

Trabajo Especial de Licenciatura en Física

---

## Superficies atrapadas en colapso esférico

---

Autor: Jonathan Claros Martinez

Director: Dr. Gustavo Dotti



Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Marzo 2023



Superficies atrapadas en colapso esférico por Jonathan Claros se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

---

*Para Arminda, Hannita y Jorge*

# Resumen

---

---

En este trabajo se abordará el estudio de superficies espaciales 2-dimensionales y los métodos de cálculo de objetos geométricos que identifican la curvatura extrínseca. Se introducirá el concepto de superficie atrapada y se explicará su relevancia en el estudio de agujeros negros. Estas ideas se aplicarán al colapso esférico con énfasis en el modelo de Vaidya. En este último caso estudiaremos las geodésicas nulas, el horizonte aparente y el horizonte de eventos. Además veremos la caracterización del borde de regiones que pueden contener superficies atrapadas confirmando resultados novedosos.

**Palabras clave:** Agujeros negros - Superficies atrapadas - Vaidya - Colapso esférico

# Abstract

---

---

In this work the study of 2-dimensional spatial surfaces and methods of calculating geometric objects that identify extrinsic curvature will be discussed. The concept of trapped surface will be introduced and its relevance to the study of black holes will be explained. These ideas will be applied to spherical collapse with emphasis on the Vaidya model. In the latter case we will study the null geodesics, the apparent horizon and the event horizon. In addition we will see the characterization of the edge of regions that may contain trapped surfaces, confirming novel results.

**Keywords:** Black holes - Trapped surfaces - Vaidya - Spherical collapse

# Agradecimientos

---

---

En el transcurso de mi vida me he encontrado con pequeños obstáculos que a la corta o a la larga he podido sobrellevar. El querer sobrepasarlos ha hecho que en algún momento, erróneamente, piense que el camino que uno recorre lo hace solo pero claramente nunca fue así. A lo largo de mi carrera me encontré con personas maravillosas, con las cuales compartí muchísimas cosas, momentos, frustraciones, alegrías, etc. Desde el primer día que llegue a la facultad nunca imagine formar lazos tan fuertes con estas. Solo me queda agradecerles tanto a ellas como a la gente que me acompañó desde que tengo uso de razón.

Antes que todo, agradezco a ellas dos, mi madre y mi hermana, las cuales han estado en mis peores y mejores momentos, brindándome consejos y apoyándome en cada decisión que tomaba. Siempre enseñándome valores que hicieron que cada día sea mejor persona. A pesar de cualquier tipo de diferencias, sin ellas nada de esto hubiese sido posible. Gracias por su confianza en mí y por estar presentes a lo largo de mi carrera universitaria. Gracias por el simple hecho de existir. Gracias a mi hermano mayor, la primera figura paterna que tuve en mi vida. Desde chico supo enseñarme el valor de la familia y lo que significa ser un gran padre. A pesar de las distancias, siempre estuvo presente con algún mensaje o llamado haciéndome notar que estaba para mí cuando las cosas se tornaban complicadas.

A mi nuevo hermano, Cristian, por haberme escuchado y aconsejado en estos últimos años. El apoyo moral constante y el cariño que me ha demostrado ha hecho que se convierta en una persona muy importante para mí.

Agradezco a Gustavo, mi director, por su paciencia, su predisposición y por todo lo que me ha enseñado. Gracias por entenderme cuando mis ánimos no eran los mejores, por transmitirme esa pasión al hablar sobre algún tema en particular y por guiarme en esta última etapa que fue una de las más difíciles.

Agradecer a los amigos que me dio esta gran facultad, principalmente a Agus y Eric, hermanos de la vida que han sido muy importantes a lo largo de mi carrera. Aconsejándome, escuchándome y estando siempre que los necesitaba. Sus palabras hicieron que pueda levantar cabeza más de una vez.

A mis amigas de toda la vida, Anto, Vale y Pao, que me entendieron las veces que me desaparecía por mucho tiempo y a pesar de eso la amistad seguía y seguirá intacta.

A Fran, Walter, Angelo, Gero, Juancho, Fede, Joaco, Ema, Nahuel, Leandro, Facu, Cami, Mica, Mikis, Facu Mazzu y podría seguir nombrando gente increíble con las que he compartido mates, charlas, jodas, llantos y alegrías. Todas estas personas merecen un reconocimiento por estar y haber estado en momentos donde más necesitaba de ellos.

A los hermanos que me dio el fútbol: Rodri, Enzo, Juanpi y Uri. Ellos me han integrado a un grupo maravilloso donde además de compartir asados, partidos y jodas, también me han brindado apoyo moral cuando más lo necesitaba. Gracias por sus consejos y por seguir generando momentos en

---

mi vida. Su calidad como personas es invaluable.

También quiero agradecer a todos los docentes que me han acompañado a lo largo de estos años. Cada uno de ellos además de transmitirme conocimiento, me han motivado y enseñado a como cumplir ese mismo rol que he ejercido por muchos años como trabajo.

Gracias a la Universidad Nacional de Córdoba, en particular a la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación por brindarme las herramientas y el espacio para poder estudiar lo que me gusta. Muchas gracias a todas las personas que hay detrás de esto.

Por último, y no menos importante, un pequeño agradecimiento hacia mi persona. El hecho de seguir intentando y no abandonar este camino que elegí, me ha dado experiencia y madurez para poder crecer como ser humano en todos los sentidos. Espero que el Jonathan del pasado este orgulloso de donde me encuentro ahora.

# Índice general

---

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Superficies atrapadas y singularidades</b>	<b>11</b>
2.1	Introducción a superficies atrapadas . . . . .	11
2.2	Superficies atrapadas . . . . .	13
2.3	Cálculo para superficies atrapadas . . . . .	17
2.4	Uso de superficies atrapadas . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Espacio-tiempo de Vaidya</b>	<b>21</b>
3.1	Orientación temporal . . . . .	22
3.2	Geodésicas radiales nulas para Vaidya . . . . .	22
3.3	Masa lineal $m(v) = \mu v$ . . . . .	24
3.3.1	Caso $\mu > 1/16$ . . . . .	25
3.3.2	Caso $\mu = 1/16$ . . . . .	26
3.3.3	Caso $\mu < 1/16$ . . . . .	28
3.4	Vaidya-Schwarzschild con masa lineal $m(v) = \mu v$ . . . . .	29
3.4.1	Caso $\mu > 1/16$ . . . . .	30
3.4.2	Caso $\mu = 1/16$ . . . . .	32
3.4.3	Caso $\mu < 1/16$ . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Colapso esféricamente simétrico</b>	<b>34</b>
4.1	Colapso esférico generalizado . . . . .	34
4.2	Barrera pasada . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>39</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>40</b>

## Introducción

---

La primera idea o noción relacionada a un objeto el cual no permite “escapar” la luz emitida por el mismo fue planteada por John Michell en 1783, donde propuso la existencia de una *estrella oscura*, un objeto del cual ningún rayo de luz podía alejarse indefinidamente, utilizando como base la mecánica de Newton.

Suponiendo que la luz fuesen partículas de masa  $m$ , al alejarse del centro de una distribución esférica de masa  $M$ , su energía esta dada por

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (1.1)$$

Se puede ver que por la conservación de la energía si  $r$  aumenta,  $v$  disminuye, entonces si se impone que la partícula de luz se aleje indefinidamente ( $r \rightarrow \infty$ ) y quede en reposo, se obtiene la *velocidad de escape*  $v_e$  que corresponde a la mínima velocidad que necesita una partícula para alejarse infinitamente:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (1.2)$$

siendo  $R$  el radio de la superficie de la estrella esférica. Michell dedujo que si la velocidad de la luz fuese menor que la velocidad de escape, i.e.  $c < v_e$ , no podría alejarse de forma indefinida y retornaría a la superficie. Por lo tanto, la luz no sería observada desde muy lejos. Además argumentó que aunque este objeto denso no pueda ser visible, podría haber objetos alrededor del mismo que orbiten emitiendo luz que sí se podría detectar.

Más adelante, en 1796 Pierre-Simon Laplace plantea las mismas ideas que Michell y agrega que los cuerpos más grandes del Universo podrían ser invisibles. Para el siglo XIX el descubrimiento de que la luz es un fenómeno ondulatorio hizo que estas ideas quedaran abandonadas, ya que no se consideraba a la luz como partículas con masa (teoría corpuscular), si no como ondas electromagnéticas.

Con la llegada de la Relatividad General de Albert Einstein en 1915, donde se plantea que la geometría del espacio-tiempo no es plana y la forma del mismo depende de la distribución de materia y energía, se determina cómo es la propagación de los haces de luz a través del espacio-tiempo en presencia de una estrella emisora. En particular es posible que alguna con

masa suficientemente grande y dimensiones específicas curve el espacio-tiempo de tal forma que la luz quede restringida a una zona cercana a esta estrella. Este es el concepto de *agujero negro*. Dado que uno de los postulados de Einstein plantea que la velocidad de la luz es máxima, se establece que un agujero negro es una región de la cual *nada puede escapar* ya que no existe objeto capaz de superar la velocidad de la luz  $c$ .

El descubrimiento teórico de un agujero negro (AN), y posteriormente su verificación observacional, hicieron que sea uno de los objetos mas extraños y complejos de la física moderna.

Al año siguiente de que Einstein presentó su teoría de Relatividad General, Karl Schwarzschild encontró la primera solución exacta no trivial de las ecuaciones de Einstein en vacío. Esta solución describe la región exterior de una estrella no rotante de masa  $M$  con simetría esférica. Expresada en términos de ciertas coordenadas  $(v, r, \theta, \phi)$  [1], la métrica de Schwarzschild es:

$$ds^2 = -f(r)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2), \quad f(r) = 1 - \frac{r_S}{r} \quad (1.3)$$

Se llama *radio de Schwarzschild* al valor  $r_S = \frac{2GM}{c^2}$ . Para valores  $r \gg r_S$  se cumple que

$$ds^2 \simeq -dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (1.4)$$

Si definimos  $v = ct + r$ , llegamos a

$$ds^2 \simeq -c^2dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (1.5)$$

que es la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas. Es decir  $r \gg r_S$  corresponde a un espacio-tiempo asintóticamente plano. Esto nos dice que la solución de Schwarzschild aproxima a Minkowski para  $r \rightarrow \infty$ .

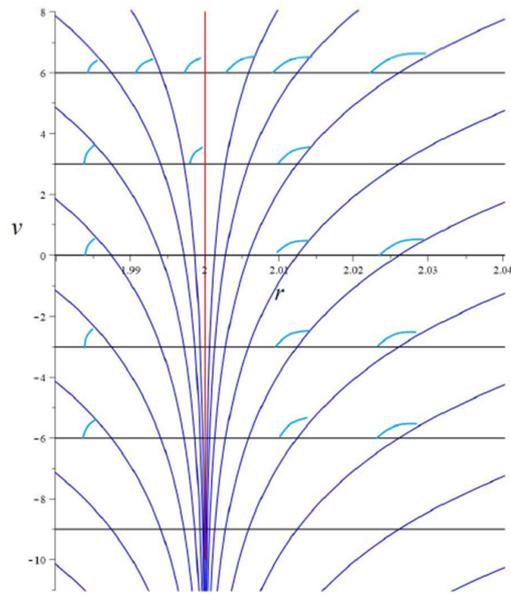
En la Fig. 1.1 se puede observar un diagrama  $(v, r)$  de Schwarzschild (suprimiendo las coordenadas angulares) el cual muestra distintos rayos de luz. En la aproximación de óptica geométrica, los rayos de luz son *geodésicas nulas* cuyas tangentes determinan los conos de luz futuros (arcos celestes en la Fig. 1.1). Pensamos a la geodésica nula como la curva que sigue una partícula sin masa (fotón). En cambio, cualquier partícula con masa tendría una línea mundo dentro del cono de luz como muestra la Fig. 1.3. Entonces estas curvas nulas cumplen que  $ds^2 = 0$  en la Ec. (1.3), y si se consideran radiales, i.e.  $\dot{\theta} = 0 = \dot{\phi}$ , se obtiene

$$v = cte, \quad \frac{dv}{dr} = \frac{2}{f} \quad (1.6)$$

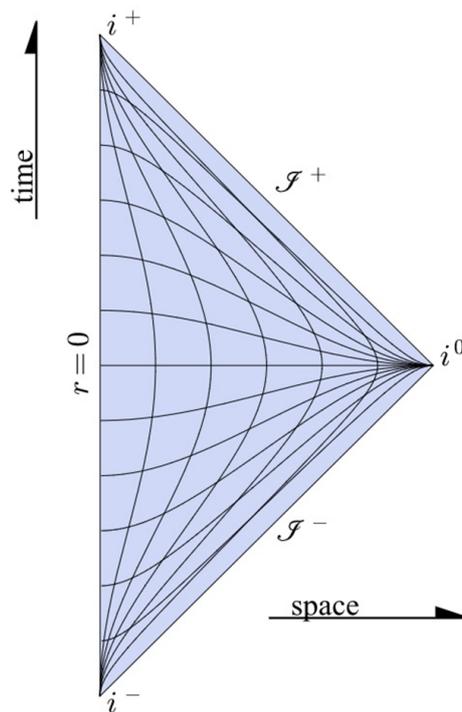
Analicemos por un momento la compactificación de Minkowski representada en la Fig. 1.2. Se puede ver como una geodésica nula sale desde  $\mathcal{I}^-$  hacia  $\mathcal{I}^+$ . Llamamos *infinito nulo futuro (pasado)*  $\mathcal{I}^+$  ( $\mathcal{I}^-$ ) a una “región” donde los rayos de luz convergen para  $t \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow -\infty, r \rightarrow \infty$ )<sup>1</sup>. Notar que cualquier geodésica en Minkowski siempre puede llegar a  $\mathcal{I}^+$ . Como dijimos anteriormente, Schwarzschild es una deformación de Minkowski (ya que si  $M = 0$ , se obtiene esta última), entonces también podemos hablar de un infinito nulo futuro  $\mathcal{I}^+$  para el espacio-tiempo de Schwarzschild. No obstante si analizamos la Fig. 1.1 podemos advertir una diferencia esencial.

Para  $r < r_S$  la luz se curva hacia  $r = 0$ . Lo mismo ocurriría con la línea mundo de cualquier partícula material porque en cada punto su vector tangente tiene que estar dentro del cono de luz futuro. Notemos que para  $r > r_S$  no existe este problema, los rayos de luz y las partículas pueden alejarse indefinidamente. Aquella zona desde la que no se puede enviar señales luminosas que lleguen al infinito nulo futuro se llama *Agujero negro de Schwarzschild*. No podríamos tener

<sup>1</sup>Técnicamente estos son tramos de la frontera del espacio-tiempo compactificado.



**Figura 1.1:** Diagrama  $(v, r)$  de Schwarzschild. Las curvas en negro representan las geodésicas nulas radiales ( $\dot{\theta} = 0 = \dot{\phi}$ ). También se observan los conos de luz futuros (arcos celestes) y el horizonte de eventos (rojo). Reproducido de [2].



**Figura 1.2:** Diagrama conforme para el espacio-tiempo de Minkowski.

información de esta región “prohibida” ya que ninguna partícula con o sin masa que parta de esta zona podría cruzar  $r_S$  para llegar a algún observador externo. La superficie definida por  $r = r_S$  actúa entonces como una membrana unidireccional. Esta superficie recibe el nombre de *horizonte de eventos* [3].

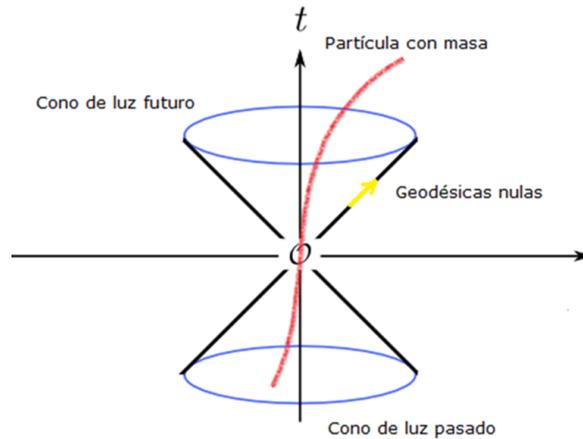


Figura 1.3: Representación del cono de luz para algún evento  $\mathcal{O}$ .

