EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS X JORNADAS
VOLUMEN 6 (2000), Nº 6

Pio García
Sergio H. Menna
Víctor Rodríguez
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Predicados difusos: tolerancia y compatibilidad

*Luis Adrián Urtubey**

Quizás el rasgo más notorio de los predicados vagos o difusos – al que deben en gran parte su mala fama – es que son proclives a producir paradojas al tipo de la llamada paradoja del 'sorites' o argumentos falaces como los llamados '*argumentos resbaladizos*'.

Uno de los tantos diagnósticos sobre este fenómeno lleva a señalar como un rasgo distintivo de estos predicados el llamado 'principio inductivo': la definición de los predicados vagos implica que algunas diferencias son muy pequeñas como para hacer efectivamente alguna diferencia.

Pero al mismo tiempo, resulta que estos predicados también son 'discriminantes', en el sentido que se aplican incluso para los elementos últimos y más simples. Por ejemplo, parece que pueden 'discriminar' sobre el efecto de agregar o quitar un grano de arena a un montón de arena. Esta oposición lleva a otro principio al que Sorensen da el nombre de sorites: No hay predicados que sean 'inductivos' y 'discriminantes'. Es decir, ningún predicado puede satisfacer estas condiciones, si se acepta la lógica clásica.[1]

Con estos dos aspectos se relaciona lo que Crispin Wright denominara la 'tolerancia' de los predicados vagos, que resulta justamente de que no tienen límites de aplicación precisos. Es decir, que no hay una división precisa entre casos en los cuales se aplican claramente y casos en los cuales no se aplican, 'tolerando' de este modo cambios marginales en los parámetros decisivos para su aplicación. Con respecto a cualquier predicado difuso existe, por consiguiente, la noción de un "grado positivo de cambio", insuficiente no obstante, para alterar su aplicación correcta.[2]

Poı su parte, definir a los predicados difusos por su carencia de límites precisos lleva a definirlos como aquellos a los cuales no se aplica la ley de tercero excluido (LTE) que implica a su vez el principio de bivalencia (BIV), dado que si un objeto *b* está en un área difusa entre 'claramente H' y 'claramente no H', entonces no se puede afirmar:[3]

Hb v ~Hb (LTE)

ni

"Hb" es verdadera o falsa (BIV)

Aún más, se puede pensar que tampoco cabe mantener en este caso el principio de no contradicción:

~(Hb & ~Hb) (PNC)

Observaciones como estas han llevado a considerar que se debe abandonar la lógica clásica en este ámbito de razonamiento, en cuanto no se pueden sostener principios teóricos y metateóricos que tienen plena vigencia en ella.

No obstante, si bien este análisis puede parecer correcto, la conclusión que se obtiene puede ser algo apresurada. En particular, trataremos de mostrar que la mencionada 'tolerancia' de los predicados difusos, no se relaciona con la ausencia de las leyes lógicas clásicas ni tiene como efecto que estas leyes no se verifiquen en absoluto en el ámbito de aplicación de estos predicados. La dificultad, que lleva a esa conclusión, radica en la imposibilidad de

* Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba.

distinguir en la lógica clásica las nociones de 'contradicción' y de 'incompatibilidad', en tanto que la segunda queda irremediablemente reducida a la primera.[4] Si, en cambio, se produce esta distinción, puede verse entonces que la tolerancia de los predicados vagos, tiene que ver también con la noción de 'compatibilidad', sin excluir del todo la no contradicción y el principio de tercero excluido.

Retículos

'Una operación de consecuencia en un conjunto de enunciados E, entendida como una función C: P(E) $\rightarrow$ P(E), define una relación de orden o quasi-orden, generalmente asociada con la implicación, que tiene propiedades familiares'.[5]

Cada Lógica – clásica, intuicionista, trivalente, etc. – tiene asociado el tipo de retículo que le corresponde: álgebras booleanas, I-retículos, álgebras quasibooleanas, respectivamente. En otro sentido, las lógicas se pueden construir naturalmente a partir de diversas clases de retículos, formando las conectivas a partir de las operaciones *inf.* y *sup.* del retículo.

Definición

(i) Sea $P = \langle A, \leq \rangle$ un conjunto ordenado. Una involución es un mapeo $x \rightarrow x'$ que satisface:

PC1 : $x \leq y \Rightarrow x' \geq y'$

In : $x'' = x$

(ii) Un retículo *ortocomplementado* (OL) es un álgebra $\langle A, \cup, \cap, 0, 1, ' \rangle$, tal que $\langle A, \cup, \cap, 0, 1 \rangle$ es un retículo con elemento máximo y mínimo 1, 0 respectivamente, y ' es una involución y complemento.

