Trabajo Especial de Licenciatura en Matemática

Modelado discreto de tasas de interés

Autor: María Pía Brugo[1]
Directora: Dra. Noemí P. Kisbye [2]

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación, UNC

[1,2]Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación-UNC, Argentina.

[1]pia.brugo@mi.unc.edu.ar

[2]patricia.kisbye@unc.edu.ar

RESUMEN

En el mercado financiero se comercializan contratos en los cuáles uno podría encontrar desequilibrio y lograr un arbitraje. Las opciones son un tipo de contrato basado en un subyacente, como por ejemplo una tasa de interés.

El objetivo del trabajo es determinar el precio de algunas opciones sobre tasas de interés aleatorias, para que no exista oportunidad de arbitraje. Para esto se desarrollan distintos modelos matemáticos discretos que parametrizan el desarrollo de la tasa de interés; mostraremos su implementación algorítmica, ejemplos de los mismos y como calibrar sus coeficientes de acuerdo a los precios observados en el mercado.

ABSTRACT

In the financial market, contracts are traded, in which one could find an imbalance and achieve arbitration. Options are a type of contract based on an underlying, such as an interest rate.

The objective of this work is determinate the price of some options on random interest rates so that there is not arbitrage opportunity. For this, different discrete mathematical models are developed. These parameterize the development of the interest rate; We will show their algorithmic implementation, examples of them and how to calibrate their coefficients according to the prices observed in the market.

Palabras Clave: Modelo binomial, Tasas de interés, Derivados.

Clasificación: Mathematics Subject Classification System - 62P05

Índice general

Introducción

Imaginemos que queremos conocer el precio que debe tener un cierto activo financiero a partir de las tasas de interés futuras que observamos en el mercado. Para poder hacerlo debemos tener en cuenta la definición de cada instrumento y lograr un modelo matemático adecuado. Motivadas por esta idea, durante el trabajo desarrollaremos conceptos básicos de mercado y teoría, hasta presentar algunos modelos que nos ayuden a llegar al objetivo. Iremos complementando bibliografía de distintos autores como Hull [3] , Shreve [4] y Brigo Mercurio [1] y artículos de Haugh [2] que seleccionamos para profundizar los temas a desarrollar.

Para ayudar a la comprensión del lector, en el primer capítulo daremos una noción de qué es el mercado financiero e introduciremos algunos instrumentos de mercado que serán útiles en nuestro estudio. El segundo capítulo presentará la defincíón de algunos derivados, que serán aquellos activos que desearemos valorar. La teoría matemática básica que necesitamos para el trabajo, la podremos encontrar en el capítulo tres. Allí recordaremos la defincíón de probabilidad y esperanza condicional, y en complemento con el Teorema de Radón Nikodym podremos comprender qué es el modelo binomial. En el capítulo cuatro presentaremos los teoremas fundamentales que acompañan nuestro análisis y luego, estudiaremos el modelo bonomial para tasas de interés. Por último, en el capítulo cinco, introduciremos los modelos matemáticos discretos de Ho-Lee y Black-Derman-Toy y buscaremos desarrollar la teoría para calibrar estos modelos, a partir de los precios que observamos en el mercado.

Capítulo 1

Mercado financiero

1.1. Mercados

Los instrumentos financieros se comercializan en el mercado financiero. En la práctica existe un mercado formal y un mercado extrabursátil (over the counter market - OTC).

En el mercado formal existen múltiples agentes que actúan como compradores o vendedores de productos financieros. Los productos que se comercializan están estandarizados y existe una regulación de este tipo de mercados para proteger a los inversores de posibles incumplimientos de las contrapartes.

En el caso del mercado extrabursátil, las negociaciones son bilaterales, es decir, los contratos suelen acordarse entre las dos partes y no existe una regulación formal sino que se basa en un principio de confianza entre los inversores involucrados.

1.2. La cuenta bancaria

Si depositamos dinero en una cuenta bancaria, al cabo de un cierto tiempo este capital se incrementa en un determinado monto, llamado *interés*. Así, si fijamos una unidad de tiempo, por ejemplo el año, y denominamos $B(t)$ al capital disponible en el tiempo t, entonces $B(t+1)$ es el capital disponible un año después de t. El interés producido en ese período es

$$B(t+1) - B(t)$$

y la *tasa de interés efectiva anual* está dada por

$$r = \frac{B(t+1) - B(t)}{B(t)}.$$

De este modo, resulta que $B(t+1) = B(t) \cdot (1+r)$. Ahora, en general se suele enunciar una *tasa nominal* asociada con una unidad de tiempo inferior a un año, y la tasa efectiva que se aplica en este período es proporcional a la tasa nominal. Por ejemplo, si un banco ofrece una tasa nominal anual del 20 % para depósitos a 30 días, significa que se aplica una tasa de interés efectiva a 30 días de

$$i = 0{,}20 \cdot \frac{30}{365},$$

es decir, del 1,64 %.

Así, una inversión de \$1000 a 30 días producirá un monto final de

$$1000 \cdot (1+i) = 1000 \cdot 1{,}0164 = 1016{,}40.$$

Si cada 30 días este capital se reinvierte a la misma tasa, se dice que se aplica una **capitalización compuesta discreta**. Entonces a los 60 días, 90 días, 120 días los capitales sucesivos serán:

$$\begin{aligned}
1000 \cdot (1+i)^2 &= 1000 \cdot 1{,}0164^2 = 1033{,}07 \\
1000 \cdot (1+i)^3 &= 1000 \cdot 1{,}0164^3 = 1050{,}01 \\
1000 \cdot (1+i)^4 &= 1000 \cdot 1{,}0164^4 = 1067{,}23
\end{aligned}$$

Tomando como unidad de tiempo 30 días, la cuenta bancaria inicia en $B(0) = 1000$ y se tendrá que

$$B(n) = B(0) \cdot (1+i)^n, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Así, en la **capitalización compuesta discreta** se considera una tasa nominal anual r que capitaliza intereses con frecuencia de k períodos al año, donde k puede ser fraccionario. Si el capital inicial es $B(0)$, entonces la tasa efectiva periódica es $i = r/k$ y la tasa efectiva anual es el valor i_e tal que

$$B(0)\,(1+i_e) = B(0) \cdot (1+i)^k = B(0) \cdot (1+\frac{r}{k})^k.$$

Este modelo de capitalización es el más utilizado para modelos discretos de valoración de derivados.

Otra expresión utilizada para la cuenta bancaria es la **capitalización compuesta continua**. En este caso, si la tasa de interés nominal anual es r, entonces en un tiempo de T años el capital obtenido está dado por:

$$B(T) = B(0) \cdot e^{rT}.$$

Si la capitalización es continua y $r > 0$, entonces existe $i > 0$ tal que $1 + i = e^r$. Así la tasa efectiva en el período unitario resulta:

$$i = e^r - 1.$$

Para este trabajo utilizaremos el modelo de capitalización discreta, pero la tasa de interés será aleatoria. Entonces $B(t+1) = B(t)(1 + i(t))$, donde $i(t)$ será un proceso estocástico discreto.

Notemos que conociendo el valor de la cuenta en un determinado tiempo T podemos saber cuál fue el capital inicial:

$$B(0) = B(T) \cdot e^{-rT}, \qquad B(0) = B(T) \cdot \frac{1}{(1+i)^T},$$

según utilicemos la capitalización compuesta continua o discreta, respectivamente.

Esta operación de cálculo del valor presente conocido un valor futuro se suele denominar **descuento**.

1.3. Activos de renta fija

Los activos de renta fija son aquellos en los que el emisor está obligado a realizar pagos en una cantidad y en un período de tiempo previamente establecidos. Es decir, son aquellos instrumentos en los que se conoce de antemano cuál será el flujo de fondos a futuro.

Un ejemplo de estos activos, y un instrumento financiero muy importante para nuestro análisis son los **bonos**.

1.3.1. Bonos

Definición 1.3.1. *Los bonos son una "promesa de pago a futuro" de un monto denominado Nominal, que puede ser devuelto en un pago o en varias cuotas o amortizaciones y pueden ser emitidos por entes privados o por el Estado.*

Los bonos son productos básicos, es decir, instrumentos financieros cuyo valor no depende de otro activo.

Existen distintos tipos de bonos:

- **Bonos con cupón**: pagan periódicamente un interés por parte de la deuda aún no amortizada, y estos pagos periódicos se denominan **cupones**. Y pueden o no a su vez amortizar parte de la deuda en sucesivos pagos.
  Ejemplo: AL30 (Bono Nacion Argentina en USD Step Up con vencimiento en 2030. Amortiza en cinco cuotas iguales y paga intereses semestralmente)

- **Bonos cupón cero**: son aquellos que amortizan la deuda al vencimiento y no pagan cupones. Por ello si deseamos comprar estos bonos, su precio va a ser siempre inferior al nominal y se emiten al valor descontado del nominal.
  Ejemplo: S30J2 (Letra del tesoro nacional en pesos a descuento con vencimiento el 30 de Junio de 2022)

Definición 1.3.2. *Definimos $P(t,T)$ como el valor de un bono cupón cero en el tiempo t que paga \$1 en su venicimiento T. Luego $P(0,T)$ representa el valor en el tiempo* 0 *de un bono que vence en T y $P(T,T) = 1$.*

1.3.2. Rendimiento de un bono

El rendimiento de un bono es la tasa de descuento constante que, cuando se aplica a todos los flujos de efectivo, hace que el valor del bono sea igual a su precio de mercado.

Ejemplo 1.3.1. El precio al 1 de enero del 2020 de un bono por \$ 1.000 con cupones anuales y tasa de cupón 3,25 % con madurez el 31 de diciembre del 2023, es de \$ 916,21.

Los flujos de caja generados por este título son: Diciembre 2020: $ 32,5 Diciembre 2021: $ 32,5 Diciembre 2022: $ 32,5 Diciembre 2023: $ 1032,5 (paga cupón y amortiza)

El rendimiento (o TIR) para este bono, usando capitalizacion discreta, es entonces la tasa r para la cual se verifica:

$$916,21 = \frac{32,5}{(1+r)} + \frac{32,5}{(1+r)^2} + \frac{32,5}{(1+r)^3} + \frac{1032,5}{(1+r)^4}$$

El valor de r resulta $5,6486\,\%$

1.3.3. Tasa cero

La tasa de interés cupón cero a n años es la tasa de interés que se obtiene sobre una inversión que inicia hoy y dura n años. No hay pagos intermedios.

Como normalmente los bonos cupón cero son bonos a corto plazo, si queremos saber la tasa cupón cero para un plazo mayor se utilizan bonos con cupones. La metodología que se aplica para el cálculo de estas tasas se denomina **método bootstrap**. Para esto se considera un conjunto de bonos con diferentes plazos, donde al menos el plazo más corto debe corresponder a un bono cupón cero.

Ilustramos con el Ejemplo 1.3.2.

Ejemplo 1.3.2. Se tienen precios de los siguientes cinco bonos, donde los bonos con cupón tienen pagos semestrales. El primer bono indica que por una inversión de $97,5 se obtiene un interés de $2,5 en 3 meses.

Nominal	Madurez	Tasa cupón	Precio
100	0,25	0 %	97,5
100	0,5	0 %	94,9
100	1	0 %	90
100	1,5	8 %	96
100	2	12 %	101,6

- **Supongamos que la capitalización de la tasa es continua:**

Podemos calcular fácilmente las tasas anuales de capitalización continua a los plazos de un cuarto de año, medio año y un año, resolviendo por ejemplo en el caso del primer bono:

$$97,5e^{r_1 0,25} = 100$$

obtenemos de este modo: $r_1 = 10,127\,\%$, $r_2 = 10,469\,\%$ y $r_3 = 10,536\,\%$
El cuarto bono servirá para determinar la tasa cupón cero a un año y medio. Tenemos que el flujo de fondos a medio año, año, año y medio es:

$$4 \quad 4 \quad 104$$

Como conocemos las tasas de los tres primeros plazos, calculamos r_4 tal que:

$$96 = 4e^{-r_2 0,5} + 4e^{-r_3 1} + 104e^{-r_4 1,5}$$

Luego, $r_4 = 10,681\,\%$ Por último calculamos de manera análoga, $r_5 = 10,808\,\%$ la tasa cupón cero a 2 años.
Entonces, las tasas cupón cero para los distintos plazos son:

Madurez	Tasa (%)
0,25	10,127
0,5	10,469
1	10,536
1,5	10,681
2	10,808

- **Supongamos que la capitalización de la tasa es compuesta discreta:**
  Podemos calcular la tasa anual de capitalización discreta a un cuarto de año con la fórmula:

  $$97,5 \cdot (1 + r_1)^{0,25} = 100$$

  y obtenemos $r_1 = 10,66\,\%$
  De manera análoga para los plazos medio año y 1 año obtenemos $r_2 = 11,04\,\%$ y $r_3 = 11,11\,\%$

Para calcular la tasa cupón cero a un año y medio debemos resolver:

$$96 = \frac{4}{(1+r_2)^{0,5}} + \frac{4}{(1+r_3)} + \frac{104}{(1+r_4)^{1,5}}$$

Luego $r_4 = 11,27\,\%$

De esta manera, simplemente falta calcular la tasa cero a 2 años:

$$101,6 = \frac{6}{(1+r_2)^{0,5}} + \frac{6}{(1+r_3)} + \frac{6}{(1+r_4)^{1,5}} + \frac{106}{(1+r_5)^{2}}$$

Finalmente $r_5 = 11,41\,\%$

Entonces, las tasas cupón cero para los distintos plazos, considerando capitalización discreta, son:

Madurez	Tasa (%)
0,25	10,66
0,5	11,04
1	11,11
1,5	11,27
2	11,41

1.3.4. Curva de rendimiento

La curva de rendimiento es una representación gráfica que muestra la relación entre rendimiento y la madurez de bonos, donde los puntos consecutivos están unidos por segmentos. La curva que se forma por la relación rendimiento-plazo puede tomar distintos comportamientos:

- Curva ascendente: Sigue la lógica de a mayor plazo de inversión mayor rendimiento debido a la mayor incertidumbre que genera invertir a plazos más largos. A su vez, se puede interpretar como una perspectiva de aceleración en la actividad económica futura.

- Curva Descendente: Los rendimientos futuros son más bajos que los actuales, y se puede pronosticar una desaceleración en la actividad económica futura.

Bonos por encima de la curva son una buena oportunidad de inversión porque, a igual plazo, ofrecen un mayor rendimiento. Lo contrario ocurre con los bonos que se encuentran debajo de la curva.

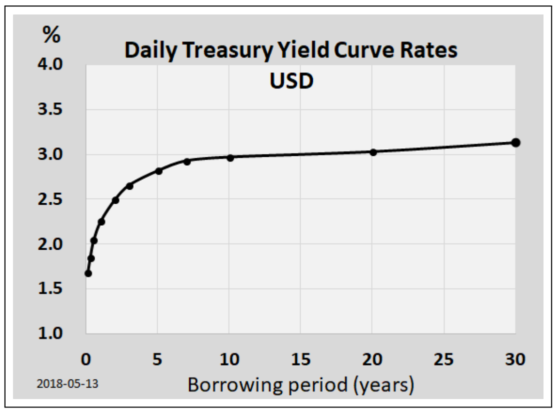

Figura 1.1: Curva de rendimientos bonos cupón cero

Un gráfico de este tipo también se denomina **estructura a término de las tasas de interés** (ETTI). Es importante notar que una ETTI está asociada a la fecha en que fueron consideradas las cotizaciones de los bonos. Por ejemplo, podrían tomarse las cotizaciones de bonos cupón cero con los mismos plazos un día mas tarde, o al mes siguiente o un año después y obtener una curva diferente. Así, si se consideran las curvas para distintas fechas, se obtiene una superficie de tasa de interés.

