



Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación



Universidad
Nacional
de Córdoba

Trabajo Especial de Licenciatura en Física

Análisis Entrópico de un Modelo de Formación de Opinión con Condiciones Iniciales Estructuradas.

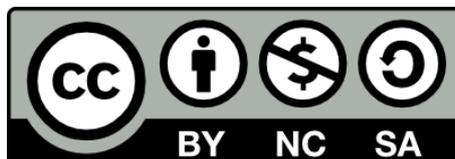
Autor:
Nicolás Amado

Director:
Dr. Jorge A. Revelli

Director:
Dr. Marcos E. Gaudiano

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y
Computación
Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Marzo 2023



Análisis Entrópico de un Modelo de Formación de Opinión con Condiciones Iniciales Estructuradas por Nicolás Amado se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Resumen

Los sistemas complejos representan un amplio campo de estudio, no solo en Física, sino también en otros campos científicos, que abarcan desde la Química y la Biología, hasta la Sociología y la Economía. La Física Estadística aporta tanto conceptos como técnicas necesarias para poder analizar y describir la fenomenología de los sistemas complejos. En particular, las sociedades son un ejemplo de sistemas complejos, dado que están conformadas por un grupo de individuos y la interacción de los miembros que la componen. Muchos aspectos del comportamiento colectivo de los sistemas sociales no dependen de las atribuciones individuales, sino que son características emergentes de la interacción de todas sus partes. Los vínculos sociales le conceden a estos sistemas, un grado de organización que conforman estructuras jerárquicas. La respuesta en el proceso de formación de opinión en una dada comunidad presenta propiedades y comportamientos no monótonos que a menudo son consecuencia de la organización jerárquica en dicho sistema. En el presente trabajo se analiza un modelo de formación de opinión ampliamente estudiado en la literatura, el denominado Modelo de Sznajd. Por medio de la implementación de simulaciones numéricas y cálculos teóricos, se muestra el cambio en la respuesta del sistema al considerar, por un lado, condiciones iniciales aleatorias y por el otro condiciones iniciales estructuradas. Además, se busca validar o complementar los modelos propuestos y los resultados obtenidos con diferentes teorías y técnicas provenientes de la teoría de la información y los procesos estocásticos.

Palabras Clave: Sociofísica, Dinámica Social, Dinámica de Opinión, Procesos Estocásticos, Fractales, Complejidad, Entropía.

Abstract

Complex systems represent a wide field of study, which are present not only in Physics, but in other scientific disciplines as well, from Chemistry and Biology to Sociology and Economy. Statistical Physics has contributed to analyze and describe the phenomenology of complex systems, using the concepts and techniques it developed. In particular, societies are an example of complex systems, since they are made up of a group of individuals and their interactions. Many aspects of the collective behavior of social systems do not depend on the particular characteristics of the individuals, but rather are emergent characteristics of the interaction of all their parts. Social bonds give these systems a degree of organization that make up hierarchical structures. The response in the opinion formation process, in a given community, presents non-monotonous properties and behaviors that are often a consequence of the hierarchical organization in said system. This paper analyzes an opinion formation model widely studied in the literature, the so-called Sznajd Model. Through the implementation of numerical simulations and theoretical calculations, the change in the response of the system is shown when considering, on the one hand, random initial conditions and on the other structured initial conditions. We also validate and complement these analysis by implementing techniques coming from information theory and stochastic processes.

Keywords: Sociophysics, Social Dynamics, Opinion Dynamics, Stochastic Processes, Fractals, Complexity, Entropy.

Agradecimientos

Agradezco a toda mi familia, por brindarme la oportunidad de estudiar mi carrera, por su apoyo incondicional y por su compañía constante.

A Jorge Revelli, por su gran desempeño como mentor, su dedicación y predisposición, sus palabras siempre alentadoras y su compromiso con mi formación como investigador.

A todos mis amigos y compañeros, fuera y dentro de la facultad, cuya compañía no sólo hizo posible, sino también agradable, transitar este camino.

A Marcos Gaudiano y Walter Lamberti por dedicar su tiempo para colaborar en este trabajo, aprendí mucho de ustedes.

Agradezco también a Adolfo Banchio y al grupo de la Teoría de la Materia Condensada de mi facultad, por permitirme desarrollar mis simulaciones en el *cluster Bandurria*.

A los docentes de FAMAF, que dedicaron su tiempo y esfuerzo para enseñarme, y lo siguen haciendo hoy con sus estudiantes.

Finalmente, agradezco tener la oportunidad de realizar mis estudios en una universidad pública y gratuita, la Universidad Nacional de Córdoba.

Índice

Resumen	3
1. Introducción	11
1.1. Modelando la Dinámica Social: Una Introducción	11
1.2. Una Introducción a la Sociofísica	11
1.3. Modelos de Dinámica de Opinión	12
2. El Modelo de Sznajd	13
2.1. El Mapa Ideológico	13
2.2. Ley de Interacción: Modelo de Sznajd Bidimensional	14
2.3. Emergencia de la Tercera Posición	14
3. Condiciones Iniciales Aleatorias	17
3.1. Respuesta del Sistema en Función de la Apatía	17
3.2. Escala de Tamaño y Transición de Fase	18
3.3. Régimen de Alta Apatía	22
3.4. Desigualdad en la Adhesión Inicial	23
3.5. Análisis de Adhesión	26
4. Complejidad Estadística	29
4.1. Introducción a la Entropía y las Divergencias	29
4.2. Complejidad Estadística: Definición	30
4.3. Complejidad en las Diferencias de Adhesión	30
5. Condiciones Iniciales Estructuradas	35
5.1. Dimensión Fractal	35
5.2. Dimensión de Box-Counting	36
5.3. Generación de Patrones de Dimensión y Área Definida	36
5.4. Respuesta del Sistema en Función de la Dimensión	39
6. Modelo Teórico: Ecuación Maestra	43
6.1. Derivación	43
6.2. Aproximación de Campo Medio	43
6.3. Comprobación Numérica	45
Conclusiones	47
Trabajos Futuros	48
A. Apéndice: Detalles de la Implementación	49
B. Apéndice: Consecuencias del Colapso de las Curvas	51
C. Apéndice: Algoritmo de Generación de Patrones Fractales	53
Bibliografía	56

1. Introducción

1.1. Modelando la Dinámica Social: Una Introducción

La idea de que las opiniones que tenemos, y las acciones que realizamos, son producto de nuestro juicio y no están determinadas por el ambiente que nos rodea, es muy habitual. Sin embargo, diferentes estudios demuestran que nuestra toma de decisiones está más condicionada de lo que nos gustaría creer, debido a la presión de grupo [1] o a la autoridad, incluso cuando esas decisiones contradicen nuestras creencias [2]. Para profundizar en los trabajos paradigmáticos de científicos sociales en el tópico, se remite al lector al trabajo *Opinion Dynamics: A Multidisciplinary Review and Perspective on Future Research* [3] (en particular la sección *The Disciplinary Origin of Opinion Dynamics*).

Si bien la independencia individual en la toma de decisiones es un debate abierto, no se puede negar que al considerar grupos de individuos numerosos, y cómo se relacionan, se encuentran patrones que dan indicios de su comportamiento. Cuando se estudian estadísticamente, las sociedades revelan estructuras y tendencias, que pueden ser modeladas exitosamente.

Cuando conforman grandes agrupaciones, los individuos tienden a organizarse, y los fenómenos que emergen de esa organización pueden llegar a tener un comportamiento de naturaleza completamente distinta al de un individuo. Este carácter macroscópico de los comportamientos colectivos hace posible su estudio estadístico, incluso si no se puede predecir cómo actúa cada individuo en particular.

Sin embargo, uno debe abordar la capacidad predictiva de estos modelos con expectativas realistas. En las ciencias naturales, son usuales los sistemas deterministas, en los cuales los modelos son validados si logran predecir su comportamiento con gran precisión. No es apropiado considerar los modelos sociales bajo el mismo estándar. El valor de los modelos sociales estadísticos suele recaer en su utilidad para comprobar y explicar relaciones de causa y efecto, en lugar de su poder predictivo [4]. Cuando se construyen modelos con el propósito de realizar predicciones, éstas son más cercanas a las predicciones de los procesos estocásticos, como la probabilidad de ocurrencia de un escenario frente a otro.

Modelar la dinámica social es importante porque nos ayuda a entender mejor la interacción de grupos de individuos y el proceso de toma de decisiones. Este entendimiento tiene aplicaciones, como mejorar la eficiencia para organizar una multitud, diseñar espacios de discusión más efectivos y reducir la transmisión de la desinformación. Estos modelos son una herramienta poderosa para entender la complejidad del comportamiento humano y cómo se relaciona con sus pares. Aún así, no son perfectos y no pueden capturar completamente la complejidad de la dinámica social, por lo que es importante usarlos como una herramienta para complementar el entendimiento social estándar.

1.2. Una Introducción a la Sociofísica

Un concepto muy familiar para investigadores en casi cualquier área de la Física (y quizás en las Ciencias Naturales), es que existen leyes de origen estadístico que merecen ser estudiadas. El éxito de la Física Estadística para estudiar dichas leyes, y su marco conceptual general, condujo a una tendencia de aplicación de esta disciplina en un diverso número de campos interdisciplinarios, como la Biología, la Medicina, la Economía, la Ciencia Computacional, y la Sociología.

Además, impulsada por el desarrollo de las simulaciones computacionales en las últimas décadas, la Física avanzó también en el estudio de sistemas caracterizados por tener múltiples componentes y una interacción entre ellas que dan lugar a fenómenos emergentes colectivos. Las sociedades y su unidad fundamental, el individuo, son un ejemplo de tales sistemas, denominados *Sistemas Complejos*.

Estos avances dieron lugar al surgimiento de una rama de la Física Interdisciplinaria, la *Sociofísica* [3, 5], enfocada en el estudio y la descripción cuantitativa de la dinámica de los sistemas sociales, empleando generalmente, las herramientas y métodos que brinda la Física Estadística.

Es importante destacar que, en la Física y en las Ciencias Naturales, se valora la formulación matemática cuantitativa de las teorías y sólo se considera la formulación cualitativa para argumentar en una etapa preliminar, la explicación teórica del fenómeno. Por el contrario, la mayoría de la Ciencias Sociales, a excepción de la Economía, se concentra y prefiere la descripción cualitativa de los sistemas sociales, muchas veces argumentando que son muy complejos para la descripción cuantitativa (punto que se discutirá más adelante). Sin embargo, ambas perspectivas pueden enriquecerse mutuamente con la cooperación interdisciplinaria.

En sus comienzos, las descripciones de sistemas sociales en términos de «física social» solían ser analogías directas y comparaciones de modelos físicos con comportamientos sociales, a menudo incluyendo interpretaciones de cantidades físicas como la presión y la temperatura a fenómenos del comportamiento humano, las

cuales fueron criticadas por revelar poco acerca de la dinámica social que intentaban explicar [6]. El enfoque actual reside en formular los modelos a estudiar, teniendo en cuenta los conceptos principales de los sistemas sociales como fundamento [7].

La Sociofísica usualmente enfrenta dos grandes críticas, que suelen estar bien fundadas. Por parte de las Ciencias Sociales, se argumenta que los modelos usados por los físicos para describir sistemas sociales son muy reduccionistas y simplificados para explicar cualquier situación social real. Esta crítica también se aplica a modelos exitosos introducidos por científicos sociales como el modelo de Axelrod para la diseminación cultural [8] y el modelo de Schelling para la segregación social [9]. Pero en este sentido, la Física Estadística provee una perspectiva valiosa. En la mayoría de las situaciones, las propiedades cualitativas (y a veces cuantitativas) a gran escala de los fenómenos colectivos no depende de los detalles microscópicos del proceso, y sólo algunos parámetros y características son relevantes para entender el comportamiento global del sistema.

Los modelos simples no buscan replicar la realidad en gran detalle, si no dar indicios de cuáles son los mecanismos principales que impulsan el comportamiento del sistema. La simplicidad de los modelos permite sacar conclusiones más certeras acerca de la causa principal de los fenómenos observados.

Por parte de las Ciencias Naturales, se critica la falta de verificación empírica de los modelos. La comprobación empírica ha sido un gran problema para los estudios sociales en general, debido a la imposibilidad de estudiar fenómenos que involucran grupos muy numerosos de individuos. Sin embargo, la reciente disponibilidad de grandes conjuntos de datos, recopilados y manipulados por la creciente capacidad de cómputo de los ordenadores, ha logrado que estos estudios empíricos sean posibles. Como un ejemplo, para modelos de dinámica de opinión, el fenómeno más conveniente del cual se pueden extraer datos empíricos son las elecciones. Simulaciones realizadas con el modelo de Sznajd (que será explicado más adelante) cumplen características encontradas en elecciones reales [10].

Entre las áreas de estudio de la Sociofísica se encuentra la dinámica cultural, la dinámica de las multitudes, el tráfico, las comunidades y redes sociales, la formación de jerarquías, la propagación de rumores, la dinámica del lenguaje, la migración, el crimen, la propagación del pánico, la dinámica urbana y la dinámica de opinión (que será el objeto de estudio de este trabajo) [5] [11].

1.3. Modelos de Dinámica de Opinión

Dentro de la Sociofísica, una de las herramientas más exitosas es el Modelado Basado en Agentes (ABM *Agent Based Modelling*), debido a que proporciona un banco de pruebas ideal para derivar implicaciones comprobables para la dinámica macroscópica social [12]. La idea consiste en simular las partes individuales del sistema (denominadas agentes) y sus interacciones en paralelo, para extraer información acerca del comportamiento del sistema como un todo.

Los modelos de dinámica de opinión son un ejemplo de ABM, que tratan de definir los estados de opinión de la población y los procesos elementales que producen transiciones entre estos estados. La opinión pasa a ser una variable o conjunto de variables matemáticas y los agentes poseen una interacción entre ellos que define la evolución del estado de opinión.

En la mayoría de los casos, se estudian modelos de opinión binaria, en los cuales la opinión es discreta y sólo puede adoptar dos valores. Este enfoque puede parecer reduccionista, dada lo compleja que puede ser la posición ideológica de una persona. Sin embargo, en la práctica, esta restricción puede ser establecida de todos modos, debido a la necesidad de formar un consenso para aceptar o rechazar una propuesta o la necesidad de elegir entre dos opciones presentadas [13]. No obstante, los modelos de dinámica de opinión continua también son estudiados [14].

La interacción entre agentes en estos modelos suele cambiar su estado de opinión para hacerlos más parecidos. Este efecto suele ser denominado *influencia social* (también *validación social*) [15], aunque podrían haber más mecanismos sociales incorporados en la interacción.

Estos modelos suelen tener mecanismos estocásticos, como la probabilidad de interacción entre agentes, o la probabilidad de que un agente dado cambie su opinión. Esto produce que la evolución del sistema sea distinta en cada realización incluso con la misma condición inicial. También es usual agregar ruido externo al sistema, para considerar cualquier posible interacción social de menor impacto, pero presente, que no haya sido considerada, además de la propia idiosincrasia de los agentes [16].

Además, el modelo podría contener parámetros propios, como el tamaño del sistema, la probabilidad de la interacción o su intensidad, y pueden ser ajustados para estudiar diferentes escenarios.

Existen diversos fenómenos que se pueden estudiar en dinámica de opinión, algunos de ellos son: la toma de decisiones colectiva, la propagación y supervivencia de las opiniones minoritarias, la emergencia de modas y tendencias, la posibilidad y formación del consenso, la emergencia de partidos políticos y la emergencia del extremismo político.

2. El Modelo de Sznajd

En esta sección discutimos el modelo de dinámica de opinión que se utiliza en este trabajo, el modelo de Sznajd. El modelo describe cómo los agentes interactúan entre sí, y cómo cambian sus opiniones como consecuencia de esas interacciones. Se basa en un mecanismo de influencia social [17] en el que los individuos son más propensos a adoptar una posición si ésta está presente en sus vecinos inmediatos.

2.1. El Mapa Ideológico

Consideremos una comunidad en la que tiene lugar una competencia entre dos posiciones ideológicas, u opciones distintas. Una descripción de este escenario se puede llevar a cabo a través de un *mapa ideológico*, que puede tener diversas formas topológicas, como redes complejas, redes cúbicas, o en nuestro caso una red cuadrada, que consiste en una grilla en la que cada punto representa una posición o una opción asociada a un agente o a un grupo de personas.

Matemáticamente este mapa se expresa mediante una matriz cuadrada M de $N = L \times L$ elementos, en la que el elemento M_{ij} representa la opinión o posición ideológica del agente situado en (i, j) . Cabe destacar que esta matriz no representa un espacio geográfico o físico.

Suponemos que inicialmente, cada uno de estos agentes puede tener una de tres posiciones ideológicas diferentes: adherentes a alguna de las dos posiciones, que podríamos denotar «Celeste» y «Amarilla», y una tercera posición neutral, constituida por agentes que nunca cambian su opinión. Los agentes con posición neutral no cambian el estado del sistema, esto es, no evolucionan dinámicamente, y representan la apatía social de la comunidad, por lo que se denominan *agentes apáticos*. Por otro lado, el resto de agentes tiene una participación activa en el mapa ideológico, por lo que los denominamos *agentes activos*. También se denomina *apatía* (A) a la proporción de agentes apáticos respecto a la cantidad total de agentes. La apatía es un parámetro que puede tomar valores en el rango $0 \leq A \leq 1$, donde $A = 0$ indica una participación completa de la comunidad. Un valor de A cercano a 1 representa una fuerte apatía del sistema.

En una primera parte de este trabajo, suponemos condiciones iniciales aleatorias, esto es, las posiciones ideológicas están distribuidas al azar en el mapa ideológico, como se muestra en la figura 2.1. Más adelante consideraremos condiciones iniciales estructuradas en patrones jerárquicamente organizados.

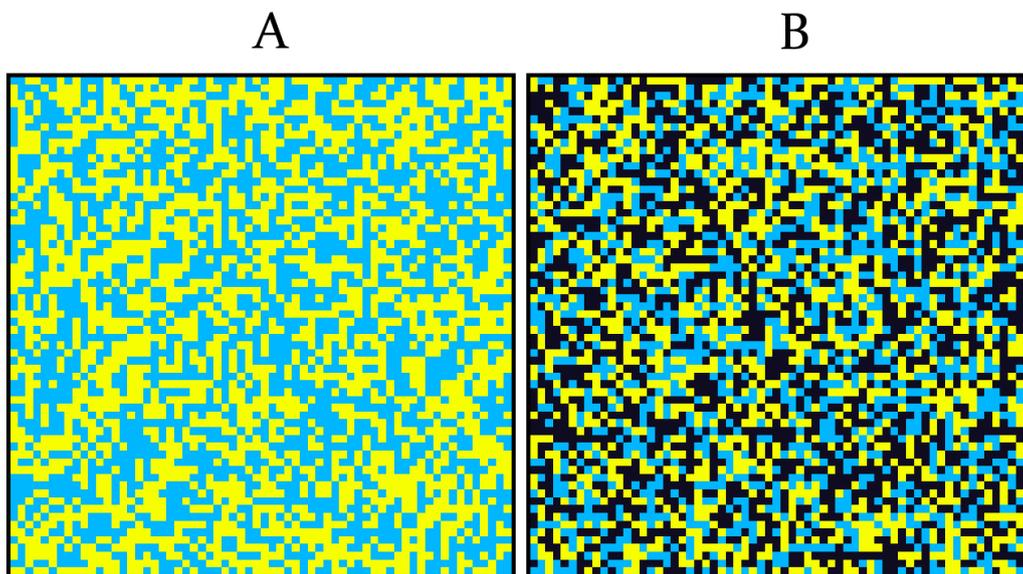


Figura 2.1: A: Mapa ideológico de tamaño $L = 64$ para una distribución inicial aleatoria, con igual proporción de adherentes a ambas posiciones ideológicas y apatía nula. B: Mapa ideológico $L = 64$ para una distribución inicial aleatoria, con igual proporción de adherentes a ambas posiciones y apatía igual a 0,5.

2.2. Ley de Interacción: Modelo de Sznajd Bidimensional

Hasta ahora no mencionamos la interacción entre agentes, que busca captar o modelar cómo se debaten las ideas en una comunidad. Proponemos una interacción considerando el *modelo de Sznajd* [18] que fue originalmente propuesto para una cadena unidimensional de agentes, y existen varias formas de extenderlo a dos dimensiones [19].

En este trabajo se considera la siguiente generalización al modelo:

Al tiempo $t + \Delta t$ un sitio (i, j) al azar es seleccionado para actualizar su posición. Si el agente en ese sitio es activo, su posición ideológica cambiará de acuerdo a:

$$M_{ij}(t + \Delta t) = M_{\bar{i}, \bar{j}}(t) \quad (\text{E 2.1})$$

Donde (\bar{i}, \bar{j}) es un *segundo vecino* aleatorio de (i, j) y $M_{\bar{i}, \bar{j}}$ es activo.

Definimos el segundo vecino de la siguiente manera: para un agente en el sitio (i, j) , habrá un sitio *primer vecino* activo (n, m) , cuya distancia euclídea es la mínima posible.

$$\sqrt{(n-i)^2 + (m-j)^2} = 1 \quad (\text{E 2.2})$$

El sitio (n, m) también tendrá primeros vecinos activos, en particular si uno de ellos (\bar{i}, \bar{j}) cumple:

$$(i, j) \neq (\bar{i}, \bar{j}) \quad (\text{E 2.3})$$

Entonces (\bar{i}, \bar{j}) es un segundo vecino de (i, j) .

Consideramos además, condiciones de contorno cerradas, es decir que las opiniones en la frontera no tienen interacción con medios externos de la red. Recordamos una vez más que el mapa ideológico no es un espacio físico sino que representa una manera de caracterizar la posición o criterio en torno a un debate, y determina cuáles agentes interactúan entre sí y cuáles no.

2.3. Emergencia de la Tercera Posición

A medida que transcurre el tiempo, el sistema evoluciona hacia un estado estacionario. Dicho estado consiste en una combinación de tres patrones de equilibrio que son localmente invariantes ante la aplicación de la regla de Sznajd. La figura 2.2 ilustra un ejemplo de esta situación. Dos de los patrones representan el consenso local de alguna de las posiciones inicialmente presentadas. El tercer patrón, está formado por agentes de ambas posiciones intercalados (como en un tablero de ajedrez) que puede ser visto alternativamente como una nueva, tercera posición, que emerge de la presencia de las otras dos. Denotamos esta última posición como «Verde», la figura 2.3 muestra los tres patrones de equilibrio. En el Apéndice A se puede ver una definición detallada de la posición Verde y del estado estacionario, con énfasis en la implementación numérica.

