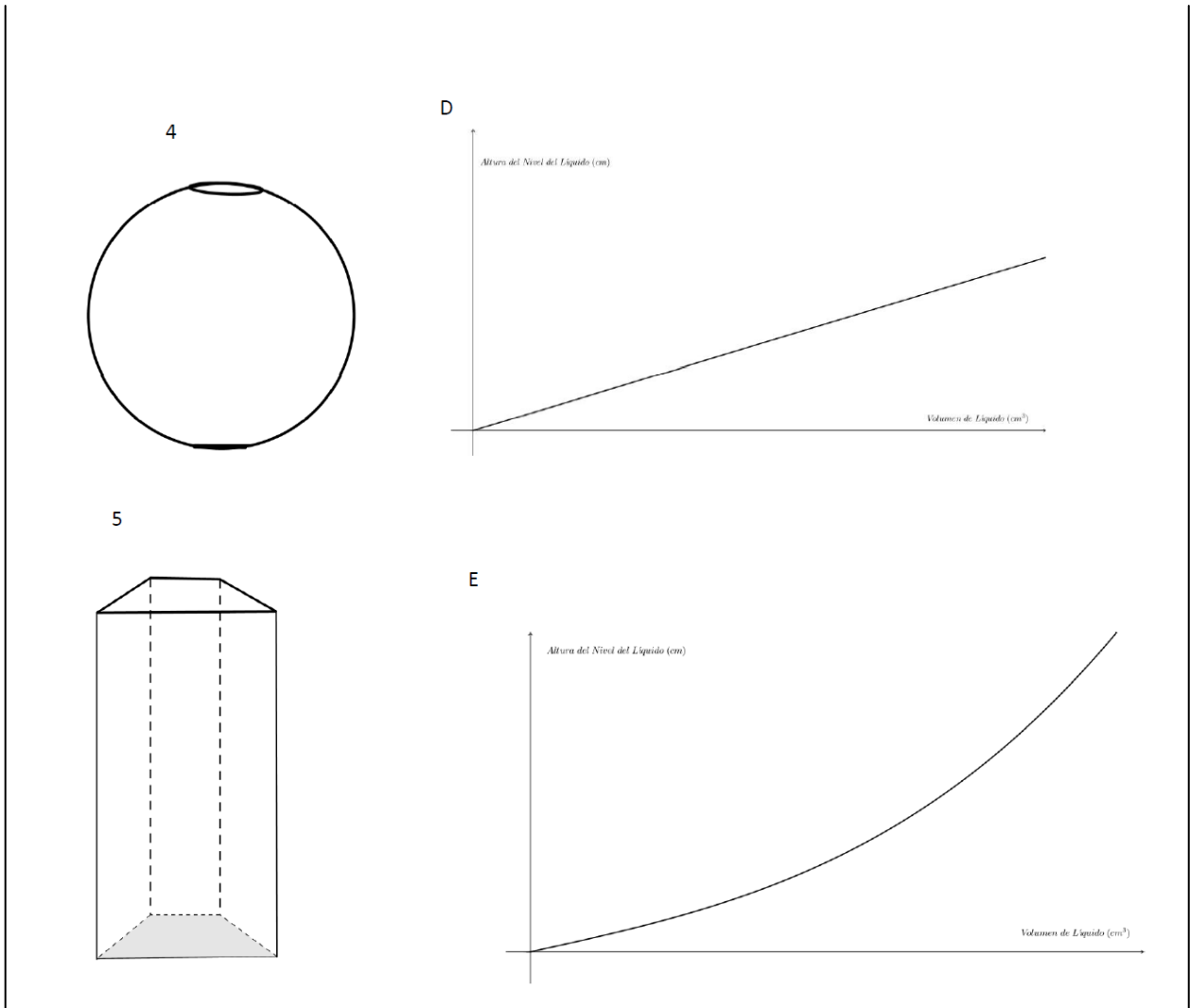


3



C





Esta actividad fue distribuida a los estudiantes por medio del programa maestro. Podían elegir trabajar en grupo o individualmente. Se dedicaron quince minutos para su realización y se hizo una puesta en común entre todos, usando la pizarra digital, mostrando cada recipiente con su gráfico.

La mayoría de los estudiantes pudo vincular cada recipiente con su respectivo gráfico, explicando el porqué de dicha vinculación (1-E, 2-D, 3-A, 4-B, 5-C).

Algunos de los argumentos expuestos por los estudiantes fueron:

*“Al recipiente 1 lo relaciono con el gráfico E, ya que en el gráfico se muestra como al principio la altura no aumenta mucho -ya que la base del recipiente es ancha-, luego en la parte del medio se va achicando y por último la altura en el gráfico aumenta, -ya que la parte superior del recipiente es finita”.*

*“Yo elegí ese gráfico [se refiere al A] porque comienza angosto abajo y a medida que va subiendo se va haciendo más ancho [se refiere al recipiente 3]”.*

*“Yo elegí para el recipiente 2 el gráfico D, porque el recipiente es regular, entonces hay una relación de proporcionalidad directa y además este recipiente es más ancho que el otro recipiente regular -el 5- por lo que el agua aumentará más lentamente”.*

*“La figura primero es finita, luego se ensancha [se refiere al recipiente 4], y después se termina afinando. El gráfico [se refiere al B] va a ser, primero la altura sube, luego se mantiene estable más o menos y después sube bruscamente”.*

Retomando las justificaciones de los estudiantes buscábamos analizar de manera intuitiva, la concavidad y convexidad de los gráficos en relación a la forma de los recipientes. Además se pretendía aclarar que la “irregularidad” en los aumentos de la altura del nivel del líquido, correspondía a incrementos crecientes o decrecientes dependiendo del recipiente. Con el recipiente “esférico” se quería mostrar ambas concavidades en un mismo gráfico. En cuanto a los dos recipientes de sección constante, se buscaba analizar la pendiente de la recta.

Después de esta actividad se realizó el cuestionario individual antes referido. Previamente se había anticipado que el mismo estaría relacionado con la actividad experimental, con proporcionalidad directa y con la actividad de repaso.

Se elaboraron dos cuestionarios, tema A y B. Cada uno presentaba cuatro ejercicios: uno referido a la identificación de las variables de la experiencia, otro que consistía en completar una tabla a partir de una figura de un recipiente, un tercer ejercicio en el que también debían completar una tabla pero a partir de un recipiente de sección constante y un último ejercicio que mostraba un gráfico donde debían dibujar el recipiente que le correspondía. En todos los ejercicios se pedía justificación sobre las respuestas realizadas. Se decidió realizar este cuestionario en formato papel y no digital, ya que habíamos tenido problemas con la conexión a internet y con la distribución de archivos por medio del programa maestro.

A continuación se muestra el tema A.

**MATEMATICA**

**2° AÑO**

**AÑO LECTIVO 2012**

**NOMBRE Y APELLIDO:**

**CUESTIONARIO**

Contesten en forma individual el siguiente cuestionario teniendo en cuenta la actividad experimental que realizaron en grupo.

1. En la experiencia, ¿Cuál era la variable independiente y cuál la dependiente?

2. Un grupo de alumnos realizó el mismo experimento que ustedes, trabajando con un recipiente como el de la figura 1. Luego de echar un volumen de 50 cm<sup>3</sup> en el recipiente, midieron la altura del nivel alcanzado por el líquido y escribieron ese dato como se muestra en la tabla 1. Repitieron ese procedimiento cinco veces más. Teniendo en cuenta la forma del recipiente, completa la tabla con los valores que faltan de manera que represente aproximadamente la relación que existe entre el volumen de agua colocado en el recipiente y la altura del nivel del líquido en el mismo. Explica brevemente con tus palabras por qué elegiste esos valores para la altura del nivel del líquido.

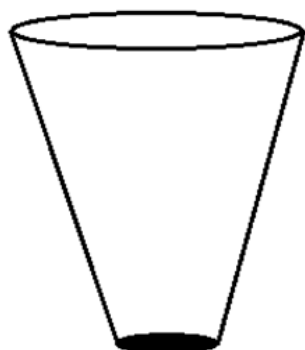


Figura 1

Volumen del líquido colocado (cm <sup>3</sup> )	Altura del nivel del líquido (cm)
0	
50	4
100	
150	
200	
250	
300	

Tabla 1

3. Supongamos que en el siguiente recipiente (figura 2) colocamos un cierto volumen de líquido y medimos la altura que alcanza en el mismo. Repitiendo este procedimiento seis veces completa la tabla 2 que

sigue a continuación teniendo en cuenta la forma del recipiente. Justifica la elección de los valores que escribiste en la tabla.

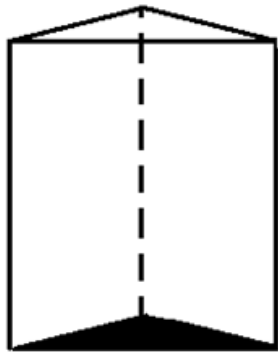
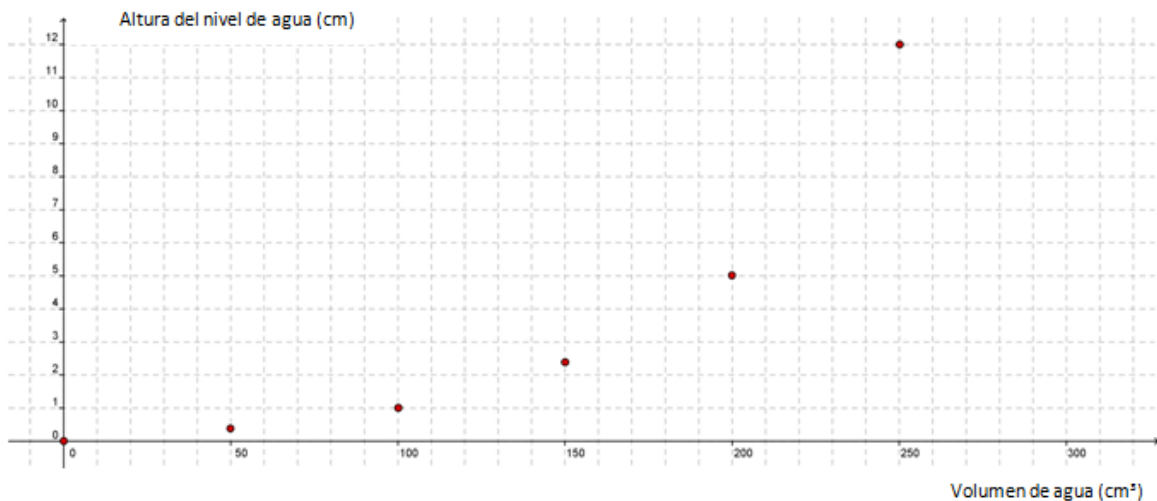


Figura 2

Volumen del líquido colocado ( $cm^3$ )	Altura del nivel del líquido ( $cm$ )
	0
80	1,6
160	
	4,8
	6,4
400	
500	

Tabla 2

4. En un experimento similar al que realizaron en el laboratorio, un grupo de alumnos obtuvo el siguiente gráfico. ¿Podrías explicar qué forma aproximada tenía el recipiente y dibujarlo?



A continuación nos referimos a las expectativas que teníamos en relación al cuestionario. Respecto del primer inciso esperábamos que no hubiera dificultad, ya que se había hecho énfasis en la identificación de variables tanto en el armado del informe como en la presentación oral. En cuanto al segundo, aunque no se había trabajado el completar una tabla a partir de una figura, pensamos que no presentaría mayor dificultad más allá de la relacionada con el crecimiento o decrecimiento del incremento de la altura del nivel del agua. Con respecto al tercero, creímos que la dificultad estaría en el último par de datos, ya que el incremento del volumen de agua no es el mismo que se venía considerando en los datos previos. En el cuarto, a pesar de que no se realizó una actividad en la cual a partir de puntos de un gráfico se representara un recipiente, suponíamos que no tendrían grandes dificultades, pues en la actividad de repaso se había trabajado la relación entre gráficos y recipientes.

### 2.1.6. Los criterios de valuación

Durante la realización de la actividad experimental y antes de la aplicación del cuestionario, se elaboraron los criterios para evaluar el informe grupal de la actividad experimental, la presentación oral y el cuestionario individual. Para confeccionarlos tuvimos en cuenta de qué manera el grupo cumplió los requisitos del informe -establecidos en la actividad experimental-; la organización, los medios audiovisuales y la terminología usados en la presentación oral; y los posibles errores que podrían cometer los estudiantes en el cuestionario.

Cabe aclarar que se realizaron modificaciones en los criterios sobre el cuestionario, después de que los estudiantes lo hicieron. Dichas modificaciones estaban relacionadas con errores que no habíamos previsto y con la justificación de los incisos. En el momento de valorar las diferentes justificaciones, se tuvo en cuenta que las mismas fueran coherentes con la respuesta.

A continuación se presentan estos criterios de evaluación.

#### EVALUACIÓN

<b>Nombre del grupo</b>	
<b>Integrantes</b>	
<b>Curso</b>	

La evaluación comprende tres actividades:

- 1) La entrega del informe final que representa el 30% de la nota.
- 2) Presentación oral por grupo que representa el 20% de la nota.
- 3) Realización en clase de un cuestionario individual que representa el 50% de la nota.

#### **1) CRITERIOS DE EVALUACIÓN SOBRE EL INFORME FINAL:**

##### **A) Identificación de variables (5 puntos)**

<b>PUNTOS</b>	<b>DESCRIPCIÓN</b>	
<b>0</b>	-Si identificaron mal las variables independiente y dependiente.	
<b>2</b>	-Si identificaron bien una de las dos variables. -Si identificaron bien las variables independiente y dependiente, pero confundieron la controlada con una de ellas.	
<b>5</b>	-Si identificaron bien la variable independiente y dependiente	

Identificar bien la variable independiente significa que reconocen que es el volumen total de líquido ingresado después de cada ingreso parcial e identificar bien la variable dependiente significa que reconocen que es la altura del nivel del líquido en el recipiente.

##### **B) Planteamiento de hipótesis (10 puntos)**

<b>PUNTOS</b>	<b>DESCRIPCIÓN</b>	
<b>0</b>	No enunciaron hipótesis sobre ningún de los dos recipientes	

4	Enunciaron hipótesis sobre uno de los recipientes	
5	Enunciaron hipótesis que no reflejan relación entre los datos y la forma del recipiente.	
9	-Enunciaron hipótesis sobre cada recipiente e indicaron las unidades de las variables. -No indicaron las unidades de cada variable.	
10	Enunciaron claramente hipótesis sobre cada recipiente e indicaron la unidad de cada variable.	

Enunciar claramente una hipótesis significa que sea coherente, que haya relacionado los puntos de la tabla con la forma del recipiente, que haya considerado el error en la medición y el borde en la base del recipiente.

### C) Imagen de los gráficos (5 puntos)

PUNTOS	DESCRIPCIÓN	
0	-No muestran los gráficos. -Identifican mal las variables en los respectivos ejes.	
2	-No se pueden visualizar todos los puntos -Muestra uno de los gráficos.	
4	-Identifican bien las variables en los respectivos ejes pero no colocan las unidades ni los rótulos correspondientes.	
5	Identifican bien las variables en los ejes, colocan las unidades y los rótulos correspondientes y se pueden visualizar todos los puntos de ambos gráficos.	

### D) Conclusiones alcanzadas (10 puntos)

PUNTOS	DESCRIPCIÓN	
0	No redactaron conclusiones	
4	Redactaron conclusiones que se corresponde con una de las hipótesis	
8	Redactaron conclusiones que se corresponden con ambas hipótesis	
10	Redactaron conclusiones que se corresponden con ambas hipótesis y sobre otras consideraciones de la experiencia que realizaron.	