En la Figura 1.1 cada punto representa el rendimiento del bono cupón cero con vencimiento según se observa en el eje de las abscisas.

1.4. Tasas LIBOR

El modelado de tasas de interés puede hacerse sobre tasas obtenidas con bonos o sobre tasas de préstamos interbancarios. En muchos casos, los derivados sobre tasas de interés se refieren a estas últimas. La llamada Tasa LIBOR (London Interbank Offered Rate) es una tasa de referencia que se publica diariamente en Londres y que "promedia" las tasas que ofrecen los principales bancos para colocar sus propios depósitos en otros bancos.

En general, las tasas LIBOR son tasas anuales a un mes, dos meses, tres meses, seis meses o un año. Y su aplicación es con capitalización simple. Esto es, una tasa LIBOR del 6 % a 3 meses sobre un nominal de 1 millón de libras supone un interés de:

$$1000000.\frac{0,06}{4} = 15000$$

La denominación LIBOR en modelos de finanzas cuantitativas suele extenderse a una tasa que se aplica con capitalización simple para un período [0,T] y denotaremos entonces a la tasa Libor para ese periodo, vista en $t = 0$, como $L(0, 0, T)$. Esta tasa está asociada al precio de un bono cupón cero $P(0, T)$, tal que:

$$P(0,T)(1 + L(0,0,T)T) = 1 \quad \text{, esto es} \quad L(0,0,T) = \tfrac{1}{T}(\tfrac{1}{P(0,T)} - 1)$$

Al igual que las tasas continuas también podemos definir **tasas forward simplemente compuestas** a partir de las tasas LIBOR. En este caso, si se conocen dos tasas LIBOR, por ejemplo S=3 y T=6 meses, entonces la tasa forward de 3 a 6 meses, vista en $t = 0$, es la tasa $\hat{L}$ tal que:

$$1 + L(0,0,T).T = (1 + L(0,0,S).S)(1 + \hat{L}(T - S))$$

denotaremos a esta tasa forward como $L(0, S, T)$. Tenemos entonces que:

$$L(0,S,T) = \frac{1}{T-S}(\frac{1 + L(0,0,T).T}{1 + L(0,0,S).S} - 1) = \frac{1}{T-S}(\frac{P(0,S)}{P(0,T)} - 1)$$

Capítulo 2

Derivados sobre tasas de interés

2.1. Introducción

Los derivados sobre tasas de interés son contratos entre dos partes que basan su valor en un activo subyacente (en nuestro caso el subyacente será una tasa), en donde cada una de las partes se compromete a pagar una determinada tasa sobre un nominal en un tiempo futuro.

Las características y condiciones de estos contratos dan lugar a diferentes tipos de derivados, como el FRA, el SWAP, las Opciones, etc. Estos derivados financieros se usan para cubrir inversiones y para especular.

Definición 2.1.1. *El **payoff** de un derivado es el valor del contrato en su madurez en función del valor del subyacente.*

2.2. Hipótesis de no arbitraje

Un **arbitraje** consiste en realizar una combinación de transacciones complementarias en el mercado y lograr una diferencia positiva de dinero sin correr riesgo alguno. Nuestro objetivo durante el trabajo será encontrar cuál es el valor que deberían tener los activos en el tiempo $t = 0$ para que no exista oportunidad de arbitraje.

Esta hipótesis de no arbitraje se utiliza para poder valorar los distintos derivados. Ilustramos con el Ejemplo 2.2.1.

Ejemplo 2.2.1. Si una persona hace una inversión que en el tiempo futuro T tiene un valor X, debería ser equivalente a haber comprado un bono cupón cero por un nominal X con vencimiento en T.

Entonces, ¿qué monto debería haber invertido la persona en $t = 0$?

Utilizamos la notación de la Definición 1.3.2 y lo pensamos de esta manera:

- **Opción 1**:La persona decide comprar bonos.
  - En $t = 0$: como el valor de un bono en $t = 0$ es $P(0, T)$ comprando una cantidad de nominales X la persona invierte $P(0, T) \cdot X$.
  - En $t = T$: en el vencimiento T el valor de cada bono es $P(T, T) = 1$. Osea, la persona recibe $P(T, T) \cdot X = X$
- **Opción 2**: La persona decide realizar otro tipo de inversión que en el vencimiento T paga X.
  Para que el mercado sea equitativo entonces en el tiempo $t = 0$ debería haber pagado exactamente lo mismo que eligiendo la primer opción $(P(0, T) \cdot X)$.

Para que las dos inversiones sean equivalentes, lo que hicimos fue, conociendo el valor futuro del activo o inversión (en nuestro caso en $t = T$ el valor del activo es X) , calculamos el valor presente que debería tener para que no exista posibilidad de arbitraje respecto a otras inversiones. Para hacerlo lo *descontamos* con el bono con vencimiento en $t = T$ (cuyo valor es conocido en $t = 0$) y obtuvimos que el valor de nuestro activo en el tiempo cero debía ser $P(0, T) \cdot X$. A esto se le llama **proceso de descuento**.

Esta hipótesis de no arbitraje se utiliza para poder valorar los distintos derivados.

2.3. El FRA

El derivado quizás más simple sobre tasas de interés es el **FRA**: Forward Rate Arrangement.

Este derivado es un contrato entre dos partes que convienen en intercambiar una tasa fija por una tasa forward sobre un determinado nominal.

Este contrato, tiene a su inicio 3 fechas:

- $t = 0$: fecha en que se establece el contrato
- $t = S$: momento en que empieza a correr el interés por un plazo (T-S)
- $t = T$ finalización del contrato

Si R es la **tasa fija**, entonces el valor del contrato, al momento de su madurez sobre un nominal N es, para el que paga la **tasa LIBOR**:

$$N.(R - L(S, S, T)).(T - S)$$

Ahora nos podríamos preguntar que valor debería tener R para que este contrato sea justo en su inicio para ambas partes.

Volvemos entonces al asunto del no arbitraje, veamoslo de esta forma:

El payoff del FRA para la pata fija es

$$N \cdot (L(S, S, T) - R)(T - S)$$

Como vimos anteriormente, $L(S, S, T)$ es la tasa LIBOR tal que
$P(S, T)(1 + L(S, S, T)(T - S)) = 1$

Por lo tanto podemos reescribir el payoff como:

$$N \cdot (\frac{1}{P(S, T)} - 1 - R(T - S))$$

Quisiéramos que el valor en $t = 0$ de este pago sea cero.
Entonces separamos en dos partes:

- Si queremos llevar $N \cdot \frac{1}{P(S,T)}$ al tiempo $t = S$ podemos descontarlo con el bono $P(S, T)$ y obtenemos $N \cdot \frac{1}{P(S,T)} \cdot P(S, T) = N$. Luego lo volvemos a actualizar llevando este valor al tiempo $t = 0$ con el bono $P(0, S)$ y es equivalente a $N \cdot P(0, S)$. Así eliminamos la parte aleatoria $P(S, T)$ que es desconocida en $t = 0$.
- El otro término $N \cdot (1 + R(T - S))$ es una cantidad conocida que estará disponible en $t = T$. Luego la descontamos con el bono $P(0, T)$ y su valor en $t = 0$ será $N \cdot P(0, T) \cdot (1 + R(T - S))$

Si queremos que el valor del FRA sea 0 estas dos cantidades deben ser iguales, y entonces resulta:

$$P(0,S) = P(0,T) \cdot (1 + R(T-S))$$

y por lo tanto:

$$R = \frac{1}{T-S} \cdot \left(\frac{P(0,S)}{P(0,T)} - 1 \right) = L(0,S,T).$$

Para que no haya arbitraje, R tiene que ser igual a la tasa forward de S a T observada en $t = 0$

Luego, en tiempo t, el valor del contrato se obtiene descontando según el precio en el tiempo t del bono con madurez en T:

$$V_{FRA}(t,S,T,N) = N.P(t,T).(L(t,S,T) - R).(T-S).$$

Ejemplo 2.3.1. En un FRA, una parte conviene en pagar una tasa del 5 % el próximo mes por un plazo de 3 meses, mientras que la otra parte pagará la tasa LIBOR a 3 meses que se fija dentro de 1 mes, sobre un nominal de 1 millon de pesos.

La efectivización del contrato, es a través del pago de la diferencia de tasas sobre el nominal.

Un mes después del inicio del contrato se observa la tasa LIBOR a 3 meses, supongamos que fue $4,5\,\%$.

Tres meses después de esto, la **pata fija** deberá pagar a su contra parte $\$1000000 \cdot (5\,\% - 4,5\,\%) \cdot 0,25 = \$1250$.

2.4. El SWAP

Un **SWAP** es similar al FRA, solo que implica un intercambio de una renta con cuotas a una tasa fija (pata fija) y una renta con cuotas sujetas a la tasa flotante (pata flotante). Si por ejemplo, los pagos se darán en los siguientes 3 , 6 y 9 meses, considerando tasas trimestrales, entonces ambas partes acuerdan hoy una tasa fija trimestral que será pagada por una de las partes. La otra pagará la tasa LIBOR que se observe en el mercado las sucesivas fechas.

Para el caso del swap con una sucesión de n pagos, existen $n+2$ fechas asociadas:

$$0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < T_{n+1}$$

con una tasa fija R y las tasas flotantes: $L(T_1, T_1, T_2), L(T_2, T_2, T_3), \cdots, L(T_n, T_n, T_{n+1})$.

Si el swap se paga sobre un nominal N, entonces en las fechas T_2, T_3 hasta T_{n+1} quien paga la tasa fija recibe:

$$N \cdot (L(T_1, T_1, T_2) - R) \cdot (T_2 - T_1), \quad N \cdot (L(T_2, T_2, T_3) - R) \cdot (T_3 - T_2), \cdots$$

$$\cdots, N \cdot (L(T_n, T_n, T_{n+1}) - R) \cdot (T_{n+1} - T_n)$$

O sea, el payoff de la pata fija es:

$$N \cdot \sum_{j=1}^{n} (L(T_j, T_j, T_{j+1}) - R) \cdot (T_{j+1} - T_j)$$

También, en el caso del swap, la tasa fija elegida es tal que el valor del swap es cero al iniciar el contrato, veamos cual tiene que ser el valor de R:

- Descomponemos cada pago de la sumatoria como en el FRA:

$$N \cdot (L(T_j, T_j, T_{j+1}) - R)(T_{j+1} - T_j)) = N \cdot (\frac{1}{P(T_j, T_{j+1})} - 1 - R(T_{j+1} - T_j))$$

- Al igual que el FRA, en tiempo $t = 0$ esto vale

$$N \cdot (P(0, T_j) - (R(T_{j+1} - T_j) + 1)P(0, T_{j+1})).$$

- Sumamos sobre $1 \leq j \leq N$ e igualando a 0 para que el valor del SWAP sea 0 obtenemos:

$$R_{swap} = \frac{P(0, T_1) - P(0, T_{n+1})}{\sum_{j=1}^{n} P(0, T_{j+1}).(T_{j+1} - T_j)} \tag{2.1}$$

Esta se denomina **tasa swap** para el tenor de fechas

$$0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_n < T_{n+1}$$

Podríamos decir que los FRA y los Swaps son derivados donde el subyacente y el "precio de entrega" son tasas de interés.

Ejemplo 2.4.1. Consideramos un swap hipotético a 3 años con inicio el 5/03/2007 entre Microsoft e Intel.

Microsoft acuerda pagar a Intel una tasa del 5 % anual sobre un principal de \$100 millones y, a cambio, Intel acuerda pagar la tasa LIBOR a seis meses sobre el mismo principal.

El acuerdo especifica que los pagos se intercambiarán cada 6 meses.

- El 05/09/2007, se produce el primer intercambio, seis meses después del inicio del acuerdo: Microsoft le pagaria a Intel \$2,5 millones. (Interés sobre el principal de \$100 millones durante 6 meses a 5 %) . Intel le pagaría a Microsoft intereses sobre el principal de \$100 millones a la tasa LIBOR a seis meses, **vigente seis meses antes del 05/09/2007**, osea el 05/03/2007. Supongamos que en este momento la tasa LIBOR a seis meses es de 4, 2 % , a Intel le corresponde pagar \$2,1 millones.
- El 05/03/2008, se produce el segundo intercambio: Microsoft le pagaría a Intel \$2,5 millones, mientras que Intel pagaría intereses sobre el principal considerando la tasa LIBOR a seis meses observada el 05/09/2007. Supongamos que a esa fecha la tasa es 4, 8 % , le correspondería pagar \$2,4 millones.
- Siguiendo de esta manera, en total se producirían seis intercambios de pagos en el swap. Los pagos fijos son siempre de \$2,5 millones y los pagos a tasa variable se calculan usando la tasa LIBOR a seis meses, vigente seis meses antes de la fecha de pago.

2.5. Opciones sobre tasas de interés

Las opciones son contratos que dan derecho a una de sus partes a comprar (o vender) el subyacente, a un precio determinando en un tiempo futuro.

Dado que en una opción una de las partes adquiere un derecho, la otra parte tiene entonces una obligación. Es decir, si una parte tiene derecho a comprar el subyacente a un determinado precio, su contraparte tendrá la obligación de venderla a ese precio. Esta situación crea una desigualdad financiera, dado que quien tiene el derecho nunca estaría en desventaja mientras que su contraparte nunca logra un beneficio. Por lo tanto estos contratos no tienen costo cero, es decir, quien adquiere el derecho a comprar o vender debe pagar una **prima**.

Esta prima no se considera en el cálculo del payoff.

2.5.1. Caplet y Floorlet

Los FRA y los Swaps implican un flujo de fondos que puede tener diferente signo en cada pago. Osea puede ocurrir que la primer cuota sea beneficiosa para la pata fija y la siguiente lo sea para la pata flotante.

Ahora supongamos que un inversor entra a un FRA pagando una tasa fija R. El riesgo que corre es que la tasa flotante que va a recibir sea inferior a la tasa fija. Una forma de protegerse es a través de un **caplet** el cual le da el derecho de ejercer el FRA si la tasa flotante es mayor que la fija, y no ejercerla en caso contrario. Así, un caplet para el plazo $[T_1, T_2]$ con strike R, se ejerce en tiempo T_1 y paga en tiempo T_2 sobre un nominal N, la cantidad:

$$V_{caplet} = N. \max(L(T_1, T_1, T_2) - R, 0).(T_2 - T_1)$$

Un **floorlet** es similar al caplet, pero le da el derecho a la pata flotante de ejercer si la tasa fija es mayor que la tasa flotante y no ejercer en caso contrario. Su payoff es:

$$V_{floorlet} = N. \max(R - L(T_1, T_1, T_2), 0).(T_2 - T_1)$$

Una sucesión de caplets es un **cap** y una sucesión de floorlets es un **floor**. Así, es un cap o en un floor puede ejercerse la opción en algunos de los periodos y en otros no.

Ejemplo 2.5.1. Las caps pueden ser utilizadas para cubrirse de posibles incrementos en las tasas de interés. Supongamos que el 06/02/2008 una empresa adquiere un préstamo de tasa variables a cinco años de \$10 millones. La tasa sobre el préstamo es la tasa LIBOR a 3 meses + $0,3\,\%$.