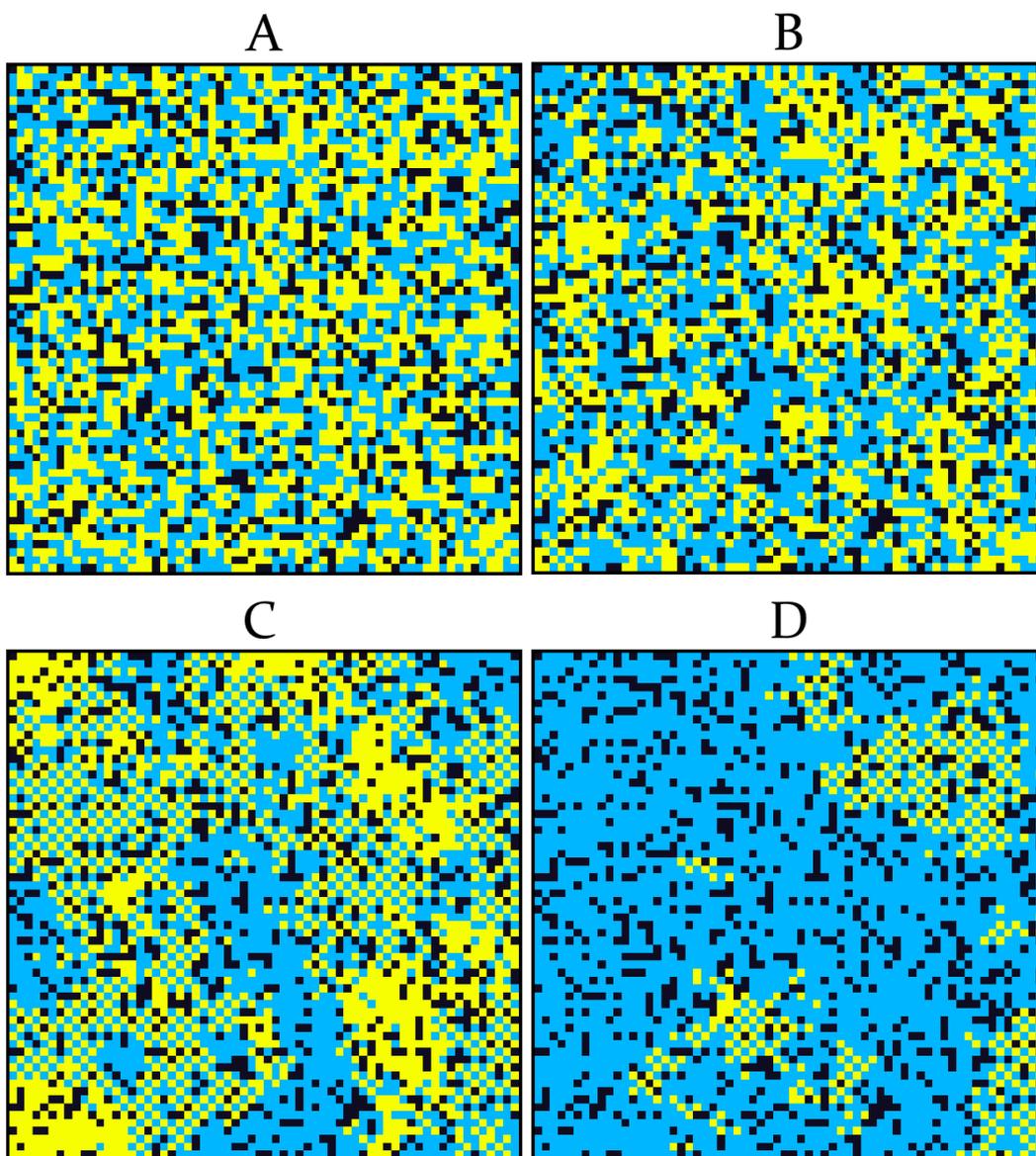


Figura 2.2: Evolución temporal del mapa ideológico $L = 64$. A: Condición inicial, apatía igual a 0,2. B: Mismo mapa ideológico, luego de 10^3 iteraciones. C: Mapa ideológico, luego de 5×10^5 iteraciones. D: Mapa ideológico en el equilibrio, luego de 10^6 iteraciones.

En el modelo de Sznajd, los patrones que representan el consenso se forman porque los agentes copian el estado de sus vecinos, imitando el mecanismo de influencia social, mientras que la emergencia de una tercera posición puede ser el resultado de una disconformidad con las dos posiciones preestablecidas. Es importante destacar que la emergencia de la tercera posición resulta pura y exclusivamente de la dinámica de interacción propuesta, la cual es a segundos vecinos. En otras palabras, la identificación del patrón emergente es resultado de ley de interacción y su conformación topológica en el mapa ideológico. En este trabajo no consideramos una identidad propia de la posición emergente, esto es, la interacción de cada agente dentro de la estructura de tablero de ajedrez en la dinámica del sistema sigue siendo la inicial, es decir, interactúa como Celeste o Amarillo. La característica dinámica propia de la posición emergente como tal quedará para otra etapa de estudio y no fue abordada en el presente trabajo.

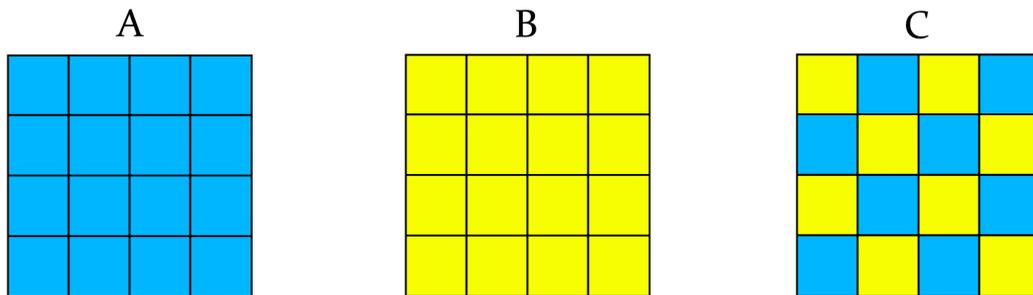


Figura 2.3: Patrones invariantes ante la aplicación de la regla de Sznajd. A: Consenso de la posición Celeste. B: Consenso de la posición Amarilla. C: Posición emergente Verde.

3. Condiciones Iniciales Aleatorias

En el estado estacionario, una de las tres posiciones activas termina con una mayor cantidad de adherentes, es decir si realizamos un conteo o una *elección*, una de estas posiciones gana. Consideremos condiciones iniciales aleatorias para las posiciones Celeste y Amarilla (con igual adherencia, es decir, la cantidad de agentes que inicialmente tienen la posición celeste es igual a la cantidad de agentes con posición amarilla) y también para la apatía. Esto significa que se distribuyen aleatoriamente los sitios activos para llegar a la proporción de apatía fijada, y en éstos se distribuye la posición Celeste o Amarillo con probabilidad $1/2$.

3.1. Respuesta del Sistema en Función de la Apatía

Con el propósito de estudiar la evolución del sistema, hemos llevado adelante distintas simulaciones numéricas, cuyos resultados se exponen en distintas gráficas.

Estamos interesados en estudiar la probabilidad de que una idea dentro del debate se imponga sobre las demás. Nos interesa saber cómo se impone una dada idea en función de la cantidad de participantes o agentes activos en el mapa ideológico. Por lo tanto, elegimos la apatía A como parámetro de control del sistema.

Por razones que quedarán más claras más adelante en este trabajo (Sección 5.3), el tamaño elegido del sistema es $L = 64$ (A menos que se indique lo contrario). Además, los observables mostrados son el resultado de promediar sobre 2000 realizaciones.

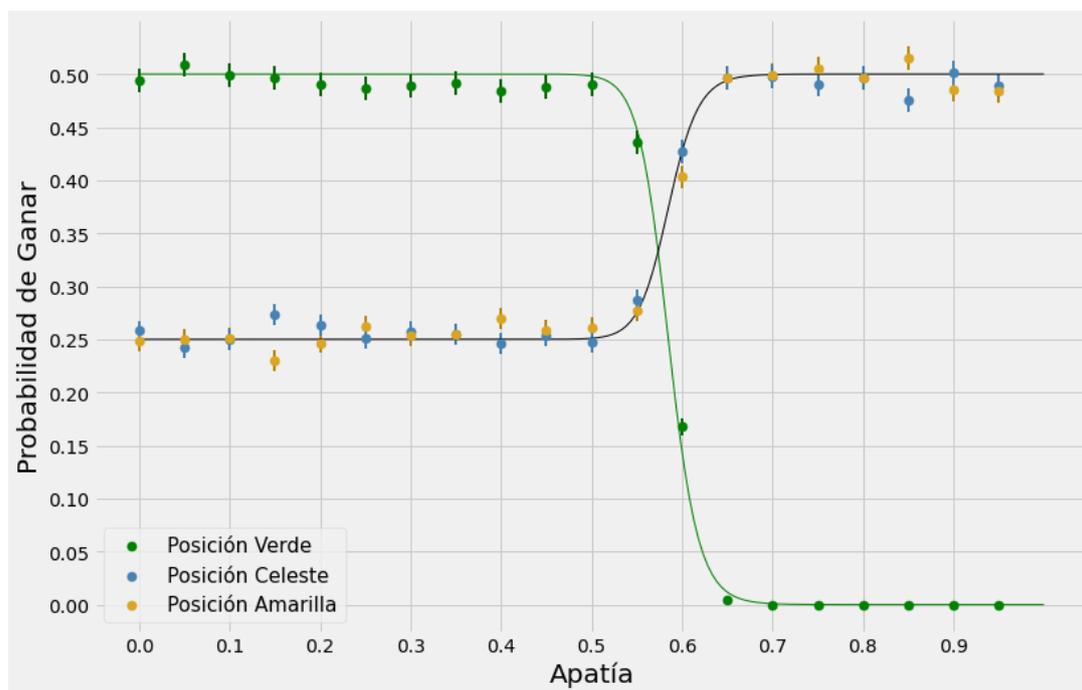


Figura 3.1: Probabilidad de ganar en función de la apatía para cada posición. Las curvas son ajustes no lineales de los datos.

La figura 3.1 muestra las probabilidades de ganar de las tres posiciones activas, Celeste, Amarilla y Verde, en función de la apatía. De esta figura se observa que el sistema tiene dos regímenes bien definidos: para apatías menores a un valor crítico¹, en donde las posiciones Amarilla y Celeste ganan con probabilidad $1/4$ y la posición Verde gana con de probabilidad $1/2$, mientras que para apatías mayores al valor crítico, las posiciones Amarilla y Celeste ganan con un probabilidad $1/2$ y la posición Verde no gana. Existe además una región de transición entre los regímenes, en donde el sistema muestra el mayor cambio de respuesta frente a un cambio de apatía.

Además de la figura se infiere que las probabilidades de ganar para las posiciones Amarillas y Celestes coinciden para cualquier apatía. Esto es esperable, dado que inicialmente las adhesiones a ambas posiciones son iguales y el modelo de Sznajd es simétrico ante la inversión de estas posiciones (no favorece una por sobre la otra).

¹Este valor es de $0,58(3)$ y se determinó con el ajuste.

Los datos obtenidos por las simulaciones fueron ajustados con la siguiente fórmula:

$$P(A) = p_1 + \frac{p_0 - p_1}{1 + (A/A_{crit})^q} \quad (E 3.4)$$

Este resultado reproduce lo encontrado por Gaudiano et al. (2019) [20].

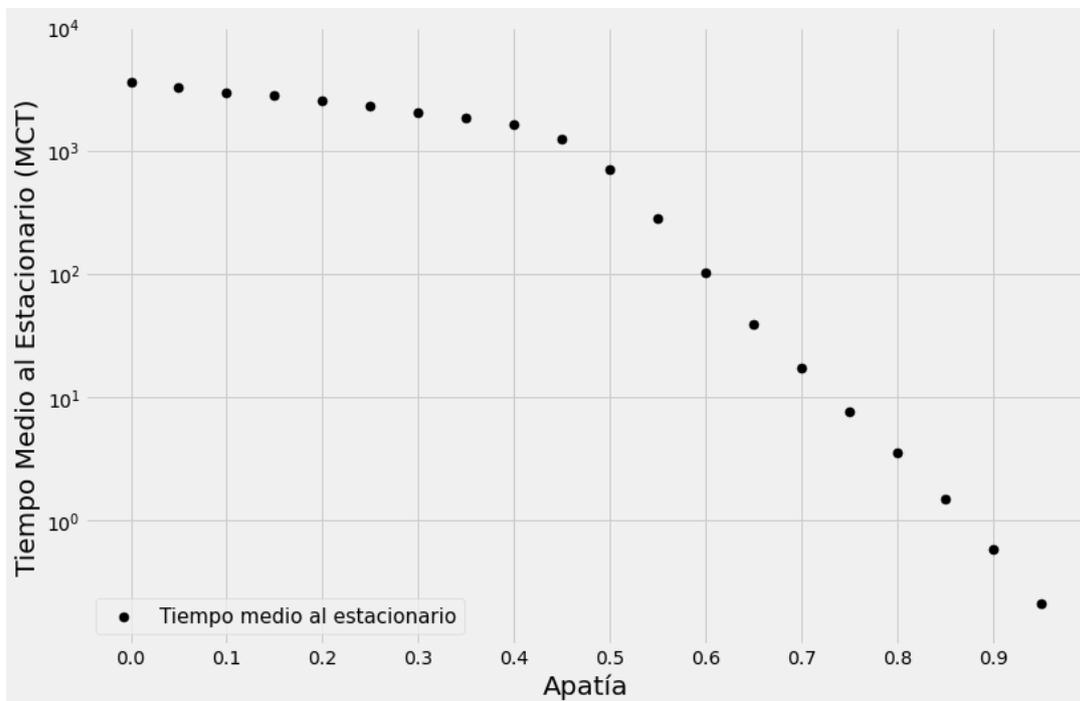


Figura 3.2: Tiempo medio al estacionario (medido en tiempo de Monte Carlo) en función de la apatía. Las barras de error son más pequeñas que los símbolos.

En la figura 3.2 se muestra el tiempo medio de convergencia al estado estacionario en función de la apatía, en tiempo de Monte Carlo (MCT *Monte Carlo Time*) que se define como $N = L^2$ iteraciones. Poniendo el tiempo en escala logarítmica, se puede observar un cambio de comportamiento alrededor de $A = 0,5$, caracterizado por la diferencia de la pendiente con la que decrece el tiempo medio al estacionario con la apatía. Esto indica que, si bien el tiempo al estacionario escala exponencialmente con el número de sitios activos, no lo hace siempre al mismo ritmo.

Para apatías mayores al valor crítico el tiempo al estacionario crece más rápido que para apatías menores a tal valor.

3.2. Escala de Tamaño y Transición de Fase

Las figuras 3.1 y 3.2 muestran fuertes indicios de que la dinámica del sistema presenta dos tipos de comportamiento distintos. Para valores de apatía menores a $A = 0,5$ aproximadamente, el posición emergente Verde tiene la mayor probabilidad de ganar, mientras que los otras dos posiciones poseen una probabilidad de ganar menor. Por el contrario, para valores de apatía mayores a $A = 0,5$ la probabilidad de ganar de la posición emergente se desvanece, repartiéndose en partes iguales a las posiciones Celeste y Amarilla. Este hecho de algún modo define dos regímenes, uno de baja apatía (valores de A menor a 0,5) y otro régimen de altas apatías (valores de A mayor a 0,5). Por otro lado, también se observa cambio abrupto en la respuesta del sistema, es decir, existe un cambio en las probabilidades de ganar significativo.

Uno podría sin embargo preguntarse cuán abrupta es esta transición, es decir si hay discontinuidades, o si la transición es suave. Para ser más precisos, queremos saber si el sistema sufre una transición de fase de primer orden en un valor crítico de la apatía.

Es necesario, por lo tanto, investigar cómo se comporta el sistema cuando escala su tamaño. Esto se debe a que los sistemas que presentan transiciones de fase de primer orden (como el Modelo de Ising, o Teoría de Percolación), en el que sus observables deberían presentar discontinuidades características de estas transiciones, en su lugar, varían continuamente en las simulaciones computacionales. Asimismo, sus susceptibilidades

deberían mostrar una divergencia en la región crítica, pero solo muestran picos de cierta altura. Esto se debe a efectos de tamaño finito [21], dado que el sistema que se simula tiene un tamaño mucho menor que el sistema de tamaño termodinámico (orden de magnitud cercano a $N \approx 10^{20}$).

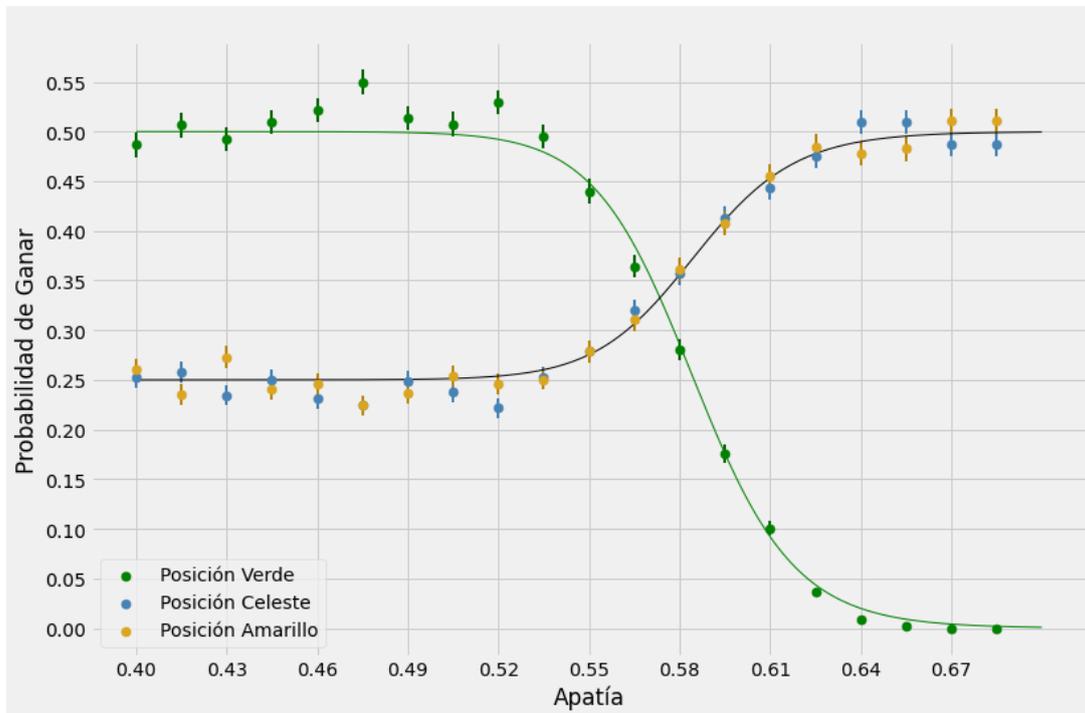


Figura 3.3: Probabilidad de ganar en función de la apatía para cada posición, para apatías cercanas a la apatía crítica. Las curvas son ajustes no lineales de los datos.

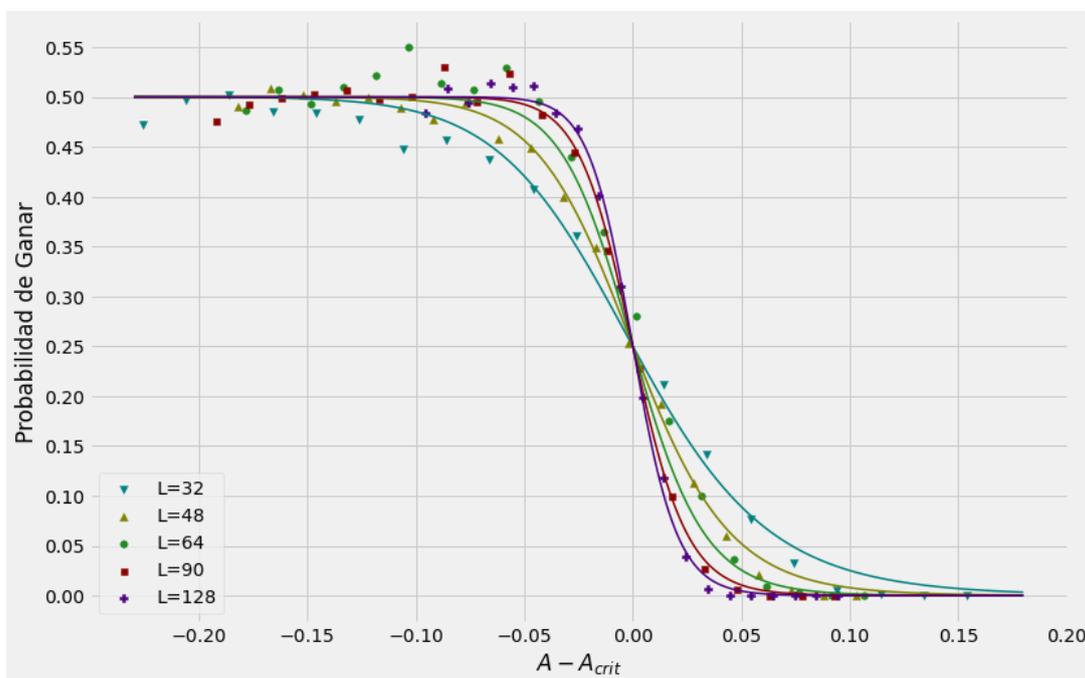


Figura 3.4: Probabilidad de ganar de la posición Verde vs. $(A - A_{crit})$ para distintos tamaños del sistema. Las curvas son ajustes no lineales de los datos. Por claridad, en la figura no se muestran las barras de error en los datos.

La figura 3.3 muestra que cerca de la apatía crítica ($A_{crit} = 0,58(3)$) la probabilidad varía continuamente. Esto podría ser un efecto de tamaño finito.

Para ver si el sistema tiene una transición de fase de primer orden para $L \rightarrow \infty$, estudiamos cómo escala el sistema con el tamaño L .