**PUNTAJE ALCANZADO:** \_\_\_\_

### 2) CRITERIOS DE EVALUACIÓN SOBRE LA PRESENTACIÓN:

A continuación se presentan los porcentajes máximos de cada criterio:

-Forma de organizarse: uso adecuado del tiempo, espacio y recursos, además de la selección y organización de cada estudiante al hablar. Le corresponde el 7 pts.

Puntaje alcanzado: \_\_\_\_

-Uso de terminología adecuada, unidades y coherencia en las hipótesis y conclusiones. También consideraciones sobre los errores en la medición y los rebordes de la base de los recipientes. Le corresponde 6 pts.

Puntaje alcanzado: \_\_\_\_

-Uso de recursos audiovisuales. Le corresponde el 7 pts.

Puntaje alcanzado: \_\_\_\_

**PUNTAJE TOTAL ALCANZADO: \_\_\_\_**

**3) VALOR DE CADA ÍTEM DEL CUESTIONARIO:**

1) 5 pts. 2) 15 pts. 3) 15 pts. 4) 15 pts.

1)	2)	3)	4)
No identificó ninguna de las dos variables (0 pts.)	-No hacer el ítem. -Realizar mal el ítem (0 pts.)	-No completa la tabla -Completa mal la tabla (0 pts.)	-No realizó el dibujo -Realizó mal el dibujo (0 pts.)
Identificó bien solo una de las variables (2,5 pts.)	Completó la tabla inadecuadamente y justificó bien. (4 pts.)	Completó la tabla mal y justificó bien. (3 pts.)	Realizó mal el dibujo y justificó bien. (8 pts.)
Identificó bien las dos variables. (5 pts.)	Completó la tabla solo con algunos puntos correctamente y justificó inadecuadamente. (5 pts.)	Si completó bien la tabla, colocando mal el último punto y justificó bien. (10 pts.)	Realizó bien el dibujo y justificó mal. (10 pts.)
	Completó la tabla solo con algunos puntos correctamente y justificó adecuadamente. (7 pts.)	Completó la tabla correctamente y justificó mal. (11 pts.)	Realizó bien el dibujo y justificó bien. (15 pts.)
	Completó adecuadamente la tabla y justificó inadecuadamente. (14 pts.)	Completó la tabla correctamente y justificó bien. (15 pts.)	
	Completó adecuadamente la tabla y justificó adecuadamente. (15 pts.)		

**Aclaraciones**

1)

Realizar mal el ítem 2 significa completar la tabla de manera que dos puntos consecutivos y el siguiente punto presentan un incremento mayor o igual en la altura del nivel del líquido.

Realizar adecuadamente la tabla significa que el incremento de la altura del nivel del líquido va disminuyendo a medida que se coloca la misma cantidad de agua.

2) Completar mal la tabla significa que los datos no representan una relación de proporcionalidad. Completar correctamente la tabla significa que los datos representan una relación de proporcionalidad.

3) Realizar mal el dibujo del recipiente significa que si cortamos el mismo con un plano paralelo a la base la sección resultante es mayor que la base.  
Realizar bien el dibujo del recipiente significa que si cortamos el mismo con un plano paralelo a la base la sección resultante es menor que la base.

No se hará distinción entre las justificaciones bien realizadas.

**PUNTAJE ALCANZADO:** \_\_\_\_

**NOTA FINAL:** \_\_\_\_

### 2.1.7. Las respuestas de los estudiantes en el cuestionario

A continuación se muestran diferentes formas de resolver los ejercicios que nos pareció interesante rescatar para su análisis.

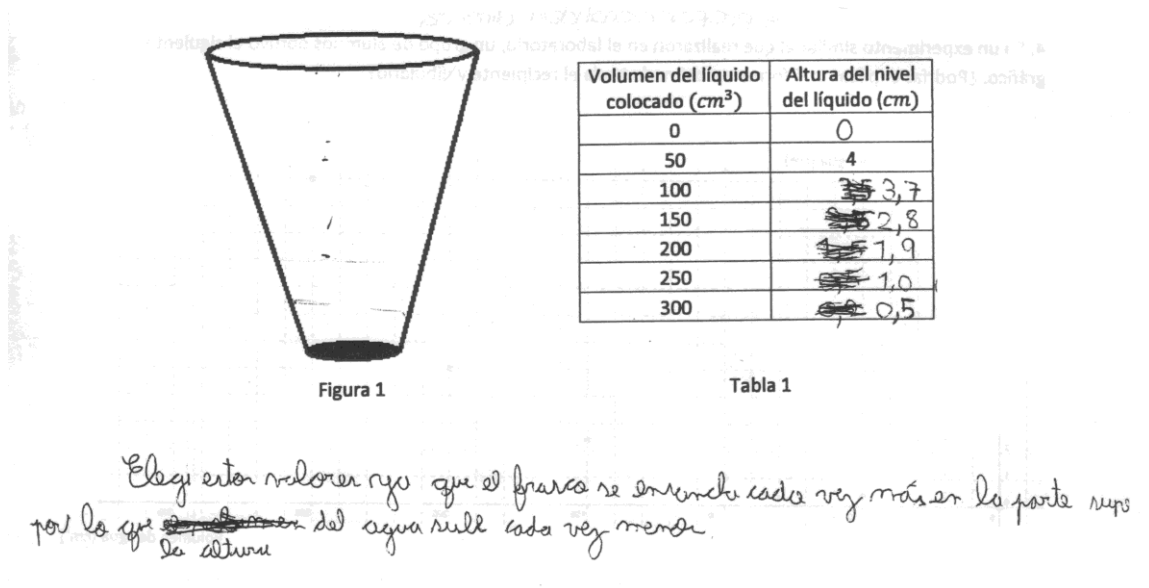


Figura 26: Resolución del ejercicio 2 del tema A.

En la imagen de la figura 26 se puede ver que el estudiante no completa la tabla según lo solicitado sino que construye una tabla que relaciona el volumen de agua en el recipiente con el incremento producido en la altura del nivel de agua siendo coherente con lo expresado en su propia justificación al decir que “[...] la altura del agua sube cada vez menos”. Este es un error que se repitió en otros estudiantes. Creemos que no se entendió completamente la consigna, pero sí la relación de la forma del recipiente con el modo en que varía el incremento del nivel del agua.



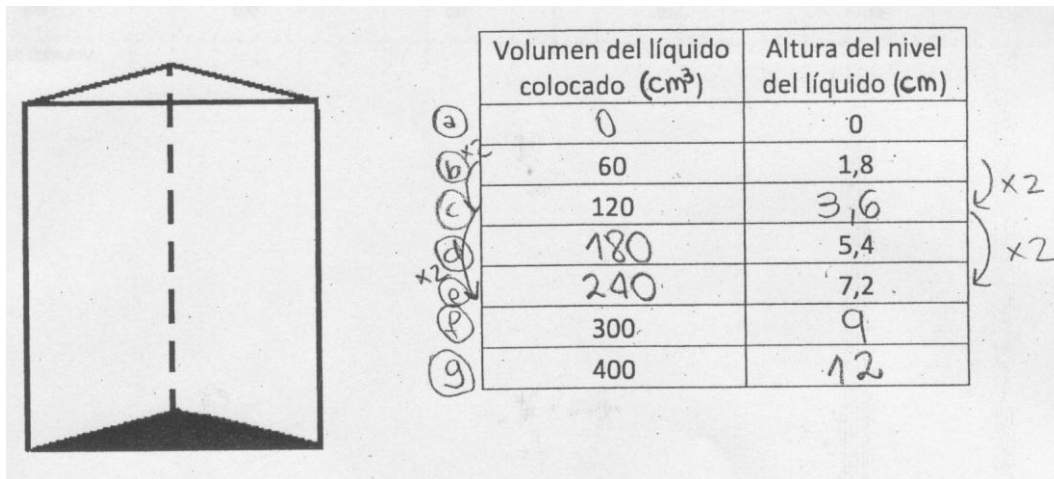


Figura 27: Resolución del ejercicio 4 del tema B.

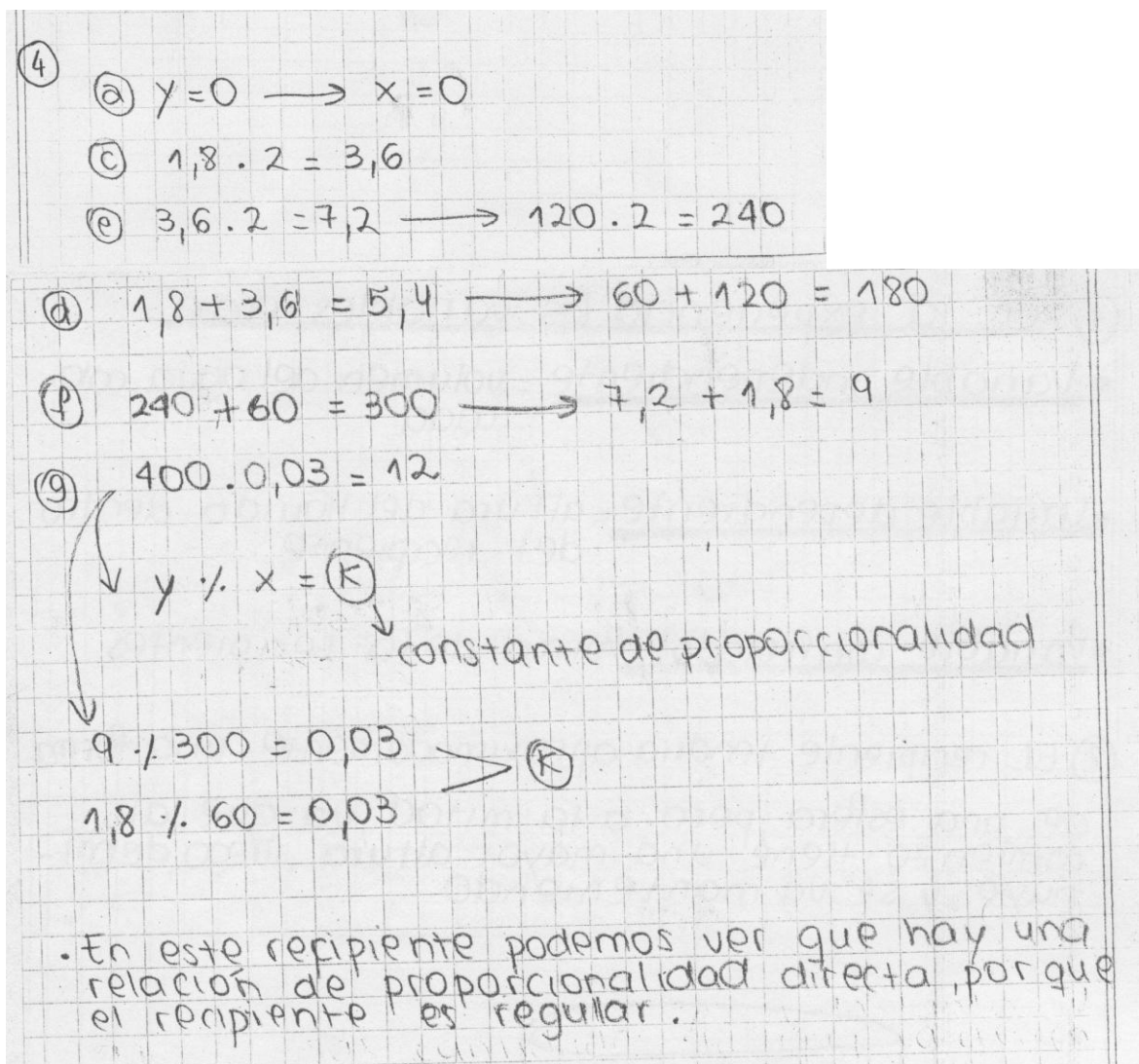


Figura 28: Justificación de los datos colocados en la tabla del ejercicio 4 del tema B.

En las imágenes de las figuras 27 y 28 se puede observar la forma de completar adecuadamente la tabla y su justificación a partir de la fórmula de proporcionalidad directa y de la característica "regular" del recipiente.

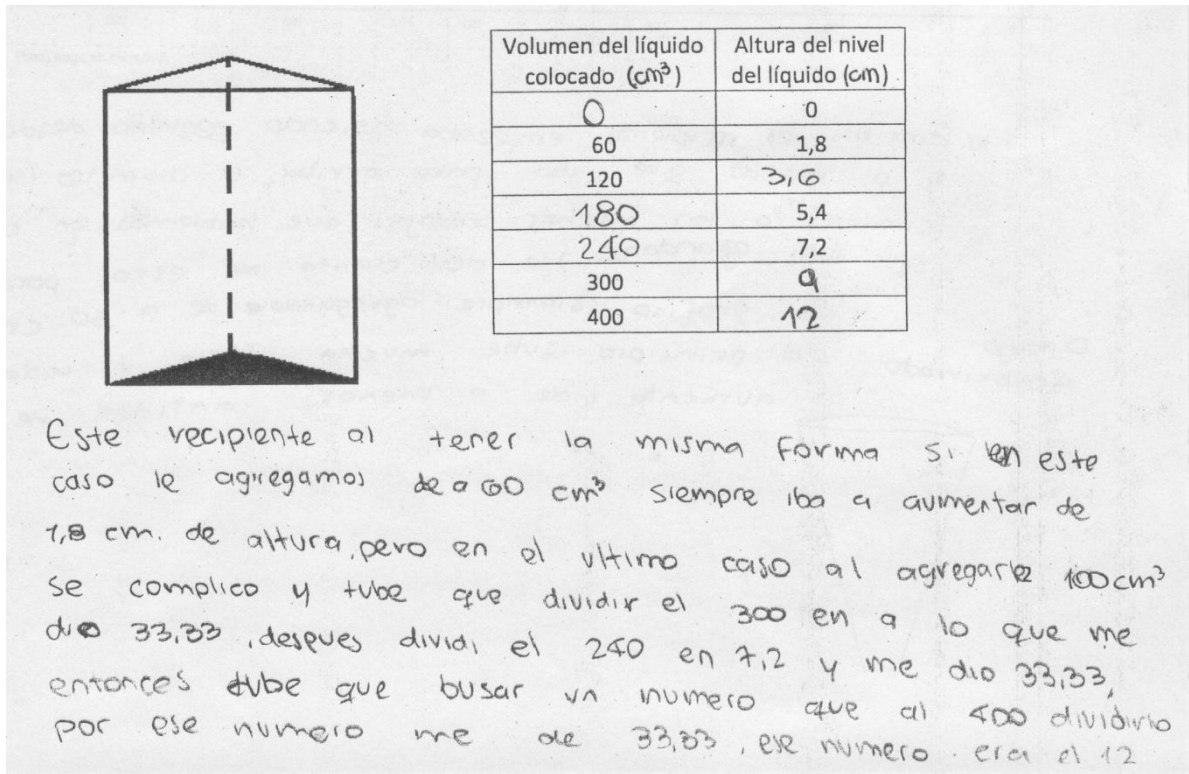


Figura 29: Resolución y justificación sobre el ejercicio 4 del tema B.

En la figura 29 se puede ver que este estudiante completó apropiadamente la tabla valiéndose de que el recipiente era de sección constante. Para averiguar el último dato, hizo una serie de cálculos y resolvió una ecuación.