Para cubrirse, la empresa, adquiere un cap de tasa de interés LIBOR a cinco años con una tasa máxima del $5\,\%$ anual y un principal de \$10 millones con inicio del contrato el 06/02/2008 .

La cap se desarrollará de la siguiente manera:

- El 06/05/2008: Supongamos que la tasa LIBOR a tres meses observada el 06/02/2008 es $4,3\,\%$. La empresa decide no ejercer la opción y no se producen intercambios de dinero.
- El 06/08/2008: Supongamos que la tasa LIBOR a tres meses observada el 06/05/2008 es $5,2\,\%$. La empresa hace uso de su derecho y recibe un pago de \$500000 (esto es la diferencia entre las tasas, sobre el principal de \$10 millones, considerando un plazo trimestral)

- Trimestralemente se hará el mismo cálculo teniendo en cuenta la tasa fija de 5 % y la tasa LIBOR a 3 meses, observada 3 meses antes.

De esta manera la empresa se asegura que la tasa de interés que pague en cualquier trimestre nunca sea mayor al 5, 3 % anual.

2.5.2. Swaption

Un **Swaption** es una opción para entrar en un swap. En este caso, el strike del swaption es una tasa fija. Existen 2 tipos de swaption:

El **payer swaption** en el cual la opción consiste en entrar al swap para pagar la tasa fija. Y el **receiver swaption** en el cuál la opción es entrar al swap para recibir la tasa fija.

Para el payer swaption por ejemplo, existen entonces diferentes fechas asociadas:

- $t = 0$: el inicio del contrato de opción
- $t = T$: el momento de ejercicio que puede considerarse el inicio del swap.
- $T_1 < T_2 < \cdots < T_N < T_{N+1}$: el tenor de fechas para el cual, en caso de haberse ejercido el swaption con una tasa fija R, se pagará la cantidad $(L(T_j, T_j, T_{j+1}) - R).(T_{j+1} - T_j)$ en T_{j+1} para $j = 1, \cdots, N$.

El payoff de un swaption será positivo si la tasa swap (2.1) supera la tasa fija y será cero en caso contrario. Ahora, para determinar el payoff deben considerarse cada uno de los pagos futuros y descontarlos a la correspondiente tasa S donde $S = \frac{1}{P(T,T_j)} - 1$.

La teoría de valoración de derivados sobre tasas de interés tiene sus bases en la valoración de activos pero al no ser subyacentes negociables en el mercado se introducen algunas complicaciones. Es por este motivo, que en los siguientes capítulos intentaremos introducir teoría y algunos modelos útiles para la valoración de los mismos.

Capítulo 3

Modelo Binomial

3.1. Introducción

Estamos interesados en construir modelos que no solo determinen la curva de rendimiento en un momento en particular, sino que proporcionen un método para la evolución aleatoria de la curva de rendimiento hacia adelante en el tiempo.

Una forma de observar el comportamiento de los precios de un activo es utilizando el **Modelo binomial**. Es un modelo probabilístico en el cual se representa a la evolución del precio de un activo a través de un proceso estocástico discreto. Se denomina *binomial* porque en cada instante de tiempo el precio del activo tiene una distribución binomial.

En un modelo binomial de n pasos se considera el espacio de probabilidad dado por los resultados de n tiradas independientes de una moneda.

$$\Omega = \{\omega_1\omega_2\cdots\omega_n| \quad \omega_i = C \quad o \quad \omega_i = X\}$$

donde en principio asumimos que la probabilidad de que la moneda salga cara en una tirada es $\tilde{p}$ con $0 < \tilde{p} < 1$.

3.2. Teorema de Radón Nikodym

Teorema 3.2.1. *Si $\mathbb{P}$ y $\tilde{\mathbb{P}}$ son dos medidas positivas equivalentes sobre Ω, entonces existe una variable aleatoria positiva Z tal que $\tilde{E}[Z] = 1$ y para todo $\omega \in \Omega$,*

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = Z(\omega)\tilde{\mathbb{P}}(\{\omega\}).$$

*Z se llama la **derivada de Radón Nikodym** de $\tilde{\mathbb{P}}$ respecto a $\mathbb{P}$, y se denota $Z = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$.*

Recíprocamente, dada una medida de probabilidad $\mathbb{P}$, si Z es una variable aleatoria positiva tal que $\tilde{E}[Z] = 1$, entonces

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = Z(\omega)\tilde{\mathbb{P}}(\{\omega\})$$

define una probabilidad sobre Ω que es equivalente a $\mathbb{P}$.

3.3. Filtraciones

Consideremos las familias de subconjuntos de Ω:

$M_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$M_1 = \{\{C\omega_2 \cdots \omega_n\}, \{X\omega_2 \cdots \omega_n\}, \emptyset, \Omega\}$

$M_2 = \{\{CC\omega_3 \cdots \omega_n\}, \{CX\omega_3 \cdots \omega_n\}\{XC\omega_3 \cdots \omega_n\}, \{XX\omega_3 \cdots \omega_n\}\}$ y todos sus complementos y uniones

$\vdots = \vdots$

donde la notación $\omega_i \cdots \omega_n$ indica todas las secuencias de n tiradas de monedas con esa terminación. Por ejemplo, si n=4, entonces

$$\{CX\omega_3\omega_4\} := \{CXCC, CXCX, CXXC, CXXX\}$$

Notemos que M_k agrupa en un mismo subconjunto aquellos resultados que coinciden en las primeras k tiradas. En particular se cumple que:

$$M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n$$

Decimos que $\mathcal{M} = \{M_k \mid k = 1, \ldots, n\}$ es una **filtración** en el espacio Ω. Para nuestro caso, se interpreta M_k como la información disponible hasta el tiempo $t = k$

Definición 3.3.1. *Dada Y, una variable aleatoria, decimos que es M_k-medible si para cada $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{\omega | Y(\omega) \leq a\}$ es un subconjunto de M_k i.e. $Y^{-1}(a) \subset M_k \; \forall a \in \mathbb{R}$*

Definición 3.3.2. *Si $\{X_k\} \quad k = 1, \cdots, n$ es un proceso estocástico discreto sobre Ω que para cada k , X_k depende solo de las primeras k tiradas de moneda, o sea X_k es M_k medible, se dice que es un proceso estocástico **adaptado** a la filtración $\mathcal{M}$.*

Definición 3.3.3. *Un proceso* $X_1, X_2, \cdots X_n$ *es* ***predecible o previsible*** *si para cada* $k = 0, 1, \cdots, n$*,* X_k *es* M_{k-1}*-medible. Es decir,* X_{k-1}*,* $1 \leq k \leq n$ *es adaptado*

3.4. Probabilidad y Esperanza condicional

Definición 3.4.1. *Sea* P *una medida de probabilidad,* Ω *el espacio de todas las secuencias de* N *tiradas de moneda. Asumimos que cada secuencia* $(\omega_1, \cdots, \omega_N)$ *tiene una probabilidad positiva.*

Sea $1 \leq k \leq N$ *, definimos la* ***probabilidad condicional*** *de la secuencia de* N *tiradas* $(\overline{\omega_1}, \cdots, \overline{\omega_N})$ *dada la información hasta* $t = k$ *como:*

$$P(\omega_{k+1} = \overline{\omega_{k+1}}, \cdots \omega_N = \overline{\omega_N} | \omega_1 = \overline{\omega_1}, \cdots \omega_k = \overline{\omega_k}) = \frac{P(\omega_1 = \overline{\omega_1}, \cdots, \omega_N = \overline{\omega_N})}{P(\omega_1 = \overline{\omega_1}, \cdots, \omega_k = \overline{\omega_k})}$$

Definición 3.4.2. *Sea* Y *una variable aleatoria* M_k *medible sobre* Ω*, definimos la* ***esperanza condicional*** *de* Y *dada la información hasta* $t = k$ *como :*

$$E[Y|M_k](\omega_1 \cdots \omega_k \ldots \omega_n) := \sum_{\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 \ldots \tilde{\omega}_n} Y(\tilde{\omega}) \mathbb{P}(\tilde{\omega} \mid \tilde{\omega}_1 = \omega_1 \ldots \tilde{\omega}_k = \omega_k)$$

En general, si es claro el contexto lo denotaremos

$$E[Y|M_k]$$

La esperanza condicional a M_0 (sin información) y M_n (toda la información)se definen como:

$$E[Y|M_0] = E[Y], \qquad E[Y|M_n] = Y$$

Es importante notar que la esperanza condicional $E[Y|M_k]$, para $k \geq 1$, es una variable aleatoria y no un número.

NOTACIÓN: $E[Y|M_k] = E_k[Y]$

3.4.1. Propiedades de la esperanza condicional

Sea Ω un espacio de probabilidad y $\mathcal{M}$ una filtración definida sobre él. Se cumplen las siguientes propiedades:

- **i.** Aditividad: Si Z e Y son variables aleatorias sobre Ω, entonces para cada $k = 0, 1, \cdots, n$:
$$E[Z+Y|M_k] = E[Z|M_k] + E[Z|M_k]$$
- **ii.** Sobre información conocida: Si una variable aleatoria Y es M_k-medible y $k < n$, entonces
$$E[YZ|M_k] = YE[Z|M_k]$$
- **iii.** Condicionamiento iterado: Para $k < j < n$
$$E[E[Z|M_j]|M_k] = E[Z|M_k]$$

Demostración:
Recordemos la definición de esperanza condicional:

$$E_k[Y](\omega_1 \ldots \omega_k) = \sum_{\omega_{k+1} \ldots \omega_n} p^{\#C(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} q^{\#X(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} Y(\omega_1 \ldots \omega_k \omega_{k+1} \ldots \omega_n)$$

i.
$$\begin{aligned}
E_k[Y+Z](\omega_1 \ldots \omega_k) &= \sum_{\omega_{k+1} \ldots \omega_n} p^{\#C(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} q^{\#X(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} [Y(\omega_1 \ldots \omega_n) + Z(\omega_1 \ldots \omega_n)] \\
&= \sum_{\omega_{k+1} \ldots \omega_n} p^{\#C(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} q^{\#X(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} Y(\omega_1 \ldots \omega_n) \\
&+ \sum_{\omega_{k+1} \ldots \omega_n} p^{\#C(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} q^{\#X(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} Z(\omega_1 \ldots \omega_n) \\
&= E_k[Y](\omega_1 \ldots \omega_n) + E_k[Z](\omega_1 \ldots \omega_n)
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
E_k[YZ](\omega_1 \ldots \omega_k) &= \sum_{\omega_{k+1} \ldots \omega_n} p^{\#C(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} q^{\#X(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} Y(\omega_1 \ldots \omega_k) Z(\omega_1 \ldots \omega_k \omega_{k+1} \ldots \omega_n) \\
&= Y(\omega_1 \ldots \omega_k) \sum_{\omega_{k+1} \ldots \omega_n} p^{\#C(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} q^{\#X(\omega_{k+1} \ldots \omega_n)} Z(\omega_1 \ldots \omega_k \omega_{k+1} \ldots \omega_n) \\
&= Y(\omega_1 \ldots \omega_k) E_k[Z](\omega_1 \ldots \omega_k)
\end{aligned}$$

iii.

Llamamos $W = E_j[Z]$. Ahora W depende solo de $\omega_1 \dots \omega_j$

$$
\begin{aligned}
E_k[E_j[Z]](\omega_1 \dots \omega_k) &= \sum_{\omega_{k+1} \dots \omega_n} p^{\#C(\omega_{k+1} \dots \omega_n)} q^{\#X(\omega_{k+1} \dots \omega_n)} W(\omega_1 \dots \omega_k \omega_{k+1} \dots \omega_j) \\
&= \sum_{\omega_{k+1} \dots \omega_j} p^{\#C(\omega_{k+1} \dots \omega_j)} q^{\#X(\omega_{k+1} \dots \omega_j)} W(\omega_1 \dots \dots \omega_j) \\
&* \sum_{\omega_{j+1} \dots \omega_n} p^{\#C(\omega_{j+1} \dots \omega_n)} q^{\#X(\omega_{j+1} \dots \omega_n)} \\
&= \sum_{\omega_{k+1} \dots \omega_j} p^{\#C(\omega_{k+1} \dots \omega_j)} q^{\#X(\omega_{k+1} \dots \omega_j)} W(\omega_1 \dots \dots \omega_j) \\
&= \sum_{\omega_{k+1} \dots \omega_j} p^{\#C(\omega_{k+1} \dots \omega_j)} q^{\#X(\omega_{k+1} \dots \omega_j)} \\
&* \sum_{\omega_{j+1} \dots \omega_n} p^{\#C(\omega_{j+1} \dots \omega_n)} q^{\#X(\omega_{j+1} \dots \omega_n)} Z(\omega_1 \dots \omega_n) \\
&= \sum_{\omega_{k+1} \dots \omega_n} p^{\#C(\omega_{k+1} \dots \omega_n)} q^{\#X(\omega_{k+1} \dots \omega_n)} Z(\omega_1 \dots \omega_n) \\
&= E_k[Z](\omega_1 \dots \omega_k)
\end{aligned}
$$

Proposición 3.4.1. *En un modelo binomial de N-periodos, sean $\mathbb{P}$ y $\tilde{\mathbb{P}}$ medidas de probabilidad equivalentes y asumamos $\mathbb{P}(\omega) > 0$ y $\tilde{\mathbb{P}}(\omega) > 0$ para cualquier secuencia ω de tiradas de una moneda. Sea $Z(\omega) = \frac{\tilde{\mathbb{P}}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}$ la derivada de Radon- Nikodym.*

Sea $n \leq m$ un numero positivo entre 0 y N, y sea Y una variable aleatoria que depende solo de las primeras m tiradas de la moneda, entonces:

$$\tilde{E}_n[Y] = \frac{1}{Z_n} E_n[Z_m Y]$$

3.5. Martingalas

Definición 3.5.1. *Un proceso estocástico adaptado a la filtración $\mathcal{M}$ se dice una **martingala** si se cumple que para todo $k \geq 0$,*

$$E[X_{k+1} | M_k] = X_k$$

Notemos que si un proceso estocástico X_k es una martingala, entonces:

$$E[X_k|M_{k-2}] = E[E[X_k|M_{k-1}]|M_{k-2}] = E[X_{k-1}|M_{k-2}] = X_{k-2}$$

Así, aplicando iteradamente la esperanza condicional podemos deducir el siguiente corolario:

Corolario 3.5.1. *Si $\{X_k\}$ es una martingala, entonces para todo $k \geq 0$ se cumple que el valor esperado de X_k se mantiene constante e igual a X_0:*

$$E[X_k] = X_0$$

Capítulo 4

Valoración de Derivados

4.1. Numerarios

Un **numerario** es un proceso adaptado positivo, usualmente un activo en el modelo utilizado como *deflator*, de modo tal que, al descontar un proceso con este, resulte una martingala en una medida de probabilidad particular. Por ejemplo podríamos escoger como numerario un bono, la cuenta de moneda, o una combinación de ellos.

Vamos a asumir que dado un numerario y una medida de probabilidad $\mathbb{P}(\omega)$, existe una medida de probabilidad equivalente a la dada, $\tilde{\mathbb{P}}(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$, tal que todos los activos descontados por el numerario bajo esta nueva medida de probabilidad son martingalas y por lo tanto podemos decir que no hay arbitraje.