Como se observa en la figura 3.4 la curva de la probabilidad de ganar de la posición Verde en función de la apatía, tiene comportamientos distintos para distintos tamaños del sistema. La transición entre el régimen de baja apatía y el régimen de alta apatía es más abrupta para tamaños más grandes. Para cuantificar esta tendencia, realizamos un colapso de los datos a una única curva, que vemos en la figura 3.5

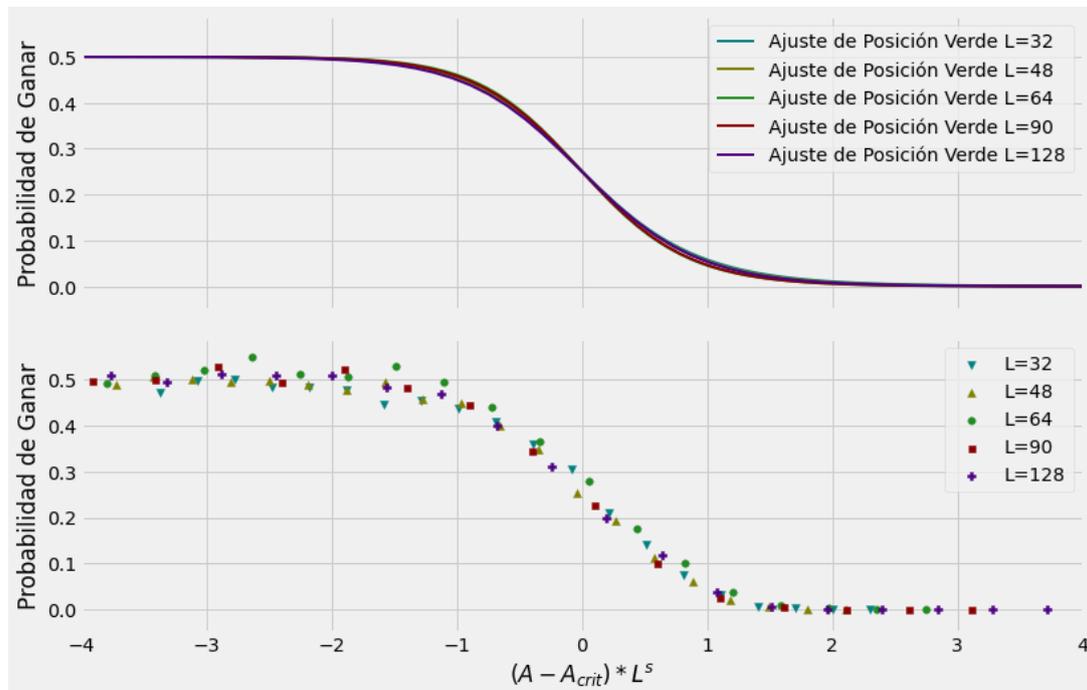


Figura 3.5: Abajo: Colapso de los datos de la Figura 3.4: probabilidad de ganar de la posición Verde vs. $(A - A_{crit})L^s$ con $s = 0,78(5)$. Arriba: Curvas de ajuste para los datos colapsados. Por claridad, en la figura no se muestran las barras de error en los datos

En el Apéndice B se muestra que, como consecuencia de este colapso, la derivada de la curva de probabilidad para la posición verde $P'(A)$ crece en valor con el tamaño proporcionalmente a L^s y el ancho característico de la transición decrece con el tamaño proporcionalmente a L^{-s} .

Esto significa que en el límite termodinámico $L \rightarrow \infty$, la probabilidad presenta una discontinuidad en la apatía crítica, por lo que el sistema presenta una transición de fase de primer orden. Sin embargo, uno debe ser cauteloso interpretando este resultado; los sistemas sociales tienen tamaños mucho menores que los sistemas típicos de estudio de la termodinámica y la mecánica estadística. Los efectos de tamaño finito podrían estar presentes incluso modelando grandes poblaciones.

No obstante, muchos sistemas sociales muestran una respuesta muy grande a pequeños eventos o cambios en sus parámetros [22]. Este modelo muestra grandes cambios para la probabilidad de ganar de la posición Verde cerca de la región crítica. Otros trabajos encontraron transiciones de fase similares (entre dos regímenes determinados) en el modelo de Sznajd [23] [24].

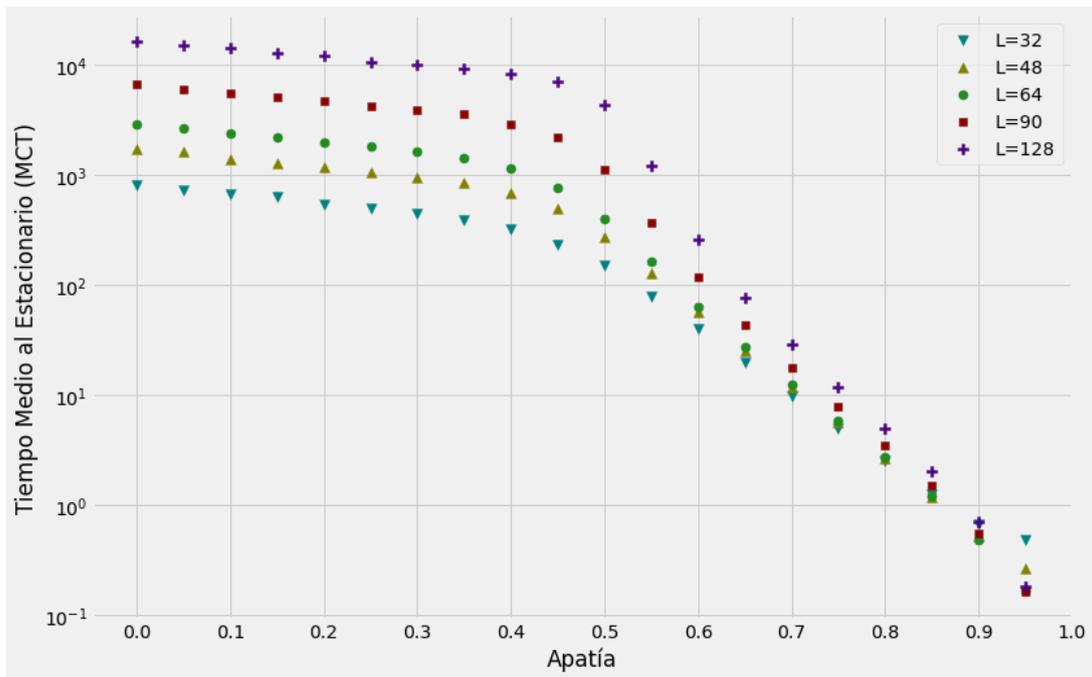


Figura 3.6: Tiempo medio al estacionario (MCT) en función de la apatía, para distintos tamaños del sistema. Se muestra el tiempo de Monte Carlo propio de cada tamaño.

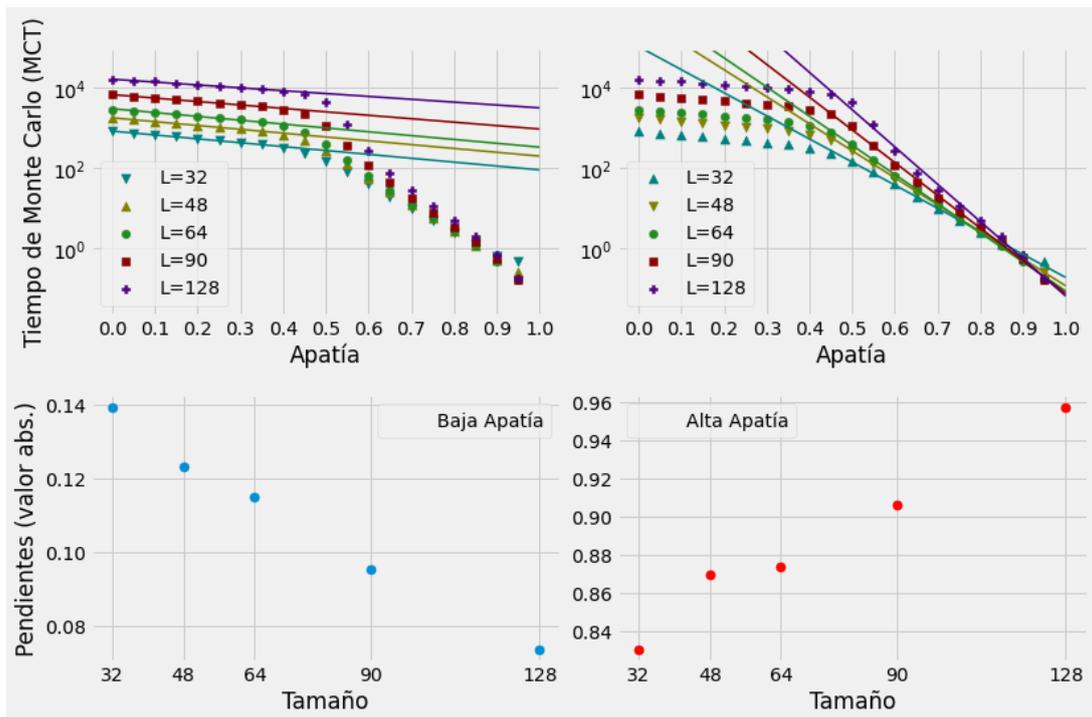


Figura 3.7: Arriba: Ajustes lineales de la figura 3.6 para baja (izquierda) y alta apatía (derecha). Abajo: Pendientes de los ajustes para baja (izquierda) y alta apatía (derecha) en función del tamaño del sistema.

El tiempo de convergencia al estado estacionario también depende del tamaño del sistema. La figura 3.6 muestra esta dependencia, medida en tiempo de Monte Carlo². Para todos los tamaños se ven dos regímenes (baja y alta apatía), con pendientes características distintas, pero además la figura 3.7 muestra que esas pendientes escalan de manera diferente para distintos tamaños del sistema. Las pendientes para baja apatía decrecen al aumentar el tamaño del sistema, mientras que las pendientes para alta apatía crecen con el tamaño del sistema. Esto refuerza la idea de que el sistema posee dos comportamientos completamente distintos en los regímenes de baja apatía y alta apatía.

3.3. Régimen de Alta Apatía

En la figura 3.1 se observa que la probabilidad de ganar para la posición Verde va a cero en la región de alta apatía. Esto sucede porque la apatía modela la topología de la red cuadrada y determina con cuáles agentes puede interactuar un dado individuo. La emergencia de la posición Verde es consecuencia del patrón organizado de sitios con estados individuales Celeste y Amarillo (figura 2.3) que se genera por la interacción a segundos vecinos del modelo. Así, al variar la topología de la red, se puede llegar a restringir la interacción y en casos extremos, anularla.

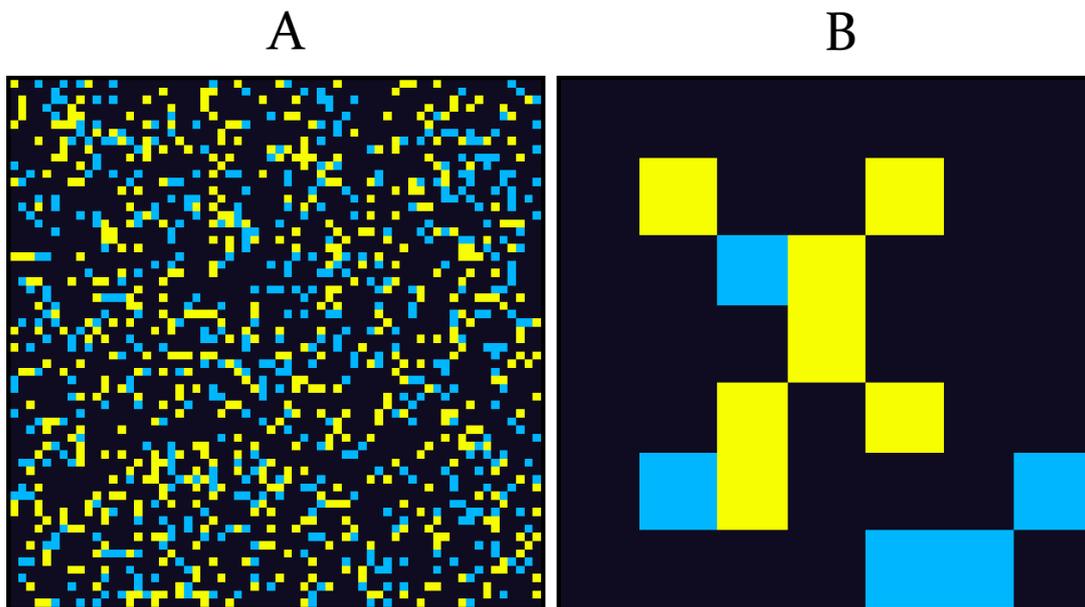


Figura 3.8: A: Mapa ideológico de tamaño $L = 64$ para una distribución inicial aleatoria, con igual proporción de adherentes a ambas posiciones y apatía igual a 0,75. B: Una sección del mapa ideológico en A. En esta configuración en particular de agentes activos, es imposible que se forme el patrón Verde.

Para que la posición Verde obtenga una cantidad mayoritaria de adherentes en el estado estacionario, es necesario que la red tenga una gran cantidad de conexiones. En la figura 3.8 se muestra un ejemplo de mapa ideológico con apatía igual a 0,75, y se observa que tiene muchas configuraciones de agentes activos desconectadas entre sí. En muchas de estas configuraciones no puede generarse el patrón que define a la posición Verde.

En este sentido, el mapa ideológico tiene una conectividad crítica, a partir de la cual, la emergencia de la posición Verde se ve tan limitada, que nunca adquiere adhesión mayoritaria. Por esta razón, la probabilidad de ganar de dicha posición decae a cero para apatías altas. Además, cuando la apatía es alta, el sistema evoluciona por un corto periodo de tiempo y el estado estacionario es muy similar a la condición inicial. Al aumentar la apatía aumenta la probabilidad de que se generen configuraciones que sean incapaces de evolucionar con la regla de interacción. Por lo que el sistema se *congela* y su estado está prácticamente dictado por la condición inicial.

Este tipo de condiciones iniciales y su evolución no representan una situación realista. Los individuos en una sociedad, tienden a agruparse de una manera particular y no aleatoria. Estudiaremos esta forma particular de conectarse al considerar condiciones iniciales estructuradas en la Sección 5.

²Se refiere al tiempo de Monte Carlo propio de cada tamaño, es decir, $N = L^2$ aplicaciones de la regla de Sznajd.

3.4. Desigualdad en la Adhesión Inicial

Hasta ahora consideramos adhesiones iguales para la posición Celeste y Amarilla en las condiciones iniciales aleatorias. Una inmediata generalización a este estado de cosas es considerar distintas adhesiones iniciales a dichas posiciones ideológicas. En tal caso, la simetría del sistema bajo la inversión de estas posiciones se rompe, y sus curvas de probabilidad de ganar en función de la apatía ya no coinciden.

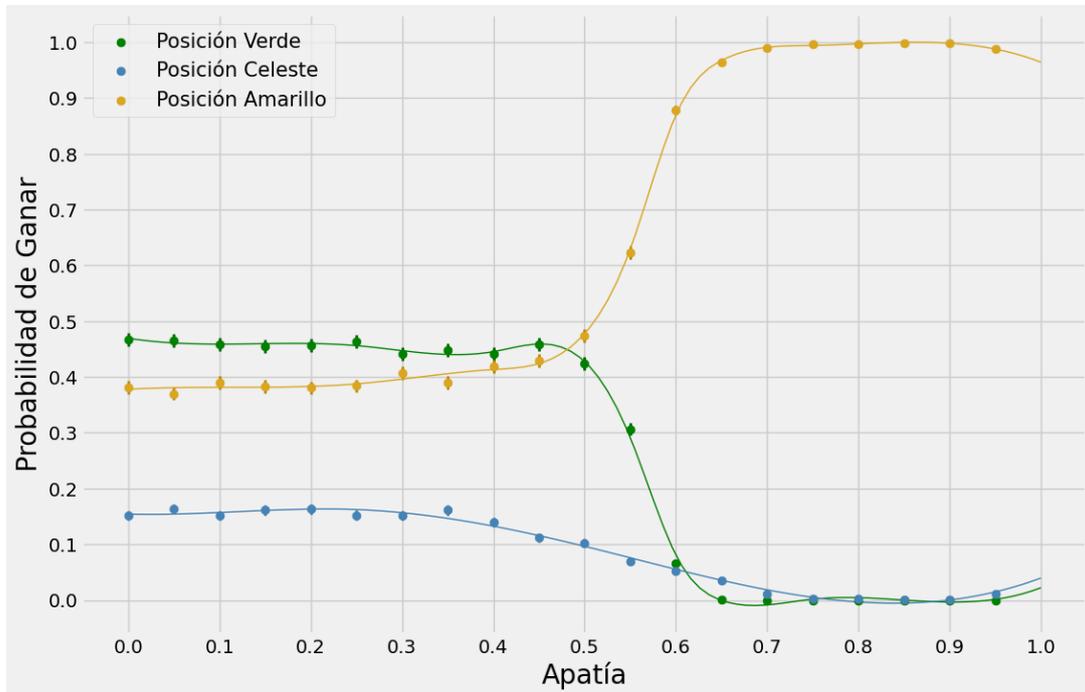


Figura 3.9: Probabilidad de ganar en función de la apatía para cada posición, para un porcentaje inicial Celeste del 40% y del 60% para el Amarillo. Las curvas sólo son guías y no son ajustes.

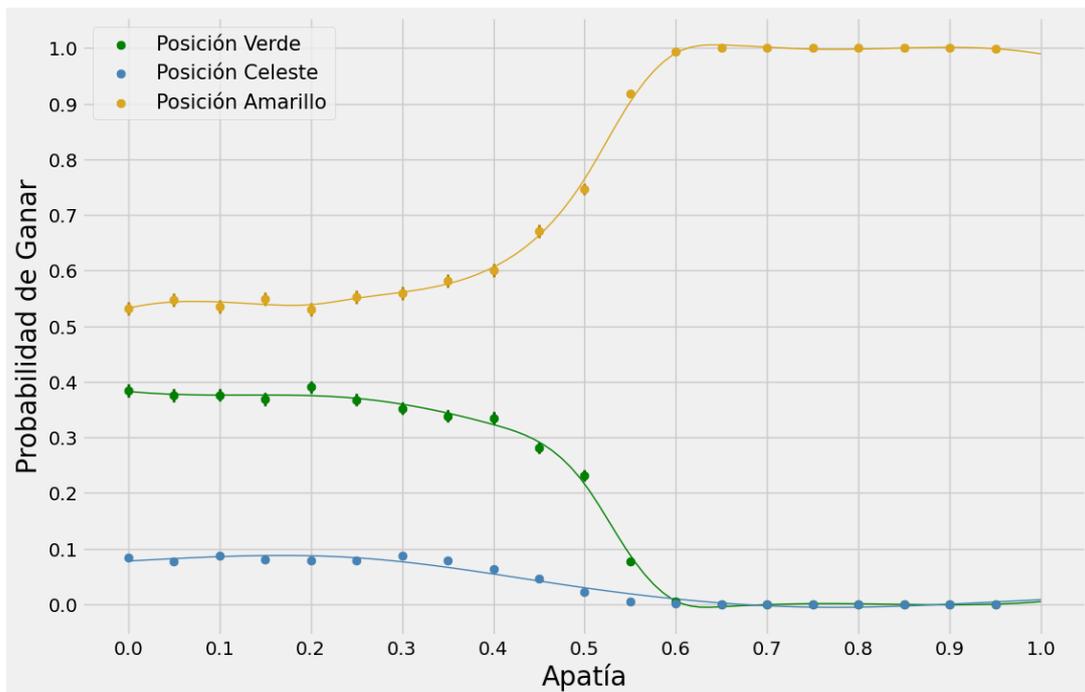


Figura 3.10: Probabilidad de ganar en función de la apatía para cada posición, para un porcentaje inicial Celeste del 30% y del 70% para el Amarillo. Las curvas sólo son guías y no son ajustes.

Las figuras 3.9 y 3.10 muestran la probabilidad de ganar de todas las posiciones en función de la apatía, para un porcentaje inicial de la posición Celeste del 40% y el 30% respectivamente. Nuevamente, se observan comportamientos muy distintos en los dos regímenes del sistema.

Para bajas apatías, la probabilidad de ganar de la posición Amarilla es ligeramente mayor que en el caso de adhesiones iguales, mientras que esta probabilidad disminuye ligeramente para la posición Celeste. Esto es esperable porque estamos beneficiando a la posición Amarilla con más adherentes iniciales. Para el caso de 30% de adhesión inicial a la posición Celeste, la posición Amarilla gana con mayor probabilidad incluso que la posición Verde, sobrepasando el 50%.

La probabilidad de ganar de la posición Verde también disminuye respecto al caso de adhesiones iguales, pero en menor medida. Como muestra la figura 3.11 la probabilidad de ganar de la posición verde disminuye si una de las posiciones tiene mayor adhesión inicialmente, por lo que es máxima en el caso de adhesiones iguales. Para el caso extremo en el que la adhesión inicial de una posición es cercana al 100%, la probabilidad de ganar de la posición verde decae a cero. Esta disminución se debe a que la emergencia de la posición Verde requiere la presencia e interacción de las otras dos posiciones. Si una tiene más adherentes que la otra, es más probable que la interacción entre ambas termine en el consenso de la posición de mayor adhesión.

Para altas apatías, la probabilidad de ganar de la posición Amarilla es muy cercana a 1 y la probabilidad de ganar de la posición Celeste es muy cercana a 0. Como mencionamos en la sección anterior, en el régimen de alta apatía, el sistema evoluciona por corto tiempo y el estado estacionario está prácticamente dictado por la condición inicial, por lo que incluso una pequeña ventaja en ésta ocasiona que la posición beneficiada gane casi siempre.

En las figuras 3.12 y 3.13 se observa la diferencia entre los dos regímenes con claridad: para bajas apatías, la probabilidad de ganar de las posiciones Celeste y Amarillas muestran un cambio gradual ante un cambio en la adhesión inicial, mientras que para altas apatías, el cambio es súbito.

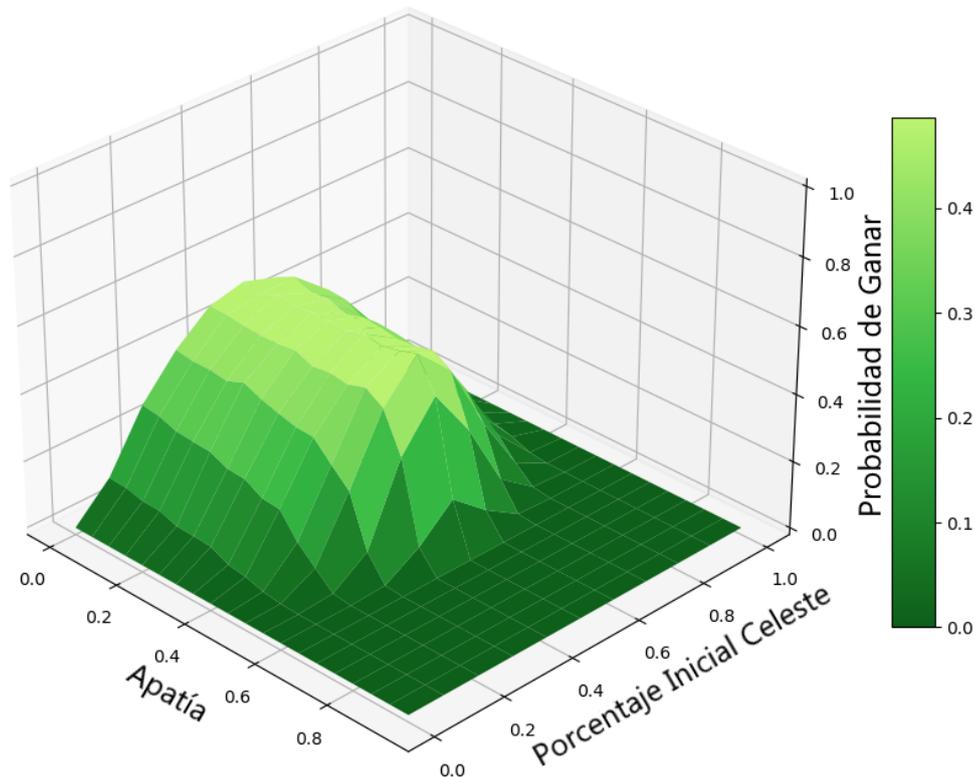


Figura 3.11: Probabilidad de ganar para la posición Verde en función de la apatía y la adhesión inicial de agentes celestes.