La noción de AN es muy particular, pues es necesario conocer el espacio-tiempo *completo* para poder definirlo. Esto incluye todo el pasado, el presente y el futuro del universo. A los fines de tener rigurosidad en los desarrollos que continúan hacemos la siguiente definición de AN:

*Sea  $\mathcal{M}$  un espacio-tiempo asintóticamente plano, se dice que contiene una región de Agujero Negro  $\mathcal{B}$  si el pasado del infinito nulo futuro  $\mathcal{I}^+$  no es todo el espacio tiempo. Al borde de  $\mathcal{B}$  se denomina horizonte de eventos  $\mathcal{H}$ .*

El AN de Schwarzschild es un ejemplo claro de lo dicho anteriormente. La región  $\mathcal{B}$  es tal que  $r < r_S$ , mientras que  $\mathcal{H}$  coincide con el radio de Schwarzschild  $r_S$ .

Por otro lado, si uno busca un modelo simple donde un objeto masivo colapse hacia un agujero negro, estaría frente a la solución propuesta por J. Robert Oppenheimer y Hartland Snyder en 1939, llamado *modelo de Oppenheimer-Snyder* [4]. En esta solución se idealiza al objeto de tal forma que tenga simetría esférica, con densidad constante y volumen finito (nube esférica de polvo nulo) y en su exterior vacío (Schwarzschild). Para modelos mas complejos y actuales se puede consultar [5].

Un modelo mucho más elemental es la *solución de Vaidya*. Dado un espacio de Minkowski, un chorro de polvo nulo compuesto por partículas de masa nula que vienen del infinito nulo pasado se acumula en capas esféricas en algún intervalo de tiempo formando un Agujero Negro de Schwarzschild.

Tanto en la solución de Vaidya como en Schwarzschild, dentro del AN, existen *superficies atrapadas* [3], es decir superficies espaciales cerradas tales que dada las 2 direcciones nulas sobre la misma, los frentes de onda de los haces de luz emitidas a lo largo de estas direcciones son convergentes. Estas superficies tienen muchas aplicaciones tanto en la astrofísica como en la relatividad numérica y constituyen un ingrediente esencial en los Teoremas de singularidad de Penrose. Las superficies atrapadas se utilizan en Relatividad numérica para determinar posibles fronteras del AN evitando las dificultades mencionadas anteriormente asociadas a la definición del horizonte de eventos (HE).

## Superficies atrapadas y singularidades

---

El concepto de *superficie atrapada* fue introducido por primera vez por Roger Penrose en 1965, dando inicio a varias líneas de investigación que actualmente siguen dando resultados muy novedosos acerca de la naturaleza de los agujeros negros. La no localidad del horizonte de eventos de un agujero negro implica que para determinar su posición necesitamos conocer de antemano la estructura global del espacio-tiempo en el que se está trabajando, por lo que no es del todo factible. Por su parte, las superficies atrapadas no solo juegan un rol muy importante en la definición de la cuasilocalidad de los agujeros negros, sino también en la detección de singularidades. En la sección siguiente se abordará el *Teorema de la singularidad de Penrose* y las motivaciones que hacen que el estudio de estas superficies sean tan interesantes. Luego veremos el concepto de curvatura extrínseca y como éste se utiliza para determinar si una superficie es atrapada.

### 2.1. Introducción a superficies atrapadas

En 1965, además de la noción de superficie atrapada, Penrose introdujo el concepto de incompletitud de las geodésicas proveyendo un resultado que da rigurosidad a la definición de *singularidad* [6].

**Teorema** (Teorema de la singularidad de Penrose): *Sea  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  un espacio-tiempo globalmente hiperbólico con una hipersuperficie de Cauchy no compacta. Suponiendo que se cumple  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  para todo vector nulo  $k^a$ <sup>1</sup> y que  $\mathcal{M}$  contiene una superficie atrapada futura  $S$  cerrada (compacta sin borde), entonces existen geodésicas nulas futuras incompletas.*

Cuando retornamos a la Ec. (1.3) de Schwarzschild, se puede ver que cualquier geodésica nula o temporal (causal) dentro del AN llega al borde  $r = 0$  en algún valor finito de parámetro afín que parametrize la curva. Esto es lo que anticipa el Teorema cuando se refiere a *incompletitud de las geodésicas*.

También se menciona una *hipersuperficie de Cauchy*  $\Sigma$ . Esta es una hipersuperficie acronal<sup>2</sup> donde

<sup>1</sup>También conocida como condición de convergencia nula.

<sup>2</sup>Cualquier par de puntos sobre la hipersuperficie tienen separación no temporal.

toda curva causal en el espacio-tiempo la interseca solo una vez. Se puede determinar que dado datos iniciales para cualquier campo sobre la superficie de Cauchy, es posible predecir los valores de este campo en todo el espacio-tiempo.

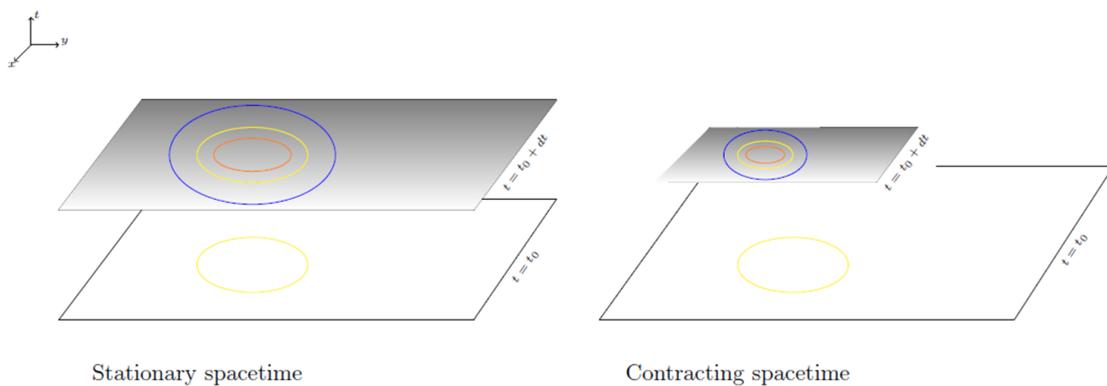
Por su parte, Robert M. Wald (Proposición 12.2.2 [7]) nos dice que:

**Proposición:** Sea  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  un espacio-tiempo que cumple  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$  para todo vector nulo  $k^a$ , como ocurre en el caso en que las Ecs. de Einstein cumplen con la condición de energía débil o fuerte (omitimos ciertos tecnicismos). Supongamos que  $\mathcal{M}$  contiene una superficie atrapada,  $\mathcal{T}$ . Entonces  $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$ , donde  $\mathcal{B}$  se denota a la región de Agujero negro del espacio-tiempo.

Esto significa que si las superficies atrapadas viven dentro de un AN, y la existencia de estas nos indica una incompletitud de geodésicas, estaríamos frente a un *espacio-tiempo singular*, es decir habría un borde de  $\mathcal{M}$  hacia el futuro de las geodésicas causales dentro de la región de agujero negro.

Para entender el concepto de superficie atrapada, una analogía útil es pensar en la atracción gravitatoria newtoniana, en la cual un objeto inmerso en un campo gravitatorio muy fuerte necesitará una velocidad de escape infinita para poder librarse del mismo (Estrellas oscuras de Michell). En el caso de la Relatividad General, un efecto parecido puede ser causado por la convergencia de los rayos de luz, es decir geodésicas nulas. Se sabe que dado un espacio-tiempo 4-dimensional con signatura  $(-+++)$ , una 2-superficie tiene dos direcciones normales nulas futuras en cada punto, pudiendo así distinguir dos familias de geodésicas nulas normales a dicha superficie. Si se puede asegurar la convergencia de ambas familias de geodésicas nulas, entonces estamos hablando de una *superficie atrapada*. Nótese que este es un efecto inesperado porque en general una familia de geodésicas convergen si son entrantes y divergen si son salientes.

Intuitivamente se puede entender analizando la Fig. 2.1. En el lado izquierdo de la misma nos encontramos con un estado estacionario, se observa la 2-superficie en un tiempo  $t = t_0$  emitiendo luz en cada uno de los puntos de la misma e infinitesimalmente después, en un tiempo  $t = t_0 + dt$ , se observa que se forman nuevos frentes de onda, uno de área mayor para la dirección saliente y otro de área menor para la dirección entrante. Por otra parte, en el lado derecho se ve el caso de un espacio-tiempo no estacionario, en particular uno que se esta contrayendo. Se puede observar que para  $t = t_0 + dt$  tanto los frentes de onda salientes y entrantes *son de menor área que el inicial*.



**Figura 2.1:** Dos tajadas temporales separadas infinitesimalmente en el tiempo, además se suprime una coordenada espacial. También se observan el frente de onda inicial en amarillo, y los frentes de onda saliente (azul) y entrante (rojo) para un espacio-tiempo estacionario (Izquierda) y un espacio tiempo en contracción (Derecha). Reproducido de [8].

Para dar una estructura más rigurosa a los conceptos relacionados a superficies atrapadas, en las próximas secciones se desarrollará un punto de vista más geométrico y general abordando los conceptos de *segunda forma fundamental*, *vector de curvatura media* y *expansión* que brindaran información relacionada a la *curvatura extrínseca* de estas superficies. Cuando hablamos de curvatura extrínseca se hace referencia al modo en que la superficie se curva dentro del espacio-tiempo.

## 2.2. Superficies atrapadas

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad semi-Riemanniana de dimensión  $m$  y  $\Sigma \subset \mathcal{M}$  una subvariedad  $n$ -dimensional con  $m > n$ . Además sea  $\Phi_t : \Sigma \times (-\delta, \delta)_t \rightarrow \mathcal{M}$  un mapa suave tal que para cada  $t$ ,  $\Phi_t$  es un *embedding*  $\Sigma \hookrightarrow \Phi_t(\Sigma) = S_t$  con  $S_t$  una superficie espacial de  $\mathcal{M}$ . Notar que a  $S_t$  se puede pensar como una deformación de la superficie  $S \equiv S_{t=0}$ .

Con esta premisa, nos interesa calcular la variación del volumen/área de  $S_t$  con respecto a  $t$ .

Si  $u^a \mapsto x^\alpha(u, t)$  es la expresión en coordenadas de  $\Phi_t$ , entonces el *pullback*  $\Phi_*$  (*push-forward*  $\Phi^*$ ) de tensores  $(0, l)$  (tensores  $(k, 0)$ ) proviene de  $E_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial u^a$ . Por ende podríamos usar  $u^a$  como coordenadas locales de  $S_t$ . Definimos al *campo vectorial de deformación* como:

$$\zeta^\alpha = \left. \frac{\partial x^\alpha(u, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \quad (2.1)$$

En particular utilizando los  $E_a^\alpha$  se puede calcular la métrica inducida sobre  $S_t$ , dada por:

$$h_{ab}^t = g_{\alpha\beta}(x(u, t)) E_a^\alpha E_b^\beta = (\Phi_{t*}g)_{ab} \quad (2.2)$$

y su elemento de volumen es

$$\epsilon_t = \sqrt{\det h^t} d^n u = \frac{\sqrt{\det h^t}}{\sqrt{\det h}} \epsilon \quad (2.3)$$

donde  $h \equiv h^{t=0}$ ,  $\epsilon \equiv \epsilon_{t=0}$ ,  $\Phi \equiv \Phi_{t=0}$ , etc.

Denotando con un punto a la derivada respecto a  $t$  evaluada en  $t = 0$  y utilizando la formula de Jacobi<sup>3</sup>, se obtiene:

$$\sqrt{\dot{\det h^t}} = \frac{1}{2} \sqrt{\det h} h^{ab} \dot{h}_{ab} \quad (2.4)$$

Utilizando (2.3) y (2.4) llegamos a

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sqrt{\dot{\det h^t}}}{\sqrt{\det h}} \epsilon = \frac{1}{2} h^{ab} \dot{h}_{ab} \epsilon \quad (2.5)$$

Notar que  $\dot{h}_{ab}$  es la expresión en coordenadas de

$$\left. \frac{d}{dt} (\Phi_{t*}g) \right|_{t=0} = \Phi_* \mathcal{L}_\zeta g \quad (2.6)$$

ya que por la Ec. (2.2)

$$\dot{h}_{ab} = \left( g_{\alpha\beta, \mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^b} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^a \partial t} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^b} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^a} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial u^b \partial t} \right) \Big|_{t=0} \quad (2.7)$$

<sup>3</sup> $\dot{\det}(A) = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1} \dot{A})$  con  $A = A(t)$ .

Acá definimos  $e_a^\alpha \equiv E_a^\alpha|_{t=0}$  que expanden el espacio tangente sobre  $S$ . Entonces por (2.1), reescribimos (2.7)

$$\dot{h}_{ab} = g_{\alpha\beta,\mu} \zeta^\mu e_a^\alpha e_b^\beta + g_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial u^a} e_b^\beta + g_{\alpha\beta} e_a^\alpha \frac{\partial \zeta^\beta}{\partial u^b} \quad (2.8)$$

Por otro lado, calculemos la derivada de Lie de  $g$  asociada al campo vectorial de deformación definido en (2.1) donde  $(\mathcal{L}_\zeta g)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_\alpha$  con  $\nabla$  igual a la derivada covariante en  $(\mathcal{M}, g)$ . Primero calculemos explícitamente uno de estos términos:

$$\nabla_\alpha \zeta_\beta = g_{\beta\mu} \nabla_\alpha \zeta^\mu = g_{\beta\mu} [\partial_\alpha \zeta^\mu + \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \zeta^\sigma] = g_{\beta\mu} \partial_\alpha \zeta^\mu + \frac{1}{2} [g_{\beta\sigma,\alpha} + g_{\beta\alpha,\sigma} - g_{\alpha\sigma,\beta}] \zeta^\sigma \quad (2.9)$$

Haciendo un intercambio  $\alpha \leftrightarrow \beta$  se llega a

$$\nabla_\alpha \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_\alpha = g_{\beta\mu} \partial_\alpha \zeta^\mu + g_{\alpha\mu} \partial_\beta \zeta^\mu + g_{\alpha\beta,\sigma} \zeta^\sigma \quad (2.10)$$

Entonces aplicando el pullback en coordenadas

$$e_a^\alpha e_b^\beta [\nabla_\alpha \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_\alpha] = g_{\beta\mu} \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial u^a} e_b^\beta + g_{\alpha\mu} \frac{\partial \zeta^\mu}{\partial u^b} e_a^\alpha + g_{\alpha\beta,\sigma} \zeta^\sigma e_a^\alpha e_b^\beta \quad (2.11)$$

Por lo tanto, a partir de (2.8) y (2.11) llegamos a la expresión en coordenadas de (2.6), que es lo que se buscaba:

$$\dot{h}_{ab} = e_a^\alpha e_b^\beta [\nabla_\alpha \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_\alpha] \quad (2.12)$$

La idea siguiente es plantear una descomposición en la parte derecha de (2.12). Dicha descomposición se hará sobre lo que vive en el *espacio tangente*  $TS$  y lo que es perpendicular al mismo, su *espacio normal*  $TS^\perp$ . Utilizando la métrica inducida sobre  $S$

$$h_{ab} = e_a^\alpha e_b^\beta g_{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

y su inversa  $h^{ab}$  ( $h^{ab} h_{bc} = \delta_c^a$ ), se definen los siguientes operadores:

$$S^\top \alpha\beta = h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta \quad S^\perp \alpha\beta = g^{\alpha\beta} - S^\top \alpha\beta \quad (2.14)$$

De forma alternativa, si  $n_c^\alpha$  con  $c = 1, \dots, m - n$  es una base de campos vectoriales para  $TS^\perp$ ,  $N_{cd} = g_{\alpha\beta} n_c^\alpha n_d^\beta$  es la métrica de  $TS^\perp$  y llamando  $N^{cd}$  a su inversa entonces:

$$S^\perp \alpha\beta = N^{cd} n_c^\alpha n_d^\beta \quad (2.15)$$

Los proyectores ortogonales  $S^\top \alpha_\beta$  y  $S^\perp \alpha_\beta$  actúan sobre los espacios  $TS$  y  $TS^\perp$ . Dado un tensor  $U$  en  $p \in S$ , se dice *tangente a S* si:

$$U_{\beta_1 \beta_2 \dots}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots} = S^\top \alpha_1 \mu_1 S^\top \alpha_2 \mu_2 \dots S^\top \nu_1 \beta_1 S^\top \nu_2 \beta_2 \dots U_{\nu_1 \nu_2 \dots}^{\mu_1 \mu_2 \dots} \quad (2.16)$$

Para un tensor  $U$  arbitrario, es decir que no sea necesariamente tangente a  $S$ , la parte derecha de (2.16) define su *parte tangente*  $U^\top$  y el complemento  $U^\perp = U - U^\top$  define su *parte normal*. Se puede ver que la *derivada covariante* de un tensor  $U$  tangente a la variedad  $(S, h)$  es  $DU = (\nabla U)^\top$ .