Definición 4.1.1. *Dado un numerario y una medida probabilidad $\mathbb{P}$, llamamos* ***medida de martingala o medida neutral al riesgo*** *a la medida de probabilidad equivalente $\tilde{\mathbb{P}}$ para la cual todos los activos descontados por el numerario resultan martingalas.*

4.2. Portfolio y arbitraje

Definición 4.2.1. *Un* ***portfolio*** *es una tupla $\Pi_k = (\Delta_{k-1,k}, \Delta_{k-1,k+1}, \ldots, \Delta_{k-1,N}, a_k)$, $k \geq 1$, donde:*

- *Cada $\Delta_{k-1,n}$ es M_{n-1} medible, $n \geq k$*
- *$\Delta_{j,k}$ es la cantidad de bonos $P(\cdot, k)$ en que se invierte en tiempo j y se sostiene hasta el tiempo $j+1$*

- a_j *es la cantidad de dinero en la cuenta de moneda que se posee en el tiempo* j

El valor de un portfolio en tiempo k*, para* $k \geq 1$ *está dado por:*

$$\begin{aligned} V(k) &= \Delta_{k-1,k}P(k,k) + \Delta_{k-1,k+1}P(k,k+1) + \cdots + \Delta_{k-1,N}P(k,N) + a_{k-1}B(k) \\ &= \sum_{n=k}^{N} \Delta_{k-1,n}P(k,n) + a_k \end{aligned}$$

El valor en 0 *se define como:*

$$V(0) = \sum_{n=1}^{N} \Delta_{0,n}P(0,n) + a_0$$

La ***ganancia*** *de un portfolio en el tiempo* k *es la cantidad :*

$$G(k) = V(k) - V(0)$$

Definición 4.2.2. *Un portfolio se dice un* ***arbitraje*** *si comienza en* 0 *(*$G(0) = 0$*) y tal que para un* k*,* $\mathbb{P}(G(k) > 0) > 0$ *y* $\mathbb{P}(G(k) < 0) = 0$*.*

Definición 4.2.3. *Un portfolio se dice* ***autofinanciante*** *si para cada* k *el valor del portolio* $V(k)$ *cumple:*

$$\Delta_{k-1,k}P(k,k) + \Delta_{k-1,k+1}P(k,k+1) + \cdots + \Delta_{k-1,N}P(k,N) + a_{k-1}(1+i_{k-1}) =$$

$$\Delta_{k,k+1}P(k,k+1) + \cdots + \Delta_{k,N}P(k,N) + a_k$$

Intuitivamente esto significa que un inversor reinvierte el valor del portfolio en los bonos disponibles y en la cuenta de moneda pero sin modificar su valor. En particular, dado que $P(k,k) = 1$, el nominal del bono $\Delta_{k-1,k}$ es asimilado a la cuenta de moneda.

Sea N_k un numerario y $\tilde{\mathbb{P}}$ la correspondiente medida de martingala y habíamos definido $B(k) = (1+i_0)(1+i_1)\ldots(1+i_{k-1})$.

Luego

$$E^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\frac{P(k,m)}{N_k} \mid M_{k-1}\right] = \frac{P(k-1,m)}{N_{k-1}}, \qquad E^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\frac{B(k)}{N_k} \mid M_{k-1}\right] = \frac{B(k-1)}{N_{k-1}}$$

Veamos que un portfolio autofinanciante nunca puede ser un arbitraje:

Sea X_0, X_1, $\ldots$, X_k un proceso, tal que $X_0 = 0$ y tal que X_k tiene probabilidad positiva de ser positiva y probabilidad nula de ser negativa.

Si el proceso X_k es autofinanciante, entonces se cumple:

$$X_{k-1} = \Delta_{k-1,k}P(k-1,k) + \Delta_{k-1,k+1}P(k-1,k+1) + \cdots + \Delta_{k-1,N}P(k-1,N) + a_{k-1}$$

Por lo tanto la composición de X_k será de la forma:

$$X_k = \Delta_{k-1,k}P(k,k) + \Delta_{k-1,k+1}P(k,k+1) + \cdots + \Delta_{k-1,N}P(k,N) + a_{k-1}(1+i_{k-1})$$

Ahora, los $\Delta_{k-1,m}$ (que se usan en X_k) son M_{k-1} medibles

Dividiendo todo por N_k y calculando el valor esperado condicionado a M_{k-1} en la medida $\mathbb{Q}$, si usamos la linealidad del valor esperado condicional y la propiedad que lo que es M_{k-1} medible sale fuera nos queda:

$$\begin{aligned}
E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{X_k}{N_k} \mid M_{k-1}\right] &= E_k^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Delta_{k-1,k}P(k,k)+\Delta_{k-1,k+1}P(k,k+1)}{N_k}+\dots\right.\\
&+ \left.\frac{\Delta_{k-1,N}P(k,N)+a_{k-1}(1+i_{k-1})}{N_k}\right]\\
&= E_k^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Delta_{k-1,k}P(k,k)+\Delta_{k-1,k+1}P(k,k+1)}{N_k}+\dots\right.\\
&+ \left.\frac{\Delta_{k-1,N}P(k,N)}{N_k}+\frac{a_{k-1}B(k-1)(1+i_{k-1})}{B(k-1)N_k}\right]\\
&= E_k^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Delta_{k-1,k}P(k,k)+\Delta_{k-1,k+1}P(k,k+1)}{N_k}+\dots\right.\\
&+ \left.\frac{\Delta_{k-1,N}P(k,N)}{N_k}+a_{k-1}\frac{B(k)}{B(k-1)N_k}\right]\\
&= \Delta_{k-1,k}\frac{P(k-1,k)}{N_{k-1}}+\Delta_{k-1,k+1}\frac{P(k-1,k+1)}{N_{k-1}}+\dots\\
&+ \Delta_{k-1,N}\frac{P(k-1,N)}{N_{k-1}}+a_{k-1}\frac{1}{B(k-1)}\frac{B(k-1)}{N_{k-1}}\\
&= \frac{1}{N_{k-1}}\left(\Delta_{k-1,k}P(k-1,k)+\Delta_{k,k+1}P(k-1,k+1)+\dots\right.\\
&+ \left.\Delta_{k-1,N}P(k-1,N)+a_{k-1}\right)\\
&= \frac{X_{k-1}}{N_{k-1}}
\end{aligned}$$

Entonces resulta que $\frac{X_k}{N_k}$ es martingala y por ende $E[\frac{X_k}{M_k}] = \frac{X_0}{N_0} = 0$, ya que $X_0 = 0$.

Pero la medida $\mathbb{Q}$ es una medida equivalente a la que se venía tomando y por lo tanto $\mathbb{Q}(X_k > 0) > 0$ y $\mathbb{Q}(X_k < 0) = 0$.

Como N_k es positivo, no puede ocurrir que X_k/N_k tenga valor esperado 0 si a veces es positiva y nunca es negativa.

De esta manera la ganancia de un portfolio autofinanciante está dada solo por el movimiento de precios del activo y de la cuenta bancaria

4.3. Teoremas Fundamentales de la Valoración de Activos

Teorema 4.3.1 (**Primer Teorema Fundamental de Valoración de Activos**). *Un modelo de mercado en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathbb{P})$ *es libre de arbitraje si y sólo si existe un numerario y una medida de probabilidad equivalente a* $\mathbb{P}$ *tal que los activos deflatados por el numerario resultan una martingala. Esta probabilidad se denomina medida neutral al riesgo.*

Teorema 4.3.2 (**Segundo Teorema Fundamental de Valoración de Activos:**). *Un modelo de mercado libre de arbitraje en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathbb{P})$ *es completo si y sólo para cada numerario existe una única medida neutral al riesgo.*

Hacemos notar que un mercado puede ser completo y sin embargo tener arbitraje.

Ahora, dado un numerario $S = S(k)$, sea $\tilde{\mathbb{P}}$ la medida neutral al riesgo para S.

Entonces para un payoff V_N de un derivado con madurez en N, se define el valor del derivado en $n < N$ como la variable V_n tal que:

$$\frac{V_n}{S(n)} = E^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\frac{V_N}{S(N)}\right]$$

4.4. Modelo Binomial para tasas de interés

Sea Ω el conjunto de 2^N posibles resultados $\omega_1 \ldots \omega_N$ lanzamientos de una moneda y sea $\mathcal{P}$ una medida de probabilidad bajo la cual cada secuencia $\omega_1 \ldots \omega_N$ tiene probabilidad estrictamente positiva.

Definimos un **proceso de tasa de interés** a una secuencia de variables aleatorias $r_0, r_1, \ldots, r_{N-1}$ donde r_0 no es aleatorio y $r_n, \quad n = 1, \cdots, N-1$, depende solo de las primeras n tiradas de moneda $\omega_1 \ldots \omega_n$. Aunque la tasa de interés es aleatoria, sabemos la tasa de interés que se aplicará en el mercado monetario a inversiones durante el período n al tiempo $n + 1$.

Es natural asumir $r_n > 0 \quad \forall n$ y $\forall \omega_1 \dots \omega_n$. De todas formas, el análisis requiere solo $R_n(\omega_1 \dots \omega_n) > -1 \quad \forall n \quad \forall \omega_1 \dots \omega_n$ y será esto lo único que asumiremos.

Definimos el proceso de descuento como:

$$D_n = \frac{1}{(1+r_0)(1+r_1)\cdots(1+r_{n-1})} \quad n = 1, 2, \cdots, N \quad y \quad D_0 = 1 \tag{4.1}$$

Notemos que, D_n depende solamente de los primeros $n-1$ lanzamientos.

Por lo visto anteriormente, el valor en el tiempo $t = 0$ de un pago X recibido en el tiempo $t = m$ (donde X solo puede depender de las primeras m tiradas) es:

$$E[D_m X]$$

Si quisieramos definir el precio en $t = 0$ de un bono cupón cero con vencimiento en $t = m$ podemos usar esta fórmula:

$$P(0, m) = E[D_m P(m, m)] = E[D_m]$$

Definición 4.4.1. *Sea $r_0, \cdots, r_{N-1}$ un proceso de tasa de interés, con cada r_n dependiendo solamente de las primeras n monedas lanzadas y r_0 constante.*

Definimos el proceso de descuento D_n con $n = 0, 1, \cdots, N$ como en (4.1).

Para $0 \leq n \leq m \leq N$ el precio en el tiempo $t = n$ de un bono cupón cero con vencimiento en m, se define por:

$$P(n, m) = E_n[\frac{D_m}{D_n}]$$

Notemos que podemos reescribir lo anterior como $D_n P(n, m) = E_n[D_m]$ (pues en $t = n$ todos los r_i $i = 0, 1, \cdots, n$ ya son conocidos).

A partir de esta fórmula, vemos que el precio descontado $D_n P(n, m)$ con $n = 0, 1, \cdots, m$ es una martingala bajo la medida de probabilidad P.

En particular, si $0 \leq k \leq n \leq m$ tenemos:

$$E_k[D_n P(n, m)] = E_k[E_n[D_m]] = E_k[D_m] = D_k P(k, m)$$

4.5. Futuros

Un contrato de futuros está diseñado para buscar un precio de compra o venta de un activo antes del momento de la compra o venta. El proceso subyacente para el contrato de futuros es un precio futuro vinculado a una fecha de entrega pero no a una fecha de inicio.

Es improtante notar que aunque el contrato a plazo tiene un valor cero al inicio, a medida que se mueve el precio del contrato subyacente, el contrato toma un valor que puede ser positivo o negativo.

Los contratos de futuros a través del mercado requieren que los agentes liquiden diariamente para que ningún agente tenga una gran obligación para con otro.

Definición 4.5.1. *Consideremos un activo con proceso de precios* $S_0, S_1, \ldots, S_N$ *en el modelo de tasa de interés binomial. Para* $0 \leq m \leq N$ *, el proceso de precio m-futuro* $Fut_{n,m}$ *,* $n = 0, 1, \ldots, m$ *es un proceso adaptado con las siguientes propiedades:*

i) $Fut_{m,m} = S_m$

ii) Para cada $n, 0 \leq n \leq m-1$ *el valor neutral al riesgo al tiempo* n *del contrato que recibe el pago* $Fut_{k+1,m} - Fut_{k,m}$ *al tiempo* $k+1$ *para todo* $k = n, \ldots, m-1$ *es cero, por lo tanto:*

$$\frac{1}{D_n}\tilde{E}_n\left[\sum_{k=n}^{m-1} D_{k+1}(Fut_{k+1,m} - Fut_{k,m})\right] = 0$$

Un agente que en el tiempo n toma una posición long en un contrato futuro (en la posición long se compra el contrato esperando que el mismo suba de precio en el futuro) con entrega en un tiempo posterior m acuerda recibir los pagos $Fut_{k+1,m} - F_{k,m}$ al tiempo k+1 con $k = n, \ldots, m-1$ y luego recibir este activo al precio S_m en el tiempo m.

Cualquiera de los pagos $Fut_{k+1} - Fut_{k,m}$ puede ser negativo, en cuyo caso el agente en la posición long debe pagar dinero en lugar de recibirlo.

El agente que mantiene la posición long entre los tiempos n y m recibe un pago total de:

$$\sum_{k=n}^{m-1}(Fut_{k+1,m} - Fut_{k,m}) = Fut_{m,m} - Fut_{n,m} = S_m - Fut_{n,m}$$

Teorema 4.5.1. *Sea m con $0 \leq m \leq N$ entonces*

$$Fut_{n,m} = \tilde{E}_n[S_m] \quad n = 0, 1, \ldots, m$$

es el unico proceso que satisface la condición ii) de la definición anterior.

4.6. Derivados sobre bonos

Supongamos que en un modelo binomial para tasas de interés tenemos un activo que en el tiempo n su precio es $S(n)$, y depende de las primeras n tiradas de una moneda. Tenemos $\mathbb{Q}$ la medida de martingala, para la cual se cumple:

$$D_n S(n) = E_n^{\mathbb{Q}}[D_{n+1} S(n+1)]$$

Definición 4.6.1. *Un contrato forward es un acuerdo que paga un precio futuro K en un tiempo futuro m donde $0 \leq m \leq N$, sobre un activo que en el tiempo m vale S_m.*

El precio m-forward de este activo en el tiempo n, donde $0 \leq n \leq m$ es el valor de K que hace que el contrato forward tenga un precio de no arbitraje cero en el momento n.

Proposición 4.6.1. *Consideremos un activo con precios $S(0), S(1), \cdots, S(N)$ y los bonos cupón cero con vencimientos en $t = 0, 1, \cdots, N$.*

*Para $0 \leq n \leq m \leq N$ el precio **m-forward** en el tiempo $t = n$ para el activo es:*

$$For_{n,m} = \frac{S(n)}{P(n,m)}$$

Nota: Un contrato futuro con Payoff $S(m) - K$ en el tiempo $t = m$ tiene un precio descontado en el tiempo $t = n$:

$$\begin{aligned}
E_n[D_m(S(m) - K)] &= E_n[D_m S(m) - D_m K] \\
&= E_n[D_m S(m)] - E_n[D_m K] \\
&= E_n[D_m S(m)] - E_n[\frac{D_n}{D_n} D_m K] \\
&= E_n[D_m S(m)] - K D_n E_n[\frac{D_m}{D_n}] \\
&= D_n(S(n) - K P(n,m))
\end{aligned}$$

Para que en el tiempo $t = n$ el precio del contrato sea cero debemos pedir $S(n) - KP(n,m) = 0$, o sea, $K = \frac{S(n)}{P(n,m)}$

Proposición 4.6.2. *Sea m con $0 \leq m \leq N$, entonces $For_{0,m} = Fut_{0,m}$ si y solo si D_m y S_m estan correlacionados bajo $\tilde{P}$. En particular este es el caso si la tasa de interés no es aleatoria.*

Demostración:

*Por la **Proposición 4.6.1** tenemos que:*

$$For_{0,m} = \frac{S_0}{P(0,m)} = \frac{S_0}{\tilde{E}D_m} = \frac{\tilde{E}[D_m S_m]}{\tilde{E}D_m}$$

Por otro lado:

$$Fut_{0,m} = \tilde{E}S_m$$

Estas dos formulas son iguales si y solo si $\tilde{E}[D_m S_m] = \tilde{E}D_m \cdot \tilde{E}S_m$, que se cumple si D_m y S_m están correlacionadas.