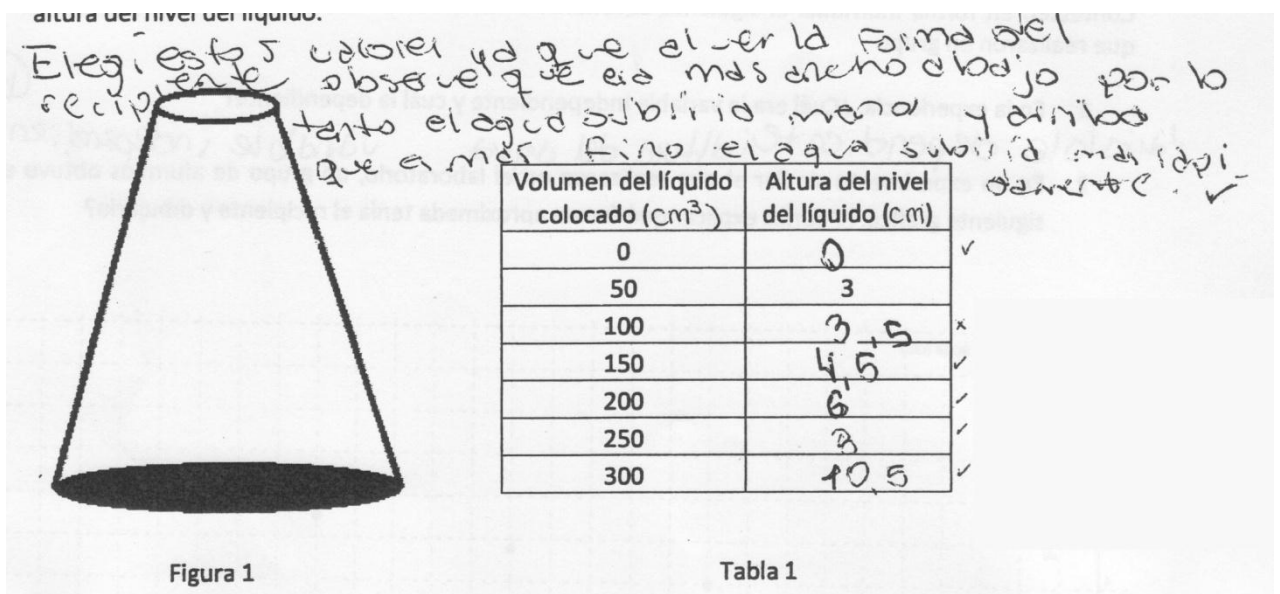


Figura 1

Tabla 1

Figura 30: Resolución del ejercicio 3 del tema B.

En el caso presentado en la figura 30, el estudiante completó adecuadamente la tabla considerando la variación de la altura del nivel del agua, pero no tuvo en cuenta el primer incremento que ya estaba colocado en la tabla, que correspondía a 3 cm.

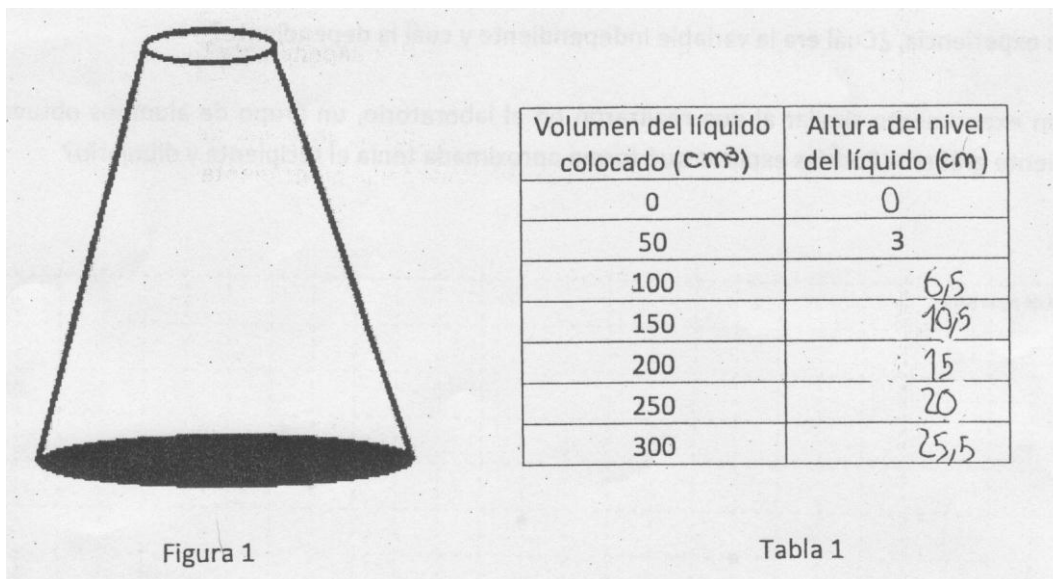


Figura 31: Resolución del ejercicio 3 del tema B.

3- Elegí esos valores por las siguientes razones:

- Si el recipiente fuera regular, habría una relación de proporcionalidad directa y su constante sería que cada 50 cm<sup>3</sup> de volumen de líquido colocado hay 3 cm de altura del nivel del líquido.
- Como el recipiente no es regular, no hay una relación de prop. directa.
- El recipiente tiene una forma cónica, por lo que el diámetro disminuye en la parte superior y aumenta en la parte inferior.
- Por estos últimos dos puntos, podemos decir que el aumento del nivel del agua, no será siempre igual, sino que será mayor a medida que el agua va subiendo.
- En conclusión, si cuando colocamos 50 cm<sup>3</sup> de líquido, la altura es de 3, cuando colocamos 100 cm<sup>3</sup>, el nivel del agua aumentará 3 cm, pero además, también se le sumarán 0,5 cm porque el diámetro del recipiente es menor.

Figura 32: Justificación del ejercicio 3 del tema B.

En las figuras 31 y 32 podemos ver cómo el estudiante relaciona varios asuntos que se pusieron de manifiesto durante las clases anteriores. Por un lado, la relación entre un recipiente "regular" y la proporcionalidad directa, y la afirmación que en este caso, al no ser regular, no hay tal relación. Por otro lado, hace un análisis cualitativo del recipiente para luego, relacionarlo con los datos cuantitativos que colocó en la tabla.

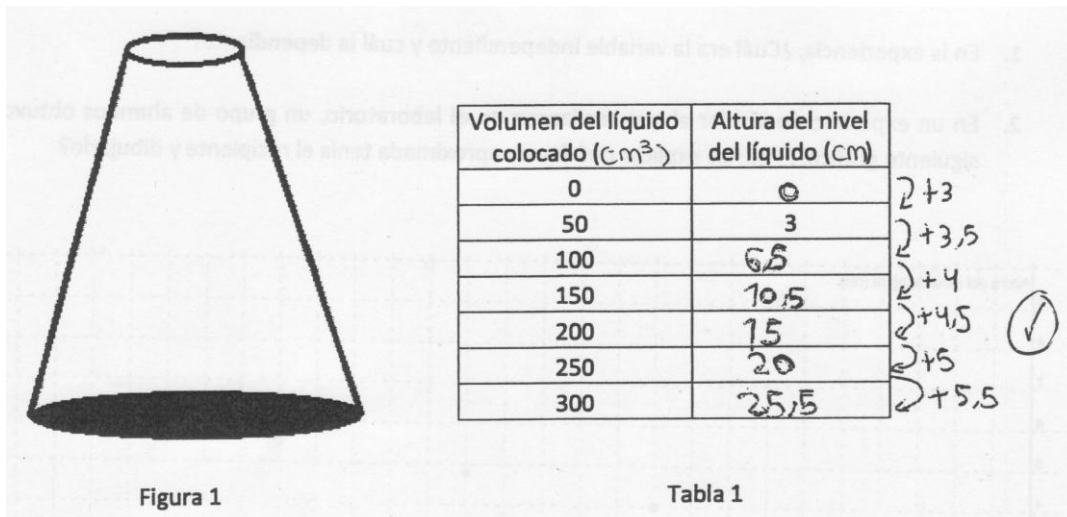


Figura 33: Resolución del ejercicio 3 del tema B.

Por último, en la figura 33 podemos ver que el estudiante completa la tabla relacionando apropiadamente los datos con la forma del recipiente. Por otra parte, coloca los incrementos de la altura del nivel del agua -también correctamente elegidos- al costado de la tabla, del mismo modo como lo habían realizado, con el grupo, en la tabla de la actividad experimental.

#### 2.1.8. Los resultados de la actividad experimental

Para terminar el relato de la primera parte de nuestras prácticas, presentamos la distribución de notas de cada división a través de dos histogramas que se muestran en las figuras 34 y 35.

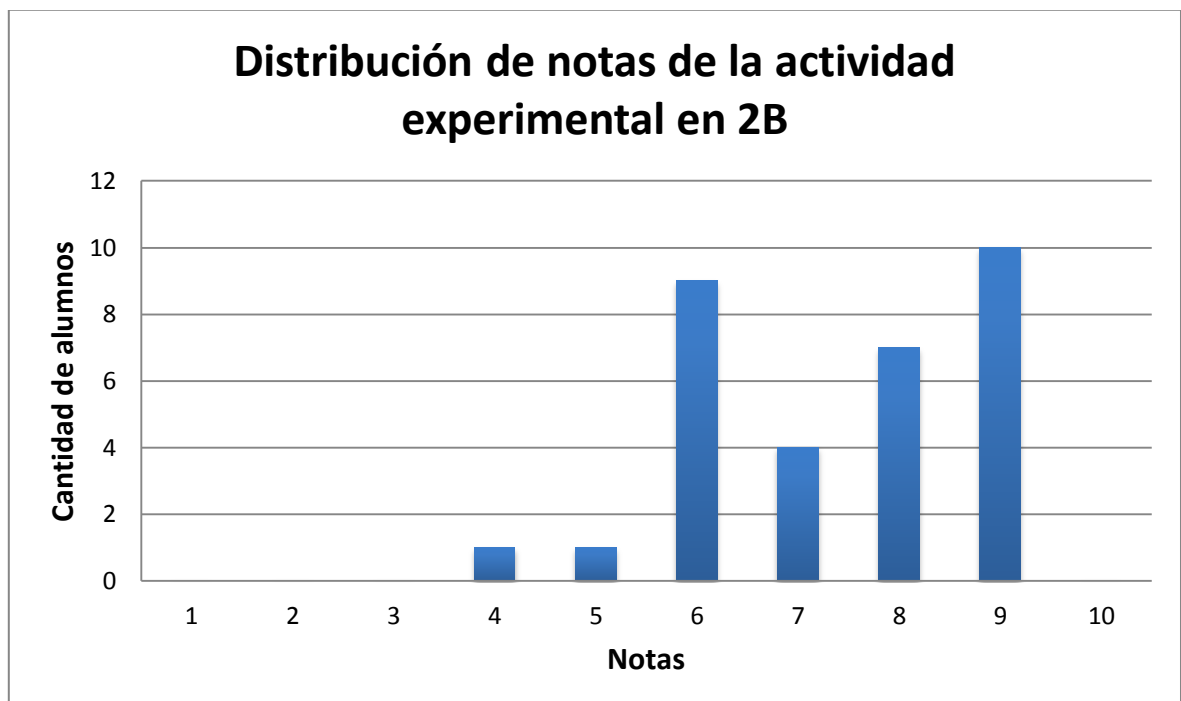


Figura 34: Histograma de notas de la actividad experimental correspondiente a segundo B.

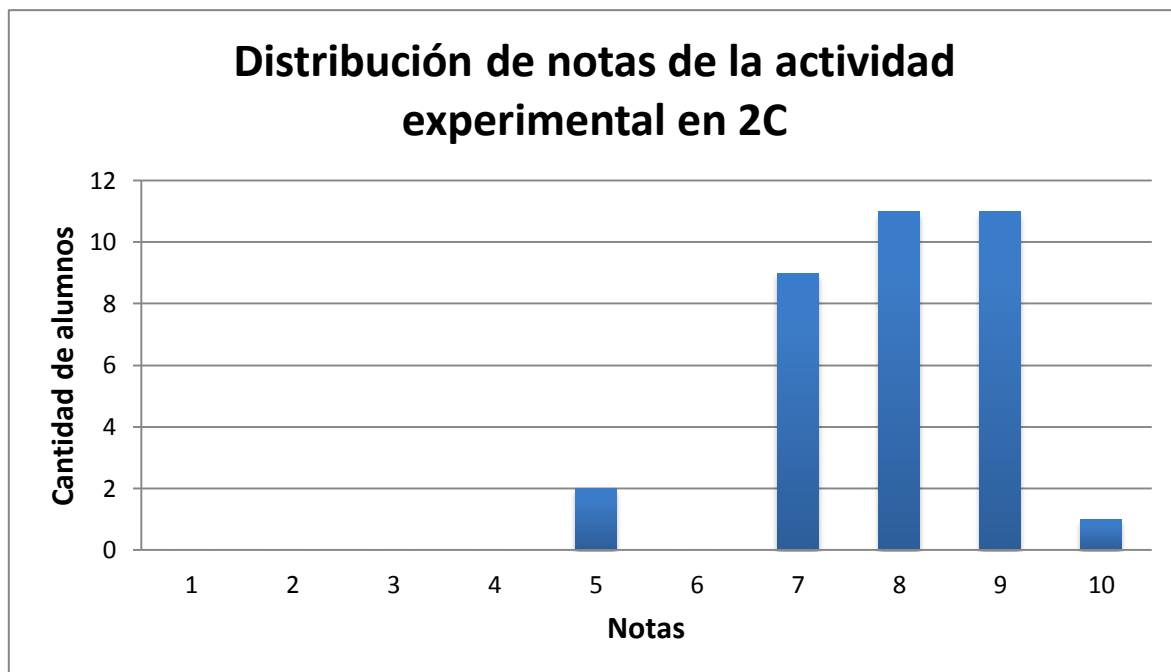


Figura 35: Histograma de notas de la actividad experimental correspondiente a segundo C.

En estos gráficos se puede observar que en un total de 65 alumnos hubo 4 desaprobados con nota 4 y 5. También puede observarse que el promedio de las notas está entre 7 y 8.