Utilizando (2.12) y con las definiciones anteriores, podemos plantear la descomposición  $\zeta^\alpha = \zeta_\top^\alpha + \zeta_\perp^\alpha$ , entonces

$$\begin{aligned}
\dot{\nu}_\zeta &\equiv \frac{1}{2}h^{ab}\dot{h}_{ab} = \frac{1}{2}h^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta (\nabla_\alpha \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_\alpha) \\
&= h^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta \nabla_\alpha \zeta_\beta \\
&= h^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta (\nabla_\alpha \zeta_\beta^\top + \nabla_\alpha \zeta_\beta^\perp) \\
&= h^{ab}D_\alpha \zeta_b^\top - \zeta_\beta^\perp h^{ab} (e_a^\alpha \nabla_\alpha e_b^\beta) \\
&= \operatorname{div}_S \zeta_\top - \zeta_\beta^\perp h^{ab} \mathbb{I}_{ab}^\beta \\
&= \operatorname{div}_S \zeta_\top - \zeta_\beta h^{ab} \mathbb{I}_{ab}^\beta
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Donde  $\operatorname{div}_S$  es el operador divergencia sobre  $S$ .

El tensor simétrico:

$$\mathbb{I}_{ab}^\beta \equiv (e_a^\alpha \nabla_\alpha e_b^\beta)^\perp \tag{2.18}$$

es la *segunda forma fundamental* de  $S \subset \mathcal{M}$ . Notemos que es un mapa  $\mathbb{I}_{ab}^\beta : TS \otimes TS \rightarrow TS^\perp$ . Además si introducimos el *campo vectorial de curvatura media* sobre  $S$  (utilizando la convención de [9] y [10])

$$H^\beta \equiv h^{ab} \mathbb{I}_{ab}^\beta \tag{2.19}$$

la Ec. (2.17) se reescribe como

$$\dot{\nu}_\zeta = \operatorname{div}_S \zeta_\top - \zeta_\beta H^\beta \tag{2.20}$$

De las Ecs. (2.5)-(2.20) se deduce que si  $V_t$  es el volumen finito de  $S_t$  entonces:

$$\dot{V} = \int_S \dot{\nu}_\zeta \epsilon = \int_S (\operatorname{div}_S \zeta_\top - \zeta_\beta H^\beta) \epsilon \tag{2.21}$$

Si el campo  $\zeta^\alpha$  tiene soporte compacto (soporte cerrado y acotado), la variación de  $V$  está bien definida incluso cuando el volumen  $V$  sea infinito. En particular si la superficie  $S$  es cerrada, por el Teo. de Gauss, la Ec. (2.21) se simplifica a:

$$\dot{V} = - \int_S \zeta_\beta H^\beta \epsilon \tag{2.22}$$

Ademas, dado un vector normal a  $S$ , es decir  $n^\alpha \in TS^\perp$ , obtenemos

$$\mathbb{I}_{ab}^\beta n_\beta = (e_a^\alpha \nabla_\alpha e_b^\beta) n_\beta = -e_a^\alpha e_b^\beta \nabla_\alpha n_\beta \tag{2.23}$$

Notar que  $\nabla_\alpha n_\beta$  no está bien definido<sup>4</sup>, pero sí puedo tomar derivadas en las direcciones tangentes. Esto nos permite definir la *expansión*  $\theta(n)$  sobre  $S$  del campo vectorial  $n^\alpha \in TS^\perp$ :

$$H^\beta n_\beta = -h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta \nabla_\alpha n_\beta \equiv -\theta(n) \tag{2.24}$$

$\theta(n)$  representa la convergencia o divergencia de una familia de geodésicas que parten de cada punto de  $S$  en la dirección dada por  $n^\alpha$ . Si utilizamos (2.15) y (2.24):

$$H^\alpha = H^\beta N^{cd} n_c^\alpha n_{d\beta} = -N^{cd} \theta(n_d) n_c^\alpha \tag{2.25}$$

A continuación dos ejemplos que ilustran los resultados anteriores:

<sup>4</sup> $n_\beta$  solo esta definido en la superficie  $S$ .

1. Se toma  $TS^\perp$  1-dimensional con una métrica inducida positiva (por ej. superficies en  $\mathbb{R}^3$ ). Sea  $n^\alpha$  un vector normal a la superficie que es único salvo un signo, entonces:

$$H^\alpha = H^\beta n_\beta n^\alpha = -\theta(n)n^\alpha \quad (2.26)$$

2. Si  $TS^\perp$  tiene signatura  $(-+)$ , por ejemplo las 2-superficies en el espacio-tiempo, se toma como base los vectores nulos futuro  $\{k_+^\alpha, k_-^\alpha\}$  normalizados tales que  $k_+^\alpha k_{-\alpha} = -1$ , entonces definiendo  $\theta_\pm = \theta(k_\pm)$

$$H^\alpha = \theta_- k_+^\alpha + \theta_+ k_-^\alpha \quad (2.27)$$

Un concepto interesante:

Una subvariedad espacial  $S$  se dice *minimal* si  $\dot{V} = 0$  para cualquier campo vectorial  $\zeta^\beta$  con soporte compacto.

Por (2.22) es equivalente a pedir  $H^\beta = 0$ .

Nuestro caso de interés es el siguiente :

Sea  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  el espacio-tiempo con signatura  $(-+++)$ . Sea  $S$  una superficie espacial, se dice *superficie atrapada futura* si dado  $\zeta^\beta$  temporal futuro con soporte compacto,  $H^\beta$  es temporal pasado sobre todo  $S$  o de forma equivalente  $\dot{V} < 0$ .

Por lo tanto vale la Ec. (2.27). La siguiente tabla muestra una clasificación para distintas superficies atrapadas futuras obviando el término *futura*<sup>5</sup>:

Tipo de superficie	Condición para $\theta_\pm$	Condición para $H^\alpha$
Atrapada	$\theta_+, \theta_- < 0$	$H^\alpha$ temporal pasado
Marginalmente atrapada	$\theta_+ = 0, \theta_- < 0$	$H^\alpha$ nulo pasado
Marginalmente atrapada	$\theta_+ < 0, \theta_- = 0$	$H^\alpha$ nulo pasado
Débilmente atrapada	$\theta_+ \leq 0, \theta_- \leq 0$	$H^\alpha$ causal pasado
Minimal	$\theta_+ = \theta_- = 0$	$H^\alpha = 0$

**Tabla 2.1:** Clasificación de superficies atrapadas.

Hay casos en que solo interesa el signo de uno de los  $\theta_\pm$ , a estos se les denomina *superficies  $\pm$ -atrapadas* donde los símbolos  $\pm$  indican las direcciones de los vectores nulos futuros (para el Ej. 2 serian las direcciones de  $k_\pm^\alpha$ ). Usualmente a la dirección  $+$  se le denomina *exterior*, de este modo se definen las *superficies atrapadas exteriores*. Cabe aclarar que la palabra “exterior” no siempre hace referencia a una dirección exterior o saliente particular de la superficie, es solo una convención. Su respectiva clasificación se encuentra en la Tabla 2.2. Cabe destacar que la terminología para esta clasificación de superficies atrapadas no es única [11].

<sup>5</sup>Se puede hacer un análisis análogo para superficies atrapadas pasadas.

Tipo de superficie	Condición para $\theta_+$
Atrapada exterior	$\theta_+ < 0$
Marginalmente atrapada exterior	$\theta_+ = 0$
Débilmente atrapada exterior	$\theta_+ \leq 0$

Tabla 2.2: Clasificación de superficies atrapadas exteriores.

### 2.3. Cálculo para superficies atrapadas

Nos enfocaremos en calcular tanto la segunda forma fundamental  $\mathbb{I}_{ab}^\beta$  como el vector de curvatura media  $H^\alpha$ , ya que teniendo esta información uno podría decir si la superficie es atrapada o no. Se presentan los siguientes casos:

- **Coordenadas adaptadas:** Supongamos que las coordenadas locales de  $\mathcal{M}$  son

$$\underbrace{(x^1, x^2, \dots, x^m)}_{x^\alpha} = \underbrace{(u^1, u^2, \dots, u^n, x^{n+1}, \dots, x^m)}_{u^\alpha} \quad (2.28)$$

y que  $S$  está dada por las condiciones  $x^j = c_j$  con  $j = n+1, \dots, m$  donde los  $c_j$  son constantes, entonces en las bases  $\partial/\partial u^\alpha$  para  $TS$  y  $\partial/\partial x^\alpha$  para  $T\mathcal{M}$

$$\mathbb{I}_{ab}^\alpha = \Gamma_{ab}^\beta S_{\perp}^\alpha{}_\beta \quad (2.29)$$

Notar que en general  $TS^\perp$  no se expande con  $\langle \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \rangle$ . Además  $h^{ab}$ , siendo la inversa de  $h_{ab}$ , no es necesariamente igual al bloque de  $g^{\alpha\beta}$  con  $(\alpha, \beta) = (a, b)$  (a menos que la métrica  $g_{\alpha\beta}$  sea diagonal en bloques adaptados a la descomposición  $T\mathcal{M} = TS \oplus TS^\perp$ ).

Dado  $n^\alpha \in TS^\perp$ , ya que  $n^\alpha = S_{\perp}^\alpha{}_\beta n^\beta$

$$\mathbb{I}_{ab}^\alpha n_\alpha = \Gamma_{ab}^\beta n_\beta \quad (2.30)$$

En particular, utilizando (2.15):

$$\mathbb{I}_{ab}^\alpha = \Gamma_{ab}^\beta N^{cd} n_{d\beta} n_c^\alpha \quad (2.31)$$

- **Mapa inclusión 1:** Una interesante fórmula alternativa para la segunda forma fundamental se obtiene mediante una pequeña variación del argumento de la Sec. 5.4 de [9]. Se considera la expresión local del mapa inclusión como un conjunto de  $m$  campos escalares  $x^\alpha(u)$  sobre  $S$ , entonces

$$\mathbb{I}_{ab}^\beta = D_a D_b x^\beta + \Gamma_{\mu\sigma}^\beta(x(u)) \frac{\partial x^\mu}{\partial u^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial u^b} \quad (2.32)$$

donde  $\Gamma_{\mu\sigma}^\beta(x)$  son los símbolos de Christoffel para  $M$  en las coordenadas  $\{x^\alpha\}$  y  $D$  es la derivada covariante de  $S$  (bajo una transformación de coordenadas en  $\mathcal{M}$  se puede comprobar que (2.32) transforma efectivamente como un vector gracias a la cancelación de los términos no homogéneos del lado derecho).

- **Mapa inclusión 2:** Otra alternativa para cuando nos dan el mapa  $u^a \rightarrow x^\alpha(u)$  es usar la primera igualdad de (2.23) para la base  $\{e_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial u^a\}$  de  $TS$

$$\mathbb{I}_{ab}^\alpha = \left( e_a^\nu \nabla_\nu e_b^\beta \right) S_{\perp}^{\alpha\beta} = S_{\perp}^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial u^a \partial u^b} + \Gamma_{\mu\sigma}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial u^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial u^b} \right) \quad (2.33)$$

Nuevamente para un  $n^\beta \in TS^\perp$

$$\mathbb{I}_{ab}^\beta n_\beta = \left( e_a^\nu \nabla_\nu e_b^\beta \right) n_\beta = n_\beta \left( \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial u^a \partial u^b} + \Gamma_{\mu\sigma}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial u^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial u^b} \right) \quad (2.34)$$

Ejemplos:

1. Supongamos que estamos en el espacio-tiempo de Vaidya (cuyos detalles y motivación se darán en el Cap. 3)

$$ds^2 = -f(v, r)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2), \quad f(v, r) = 1 - \frac{2m(v)}{r} \quad (2.35)$$

Sea la esfera  $S$  con  $r = r_o$ ,  $v = v_o$  y el paralelo  $\gamma \subset S$  tal que  $\theta = \theta_o$ . Para las coordenadas adaptadas, simplificando los cálculos, se obtienen las métricas inducidas para: (i)  $S$  es  $ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b = r_o^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$  y (ii)  $\gamma$  es  $ds^2 = h_{a'b'}dx^{a'} dx^{b'} = r_o^2 \sin^2(\theta_o)d\phi^2$ . Se obtiene

Para  $S$ :

$$\mathbb{I}_{ab}^{\nu S} \partial_\nu = -h_{ab} (r_o^{-1} \partial_v + r_o^{-1} f(v_o, r_o) \partial_r) \quad (2.36a)$$

Para  $\gamma$

$$\mathbb{I}_{a'b'}^{\nu \gamma} \partial_\nu = -h_{a'b'} (r_o^{-1} \partial_v + r_o^{-1} f(v_o, r_o) \partial_r + r_o^{-2} \cot(\theta_o) \partial_\theta) \quad (2.36b)$$

$$\mathbb{I}_{a'b'}^{\nu S} \partial_\nu = -h_{a'b'} \frac{\cot(\theta_o)}{r_o^2} \partial_\theta \quad (2.36c)$$

Particularizando sobre  $S$ , de (2.36a) se deduce el vector de curvatura media:

$$H^\nu \partial_\nu = -2 \left( \frac{1}{r_o} \partial_v + \frac{1}{r_o} f(v_o, r_o) \partial_r \right) \quad (2.37)$$

Expandimos  $TS^\perp$  con la base de campos nulos normales futuros  $l = \partial_v + \frac{1}{2}f(v_o, r_o)\partial_r$  y  $n = -\partial_r$  tales que  $l^\mu n_\mu = -1$ . Por la Ec. (2.24) las expansiones son:

$$\theta_l \equiv \theta(l) = \frac{1}{r_o} f(v_o, r_o), \quad \theta_n \equiv \theta(n) = -\frac{2}{r_o} \quad (2.38)$$

Por lo que se encontraran esferas atrapadas con  $(v = v_o, r = r_o)$  si  $f(v, r) < 0 \Leftrightarrow r < 2m(v)$ .