Definición 4.6.2. *Sea $0 \leq n \leq m \leq N-1$, definimos la **tasa de interés futura** vista en el tiempo $t = n$ para $t = m$ como:*

$$F_{n,m} = \frac{P(n,m)}{P(n,m+1)} - 1$$

Veamos porque esta tasa se define así:

- $t = 0$: Supongamos que en el tiempo 0 un inversor entra en una posición short en un bono cupón cero con vencimiento en $t = m$, es decir vende el bono $P(0,m)$, y con el resultado obtenido de esa venta compra la cantidad equivalente a bonos cupón cero con vencimiento en $t = m+1$. En tal caso podría comprar $\frac{P(0,m)}{P(0,m+1)}$ nominales del bono que vence en $m+1$

- $t = m$: En el tiempo m el inversor debe pagar por la posición short en el bono que vence en este tiempo un monto de \$1

- $t = m+1$: El inversor cobrará \$1 por cada posición long que tenía en el bono con vencimiento en $m+1$, es decir cobrará $\frac{P(0,m)}{P(0,m+1)}$.

Finalmente podemos concluir que por una inversión de \$1, obtuvo $\frac{P(0,m)}{P(0,m+1)}$ es decir logró un interés de $\frac{P(0,m)}{P(0,m+1)} - 1$

Ejemplo 4.6.1. Supongamos $N = 3$

$$\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$$

Asumimos las siguientes probabilidades:

$$P(CCC) = \frac{2}{9}; \quad P(CCX) = \frac{1}{9}; \quad P(CXC) = \frac{1}{12}$$

$$P(CXX) = \frac{1}{12}; \quad P(XCC) = \frac{1}{6}; \quad P(XCX) = \frac{1}{12}$$

$$P(XXC) = \frac{1}{8}; \quad P(XXX) = \frac{1}{8}$$

Definimos:
$A_{CC} = \{w_1 = C, w_2 = C\} = \{CCC, CCX\} \to P(A_{CC}) = \frac{1}{3}$
$A_{CX} = \{w_1 = H, w_2 = T\} = \{CXC, CXX\} \to P(A_{CX}) = \frac{1}{6}$
$A_{XC} = \{w_1 = T, w_2 = H\} = \{XCC, XCX\} \to P(A_{XC}) = \frac{1}{4}$
$A_{XX} = \{w_1 = T, w_2 = T\} = \{XXC, XXX\} \to P(A_{XX}) = \frac{1}{4}$

Similarmente, tenemos:

$$P(A_C) = \frac{1}{2}; \quad P(A_X) = \frac{1}{2}$$

Y también:

$$P(w_3 = C | w_1 = C \wedge w_2 = C) = \frac{P(CCC)}{P(A_{CC})} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

Siguiendo así nos podemos construir el árbol 4.1 con las respectivas probabilidades.

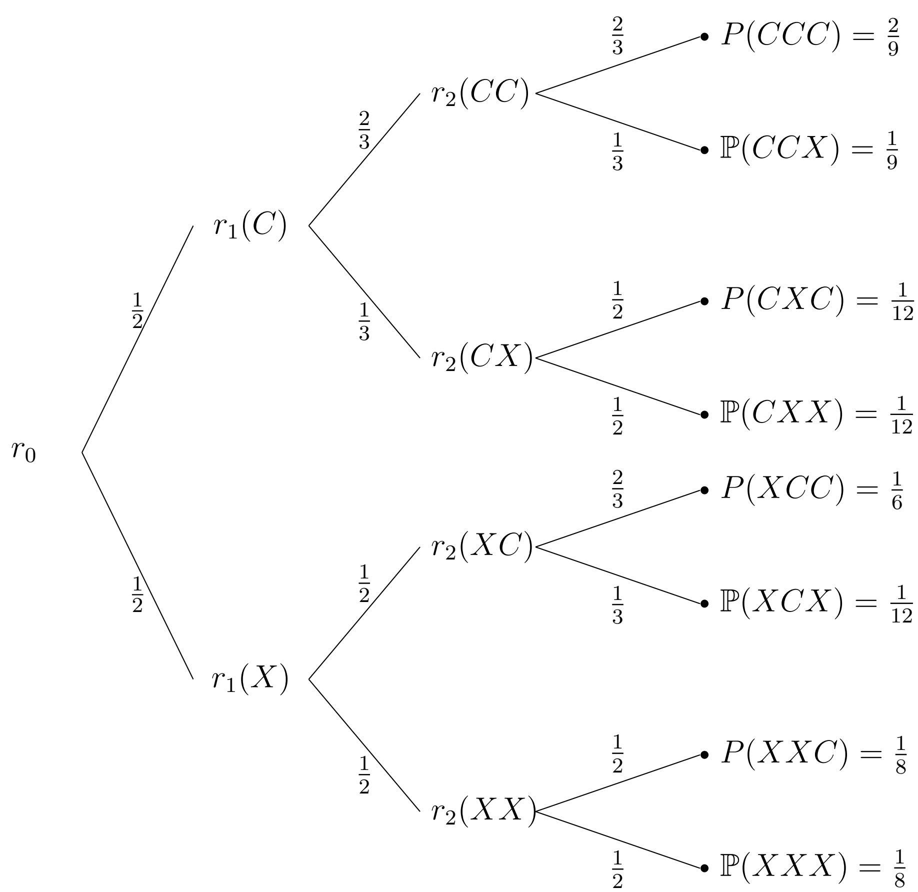

Figura 4.1: Modelo de tasas de interés de tres períodos

Finalmente, supongamos que tenemos una variables aleatoria Z, buscamos la esperanza condicional de esta v.a. suponiendo que la primer tirada fue cara:

$$\begin{aligned} E_1[Z](C) &= Z(CCC)P(w_2 = C, \omega_3 = C|\omega_1 = C) + \\ & Z(CCX)P(w_2 = C, \omega_3 = X|\omega_1 = C) + \\ & Z(CXC)P(w_2 = X, \omega_3 = C|\omega_1 = C) + \\ & Z(CXX)P(w_2 = X, \omega_3 = X|\omega_1 = C) \\ &= \frac{4}{9}Z(CCC) + \frac{2}{9}Z(CCX) + \frac{1}{6}Z(CXC) + \frac{1}{6}Z(CXX) \end{aligned}$$

Similarmente, si la primer tirada fue cruz, la esperanza condicional será:

$$E_1[Z](X) = \frac{1}{3}Z(XCC) + \frac{1}{6}Z(XCX) + \frac{1}{4}Z(XXC) + \frac{1}{4}Z(XXX)$$

Podemos hacer lo mismo con $E_2[Z]$, por ejemplo:

$$\begin{aligned} E_2[Z](CC) &= Z(CCC)P(\omega_3 = C|\omega_1 = C|\omega_2 = C) + \\ & Z(CCX)P(\omega_3 = X|\omega_1 = C|\omega_2 = C) \\ &= \frac{2}{3}Z(CCC) + \frac{1}{3}Z(CCX) \end{aligned}$$

Si la v.a. Z depende solo de las primeras 2 tiradas, el cálculo se reduce y nos queda:

$$\begin{aligned} E_1[Z](C) &= (\frac{4}{9} + \frac{2}{9})Z(CC) + (\frac{1}{6} + \frac{1}{6})Z(CX) \\ &= \frac{2}{3}X(CC) + \frac{1}{3}X(CX) \end{aligned}$$

$$E_1[Z](X) = \frac{1}{2}Z(XC) + \frac{1}{2}Z(XX)$$

$$E_2[Z](CC) = Z(CC)$$

$$E_2[Z](CX) = Z(CX)$$

$$E_2[Z](XC) = Z(XC)$$

$$E_2[Z](XX) = Z(XX)$$

Ahora, podríamos asignarle valores a las tasas de interés, como vemos en la figura 4.2:

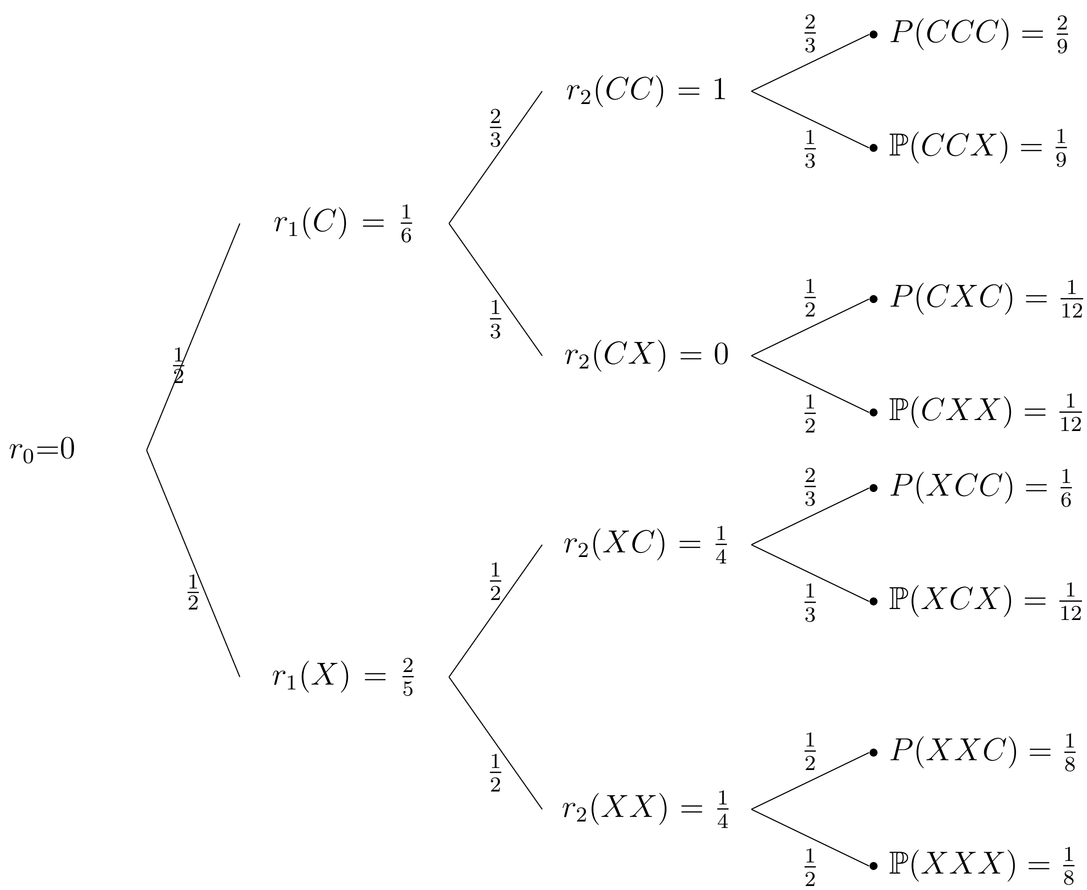

Figura 4.2: Modelo de tasas de interés de trés periodos

Tenemos:

$$D_1 = \frac{1}{1+R_0}, \quad D_2 = \frac{1}{(1+R_0)(1+R_1)}, \quad D_3 = \frac{1}{(1+R_0)(1+R_1)(1+R_2)}$$

Podemos construirnos una tabla para ver estos valores:

$\omega_1\omega_2$	$\frac{1}{1+r_0}$	$\frac{1}{1+r_1}$	$\frac{1}{1+r_2}$	D_1	D_2	D_3	$\tilde{P}$
CC	1	6/7	1/2	1	6/7	3/7	1/3
CX	1	6/7	1	1	6/7	6/4	1/6
XC	1	5/7	4/5	1	5/7	4/7	1/4
XX	1	5/7	4/5	1	5/7	4/7	1/4

Con estos datos podemos obtener el precio de los bonos cupón cero:

$$
\begin{aligned}
P(0,1) &= E[D_1] = 1 \\
P(0,2) &= E[D_2] \\
&= E[\frac{1}{(1+r_0)(1+r_1)}] \\
&= \frac{1}{1+r_1(C)}P(A_{CC}) + \frac{1}{1+r_1(C)}P(A_{CX}) + \\
&\quad \frac{1}{1+r_1(X)}P(A_{XC}) + \frac{1}{1+r_1(X)}P(A_{XX}) \\
&= \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3} + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{4} + \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{4} \\
&= \frac{11}{14}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(0,3) &= E[D_3] \\
&= E[\frac{1}{(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)}] \\
&= \frac{1}{(1+r_1(C)(1+r_2(CC))}P(A_{CCC}) + \frac{1}{(1+r_1(C))(1+r_2(CC))}P(A_{CCX}) + \\
&\quad \frac{1}{(1+r_1(C)(1+r_2(CX))}P(A_{CXC}) + \frac{1}{(1+r_1(C))(1+r_2(CX))}P(A_{CXX}) + \\
&\quad \frac{1}{(1+r_1(X))(1+r_2(XC))}P(A_{XCC}) + \frac{1}{(1+r_1(X))(1+r_2(XC))}P(A_{XCX}) + \\
&\quad \frac{1}{(1+r_1(X))(1+r_2(XX))}P(A_{XXC}) + \frac{1}{(1+r_1(X))(1+r_2(XX))}P(A_{XXX}) \\
&= \frac{1}{(1+r_1(C)(1+r_2(CC))}(P(A_{CCC}) + P(A_{CCX})) + \\
&\quad \frac{1}{(1+r_1(C)(1+r_2(CX))}(P(A_{CXC}) + \\
&\quad P(A_{CXX})) + \frac{1}{(1+r_1(X))(1+r_2(XC))}(P(A_{XCC}) + P(A_{XCX})) + \\
&\quad \frac{1}{(1+r_1(X))(1+r_2(XX))}(P(A_{XXC}) + P(A_{XXX})) \\
&= \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3} + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{4} \\
&= \frac{4}{7}
\end{aligned}
$$

El precio de los bonos cupón cero en el tiempo uno serán:
$P(1,1) = 1$
$P(1,2)(C) = \frac{1}{D_1(C)}\tilde{E}_1[D_2](C) = \frac{6}{7}\cdot\frac{2}{3} + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{6}{7}$
$P(1,2)(X) = \frac{1}{D_1(X)}\tilde{E}_1[D_2](X) = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{7}$
$P(1,2)(X) = \frac{1}{D_1(X)}\tilde{E}_1[D_2](X) = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{7}$
$P(1,3)(C) = \frac{1}{D_1(C)}\tilde{E}_1[D_3](C) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3} + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{7}$
$P(1,3)(X) = \frac{1}{D_1(X)}\tilde{E}_1[D_3](X) = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{7}$

El precio de los bonos cupón cero en el tiempo dos serán:
$P(2,2) = 1$
$P(2,3)(CC) = \frac{1}{D_2(CC)}\tilde{E}_2[D_3](CC) = \frac{D_3(CC)}{D_2(CC)} = \frac{7}{6}\cdot\frac{3}{7} = \frac{1}{2}$

$P(2,3)(CX) = \frac{1}{D_2(CX)}\tilde{E}_2[D_3](CX) = \frac{D_3(CX)}{D_2(CX)} = \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{7} = 1$
$P(2,3)(XC) = \frac{1}{D_2(XC)}\tilde{E}_2[D_3](XC) = \frac{D_3(XC)}{D_2(XC)} = \frac{7}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{5}$
$P(2,3)(XX) = \frac{1}{D_2(XX)}\tilde{E}_2[D_3](XX) = \frac{D_3(XX)}{D_2(XX)} = \frac{7}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{5}$

Si suponemos que $K = \frac{1}{3}$. Podemos observar el payoff de una cap en la siguiente tabla:

$\omega_1\omega_2$	r_0	$(r_0 - \frac{1}{3})^+$	r_1	$(r_1 - \frac{1}{3})^+$	r_2	$(r_2 - \frac{1}{3})^+$
CC	0	0	1/6	0	1	2/3
CX	0	0	1/6	0	0	0
XC	0	0	2/5	1/15	1/4	0
XX	0	0	2/5	1/15	1/4	0

El precio al tiempo cero de las caplet al tiempo uno, dos y tres respectivamente serán :

$\tilde{E}[D_1(R_0 - \frac{1}{3})^+] = 0$
$\tilde{E}[D_2(R_1 - \frac{1}{3})^+] = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{42}$
$\tilde{E}[D_3(R_2 - \frac{1}{3})^+] = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{21}$

entonces $Cap_3 = 0 + \frac{1}{42} + \frac{2}{21} = \frac{5}{42}$

4.6.1. Medidas futuras

Sea V_m el payoff al tiempo m de un contrato. La fórmula para el precio neutral al riesgo de este contrato al tiempo n menor que m depende de la esperanza condicional $\tilde{E}_n[D_m V_m]$, en efecto el precio neutral al riesgo para este activo en el tiempo n es:

$$V_n = \frac{1}{D_n}\tilde{E}_n[D_m V_m] \quad n = 0, 1, \ldots, m$$

Para computar la esperanza condicional que aparece en la fórmula anterior cuando D_m es aleatoria, uno necesitaría conocer la distribución condicional conjunta de D_m y V_m bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo $\tilde{P}$. Esto complica la fijación de precios para los derivados de renta fija.