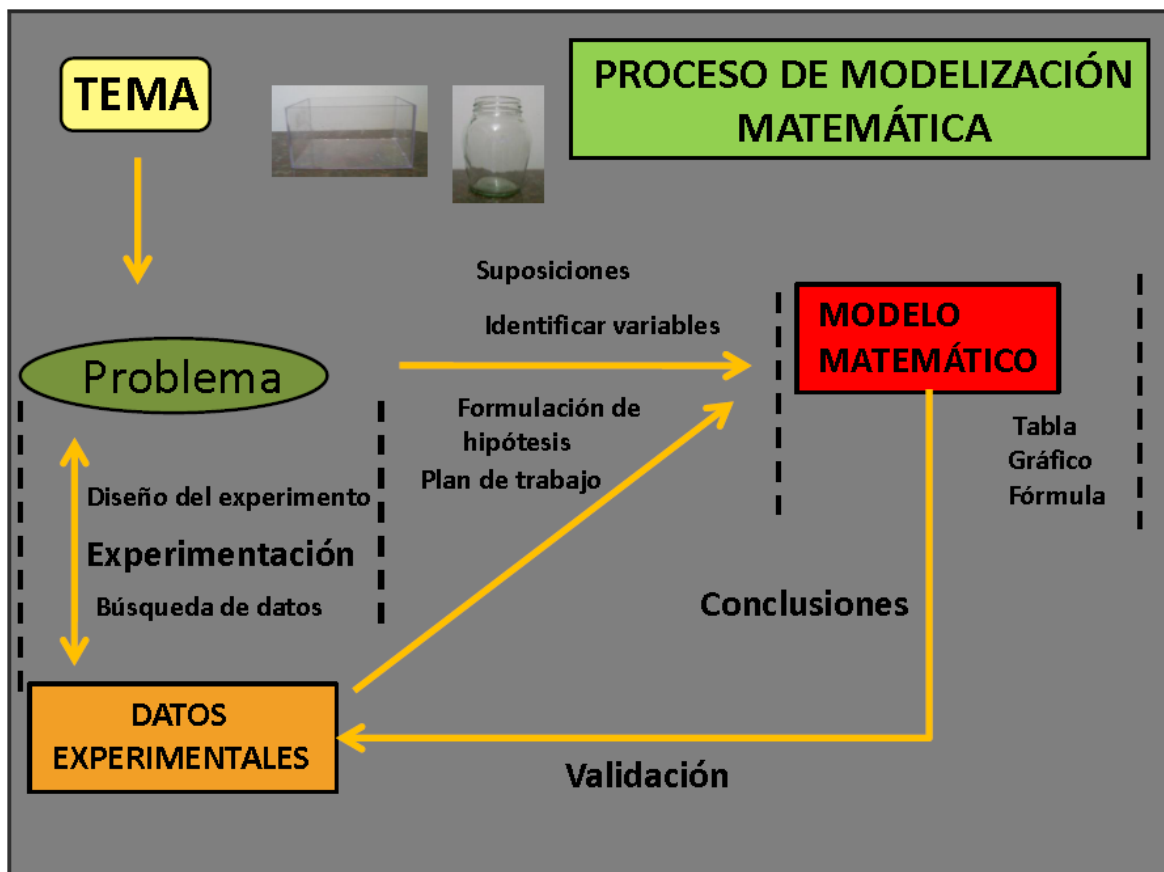
## 2.2. Segunda parte: Proyecto de Modelización Matemática

En la primera sub-sección de esta Segunda parte se describirá cómo se eligió y se presentó el esquema de modelización matemática. Las siguientes cuatro sub-secciones se referirán a las tareas realizadas por los alumnos desde el planteo del problema hasta la exposición de los proyectos grupales de modelización. Luego se mostrarán las pautas que los estudiantes debían seguir para la realización de este trabajo. En las sub-secciones 2.2.7 y 2.2.8 se presentarán los criterios de evaluación y los resultados de esta segunda actividad. Por último se mostrará el cierre de nuestras prácticas y algunas reflexiones finales.

### 2.2.1. La presentación del proceso de Modelización Matemática

Retomando el objetivo de la actividad experimental y la propuesta de la docente para nuestras prácticas -que consistía en transitar los pasos de un proceso de modelización- diseñamos un esquema de modelización que se adecuara a la actividad que habíamos realizado con los estudiantes y sirviera de herramienta de trabajo para el proyecto de modelización que realizarían. La confección de este esquema requirió la revisión de modelos de autores como Blomhøj (2004), Bassanezi (2002) y Davis & Hersh (1998)<sup>5</sup>. De este modo, consensuamos con el equipo de trabajo presentar a los estudiantes el siguiente esquema:

<sup>5</sup> En anexo se encuentra el esquema de modelización matemática de cada autor.



Para comenzar a trabajar en el diseño de proyectos de modelización, retomamos la actividad experimental grupal que habían realizado los estudiantes. A partir de sus aportes sobre lo que habían hecho en el laboratorio, se escribieron en el pizarrón las diferentes tareas realizadas, guiándolos para que éstas se correspondieran con los pasos del proceso contenidos en el esquema que les presentaríamos más tarde.

Luego, con lo escrito en el pizarrón presentamos un PowerPoint que iba mostrando cada paso del esquema anterior. De esta forma, partimos del tema -los recipientes-, identificamos el problema -la variación de la altura del nivel de agua en recipientes de diferente forma conociendo el volumen de líquido que se ha ingresado en los mismos-, diseñamos un experimento, identificamos las variables, formulamos hipótesis, realizamos la tabla, el gráfico y la fórmula -llamándolos modelos matemáticos- y obtuvimos conclusiones. En cuanto a la validación, la relacionamos con la obtención de nuevos datos, ya sea a partir de una nueva experimentación nuestra o de otra fuente, pero indicamos que este paso no lo habíamos realizado en esta experiencia. También se destacó que a partir de la validación se puede reformular el problema y volver a recorrer los diferentes pasos del proceso de modelización.

### 2.2.2. El inicio: la búsqueda de temas y el planteo de problemas

Una vez presentado el esquema del proceso de modelización, se comunicó a los estudiantes que la próxima actividad grupal que realizaríamos consistiría en elegir un tema y plantear un problema que les interesara, recorriendo los pasos del proceso de modelización para responderlo. También deberían realizar un informe y una presentación oral.

La distribución de las actividades en el tiempo, se detalla a continuación:

-Presentación del esquema }  
 -Plan de trabajo } 1 módulo

-Experimentación y/o búsqueda de datos }  
 -Tratamiento de los datos → obtención de modelo y conclusiones } 3 módulos  
 -Entrega parcial }

-Correcciones }  
 -Armado del informe y de la presentación } 1 módulo

-Presentación de cada grupo }  
 -Cierre de las prácticas } 2 módulos y medio

Algunos de los problemas que surgieron en los grupos, requerían experimentación para obtener los datos y otros no. Por otra parte, algunos estaban vinculados con problemáticas sociales y ambientales y otros relacionados a otras disciplinas

En las siguientes tablas se muestran cada grupo de segundo B y C, respectivamente, con el problema y las variables identificadas por los estudiantes:

Nombre del grupo	Problema	Variables
“LasSuperpoderosas”	¿Qué conviene más para viajar a Punta del Este? ¿Auto, avión o colectivo? (Buscaron información de Internet y consultaron a personas especializadas)	-Precio de los pasajes aéreo y de colectivos -Nafta consumida -Peajes -Costo alojamiento
“Los π”	¿Cuánto han disminuido los glaciares en el monte Puncak Jaya (Indonesia) en los últimos 150 años? (Trabajaron con una animación extraída de Internet)	-Área del glaciar -Tiempo
“Raíz Cuadrada”	¿Cómo varió el turismo en Córdoba Capital en enero y febrero del 2008 y 2010? (Buscaron información en Internet)	-Habitaciones disponibles y ocupadas de hoteles -Tiempo
“Minutos para el 10”	Cantidad de delfines afectados por el derrame de petróleo en el Golfo de México en un determinado tiempo. (Buscaron información de libros e Internet)	-Tiempo -Cantidad de petróleo -Cantidad de delfines afectados
“Los Yinius”	¿Qué cantidad de alcohol se va a evaporar en un determinado tiempo? (Experimentaron en el laboratorio y buscaron información en Internet)	-Tiempo -Altura del nivel del alcohol
“Cajugusdel”	¿Qué automóvil le conviene comprar a una familia de 7 integrantes? (Buscaron información en Internet)	-Concesionarias -Valor del automóvil
“Wendy Padilla”	Comparación de tasas de mortalidad	-Tasas de mortalidad

	infantil en distintos países y provincias. (Buscaron información en Internet)	-Países y provincias
--	--	----------------------

Nombre del grupo	Problema	Variables
“Los Descartables”	Observar el tiempo que una canica tarda en recorrer una rampa variando la inclinación de la misma. (Experimentaron y buscaron información en Internet)	-Ángulos -Tiempo
“Los Matemáticos”	¿Cuánto tiempo tarda en recorrer un circuito determinado personas con características diferentes? (Experimentaron)	-Tiempo -Personas
“Los Pitagóricos”	Medir cuánto tarda una goma de borrar en llegar al fondo de una probeta, si a ésta se le ha colocado determinada cantidad de agua. (Experimentaron)	-Volumen de agua -Tiempo
“Los Einstein”	Ver si soltando pelotitas de diferentes pesos desde distintas alturas, sujetas por un punto fijo, llegan a completar una vuelta o ver la altura máxima a la que llegan. (Experimentaron)	-Peso de las pelotitas -Altura a la que se suelta la pelotita -Altura máxima que llega
“Los Borbotones”	¿Cuánto tiempo tarda una vela en consumirse? (Experimentaron)	-Volumen de la vela -Tiempo
“Las Despeinadas”	¿Cuánta cantidad de aceite se necesita para absorber ciertas cantidades de vermiculita? (Experimentaron y consultaron a personas especializadas)	-Volumen de aceite -Volumen de vermiculita
“Los Cartesianos”	¿Cuánto tiempo va a tardar en derretirse un hielo en un vaso de precipitado con agua a diferentes temperaturas? (Experimentaron)	-Temperatura -Tiempo

Cabe aclarar que los problemas que fueron presentados anteriormente son aquellos que finalmente definieron los estudiantes. Algunos grupos decidieron cambiar su problema inicial ya que no encontraban suficiente información al respecto o no les permitía experimentar para obtener datos. Esto da cuenta de la dificultad que significa plantear un problema en trabajos con modelización.

Una vez seleccionado el tema y planteados los problemas, se solicitó a cada grupo el armado de un plan de trabajo para que pudieran organizarse en el trabajo futuro. Dicho plan consistía en el enunciado del problema, la identificación de variables, la formulación de hipótesis y el diseño del experimento y/o fuentes que consultarían. Los estudiantes debían entregarnos este plan de trabajo al finalizar la clase, para que nosotras pudiéramos buscar información sobre cada uno de los problemas y pensar posibles formas de guiarlos en las clases siguientes.

Cabe aclarar que, al comienzo de cada clase, se recordaba junto con los estudiantes lo que habían realizado la clase anterior y lo que harían ese día, retomando el esquema de modelización.



### 2.2.3. El plan de trabajo y la búsqueda de datos

A partir de los planes de trabajo entregados, pudimos buscar información sobre cada problema para facilitarles material, consultar a personas especializadas en temas que no teníamos manejo y llevar algunos materiales que los grupos necesitaban para experimentar.

Para la obtención de los datos nos dirigimos al laboratorio donde los grupos que necesitaban realizar experimentos los llevaron a cabo y los otros buscaron información en Internet, de acuerdo a lo que requería el problema de cada grupo.

Durante esta etapa -experimentación- surgieron algunas cuestiones que queremos destacar. Las mismas se refieren a: uso de tecnologías, inconvenientes relacionados con el replanteo o cambio de problemas, estrategias para tener mayor precisión en las mediciones.

Un aspecto relevante fue la utilización de las tecnologías para la obtención y tratamiento de los datos. Aquellos grupos que experimentaron y necesitaban medir el tiempo en sus experimentos, usaban filmadora para documentar y luego tomaban el tiempo sobre la filmación.

En la figura 36 se ilustra esta estrategia del grupo “Los Descartables” que querían registrar el tiempo que demora una canica en recorrer una rampa con diferentes inclinaciones. Otro uso que se le dio a la filmación fue: capturar imágenes de la misma y luego realizar mediciones sobre éstas, utilizando las herramientas del GeoGebra que permite insertar figuras en el área gráfica y trabajar con el sistema de coordenadas. Este uso se muestra en la figura 37, cuyas imágenes pertenecen al trabajo realizado por el grupo “Los Einstein”. Las netbooks e Internet fueron herramientas importantes para aquellos grupos que necesitaban buscar y hacer una selección de datos. También fueron utilizadas animaciones para capturar imágenes e importarlas al GeoGebra, donde se realizaban mediciones. En la figura 38 se ve lo que hizo el grupo “Los  $\pi$ ” con una imagen extraída de una animación<sup>6</sup>: utilizaron la herramienta “Polígono” a fin de rodear una superficie, que representaba los glaciares en el monte Puncak Jaya, de la cual se quería calcular el área para luego estimar la disminución de la superficie ocupada por los glaciares en los últimos 150 años. Otros recursos muy usados fueron el cronómetro y la calculadora de los celulares de los estudiantes.



Figura 36: Estrategia implementada por el grupo “Los Descartables”.

<sup>6</sup> La animación muestra imágenes de la superficie de los glaciares en diferentes años. Está disponible en el siguiente link [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Puncak\\_Jaya\\_glaciers\\_1850-2003\\_evolution\\_map-fr.gif](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Puncak_Jaya_glaciers_1850-2003_evolution_map-fr.gif).

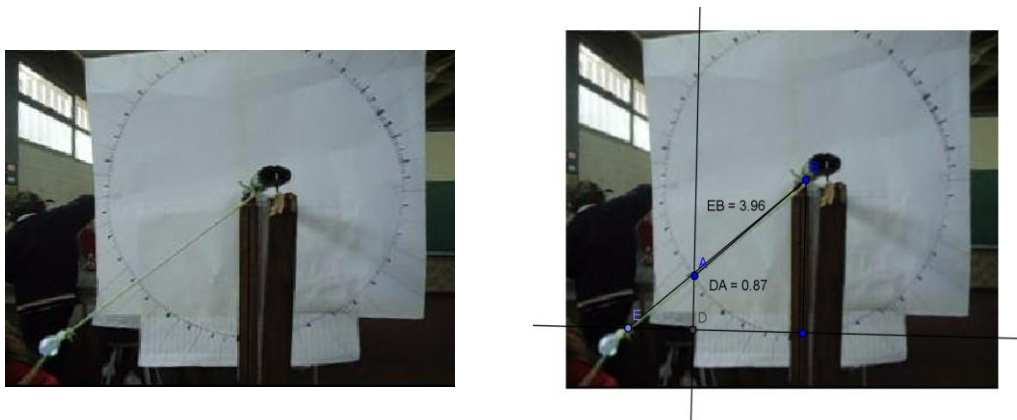


Figura 37: Estrategia implementada por el grupo “Los Einstein” usando GeoGebra.

Area ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>E<sub>1</sub>F<sub>1</sub>G<sub>1</sub>H<sub>1</sub>I<sub>1</sub>J<sub>1</sub>L<sub>1</sub>M<sub>1</sub>N<sub>1</sub>O<sub>1</sub>P<sub>1</sub>Q<sub>1</sub>R<sub>1</sub>S<sub>1</sub>T<sub>1</sub>U<sub>1</sub>V<sub>1</sub>W<sub>1</sub>Z<sub>1</sub>A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>E<sub>2</sub>F<sub>2</sub>G<sub>2</sub> = 11.8



Figura 38: Estrategia implementada por el grupo “Los π” usando GeoGebra.

Un inconveniente que surgió en algunos grupos, luego de la búsqueda de datos -sea a partir de un experimento o sea a partir de una indagación en Internet- fue el replanteo del problema. El grupo “Las Despeinadas” tuvo inconvenientes con su experimentación, lo que llevó a realizarla nuevamente con otras indicaciones. El grupo “Los π” que se había propuesto medir la disminución de los glaciares en el monte Puncak Jaya, manifestó que quería cambiar su problema, debido a que no podían calcular el área real ocupada por los glaciares por la ausencia de una escala en la animación que ellos analizaban. Finalmente el grupo consiguió resolver ese inconveniente y no cambió el problema, se acordó utilizar la unidad de área del GeoGebra y trabajar con los porcentajes de disminución del área de los glaciares.

Los grupos que experimentaron trataron de evitar los errores en la medición mediante diversas estrategias. El empleo de tecnología fue el recurso más utilizado para mejorar la precisión en la toma de los datos. Por otra parte, el grupo “Los Pitagóricos” implementó una estrategia que consistía en promediar tres mediciones filmadas de un mismo evento.

Al finalizar cada clase se realizaba una puesta en común, donde cada grupo contaba qué había realizado ese día. Se hacían preguntas y sugerencias -nuestras y de los estudiantes- para facilitar la comprensión y avanzar en el proyecto.

#### 2.2.4. Los análisis de datos, los modelos y las conclusiones obtenidos

Luego de hacer la experimentación, los grupos analizaron los datos obteniendo diferentes modelos matemáticos. La mayoría utilizó tablas para organizar los datos. Algunos grupos lograron responder su problema realizando un análisis de la tabla. Otros grupos a partir de la tabla, obtuvieron otros modelos como fórmula y gráfico.