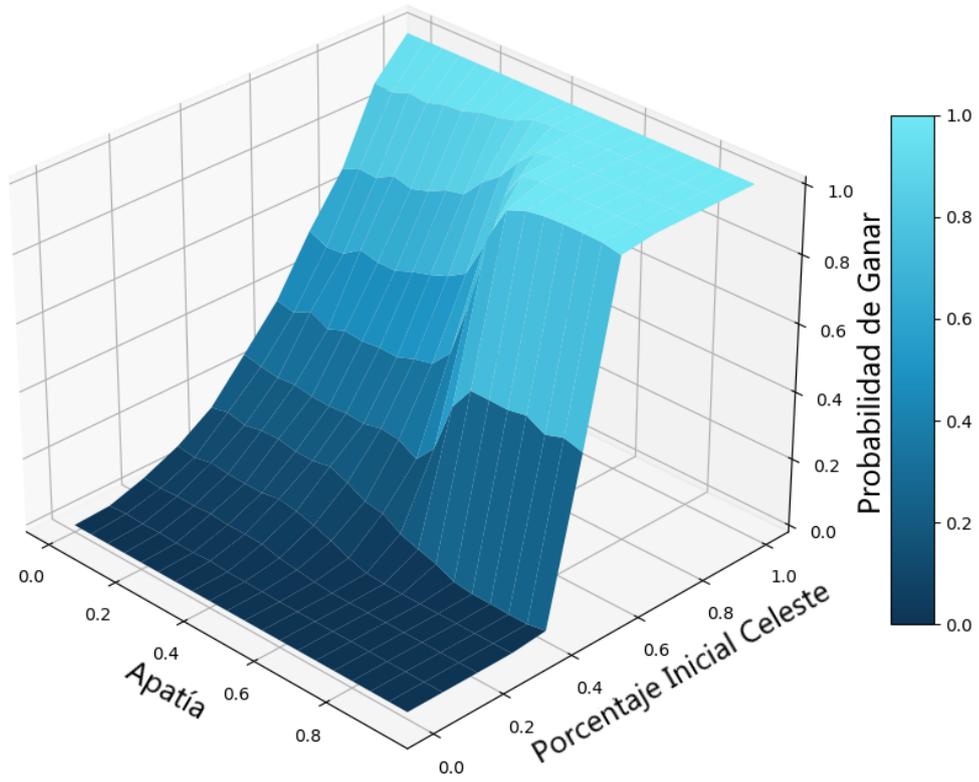


Figura 3.12: Probabilidad de ganar para la posición Celeste en función de la apatía y la adhesión inicial de agentes celestes.

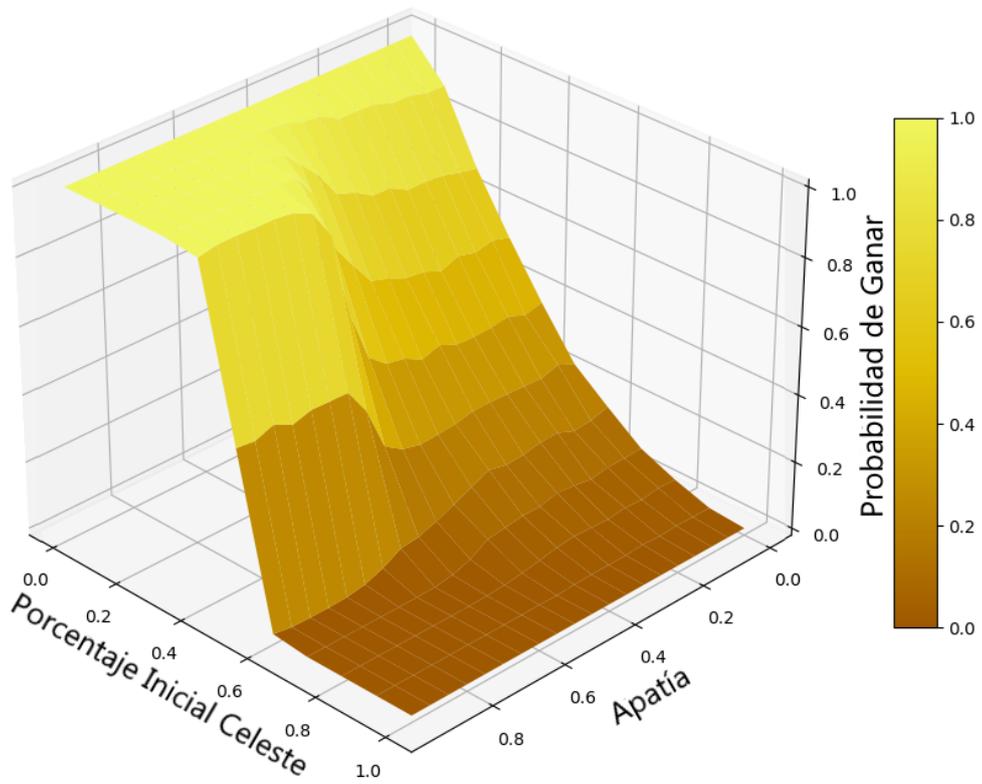


Figura 3.13: Probabilidad de ganar para la posición Amarilla en función de la apatía y la adhesión inicial de agentes celestes.

3.5. Análisis de Adhesión

Cuando en un grupo de personas existen posiciones en conflicto, pero se necesita tomar una decisión o llegar a un consenso, usualmente se elige la posición con más cantidad de adherentes. En ese sentido, la probabilidad de tener la mayor adhesión (ganar) de una posición es una información muy útil, pero no es lo único que importa. También puede ser valioso estudiar *por cuánto* gana una posición, es decir con qué adhesiones terminan todas las posiciones. Consideraremos sólo el caso de igual adhesión inicial entre las posiciones Amarilla y Celeste.

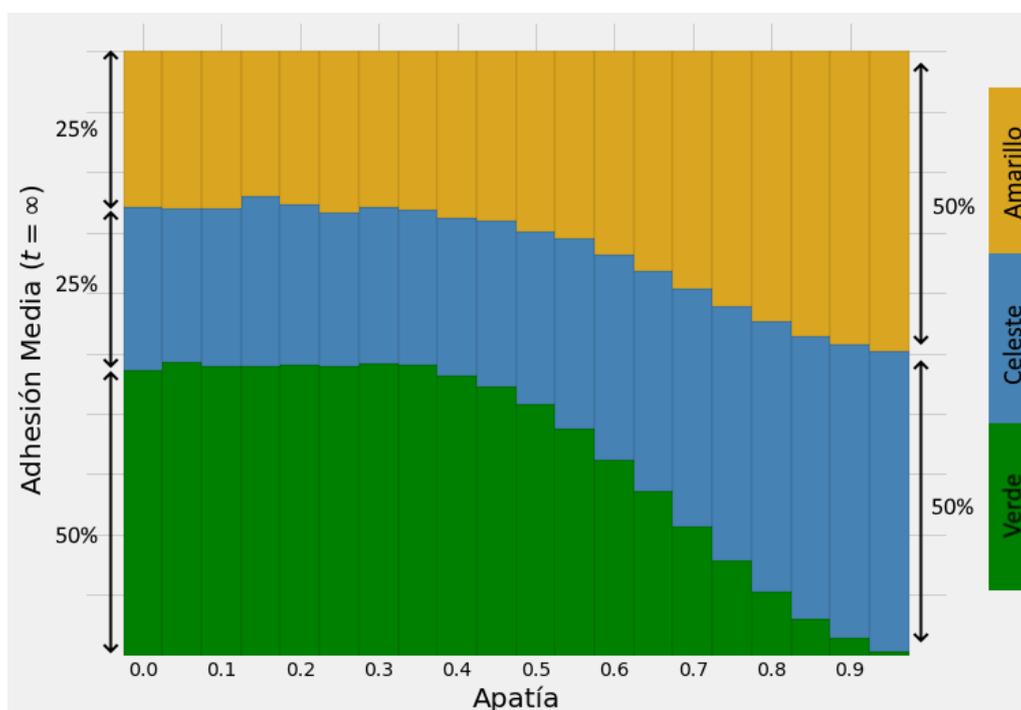


Figura 3.14: Adhesión media para las distintas posiciones, respecto al número total de agentes activos, para distintas apatías.

La cantidad total de agentes activos N_a depende de la apatía. Debido a esto, la cantidad de adherentes a cualquier posición será menor para apatías mayores. Para poder comparar distintos valores de apatía, hablaremos de *adhesión* n definida como el cociente de la cantidad de adherentes de alguna posición N_{pos} y número total de agentes activos.

$$n_{pos} = N_{pos}/N_a$$

La figura 3.14 muestra las adhesiones de cada posición en el estado estacionario. Observamos que la adhesión para las posiciones Amarilla y Celeste son iguales para toda apatía, lo cual es esperable porque el sistema es simétrico ante su intercambio. Si lo comparamos con la figura 3.1, se ve que si bien la probabilidad de ganar de la posición Verde decae rápidamente después del valor crítico de apatía, su adhesión no es nula, sino que deja de ser mayoritaria. Sin embargo, uno debe ser cuidadoso al interpretar la figura en términos estadísticos (por ejemplo, para apatía nula y en una dada realización en la que gana la posición Verde, ésta no necesariamente lo hará con adhesión $n_{verde} = 0,5$)

La figura 3.15 muestra qué adhesión media tiene la posición ganadora, la posición en segundo lugar y la posición en tercer lugar³, en función de la apatía. Se observa que, para apatía nula, en una realización se esperaría que la posición que gane, lo haga con adhesión $n = 0,9$, es decir, el ganador domina la elección.

³En una dada realización, la posición ganadora, en segundo lugar y en tercer lugar, están determinadas por sus adhesiones, sin importar si es Celeste, Verde, o Amarilla.

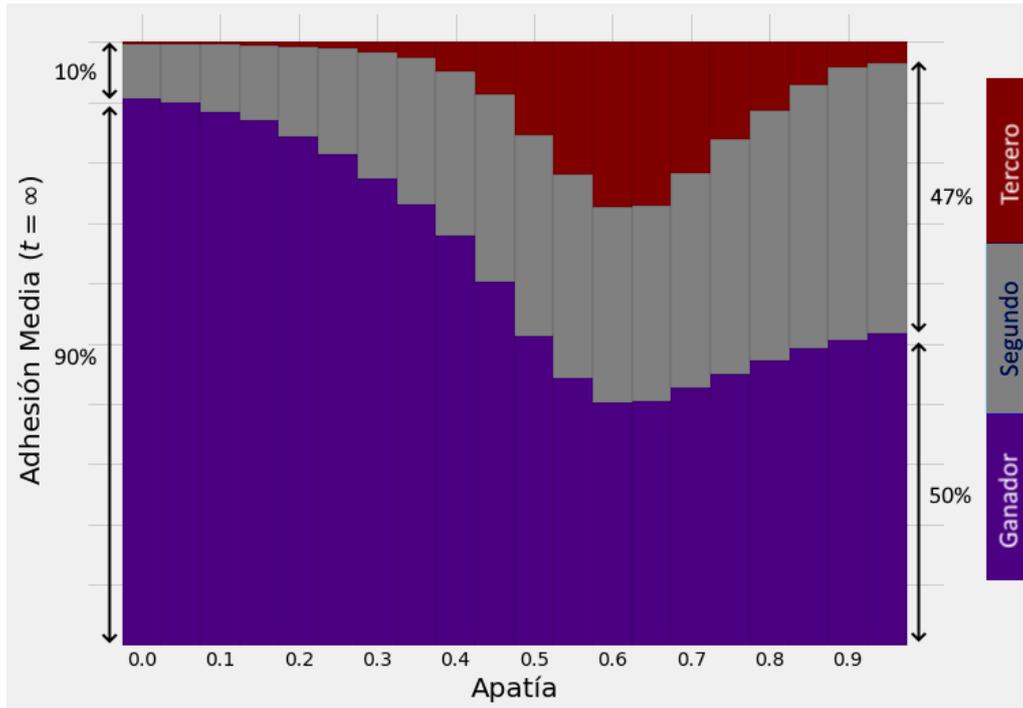


Figura 3.15: Adhesión media para la posición ganadora, la posición en segundo lugar y la posición en tercer lugar, respecto al número total de agentes activos, para distintas apatías.

Además, para apatías cercanas a la apatía crítica, la adhesión a la posición que ocupa el tercer lugar es máxima, y las adhesiones a las tres posiciones son muy parecidas. Esto coincide con el hecho de que la probabilidad de ganar de las tres posiciones coincide en la apatía crítica como vimos en la figura 3.3.

Finalmente, para apatías altas, la posición ganadora y la posición en segundo lugar, pasan a tener adhesiones iguales, mientras que la posición en tercer lugar tiene adhesión pequeña en comparación a las otras. Esto es esperable, dado que para apatías altas, la tercera posición es casi siempre la posición Verde, y las posiciones Amarilla y Celeste tienen la misma probabilidad de ser ganadora o segundo lugar.

Consideremos la adhesión a la posición en el lugar i -ésimo ($i = 1$ es la posición ganadora), y las diferencias de adhesiones:

$$\Delta n_i^j = n_j - n_i = \frac{N_j - N_i}{N_a}, \quad i = 2, 3, \quad j < i$$

En particular, Δn_2^1 es la diferencia de adhesión entre el ganador y el segundo lugar, y es de especial interés porque es un parámetro entre cero y uno, que indica que tan *cercana* es la elección. Cuando este parámetro está cerca de uno, la posición ganadora tiene mucha más adhesión que el segundo lugar, entonces en el mapa ideológico domina el consenso sobre esa posición, mientras que si el parámetro está cerca de cero, la posición ganadora y el segundo lugar tienen adhesiones parecidas y coexisten en el mapa ideológico.

Es sencillo ver que hay sólo 3 posibles diferencias de adhesiones, las cuales se muestran en la figura 3.16. Allí se observan las tres diferencias de adhesiones en función de la apatía, y se observa que para apatías bajas, Δn_2^1 es cercano a uno, y disminuye al aumentar la apatía. Para apatías altas, Δn_2^1 es cercano a cero, y se debe (como vimos anteriormente) a que la posición en primer y segundo lugar son las posiciones Amarilla y Celeste.

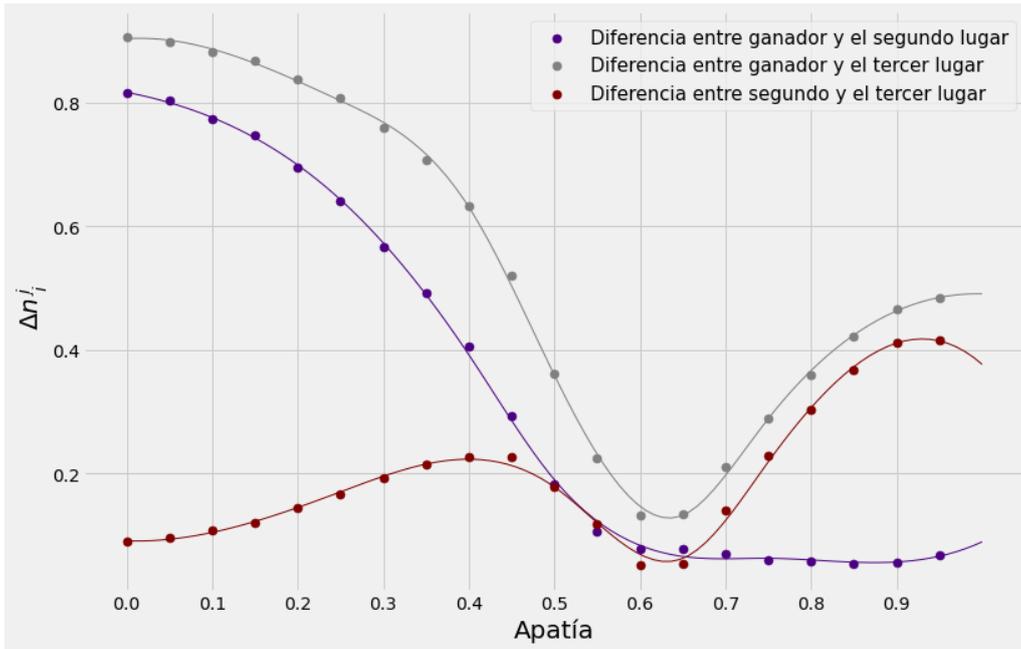


Figura 3.16: Diferencia entre las adhesiones Δn_i^j en función de la apatía. Las barras de error son más pequeñas que los símbolos, las curvas sólo son guías y no son ajustes.

4. Complejidad Estadística

Por medio del concepto de entropía, se pueden definir medidas generales para caracterizar la incertidumbre e imprevisibilidad de procesos probabilísticos. Sin embargo, estas medidas fallan en describir adecuadamente la estructura de correlación del sistema. Es generalmente aceptado que los sistemas completamente deterministas y completamente aleatorios, no muestran estructuras complejas [25]. La complejidad estadística brinda una medida de las regularidades y correlaciones presentes en sistemas estocásticos, que es de gran utilidad para su estudio.

Hemos trabajado hasta ahora con los valores medios de los observables, o cantidades medidas en las simulaciones. Sin embargo, estas cantidades tienen asociadas distribuciones de probabilidad, que también cambian con la apatía (esto se verá más adelante en este capítulo). Para estudiar esto, introducimos la idea de *Distancia entre distribuciones de probabilidad* lo que nos permite caracterizar estos cambios y cómo están relacionados con la descripción del sistema. Además esta distancia nos ayudará a definir la complejidad Estadística.

4.1. Introducción a la Entropía y las Divergencias

Sea una variable aleatoria X con espacio muestral Ω_X y distribución de probabilidad $p_X(x)$, que por razones de claridad, denotaremos por $p(x)$ ⁴. Si la variable aleatoria X tiene un espacio muestral numerable, la distribución de probabilidad $p(x)$ cumple:

$$\sum_{x \in \Omega_X} p(x) = 1 \quad (\text{E 4.5})$$

Definimos la entropía de información (o entropía de Shannon) H de la variable aleatoria X como:

$$H(X) = - \sum_{x \in \Omega_X} p(x) \log_2 p(x) \quad (\text{E 4.6})$$

Es una cantidad que se mide en *bits* y que también denotamos por $H(p)$. Es convención suponer que para $p(x) = 0$, el término $p(x) \log_2 p(x)$ se anula como sucede al tomar límite $p \rightarrow 0$.

La entropía de información puede adoptar diferentes interpretaciones según los contextos en los que se utilice [26]. Para una variable aleatoria, nos da una idea de la incertidumbre de predecir el resultado de la variable aleatoria X . Si sólo hay un resultado posible, $p(x) = 1$ para algún $x \in \Omega_X$, habrá incertidumbre mínima y la entropía será igual a cero. Si la distribución es uniforme (para espacio muestral finito y de N elementos), $p(x) = 1/N \forall x$ esto es, tengo incertidumbre máxima y la entropía alcanza su valor máximo $H = \log_2 N$.

Nos interesa introducir la idea de *Distancia entre distribuciones*. Una distancia entre dos elementos p y q es un número real $D(p, q)$ que cumple:

- $D(p, q) \geq 0 \quad \forall q, p$, y la igualdad sólo vale cuando $p = q$ (no negativa)
- $D(p, q) = D(q, p) \quad \forall q, p$ (simétrica)
- $D(p, q) \leq D(p, r) + D(r, q) \quad \forall q, p, r$, (desigualdad triangular)

Es por esto que, dadas dos variables aleatorias con distribuciones p y q sobre el mismo espacio muestral Ω_X , definimos la divergencia de Kullback-Leibler (también: distancia de Kullback-Leibler, entropía relativa) entre las distribuciones:

$$D_{KL}(p||q) = \sum_{x \in \Omega_X} p(x) \log_2 \frac{p(x)}{q(x)} \quad (\text{E 4.7})$$

Es convención suponer que para $p(x) = q(x) = 0$, el término $p(x) \log_2 p(x)/q(x)$ se anula. La divergencia de Kullback-Leibler es no negativa, y se anula sólo si $p(x) = q(x)$. Sin embargo no es una verdadera distancia, dado que no es simétrica y no satisface la desigualdad triangular. Además sólo está definida para $q(x) = 0$ si $p(x) = 0$.

Definamos entonces la divergencia (o distancia) de Jensen-Shannon. Sean dos distribuciones de probabilidad p y q , y sea $m = (p + q)/2$:

$$D_{JS}(p||q) = H(m) - \frac{H(p) + H(q)}{2} \quad (\text{E 4.8})$$

Esta divergencia es no negativa, se anula sólo si $p(x) = q(x)$, es simétrica, está acotada entre 0 y 1, y su raíz cuadrada verifica la desigualdad triangular.

⁴Esto significa que $p(x)$ y $q(y)$ hacen referencia a las distribuciones de probabilidad de dos variables aleatorias X e Y en principio distintas.

4.2. Complejidad Estadística: Definición

Definir qué características hacen a un sistema *complejo* es difícil, sin embargo, una noción de complejidad comienza considerando dos sistemas: el cristal perfecto y el gas ideal que son dos sistemas muy simples y por lo tanto tienen complejidad baja.

El cristal perfecto está determinado por un número reducido de variables, como las distancias y simetrías características de la celda unidad, y por lo tanto es necesaria poca información para describir el sistema. El gas ideal, por otro lado, puede encontrarse en cualquier estado accesible para el sistema con igual probabilidad, por lo que contiene máxima información.

Estos sistemas son ejemplos extremos en una escala de *orden* o *información* pero tienen complejidad muy baja, por lo que la complejidad no puede ser factor sólo de la entropía. Cualquier noción de complejidad razonable debería ser mínima para sistemas muy ordenados, y para sistemas completamente aleatorios y desordenados. Además debería ser máxima para sistemas que poseen algún grado de estructura entre estos dos extremos.