Una forma de resolver este problema es construir modelos de tasas de interés usando medidas futuras en vez de medidas neutrales al riesgo. La idea es usar el término D_m que se encuentra en el lado derecho de la igualdad mencionada anteriormente como una derivada de Radon - Nikodym para cambiar a una medida diferente, en donde el término D_m ya no aparezca.

Para llevar adelante esta idea, introducimos la siguiente definición:

Definición 4.6.3. *Sea m fijo con* $1 \leq m \leq N$ *, definimos*

$$Z_{m,m} = \frac{D_m}{P(0,m)}$$

y usamos $Z_{m,m}$ *para definir la medida* $\tilde{P}^m$ *dada por la fórmula:*

$$\tilde{P}^m(\omega) = Z_{m,m}(\omega)\tilde{P}(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega$$

Para verificar que $\tilde{P}^m$ es efectivamente una medida de probabilidad deberíamos ver que le asigna probabilidad uno a Ω . Esto se cumple efectivamente pues $\tilde{E}Z_{m,m} = 1$, en efecto:

$$\tilde{P}^m(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{P}^m(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} Z_{m,m}(\omega)\tilde{P}(\omega) = EZ_{m,m} = \frac{1}{P(0,m)}\tilde{E}D_m = 1$$

donde la última igualdad de la ecuación se cumple por la defición del precio de un bono cupón cero.

Ahora podemos definir el proceso de derivada de Radon - Nikodym

$$Z_{n.m} = E_n Z_{m,m} \quad n = 0, 1, \ldots, m$$

Si V_m es una variable aleatoria que depende solo de las m primeras tiradas:

$$\tilde{E}^m V_m = \tilde{E}[Z_{m,m} V_m]$$

Más en general, si $0 \leq n \leq m$ y V_m depende solo de las primeras m tiradas, de acuerdo a la Proposición 3.4.1:

$$\tilde{E}^m_n[V_m] = \frac{1}{Z_{n,m}} \tilde{E}_n[Z_{m,m} V_m]$$

En este contexto, con $Z_{m,m}$ como en la definición anterior y usando que $D_nP(n,m) = \tilde{E}_n[D_m]$ podemos reescribir $Z_{n,m}$ como:

$$Z_{n,m} = \frac{D_nP(n,m)}{P(0,m)}$$

Usando lo mencionado podemos construir el siguiente teorema:

Teorema 4.6.1. *Sea m fijo con $1 \leq m \leq N$ y sea $\tilde{P}^m$ la medida futura. Si V_m es una variable aleatoria dependiendo solo de las m primeras tiradas, entonces:*

$$\tilde{E}^m[V_m] = \frac{1}{P(0,m)}\tilde{E}[D_mV_m]$$

mas generalmente, si V_m depende solo de las primeras m tiradas entonces:

$$\tilde{E}^m_n[V_m] = \frac{1}{D_nP(n,m)}\tilde{E}_n[D_mV_m] \quad n = 0, 1, \ldots, m$$

Para computar el término del lado izquierdo ya no necesitamos conocer la correlación entre V_m y D_m, solamente necesitamos saber la distribución condicional de V_m bajo la medida futura $\tilde{P}^m$. Así, el lado izquierdo de la igualdad es a menudo más fácil de calcular que el término $\tilde{E}_n[D_mV_m]$ que aparece en el término del lado derecho. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que la medida m-futura es útil solo para fijar el precio de aquellos activos que pagan en tiempo m y no en otros tiempos.

Ahora, de la ecuación anterior y $V_n = \frac{1}{D_n}\tilde{E}_n[D_mV_m]$ tenemos:

$$\tilde{E}^m_n[V_m] = \frac{V_n}{P(n,m)} \quad n = 0, 1, \ldots, m$$

En otras palabras, $\tilde{E}^m_n[V_m]$ es el precio al tiempo n de cualquier derivado o activo que paga V_m al tiempo m, denominado en unidades del bono cupón cero que vence en el tiempo m. El precio del activo denominado de esta manera es una martingala bajo la medida de probabilidad $\tilde{P}^m$. En conclusión, podemos ver que el precio m-futuro de un activo es una martingala bajo la medida futura $\tilde{P}^m$.

Ejemplo 4.6.2. Notemos que D_m y $Z_{m,m}$ dependen solo de las primeras $m-1$ tiradas.

Continunado con el Ejemplo 4.6.1 realizando anteriormente donde $m = 3$ podemos construirnos $Z_{3,3}$:

$Z_{3,3}(CC) = \frac{D_3(CC)}{P(0,3)} = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $Z_{3,3}(CX) = \frac{D_3(CX)}{P(0,3)} = \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3}{2}$

$Z_{3,3}(XC) = \frac{D_3(XC)}{P(0,3)} = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{7} = 1 \qquad Z_{3,3}(XX) = \frac{D_3(XX)}{P(0,3)} = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{7} = 1$

Notemos que $EZ_{3,3} = 1$. Para cada $\omega \in \Omega$, los valores de $\tilde{P}(\omega)$, $Z_{3,3}(\omega)$ y $\tilde{P}^3(\omega) = Z_{3,3}(\omega)\tilde{P}(\omega)$ los podemos ver en la siguiente tabla :

$\omega_1\omega_2\omega_3$	$\tilde{P}(\omega_1\omega_2\omega_3)$	$Z_{3,3}(\omega_1\omega_2\omega_3)$	$\tilde{P}^3(\omega_1\omega_2\omega_3)$
CCC	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$
CCX	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{12}$
CXC	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$
CXX	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$
XCC	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{6}$
XCX	$\frac{1}{12}$	1	$\frac{1}{12}$
XXC	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$
XXX	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$

Ahora podemos computar el lado izquierdo de la fórmula

$$\tilde{E}_n^m[V_m] = \frac{1}{D_n P(n,m)} \tilde{E}_n[D_m V_m] \quad n = 0, 1, \ldots, m$$

usando $V_3 = (R_2 - \frac{1}{3})^+$, el payoff al tiempo tres de una caplet con la tasa de interés en el tiempo dos. En este caso, V_3 depende solo de las primeras dos tiradas de la moneda y de hecho,

$$V_3(\omega_1\omega_2) = \frac{2}{3} \quad si \quad \omega_1 = H, \omega_2 = H$$

y cero en cualquier otro caso.

Como V_3 depende solo de las primeras dos tiradas, tenemos que $\tilde{E}_2^3[V_3] = V_3$, luego podemos computar:

$\tilde{E}_1^3[V_3](C) = \frac{1}{2}V_3(CC) + \frac{1}{2}V_3(CX) = \frac{1}{3}$

$\tilde{E}_1^3[V_3](X) = \frac{1}{2}V_3(XC) + \frac{1}{2}V_3(XX) = 0$

$\tilde{E}^3[V_3] = \frac{1}{4}V_3(CC) + \frac{1}{4}V_3(CX) + \frac{1}{4}V_3(XC) + \frac{1}{4}V_3(XX) = \frac{1}{6}$

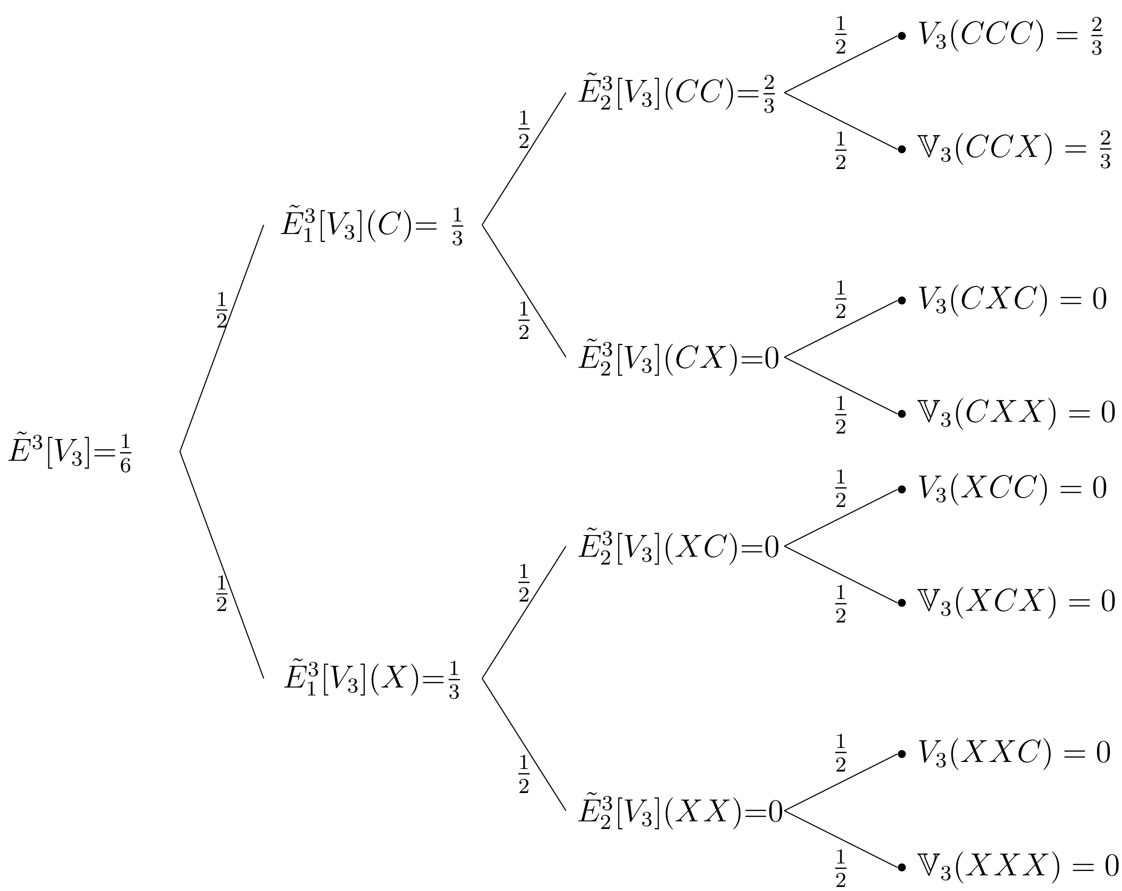

Figura 4.3: La $\tilde{P}^3$ martingala $\tilde{E}^3_n$

Podemos armarnos el proceso $\tilde{E}^3_n, n = 0, 1, 2, 3$ como se muestra en la Figura 4.3

Notemos que este proceso es una martingala bajo $\tilde{P}^3$, el valor de cada nodo en el árbol es el promedio ponderado de los valores de los 2 siguientes nodos, usando las probabilidades de transición $\tilde{P}^3$ que se muestran en los enlaces.

Finalmente usamos la formula

$$\tilde{E}^m_n[V_m] = \frac{V_n}{P(n,m)} \quad n = 0, 1, \ldots, m$$

para computar el precio al tiempo cero de una caplet al tiempo tres:

$$V_0 = P(0,3)\tilde{E}^3[V_3] = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{21}$$

Notar que estamos usando el precio del bono $P(0,3) = \frac{4}{7}$ según lo calculado en el ejemplo anteriormente.

Capítulo 5

Modelos para la valoración de derivados

5.1. El modelo de Ho-Lee

En el modelo de Ho-Lee la tasa de interés para el tiempo n, considerando que salieron j cantidad de caras, está dada por:

$$r_{n,j}(\omega_1 \cdots \omega_n) = a_n + b_n \cdot j$$

donde $a_0, a_1, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ son constantes para calibrar el modelo.