Para ilustrar lo dicho anteriormente, mostramos algunos de los modelos y conclusiones que obtuvieron los grupos. Cabe aclarar que solo representan una parte del trabajo que realizaron en grupo. Para entenderlos en su totalidad, sería necesario hacer un análisis más detallado de todo el proceso que realizaron, sin embargo eso excede los propósitos de este informe. Lo que deseamos resaltar aquí es la variedad de modelos obtenidos, los análisis que cada grupo hace, los contenidos matemáticos que subyacen y el abanico de temas que se pueden desarrollar a partir de ellos.

En la figura 39 se presenta el gráfico que corresponde al grupo “Los  $\pi$ ” donde se relaciona el área de los glaciares en diferentes años.

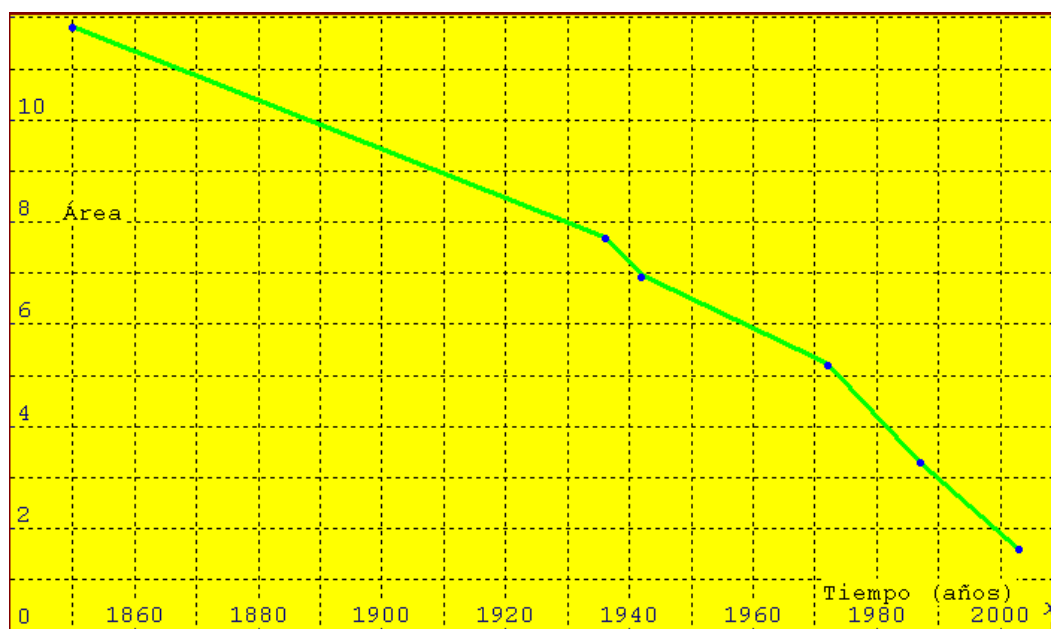


Figura 39: Modelo matemático obtenido por el grupo “Los  $\pi$ ”.

Durante la presentación oral, el grupo expresó:

*“En el gráfico están representados los años que teníamos de datos y las áreas de cada año”.*

Frente a este gráfico la profesora preguntó: “¿Cómo hicieron para unir los puntos que tenían en el gráfico?”, a lo que respondieron:

*“Nosotros primero probamos ajustar curva, pero vimos que no se ajustaba porque no es constante lo que baja. Además no teníamos todos los años, teníamos algunos. Entonces tuvimos que copiar la imagen del gráfico, llevarla a Paint y después en Paint unimos los puntos”.*

Luego analizaron el gráfico indicando:

*“[...] acá vemos [señalando los últimos puntos del gráfico] que en los últimos años disminuyó mucho más que en los otros porque se puede ver que es más inclinado [haciendo referencia a los segmentos que unen los últimos puntos]”.*

Y finalmente realizaron la siguiente reflexión:

*“Nosotros pensamos que observando la manera tan brusca en que disminuyeron estos glaciares podríamos ayudar a concientizar sobre este problema de la disminución de glaciares”.*

*“Otra pregunta que teníamos era qué está pasando con los glaciares ahora. Buscamos información y un científico inglés en 2010, fue a ver los glaciares y dice que no van a sobrevivir mas de 4 o 5 años.”*

Luego de la presentación de este grupo, se dialogó sobre el porqué del derretimiento brusco de los glaciares en algunos años. También se les dijo que habría que tener en cuenta que Indonesia es un país con actividad volcánica muy importante y que cerca de dichos glaciares está ubicada una mina, por lo cual éstos podrían ser factores a tener en cuenta en la disminución de los mismos.

El siguiente modelo gráfico -figura 40- es el obtenido por el grupo “Los Cartesianos” donde se muestra la relación que existe entre la temperatura del agua en un recipiente y el tiempo que demora en derretirse un cubito de hielo sumergido en ese recipiente con agua.

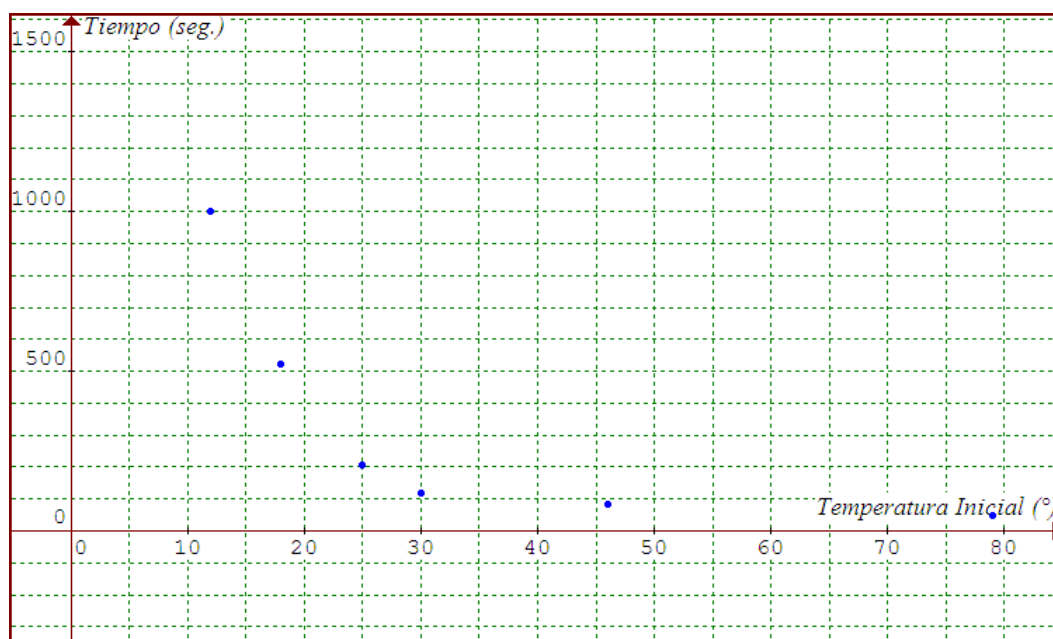


Figura 40: Modelo matemático obtenido por el grupo “Los Cartesianos”.

Al analizar la veracidad de la hipótesis 1, a partir del gráfico obtenido, expresan:

*“Hipótesis n° 1 -mientras más caliente esté el agua, más rápido se derretirá el hielo- es verdadera porque según el gráfico entre la temperatura inicial y el tiempo (hecho con datos de la experimentación), mientras más fría esté el agua más tiempo tardará en derretirse el hielo”.*

Al finalizar la presentación, hubo discusiones entre los estudiantes sobre cómo darse cuenta si realmente está derretido el hielo. Se consensó que dependerá del observador que está

realizando el experimento. También se puso de manifiesto que la relación que encontraron -que vincula el tiempo de derretimiento del hielo con respecto a la temperatura inicial del agua- era exponencial y respondía a leyes de la física referidas al enfriamiento de los cuerpos.

La figura 41 muestra uno de los modelos que obtuvo el grupo “Wendy Padilla”, mostrando las tasas de mortalidad infantil<sup>7</sup> de cinco países, uno de cada continente. El eje horizontal representa la tasa de mortalidad y el eje vertical representa los países seleccionados.

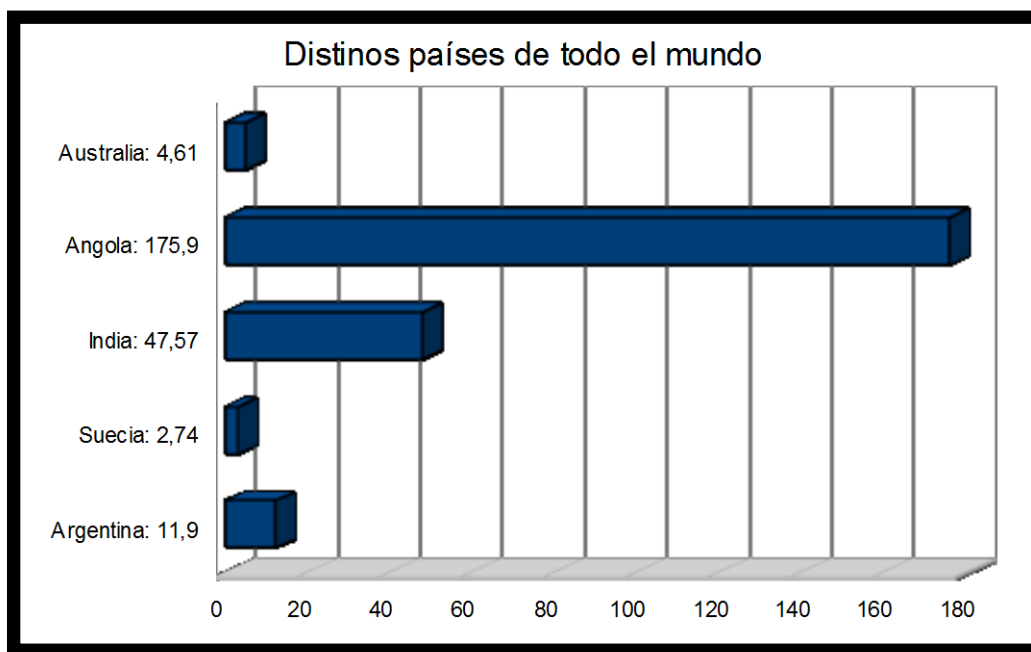


Figura 41: Uno de los modelos matemáticos obtenidos por el grupo “Wendy Padilla”.

En el análisis del gráfico el grupo expresó:

*“En el gráfico podemos observar la diferencia con respecto al número que indica la tasa de mortalidad infantil en los diferentes continentes. Observamos que el número es mayor en África y en Asia comparándolo con América, Europa y Oceanía; esto puede ser porque en los países seleccionados de dichos continentes (África y Asia) existe un gran número de pobreza, esto, a su vez, produce diversas enfermedades o problemas con respecto a la comida, bebida y lugar donde vivir que son las razones más conocidas de la mortalidad infantil. Con respecto a los países de los continentes sobrantes, podemos decir que los mismos están medianamente desarrollados lo que produce que el número de pobreza no sea tan grande, y no existan tantos problemas con respecto a la escasez de agua, comida, vivienda, salud, etc.; esta es la razón por la cual el número de mortalidad infantil es notablemente menor que el de África y Asia.*

*Esta conclusión concuerda con la hipótesis planteada anteriormente ya que, la idea principal de ésta se basa en que los países más afectados, son los que poseen mayor pobreza”.*

Luego de la presentación oral, se les preguntó cuál era la definición de tasa de mortalidad y se les dijo que revisaran algunas afirmaciones donde vinculaban tasas bajas de mortalidad con baja población o viceversa. Por otra parte, se les preguntó si habían buscado como se definía un país

<sup>7</sup> Es un indicador demográfico que señala el número de defunciones de niños - durante el primer año de su vida-, en una población de cada mil nacimientos vivos registrados.

desarrollado, los estudiantes expusieron una definición vinculada a lo geográfico, se les sugirió que buscaran cuáles son los índices que definen un país desarrollado.

El gráfico que se muestra en la figura 42 es uno de los modelos que obtuvo el grupo “Los Borbotones”, que relaciona el tiempo que tarda en consumirse una vela particular con respecto a la altura de ésta.

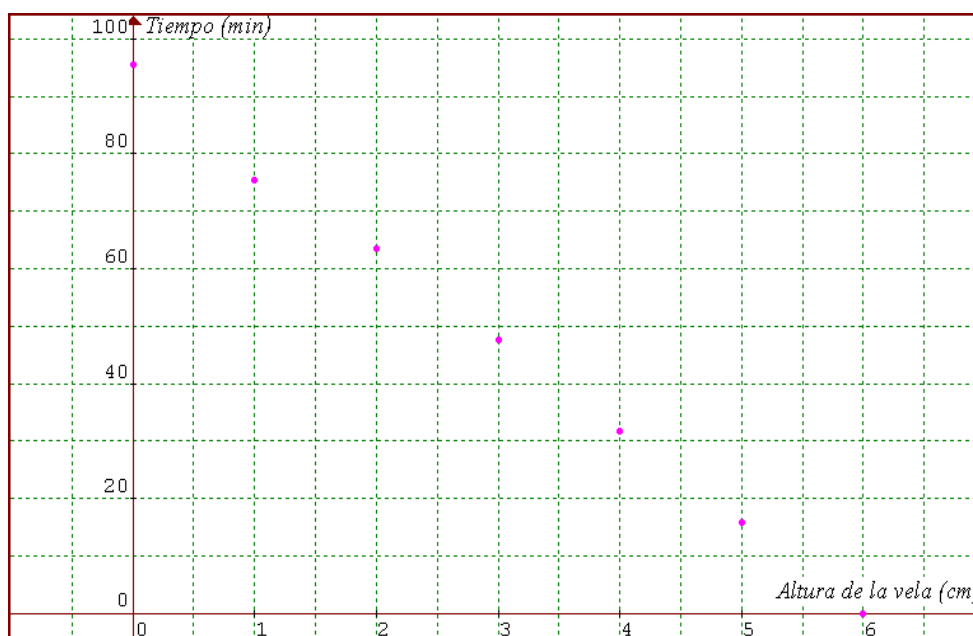


Figura 42: Uno de los modelos matemáticos obtenidos por el grupo “Los Borbotones”.

Durante la presentación, el grupo expresó:

*“Tardó 95 minutos con 45 segundos en consumirse completamente. Medía 6 cm de alto y el radio de su base era de 0,75 cm. Por lo tanto, para obtener el tiempo que tardaba en consumirse un centímetro, hay que dividir  $95,45 : 6 = 15,908$ . Tardaba 15,908 minutos en consumir 1 cm de vela”.*

*“Un dato importante: Para poder realizar los gráficos, nosotros los construimos tomando en cuenta que las velas se consumían en una forma proporcional, y cuando experimentamos para poder ver cuánto tarda en consumirse un centímetro de vela, y repetimos seis veces este procedimiento, nos dimos cuenta que en una vela igual a la vela 1<sup>8</sup>, la diferencia entre una medición de altura y otra (6cm-5cm-4cm-3cm-2cm-1cm) es de 10 minutos por cada una aproximadamente, aunque a veces había 1 o 2 mm de menos o de más que iban variando a medida que íbamos midiendo, pero eso puede haber sucedido tanto como por errores de medición como por una no relación de proporcionalidad, pero al ser tan pequeña la cifra, no le dimos demasiada importancia”.*

Al finalizar la presentación del grupo, una recomendación que se les hizo fue que tuvieran cuidado en la manera de escribir el tiempo, es decir, un minuto equivale a 60 segundos, entonces ¿cuántos segundos equivalen 0,45 minutos? Esta acotación se realizó a partir del hecho que al aparecer la expresión 0,45 minutos, uno de los estudiantes la leyó como 45 segundos. Por otro lado, un estudiante de la clase cuestionó lo siguiente: “[...] tomaron el tiempo entero y lo dividieron por los centímetros, entonces no tuvieron en cuenta cuánto tardó cada centímetro

<sup>8</sup> El grupo trabajó con cinco velas cilíndricas de diferente altura y diámetro.

realmente, sino cuánto tardó dividiendo el total”. Uno de los integrantes del grupo respondió: “Tomamos en cuenta que es proporcionalidad directa, pero en realidad había una diferencia en cada centímetro de uno o dos milímetros”. Aquí se puso de manifiesto que habían formulado una hipótesis asumiendo que el consumo de la vela era proporcional al tiempo de consumo.