2. Supongamos que estamos en la cosmología  $S^3$

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) [d\psi^2 + \sin^2(\psi) (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)] \quad (2.39)$$

Sea  $\Sigma$  la hipersuperficie  $\psi = \psi_o$  y  $S$  la superficie  $\psi = \psi_o$ ,  $\theta = \theta_o$ . En coordenadas adaptadas, la métrica inducida para  $\Sigma$ ,  $ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \sin^2(\psi_o) (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$  y para  $S$ ,  $ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \sin^2(\psi_o) \sin^2(\theta_o)d\phi^2$ . Llegamos a

$$\mathbb{I}_{ab}^{\nu\Sigma CM} \partial_\nu = -h_{ab} \frac{\cot(\psi_o)}{a^2(\tau)} \partial_\psi \quad (2.40a)$$

y

$$\mathbb{I}_{a'b'}^{\nu\Sigma CM} \partial_\nu = -h_{a'b'} \left( \frac{\cot(\psi_o)}{a^2(\tau)} \partial_\psi + \frac{\cot(\theta_o)}{a^2(\tau) \sin^2(\psi_o)} \partial_\theta \right) \quad (2.40b)$$

3. Una vez más tomemos la Cosmología  $S^3$  con métrica dada por 2.39. Sea  $\tilde{\Sigma}$  la hipersuperficie  $\tau = \tau_o$  con métrica inducida  $a^2(\tau_o) [d\psi^2 + \sin^2(\psi) (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)]$  y sea  $\tilde{S}$  la superficie  $\tau_o, \psi = \psi_o$  con  $a^2(\tau_o) \sin^2(\psi_o) (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$  su métrica inducida. Definiendo  $a \equiv a(\tau_o)$ ,  $\dot{a} \equiv \dot{a}(\tau_o)$ , se llega a:

$$\mathbb{I}_{ab}^{\nu\tilde{\Sigma} CM} \partial_\nu = h_{ab} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \partial_\tau \quad (2.41a)$$

y

$$\mathbb{I}_{a'b'}^{\nu\tilde{S} CM} \partial_\nu = h_{a'b'} \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \partial_\tau - \frac{\cot(\psi_o)}{a^2} \partial_\psi \right] \quad (2.41b)$$

Notar que aparece el *parámetro de Hubble*  $H(\tau) \equiv \dot{a}(\tau)/a(\tau)$ . Denotamos  $H_o = H(\tau = \tau_o)$ . Para el caso de la Ec. (2.41a), calculamos el vector de curvatura media. Vale que

$$H = 3H_o \partial_\tau \Rightarrow \theta_\tau \equiv \theta(\partial_\tau) = 3H_o \quad (2.42)$$

Entonces estamos hablando de un universo en expansión si  $H_o > 0$  o en contracción si  $H_o < 0$ .

## 2.4. Uso de superficies atrapadas

Como ya hemos visto, las superficies atrapadas brindan información relacionada a la convergencia o divergencia de familias de geodésicas, como así también información relacionada a la detección de ANs. Una singularidad se puede predecir a futuro a partir de una superficie atrapada empleando el Teorema de Penrose (Sec. 2.1) y a través de la conjetura de la censura cósmica<sup>6</sup> deducimos si nos encontramos dentro de un agujero negro.

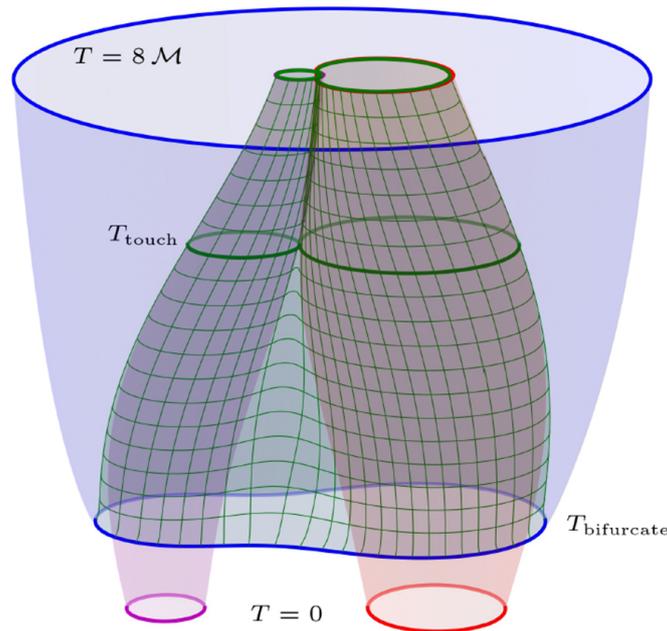
Otra aplicación importante de las superficies atrapadas se encuentra en la relatividad numérica. Los espacios-tiempos se construyen a partir de datos iniciales. En este contexto toma relevancia el concepto de *horizonte aparente* (HA), la mas externa de las superficies marginalmente atrapadas exteriores (MOTS, por su siglas en inglés). Recordando la Tabla 2.2, el horizonte aparente cumple  $\theta_+ = 0$ . Por lo que dada una cierta foliación del espacio-tiempo, se puede hacer una evolución temporal mediante algoritmos de detección de HAs, es decir, detectar el borde la región que contiene superficies atrapadas [12]. De acá la importancia del mismo, ya que nos brinda una aproximación útil al horizonte de eventos pero a diferencia de este último, el horizonte aparente puede calcularse usando la métrica y la curvatura extrínseca sobre la rebanada de tiempo constante (cuasilocalidad).

A pesar de la utilidad conceptual y práctica de esta descripción, una de las grandes desventajas es que no provee una caracterización espacio-temporal del agujero negro, ya que el HA depende directamente de la foliación que se elija. No obstante, para poder dar un punto de vista más global de los horizontes aparentes se construyen los *tubos marginalmente atrapados exteriores*:

<sup>6</sup>La conjetura de censura cósmica establece que las singularidades están cubiertas por horizontes de eventos [7].

tubos (superficies 3-dimensionales) foliados por MOTS [7, 13] que permiten una independencia de la foliación sobre el espacio-tiempo.

Una aplicación muy interesante de estos tubos se puede ver en las colisiones de agujeros negros. En la Fig. 2.2 observamos tubos foliados por MOTS de dos agujeros negros independientes (violeta y rojo) que tienen una colisión frontal. Se utiliza una evolución numérica con ciertos datos iniciales. En cierto tiempo  $T_{\text{bifurcate}}$  se forman dos tubos comunes a esta fusión, uno interior (verde) y uno exterior (azul). El tubo exterior es el horizonte aparente que representa la MOTS común a ambos que a tiempos muy grandes de evolución se convierte en Schwarzschild. Mientras que el tubo interior envuelve los ANs, hasta que en el tiempo  $T_{\text{touch}}$  atraviesa los tubos independientes y a partir de ahí empieza la fusión de estos agujeros negros. Para más detalles ver [14, 15].



**Figura 2.2:** Colisión de un sistema binario de agujeros negros a través de simulación numérica utilizando tubos 3-dimensionales foliados por MOTS. Reproducido de [15].

Por último, cabe mencionar un resultado interesante que usa el concepto de superficie atrapada exterior (OTS, por sus siglas en inglés, Tabla 2.2). Ben-Dov mediante una construcción explícita de estas superficies demostró que dado cualquier punto dentro del horizonte de eventos del espacio-tiempo de Vaidya (Cap. 3) suponiendo ciertas condiciones para su función de masa, existen OTS que contengan este punto (Prop. en Sec. II [16]). Por lo tanto, *el horizonte de eventos coincide con el límite exterior de las OTS*. Se puede ver lo fuerte que es la determinación de los límites de las regiones que contienen superficies atrapadas (exteriores en este caso).

## Espacio-tiempo de Vaidya

---

Para describir un espacio-tiempo estático, esféricamente simétrico y asintóticamente plano con un objeto de masa  $M$  en el mismo, se utiliza la solución de Schwarzschild. Recordar que cuando hablamos de estaticidad se hace referencia a la independencia de la métrica con respecto a la coordenada temporal, la simetría esférica esta relacionada con la invariancia rotacional que tiene el espacio-tiempo y ser asintóticamente plano indica que se puede aproximar a la métrica de Minkowski para valores muy grandes de  $r$ , como se vio en el Cap.1.

Nos preguntamos: ¿Qué pasaría si se quisiera describir una solución de las ecuaciones de Einstein, no de vacío sino con una masa variable?. Un modelo sencillo de esta situación lo da el espacio-tiempo de Vaidya.

La métrica de Vaidya es una generalización de Schwarzschild utilizando las coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes, como muestra la Ec. (1.3), sustituyendo la masa constante por una función de masa variable dependiente de la coordenada de tiempo avanzado, es decir  $m(v)$  (a partir de ahora se utilizan unidades geométricas donde  $G = 1, c = 1$ ):

$$ds^2 = -f(v, r)dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2), \quad f(v, r) = 1 - \frac{2m(v)}{r} \quad (3.1)$$

Se puede utilizar este espacio-tiempo de Vaidya para estudiar la formación de agujeros negros a través de radiación entrante (modelo de polvo nulo). El tensor de energía-momento para este caso es:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{G_{\alpha\beta}}{8\pi} = \frac{m'(v)}{4\pi r^2} k_\alpha k_\beta, \quad k_\alpha k^\alpha = 0, \quad k_\alpha dx^\alpha = dv \quad (3.2)$$

Nos restringimos al caso  $m'(v) > 0$  para que se cumplan condiciones de energía. Para poder analizar y estudiar la física de este espacio-tiempo se consideran las geodésicas nulas radiales del mismo y sus respectivas propiedades.

Por último, se puede deducir que a partir del Ej. 2 dado en la Sec. 2.3, en particular la Ec. (2.38), el *horizonte aparente* esta dado por la condición  $r = 2m(v)$ .

### 3.1. Orientación temporal

Antes de iniciar el estudio de geodésicas, tomemos en cuenta la orientación temporal de  $\mathcal{M}$ . El campo vectorial  $\partial/\partial r$  es siempre nulo ya que  $g_{rr} = 0$  y como es distinto de cero en todo punto se lo puede utilizar para definir una orientación temporal. Notar que:

$$g_{vv} = \begin{cases} -f(v, r) < 0, & \text{si } r > 2m(v) \\ -f(v, r) > 0, & \text{si } r < 2m(v) \end{cases} \quad (3.3)$$

Esto implica que  $\partial/\partial v$  es temporal en  $r > 2m(v)$ , por ende si tomamos un valor en la coordenada radial lo suficientemente grande, el espacio-tiempo de Vaidya tiende al espacio-tiempo de Minkowski (asintóticamente plano) entonces  $\partial/\partial v = \partial/\partial t$ , por lo que puedo elegirlo como temporal futuro. Analizando su producto interno con  $\partial/\partial r$  se puede determinar si este último es nulo futuro o nulo pasado:

$$g(\partial/\partial r, \partial/\partial v) = g_{rv} = 1 > 0 \Rightarrow \partial/\partial r \text{ es nulo pasado} \quad (3.4)$$

Por lo tanto  $-\partial/\partial r$  es nulo futuro en todo el espacio-tiempo.

### 3.2. Geodésicas radiales nulas para Vaidya

Recordar que al decir geodésicas radiales se consideran aquellas que mantienen constante sus coordenadas angulares, es decir cumplen  $\dot{\theta} = 0$  y  $\dot{\phi} = 0$ . Estas se caracterizan por la siguiente condición de nulidad:

$$-f(v, r)dv^2 + 2dvdr = 0 \quad (3.5)$$

Esta ecuación se deriva de (3.1). Se obtienen dos tipos de geodésicas (de ahora en más el punto sobre cualquier cantidad denota la derivada respecto al parámetro afín  $s$ ):

- *Caso 1:*  $\dot{v} = 0$
- *Caso 2:*  $\dot{r} = \frac{f}{2}\dot{v}$

El *Caso 1* corresponde a las denominadas *geodésicas nulas radiales entrantes* (GNRE). De la sección anterior se ve que  $\dot{r} = -1$ , por lo tanto:

$$v = v_0, \quad r = -s + r_0 \quad (3.6)$$

donde  $s$  es un parámetro afín. Se puede comprobar que efectivamente la Ec. (3.6) satisface la ecuación de geodésicas, donde  $s$  es parámetro afín, por ende también lo es  $r$ .

Por su parte, para el *Caso 2* se obtienen las *geodésicas nulas radiales salientes* (GNRS). Hay que tener cuidado con el nombre de estas ya que por más que se llamen *salientes*, en la región  $f < 0 \iff r < 2m(v)$  se comprueba que  $\dot{r} < 0$ . De aquí en más solo nos concentraremos en las GNRS.

Utilizando el Lagrangiano para poder encontrar las ecuaciones geodésicas radiales y reemplazando (3.5) en la ecuación radial se obtiene:

$$\begin{aligned} \ddot{v} + \frac{m(v)}{r^2}\dot{v}^2 &= 0 \\ \ddot{r} + \frac{m'(v)}{r}\dot{v}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Notar que  $\dot{m} = m'(v)\dot{v}$  y nuevamente haciendo uso de la condición de nulidad (3.5)

$$\ddot{r} + \frac{2\dot{m}\dot{r}}{r-2m} = 0 \quad (3.8)$$

Trabajemos un poco con esta ecuación:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{r} + \frac{2\dot{m}\dot{r}}{r-2m} = \ddot{r} + \frac{2\dot{m}\dot{r}}{r-2m} + \frac{\dot{r}^2}{r-2m} - \frac{\dot{r}^2}{r-2m} \\ &= \dot{r} \left( \frac{\ddot{r}}{\dot{r}} - \frac{\dot{r} - 2\dot{m}}{r-2m} + \frac{\dot{r}}{r-2m} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Definiendo  $K = \frac{\dot{r}}{r-2m}$ , la Ec. (3.8) es equivalente a

$$\frac{\dot{K}}{K} + K = 0 \quad (3.10)$$

cuya solución es

$$K = \frac{1}{(s-s_0) + 1/K_0}, \quad K_0 = \frac{\dot{r}_0}{r_0 - 2m_0} \quad (3.11)$$

Claramente el subíndice indica la evaluación de las distintas cantidades en  $s = s_0$ . Volviendo a la coordenada radial se obtiene

$$\dot{r} = \frac{r-2m}{(s-s_0) + (r_0-2m_0)/\dot{r}_0} \quad (3.12)$$

Notar que a priori quedan 4 constantes independientes  $(v_0, r_0)$  y  $(\dot{v}_0, \dot{r}_0)$ , de las cuales una de ellas queda restringida por (3.5)

$$\dot{r}_0 = \frac{1}{2}f(v_0, r_0)\dot{v}_0 \quad (3.13)$$

y otra de ellas la podemos obviar si no necesariamente queremos que sea un parámetro afín y solo nos interesa calcular *todas* las GNRS. Por ende el par de constantes de integración arbitrarias es  $(v_0, r_0)$  y podemos asegurar que será única la geodésica que pase por el mismo.

Para la ecuación geodésica de  $v$ , utilizando una vez más la condición de nulidad (3.5) se obtiene

$$\dot{v} = \frac{2r}{(s-s_0) + (r_0-2m_0)/\dot{r}_0} \quad (3.14)$$

Definiendo  $\alpha \equiv s_0 - (r_0 - 2m_0)/\dot{r}_0$ , se puede ver que las GNRS están incompletas ya que  $s > \alpha$ . Sin perder generalidad podemos tomar  $\alpha = 0$ . De la ecuación anterior nos queda la relación

$$\dot{v} = \frac{2r}{s} \quad (3.15)$$

que fija el valor de  $\dot{v}_0 = 2r_0/s_0$  justificando lo que se afirmó anteriormente.

Reemplazando (3.15) en (3.7) se llega a

$$\begin{aligned} \ddot{v} + \frac{4m(v)}{s^2} &= 0 \\ \ddot{r} + \frac{4m'(v)r}{s^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Notar que para el caso en que la masa depende linealmente de  $v$  el par de ecuaciones (3.16) se tornan análogas entre sí, esto se estudiará más en detalle en la próxima sección.

### 3.3. Masa lineal $m(v) = \mu v$

Este caso muestra las características principales del espacio-tiempo de Vaidya así como también la dependencia que existe de la forma de este a través del parámetro  $\mu$ . Tomaremos en (3.1) una función de masa de la forma :

$$m(v) = \begin{cases} 0 & v < 0 \\ \mu v & v \geq 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

con  $\mu > 0^1$  y  $v > 0$ . Claramente este caso carece un poco de sentido físico ya que si  $v \rightarrow \infty \Rightarrow m(v) \rightarrow \infty$ , pero esto se solucionará más adelante empalmándola con la métrica de Schwarzschild para algún  $v_0 > 0$ .

Para la función de masa (3.17), el par de ecuaciones (3.16) toman la forma

$$\begin{aligned} \ddot{v} + \frac{4\mu v}{s^2} &= 0 \\ \ddot{r} + \frac{4\mu r}{s^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Es decir, pasamos de tener un sistema de ecuaciones no lineales acopladas de segundo orden a un sistema de dos ecuaciones lineales armónicas desacopladas de segundo orden e idénticas. Notar que ambas tienen un factor  $1/s^2$  con frecuencia  $4\mu$ .