Las probabilidades neutrales al riesgo están dadas por $\tilde{p} = \tilde{q} = \frac{1}{2}$

Haremos un modelo de Ho-Lee para tres períodos usando $a_0 = 0{,}05$, $a_1 = 0{,}045$, $a_2 = 0{,}04$ y $b_1 = b_2 = 0{,}01$

Supongamos que $\tilde{P}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{8}$ $\forall(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

Podemos entonces construir el árbol de la figura 5.1:

Calculamos en la siguiente tabla los valores correspondientes para D_1, D_2 y D_3 :

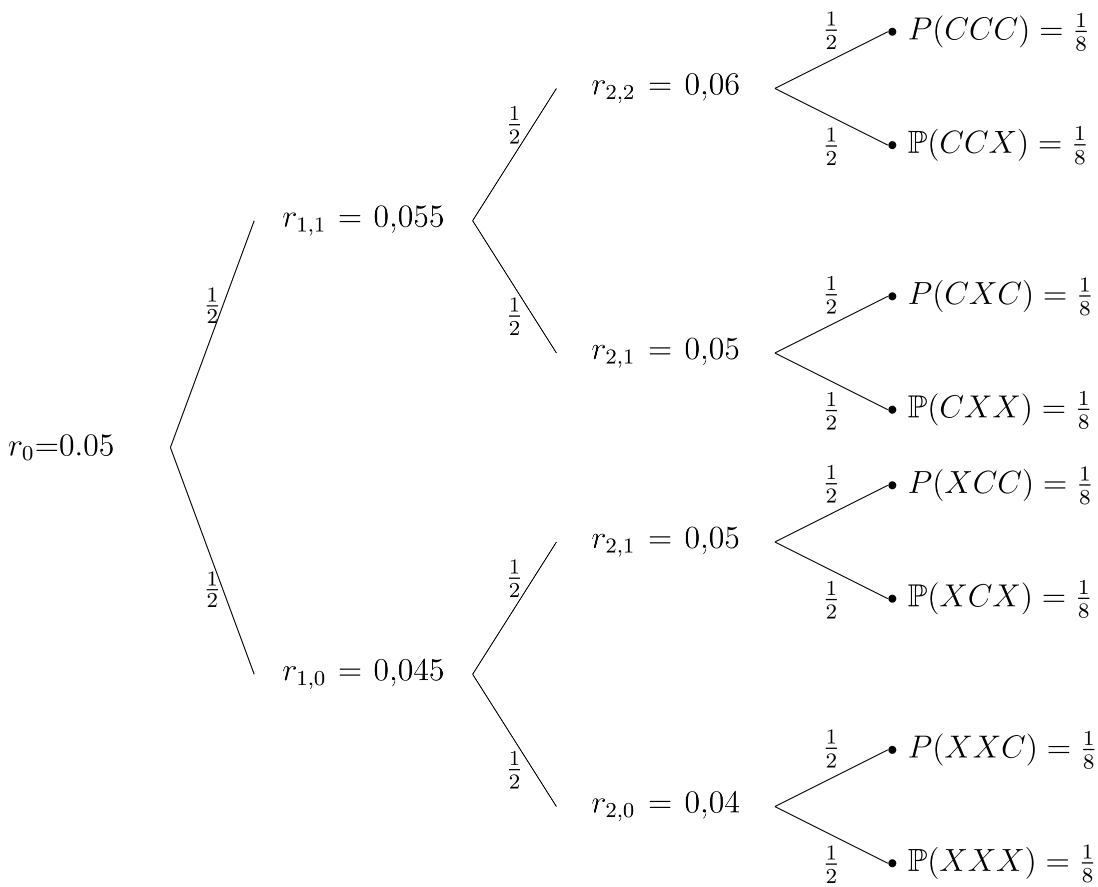

Figura 5.1: Modelo de tasas de interés de Ho Lee para tres períodos

$\omega_1\omega_2$	$\frac{1}{1+r_0}$	$\frac{1}{1+r_1}$	$\frac{1}{1+r_2}$	D_1	D_2	D_3	$\tilde{P}$
CC	0.9524	0.9479	0.9434	0.9524	0.9027	0.8516	1/4
CX	0.9524	0.9479	0.9524	0.9524	0.9027	0.8597	1/4
XC	0.9524	0.9569	0.9524	0.9524	0.9114	0.8680	1/4
XX	0.9524	0.9569	0.9615	0.9524	0.9114	0.8763	1/4

De manera análoga a como lo hicimos antes, podemos calcular el precio de los bonos cupón cero en el tiempo cero:

$P(0,1) = E[D_1] = 0{,}9524$
$P(0,2) = E[D_2] = 0{,}9071$
$P(0,3) = E[D_3] = 0{,}8639$

El precio de los bonos cupón cero en el tiempo uno serán:
$P(1,1) = 1$
$P(1,2)(C) = \frac{1}{D_1(C)}\tilde{E}_1[D_2](C) = 0{,}9479$
$P(1,2)(T) = \frac{1}{D_1(X)}\tilde{E}_1[D_2](X) = 0{,}9569$
$P(1,3)(C) = \frac{1}{D_1(C)}\tilde{E}_1[D_3](C) = 0{,}8985$
$P(1,3)(X) = \frac{1}{D_1(X)}\tilde{E}_1[D_3](X) = 0{,}9158$

El precio de los bonos cupón cero en el tiempo dos serán:
$P(2,2) = 1$
$P(2,3)(CC) = \frac{1}{D_2(CC)}\tilde{E}_2[D_3](CC) = 0{,}9434$
$P(2,3)(CX) = \frac{1}{D_2(CX)}\tilde{E}_2[D_3](CX) = 0{,}9524$
$P(2,3)(XC) = \frac{1}{D_2(XC)}\tilde{E}_2[D_3](XC) = 0{,}9524$
$P(2,3)(XX) = \frac{1}{D_2(XX)}\tilde{E}_2[D_3](XX) = 0{,}9615$

Si tomamos k=0.05 , podemos calcular el payoff en los tres peróodos correspondientes para las cap como mostramos en el siguiente cuadro:

$\omega_1\omega_2$	r_0	$(r_0 - \frac{1}{3})^+$	r_1	$(r_1 - \frac{1}{3})^+$	r_2	$(r_2 - \frac{1}{3})^+$
CC	0.05	0	0.055	0.005	0.06	0.01
CX	0.05	0	0.55	0.005	0.05	0
XC	0.05	0	0.055	0.005	0.05	0
XX	0.05	0	0.045	0	0	0

El precio al tiempo cero de las caplet al tiempo uno, dos y tres respectivamente serán:

$\tilde{E}[D_1(r_0 - 0{,}05)^+] = 0$
$\tilde{E}[D_2(r_1 - 0{,}05)^+] = 0{,}002257$
$\tilde{E}[D_3(r_2 - 0{,}05)^+] = 0{,}002129$
Entonces, el precio para una cap de estos tres períodos será:
$Cap_3 = 0{,}004386$

5.2. Modelo de Black-Derman-Toy

En este modelo la tasa de interés al tiempo n, considerando que salieron j cantidad de caras, está dada por:

$$r_{n,j}(\omega_1, \ldots, \omega_n) = a_n.b_n^{\#j}$$

Donde las constantes $a_i, b_i \quad i = 1, \ldots, n$ son usadas para calibrar el modelo.

La probabilidad neutral al riesgo esta dada por $\tilde{p} = \frac{1}{2}$. Con $a_n = \frac{0{,}05}{1{,}2^n}$ y $b_n = 1{,}44$, los 3- períodos del modelo BDT están expresados en el árbol a continuación. En este modelo tenemos los siguientes precios de los bonos cupón cero:

$P(0,2) = 0{,}9064 \qquad P(0,3) = 0{,}8620$
$P(1,2)(H) = 0{,}9434 \quad P(1,2)(T) = 0{,}96$
$P(1,3)(H) = 0{,}8893 \quad P(1,3)(T) = 0{,}921$

Ahora, podemos calcular la tasa de interés forward $F_{n,2} = \frac{P(n,2)-P(n,3)}{P(n-3)}$ obteniendo:
$F_{0,2} = 0{,}05147$

$F_{1,2}(C) = 0{,}06089$
$F_{1,2}(X) = 0{,}04231$

Los precios futuros para el contrato que paga r_2 en el tiempo 3 están dados por $Fut_{n,3} = \tilde{E}_n[r_2]$, entonces:

$Fut_{0,3} = 0{,}05168$
$Fut_{1,3}(C) = 0{,}061$
$Fut_{1,3}(X) = 0{,}04236$

Nota: En este modelo las tasas de interés son siempre positivas, a diferencia del modelo de Ho-Lee donde, en algunos casos, la tasa puede ser negativa.

5.3. Calibración de modelos discretos

En la sección anterior, dado un modelo en particular propusimos ciertos coeficientes y con esto calculamos los precios de los bonos cupón cero. Sin embargo, en la mayoría de los casos vamos a poder observar en el mercado los precios de los bonos y necesitaremos calibrar los coeficientes para que el modelo se ajuste a los precios observados. En esta sección buscaremos desarrollar la teoría para hacerlo en modelos que utilicen árboles recombinantes, esto significa que en el proceso estocástico solo importará la cantidad de caras que salieron y no el orden en que aparecen, e ilustraremos con ejemplos.

5.3.1. Ecuaciones futuras

Definición 5.3.1. *Sea $P_e(i,j)$ el precio en el tiempo cero de un activo que paga \$1 en el tiempo i con j la cantidad de caras que salieron en la tirada de moneda y que vale 0 para cualquier otro tiempo o estado j. Llamamos a este activo como el* ***activo elemental*** *y nos referimos a $P_e(i,j)$ como un precio estático.*

Estos activos elementales permiten calcular, en un único árbol, el precio de todos los bonos cupón cero con distintos vencimientos. Es así que, por ejemplo, el bono cupón cero con vencimiento en T se puede escribir como la suma de los $P_e(T,j)$ variando j:

$$P(0,T) = \sum_{j=1}^{T} P_e(T,j)$$

Definido el activo elemental y tomando p la probabilidad de sacar cara y $q = 1-p$ se satisfacen las siguientes **ecuaciones futuras** :

$$P_e(k+1,s) = \frac{P_e(k,s-1)}{(1+r_{k,s-1})}p + \frac{P_e(k,s)}{(1+r_{k,s})}q$$

$$P_e(k+1,0) = q\frac{P_e(k,0)}{(1+r_{k,0})}$$

$$P_e(k+1,k+1) = p\frac{P_e(k,k)}{(1+r_{k,k})}$$

Notemos: Si en la primer ecuación, nos paramos en el nodo $(k+1,s)$, el activo $P(k+1,s) = 1$ y además solo pudimos llegar a ese lugar desde los nodos $(k,s-1)$ (con probabilidad p) ó (k,s) (con probabilidad q). Cada uno de los miembros es descontado por 1+ la tasa correspondiente en cada nodo para que, en $(k+1,s)$ la suma de los mismos valga 1 .

Ejemplo 5.3.1. Consideremos el árbol de tasas de interés de la Figura 5.2 y asumamos que la probabilidad neutral al riesgo está dada por $\frac{1}{2}$ en cada nodo. Veamos cómo calcular los activos elementales $P(i,j)$ con $i = 0,1,2,3$ y $j \leq i$.

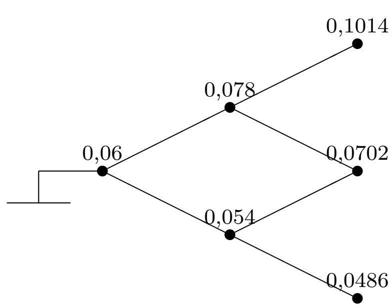

Figura 5.2: Árbol de tasas

- Usando las ecuaciones futuras calculamos los precios elementales en los tiempos $t = 0,1,2,3$

$P_e(0,0) = 1$
$P_e(1,0) = \frac{P_e(0,0)}{2(1+0{,}06)} = 0{,}4717$
$P_e(1,1) = 0{,}4717$
$P_e(2,0) = \frac{P_e(1,0)}{2(1+0{,}054)} = 0{,}2238$
$P_e(2,1) = \frac{P_e(1,0)}{2(1+0{,}054)} + \frac{P_e(1,1)}{2(1+0{,}072)} = 0{,}4426$
$P_e(2,2) = 0{,}2188$
$P_e(3,0) = 0{,}1013$
$P_e(3,1) = 0{,}3096$
$P_e(3,2) = 0{,}3151$
$P_e(3,3) = 0{,}1067$

- Con esta información podemos calcular el precio del bono de cupón cero que vence en $t = 3$

$P(0,3) = \sum_i P_e(3,i) = 0{,}1013 + 0{,}3096 + 0{,}3151 + 0{,}1067 = 0{,}8327$

5.3.2. Calibración del Modelo BDT

El modelo BDT asumía que la tasa de interés en el nodo $N(i,j)$, donde i es el tiempo y j la cantidad de caras que salieron, está dada por

$$r_{i,j} = a_i \cdot b_i^j$$

Como las variables que tenemos como incógnitas son demasiadas, para poder calibrar necesitamos tomar algún tipo de decisión, es por esta razón que vamos a suponer $b_i = b$ constante para todo i.

Recordemos que, en el capítulo uno vimos $P(0,i) = \frac{1}{(1+s_i)^i}$, donde s_i es la tasa cero para el tiempo i.

Se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+s_i)^i} &= \sum_{j=0}^{i} P_e(i,j)\\ &= \frac{P_e(i-1,0)}{2(1+a_{i-1})} + \sum_{j=0}^{i}\left[\frac{P_e(i-1,j)}{2(1+a_{i-1}b^j)} + \frac{P_e(i-1,j-1)}{2(1+a_{i-1}b^{j-1})}\right]\\ &+ \frac{P_e(i-1,i-1)}{2(1+a_{i-1}b^{i-1})}\end{aligned}$$

Utilizando la ecuación anterior podemos encontrar los a_i resolviendo de manera iterativa de la siguiente forma:

- Establecemos $i = 1$ y observamos que $P_e(0,0) = 1$ y con esto vemos $a_0 = s_1$
- Ahora usamos las ecuaciones futuras para encontrar $P_e(1,0)$ y $P_e(1,1)$
- Establecemos $i = 2$ para encontrar a_1
- Continuamos de manera iterada hasta obtener todos los a_i

Por construcción, este algoritmo hará coincidir la estructura a término observada.

Ejemplo 5.3.2. (Encontrando la valuación de un Payer Swaption en el modelo BDT)
Nos gustaría ponerle precio a un 2-8 payer swaption en el modelo BDT que ha sido calibrado para que coincida con la estructura a término observada en el mercado. La notación 2-8 significa que el intercambio es una opción que vence en 2 meses para entrar en un swap de 8 meses. La tasa se observará a partir de $t = 2$ y los pagos tendrán lugar en los meses 3 a 10 basado en la tasa de interés prevaleciente los meses anteriores. La función de "pagador"de la opción significa que si se ejerce la opción, el ejercitante paga fija y recibe flotante.

Para este ejemplo vamos a suponer que la tasa fija es 11,65 %

Usaremos un modelo de 10 períodos asumiendo que cada periodo corresponde a 1 mes. La curva de tasas ceros observadas en el mercado es

$$s_1 = 7{,}3 \quad s_2 = 7{,}62 \quad s_3 = 8{,}1 \quad s_4 = 8{,}45 \quad s_5 = 9{,}2$$

$$s_6 = 9{,}64 \quad s_7 = 10{,}12 \quad s_8 = 10{,}45 \quad s_9 = 10{,}75 \quad s_{10} = 11{,}22$$

y asumiremos $b_i = b = 1{,}005$ para todo i

El primer paso es elegir los a_i de modo que la estructura a término coincida con la dada.

Calculamos los a_i de manera iterativa según lo visto en la sección anterior:

Year	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a(%)	7.3	7.92	9.02	9.44	12.13	11.72	12.85	12.56	12.92	15.20

Con estos valores estamos en condiciones de calcular las tasas $r_{i,j}$ para los distintos tiempos en el Cuadro 5.1. Notemos que este cuadro es equivalente a los árboles binomiales que armabamos, pero lo construimos como pirámide por la cantidad de pasos del mismo.

									15.90
								13.45	15.82
							13.01	13.38	15.74
						13.24	12.94	13.32	15.66
					12.02	13.18	12.88	13.25	15.58
				12.38	11.96	13.11	12.81	13.25	15.58
			9.58	12.31	11.90	13.05	12.75	13.12	15.43
		9.11	9.53	12.25	11.84	12.98	12.69	13.05	15.35
	7.96	9.07	9.48	12.19	11.78	12.92	12.62	12.99	15.27
7.30	7.92	9.02	9.44	12.13	11.72	12.85	12.56	12.92	15.20

Cuadro 5.1: Árbol de tasas (%)

Antes de valuar el swaption vamos a pensar que tenemos que valuar un swap sobre tasas de interés que vence en $t = 10$. Si la tasa fija es de $K = 11{,}65\,\%$ el pago en el tiempo $i+1$ será $(r_{i,j} - K)$.

De esta manera el nodo $N(10, 10)$, por ejemplo, resulta del cálculo

$(r_{9,9} - K)/(1 + r_{9,9})$ y los nodos con $i \leq 9$ resultan de descontar apropiadamente los nodos predecesores.