Antes de la entrega final y de las presentaciones se solicitó a los grupos que entreguen lo realizado hasta el momento, subiéndolo a la plataforma virtual. El objetivo era hacer correcciones y poder guiarlos para que transiten todos los pasos del proceso de modelización.

#### 2.2.5. El informe final y la presentación

Luego de dos semanas de trabajo grupal, subieron a la plataforma el informe final de su proyecto y se realizó la presentación de cada trabajo al resto del curso.

Los grupos utilizaron diferentes formatos para realizar su presentación como PowerPoint, Prezi, procesador de texto y video. Cada grupo iba relatando cada uno de los pasos que había realizado para dar respuesta a su problema. Se podía observar que en estos relatos aparecían implícitamente las etapas del proceso de modelización. También cada grupo expresaba el interés por el tema o problema elegido relacionados a la inquietud en profundizar un tema o el querer experimentar.

Al finalizar la presentación de cada grupo se realizaban preguntas que podían provenir de los estudiantes, las profesoras y de nosotras. Las preguntas se relacionaban con aspectos puntuales de su trabajo, con el interés por el problema/tema y con las dificultades que habían surgido durante el proceso. Algunos grupos realizaron una reflexión social a partir de sus temas, procurando la concientización del curso sobre problemáticas ambientales y sociales que están ocurriendo hoy.

#### 2.2.6. Las pautas para la realización del informe y de la presentación

Teniendo en cuenta los informes y las presentaciones realizadas por los estudiantes sobre la actividad experimental, observamos que era necesario ordenar y dejar en claro qué debían colocar en los informes escritos y qué debían tener en cuenta en las presentaciones orales. Para ello, definimos pautas que fueron entregadas a los estudiantes, mediante el programa maestro, al inicio de los proyectos de modelización. A continuación se presentan estas pautas:

##### **Pautas para la realización del informe**

**1. Portada:** incluye el nombre de la escuela, el nombre de la materia y el nombre del profesor, título del trabajo, nombre del grupo y sus integrantes y la fecha de entrega.

**2. Introducción:** breve explicación del contenido del informe acompañado del interés por el tema seleccionado.

**3. Formulación/Planteo del problema:** explicación clara y concisa del problema o pregunta a resolver.

**4. Hipótesis y variables:** formulación de hipótesis, variables consideradas y variables descartadas.

**5. Procedimiento de recolección de datos y presentación de los datos:** en caso que se realice un experimento, incluir la explicación de cómo se realizó tal experimentación y los datos que se obtuvieron. En caso que no se realice un experimento especificar la fuente de donde se obtuvieron los datos y mostrar los mismos.

**6. Análisis de los datos y el modelo matemático que representa la situación estudiada:** interpretación de los datos recolectados y presentación del modelo matemático obtenido. Puede tratarse de una fórmula, un gráfico, una tabla.

**7. Conclusiones y validación:** verificación de las hipótesis a partir del modelo matemático y respuesta a la pregunta planteada. Análisis de la validez del modelo utilizando nuevos datos experimentales o datos de otras fuentes. También se puede hacer una descripción breve de las posibles formas en que el trabajo puede mejorarse.

**8. Bibliografía:** listado en orden alfabético de fuentes que hayan consultado para obtener información.

**9. Anexos:** imágenes, fotos, links que consideren relevantes sobre el problema que modelizaron.

### **Pautas para la presentación**

Cada grupo dispondrá de 10 minutos para contar el trabajo de modelización que realizaron. Se pretende que la misma sea organizada, que todos los integrantes participen (aportando cada uno diferente información sobre el trabajo), que se realice de manera dinámica utilizando diversos medios audiovisuales y que sintetice toda la información.

Para la confección de esta presentación es importante indicar:

- 1) Nombre del grupo.
- 2) Problema sobre el tema elegido e interés por el mismo.
- 3) Relato de la experiencia de modelización:
  - las variables que intervienen y las hipótesis que se plantearon
  - explicación de la experimentación (puede usarse el experimento concreto, fotos, videos, dibujos, esquemas, entre otros); fuentes de los datos obtenidos (imágenes utilizadas, animaciones, mapas, experimento, entre otros)
- 4) Presentación del modelo matemático obtenido.
- 5) Conclusión y reflexión: cómo aporta los resultados de su problema al tema que eligieron.

Podemos destacar que las pautas para elaborar el informe tienen una correlación con el esquema de modelización. En ambos cursos no hubo complicaciones para seguir estas pautas y en los informes entregados se vieron reflejadas.

#### 2.2.7. Los criterios de valoración del proceso de modelización

Para evaluar el trabajo de modelización que realizó cada grupo, se elaboraron los siguientes criterios:

### **CRITERIOS DE VALORACIÓN DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA.**

La evaluación consiste en dos instancias, la primera equivale a un 60% de la nota total y la segunda a un 40%.

**1-** Primera instancia: el proceso desde la elección del tema hasta el contenido del informe: se tiene en cuenta el avance alcanzado de cada grupo, el cual se obtendrá desde las observaciones del trabajo en clase, la entrega parcial y lo escrito en el informe final, de acuerdo a los siguientes criterios:

a). Formulación del problema e identificación de variables. (8 p.)

Puntos	DESCRIPCIÓN	
0	El grupo no formula el problema y no identifica las variables.	
3	-El grupo identifica variables y no formula el problema. -El grupo formula el problema y no identifica las variables.	
6	El grupo formula el problema e identifica variables.	
8	El grupo formula claramente el problema e identifica variables relacionadas con su problema y aclara aquellas descartadas.	

b). Recolección y organización de los datos. (19 p.)

Puntos	DESCRIPCIÓN	
0	El grupo no recolecta datos.	
6	El grupo recolecta datos pero no logra organizarlos de acuerdo a su problema.	
15	El grupo recolecta datos y logra organizarlos de acuerdo a su problema.	
17	El grupo recolecta datos, selecciona los más confiables y organiza los mismos de acuerdo a su problema.	
19	El grupo recolecta datos, selecciona los más confiables, organiza los mismos de acuerdo a su problema y vuelve a buscar para la validación del modelo obtenido.	



c). Análisis de los datos y obtención del modelo. (19 p.)

Puntos	DESCRIPCIÓN	
0	El grupo no obtiene un modelo matemático.	
10	El grupo obtiene un modelo matemático y no hace un análisis del mismo.	
17	El grupo obtiene un modelo matemático y hace un análisis del mismo.	
19	El grupo obtiene un modelo matemático mediante técnicas más sofisticadas y hace un análisis del mismo.	

d). Conclusiones. (14 p.)

Puntos	DESCRIPCIÓN	
0	El grupo no obtiene conclusiones.	
8	El grupo obtiene conclusiones respondiendo sólo a las hipótesis planteadas.	
12	El grupo obtiene conclusiones respondiendo a las hipótesis y al problema planteado.	
14	El grupo obtiene conclusiones respondiendo a las hipótesis y al problema planteado; verifican el modelo con nuevos datos e incluyen una reflexión acerca del tema en contexto.	

En estos ítems se evalúa también el uso de la terminología, simbología y unidades adecuadas.

Puntaje alcanzado: \_\_\_\_

2- Segunda instancia: la presentación oral en donde se tienen en cuenta tres aspectos y a continuación se presentan los puntajes máximos de cada uno:

a- Organización y uso de recursos: uso adecuado del tiempo, espacio y recursos audiovisuales que permitan darle dinámica a la presentación, además de la selección y organización de cada estudiante al hablar. Le corresponde 15 puntos.

b- El trayecto implícito y/o explícito del esquema de modelización a partir del relato de cada grupo de su experiencia contando también las dificultades en el proceso en general. Le corresponde 15 puntos.

c- Adecuadas respuestas a preguntas planteadas por la clase (estudiantes y profesores). Le corresponde 10 puntos.

Puntaje alcanzado: \_\_\_\_

La realización de estos criterios nos trajo algunas dificultades debido a que no sabíamos qué y cómo evaluar del proceso completo del trabajo de modelización. Por ello recurrimos a criterios que habían sido elaborados para evaluar otro proyecto de modelización<sup>9</sup> que tenía características distintas a lo que nosotras habíamos llevado a cabo. Hicimos una adaptación de dichos criterios al trabajo que los estudiantes habían efectuado y agregamos la instancia de evaluación de la presentación oral.

#### 2.2.8. Los resultados de la valoración

A continuación, los histogramas de las figuras 43 y 44 muestran la distribución de las notas del proyecto de modelización en cada división.

<sup>9</sup> Proyecto presentado en el marco de la convocatoria "Proyectos de Transferencias de Investigaciones Educativas al Aula" de la ex-agencia Córdoba Ciencia 2003.

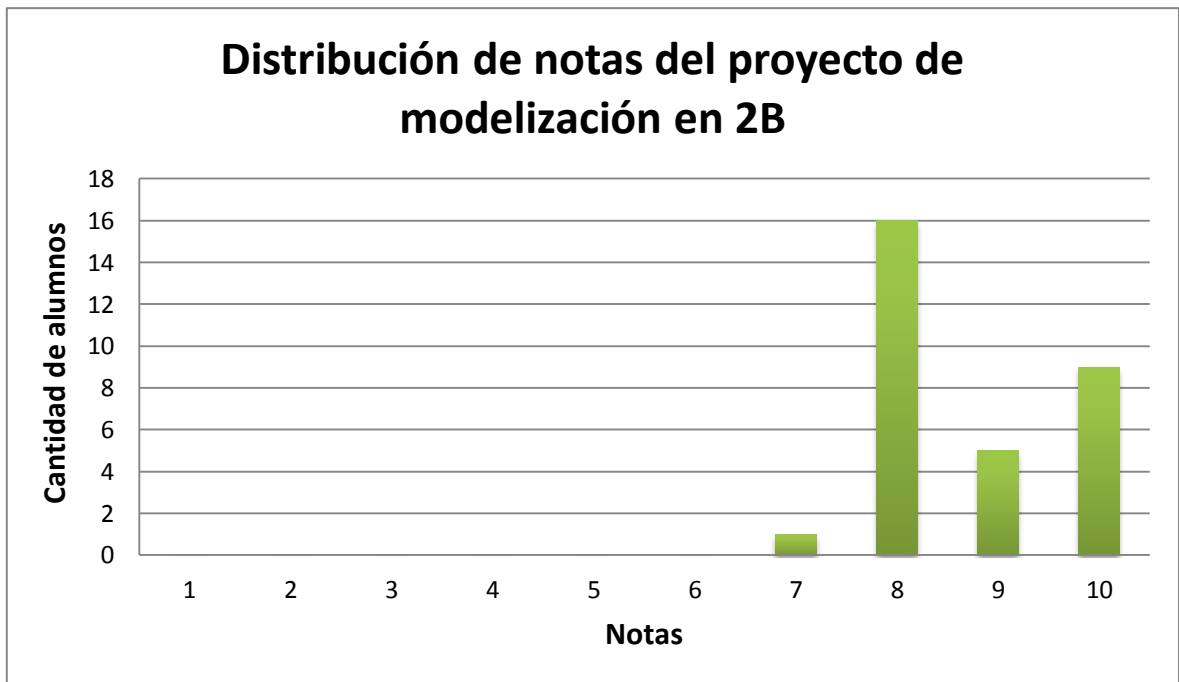


Figura 43: Histograma de notas del proyecto de modelización de segundo B.

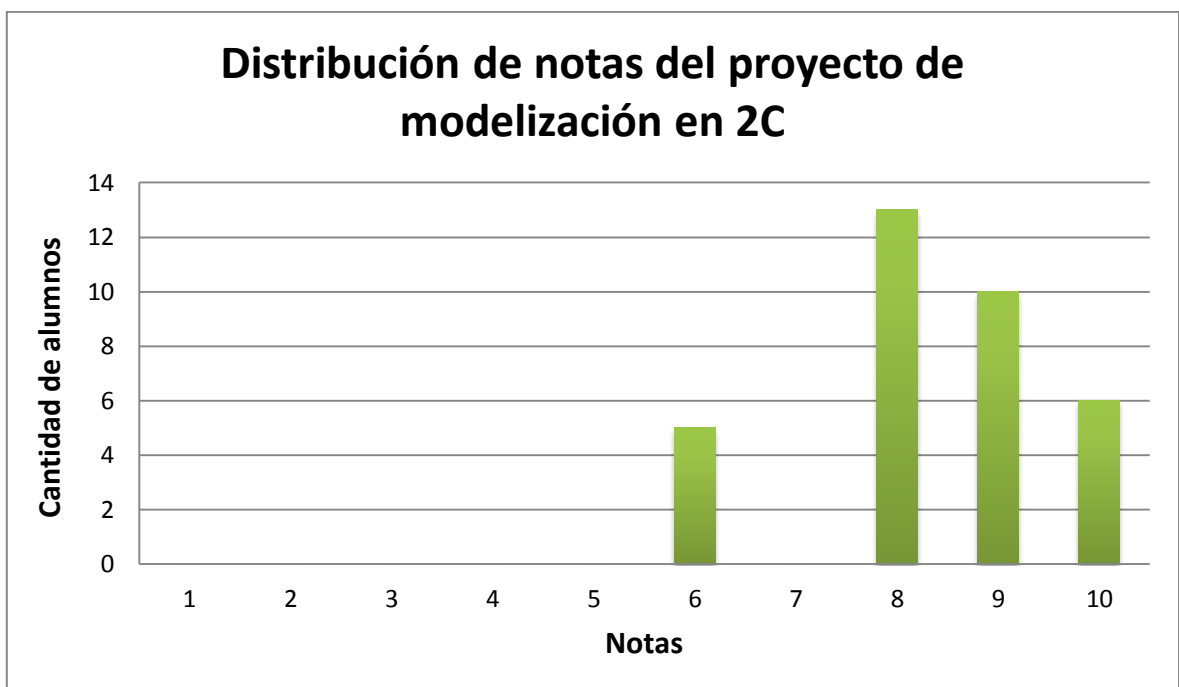


Figura 44: Histograma de notas del proyecto de modelización de segundo C.

En ambos gráficos se puede observar que no hubo estudiantes desaprobados en ninguna división. El promedio de las dos divisiones estuvo entre 8 y 9.

Cabe aclarar que hubo algunas notas diferenciadas dentro de los grupos debido a que en el transcurso del proceso observamos distintos desempeños.

#### 2.2.9. El final de nuestras prácticas

Para concluir el proceso de modelización que realizaron los estudiantes pusimos de manifiesto las actividades y conceptos matemáticos que subyacían en sus trabajos. Comenzamos con

aquellas actividades que estaban presentes en la mayoría de los trabajos: formulación de hipótesis, identificación de variables, experimentación y análisis de datos, haciendo hincapié en que éstas son todas tareas que realiza un matemático. Entre los contenidos que compartían los trabajos podemos mencionar: la representación de relaciones entre variables -mediante gráficos y tablas-, conjuntos numéricos -enteros, racionales e irracionales- y operaciones numéricas. Luego se destacaron los contenidos particulares de cada grupo: proporcionalidad directa -presente en escalas, porcentajes y fórmulas-, estadística descriptiva, ángulos, volumen, áreas, polígonos irregulares, rectas perpendiculares, relaciones lineales -creciente y decreciente- y relación exponencial.