También se puede ver que a partir de (3.12) podemos encontrar  $v(s)$  en función de  $r(s)$  y  $\dot{r}(s)$

$$v(s) = \frac{1}{2\mu} [r - \dot{r}(s - \alpha)] \quad (3.19)$$

Por ello si podemos encontrar  $r(s)$  a partir de la ecuación geodésica radial de (3.18) podremos determinar automáticamente  $v(s)$  por (3.19). Además puede verse que admiten soluciones de la forma  $r(s) \propto s^\omega$ , y reemplazando en la segunda ecuación de (3.18) se llega a

$$\omega(\omega - 1) + 4\mu = 0 \Leftrightarrow \omega_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 16\mu}) \quad (3.20)$$

A partir de (3.20) resulta evidente que conviene analizar por separado los casos  $\mu > 1/16$ ,  $\mu = 1/16$  y  $\mu < 1/16$ .

Antes de estudiar los distintos casos de esta solución, cabe destacar el hecho de que haber tomado una masa lineal no es una simple elección si no una consecuencia de algo mucho más fuerte. Notar que para el caso de una función de masa genérica se cumple:

$$\frac{d}{ds}(r\dot{v} - v\dot{r}) = (vm' - m)\frac{\dot{v}^2}{r} \quad (3.21)$$

Entonces la cantidad  $D \equiv r\dot{v} - v\dot{r}$  se conserva para este caso particular, es decir

$$\frac{dD}{ds} = 0 \Leftrightarrow m(v) = \mu v \quad (3.22)$$

La cantidad conservada  $D$  se interpreta como la carga asociada a la simetría de dilatación (homotecia) de la métrica de Vaidya con una masa lineal

$$(v, r) \rightarrow (\lambda v, \lambda r) \Rightarrow ds^2 \rightarrow \lambda^2 ds^2 \quad (3.23)$$

<sup>1</sup>Para que se cumpla la condición  $m'(v) > 0$ .

Esta simetría de dilatación es generada por el vector de Killing conforme  $k = v\partial_v + r\partial_r$ , ( $\nabla_a k_b + \nabla_b k_a = 2g_{ab}$ ) entonces a  $D$  lo podemos pensar como

$$D \equiv g_{\alpha\beta} k^\alpha \dot{x}^\beta = r\dot{v} - v\dot{r} \quad (3.24)$$

que se conserva través de geodésicas nulas con vector tangente  $\dot{x}$ . Claramente si  $(v(s), r(s))$  es una GNRS entonces  $(\lambda v(s), \lambda r(s))$  también lo es.

### 3.3.1. Caso $\mu > 1/16$

Para este primer caso vemos de (3.20) que  $\omega_\pm$  son complejas conjugadas

$$\omega_\pm = \frac{1}{2} \pm i\Omega, \quad \Omega = \frac{1}{2} \sqrt{16\mu - 1} \quad (3.25)$$

por lo tanto la solución más general que se puede obtener es:

$$r(s) = c_+ s^{\omega_+} + c_- s^{\omega_-} \quad (3.26)$$

Otra forma de expresar esta solución es como combinación lineal de senos y cosenos. Considerando la definición de la exponencial compleja

$$r(s) = s^{1/2} \left[ A \cos\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) + B \sin\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) \right] \quad (3.27)$$

Reparametrizando, nos queda finalmente:

$$r(s) = \sqrt{\frac{s}{s_0}} \left[ A \cos\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) + B \sin\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) \right] \quad (3.28)$$

Utilizando (3.19), la solución para  $v$  es:

$$v(s) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{s}{s_0}} \left[ \left(\frac{A}{2} - B\Omega\right) \cos\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) + \left(\frac{B}{2} + A\Omega\right) \sin\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) \right] \quad (3.29)$$

Al considerar las condiciones iniciales  $r(s_0) = r_0$ ,  $v(s_0) = v_0$ , llegamos a las siguientes constantes

$$A = r_0, \quad B = \frac{4r_0 - v_0(1 + 4\Omega^2)}{8\Omega} \quad (3.30)$$

Por último, las ecuaciones de las GNRS para  $\mu > 1/16$  son:

$$\begin{aligned} r(s) &= r_0 \sqrt{\frac{s}{s_0}} \cos\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) + \frac{4r_0 - v_0(1 + 4\Omega^2)}{8\Omega} \sqrt{\frac{s}{s_0}} \sin\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) \\ v(s) &= v_0 \sqrt{\frac{s}{s_0}} \cos\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) + \frac{4r_0 - v_0}{2\Omega} \sqrt{\frac{s}{s_0}} \sin\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde el rango de validez de estas soluciones es el intervalo maximal en el cual está contenido  $s$  y  $s_0$  tal que  $r > 0$ ,  $v > 0$  y  $\dot{v} > 0$ .

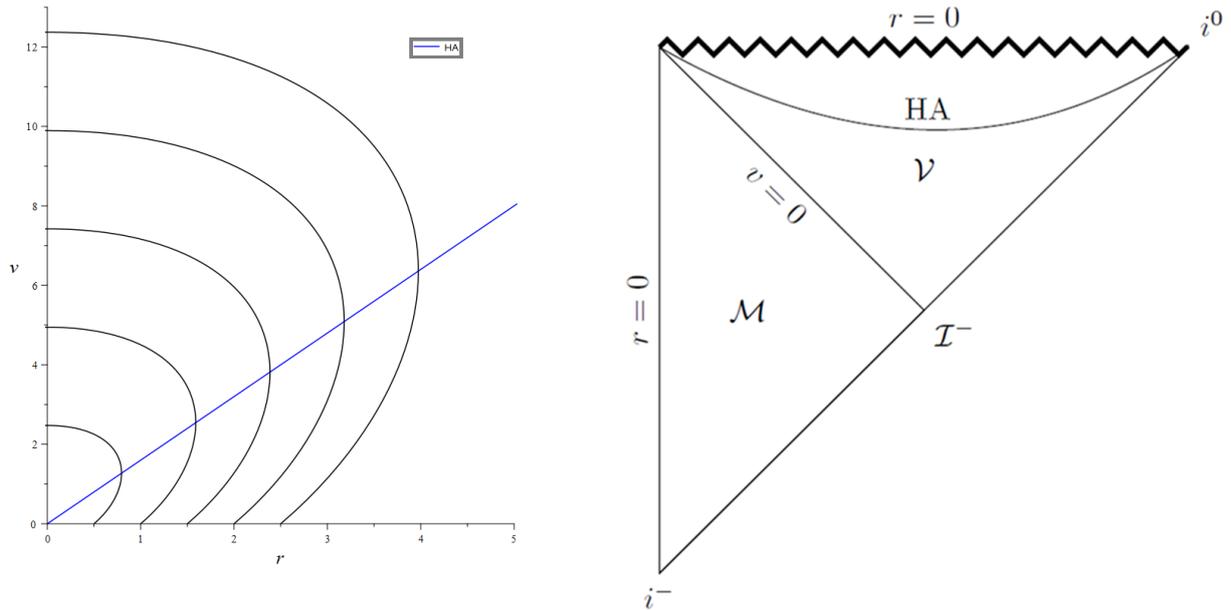
Por (3.24), la constante  $D$  toma el valor:

$$D = \frac{4\Omega^2 v_0^2 + (4r_0 - v_0)^2}{8s_0} \quad (3.32)$$

Mientras que los valores iniciales de las velocidades quedan determinadas por (3.13) y (3.15):

$$\dot{v}_0 = \frac{2r_0}{s_0}, \quad \dot{r}_0 = \frac{r_0}{s_0} - \frac{v_0(4\Omega^2 + 1)}{8s_0} \quad (3.33)$$

Para poder representar gráficamente esta solución, se toma el valor fijo  $\mu = 5/16$  y notamos en la Fig. 3.1 que para cada GNRS el valor de  $r$  esta acotado, i.e. llega a su máximo para  $r = \frac{5}{8}v$ . Recordar que el valor de la coordenada radial  $r = 2m(v)$  corresponde al *horizonte aparente*.



**Figura 3.1:** A la izquierda, geodésicas nulas radiales salientes en el espacio-tiempo de Vaidya,  $m(v) = \mu v$  con  $\mu = 5/16$ . Se pueden ver 5 geodésicas que salen con condición inicial  $v_0 = 0$  y  $r_0 > 0$  y retornan a la singularidad  $r = 0$  con  $\dot{v} = 0$ , además el horizonte aparente se muestra en azul. A la derecha, el diagrama de Penrose-Carter del espacio-tiempo, Minkowski para  $v < 0$  y Vaidya para  $v > 0$ .

Como las GNRS retornan a la singularidad, no vamos a encontrar un futuro nulo infinito  $\mathcal{I}^+$  lo cual tiene sentido ya que estamos considerando el caso en que la tasa de cambio de la masa  $\mu$  es grande y por ende atrae fuertemente a las geodésicas hacia el mismo, por eso no permite que se alcancen valores grandes de  $r$ .

### 3.3.2. Caso $\mu = 1/16$

Para este caso en particular las raíces de (3.20) son idénticas

$$\omega_+ = \omega_- = \frac{1}{2} \quad (3.34)$$

Como buscamos obtener dos soluciones linealmente independientes<sup>2</sup>, la solución más general que se puede obtener para la coordenada radial es

$$r(s) = A\sqrt{\frac{s}{s_0}} + B\sqrt{\frac{s}{s_0}} \ln\left(\frac{s}{s_0}\right) \quad (3.35)$$

Por (3.19)

<sup>2</sup>Wronskiano no nulo.

$$v(s) = 8 \left[ \left( \frac{A}{2} - B \right) \sqrt{\frac{s}{s_0}} + \frac{B}{2} \sqrt{\frac{s}{s_0}} \ln \left( \frac{s}{s_0} \right) \right] \quad (3.36)$$

Aplicando las condiciones iniciales, despejando y sustituyendo los valores encontrados de  $A$  y  $B$  se obtiene

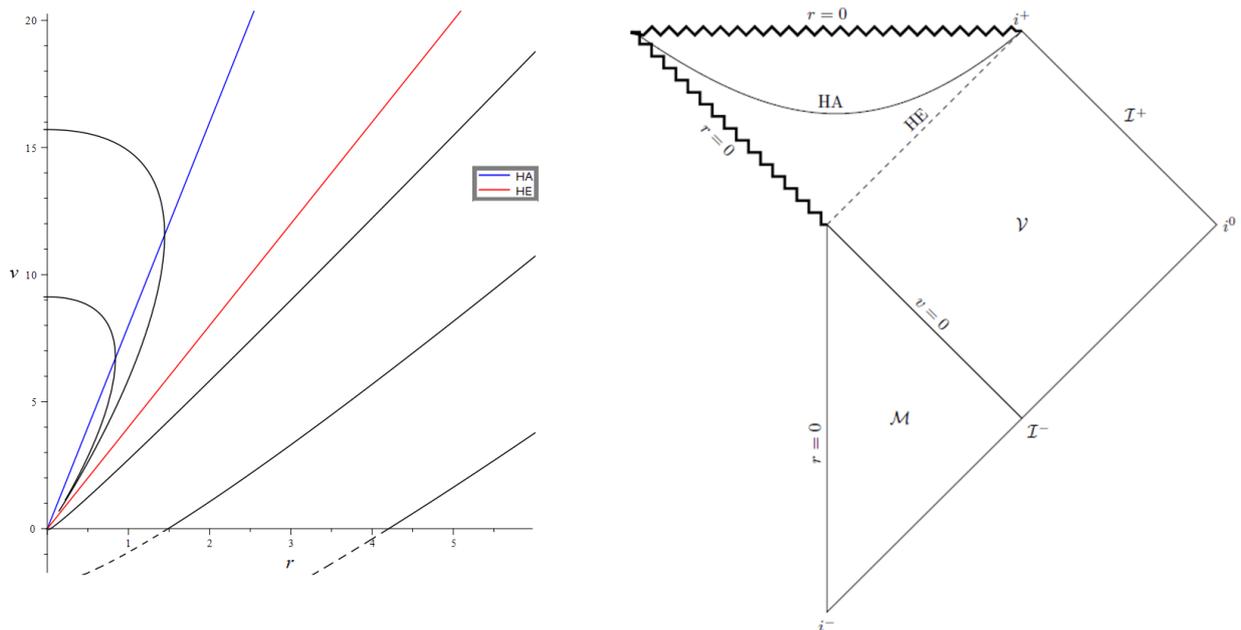
$$\begin{aligned} r(s) &= r_0 \sqrt{\frac{s}{s_0}} + \left( \frac{r_0}{2} - \frac{v_0}{8} \right) \sqrt{\frac{s}{s_0}} \ln \left( \frac{s}{s_0} \right) \\ v(s) &= v_0 \sqrt{\frac{s}{s_0}} + \left( 2r_0 - \frac{v_0}{2} \right) \sqrt{\frac{s}{s_0}} \ln \left( \frac{s}{s_0} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Con un simple cálculo y utilizando la condición de nulidad (3.5) se puede ver que

$$\frac{d^2 r}{dv^2} = 0 \Rightarrow r = v/4 \quad (3.38)$$

y además esta es una geodésica nula invariante ya que si  $r_0 = v_0/4 \Rightarrow r(s) = v(s)/4$ . Está es la última geodésica nula que escapa hacia el infinito para  $v \rightarrow \infty$  o  $s \rightarrow \infty$ .

Si se analizan las GNRS que se encuentran dentro de la región  $r > v/4$  se puede ver que estas escapan hacia el infinito con  $\dot{r} > 0$ . En cambio para la región  $r < v/4$  alcanzan un radio máximo en el horizonte aparente  $r = v/8$  y vuelven a caer en la singularidad con  $\dot{r} < 0$ , como muestra la Fig. 3.2. Por lo tanto la familia de geodésicas  $r = v/4$  son los generadores del *horizonte de eventos*.



**Figura 3.2:** A la izquierda, geodésicas nulas radiales salientes en el espacio-tiempo de Vaidya,  $m(v) = \mu v$  con  $\mu = 1/16$ . Se pueden ver 5 geodésicas, el horizonte de eventos en rojo y el horizonte aparente en azul. Las GNRS que cumplen  $r_0 < v_0/4$  retornan a la singularidad  $r = 0$  alcanzando un valor máximo en el horizonte aparente, las GNRS con  $r_0 \geq v_0/4$  alcanzan valores de  $r$  arbitrariamente grandes. Se extienden las geodésicas más allá de  $r > 0$  y  $v > 0$  solo para ver su comportamiento. A la derecha, el diagrama de Penrose-Carter del espacio-tiempo, Minkowski para  $v < 0$  y Vaidya para  $v > 0$ . Se puede ver que el horizonte de eventos es la última geodésica nula que escapa al infinito nulo.