Motivados por estas razones, se puede definir la complejidad estadística $C(p)$ como el producto entre la entropía $H(p)$ y algún término de *desequilibrio* $D(p, p_e)$, que inicialmente se propuso como la distancia euclídea al cuadrado entre la distribución p y una distribución de equilibrio uniforme p_e [27]:

$$C(p) = H(p)D(p, p_e) = - \left(\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \left(p_i - \frac{1}{N} \right)^2 \right) \quad (\text{E 4.9})$$

Donde N es la cantidad de valores posibles que puede tomar la variable X .

Eventualmente esta distancia euclídea fue reemplazada por la divergencia de Kullback-Leibler para obtener una complejidad extensiva [28]. Siguiendo la propuesta de Lamberti et. al (2004) [29], en este trabajo se utilizará como distancia la divergencia de Jensen-Shannon, y definimos la complejidad estadística como:

$$C(p) = H(p)D_{JS}(p||p_e) \quad (\text{E 4.10})$$

Donde la distribución de probabilidad de equilibrio p_e no será uniforme, sino una distribución de referencia, donde inferimos que la complejidad es baja. Con esta definición, la complejidad estadística tiene unidades de bits al cuadrado.

4.3. Complejidad en las Diferencias de Adhesión

Como vimos en la sección 3.5, el parámetro Δn_2^1 es de especial interés. La figura 4.1 muestra la media de esta cantidad para distintas apatías, y las distribuciones para los regímenes de alta apatía, baja apatía y el régimen de transición. Se observa que no solo el valor medio cambia con la apatía si no que también cambia la *forma* de la distribución.

La figura 4.2 muestra la entropía normalizada para las distribuciones de Δn_2^1 , en función de la apatía. Se normaliza respecto a la entropía máxima (distribución uniforme) para hacerla independiente de la elección del ancho de barras de la distribución⁵. Se observa que el régimen de transición es el que posee mayor entropía, mientras que el régimen de alta apatía está caracterizado por tener la mínima entropía.

⁵La entropía puede crecer indefinidamente al reducir el ancho de las barras de la distribución.

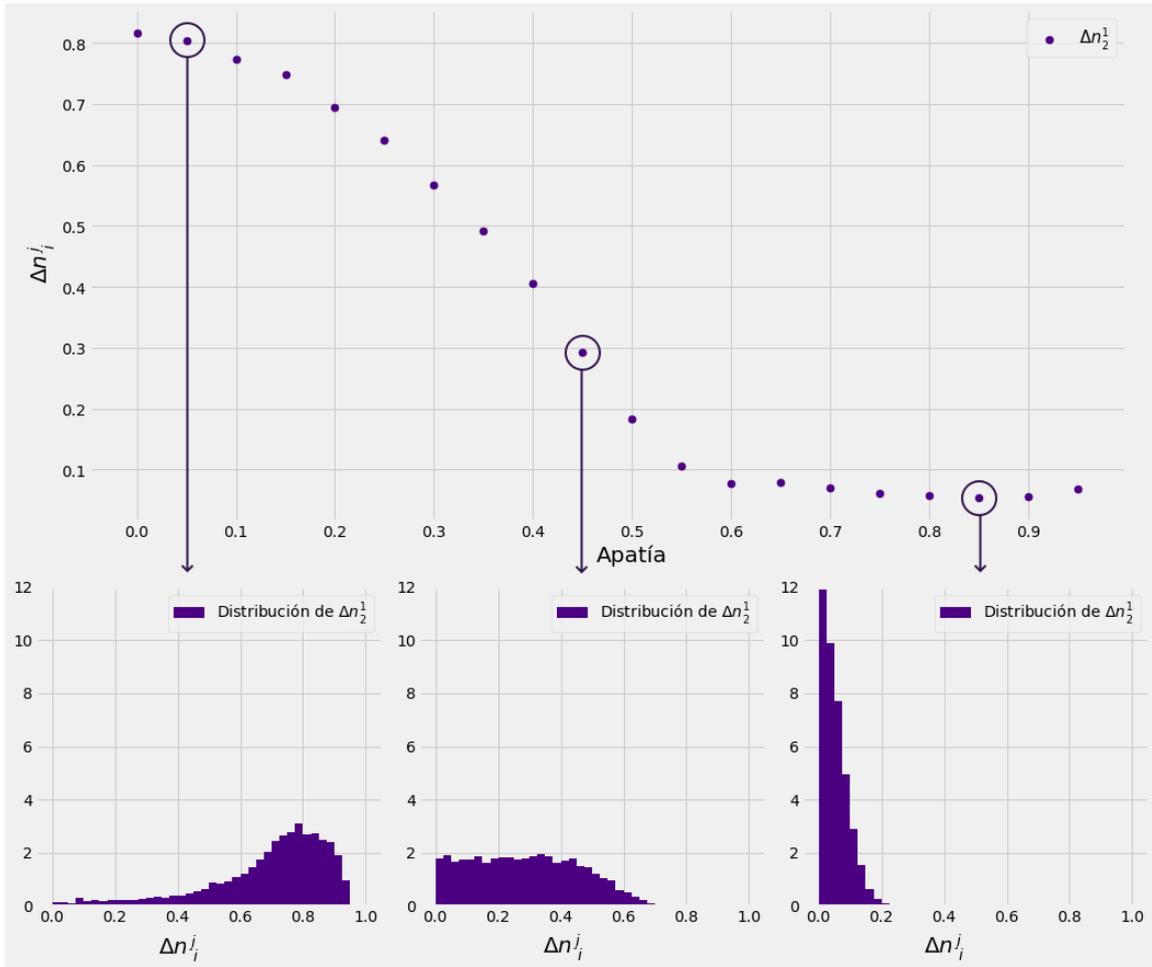


Figura 4.1: Arriba: Δn_2^1 media para distintas apatías. Las barras de error son más pequeñas que los símbolos. Abajo: Distribuciones de Δn_2^1 para una apatía baja, apatía media y apatía alta.

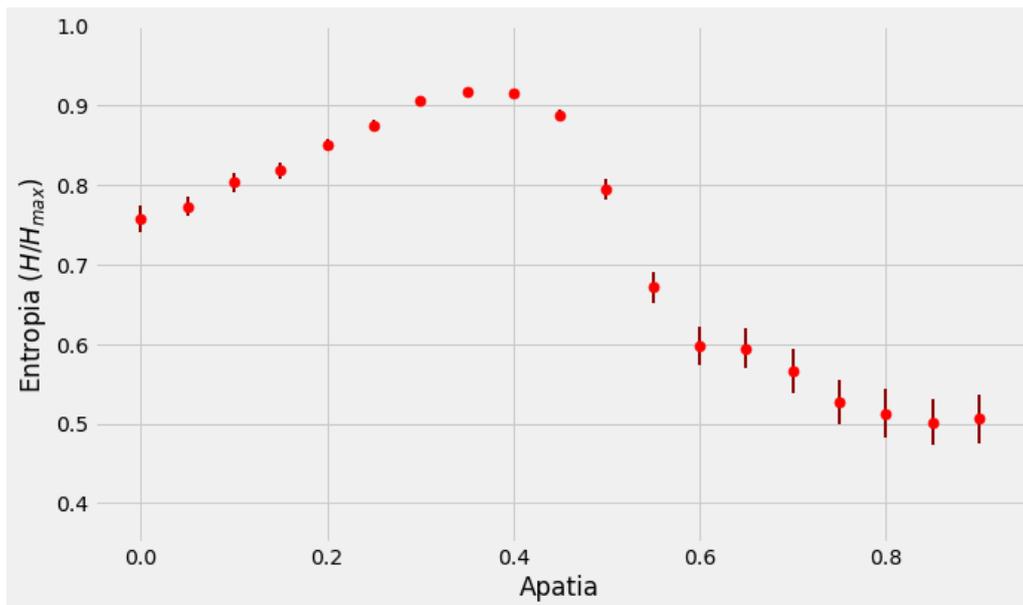


Figura 4.2: Entropía (normalizada) para las distribuciones de Δn_2^1 en función de la apatía.

En el régimen de alta apatía, el sistema se encuentra extremadamente ligado. La dinámica de evolución es mínima y localizada, el sistema aparenta estar *congelado*. Por otro lado, en el régimen de baja apatía, casi todos los sitios del sistema son libres de interactuar, lo que provee una dinámica extensa, pero que eventualmente llega al equilibrio. Estas características son similares (al menos en el contexto de complejidad estadística) a los dos extremos de nivel de estructura del sistema, el cristal perfecto y el gas ideal.

Inspirados por esta correspondencia, se propone que la distribución de probabilidad de referencia sea la distribución de probabilidad con apatía nula, donde sabemos que la complejidad debe ser baja. Esto permite además, cuantificar el cambio de la distribución con la apatía, calculando la Distancia de Jensen-Shannon entre la distribución con apatía A y la distribución con apatía nula. La figura 4.3 muestra esta distancia en función de la apatía, y se observa que es creciente. Esta distancia se anula para apatía cero, lo cual es esperable de cualquier distancia.

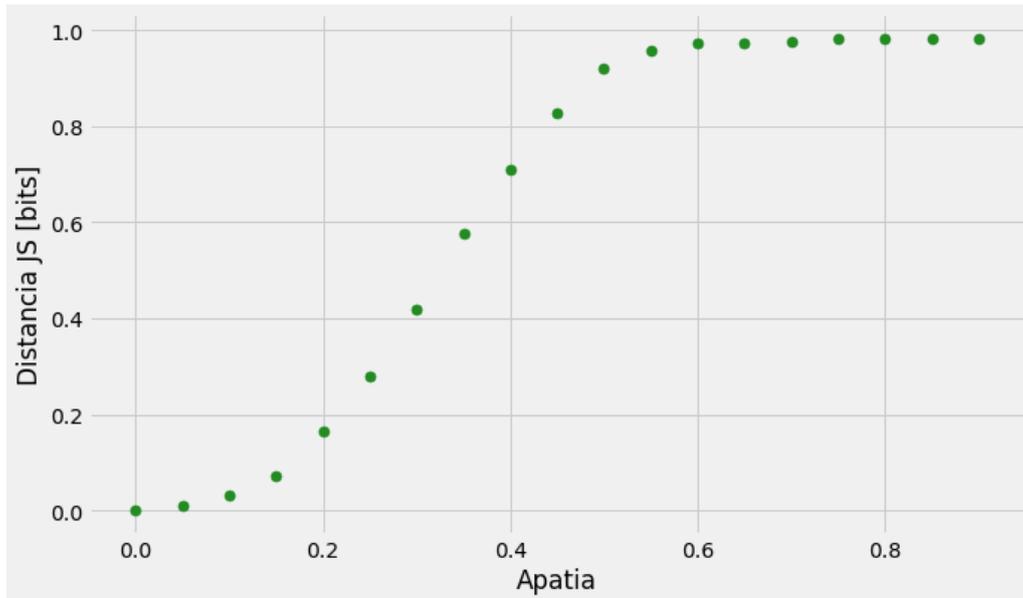


Figura 4.3: Distancia de Jensen-Shannon para las distribuciones de Δn_2^1 en función de la apatía. La distribución de referencia es la distribución con apatía nula. Las barras de error son más pequeñas que los símbolos.

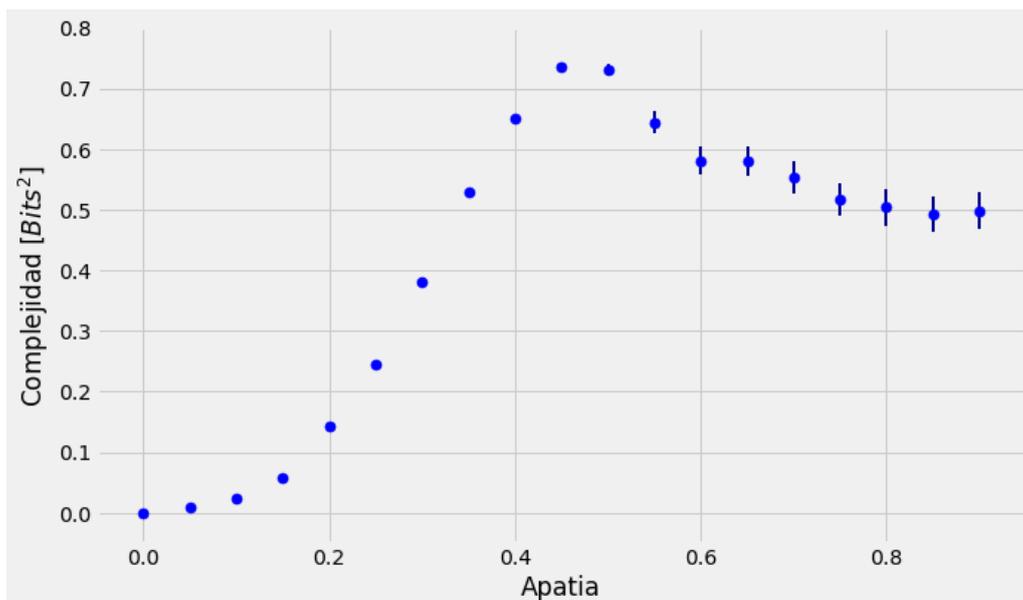


Figura 4.4: Complejidad estadística para las distribuciones de Δn_2^1 en función de la apatía.

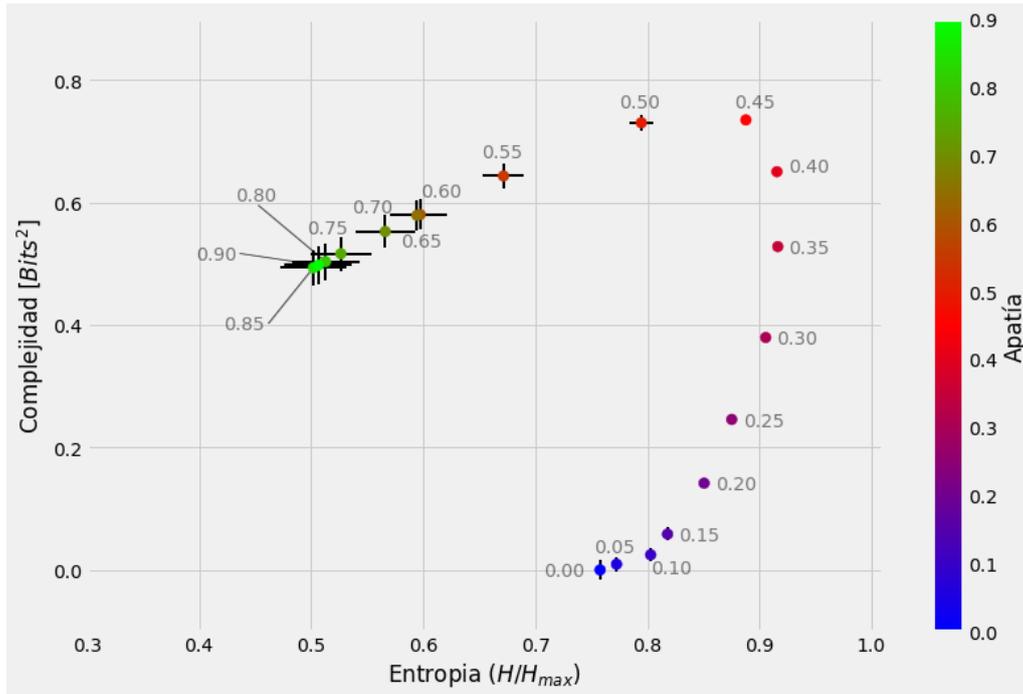


Figura 4.5: Plano Complejidad-Entropía para las distribuciones Δn_2^1 , curva parametrizada por la apatía.

Con la elección de distribución de probabilidad de referencia, podemos calcular la complejidad estadística para cada valor de apatía la cual se muestra en la figura 4.4. La complejidad máxima se encuentra en el régimen de transición. Todos estos resultados pueden resumirse en la figura 4.5, que muestra la curva en el plano complejidad-entropía, parametrizada por la apatía, de la distribuciones de probabilidad de Δn_2^1 .

En general, se puede concluir que los regímenes de baja y alta apatía, no son complejos. Se puede asociar el régimen de baja apatía a un régimen de mucha participación, en donde el sistema se encuentra libre de restricciones y por lo tanto su complejidad estructural es baja. Por otro lado el régimen de alta apatía está demasiado restringido en su interacción, por lo que la dinámica no tiene demasiada complejidad estructural. Sin embargo, entre estos regímenes hay una región de transición que muestra la mayor complejidad, donde el sistema está restringido pero aún puede exhibir una dinámica amplia de interacciones entre sus componentes.

La complejidad estadística es una herramienta de amplia aplicación que nos permite cuantificar esta idea, y se puede aplicar de manera general a cualquier observable con una distribución de probabilidad. La aplicación de esta técnica a otros observables del modelo quedará para futuros trabajos.

5. Condiciones Iniciales Estructuradas

Hasta ahora sólo hemos considerado condiciones iniciales aleatorias para el mapa ideológico. Este tipo de condiciones iniciales son usuales en los modelos de dinámica de opinión, debido a que no presentan sesgo hacia una de las posiciones, y permiten que la dinámica de interacción sea el único mecanismo que conduzca al sistema a su estado final. Esto permite sacar conclusiones del modelo asociadas únicamente a la interacción.

Sin embargo, las condiciones iniciales aleatorias son artificiales y poco realistas. En general, uno no encuentra que la opinión está distribuida homogéneamente en las sociedades, sino que forma algún tipo de *estructura jerárquica*.

Esto significa que el mapa ideológico inicialmente estará formado por patrones con cierto grado de estructura u organización que idealmente pueda ser parametrizado por una variable D . De modo que, para una posición específica, un bajo grado de organización conforma patrones dispersos y desconectados de agentes con esa posición, mientras que un mayor grado de organización conforma patrones compactos con mayor aglomeración.

Este tipo de patrones, en los que los agentes que comparten la misma opinión están inicialmente conectados entre sí (al menos más conectados que si la distribución fuera aleatoria), se basa en la *exposición selectiva*, un mecanismo estudiado por el cual las personas prefieren asociarse a individuos que compartan sus ideas, valores y opiniones, en lugar de asociarse a individuos que las contradigan [30, 31].

5.1. Dimensión Fractal

Una variable que puede cuantificar el grado de estructura jerárquica inicial del mapa ideológico es la dimensión fractal del patrón formado por agentes con la misma opinión. Existen muchas definiciones formales posibles de dimensión fractal, pero la idea general es considerar la forma en la que *escalan* las propiedades extensivas de cierto conjunto.

Supongamos por ejemplo que quisiera determinar la masa de una barra de longitud L_0 y densidad lineal de masa uniforme λ . La masa de esa barra será $M = \lambda L_0$. Ahora si consideramos una barra escalada en un valor s , su masa escala también en un factor s , $M = \lambda s L_0$. Similarmente, si tuviera una superficie de área A_0 y densidad superficial de masa σ , su masa escala con un factor s^2 , $M = \sigma s^2 A_0$. Un objeto de volumen V_0 y densidad volumétrica de masa ρ , tiene una masa que escala de la forma $M = \rho s^3 V_0$.

La única diferencia entre esos casos, es el exponente con el que escala la masa, que coincide con la dimensión de cada conjunto. En general, la dimensión de un conjunto F es el exponente escalan las propiedades extensivas de F (ver figura 5.1 A, B y C), lo cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mu(sF) = s^D \mu(F) \quad (\text{E 5.11})$$

Donde μ es la *medida* (o tamaño) del conjunto F , un concepto que generaliza las nociones de longitud, área y volumen [32]. Aún así la ecuación E 5.11 podría escribirse con cualquier propiedad extensiva del conjunto.

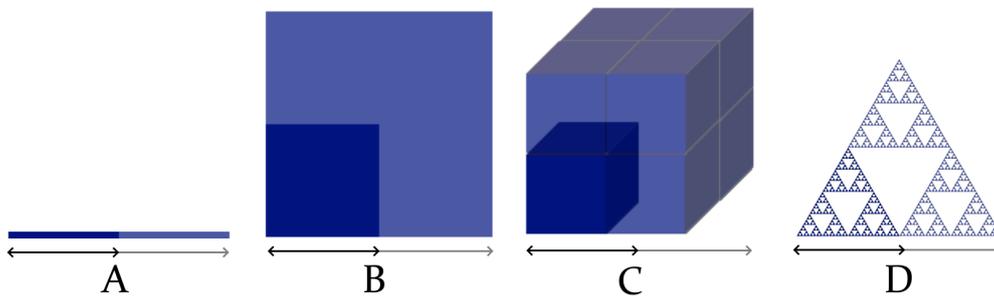


Figura 5.1: Diversos conjuntos y sus respectivos conjuntos escalados por un factor 2. A: Línea, su medida escala en factor $2 = 2^1$. B: Cuadrado, su medida escala en factor $4 = 2^2$. C: Cubo, su medida escala en factor $8 = 2^3$. D: Triángulo de Sierpiński, su medida escala en factor $3 = 2^D$, $D = \log_2(3)$.

Ahora bien, existen conjuntos denominados *fractales* que tienen una dimensión no entera. Un ejemplo de fractal es el triángulo de Sierpiński, el cual es un conjunto al cual si se duplica su escala, se generan 3 copias idénticas de éste, como se muestra en la figura 5.1 D. De este hecho se concluye que tiene dimensión $D = \log_2(3)$.

El cálculo de la dimensión del triángulo de Sierpiński resulta fácil debido a su propiedad de autosimilaridad, sin embargo no es cierto que todos los conjuntos fractales son autosimilares. Los conjuntos fractales sin esta propiedad son más complicados de estudiar, debido a que no sólo es difícil calcular su dimensión fractal de manera exacta, sino que las diferentes definiciones de dimensión fractal pueden no coincidir entre sí⁶. Aún así, existen muchas definiciones de dimensión fractal que admiten una implementación numérica sencilla y directa, que permite estimar el valor de la dimensión fractal, como es el caso de la *dimensión de Box-Counting* (también llamada *dimensión de Minkowski–Bouligand*).

5.2. Dimensión de Box-Counting

La dimensión de Box-Counting es un tipo de dimensión fractal que se le puede asociar a cualquier conjunto acotado. Formalicemos algunos conceptos para definirla.

Sea F un subconjunto acotado de \mathbb{R}^N . Consideremos una malla o grilla de lado δ de \mathbb{R}^N . Esta malla consiste en *cajas* U de lado δ .