También se destacaron las diferentes técnicas, estrategias y decisiones que habían llevado a cabo. Por ejemplo, el armado de dispositivos para sus experimentos, el uso de diferentes software, la selección de fuentes confiables, entre otros. Diciéndoles que todos estos aspectos también forman parte de la actividad de alguien que investiga y contribuyen para el aprendizaje de la matemática. Por otra parte, se resaltó la importancia de las temáticas elegidas en torno a problemas sociales, ambientales y de ciencias naturales, vinculándolas con la matemática. Por último, se les dijo que todos los grupos lograron transitar los pasos del proceso de modelización. Además se resaltó que ésta no es una actividad fácil, pero con esfuerzo, compromiso y con un trabajo colaborativo -entre los estudiantes, entre los estudiantes y nosotras, y entre nosotras- pudieron modelizar su problema, y que este proceso que realizaron es también una actividad matemática.

Con la intención de mostrar a los estudiantes la relación que existe entre la vida cotidiana y la matemática, realizamos una búsqueda en Internet procurando algún video que diera cuenta de esta relación. Frente a la imposibilidad de encontrar uno adecuado a la edad y a la intención que teníamos con éste, confeccionamos un video para cada división. Cada video partía del esquema de modelización y luego mostraba: los temas y el problema de cada grupo, las variables identificadas, las fuentes de información utilizadas -imágenes de páginas web y fotos de los grupos experimentando- y los modelos matemáticos que cada grupo obtuvo.

Para cerrar esta sección de nuestro informe de prácticas, nos interesa contar la propuesta que la docente del curso realizó a los estudiantes a partir de los trabajos de modelización. Del total de horas semanales que la docente tiene con cada curso, se dedicarán 40 minutos para extraer y trabajar todas las ideas matemáticas de cada uno de los proyectos. Con el objetivo de obtener preguntas, problemas o actividades, los trabajos de cada grupo van a ser objeto de análisis y de práctica para todo el curso.

#### 2.2.10. Reflexión sobre las prácticas

Para finalizar esta segunda sección del informe queremos destacar algunos aspectos que consideramos tuvieron relevancia durante el desarrollo de nuestras prácticas.

Teniendo en cuenta que realizamos trabajos de modelización, donde los estudiantes elegían el tema y planteaban un problema, percibimos dos dificultades centrales que relataremos a continuación. La primera se refiere a la incertidumbre que provoca el no poder anticipar todas las decisiones que cada grupo va tomando en función de su tema. Por ejemplo: ¿Cómo intervenir en las presentaciones orales? ¿Es posible responder inmediatamente a las preguntas de los estudiantes? ¿Cómo guiar el proceso para que sea productivo?

La segunda dificultad se refiere a la evaluación de proyectos de modelización. Dado que no queríamos evaluar solo el producto final -informe escrito y presentación oral- de este proceso, sino el desarrollo particular de cada grupo, y además teníamos un tiempo acotado, nos resultó difícil establecer los criterios de evaluación y asignar puntajes.

Además queremos destacar la importancia del trabajo colaborativo -entre nosotras, los estudiantes y al interior del equipo de trabajo- para el desarrollo de estos proyectos. Dentro del ámbito escolar, permitió que cualquiera del equipo de trabajo pudiera “intervenir” en el proyecto

de cada grupo -ya que todas teníamos conocimiento del trabajo que estaban realizando los estudiantes- a pesar de que cada una de nosotras tenía asignado un curso. Fuera del ámbito escolar, reconocemos que este tipo de trabajo fue esencial para tomar decisiones consensuadas sobre el desarrollo de las prácticas de cada una.

Otro aspecto a destacar fue la importante demanda de tiempo, fuera del ámbito escolar, destinado a tareas como: la búsqueda de información y de material experimental necesario para desarrollar los temas de cada grupo; el consenso y la elaboración de los criterios de valoración del proceso de modelización; el registro del avance de cada grupo; la confección del video para cada división; la corrección y decisión de una nota apropiada para el proceso de cada grupo y sus integrantes.

Por último, resaltamos la riqueza de los proyectos producidos por los estudiantes, ya que en ellos visualizamos una gran variedad de conocimientos matemáticos y también referidos a otras áreas -como sociales y naturales. Esto nos permitió aprender junto con los estudiantes y en una clase de matemática, temas que tradicionalmente no son presentados en una clase de esta disciplina y que consideramos necesarios para el desarrollo de un sujeto crítico.

### **3. Aportes de una experiencia de modelización**

Como se describió en la primera parte del informe, el objetivo de nuestras prácticas fue constituir en objeto de enseñanza y aprendizaje el proceso de modelización. Para ello, cada curso se dividió en siete grupos y realizaron proyectos sobre temas elegidos de acuerdo a sus intereses. Como ya hemos mencionado anteriormente, tales temas abordaban contenidos “no matemáticos”, relacionados con problemáticas sociales, ambientales y vinculados a otras disciplinas. El tiempo que se destinó para transitar el proceso fue de aproximadamente tres semanas.

A partir del trabajo con proyectos, el interrogante que nos surge es ¿qué aportes puede añadir esta experiencia a la caracterización del proceso de modelización?

A continuación se desarrollarán las características del proceso de modelización en el aula, vinculadas con la bibliografía consultada. Para finalizar se intentará responder la pregunta planteada mostrando las posibilidades de implementar este tipo de modelización en nuestro futuro como docentes.

#### **3.1. Relacionando nuestra experiencia con la bibliografía**

Skovsmose (2000) afirma que la educación matemática tradicional se enmarca en el “paradigma del ejercicio”, donde las clases se caracterizan por la presentación expositiva de un tema a cargo del docente y luego, los estudiantes trabajan en ejercicios seleccionados a priori por el profesor de acuerdo al tema. Otras características relevantes son la búsqueda de una única respuesta y un control casi completo del docente sobre la clase. En contraste con este paradigma, el autor afirma que se encuentran distintos “escenarios de investigación”<sup>10</sup> que promueven una actitud de exploración y explicación en los estudiantes. Por otra parte, las actividades matemáticas que se desarrollan en el aula pueden referirse a la “matemática pura”, a una “semirrealidad” o a “situaciones de la vida real”. Es así que al combinarse los dos paradigmas con los tres tipos de referencia se da lugar a seis “ambientes de aprendizaje”. Skovsmose realiza una caracterización de cada uno de estos ambientes, sin embargo a los fines de enmarcar nuestra pregunta, nos concentraremos en el ambiente que surge de la combinación de escenarios de investigación que hacen referencia a una situación de la vida real. Consideramos que el trabajo con proyectos de modelización se encuentra dentro de este tipo de ambiente.

Con el fin de centrarnos más en el contexto de nuestra práctica, tomamos el concepto de *escenario de modelización* descrito por Esteley (2010) inspirado en la noción de escenario de investigación de Skovsmose. En la siguiente cita se expresa este concepto:

*“[...] escenario de modelización se caracteriza por la presencia de un conjunto de espacios, situaciones, circunstancias, materiales, acciones e interacciones que confieren un sentido al proceso y con ello transforman ese conjunto en una experiencia cuyo fin es llevar al aula la modelización como abordaje pedagógico” (p. 108).*

Consideramos que el escenario de modelización, descrito por Esteley, y el escenario de investigación, definido por Skovsmose, comparten características. A continuación hablaremos de éstas.

Una de las características que señala Skovsmose sobre este ambiente es la incertidumbre del profesor al adentrarse en este tipo de escenario:

*“[...] prestarle atención a los escenarios de investigación puede causar un alto grado de incertidumbre” (p. 21).*

Dado que en nuestra práctica nos centramos en escenario de investigación con referencia a situaciones de la vida real, la incertidumbre fue un factor presente desde el momento en que nos adentramos en el escenario de modelización. Cuando cada grupo eligió un tema y planteó el

---

<sup>10</sup> El autor define “escenario de investigación a una situación particular que tiene la potencialidad para promover un trabajo de investigación o de indagación”.

problema a resolver y nos entregó el plan de trabajo, no sabíamos hacia donde iban a orientar su investigación. Intentamos sobrepasar esta incertidumbre buscando información, materiales y formas de guiarlos. Luego, al volver al aula, vimos que algunos grupos decidieron tomar nuestras sugerencias pero otros no. En estos últimos, volvió a aparecer este factor, lo cual nos obligó a improvisar a partir de las propuestas del grupo. Otra instancia donde la incertidumbre estuvo presente fue en las preguntas -que los estudiantes hacían a lo largo del proceso- que estaban relacionadas con temas de las ciencias sociales y naturales, y no necesariamente con temas matemáticos. Lo anteriormente dicho, es señalado por Skovsmose (2000) en el siguiente fragmento:

*“Cuando los estudiantes exploran un escenario de investigación, la profesora no puede predecir las preguntas que van a surgir. [...] Su autoridad tradicional puede romperse en segundos. Además no es posible predecir cuando esto sucederá de nuevo. Ni siquiera ella lo sabe. El grado de impredeción es alto”* (p. 21).

En particular, podemos destacar dos situaciones que reflejan esta incertidumbre. Por un lado, durante los cierres diarios -donde los grupos exponían el avance de su trabajo- y por otro lado, cuando los grupos trabajaban en sus proyectos. En ambas situaciones, nos resultaba difícil hacer, en el momento, una devolución con sugerencias para orientar el trabajo.

Otra característica que señalan varios autores, que creemos que nos permitió sobrellevar la incertidumbre presente en el desarrollo de trabajos de modelización y que consideramos relevante para el desarrollo de éstos, es el trabajo colaborativo. De acuerdo a la relación entre los participantes del trabajo con proyectos, podemos distinguir en nuestra práctica, cuatro formas de trabajo colaborativo: entre nosotras y los estudiantes; entre los estudiantes; entre nosotras y las profesoras de la práctica; y entre nosotras. Con respecto a la primera y segunda formas, Almeida, Silva y Vertuan (2012) afirman:

*“[...] la Modelización Matemática en el aula puede ser vista como una actividad esencialmente cooperativa, en la cual la cooperación y la interacción entre los alumnos y entre profesor y alumno tienen un papel importante en la construcción de conocimiento. [...] Cuando los alumnos trabajan juntos con un mismo objetivo y producen un producto o solución final común tienen la posibilidad de discutir los méritos de las diferentes estrategias para resolver un mismo problema y eso puede contribuir significativamente para el aprendizaje de los conceptos involucrados”* (p.33).

Queremos enfatizar que en nuestra práctica, el trabajo colaborativo fue una pieza fundamental para contribuir con el desarrollo del proyecto de cada grupo. Se reflejó en el “ida y vuelta” de las interacciones entre el equipo de trabajo<sup>11</sup> y los estudiantes, que estuvo presente en todas las clases a través de las preguntas, de los cierres diarios, de las sugerencias del equipo de trabajo, de las entregas parciales, entre otras. También se observó el trabajo en colaboración en el “producto final” de cada grupo, ya que todos -equipo de trabajo y estudiantes- contribuyeron, en mayor o menor medida, en la confección del proyecto de cada uno de los grupos. Por último, podemos agregar que los integrantes de cada grupo tuvieron una participación activa en el seguimiento de su trabajo. El mismo lo observamos particularmente en la puesta en común diaria que realizaba cada grupo y haciendo el seguimiento del trabajo, esto es, atendiendo consultas y brindando sugerencias. En cuanto a la tercera forma de trabajo colaborativo -entre nosotras y las profesoras de la práctica- en el siguiente fragmento Skovsmose (2000) expresa:

*“Una condición importante para que los profesores sean capaces de operar en una zona de riesgo<sup>12</sup> es el establecimiento de nuevas formas de trabajo cooperativo en particular entre profesores [...]”* (p.22).

---

<sup>11</sup> El equipo de trabajo está conformado por las profesoras de la materia MOPE, la profesora a cargo de segundo año de la escuela y nosotras, las practicantes.

<sup>12</sup> Brevemente podemos decir que la noción de zona de riesgo se refiere a la incertidumbre que genera en el profesor adentrarse en ambientes de aprendizajes vinculados con escenarios de investigación. Para mayores detalles del origen

Si bien el autor habla de trabajo cooperativo entre profesores, ampliamos esta relación a nosotras, futuras profesoras, y las docentes del equipo de trabajo. En relación a lo señalado por Skovsmose, destacamos el trabajo entre las profesoras de MOPE y nosotras durante el transcurso de las prácticas. En particular, durante el proceso de modelización, las decisiones sobre el tiempo de dedicación a cada paso de éste, los criterios de evaluación, la forma de orientar a los grupos, la bibliografía a consultar, entre otras, fueron discutidas y consensuadas entre las profesoras y nosotras. A través del diálogo con las profesoras, obtuvimos conocimientos sobre sus experiencias previas en trabajos con modelización, que conjuntamente con la bibliografía indicada, nos brindaron más instrumentos para trabajar en el aula.

Por último, aunque la bibliografía consultada no desarrolle detalladamente el trabajo colaborativo entre futuros profesores, podemos señalar que algunos autores, como Ponte (1998), reconocen la importancia de este tipo de trabajo entre pares para el desarrollo profesional docente. Es así que trabajar en equipo nos permitió ayudarnos mutuamente en el seguimiento y la confección del proyecto de cada uno de los catorce grupos de estudiantes. Lo anterior se visualizó en la discusión de cómo orientar a los grupos, en la búsqueda de información, en la elaboración de los criterios, en la corrección de las entregas parciales, entre otras.

En el proyecto de cada uno de los grupos visualizamos gran variedad de contenidos matemáticos y de otras disciplinas. En relación a esta variedad, Skovsmose afirma que en el trabajo con proyectos se pueden distinguir tres tipos de conocimientos: *matemático, tecnológico y reflexivo*<sup>13</sup>.

Como ya mencionamos en la segunda parte del informe, en cada trabajo observamos una diversidad de conocimientos matemáticos. Algunos de estos conocimientos estaban mencionados en la planificación de la profesora, dentro de éstos se encontraron aquellos que ya habían sido trabajados -previo a nuestras prácticas- y otros que aún no. Además surgieron temas que correspondían a años superiores de la escuela secundaria. Con respecto al conocimiento tecnológico reconocemos que durante el desarrollo de los trabajos, cada grupo implementó diferentes técnicas, estrategias y decisiones para la resolución de su problema. Por último, visualizamos en los proyectos un desarrollo de conocimiento reflexivo cuando: los propios alumnos reconocían sus dificultades en los diferentes pasos del proceso de modelización, analizaban el modelo matemático obtenido en relación al problema planteado y hacían una reflexión acerca de la problemática social y/o ambiental vinculada a su proyecto.

Por otra parte, reconocemos que las temáticas elegidas estaban vinculadas a problemas sociales, ambientales y de ciencias naturales. Con ello destacamos que los estudiantes lograron resolver su problema “no matemático” utilizando la matemática y luego retomando, en los análisis finales, la relación entre el tema y el modelo obtenido. Esto nos permitió aprender junto con los estudiantes, y en una clase de matemática, temas que tradicionalmente no son presentados en una clase de esta disciplina y que consideramos necesarios para el desarrollo de un sujeto crítico.

En relación al uso de las TIC Meyer, Caldeira y Malheiros (2011) expresan:

*“[...] encontramos estudios que investigan el papel de las TICs en Modelización. Greefrath (2011) afirma que ellas posibilitan nuevas formas de aprender y comprender la Matemática y destaca que las TICs no son solo herramientas para el apoyo de las actividades matemáticas, sino una manera de llevar al aula un mayor número de aplicaciones y Modelización”* (p.123, traducción nuestra).