### 3.3.3. Caso $\mu < 1/16$

En este último caso obtenemos dos raíces reales y positivas, es decir  $\omega_+$  y  $\omega_-$  de (3.20) tales que  $\omega_+ > \omega_- > 0$ . La solución más general, reparametrizando como ya hemos visto anteriormente nos da

$$r(s) = A \left( \frac{s}{s_0} \right)^{\omega_+} + B \left( \frac{s}{s_0} \right)^{\omega_-} \quad (3.39)$$

Notemos que ambas raíces cumplen  $\omega_+ + \omega_- = 1$ , entonces se puede dejar todo en función de solo una de ellas. Definiendo  $\omega \equiv \omega_+$ , se puede reescribir la ecuación (3.39)

$$r(s) = A \left( \frac{s}{s_0} \right)^{\omega} + B \left( \frac{s}{s_0} \right)^{1-\omega} \quad (3.40)$$

una vez más calculamos  $v(s)$  utilizando (3.19) y recordando que  $\mu = \omega(1-\omega)/4$  se obtiene

$$v(s) = \frac{2A}{\omega} \left( \frac{s}{s_0} \right)^{\omega} + \frac{2B}{1-\omega} \left( \frac{s}{s_0} \right)^{1-\omega} \quad (3.41)$$

aplicando las condiciones iniciales, finalmente se obtiene las ecuaciones para las GNRS en este caso:

$$\begin{aligned} r(s) &= \frac{\omega(2r_0 - v_0(1-\omega))}{2(2\omega - 1)} \left( \frac{s}{s_0} \right)^{\omega} - \frac{(2r_0 - v_0\omega)(1-\omega)}{2(2\omega - 1)} \left( \frac{s}{s_0} \right)^{1-\omega} \\ v(s) &= \frac{2r_0 - v_0(1-\omega)}{2\omega - 1} \left( \frac{s}{s_0} \right)^{\omega} - \frac{2r_0 - v_0\omega}{2\omega - 1} \left( \frac{s}{s_0} \right)^{1-\omega} \end{aligned} \quad (3.42)$$

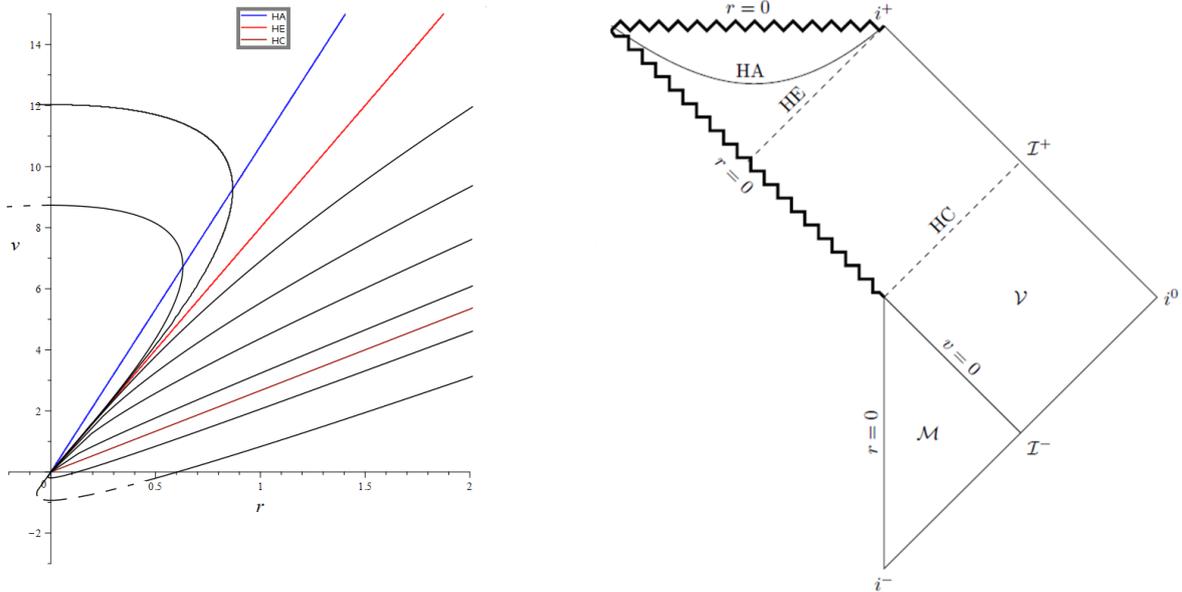
Notemos que utilizando la Ec. (3.5) para calcular  $d^2r/dv^2$ , se cumple que

$$\frac{d^2r}{dv^2} = 0 \Rightarrow r = \frac{\omega_{\pm}}{2}v \quad (3.43)$$

Nuevamente encontramos una relación lineal e invariante entre  $r$  y  $v$  como en la sección anterior. Definiendo  $r_{\pm} \equiv \frac{\omega_{\pm}}{2}v$  podemos separar tres regiones en el espacio-tiempo.

1. Para  $r_+ < r$  las geodésicas pueden escapar hacia el infinito y tomar valores muy grandes de  $r$  con condición inicial  $r(v=0) > 0$ .
2. Para  $r_- < r < r_+$  las geodésicas comienzan desde  $r=0$  en  $v=0$  y también pueden alcanzar valores grandes de  $r$ .
3. Para  $r < r_-$  las geodésicas alcanzan su valor máximo en el horizonte aparente  $r = 2\mu v$ , luego caen a la singularidad con  $\dot{r} < 0$  en un tiempo  $v$  finito.

Se puede apreciar en la Fig. 3.3 que  $r_-$  corresponde al *horizonte de eventos* de este colapso. En tanto, para el “horizonte exterior”  $r_+$  se puede notar del diagrama de Penrose que no es otra cosa que el *horizonte de Cauchy*. También vemos que el horizonte aparente se mantiene en la región  $r < r_-$ .



**Figura 3.3:** A la izquierda, geodésicas nulas radiales salientes en el espacio-tiempo de Vaidya,  $m(v) = \mu v$  con  $\mu = 3/64$ . Se pueden ver distintas GNRS que se encuentran en las regiones anteriormente mencionadas, nuevamente el horizonte de eventos en rojo, el horizonte aparente en azul y además el horizonte de Cauchy en bordo. Las GNRS que cumplen  $r_0 < v_0/8$  retornan a la singularidad  $r = 0$  alcanzando un valor máximo en el horizonte aparente, las GNRS con  $r_0 \geq v_0/8$  alcanzan valores de  $r$  arbitrariamente grandes. Se extienden las geodésicas más allá de  $r > 0$  y  $v > 0$  solo para ver su comportamiento. A la derecha, el diagrama de Penrose-Carter del espacio-tiempo, Minkowski para  $v < 0$  y Vaidya para  $v > 0$ . Se puede ver que las geodésicas en la región entre el horizonte de eventos y el horizonte de Cauchy parten desde el valor  $r = 0, v = 0$  llegando al infinito nulo.

### 3.4. Vaidya-Schwarzschild con masa lineal $m(v) = \mu v$

Ahora pasamos a considerar una situación más realista, donde el flujo de materia nula entrante se realiza durante un intervalo de tiempo finito. La función de masa tiende a un valor constante después de un tiempo  $v = v_0$  como se ve en la Fig. 3.4. Entonces esta dada por:

$$m(v) = \begin{cases} 0 & v < 0 \\ \mu v & 0 \leq v \leq v_0 \\ M & v_0 < v \end{cases} \quad (3.44)$$

Esto se puede modelar empalmado una porción de espacio-tiempo de Schwarzschild después de Vaidya, ya que este describe un objeto compacto con masa finita (el valor que alcanza la función de masa en  $v = v_0$ ). La idea es solapar las geodésicas de Vaidya con las geodésicas de Schwarzschild en  $v = v_0$  que es equivalente a solaparlas en  $s = s_0$  ya que estamos trabajando con dicho parámetro.

Para el espacio-tiempo de Schwarzschild, las ecuaciones geodésicas que obtenemos son análogas a (3.7), ya que planteamos las mismas coordenadas de Eddington-Finkelstein salvo que en este caso se tiene una función de masa  $m(v) = M = cte$ , por lo tanto para la ecuación radial se obtiene

$$\ddot{r} = 0 \Rightarrow \dot{r} = cte = E \quad (3.45)$$

A esta constante se le llama  $E$  ya que representa la energía asociada a la invariancia de la traslación temporal en la métrica de Schwarzschild [17]. Por lo tanto, la ecuación radial para las geodésicas es:

$$r(s) = 2M + Es \quad (3.46)$$

Claramente para valores de  $E < 0$  nos encontramos dentro del agujero negro mientras que para  $E > 0$  estamos fuera del horizonte de eventos. Sigue siendo válido todo el procedimiento descrito en la Sec. 3.3, por lo tanto utilizando (3.15), para la ecuación de  $v$  llegamos a :

$$v(s) = 2M \ln(s) + 2Es + v_1 \quad (3.47)$$

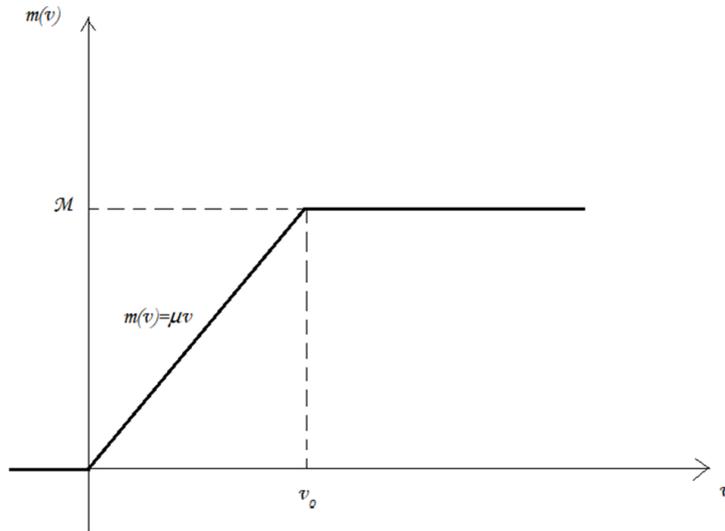


Figura 3.4: Función de masa en el espacio-tiempo completo.

Reparametrizando de forma similar a las GNRS del caso de Vaidya, se obtienen las GNRS en Schwarzschild:

$$\begin{aligned} r(s) &= 2M + E \left( \frac{s}{s_0} \right) \\ v(s) &= 4M \ln \left( \frac{s}{s_0} \right) + 2E \left( \frac{s}{s_0} \right) + v_1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Una vez más estudiaremos los tres casos por separado para distintos valores de  $\mu$  pero fijando el valor de la masa de Schwarzschild a  $M = 1$ . Hay que tener en cuenta que las geodésicas que cumplan  $E = 0$  son las generadoras del horizonte de eventos futuro, ya que estas corresponden al valor constante  $r = 2M$  que es donde se localiza.

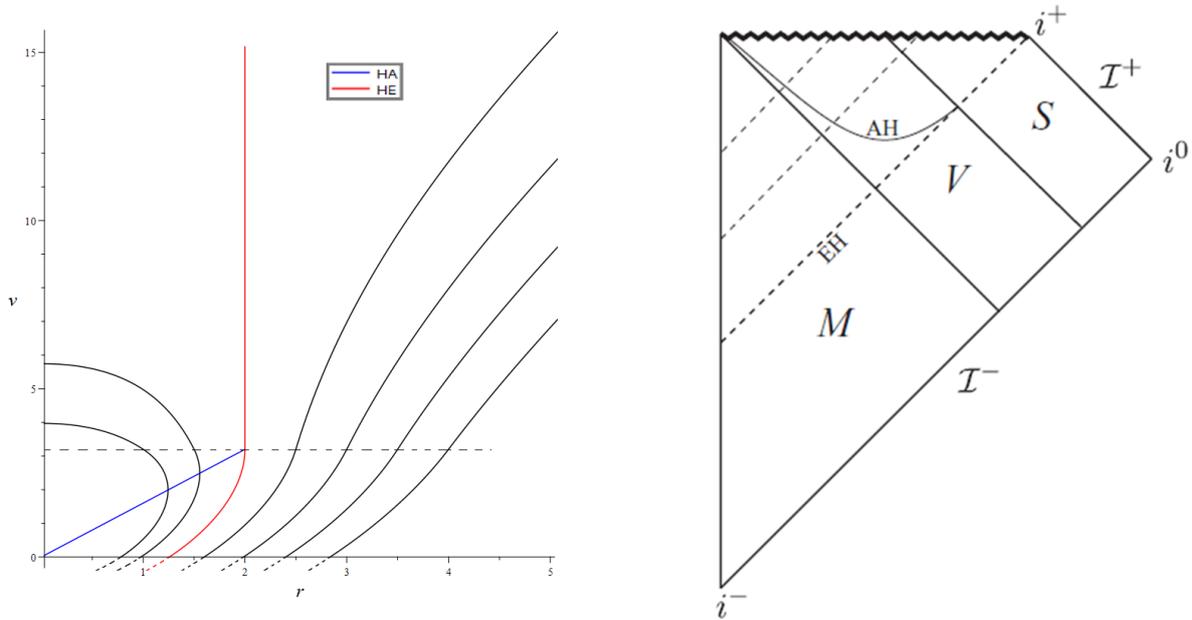
### 3.4.1. Caso $\mu > 1/16$

Para este primer caso utilizamos las ecuaciones (3.28) y (3.29) que dedujimos en la sección anterior empalmándolas en  $s = s_0$  con el par de ecuaciones (3.48), pudiendo así encontrar los valores tanto de  $A$  como de  $B$  que sean adecuados. Tanto para este caso como para los siguientes, debemos exigir que las geodésicas sean continuamente diferenciables ( $C^1$ ). También se pide que  $v(s)$  y  $r(s)$  sean continuas y sus derivadas también. Por lo tanto, las GNRS para  $\mu > 1/16$  son:

$$r(s) = \begin{cases} (2M + E)\sqrt{\frac{s}{s_0}} \cos\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) + \frac{E - 2M}{4\Omega} \sqrt{\frac{s}{s_0}} \sin\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right), & 0 < s < s_0 \\ 2M + E\left(\frac{s}{s_0}\right) & s > s_0 \end{cases} \quad (3.49a)$$

$$v(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \left[ 2M \sqrt{\frac{s}{s_0}} \cos\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) + \frac{E - 2M + 4\Omega^2(2M + E)}{4\Omega} \sqrt{\frac{s}{s_0}} \sin\left(\Omega \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)\right) \right], & 0 < s < s_0 \\ 4M \ln\left(\frac{s}{s_0}\right) + 2E\left(\frac{s}{s_0}\right) + \frac{M}{\mu} - 2E & s > s_0 \end{cases} \quad (3.49b)$$

La primera diferencia que se encuentra con respecto al caso de Vaidya infinito es la aparición de un horizonte de eventos. En este caso las geodésicas mostradas en la Fig. 3.5 muestran que la tasa de cambio  $\mu$  es tal que cualquier GNRS que se encuentre incluso en Minkowski dentro de la extensión del horizonte de eventos futuro es atrapada por la singularidad  $r = 0$ . Notamos que en la interfase Vaidya-Schwarzschild el horizonte aparente empalma con el horizonte de eventos para  $v > v_0$ , mientras que para valores  $v < v_0$  es una superficie espacial que se encuentra dentro del horizonte de eventos. También se puede ver que la singularidad se mantiene oculta por la superficie nula formada por los generadores del horizonte de eventos por lo cual ningún observador externo (fuera del HE) puede verla.



**Figura 3.5:** A la izquierda vemos 6 geodésicas que inician en Vaidya con  $r > 0$  para  $v = 0$  y solapan con Schwarzschild tomando en cuenta  $\mu = 5/16$  ( $\Omega = 1$ ), el horizonte de eventos y el horizonte aparente. Se puede ver que el HE se extiende hacia Minkowski y las geodésicas con condiciones iniciales dentro del mismo caen a la singularidad alcanzando su máximo en el HA. A la derecha se encuentra el diagrama de Penrose-Carter de este caso. Reproducido de [1].