$N_\delta(F)$ es el número mínimo de estas cajas U de lado δ que necesito para cubrir al conjunto F . Más precisamente:

$$N_\delta(F) = \min_n \left\{ n \in \mathbb{N} \mid F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i(\delta), U_i(\delta) \text{ cajas de lado } \delta \right\} \quad (\text{E 5.12})$$

Este número crece cuando reducimos δ , en otras palabras, aumenta con la definición de la grilla [32]. En la figura 5.2 se observa un ejemplo. Este crecimiento estará caracterizado de forma aproximada por una ley de potencia, con exponente D , el cual es básicamente la dimensión fractal que buscamos.

$$N_\delta(F) \approx N_1(F) \delta^{-D} \quad (\text{E 5.13})$$

Para ser más precisos, se define la dimensión de Box-Counting como:

$$\dim_{BC}(F) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log(\delta)} \quad (\text{E 5.14})$$

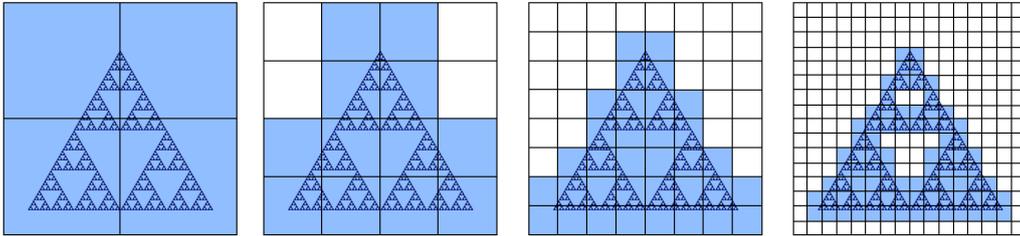


Figura 5.2: Triángulo de Sierpiński en grillas cuadradas de lados de distintos tamaños. En cada grilla sucesiva el tamaño del lado se divide en dos. Se muestra en cada caso, el respectivo cubrimiento.

5.3. Generación de Patrones de Dimensión y Área Definida

Cuando consideramos condiciones iniciales jerárquicamente estructuradas, el mapa ideológico inicial consiste en dos patrones, formados por las posiciones Celeste y Amarilla.

Consideremos por ahora sólo una de las posiciones. El patrón que forma tendrá una dimensión fractal D , lo que significa que la ley de potencias E 5.13 se debe cumplir al menos aproximadamente. Consideramos que el mapa ideológico tiene tamaño $L = 64$, esto permite analizar el patrón en seis escalas distintas con $\delta_k = 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. En general, para un tamaño arbitrario L , tenemos $k = 0, 1, 2, \dots, m = \lfloor \log_2(L/2) \rfloor$. Habrá entonces, seis números de cajas mínimas que cubren el patrón N_k .

Para $k = 0$, N_0 es el área total que ocupa el patrón (la cantidad de adherentes de esa posición) que está definida por la apatía del sistema. Para una dada apatía del sistema, habrá una cantidad de agentes activos N_a y si consideramos igual cantidad de adherentes para cada posición, entonces $N_0 = N_a/2$.

Si reescribimos la ecuación E 5.13 con estas consideraciones, obtenemos:

$$N_k \approx N_0 2^{-kD} \quad (\text{E 5.15})$$

⁶Incluso existen conjuntos denominados multifractales, que no pueden ser descriptos por una única dimensión fractal, sino que exhiben un espectro de exponentes de escala.

Si se cumple esto, entonces la definición E 5.14 queda⁷:

$$dim_{BC} \approx \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\log_2(N_0) - kD}{-k} = D \quad (E 5.16)$$

En general, los números N_k tienen que cumplir ciertas restricciones lógicas para que el patrón sea posible:

$$N_k \leq N_{k-1} \leq 4 N_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (E 5.17)$$

Y además:

$$1 \leq N_m \leq (L 2^{-m})^2 \quad (E 5.18)$$

Reemplazando la expresión E 5.15 en la ecuación E 5.18 obtenemos:

$$2^{mD} \leq N_0 \leq L^2 2^{m(D-2)} \quad (E 5.19)$$

La ecuación E 5.19 indica que, los patrones de dimensión D no pueden tener cualquier área, sino que tiene que estar entre dos límites. Similarmente, si fijamos el área del patrón, no cualquier dimensión es posible, sino que hay un rango de dimensiones posibles $D \in [D_{min}(N_0), D_{max}(N_0)]$. En la figura 5.3 se puede observar la región permitida para la generación de patrones para un sistema de tamaño $L = 64$.

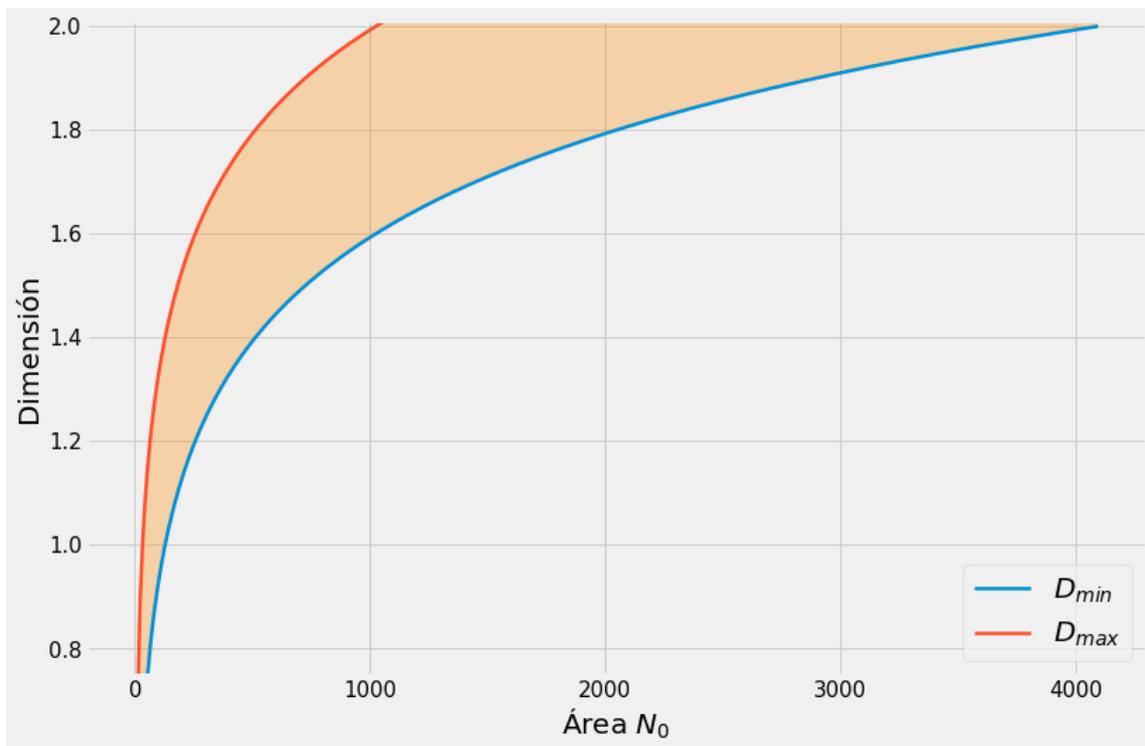


Figura 5.3: Región permitida para la generación de patrones con área N_0 y dimensión D , para un sistema de tamaño $L = 64$.

⁷Como en la definición hay un cociente de logaritmos se puede calcular en cualquier base, aquí es más cómodo usar logaritmo en base 2.

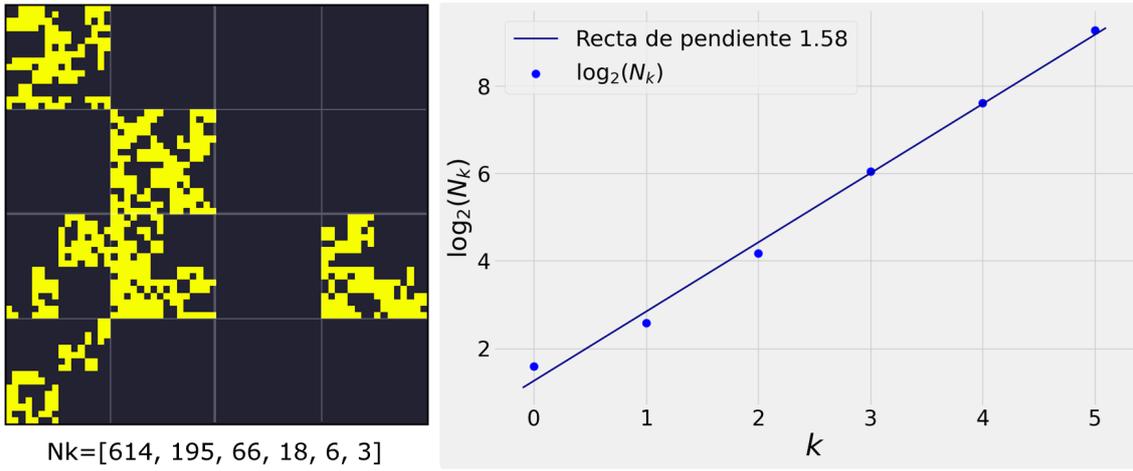


Figura 5.4: Izquierda: Patrón fractal de dimensión $D = 1,58(2)$ y área $N_0 = 614$. Se muestran sus respectivos números N_k . Derecha: $\log_2(N_k)$ vs k y su ajuste lineal, la pendiente coincide con la dimensión del patrón dentro del error tolerado.

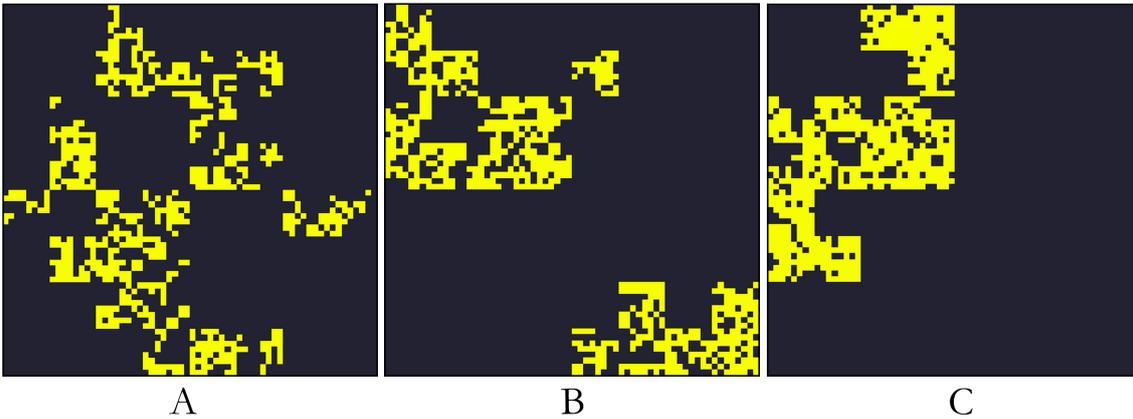


Figura 5.5: A: Patrón de dimensión $D = 1,46(2)$ y área $N_0 = 614$. B: Patrón de dimensión $D = 1,60(2)$ y área $N_0 = 614$. C: Patrón de dimensión $D = 1,75(2)$ y área $N_0 = 614$.

En resumen, podemos generar un patrón con dimensión aproximada D y N_0 cantidad de adherentes, siempre que se cumplan las ecuaciones E 5.15 y E 5.19. En el Apéndice C se puede ver un esquema del algoritmo que genera estos patrones. En la figura 5.4 se muestra un ejemplo de un patrón fractal con dimensión y área definida, la grilla permite verificar los valores de $N_5 = 3$ y $N_4 = 6$.

Debido a que los números N_k deben ser enteros, siempre hay un pequeño error en la dimensión del patrón. El error en las dimensiones fractales calculadas en este trabajo no es mayor a 0,02.

La figura 5.5 muestra patrones de igual área y diferente dimensión. Se puede observar que para dimensiones altas (cercanas a D_{max}), el patrón es compacto, mientras que para dimensiones bajas (cercanas a D_{min}), el patrón es disperso. En cierto modo, la dimensión de patrón puede modelar el grado de sesgo a la exposición selectiva de los adherentes a cierta posición.

Los patrones fractales de este tipo, y su caracterización entrópica fueron estudiados extensivamente en diversos trabajos de sociofísica [33-37].

Para construir la condición inicial jerárquicamente estructurada, simplemente consideramos el mapa ideológico constituido por dos patrones distintos, correspondientes a cada posición (Celeste y Amarilla). Los patrones tendrán su respectiva área, o cantidad de adherentes N_0^{Am} y N_0^{Ce} , que podrían en principio ser distintas, sin embargo, si consideramos condiciones iniciales con igual adherencia, N_0 está determinado por la apatía A, pues:

$$N_0^{Am} = N_0^{Ce} = \frac{N(1-A)}{2}$$

Además cada patrón tendrá su respectiva dimensión D_{Am} y D_{Ce} . La figura 5.6 muestra ejemplos de estas

condiciones iniciales.

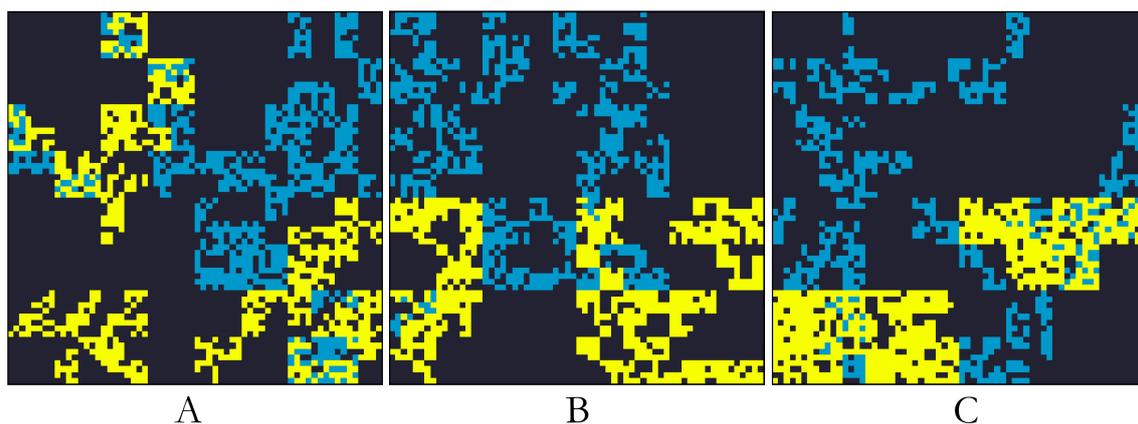


Figura 5.6: Condiciones iniciales estructuradas para una apatía $A = 0,70$. Las áreas de cada posición son iguales, con valor $N_0 = 614$. A: $D_{Am} = 1,55(2)$, $D_{Ce} = 1,55(2)$. B: $D_{Am} = 1,65(2)$, $D_{Ce} = 1,50(2)$. C: $D_{Am} = 1,75(2)$, $D_{Ce} = 1,46(2)$.

5.4. Respuesta del Sistema en Función de la Dimensión

Cuando la condición inicial está estructurada jerárquicamente, el sistema tiene una evolución temporal más dinámica que en el caso aleatorio, incluso para apatías altas. La figura 5.7 muestra la evolución de una condición inicial estructurada particular. Una característica fundamental de este tipo de condiciones iniciales, es que proveen una conectividad alta entre agentes incluso para apatías altas, lo que permite la aparición de la posición Verde. Este comportamiento es muy distinto al caso de condiciones iniciales aleatorias, que se discutió en la sección 3.3. En ese caso, la probabilidad de ganar de la posición Verde se anula (ver figura 3.1).

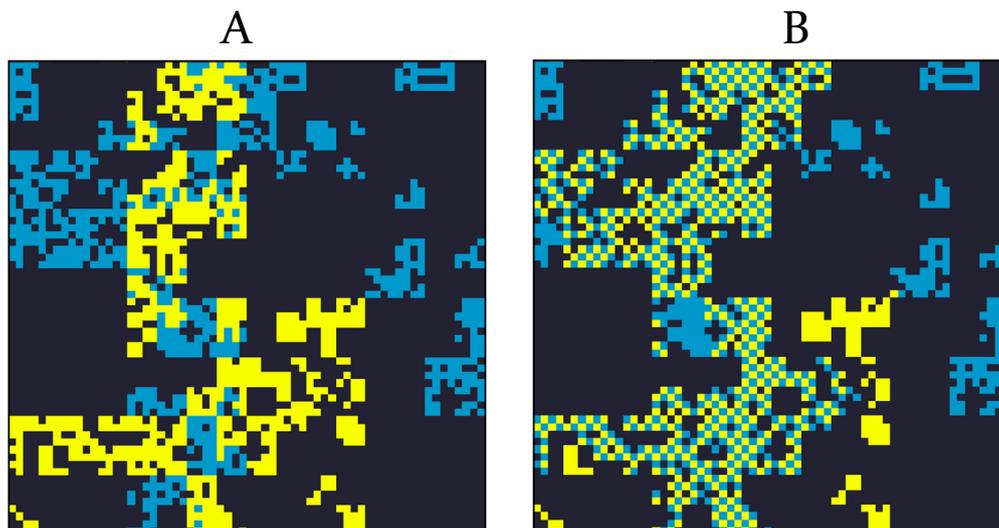


Figura 5.7: Evolución del mapa ideológico. A: Condición inicial estructurada para una apatía $A = 0,70$. Las áreas y dimensiones de cada posición son iguales, con valor $N_0 = 614$ y $D_{Am} = D_{Ce} = 1,55(2)$. B: Mapa ideológico, luego de 5×10^5 iteraciones. Se observa la presencia de la posición verde.

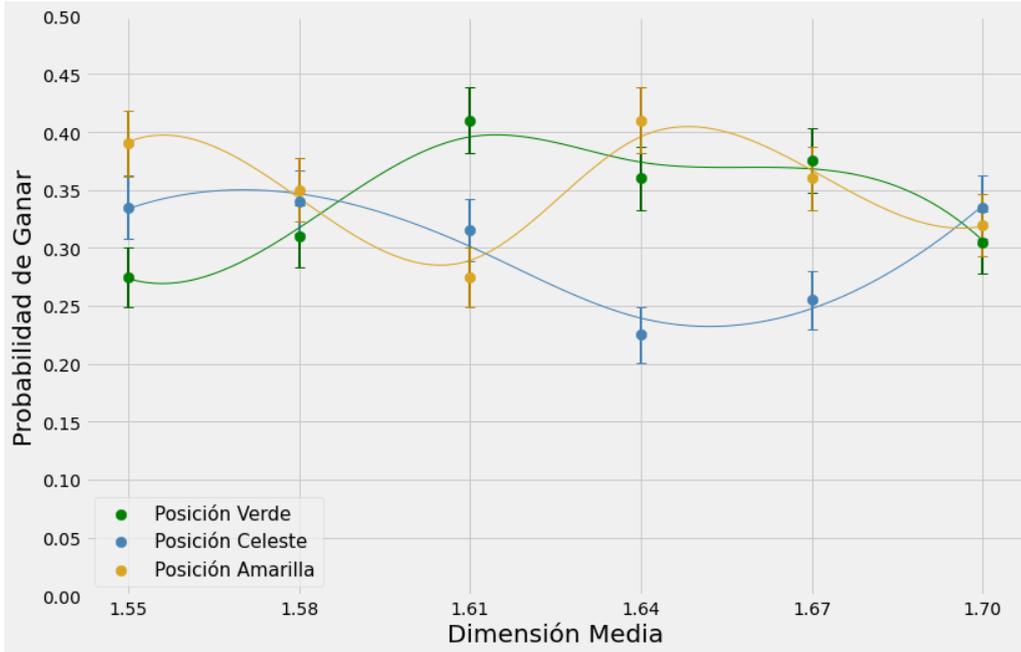


Figura 5.8: Probabilidad de ganar para cada posición en función de la dimensión inicial. En cada punto $N_0 = 614$ ($A = 0,7$) y $D_{Am} = D_{Ce} + 0,1$, se muestra en el eje de las abscisas la dimensión media $D_m = (D_{Am} + D_{Ce})/2$. Cada punto es el resultado de promediar sobre 200 realizaciones, las curvas sólo son guías y no son ajustes.

En la figura 5.8 se observa la probabilidad de ganar de las tres posiciones en función de la dimensión de los patrones estructurados iniciales, para una apatía $A = 0,70$. La cantidad de adherentes iniciales es igual para ambas posiciones, es decir $N_0^{Am} = N_0^{Ce} = 614$. En cada punto, la dimensión correspondiente al patrón inicial de la posición Amarilla es ligeramente mayor que para el patrón inicial de la posición Celeste, más específicamente: $D_{Am} = D_{Ce} + 0,1$.

Se observa que la probabilidad de ganar de la posición Verde no se anula para este tipo de condiciones estructuradas, de hecho es comparable a la probabilidad de ganar de las otras posiciones. Esto se debe a que la estructura en las condiciones iniciales le otorga al mapa ideológico una topología con muchas más conexiones entre sitios activos que permite la formación de la posición Verde, incluso considerando que la apatía es alta (comparar con la figura 3.1).

A pesar de que la dimensión inicial de la posición Amarilla es mayor que la dimensión de la posición Celeste, no se encontró una diferencia significativa en la probabilidad de ganar para la posición de mayor dimensión. Esto está en desacuerdo con los resultados de Gaudiano et. al (2019) [20] en donde se encuentra una mayor probabilidad de ganar para la posición más estructurada. El origen de esta discrepancia podría estar en la implementación de la simulación. En particular, podría deberse a una diferencia en la generación de los patrones fractales, o en la implementación de la interacción a segundos vecinos del modelo de Sznajd.

Es poco probable que el origen esté en la generación de los patrones fractales. De hecho con el mismo procedimiento descrito en el Apéndice C, se pudieron verificar varios resultados mencionados en Gaudiano et. al (2022) [37], en el cual, también se estudiaron condiciones iniciales estructuradas pero para el modelo de Segregación Social de Schelling. Por lo tanto, la diferencia probablemente se encuentre en la implementación de la interacción en el Modelo de Sznajd. Aún así, se pudieron replicar los resultados en condiciones iniciales aleatorias, por lo que la diferencia debe ser muy sutil.

Sin embargo, la emergencia de la posición Verde en el régimen de apatías altas, debido a las condiciones iniciales estructuradas, es un resultado que coincide con este trabajo previo.