Para ejemplificar, el valor en el nodo $N(5, 5)$ del Cuadro 5.2 surge del cálculo:

$0{,}0560 = \frac{1}{(1+0{,}1238)}[(0{,}1238 - 0{,}1165) + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0568 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0546]$

							0.0366
						0.0479	0.0360
					0.0539	0.0467	0.0353
				0.0610	0.0523	0.0456	0.0347
			0.0568	0.0590	0.0508	0.0444	0.0340
		0.0560	0.0546	0.0571	0.0492	0.0433	0.0334
	0.0311	0.0535	0.0524	0.0552	0.0477	0.0422	0.0327
0.0040	0.0284	0.0511	0.0502	0.0533	0.0461	0.0411	0.0321
0.0011	0.0257	0.0486	0.0480	0.0514	0.0446	0.0399	0.0314
-0.0017	0.0230	0.0461	0.0458	0.0495	0.0431	0.0388	0.0308
t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9

Cuadro 5.2: Valuando un swap

Como el swaption es una opción sobre el swap, en el caso de que el payoff dé negativo, el payer swaption no ejerce la opción y tendremos que el valor de la misma es cero. A partir de esta observación podemos rearmar nuestro arbol para valuar el swaption como se muestra en el Figura 5.3

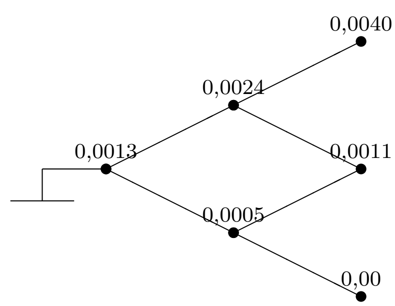

Figura 5.3: Valuando un 2-8 payer swaption

El valor en el tiempo cero para el 2-8 payer swaption será 0,0013.

En este último caso, encontramos el valor en el tiempo cero de un 2-8 payer swaption usando el arbol binomial, descontando los nodos de $t = 2$ a $t = 1$ y luego estos últimos a $t = 0$:

- En $t = 1$
  $V_1(C) = \frac{1}{(1+0{,}0796)}(\frac{1}{2} \cdot 0{,}004 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0011) = 0{,}0024$
  $V_1(X) = \frac{1}{(1+0{,}0792)}(\frac{1}{2} \cdot 0{,}0011 + \frac{1}{2} \cdot 0) = 0{,}0005$
- En $t = 0$
  $V_0 = \frac{1}{(1+0{,}0730)}(\frac{1}{2} \cdot 0{,}0024 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0005)$

Esto sería análogo a hacer el valor esperado de los pagos en $t = 2$, descontados por el bono $P(0, 2) = 0{,}8634$:

$$\begin{aligned} V_0 &= E[P(0,2)V_2] \\ &= P(0,2)(\frac{1}{4} \cdot V_2(CC) + \frac{1}{4} \cdot V_2(CX) + \frac{1}{4}V_2(XC) + \frac{1}{4} \cdot V_2(XX) \\ &= 0{,}8634(\frac{1}{4} \cdot 0{,}004 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0011 + \frac{1}{4} \cdot 0) = 0{,}0013 \end{aligned}$$

Usando la teoría para valuar el swaption:

Una forma alternativa para calcular el valor del Swaption en $t = 0$ sin necesidad de recorrer todo el árbol sería utilizar la **tasa swap** para valorar el swap en $t = 2$ y luego resolver el valor esperado como lo hicimos anteriormente para valuar nuestro swaption. En la Sección 2.4 , calculamos cuál era la tasa para la cual el valor del Swap sea cero (no haya arbitraje). A esta la llamamos tasa swap, en este caso, vista en t=2 y considerando las tiradas de la moneda (ω_1, ω_2) la fórmula estará dada por:

$$R_{swap,2}(\omega_1, \omega_2) = \frac{P(2,2)(\omega_1, \omega_2) - P(2,10)(\omega_1, \omega_2)}{\sum_{j=3}^{10} P(2,j)(\omega_1, \omega_2)},$$

donde $P(t, T)$ es el valor en tiempo t del bono que vence en T.

Así, el valor que tiene el Swap en $t = 2$ se calcula observando la diferencia $R_{swap,2} - 0{,}1165$ que se gana en $t = 3, 4, \ldots, 10$ y descontando cada uno de esos valores al tiempo $t = 2$. Para descontar debemos multiplicar por $P(2, t)$.

Algo importante que debemos notar, es que en $t = 2$ tenemos 3 estados distintos (pueden haber salido 2 caras, 1 cara , ninguna cara), por lo que tendremos tres tasas swap distintas según la cantidad de caras (como trabajamos con árboles recombinantes no nos importa el orden en que salieron las caras, es decir podemos tener CX o XC y el valor de la tasa será el mismo). Reescribimos nuestras tasas swap como:

$$\begin{aligned}
R_{swap,2}(CC) &= \frac{P(2,2)(CC) - P(2,10)(CC)}{\sum_{j=3}^{10} P(2,j)(CC)} \\
R_{swap,2}(CX) &= \frac{P(2,2)(CX) - P(2,10)(CX)}{\sum_{j=3}^{10} P(2,j)(CX)} \\
R_{swap,2}(XX) &= \frac{P(2,2)(XX) - P(2,10)(XX)}{\sum_{j=3}^{10} P(2,j)(XX)}
\end{aligned}$$

Y luego debemos descontar cada pago en $t = 3, \ldots, 10$ por el valor del bono $P(2,t)$ según el estado correspondiente. Nos quedaría el valor del swap:

$$\begin{aligned}
Estado \quad 2 &= (R_{swap,2}(CC) - 11{,}65) \cdot \sum_{t=3}^{10} P(2,t)(CC) = 0{,}004 \\
Estado \quad 1 &= (R_{swap,2}(CX) - 11{,}65) \cdot \sum_{t=3}^{10} P(2,t)(CX) = 0{,}0011 \\
Estado \quad 0 &= (R_{swap,2}(XX) - 11{,}65) \cdot \sum_{t=3}^{10} P(2,t)(XX) = -0{,}0017
\end{aligned}$$

Por último, igual que lo hicimos antes, calculamos el valor esperado en estos tres estados para valuar nuestro swaption en $t = 0$ (notar que el Estado 1 tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ y los otros dos $\frac{1}{4}$). El valor del Swaption en $t = 0$ estará dado por:

$$V_0 = \frac{1}{4} \cdot \text{máx}[0{,}004; 0] + \frac{1}{2} \cdot \text{máx}[0{,}0011; 0] + \frac{1}{4} \cdot \text{máx}[-0{,}0017; 0] = 0{,}0013$$

Ejemplo 5.3.3. (Encontrando la valuación de un Payer Swaption en el modelo Ho-Lee)

Year	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a(%)	7.3	7.44	8.07	8.02	10.27	9.40	10.09	9.35	9.26	11.14

Podemos resolver el mismo ejemplo anterior, utilizando el modelo de tasas propuesto por Ho-Lee y suponiendo $b_i = 0{,}01$ para todo i . En este caso $r_{i,j} = a_i + b_i \cdot j$

Calculamos los $r_{i,j}$ para los distintos tiempos en el Cuadro 5.3

									20.14
								17.26	19.14
							16.35	16.26	18.14
						16.09	15.35	15.26	17.14
					14.40	15.09	14.35	14.26	16.14
				14.27	13.40	14.09	13.35	13.26	15.14
			11.02	13.27	12.40	13.09	12.35	12.26	14.14
		10.07	10.02	12.27	11.40	12.09	11.35	11.26	13.14
	8.44	9.07	9.02	11.27	10.40	11.09	10.35	10.26	12.14
7.30	7.43	8.07	8.02	10.27	9.40	10.09	9.35	9.26	11.14

Cuadro 5.3: Árbol de tasas (%)

Armamos el Cuadro 5.4 para valuar el swap en $t = 2$

Utilizamos el valor esperado para calcular el valor de swaption en $t = 0$:
$V_0 = E[P(0,2)V_2] = 0{,}8634 \cdot (\frac{1}{4} \cdot 0{,}0498 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0020 + \frac{1}{4} \cdot 0) = 0{,}0116$

5.4. Implementación algorítmica

En ejemplos como el anterior, podemos usar hojas de cálculo de excel para encontrar los distintos payoff en los tiempos correspondientes, sin embargo, podríamos tener tiempos mayores a $t = 10$ y sería tedioso hacer el cálculo para cada uno de los pasos del árbol. Es por este motivo que se puede recurrir a la implementación de un algoritmo que nos

							0.0706
						0.1074	0.0629
					0.1242	0.0902	0.0549
				0.1365	0.1039	0.0754	0.0469
			0.1322	0.1110	0.0829	0.0602	0.0387
		0.1253	0.1017	0.0845	0.0612	0.0446	0.0303
	0.0912	0.0899	0.0696	0.0569	0.0388	0.0285	0.0218
0.0498	0.0499	0.0525	0.0360	0.0282	0.0156	0.0121	0.0132
0.0020	0.0059	0.0130	0.0006	-0.0018	-0.0084	-0.0047	0.0044
-0.0493	-0.0409	-0.0288	-0.0365	-0.0331	-0.0333	-0.0221	-0.0046
t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9

Cuadro 5.4: Valuando un swap

ayude a encontrar los coeficientes de calibración y los distintos activos. A continuación, presentaremos un desarrollo en python para calibrar los modelos y resolver el ejemplo presentado anteriormente.

Activos elementales

Notemos que en el siguiente algoritmo estamos usando el modelo de tasas de BDT pero podríamos modificarlo facilmente para utilizar Ho-Lee o cualquier otro modelo.

```python
## Cálculo de los activos elementales 'P_e'
def Pe(i, j, a, b):
    if i == 0:
        return 1
    else:
        if j == 0:
            return Pe(i-1, 0, a, b) / (2 * (1 + a[i-1]) )
        elif j == i:
            return Pe(i-1, i-1, a, b) / (2 * (1 + a[i-1] * (b ** (i-1))))
        else: #0 < j < i
            return Pe(i-1, j-1, a, b) / (2 * ( 1 + a[i-1] *
            (b ** (j-1)))) + Pe(i-1, j, a, b) /
```

```
            (2 * (1 + a[i-1] *(b ** j)))
```

Coeficientes para calibrar el modelo

Buscamos los coeficientes que calibran el modelo, utilizando el método de bisección, considerando que el arbol tiene **T_venc** pasos.

```
'En este arreglo almaceno todos los a[i]'
a = [0] * T_venc

for k in range(T_venc):
    #print(s1[k])
    busqueda = False
    x0 = 0
    x1 = 1
    a[k] = x0
    P_izq = sum(Pe(k + 1, j, a, b) for j in range(k+2)) - 1 /
    (1 + s1[k]) ** (k + 1)
    a[k] = x1
    P_der = sum(Pe(k + 1, j, a, b) for j in range(k+2)) - 1 /
    (1 + s1[k]) ** (k + 1)

    while not busqueda:
        xm = (x0 + x1) / 2.
        a[k] = xm
        P_m = sum(Pe(k + 1, j, a, b) for j in range(k+2)) - 1 /
        (1 + s1[k]) ** (k + 1)
        if abs(P_m) < 10 ** -10:
            busqueda = True
        else:
            if P_m * P_izq > 0:
                x0 = xm
                P_izq = P_m
            else:
```

```
                x1 = xm
                P_der = P_m


print(list(map(lambda x: round(x, 4), a )))
```

Cálculo de los bonos cupón cero

Utilizando la fórmula $P(0,T) = \sum_{j=1}^{T} P_e(T,j)$, calculamos el valor de todos los bonos en el tiempo $t = 0$

```
Bonos = [0] * T_venc
for i in range(T_venc):
    Bonos[i] = sum(Pe(i, j, a, b) for j in range(i+1))
Bonos
```

Cálculo de la tasa de interés

Calculamos la tasa de interés para cada tiempo según el modelo BDT y luego para el modelo de Ho-Lee.

```
def short_rate_bdt(i, j):
    return a[i] * b ** j
```

```
def short_rate_hl(i, j):
    return a[i] + b * j
```

Cálculo de los bonos

Calculamos el valor para cualquier bono en tiempo i , estado j, para el modelo BDT (podemos hacerlo para el modelo de Ho-Lee modificando la tasa a utilizar):

```
def Bonds(i, j, T):
    if i == T:
```

```
        return 1.
    else:
        return (Bonds(i+1, j+1, T) + Bonds(i+1, j, T))/
        (2. * (1 + short_rate_bdt(i,j)))

##Notar que Bonos[T]=Bonds(0,0,T)
```

Cálculo del Swaption

Utilizamos los algoritmos anteriores con las siguientes variables:

```
'Fijamos b y T_venc'
b=1.005
T_venc = 10
'Estos son los valores de las tasas spot'
s = [7.3, 7.62, 8.1, 8.45, 9.2, 9.64, 10.12, 10.45, 10.75, 11.22]
s1 = [s[i] / 100 for i in range(len(s))]
print(s1)
```

Luego desarrollamos un nuevo algoritmo para el cálculo particular del payer swaption del Ejemplo 5.3.2, considerando el modelo de tasas de Black-Derman-Toy.

Calculamos el valor del **swap** en $t = 2$, en los tres estados distintos, utilizando la tasa swap :

```
t = 2
print('Valor del Swap en t = {}'.format(t))
valor_en_2 = []
for estado in [0, 1, 2]:
    tasa_swap =  ( Bonds(t, estado, 2) - Bonds(t, estado, 10))
    /sum(Bonds(t, estado, Tn)  for Tn in range(t+1, 11))
    valor_en_2.append((tasa_swap  - 0.1165) * sum(Bonds(t, estado, Tn)
    for Tn in range(t+1, 11)))
    print('Valor en estado ', estado, '= ', valor_en_2[estado])
```

Finalmente calculamos el valor del swaption en $t = 0$, utilizando el valor esperado :

```
print('valor del swaption')

((0.25) * max(valor_en_2[0], 0) + 0.5 * max(valor_en_2[1], 0)
+ 0.25 * max(valor_en_2[2], 0)) * Bonds(0,0,2)
```

5.5. Modelos de no arbitraje y modelos de equilibrio

Dentro de la teoría de modelos para tasas de interés podemos encontrar dos clasificaciones, los **modelos de equilibrio** y los **modelos de no arbitraje**. Los primeros se basan en una serie de supuestos referentes a la economía en la cual operan y derivan un proceso para la tasa de interés de corto plazo. En dichos modelos las estructuras a plazos de tipos de interés y de volatilidades se determinan de manera endógena y no buscan coincidir necesariamente con los precios observados en el mercado. Por otro lado, los de no arbitraje tratan de modelar los distintos coeficientes, procurando que los precios de los títulos dados por el modelo coincidan con los observados en el mercado, en el momento de la calibración.

Durante todo el trabajo hemos desarrollado teoría y modelos con procesos estocásticos sobre tiempo discreto. Los modelos mas utilizados en la actualidad son los modelos continuos, en los cuales se extiende la teoría estudiada y se utiliza el movimiento Bowniano para modelar los activos. Algunos de los modelos continuos de no arbitraje más conocidos son Ho - Lee(1986), Hull - White (1990), Black - Derman - Toy (1990), Heath -Jarrow - Morton (1990) y Black - Karasinski (1991) , y por el lado de los modelos de equilibrio podemos resaltar los trabajos de Vasicek (1977), Cox - Ingersoll - Ross (1985).

Bibliografía

[1] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer Science & Business Media, 2007.

[2] Matin Haugh. Term structure lattice models. 2016.

[3] John Hull and Alberto de Miguel. *Introducción a los mercados de futuros y opciones*. Pearson Educación, 2009.

[4] Steven Shreve. *Stochastic calculus for finance I: the binomial asset pricing model*. Springer Science & Business Media, 2005.