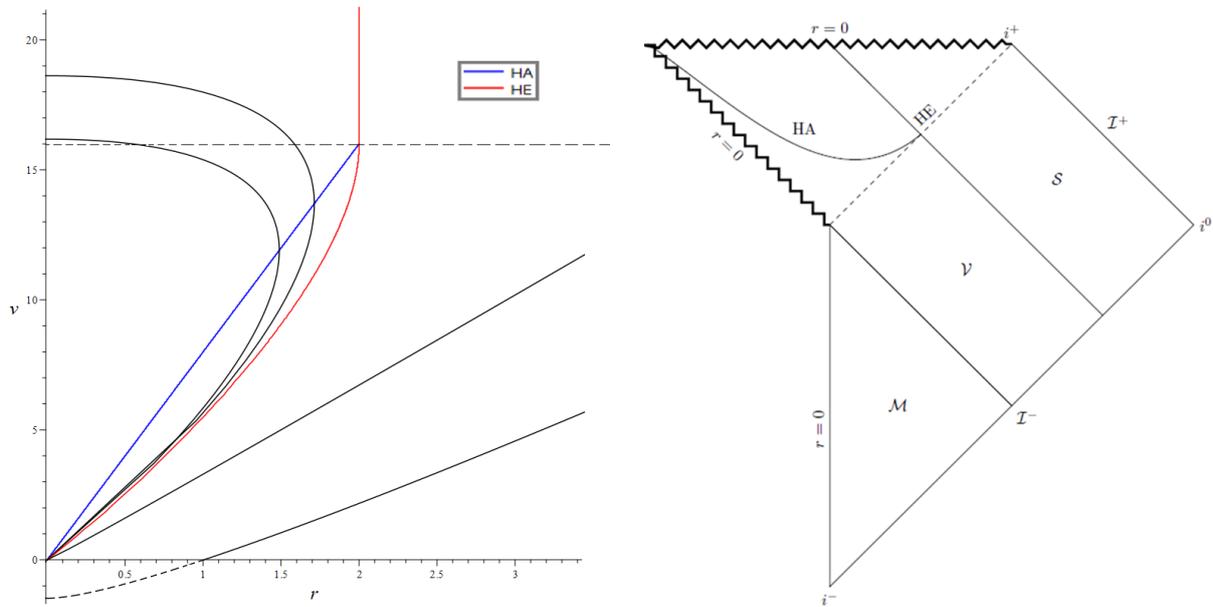
### 3.4.2. Caso $\mu = 1/16$

En este segundo caso, de forma análoga, utilizaremos las ecuaciones de Vaidya infinito (3.35), (3.36) y (3.48). Exigiendo las mismas condiciones de antes, se obtienen las GNRS para  $\mu = 1/16$ :

$$r(s) = \begin{cases} (2M + E)\sqrt{\frac{s}{s_0}} + \frac{E - 2M}{2}\sqrt{\frac{s}{s_0}} \ln\left(\frac{s}{s_0}\right) & 0 < s < s_0 \\ 2M + E\left(\frac{s}{s_0}\right) & s > s_0 \end{cases} \quad (3.50a)$$

$$v(s) = \begin{cases} 16M\sqrt{\frac{s}{s_0}} + 2(E - 2M)\sqrt{\frac{s}{s_0}} \ln\left(\frac{s}{s_0}\right) & 0 < s < s_0 \\ 4M \ln\left(\frac{s}{s_0}\right) + 2E\left(\frac{s}{s_0}\right) + 16M - 2E & s > s_0 \end{cases} \quad (3.50b)$$

En la Fig. 3.6 se puede ver la representación de estas GNRS. En este caso el horizonte de eventos inicia en Vaidya para  $r = 0$  en  $v = 0$ , siendo nuevamente la última geodésica que escapa hacia el infinito nulo, es decir que no se extiende en la región de Minkowski, por ende las geodésicas que nacen en Vaidya o en Schwarzschild cumplen necesariamente  $v \geq 0$ . Claramente las GNRS que se encuentran por fuera del HE alcanzan valores arbitrariamente grandes. A la singularidad en  $r = 0$  se la conoce como *singularidad localmente desnuda*, ya que cualquier geodésica que sale desde el interior del HE, vuelve a la singularidad en algún tiempo finito.



**Figura 3.6:** A la izquierda vemos 4 geodésicas , 2 de ellas inician desde la singularidad dentro del horizonte de eventos y luego de un tiempo finito caen nuevamente a ella. También se observan otras 2 GNRS que son externas del HE, una de ellas con  $r \simeq 0$  pero positivo. A la derecha el diagrama de Penrose-Carter para este caso.

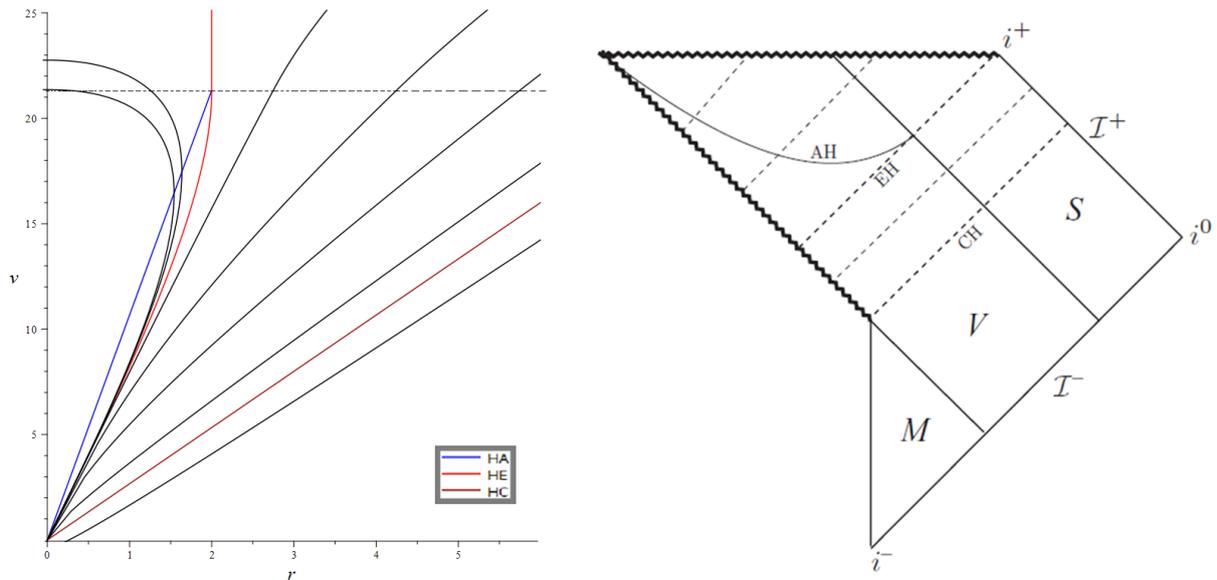
### 3.4.3. Caso $\mu < 1/16$

Una vez más exigiendo continuidad en las geodésicas y en sus respectivas derivadas, junto con las Ecs. (3.40), (3.41) y (3.48) se llega a:

$$r(s) = \begin{cases} = \frac{\omega E - 2M(1 - \omega)}{2\omega - 1} \left(\frac{s}{s_0}\right)^\omega + \frac{2M\omega - E(1 - \omega)}{2\omega - 1} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{1-\omega} & 0 < s < s_0 \\ 2M + E \left(\frac{s}{s_0}\right) & s > s_0 \end{cases} \quad (3.51a)$$

$$v(s) = \begin{cases} \frac{2(\omega E - 2M(1 - \omega))}{\omega(2\omega - 1)} \left(\frac{s}{s_0}\right)^\omega + \frac{2(2M\omega - E(1 - \omega))}{(1 - \omega)(2\omega - 1)} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{1-\omega} & 0 < s < s_0 \\ 4M \ln\left(\frac{s}{s_0}\right) + 2E \left(\frac{s}{s_0}\right) + \frac{2(2M - \omega E(1 - \omega))}{\omega(1 - \omega)} & s > s_0 \end{cases} \quad (3.51b)$$

Se puede ver el comportamiento de estas GNRS en la Fig. 3.7. En este caso tenemos una *singularidad globalmente desnuda* ya que se pueden ver muchas geodésicas que parten desde  $r = 0$  en  $v = 0$  que alcanzan el infinito nulo. El horizonte de Cauchy es la última de estas que parte desde la singularidad, a partir de allí cualquier geodésica tiene como condición inicial un valor de  $r > 0$  para  $v = 0$  (inicio de Vaidya), además se extienden a través de Minkowski para  $v < 0$ . Mientras que las GNRS dentro del HE parten desde la singularidad y vuelven a caer en ella en un tiempo finito, como en el caso  $\mu = 1/16$ .



**Figura 3.7:** A la izquierda vemos GNRS en las tres regiones posibles, el horizonte de eventos y el horizonte de Cauchy como última geodésica que parte desde  $(r = 0, v = 0)$ . Dentro del HE cualquier geodésica parte desde la singularidad y vuelve a caer no importa si estamos en Vaidya o en Schwarzschild. A la derecha el diagrama de Penrose-Carter. Reproducido de [1].

## Colapso esféricamente simétrico

---

Como ya vimos en el Cap. 3, la solución de Vaidya brinda información sobre el colapso de materia nula que interpola un espacio-tiempo plano con uno de Schwarzschild. En el Cap. 2 se estudiaron herramientas geométricas para el cálculo relacionado a superficies atrapadas. En este Capítulo estudiaremos el caso de colapso esférico mas general y particularizaremos al caso de Vaidya. También se verán los limites de las regiones que admiten superficies atrapadas.

### 4.1. Colapso esférico generalizado

Siguiendo el análisis de [18] y continuando con los conceptos de la Sec. 2.2, supongamos que el vector deformación  $\zeta^\alpha$  (2.1) es ortogonal a hipersuperficies, existiendo por ello funciones  $F$  y  $\tau$ , con  $F > 0$  [19] tal que vale:

$$\zeta_\alpha = -F\partial_\alpha\tau \quad (4.1)$$

El vector de deformación es ortogonal a las hipersuperficies con  $\tau = \text{cte}$ .

Consideremos ahora una superficie espacial 2-dimensional  $S$ . Se define  $\tau_S \equiv \tau|_S$  y  $F_S \equiv F|_S$ . Tomando en cuenta la descomposición  $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha^\top + \zeta_\alpha^\perp$  a partir de los proyectores ortogonales (2.14) y recordando que  $e_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial u^a$  es base de  $S$ , entonces

$$e_a^\alpha \zeta_\alpha = e_a^\alpha \zeta_\alpha^\top = -F_S \partial_a \tau_S \quad (4.2)$$

Haciendo el cálculo de  $\text{div}_S \zeta_\top$ :

$$\begin{aligned} \text{div}_S \zeta_\top &= h^{ab} D_a (-F_S \partial_b \tau_S) \\ &= -h^{ab} \partial_a F_S \partial_b \tau_S - F_S h^{ab} (\partial_a \partial_b \tau_S - \Gamma_{S ab}^c \partial_c \tau_S) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sea  $p \in S$ , supongamos que  $\tau_S$  alcanza un mínimo local en  $p$ , entonces se cumple  $\partial_a \tau_S|_p = 0$ , por lo tanto

$$\text{div}_S \zeta_\top = -F_S h^{ab} \partial_a \partial_b \tau_S < 0 \quad (4.4)$$

ya que la traza del producto de dos tensores simétricos definidos positivos también es positivo. Utilizando la Ec. (2.20), en el punto  $p$  se cumple que:

$$\dot{\nu}_\zeta < -\zeta_\beta H^\beta \quad (4.5)$$

Notar que si en  $p$  uno encuentra que  $\dot{\nu}_\zeta \geq 0$  y  $\zeta^\alpha$  es temporal futuro,  $S$  no podría cumplir la condición de atrapada en  $p$  (es decir,  $H^\beta|_p$  no podría ser temporal pasado). Esta última observación nos permite acotar la *región atrapada*  $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$  que se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{T} = \{p \in S \mid \exists \text{ superficie atrapada en } \mathcal{M} \text{ que contiene a } p\}$$

Básicamente  $\mathcal{T}$  es la unión de todas las superficies atrapadas en el espacio-tiempo  $\mathcal{M}$ . Consideremos el espacio-tiempo más general que describe un colapso esféricamente simétrico [18]:

$$ds^2 = -e^{2\beta(v,r)} \left(1 - \frac{2m(v,r)}{r}\right) dv^2 + 2e^{2\beta(v,r)} dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (4.6)$$

La orientación temporal se elige tal que  $-\partial_r$  sea futuro.

Pensemos ahora en el caso que la superficie  $S$  es una esfera con  $r = r_o$  y  $v = v_o$ . Los siguientes campos ortogonales a  $S$  son nulos futuros:

$$k_+ = \partial_v + \frac{e^\beta}{2} \left(1 - \frac{2m(v,r)}{r}\right) \partial_r, \quad k_- = -e^{-\beta} \partial_r \quad (4.7)$$

normalizados tal que  $k_+^\alpha k_{-\alpha} = -1$ .

Usando esta base para expandir el espacio  $TS^\perp$ , por (2.15) se obtiene que:

$$S^\perp_{\alpha\beta} = -k_+^\alpha k_-^\beta - k_-^\alpha k_+^\beta \quad (4.8)$$

A partir de (4.8) junto con (2.29), la segunda forma fundamental es:

$$\mathbb{I}_{ab}^\alpha = -h_{ab} \left[ \frac{e^{-\beta}}{r} k_+^\alpha - \frac{e^\beta}{2r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) k_-^\alpha \right] \quad (4.9)$$

Entonces el vector de curvatura media toma la forma:

$$H^\alpha = - \left[ \frac{2}{r} e^{-\beta} k_+^\alpha - \frac{e^\beta}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) k_-^\alpha \right] \implies H = -\frac{2}{r} e^{-\beta} \partial_v - \frac{2}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \partial_r \quad (4.10)$$

Por lo tanto, las expansiones son

$$\theta_+ = \frac{e^\beta}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad \theta_- = -\frac{2}{r} e^{-\beta} \quad (4.11)$$

y las esferas serán atrapadas si cumplen  $r < 2m(v,r)$  (recordar que todas estas expresiones están evaluadas sobre la superficie  $S$  con  $v = v_o$  y  $r = r_o$ ).

Para una función de masa no trivial, la condición

$$\begin{cases} m(v,r) = 0 & \text{si } v < 0 \\ 0 \leq m(v,r) \leq M, \partial_v m > 0 & \text{si } v > 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

con  $M$  finito, modela el flujo de energía entrante para el futuro de la hipersuperficie nula en  $v = 0$  y garantiza que existe un futuro nulo infinito  $\mathcal{I}^+$  regular completo (Sec. 8 de [18]), entonces se tiene una noción de horizonte de eventos HE.

Definimos el horizonte aparente HA y la región exterior  $\mathcal{R}$  como (notar que HA es la frontera que la región que contiene esferas atrapadas, ver (4.11)):

$$\begin{aligned} \text{HA} &= \{(v, r, \theta, \phi) \mid r = 2m(v, r)\} \\ \mathcal{R} &= \{(v, r, \theta, \phi) \mid r > 2m(v, r)\} \end{aligned}$$

Notar que en general HA no es conexo<sup>1</sup>. Siguiendo la línea de [18], llamamos  $\text{HA}_1$  a la componente conexas que se une con el HE.

Consideremos el campo vectorial  $\eta = e^{-\beta}\partial_v$ . Se puede probar que se cumple  $\eta_{[\alpha}\nabla_{\beta}\eta_{\gamma]} = 0$ , lo que implica que  $\eta$  es ortogonal a hipersuperficies  $\tau$  [19] y por lo tanto vale (4.1) con funciones  $F > 0$  y  $\tau$  tal que

$$\eta_{\alpha} = -F\partial_{\alpha}\tau \quad (4.13)$$

Notar que

$$\eta_{\alpha}\eta^{\alpha} = -\left(1 - \frac{2m(v, r)}{r}\right) \quad (4.14)$$

entonces  $\eta^{\alpha}$  es temporal futuro en  $\mathcal{R}$ . Además, si calculamos la derivada de Lie de  $g$  en la dirección de  $\eta$  se obtiene

$$(\mathcal{L}_{\eta}g)_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}\eta_{\nu} + \nabla_{\nu}\eta_{\mu} = \frac{2e^{\beta}}{r}(\partial_v m)dv_{\mu}dv_{\nu} + e^{\beta}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)(\partial_r\beta)(dv_{\mu}dr_{\nu} + dr_{\nu}dv_{\mu}) - 2(\partial_r\beta)dr_{\mu}dr_{\nu} \quad (4.15)$$

Supongamos ahora una superficie  $S$  arbitraria, es decir  $S$  espacial pero no necesariamente atrapada, y sea  $e_a^{\mu} = \partial x^{\mu}/\partial u^a$  la base que expande  $TS$ . Si  $p \in S$  es un punto crítico de  $\tau_S$  entonces  $\eta_{\mu}e_a^{\mu} = -F_S\partial\tau_S/\partial u^a = 0$ , se tiene que

$$\eta_{\mu}e_a^{\mu} = 0 \iff dr_{\mu}e_a^{\mu} = e^{\beta}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dv_{\mu}e_a^{\mu} \quad (4.16)$$

Utilizando esto último en (4.15) se obtiene

$$(\nabla_{\mu}\eta_{\nu} + \nabla_{\nu}\eta_{\mu})e_a^{\mu}e_b^{\nu} = \frac{2e^{\beta}}{r}(\partial_v m)dv_{\mu}e_a^{\mu}dv_{\nu}e_b^{\nu} \quad (4.17)$$

Si contraemos con la métrica inducida  $h^{ab}$ , y teniendo en cuenta que  $h^{ab}(dv_{\mu}e_a^{\mu})(dv_{\nu}e_b^{\nu}) > 0$  ya que la  $h$  es definida positiva, se puede concluir utilizando (2.17) que en  $p$  vale

$$\dot{\nu}_{\eta} = \frac{1}{2}h^{ab}(\nabla_{\mu}\eta_{\nu} + \nabla_{\nu}\eta_{\mu})e_a^{\mu}e_b^{\nu} > 0 \quad (4.18)$$

Si suponemos que el punto crítico  $p \in S$  es un mínimo local, utilizando lo anterior junto con (4.5), se prueba que

$$0 < \dot{\nu}_{\eta} < -\eta_{\beta}H^{\beta} \quad (4.19)$$

Por lo tanto, si  $\eta^{\alpha}|_p$  es temporal futuro (esto es,  $p \in \mathcal{R}$ ),  $H^{\beta}|_p$  no podría ser temporal pasado, es decir,  $S$  no podría ser una superficie atrapada futura. El resultado obtenido se enuncia de la siguiente forma:

<sup>1</sup>Es decir, pueden existir componentes conexas disjuntas del mismo que no se pueden unir por una curva continua.