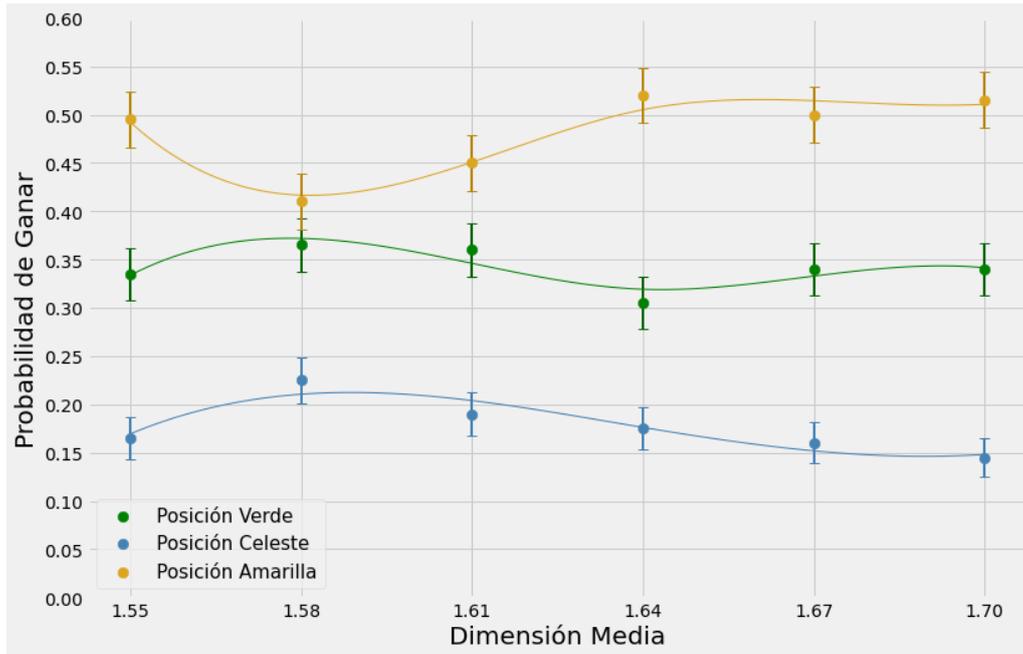


Figura 5.9: Probabilidad de ganar para cada posición en función de la dimensión inicial para un porcentaje inicial Celeste del 40% y 60% Amarillo ($A = 0,7$). En cada punto $D_{Am} = D_{Ce} + 0,1$, se muestra en el eje de las abscisas la dimensión media $D_m = (D_{Am} + D_{Ce})/2$. Cada punto es el resultado de promediar sobre 200 realizaciones, las curvas sólo son guías y no son ajustes.

También se estudió el caso en el que la adhesión inicial de la posición Celeste y Amarilla no es igual. La figura 5.9 muestra la probabilidad de ganar de las tres posiciones en función de la dimensión de los patrones estructurados iniciales, para una apatía $A = 0,70$. La cantidad de adherentes iniciales son $N_0^{Am} = 737$ y $N_0^{Ce} = 491$, lo que equivale a adhesiones de $n_{Am} = 0,6$ y $n_{Ce} = 0,4$ respectivamente. En cada punto, la dimensión correspondiente al patrón inicial de la posición Amarilla es ligeramente mayor que para el patrón inicial de la posición Celeste, más específicamente: $D_{Am} = D_{Ce} + 0,1$.

Se observa una mayor probabilidad de ganar para la posición Amarilla, y una menor probabilidad de ganar para la posición Celeste, que en la figura 5.8. Esto es esperable dado a que una mayor adhesión es una ventaja clara para una posición. Sin embargo, si comparamos con el caso de condiciones iniciales aleatorias, vemos que la ventaja no tiene un impacto tan grande para condiciones iniciales estructuradas.

Para condiciones iniciales aleatorias, y una apatía $A = 0,70$, la diferencia de adhesión $n_{Am} = 0,6$ y $n_{Ce} = 0,4$ provoca que la posición Amarilla gane casi siempre (ver figura 3.9). En las mismas condiciones pero con condiciones iniciales estructuradas, éste ya no es el caso, la probabilidad de ganar de la posición Celeste disminuye, pero está lejos de ser nula.

Una vez más, esto se debe a que, en el régimen de altas apatías, la dinámica en el caso aleatorio está prácticamente congelada, por lo que una ventaja inicial, puede determinar el estado final fácilmente. Por su parte en las condiciones iniciales estructuradas, la dinámica es rica en interacciones entre agentes, por lo que el estado estacionario no está tan directamente condicionado por la condición inicial.

Debido a esto, se considera que, en general, las condiciones iniciales estructuradas son más realistas y más apropiadas para el modelado de la dinámica de opiniones en este régimen.

6. Modelo Teórico: Ecuación Maestra

El estado de la matriz de posiciones ideológicas M al tiempo $t + \Delta t$ depende solamente del estado que tenía al tiempo t , y no de tiempos anteriores, lo cual hace que la ley de interacción propuesta por el modelo (en la sección 2.2) sea un Proceso de Markov.

Un proceso de Markov es un tipo de proceso estocástico que cumple con la propiedad de dependencia del futuro solamente del presente. En otras palabras, la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado determinado en el futuro solo depende del estado actual y no del historial previo del sistema. Por lo tanto, el modelo admite una ecuación maestra, que describe la evolución temporal de la probabilidad de que un sistema se encuentre en un estado determinado en cualquier momento dado. Es importante destacar que para que un proceso sea descrito por una Ecuación Maestra, debe ser un proceso de Markov, es decir, la probabilidad futura del sistema debe depender únicamente del estado actual y no de su historial previo [38].

6.1. Derivación

En cada paso temporal Δt se aplican las siguientes reglas:

- Se elige un sitio activo al azar i .⁸
- Se elige un segundo sitio j , del conjunto de segundos vecinos activos de i .
- Se asigna la posición del sitio j al sitio i

Partiendo de estas reglas, consideremos la probabilidad de que un sitio i tenga la posición Amarilla al tiempo t , $P(M_i = Am)[t]$ la cual denotamos por simplicidad como $P_i^{Am}(t)$.

El cambio de esta probabilidad ΔP_i^{Am} en un paso temporal dado se da sólo por dos motivos: si el sitio i tiene la posición Celeste y un segundo vecino j tiene la posición Amarilla y ambos son seleccionados por las reglas de interacción, o similarmente si el sitio i tiene la posición Amarilla y un segundo vecino j tiene la posición Celeste y ambos son seleccionados por las reglas de interacción.

Sean $\gamma(i)$ el conjunto de segundos vecinos del sitio i , $\gamma_a(i)$ el conjunto de segundos vecinos *activos* del sitio i y N_a la cantidad de sitios activos.

La probabilidad de elegir el sitio i al azar es $1/N_a$, y la probabilidad de elegir el sitio j de entre sus segundos vecinos al azar es $1/|\gamma_a(i)|$. Entonces la ecuación maestra es:

$$\Delta P_i^{Am} = \frac{1}{N_a} \frac{1}{|\gamma_a(i)|} \left(\sum_{j \in \gamma_a(i)} P(M_j = Am, M_i = Ce) - \sum_{j \in \gamma_a(i)} P(M_j = Ce, M_i = Am) \right) \quad (E 6.20)$$

Donde $P(M_j = Am, M_i = Ce)$ es la probabilidad conjunta de que el sitio j tenga la posición Amarilla y el sitio i tenga la posición Celeste. El segundo término es negativo porque reduce la probabilidad de que el sitio i tenga la posición Amarilla.

6.2. Aproximación de Campo Medio

Si consideramos apatías bajas ($A \ll 1$) distribuidas aleatoriamente, entonces podemos realizar las siguientes aproximaciones:

$$N_a \approx (1 - A)N \quad (E 6.21)$$

$$|\gamma_a(i)| \approx (1 - A)|\gamma(i)| = (1 - A)8 \quad (E 6.22)$$

$$\sum_{j \in \gamma_a(i)} \approx (1 - A) \sum_{j \in \gamma(i)} \quad (E 6.23)$$

Donde $N = L^2$, es la cantidad total de sitios. Además usamos la aproximación:

$$\begin{aligned} P(M_j = Am, M_i = Ce) &= P(M_j = Am)P(M_i = Ce) = P_j^{Am}P_i^{Ce} = P_j^{Am}(1 - P_i^{Am}) \\ P(M_j = Ce, M_i = Am) &= P(M_j = Ce)P(M_i = Am) = P_j^{Ce}P_i^{Am} = (1 - P_j^{Am})P_i^{Am} \end{aligned} \quad (E 6.24)$$

⁸Los sitios en el mapa logístico tienen dos coordenadas (m, n) , pero para mejorar la claridad denotamos el sitio i como el i -ésimo sitio para algún ordenamiento del conjunto de los sitios activos.

Con estas aproximaciones y manipulación algebraica, la ecuación E 6.20 queda:

$$\Delta P_i^{Am} = \frac{1}{N} \frac{1}{(1-A)} \left(-P_i^{Am} + \frac{1}{8} \sum_{j \in \gamma(i)} P_j^{Am} \right) \quad (\text{E 6.25})$$

Y por definición del tiempo de Monte Carlo $\Delta t = 1/N$, obtenemos la aproximación a la ecuación maestra:

$$\dot{P}_i^{Am} = \frac{1}{(1-A)} \left(-P_i^{Am} + \frac{1}{8} \sum_{j \in \gamma(i)} P_j^{Am} \right) \quad (\text{E 6.26})$$

La ecuación E 6.26 puede ser interpretada de varias formas. Podemos definir una especie de promedio sobre los segundos vecinos de i :

$$\langle P_i^{Am} \rangle \equiv \frac{1}{8} \sum_{j \in \gamma(i)} P_j^{Am}$$

Entonces:

$$\dot{P}_i^{Am} = \frac{1}{(1-A)} \left(-P_i^{Am} + \langle P_i^{Am} \rangle \right) \quad (\text{E 6.27})$$

Con lo cual es claro que en el estado estacionario se debe cumplir:

$$P_i^{Am} = \langle P_i^{Am} \rangle$$

Otra forma de ver la ecuación E 6.26 es considerar la definición del operador laplaciano en una grilla cuadrada bidimensional:

$$\nabla^2 f_i \equiv -f_i + \frac{1}{4} \sum_{j \in \Gamma(i)} f_j \quad (\text{E 6.28})$$

Donde $\Gamma(i)$ es el conjunto de primeros vecinos de i .

En nuestro caso, definimos un operador equivalente para segundos vecinos.

$$\bar{\nabla}^2 f_i \equiv -f_i + \frac{1}{8} \sum_{j \in \gamma(i)} f_j \quad (\text{E 6.29})$$

Con esta definición obtenemos:

$$\dot{P}_i^{Am} = \frac{1}{(1-A)} \bar{\nabla}^2 P_i^{Am} \quad (\text{E 6.30})$$

Una ecuación difusiva para la probabilidad, con coeficiente de difusión $1/(1-A)$

6.3. Comprobación Numérica

Para comprobar la ecuación E 6.30 consideramos una condición inicial que consiste de un círculo en el centro del mapa ideológico, dentro del cual la posición es Celeste. Fuera del círculo, la posición es Amarilla. Además consideramos la apatía aleatoriamente.

Definimos el radio del círculo:

$$r = \text{máx} \left\{ \sqrt{(i - L/2)^2 + (j - L/2)^2} \mid M_{ij} = Ce \right\}$$

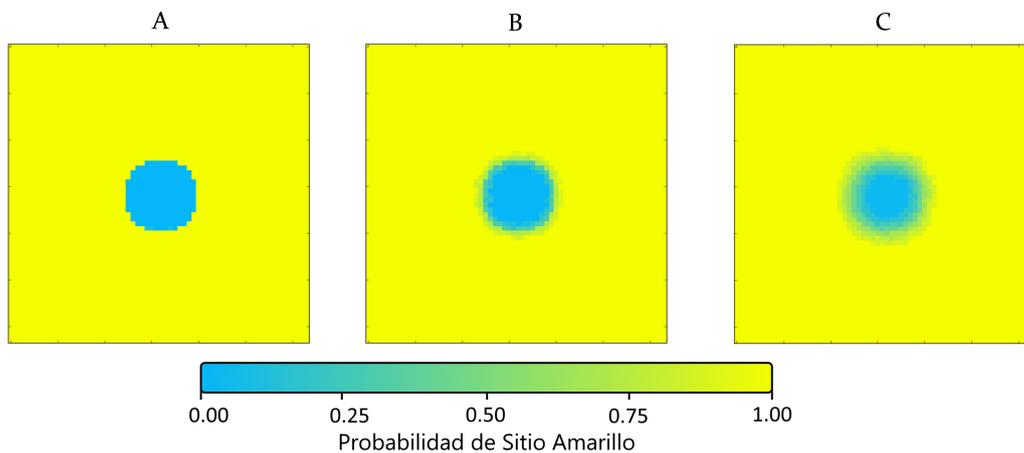


Figura 6.1: Probabilidad de encontrar un sitio Amarillo a distintos tiempos de evolución, para apatía nula. A: $t = 0$. B: $t = 1$. C: $t = 5$. Promedio sobre 600 realizaciones

El radio inicial es $r = 8$. Al evolucionar la condición inicial, en general el radio aumenta. Podemos encontrar la probabilidad de encontrar un sitio Amarillo $P^{Am}(t)$ promediando sobre muchas realizaciones. La figura 6.1 muestra esta probabilidad a distintos tiempos (tiempo de Monte Carlo), la cual muestra un comportamiento difusivo esperado: un flujo de probabilidad desde los sitios donde es alta hacia sitios donde es baja.

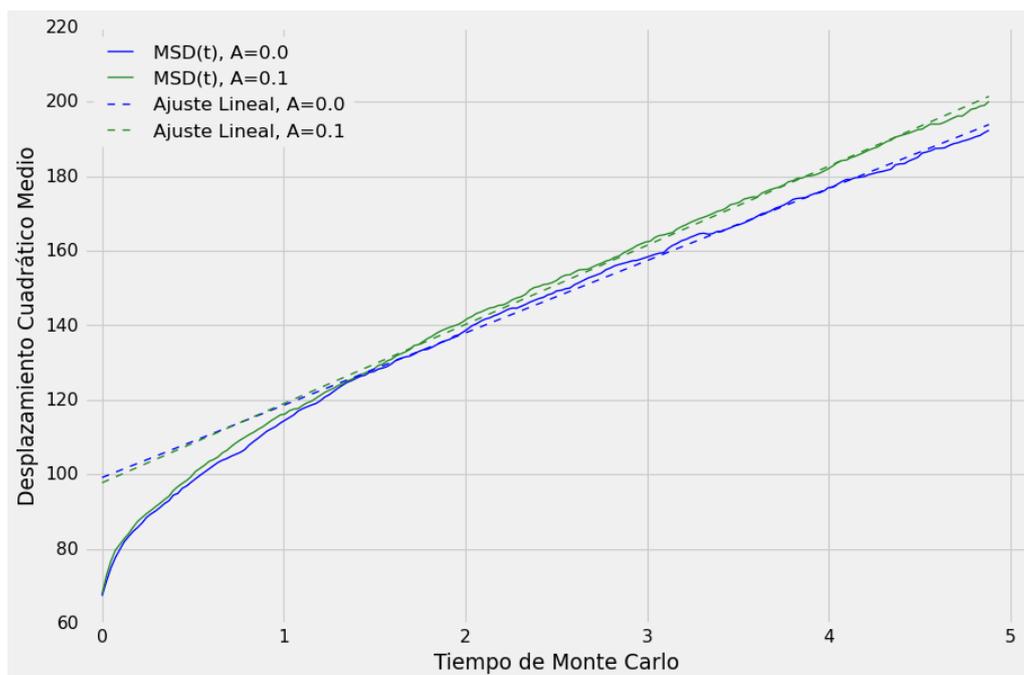


Figura 6.2: Desplazamiento cuadrático medio en función del tiempo, para dos valores de apatía bajos. Pendiente para apatía nula: 19,40(9), pendiente para apatía 0,1: 20,0(1).

El desplazamiento cuadrático medio (MSD por sus siglas en inglés) $\langle r^2(t) \rangle$ crece linealmente con el tiempo en procesos difusivos. En la figura 6.2 se observa que el MSD tiene una dependencia lineal con el tiempo, para apatías $A = 0,0$ y $A = 0,1$.

Se realizaron ajustes lineales, con lo que se obtuvieron las pendientes 19,40(9) y 20,0(1) respectivamente. Estas pendientes tienen una relación con el coeficiente de difusión D . La relación usual es $\langle r^2(t) \rangle = 4Dt$. Sin embargo esto no se cumple, porque la ecuación E 6.30 no es *exactamente* una ecuación de difusión, sino que es una ecuación de comportamiento similar, pero que no tiene el operador laplaciano (ecuación E 6.28).

Sin embargo, se observa que la pendiente decrece con la apatía, lo cual es esperable debido a la dependencia del coeficiente de difusión $D(A) = 1/(1 - A)$.

La determinación de la relación entre el MSD y el coeficiente de difusión D , y la comprobación precisa de la dependencia del coeficiente de difusión con la apatía son temas de estudio que quedarán a futuro y no fueron abordados en este trabajo.

Conclusiones

En este trabajo se estudió la modelización de la dinámica de opinión de una población, con la aplicación de formalismos y técnicas provenientes de la física y la matemática, para ayudar a establecer algunas características fundamentales de este proceso complejo.

Se utilizó una generalización a un modelo de formación de opinión ampliamente establecido en la literatura científica [5, 10, 17, 19, 23, 24], el modelo de Sznajd, cuya interacción modela la forma en la que, en una sociedad, se debaten dos posiciones ideológicas. Inicialmente propuesto para una cadena unidimensional de agentes [18], se generalizó el modelo a dos dimensiones. Además se propuso también la adición de una fracción de individuos neutrales al debate.

Esto da lugar a un espacio de configuración, denominado mapa ideológico, en el que se distribuyen las opiniones. Este mapa fue considerado como una grilla cuadrada, en donde inicialmente, cada celda del mapa representa la opinión o posición ideológica asociada a un agente. Se supuso, además, que inicialmente había dos ideas activas y una neutral. Se verificó que de la dinámica del modelo emerge una tercera posición ideológica. Esta respuesta se debe principalmente a la interacción a segundos vecinos del modelo.

Además, se estudió cómo las condiciones iniciales afectan la respuesta que puede dar el sistema. Se han propuesto dos tipos de condiciones iniciales, las condiciones iniciales aleatorias y las condiciones iniciales estructuradas.

Se mostró y estudió el caso en el que las condiciones iniciales son aleatorias y la adhesión de ambas posiciones es igual. Se replicaron los resultados encontrados por Gaudiano et. al (2019) [20], referidos a la probabilidad de ganar de cada posición. Existe una transición de fase correspondiente a un reajuste topológico de la red que impide la formación de la tercera posición, y se determinaron dos regímenes, uno de bajas apatías y otro de altas apatías. Se realizó además, un análisis extensivo de la adhesión de cada posición, mostrando que la posición ganadora, domina el mapa ideológico en el régimen de baja apatía, mientras que en el régimen de alta apatía ambas posiciones coexisten con adhesiones comparables.

Se generalizó además para adhesiones iniciales distintas, en el cual se encontró que la emergencia de la tercera posición también es susceptible a estas adhesiones iniciales. En particular, la probabilidad de ganar de esta posición es máxima cuando las adhesiones iniciales de las otras dos posiciones son iguales.

Se estudió el caso de condiciones iniciales estructuradas en la cual el régimen de alta apatía cambia completamente, permitiendo la emergencia de la tercera posición. La transición de fase desaparece, lo que muestra cómo las condiciones topológicas iniciales provocan un serio reajuste en la estructura de la red. Esto replica parcialmente los resultados encontrados por Gaudiano et. al (2019) [20], sin embargo, una diferencia es que no se encontró una ventaja significativa para la posición más estructurada.

Se estudió también, el sistema desde la complejidad estadística, utilizando las distribuciones de probabilidad de un parámetro importante en la elección, que indica por cuánto gana el primer lugar respecto al segundo lugar. A partir del cambio de comportamiento de las distribuciones se puede inferir la transición de fase. Además, esto condujo a la implementación de otra técnica de estudio, el plano complejidad-entropía, y las distancias entre distribuciones. Se confirmó que la máxima complejidad tiene lugar alrededor de la transición de fase. Por lo tanto, la transición de fase puede ser el resultado de un fuerte cambio en la topología de la red y también de la consecuencia en la complejidad propia que desarrolla el sistema.

Por último, se propuso un modelo teórico para explicar la dinámica del sistema. Este modelo se basó en la construcción de una ecuación maestra y usando aproximaciones de campo medio, se encontró que la probabilidad de que un sitio dado tenga una dada opinión fluye siguiendo una ley de difusión.

Trabajos Futuros

El trabajo realizado, por un lado representa una revisión, validación y generalización de trabajos anteriores [20, 36]. Por otro lado, las hipótesis impuestas y resultados obtenidos pueden dar lugar a nuevas líneas de investigación.

En cuanto al modelo:

- En este trabajo sólo se considera la geometría del mapa ideológico como una grilla cuadrada simple. Un paso natural sería generalizar esta geometría a redes complejas y estudiar su impacto en los resultados.
- La interacción proporcionada por el modelo es siempre de la misma manera y no evoluciona con el tiempo. Es así que aquí se abren diferentes modelos y situaciones a tener en cuenta. Por ejemplo, considerar interacciones a primeros y a segundos vecinos, o considerar que los neutrales pueden interactuar con los activos y por lo tanto cambiar su apatía. Del mismo modo, un activo puede cambiar de opinión y pasar a ser neutro. En otras palabras, hacer que la apatía deje de ser un parámetro constante y se transforme en una variable.
- Hasta el momento solo se ha considerado la interacción entre individuos para el cambio de opinión del sistema, pero existen entidades externas al sistema que pueden influenciarlo, como la propaganda, los medios masivos de comunicación y las redes sociales. Estas influencias son características por tener largo alcance y se podría considerar modelarlas.

En cuanto a los resultados:

- Calcular los exponentes críticos característicos de la transición de fase, encontrando así la clase de universalidad del modelo.
- Realizar un análisis de adhesión en el caso en que las condiciones iniciales son estructuradas.
- Estudiar más observables y su complejidad estadística para determinar bajo qué condiciones el sistema muestra mayor correlación y estructura interna.
- Encontrar una relación entre el desplazamiento cuadrático medio y el coeficiente de difusión, en el contexto de la aproximación de campo medio del modelo.

A. Apéndice: Detalles de la Implementación

La implementación numérica del modelo de Sznajd tiene detalles de ejecución o desarrollo, que pueden ser de importancia si uno desea reproducirlo. En particular, se tomaron criterios a la hora de definir la convergencia y el conteo de adherentes a cada posición.

En general, uno define el estado estacionario a partir de la convergencia de los observables a un valor constante. En nuestro caso, el mismo mapa ideológico converge a un estado estacionario, que deja de evolucionar en el tiempo. Para condiciones iniciales aleatorias, se utiliza el siguiente criterio para afirmar que se llegó al estado estacionario:

Sea la matriz de posiciones ideológicas M a un tiempo determinado t , y a otro tiempo, posterior, t' ⁹, entonces se define el cambio C en $\Delta t = t' - t$ como:

$$C(\Delta t) = \sum_{i,j} c_{ij}$$

Con:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & M_{ij}(t) \neq M_{ij}(t') \\ 0 & M_{ij}(t) = M_{ij}(t') \end{cases}$$

Se define además un umbral ζ tal que si $C(\Delta t) < \zeta$, entonces afirmamos haber llegado al estado estacionario. Es decir, requerimos que se realicen menos cambios al mapa ideológico que los tolerados, en el último intervalo de tiempo Δt .