Podemos señalar que nuestras prácticas estuvieron atravesadas por una fuerte utilización de las tecnologías. Como está descrito en el informe, la institución en la cual desarrollamos las prácticas promueve el uso de las tecnologías. Durante el trabajo de modelización, los diferentes

---

de este término ver Penteado, M. (1999). Risk zone: introduction of computers into teachers' practice (Tesis doctoral no publicada). Rio Claro: Universidad Estadual Paulista.

<sup>13</sup> Para mayores detalles, ver Skovsmose (1999). Hacia una filosofía de la educación matemática crítica. Traducido por Paola Valero. Universidad de los Andes, Bogotá.

grupos usaban las TIC para distintos fines. Podemos destacar que el uso no se restringió a la netbook y su software, sino que también utilizaron cámara fotográfica, celulares, calculadoras, entre otros dispositivos. Observamos que el uso de todos estos medios permitió que los estudiantes siguieran un determinado camino para transitar el proceso de modelización. Creemos que sin estos medios, dicho recorrido y el producto final hubieran sido diferentes. Además podemos agregar, a partir de las producciones de los alumnos en clases, que estos dispositivos poseen grandes ventajas para realizar este tipo de trabajo de investigación.

Otro aspecto a destacar fue la importante demanda de tiempo para realizar este proceso de modelización, como lo expresan Villarreal, Esteley y Smith (2011) en el siguiente fragmento:

*"[...] el desarrollo de un proyecto de modelización en aula fue una tarea con una alta demanda en tiempo, energía y compromiso" (p. 10).*

La cita anterior hace referencia a la demanda de tiempo de los profesores en trabajos con proyectos. Nosotras la ampliamos al tiempo requerido por los estudiantes, distinguiendo dos tipos de tiempos: uno extra-escolar y otro áulico. El primero, se refiere al tiempo necesario que requiere la búsqueda de información y materiales sobre el tema de cada grupo, para poder guiarlos y orientarlos en cada paso del proceso. Dado que los proyectos se desarrollaron en su totalidad en la escuela, cuando hablamos de tiempo áulico, nos referimos a aquel requerido para que los grupos armen su trabajo y donde todos los estudiantes puedan aprender los conocimientos matemáticos que hay en cada proyecto.

Luego de lo vivenciado en nuestras prácticas creemos que, para implementar un trabajo de modelización de estas características, es importante tener en cuenta que los trabajos extra-escolar y áulico requieren de una alta demanda de tiempo.

La última característica que queremos señalar es la dificultad que tuvimos para evaluar los proyectos de modelización de los grupos. Autores como Antonius (2002), hablan sobre la definición de ciertos criterios para evaluar un trabajo con proyecto. Si bien en nuestras prácticas logramos definir estos criterios y en cierta medida, coinciden con aquellos que elabora el autor, entendemos que la dificultad se encuentra en cómo determinar el puntaje que obtiene cada grupo en base a los criterios.

Coincidimos con el autor cuando habla sobre la posibilidad de dar al estudiante dos instancias evaluativas de su proyecto: una escrita y otra de defensa oral. Otorgándole a la segunda un tiempo considerable para que el estudiante pueda presentar adecuadamente su trabajo.

Pensamos que las características de nuestra experiencia de modelización se corresponden con la definición de escenario de modelización presentada por Esteley. Observamos esto en: las interacciones entre los estudiantes y el equipo de trabajo, entre los mismos estudiantes y entre nosotras; en los diferentes medios tecnológicos y materiales utilizados; en las decisiones que los estudiantes y nosotras tomábamos en relación al problema de cada grupo. De este modo, consideramos que este entramado de características le dio un sentido a la experiencia para que los estudiantes resolvieran un problema "no matemático" desde la matemática, constituyéndose así un escenario de modelización como sostiene Esteley.

### 3.2. Retomando el interrogante

Luego de haber realizado una búsqueda y análisis de bibliografía sobre trabajos con proyectos de modelización en aula, retomamos la pregunta que nos habíamos planteado inicialmente.

Por un lado, observamos una correspondencia entre las características señaladas por diferentes autores y aquellas vivenciadas en nuestras prácticas que se dieron en un contexto particular. Con ello queremos decir que con nuestra experiencia particular, en cierta medida, aportamos a la validación de la teoría sobre las características de los procesos de enseñanza y aprendizaje en escenarios de modelización.

Por otro lado, reconocemos que la teoría consultada hace referencia a experiencias realizadas por profesores y en nuestro caso la teoría se reflejó en una experiencia realizada por futuras

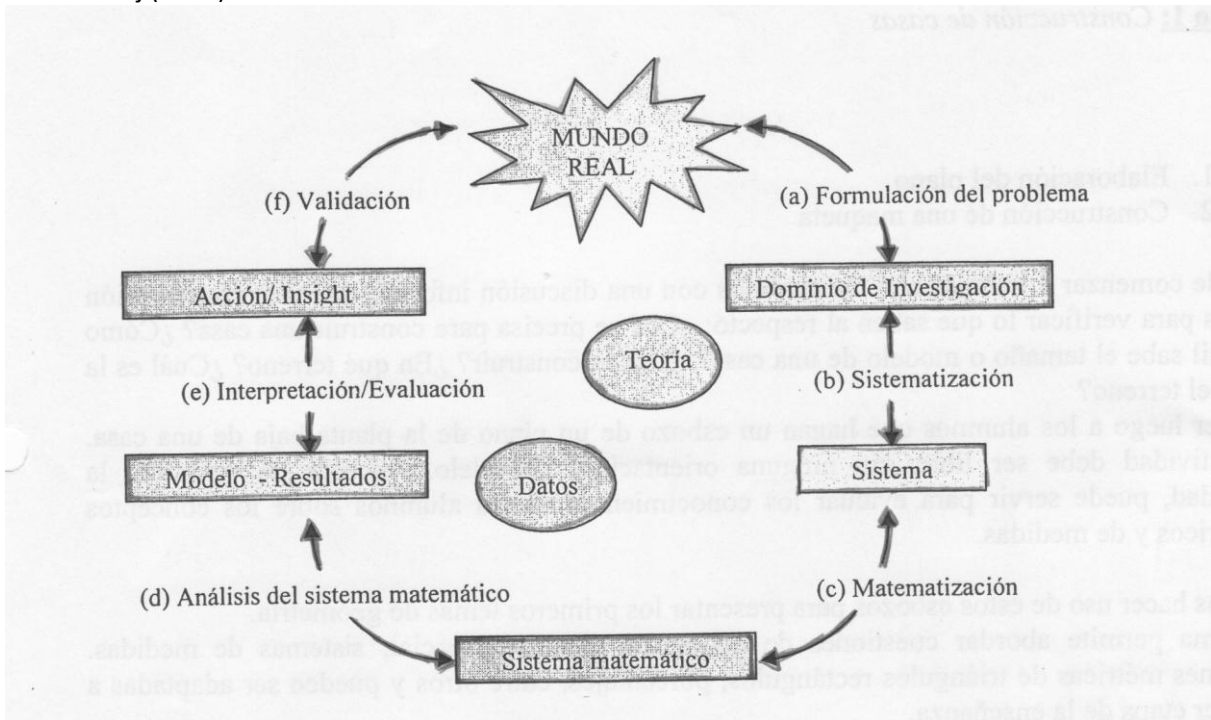


profesoras. Con lo cual consideramos que contribuimos, en cierto modo, a ampliar la teoría existente y además pensamos que es posible realizar las prácticas en escenarios de modelización.

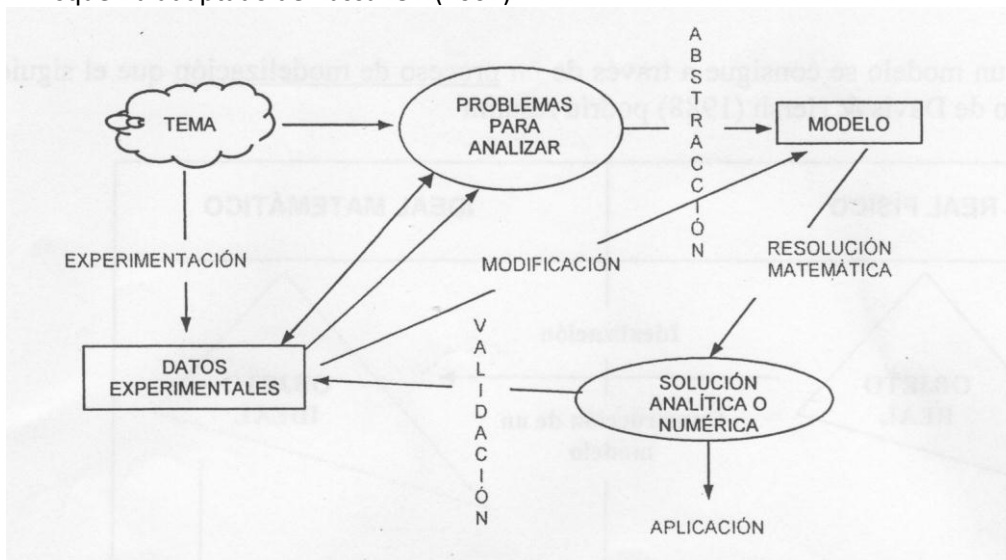
Para finalizar reflexionamos sobre distintos aspectos acerca de trabajar en un escenario de modelización en las prácticas. El primero que queremos señalar es que pudimos tener la experiencia de vivenciar, analizar y reflexionar sobre lo que significa trabajar con modelización en el aula, logrando contrastar la teoría vista sobre modelización durante la carrera con la práctica en la escuela. Además destacamos la oportunidad de realizar las prácticas en escenarios no tradicionales, teniendo en cuenta que probablemente, en nuestro futuro como docentes no tendremos la posibilidad de llevar a cabo este tipo de experiencia. Por ello, es que creemos importante la interacción entre el equipo de trabajo -dentro y fuera del aula- para poder realizar esta experiencia, por lo cual pensamos que si tuviésemos la oportunidad de realizar modelización sería de otras características a la que vivenciamos. Decimos esto porque las prácticas se desarrollaron en un contexto particular, donde la institución y la docente a cargo del curso permitían el trabajo en escenarios de modelización.

#### 4. Anexo

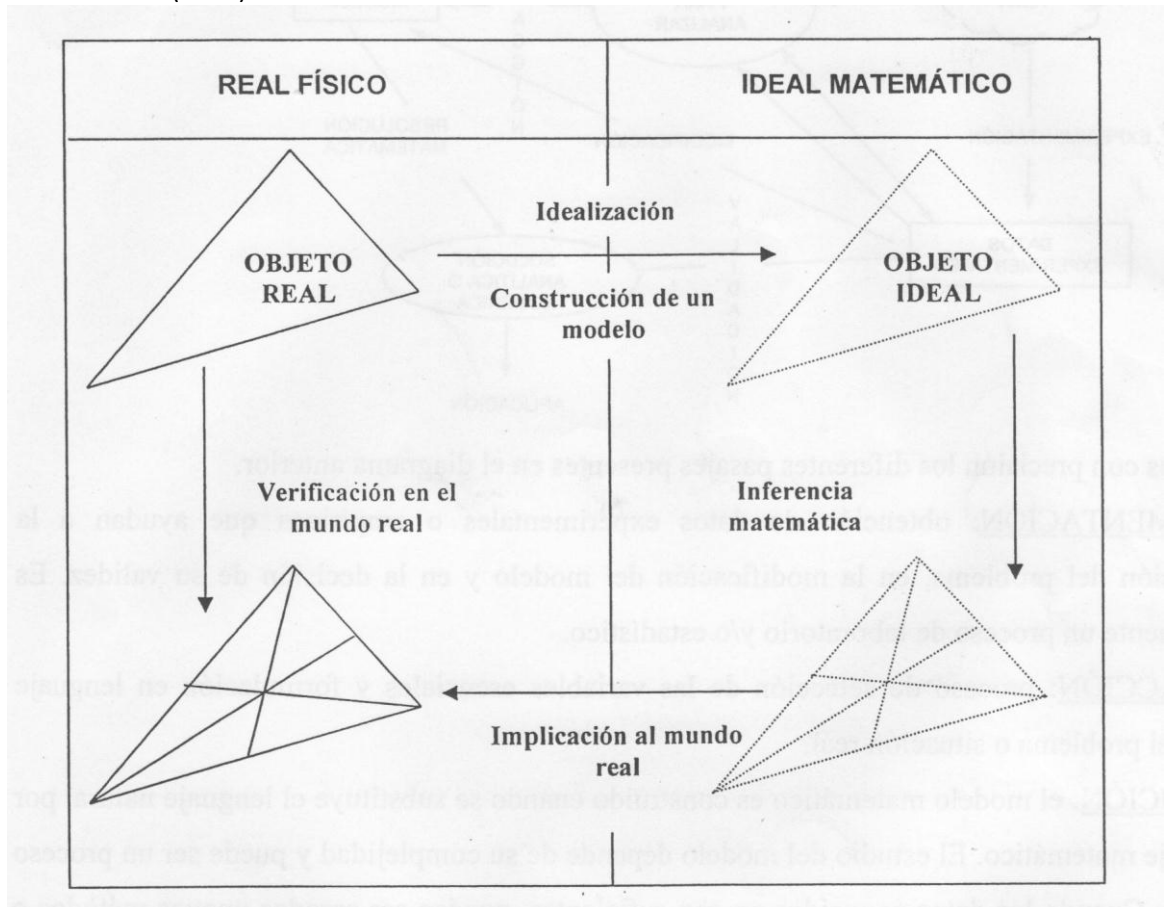
Blomhøj (2008)



Esquema adaptado de Bassanezi (2002)



Davis & Hersh (1989)



## 5. Bibliografía

Antonius, S. (2007) Modelling based project examination. En Blum, W.; Galbraith, P.; Henn, H.; Niss, M. (Ed.). *Modelling and applications in mathematics education - The 14th ICMI Study*. New York. Springer. p. 409-416.

Bassanezi, R. (2002) Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto.

Blomhøj, M. (2008) Modelización Matemática- Una Teoría para la Práctica. Revista de Educación Matemática. Vol. 23, n2, p.20-35. Traducción de María Mina del original Mathematical modelling- A theory for practice.

Borba, M & Penteado, M. (2001) Informática e Educação Matemática. Coleção Tendências em Educação Matemática. Editora Autêntica, Belo Horizonte, MG.

Davis, P. & Hersh, D. (1989) Experiencia Matemática. Editorial Labor. Barcelona.

Diseño Curricular. ENCUADRE GENERAL. Versión definitiva 2011-2015. Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba.

Esteley, C. (2011) *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: voces y sentidos*. Tesis de Doctorado en Ciencias de la Educación. Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba.

Meyer, J; Caldeira, A; Malheiros, A (2011) *Modelagem em Educação Matemática*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Editora Autêntica, Belo Horizonte, MG.

Ponte, J. (1998) Da formação ao desenvolvimento profissional. Conferencia presentada en el Encontro Nacional de Prof. de Matemática ProfMat 98. *Actas do ProfMat 98*, p. 27 - 44. Lisboa.

Silva, K.; Almeida, W. L.; Vertuan, E.R. (2012) *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo. Contexto.

Skovsmose, O. (1999) *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Traducción de Paola Valero del original Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education. Universidad de los Andes. Bogotá.

Skovsmose, O. (2000) Escenarios de investigación. *Revista EMA*. Vol. 6, N° 1, p.3-26.

Villarreal, M.; Esteley, C y Smith, S. (2011) Desafíos y decisiones de profesores de matemática en escenarios de modelización: el diseño de un proyecto para el aula. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.