Si  $S$  es superficie atrapada  $\tau_S$  no puede tener un mínimo local en un punto  $p \in \mathcal{R}$ .

## 4.2. Barrera pasada

El último resultado mencionado en la Sección anterior se puede utilizar para definir una *barrera pasada*  $\Sigma$  para superficies atrapadas. Veamos el caso de Vaidya con función de masa que cumpla las siguientes condiciones, análogo a la Ec. (4.12)

$$\begin{cases} m(v) = 0 & \text{si } v < 0 \\ 0 \leq m(v) \leq M, \partial_v m(v) > 0 & \text{si } 0 \leq v \leq v_o \\ m(v) = M & \text{si } v_o < v \end{cases} \quad (4.20)$$

Recordar que en el Cap. 3 la ODE y la condición de borde para encontrar el horizonte de eventos eran

$$\frac{dr}{dv} = \frac{1}{2}f(v, r), \quad f(v, r) = 1 - \frac{2m(v)}{r} \quad \text{con} \quad \lim_{v \rightarrow \infty} r(v) = 2M \quad (4.21)$$

Notar que en nuestro ejemplo, la condición de borde es equivalente a  $r(v_o) = 2M$ .

El horizonte aparente esta dado por  $f = 0$ . Como en Vaidya se cumple que  $\beta(v, r) = 0$ , el campo (4.13) es

$$\eta = \partial_v \iff -F d\tau = \eta_\alpha dx^\alpha = -f dv + dr \quad (4.22)$$

Por lo tanto, las hipersuperficies  $\tau = \text{cte}$  están definidas por  $0 = -F_S \partial_v \tau_S = \eta_\alpha$ , es decir satisfacen:

$$\frac{dr}{dv} = f(v, r), \quad f(v, r) = 1 - \frac{2m(v)}{r} \quad (4.23)$$

Llamemos  $\Sigma$  a la hipersuperficie de nivel que satisface la condición  $\lim_{v \rightarrow \infty} r(v) = 2M$  (o  $r(v_o) = 2M$ ). Elegimos la constante aditiva de  $\tau$  tal que  $\tau_\Sigma = 0$ . De la Fig. 4.1 se ve que  $\Sigma$  se encuentra entre HA y HE.

Vamos a demostrar que

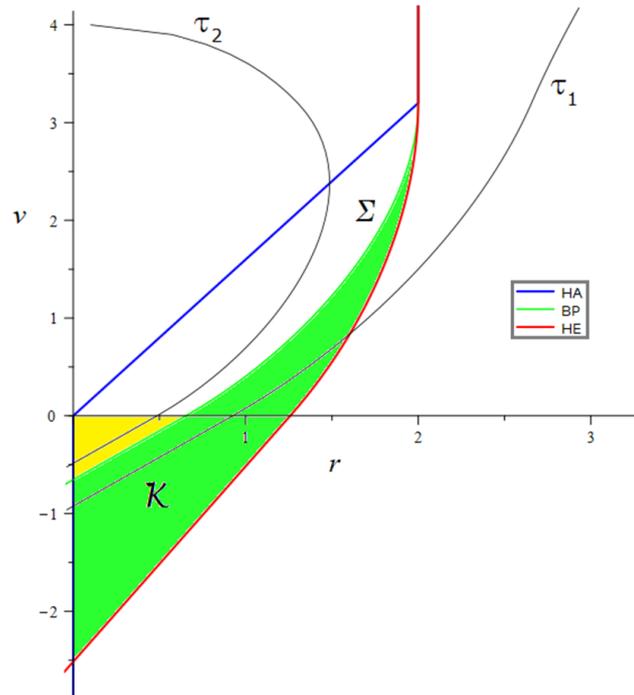
*No existen superficies atrapadas cerradas que se extiendan hacia el pasado de  $\Sigma$ .*

Prueba:

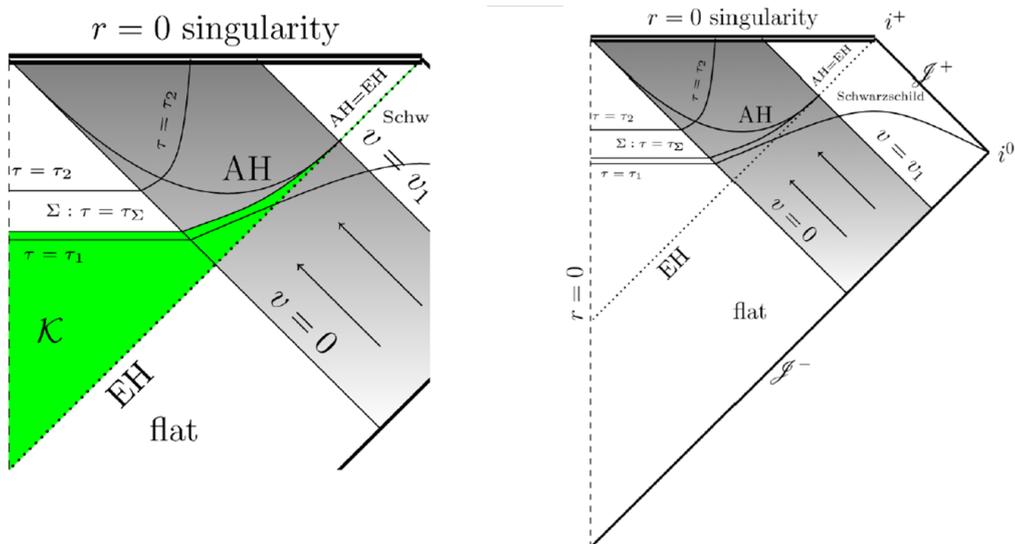
Supongamos que  $S$  es una superficie atrapada cerrada, con  $p \in S$  que satisface  $\tau(p) < \tau_\Sigma = 0$ . Como  $p$  no puede estar en el HE (Proposición de Wald [7] y [3]), se encuentra en la región abierta  $\mathcal{O}$  entre HA y HE. Como  $S$  es cerrada,  $\tau_S$  alcanza un mínimo global en  $S$ , i.e. existe  $q \in \mathcal{O}$  tal que  $\tau(q) \leq \tau(p)$ . Ya que  $q$  es un mínimo en el subconjunto  $\tilde{S} \subset S$ ,  $\tilde{S} = \mathcal{O} \cap S$ , este debe ser un mínimo local, lo cual es absurdo ya que no existen mínimos locales fuera de HA.

A  $\Sigma$  se la conoce como *barrera pasada*, ya que define un limite en el pasado de la región  $\mathcal{T}$ . Corresponde a la hipersuperficie con valor de  $\tau$  mas grande que es no temporal en todas partes. Para ilustrar este resultado consideramos la masa dada en (3.44), vemos en la Fig. 4.1 distintas hipersuperficies con  $\tau$  constante. La que empalma con el horizonte de eventos es la barrera pasada  $\Sigma$ . Además notar que la región delimitada por  $r > 0$ ,  $v < 0$  (Minkowski) y  $\Sigma$ , se encuentra dentro de la región plana. De manera que la barrera  $\Sigma$  en principio no impide que se puedan encontrar *superficies atrapadas que penetren el espacio-tiempo plano*. También se representan

hipersuperficies con  $\tau_1$  y  $\tau_2$  tales que  $\tau_2 > \tau_\Sigma > \tau_1$  (considerando la prueba anterior,  $\tau_1 > 0$  y  $\tau_2 < 0$ ). El crecimiento de estas curvas de nivel se dan en un “sentido antihorario” según este diagrama  $(v, r)$ . Construcciones específicas de superficies atrapadas que penetren en el espacio-tiempo plano de Minkowski se pueden encontrar en [20, 16].



**Figura 4.1:** Diagrama  $(v, r)$  en Vaidya - Schwarzschild, con función de masa  $m(v) = \frac{5}{16}v$  y  $M = 1$ . Se puede ver la región excluida  $K$  (verde) descrita en [18] y la región en la parte plana donde pueden penetrar superficies atrapadas (amarillo). Notar que se graficaron distintas hipersuperficies con  $\tau = \text{cte}$  y  $\Sigma$ .



**Figura 4.2:** Diagrama de Penrose - Carter para la solución de Vaidya para una función de masa tal que cumpla las condiciones (4.12). Izquierda: Se muestra la región  $K$  definida en la Sec. IX de [18]. Derecha: El diagrama del espacio-tiempo completo.

## Conclusiones

---

---

Se entendió en profundidad el concepto de superficie atrapada. Además se plantearon herramientas y métodos de cálculo que se utilizan para determinar si una superficie es atrapada o no, como por ejemplo la segunda forma fundamental, el vector de curvatura media y la expansión, donde el signo de esta última indica la convergencia de las geodésicas sobre dicha superficie. Se vio cómo los límites de las regiones que contienen superficies atrapadas (TS) y/o superficies atrapadas exteriores (OTS) nos brindan información relacionada a la naturaleza de un agujero negro. En este trabajo se particularizó sobre el espacio tiempo de Vaidya que modela un colapso esférico de polvo nulo, haciendo un estudio completo sobre las geodésicas nulas para este modelo, tomando en cuenta una función de masa  $m(v) = \mu v$ . También se caracterizó el horizonte aparente que representa un borde para la región de superficies atrapadas exteriores, el cual indica si nos encontramos dentro de un agujero negro. Por último se vio que las superficies atrapadas no pueden alcanzar un mínimo sobre ciertas hipersuperficies de nivel definidas por un campo vectorial dado, ortogonal a ellas. A partir de este resultado, se encontró el borde de la región que puede contener superficies atrapadas utilizando un modelo de colapso esférico general, definiendo así la barrera pasada y concluyendo que se pueden encontrar superficies atrapadas dentro de un espacio-tiempo plano pero no contenidas completamente en el mismo.

# Bibliografía

---

---

- [1] Jerry B. Griffiths y Jiri Podolsky. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press, págs. 110-114. ISBN: 978-1-139-48116-8. DOI: [10.1017/CB09780511635397](https://doi.org/10.1017/CB09780511635397).
- [2] Gustavo Dotti. "Agujeros Negros". En: *Cadernos de Astronomia* 4.1 (2023), 67–77. DOI: [10.47456/Cad.Astro.v4n1.40266](https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v4n1.40266). URL: <https://periodicos.ufes.br/astromia/article/view/40266>.
- [3] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973. DOI: [10.1017/CB09780511524646](https://doi.org/10.1017/CB09780511524646).
- [4] J. R. Oppenheimer y H. Snyder. "On Continued Gravitational Contraction". En: *Phys. Rev.* 56 (5 1939), págs. 455-459. DOI: [10.1103/PhysRev.56.455](https://doi.org/10.1103/PhysRev.56.455). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.56.455>.
- [5] P. Joshi. *Gravitational Collapse and Spacetime Singularities*. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Cambridge University Press, (2007). DOI: [10.1017/CB09780511536274](https://doi.org/10.1017/CB09780511536274).
- [6] Roger Penrose. "Gravitational Collapse and Space-Time Singularities". En: *Phys. Rev. Lett.* 14 (3 1965), págs. 57-59. DOI: [10.1103/PhysRevLett.14.57](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.14.57). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.14.57>.
- [7] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984. DOI: [10.7208/chicago/9780226870373.001.0001](https://doi.org/10.7208/chicago/9780226870373.001.0001).
- [8] José Senovilla y David Garfinkle. "The 1965 Penrose singularity theorem". En: *Classical and Quantum Gravity* 32 (2015). DOI: [10.1088/0264-9381/32/12/124008](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/12/124008).
- [9] Jürgen Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Chicago, USA: Springer International Publishing, 2017. DOI: [10.1007/978-3-319-61860-9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-61860-9).
- [10] Barrett. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry : with applications to relativity*. Pure and applied mathematics ; 103. New York: Academic Press, 1983. ISBN: 0125267401.
- [11] Marc Mars y José Senovilla. "Trapped surfaces and symmetries". En: *Classical and Quantum Gravity* 20 (sep. de 2003). DOI: [10.1088/0264-9381/20/24/L03](https://doi.org/10.1088/0264-9381/20/24/L03).
- [12] Emel Altas y Bayram Tekin. "Basics of Apparent horizons in black hole physics". En: *Journal of Physics: Conference Series* 2191 (feb. de 2022), pág. 012002. DOI: [10.1088/1742-6596/2191/1/012002](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2191/1/012002).
- [13] Abhay Ashtekar y Badri Krishnan. "Isolated and dynamical horizons and their applications". En: *Living Rev. Rel.* 7 (2004), pág. 10. DOI: [10.12942/lrr-2004-10](https://doi.org/10.12942/lrr-2004-10). arXiv: [gr-qc/0407042](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0407042).

- 
- [14] Daniel Pook-Kolb et al. “Interior of a Binary Black Hole Merger”. En: *Phys. Rev. Lett.* 123 (17 2019), pág. 171102. DOI: [10.1103/PhysRevLett.123.171102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.171102). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.171102>.
- [15] Daniel Pook-Kolb et al. “Horizons in a binary black hole merger I: Geometry and area increase”. En: (jun. de 2020). arXiv: [2006.03939 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2006.03939).
- [16] Ishai Ben-Dov. “Outer Trapped Surfaces in Vaidya Spacetimes”. En: *Physical Review D* 75 (dic. de 2006). DOI: [10.1103/PhysRevD.75.064007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.064007).
- [17] M. Blau. *Lecture Notes on General Relativity*. 2022. URL: <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>.
- [18] Ingemar Bengtsson y Jose M. M. Senovilla. “The Region with trapped surfaces in spherical symmetry, its core, and their boundaries”. En: *Phys. Rev. D* 83 (2011), pág. 044012. DOI: [10.1103/PhysRevD.83.044012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.044012). arXiv: [1009.0225 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1009.0225).
- [19] Eric Poisson. *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004. DOI: [10.1017/CB09780511606601](https://doi.org/10.1017/CB09780511606601).
- [20] Ingemar Bengtsson y José Senovilla. “Note on trapped Surfaces in the Vaidya Solution”. En: *Physical Review D* 79 (oct. de 2008). DOI: [10.1103/PhysRevD.79.024027](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.024027).

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de evaluación de tesis, damos fe que el presente ejemplar impreso corresponde con el aprobado por este Tribunal.

Dr. Gustavo Dotti

Dr. Emanuel Gallo

Dr. Pedro W. Lamberti

Dr. Omar Ortiz