Como ejemplo, para el sistema de tamaño $L = 64$ y condiciones iniciales aleatorias, se utilizaron los valores $\Delta t = 0,1$ (400 iteraciones), $\zeta = 3$. Sin embargo estos valores deben ser ajustados para distintos tamaños del sistema. Cabe destacar que este criterio de convergencia no se utilizó para condiciones iniciales estructuradas.

En el caso de condiciones iniciales estructuradas, se construye una lista con todos los agentes M_{ij} activos que pueden evolucionar con una iteración de Sznajd. Es decir que tienen al menos un segundo vecino activo con opinión distinta. Luego de realizar una iteración, se actualiza esta lista. Se considera que se llegó al estado estacionario cuando la cantidad de elementos en esta lista es menor que una cantidad umbral ξ .

El conteo de adherentes a cada posición tampoco es trivial. La posición Verde está presente sólo a través de un patrón sobre la red, es decir que si bien la matriz M sólo posee dos valores (activos) posibles, no es correcto asociarlos de manera directa a las dos posiciones: Amarillo y Celeste.

Hay diversos criterios para contabilizar la adherencia de la posición Verde. Varios fueron considerados, y los resultados difieren sólo levemente. El criterio con el que se muestran todos los resultados del presente trabajo es el siguiente:

M_{ij} será considerado Verde si tiene 2 o menos primeros vecinos apáticos, y los que son activos tienen un valor distinto, es decir, $M_{ij} \neq M_{mn}$, $(m, n) \in \Gamma_a(i, j)$ (el conjunto de primeros vecinos activos del sitio (i, j)). De lo contrario, será considerado Amarillo o Celeste dependiendo del valor de M_{ij} .

⁹En la práctica uno comprueba si se cumple la condición cada cierto número de iteraciones realizadas.

B. Apéndice: Consecuencias del Colapso de las Curvas

Para un dado tamaño del sistema L , se encontró una curva de probabilidad de ganar de la posición Verde P en función de la apatía A , la cual fue ajustada por una función:

$$P(A) = p_1 + \frac{p_0 - p_1}{1 + (A/A_{crit})^q}$$

Donde p_1 es el límite para $A \rightarrow 1$, p_0 es el límite para $A \rightarrow 0$, que para el caso de la posición Verde son $p_0 = 0,5$ y $p_1 = 0$. A_{crit} es la apatía crítica (donde la función tiene pendiente máxima), q está asociado al valor de la pendiente máxima, es decir que tan bruscamente cambia la función en la apatía crítica. Cabe notar que cada curva tiene su valor de apatía crítica, pero todas son muy similares.

Para cada valor del tamaño L obtenemos una curva de probabilidad de ganar distinta, por lo que tiene dependencia con L . Sea $A^* = A - A_{crit}$, entonces la probabilidad es función de estas dos variables:

$$P = P(A^*, L) \quad (\text{E B.31})$$

Si en lugar de graficar P vs A^* , graficamos P vs $A^* L^s$ con un valor de $s = 0,78$, todas las curvas colapsan en una sola. Esto indica que P es función de A^* y L a través del producto:

$$P(A^*, L) = P(A^* L^s) \equiv f(\alpha) \quad (\text{E B.32})$$

Para una función f de una sola variable: $\alpha = A^* L^s$, entonces estamos graficando los pares $(\alpha, f(\alpha))$ y se perdió cualquier dependencia explícita con el tamaño. Derivando la ecuación E B.32:

$$\frac{\partial P}{\partial A^*}(A^*, L) = L^s P'(A^* L^s) \equiv L^s f'(\alpha) \quad (\text{E B.33})$$

Como consecuencia, graficar $L^{-s} \frac{\partial P}{\partial A^*}$ vs $A^* L^s$ debería colapsar las derivadas, dado que:

$$L^{-s} \frac{\partial P}{\partial A^*}(A^*, L) = L^{-s} L^s f'(\alpha) = f'(\alpha) \quad (\text{E B.34})$$

Una vez más la dependencia explícita con L se pierde, porque estamos graficando los pares $(\alpha, f'(\alpha))$.

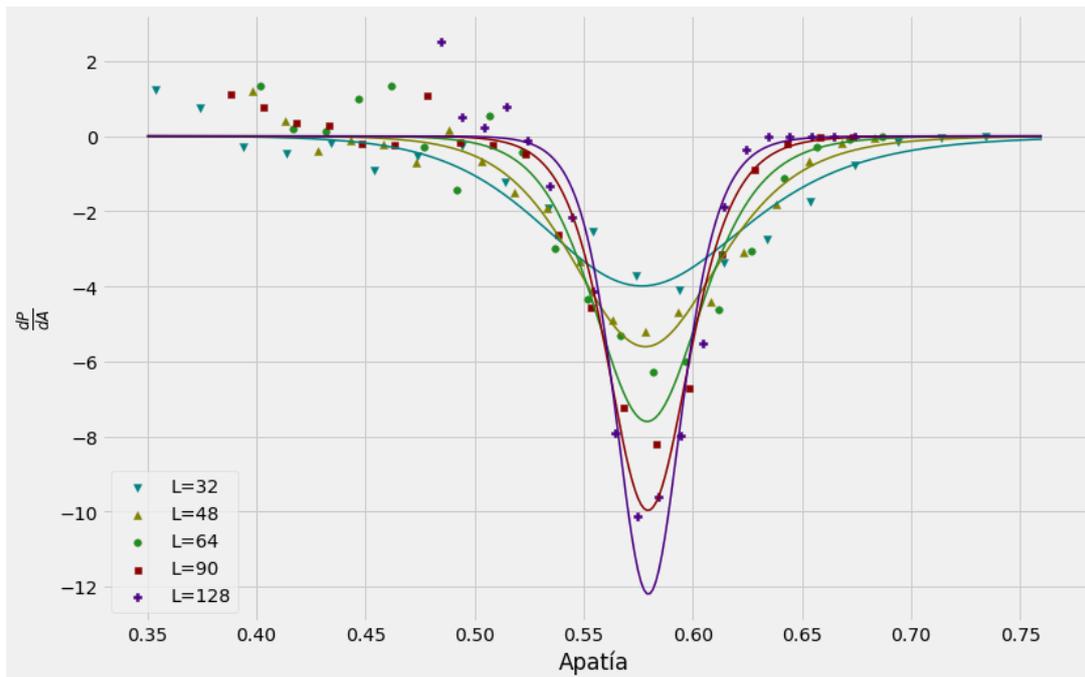


Figura B.1: Derivadas de las curvas de probabilidad de ganar de la posición verde en función de la apatía para distintos tamaños del sistema. Cada punto se promedió sobre 2000 realizaciones.

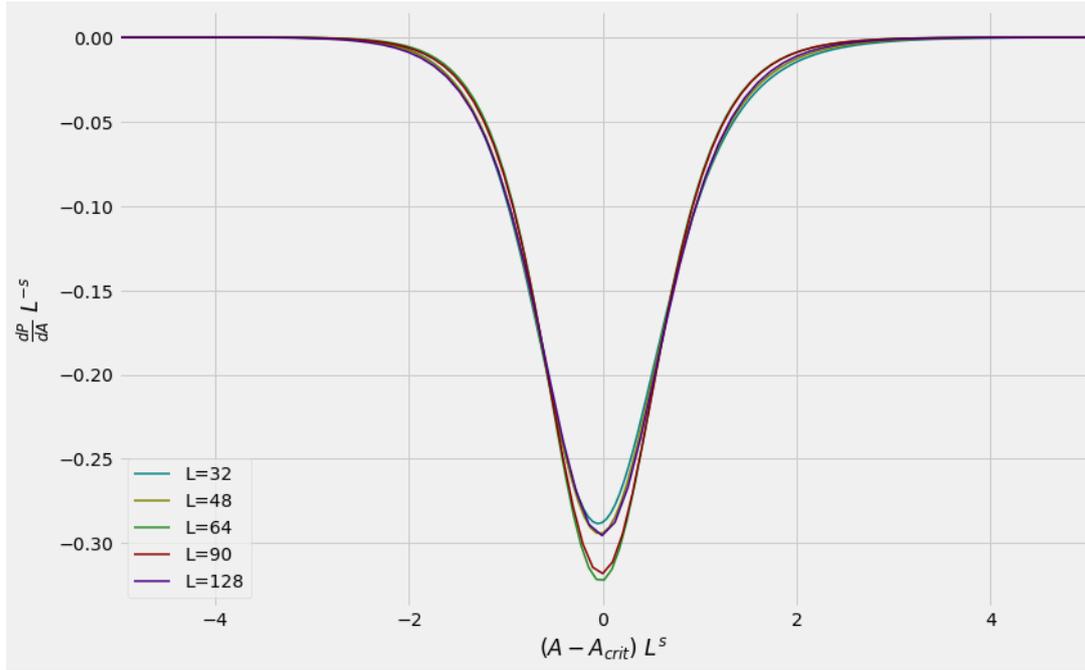


Figura B.2: Colapso de las curvas derivadas de la figura anterior: $L^{-s} \frac{\partial P}{\partial A^*}$ vs $A^* L^s$.

Efectivamente, la figura B.2 muestra que las derivadas colapsan en el gráfico $L^{-s} \frac{\partial P}{\partial A^*}$ vs $A^* L^s$. Esto quiere decir que cuando L crece, la derivada de la curva respecto a la apatía también crece.

De hecho, de la ecuación E B.33 se puede ver que la derivada crece con el tamaño proporcionalmente a L^s , y el ancho característico (FWHM) de la curva derivada decrece con el tamaño proporcionalmente a L^{-s} . Simplemente hay que reconstruir la derivada que explícitamente depende del tamaño a partir de la función f' :

$$\left(A^*, \frac{\partial P}{\partial A^*} \right) \leftarrow (\alpha, L^s f'(\alpha L^s)) \quad (\text{E B.35})$$

El valor máximo de la derivada (valor absoluto) para cualquier tamaño es: $f'(0)L^s \sim 0,31 L^{0,78}$

C. Apéndice: Algoritmo de Generación de Patrones Fractales

El mapa ideológico se representa como una matriz M de tamaño $L \times L$, la cual inicializamos en cero. Para construir un patrón de dimensión D y área A (que cumplan la ecuación E 5.19) se debe cumplir:

$$N_k \approx A 2^{-kD} \quad (\text{E C.36})$$

Donde N_k es un arreglo de números enteros de largo $m = \lfloor \log_2(L/2) \rfloor$ que indica la cantidad de *celdas ocupadas* de tamaño k de la matriz M .

Una celda de tamaño k es una sub-matriz de dimensiones $k \times k$ de M , y está ocupada, si tiene al menos un elemento no nulo (en nuestro caso, de valor igual a 1).

Para generar estos números, consideramos una tolerancia o error en la dimensión ξ , y seguimos los siguientes pasos:

- Se genera N_k a partir de la parte entera una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = A 2^{-kD}$.
- Se confirma que este arreglo cumple $N_k \leq N_{k-1} \leq 4 N_k$ (y en particular $1 \leq N_m \leq 4$). De lo contrario, se vuelven a generar hasta que se satisfaga esta condición.
- Se calcula la pendiente D' de la recta $-\log_2(N_k)$ vs k . Si se cumple que está dentro del error, es decir $|D' - D| < \xi$, entonces se continúa con el algoritmo. De lo contrario, se vuelve a generar el arreglo hasta que se satisfaga esta condición.

Una vez generado este arreglo, procedemos a llenar la matriz M con elementos iguales a 1 que forman el patrón. Para esto construimos una lista con todos elementos de la matriz y un contador R , y repetimos el siguiente proceso hasta que el contador R llega a poner A puntos o fallar en construir el patrón:

- Se elige un elemento (i, j) al azar de la lista. El elemento se remueve de la lista.
- Vamos a proponer cambiar el valor de la matriz en este sitio a 1, es decir $M_{ij} = 1$. Se realiza dicho cambio.
- Calculamos los números de ocupación S_k actuales de la matriz. Para esto debemos descomponer M sub-matrices de tamaño $k \times k$ y determinar cuántas tienen algún elemento no nulo.
- Si $S_k > N_k$ para algún k , entonces revertimos el cambio, de lo contrario lo conservamos y aumentamos el valor del contador $R = R + 1$.
- Detenemos el proceso cuando colocamos todos los puntos, es decir, $R = A$

Al completar el proceso obtenemos un patrón fractal que cumple que posee números de ocupación N_k (en particular $N_0 = A$) y por lo tanto tiene dimensión fractal D' que difiere de la dimensión propuesta D a lo sumo en ξ .

Si en su lugar, se recorren todos los elementos de la lista y aún no se obtiene el patrón, entonces se debe empezar el proceso de llenado de la matriz desde cero.

Para generar dos patrones fractales de dos dimensiones D_1 y D_2 a la vez, usamos un proceso similar. Donde generamos dos arreglos N_{k1} y N_{k2} independientemente, y luego el proceso de llenado de la matriz es similar, pero se debe tener en cuenta dos valores de llenado (por ejemplo $M_{ij} = 1$ y $M_{ij} = 2$). Además se debe tener dos contadores independientes, y hay que ser cuidadoso de no sobrescribir elementos de una patrón para generar el otro.

Bibliografía

- [1] S. E. Asch. «Effects of group pressure upon the modification and distortion of judgments.» En: *Groups, leadership and men; research in human relations* (1951). Ed. por H. Guetzkow, págs. 177-190.
- [2] S. Milgram. *Obedience to authority: An experimental view*. Scotland, UK: HarperCollins, 1974.
- [3] Haoxiang Xia, Huili Wang y Zhaoguo Xuan. «Opinion Dynamics: A Multidisciplinary Review and Perspective on Future Research». En: *International Journal of Knowledge and Systems Science* 2 (oct. de 2011), págs. 72-91. DOI: [10.4018/jkss.2011100106](https://doi.org/10.4018/jkss.2011100106).
- [4] Galit Shmueli. «To explain or to predict?» En: *Statistical Science* 25.3 (2010), págs. 289-310.
- [5] Claudio Castellano, Santo Fortunato y Vittorio Loreto. «Statistical Physics of Social Dynamics». En: *Reviews of Modern Physics* 81.2 (mayo de 2009), págs. 591-646. DOI: [10.1103/revmodphys.81.591](https://doi.org/10.1103/revmodphys.81.591). URL: <https://doi.org/10.1103/revmodphys.81.591>.
- [6] Frank Schweitzer. «Sociophysics». En: *Physics Today* 71.2 (2018), págs. 40-46. DOI: [10.1063/PT.3.3845](https://doi.org/10.1063/PT.3.3845). URL: <https://doi.org/10.1063/PT.3.3845>.
- [7] Wolfgang Weidlich. «Physics and social science — The approach of synergetics». En: *Physics Reports* 204.1 (1991), págs. 1-163. ISSN: 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(91\)90024-G](https://doi.org/10.1016/0370-1573(91)90024-G). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739190024G>.
- [8] Robert Axelrod. «The Dissemination of Culture: A Model with Local Convergence and Global Polarization». En: *The Journal of Conflict Resolution* 41.2 (1997), págs. 203-226. ISSN: 00220027, 15528766. URL: <http://www.jstor.org/stable/174371>.
- [9] Thomas C. Schelling. «Dynamic models of segregation». En: *The Journal of Mathematical Sociology* 1.2 (1971), págs. 143-186. DOI: [10.1080/0022250X.1971.9989794](https://doi.org/10.1080/0022250X.1971.9989794). URL: <https://doi.org/10.1080/0022250X.1971.9989794>.
- [10] Americo Bernardes, D. Stauffer y János Kertész. «Election results and the Sznajd model on Barabasi network». En: *Physics of Condensed Matter* 25 (ene. de 2002), págs. 123-127. DOI: [10.1140/e10051-002-0013-y](https://doi.org/10.1140/e10051-002-0013-y).
- [11] Marko Jusup et al. «Social physics». En: *Physics Reports* 948 (feb. de 2022), págs. 1-148. DOI: [10.1016/j.physrep.2021.10.005](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2021.10.005). URL: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2021.10.005>.
- [12] Michael Macy y Andreas Flache. «Social Dynamics from the Bottom Up: Agent-Based Models of Social Interaction». En: *The Oxford Handbook of Analytical Sociology*. Oxford University Press, ene. de 2011. ISBN: 9780199215362. DOI: [10.1093/oxfordhb/9780199215362.013.11](https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199215362.013.11). URL: <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199215362.013.11>.
- [13] Serge Moscovici y Marisa Zavalloni. «The Group as a Polarizer of Attitudes». En: *Journal of Personality and Social Psychology* 12 (jun. de 1969), págs. 125-135. DOI: [10.1037/h0027568](https://doi.org/10.1037/h0027568).
- [14] Jan Lorenz. «Continuous Opinion Dynamics under Bounded Confidence: A Survey». En: *International Journal of Modern Physics C* 18.12 (dic. de 2007), págs. 1819-1838. DOI: [10.1142/S0129183107011789](https://doi.org/10.1142/S0129183107011789). URL: <https://doi.org/10.1142/S0129183107011789>.
- [15] L. Festinger, K.W. Back y S. Schachter. *Social Pressures in Informal Groups: A Study of Human Factors in Housing*. Research Center for Group Dynamics series. Stanford University Press, 1963. ISBN: 9780804701730.
- [16] María Gimenez, Jorge A. Revelli y Horacio Wio. «Non Local Effects in the Sznajd Model: Stochastic resonance aspects». En: *ICST Transactions on Complex Systems* 10-12 (nov. de 2012). DOI: [10.4108/trans.cs.2012.10-12.e3](https://doi.org/10.4108/trans.cs.2012.10-12.e3).
- [17] Katarzyna Sznajd-Weron. «Sznajd model and its applications». En: *Acta Physica Polonica B* 36 (mayo de 2005).
- [18] Katarzyna Sznajd-Weron y Jozef Sznajd. «Opinion Evolution in Closed Community». En: *International Journal of Modern Physics C* 11 (ene. de 2001). DOI: [10.1142/S0129183100000936](https://doi.org/10.1142/S0129183100000936).
- [19] D. Stauffer, A. O. Sousa y S. Moss De Oliveira. «Generalization to Square Lattice of Sznajd Sociophysics Model». En: *International Journal of Modern Physics C* 11.06 (sep. de 2000), págs. 1239-1245. ISSN: 0129-1831, 1793-6586. DOI: [10.1142/S012918310000105X](https://doi.org/10.1142/S012918310000105X).
- [20] Marcos E. Gaudiano y Jorge A. Revelli. «Spontaneous emergence of a third position in an opinion formation model». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 521 (mayo de 2019). DOI: [10.1016/j.physa.2019.01.078](https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.01.078).
- [21] Kurt Binder y Dieter W. Heermann. *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics*. Graduate Texts in Physics. Springer Berlin - Heidelberg, 2010. Cap. 2.3. ISBN: 978-3-642-03162-5.
- [22] Moshe Levy. «Social phase transitions». En: *Journal of Economic Behavior & Organization* 57.1 (2005), págs. 71-87. ISSN: 0167-2681. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jebo.2003.11.013>.

- [23] Katarzyna Sznajd-Weron, M. Tabiszewski y André Timpanaro. «Phase transition in the Sznajd model with independence». En: *EPL (Europhysics Letters)* abs/1106.0934 (jun. de 2011). DOI: [10.1209/0295-5075/96/48002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/96/48002).
- [24] Matheus Calvelli, Nuno Crokidakis y Thadeu J.P. Penna. «Phase transitions and universality in the Sznajd model with anticonformity». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 513 (2019), págs. 518-523. ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.09.023>.
- [25] James P. Crutchfield y Karl Young. «Inferring statistical complexity». En: *Phys. Rev. Lett.* 63 (2 jun. de 1989), págs. 105-108. DOI: [10.1103/PhysRevLett.63.105](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.63.105). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.63.105>.
- [26] Thomas M. Cover y Joy A. Thomas. *Entropy, Relative Entropy, and Mutual Information*. John Wiley & Sons, Ltd, 2005. Cap. 2, págs. 13-55. ISBN: 9780471748823. DOI: <https://doi.org/10.1002/047174882X.ch2>.
- [27] R. López-Ruiz, H.L. Mancini y X. Calbet. «A statistical measure of complexity». En: *Physics Letters A* 209.5 (1995), págs. 321-326. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00867-5](https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00867-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960195008675>.
- [28] David P. Feldman y James P. Crutchfield. «Measures of statistical complexity: Why?». En: *Physics Letters A* 238.4 (1998), págs. 244-252. ISSN: 0375-9601. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(97\)00855-4](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00855-4). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960197008554>.
- [29] P. W. Lamberti et al. «Intensive entropic non-triviality measure». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 334.1 (2004), págs. 119-131. ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.11.005>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437103010963>.
- [30] William Hart et al. «Feeling Validated Versus Being Correct: A Meta-Analysis of Selective Exposure to Information». En: *Psychological bulletin* 135 (ago. de 2009), págs. 555-88. DOI: [10.1037/a0015701](https://doi.org/10.1037/a0015701).
- [31] Andreas Kastenmüller et al. «Selective exposure: The impact of collectivism and individualism». En: *The British journal of social psychology / the British Psychological Society* 49 (dic. de 2010), págs. 745-63. DOI: [10.1348/014466609X478988](https://doi.org/10.1348/014466609X478988).
- [32] K. Falconer. *Techniques in Fractal Geometry*. Wiley, 1997. ISBN: 9780471957249.
- [33] Sara Encarnação et al. «Fractal cartography of urban areas». En: *Scientific Reports* 2.1 (2012), pág. 527. ISSN: 2045-2322. DOI: [10.1038/srep00527](https://doi.org/10.1038/srep00527). URL: <https://doi.org/10.1038/srep00527>.
- [34] Marcos E. Gaudiano. «An entropical characterization for complex systems becoming out of control». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 440 (2015), págs. 185-199. ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.08.023>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437115006780>.
- [35] Marcos E. Gaudiano, Carlos Lucca y Jorge A. Revelli. «Entropic Analysis of Public Transport System Strikes». En: *Advances in Complex Systems* 24 (mar. de 2022). DOI: [10.1142/S0219525922500023](https://doi.org/10.1142/S0219525922500023).
- [36] Marcos E. Gaudiano y Jorge A. Revelli. «Entropical analysis of an opinion formation model presenting a spontaneous third position emergence». En: *The European Physical Journal B* 94.4 (abr. de 2021). DOI: [10.1140/epjb/s10051-021-00098-8](https://doi.org/10.1140/epjb/s10051-021-00098-8). URL: <https://doi.org/10.1140/epjb/s10051-021-00098-8>.
- [37] Marcos E. Gaudiano y Jorge A. Revelli. «On the role of structured initial conditions in the Schelling model». En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 587 (2022). ISSN: 0378-4371. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.126476>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437121007494>.
- [38] N.G. Van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland Personal Library. Elsevier Science, 1992. Cap. 4,5. ISBN: 9780080571386.