Definición

Un retículo *distributivo* es un retículo que satisface

Dist. $(x \cap y) \cup (x \cap z) = x \cap (y \cup z)$

En un álgebra de Boole o retículo ortocomplementado distributivo se tiene la estructura $L = \langle A, \cup, \cap, ', 0, 1 \rangle$ del retículo ortocomplementado donde el complemento ' satisface además: $(x \cup y)' = x' \cap y'$. Cuando este es el caso se puede usar las siguientes propiedades:

1. $(x \cap y)' = (x' \cup y')$
2. $x \leq y' \Rightarrow x \cap y = 0$
3. $x \cup x' = 1$
4. $x \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1$[6]
5. $0' = 1$

En este ámbito se dice que $x \in L$ es *contradictorio* con $y \in L$ si $x \leq y'$ y x es *incompatible* con y si $x \cap y = 0$. De este modo, contradicción implica incompatibilidad y ambas condiciones son equivalentes siempre que $x = (x \cap y) \cup (x \cap y')$ o $y = (y \cap x) \cup (y \cap x')$. Por lo tanto en un álgebra booleana ambas relaciones colapsan, son equivalentes.[7] Asimismo, ya que el único elemento $x \in L$ que es autocontradictorio ($x \leq x'$) es $x = 0$ y su complemento ($0' = 1$) es contradictorio solamente con 0, en OL la ley de no-contradicción $x \cap x' = 0$ es equivalente a decir que para todo $x \in L$ el elemento $x \cap x'$ es autocontradictorio.[8] De modo similar, la ley de tercero excluido $(x \cup x') = 1$ equivale a decir que para cada $x \in L$ el elemento $(x \cup x')'$ es autocontradictorio.

En general el concepto lógico de contradicción se define mediante una operación de implicación $\rightarrow$ y una negación $\neg$, como "p es contradictorio con q sii $p \rightarrow \neg q$ es verdadero" y entonces, en particular, "p es autocontradictorio sii $p \rightarrow \neg p$ es verdadero". En un retículo ortocomplementado, la implicación se toma como la implicación material $p \rightarrow q = \neg p \vee (p \wedge q)$, y entonces es " $p \rightarrow q = 1$ sii $p \leq q$". En consecuencia, el único elemento autocontradictorio es $p = 0$, el conjunto vacío, cuando el retículo es un álgebra de conjuntos clásicos.

Representación de predicados nítidos y difusos

Si E es un conjunto, un subconjunto A de E está dado por la función: $\mu_A : E \rightarrow \{0, 1\}$, que se llama la función de pertenencia de A, definida por

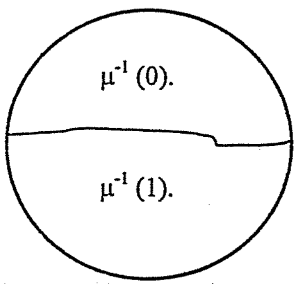
$$\mu_A(x) = \begin{Bmatrix} 1, si\ x \in A \\ 0, si\ x \notin A \end{Bmatrix}$$

Si al conjunto A se le pone un nombre P (se dice que A = P̲) entonces es:

$x \in A$ si y sólo si "x es P" es una afirmación verdadera.

$\mu_P = \mu_A$ es la función de compatibilidad de P en E, que es por definición igual a la función μ y a la función de pertenencia del conjunto $A = \mu^{-1}(1)$.

El subconjunto $A \subset E$ tal que A = P̲ se dice que es la *extensión clásica* del predicado P en E. En este caso, el predicado P es *nítido* y determina una partición nítida de E:



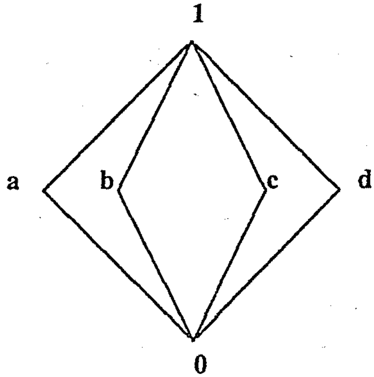
Clasificando E en los dos sobconjuntos P̲ = $\mu^{-1}(1)$ y su complementario.[9]

No todos los predicados actúan sobre un conjunto E de la misma forma. Los predicados que carecen de extensión clásica en E, reciben el nombre de *predicados vagos o difusos* en E. Los predicados de este tipo son graduados o de uso flexible. Si P es vago en E, entonces debe existir algún $x \in E$ tal que la afirmación "x es P" no sea ni verdadera ni falsa, es decir $\mu_P(x)$ no es 0 ni 1.

Dado un conjunto no vacío E, F(E) denota el conjunto $[0,1]^E$ de todos los conjuntos difusos de E. Este conjunto incluye, en particular el conjunto P(E) de las funciones características χ_A de todos los subconjuntos nítidos $A \subset E$ y el conjunto de funciones constantes $\{\mu_r: \mu_r(x) = r$, para todo $x \in E$; $r \in [0, 1]\}$.

Incompatibilidad y contradicción en P(E) y F(E)

Como ya vimos, en OL contradicción implica incompatibilidad: Si $a \leq b'$, entonces $a \cap b \leq b \cap b' = 0$ y $a \cap b = 0$. La conversa no se cumple en general, como se ve en el siguiente retículo con el complemento: $0' = 1$; $1' = 0$; $a' = d$; $b' = c$; $c' = d$; $d' = a$. En este caso $c \cap d = 0$ y no es $c \leq d'$ en tanto $d' = a$.



Por lo tanto, que $a \cap b \neq 0$ es condición suficiente para que a y b no sean contradictorios.

Hay que observar que por este resultado al no implicar en general incompatible a contradictorio en un retículo no booleano como el que resulta para los conjuntos difusos, basta que a y b no sean incompatibles, para que no sean contradictorios, y en general esto se cumple para el álgebra de conjuntos difusos, porque $a \cap a' \neq 0$ en general.

Tolerancia, no-contradicción y tercero excluido

Lo que Crispin Wright denominara la *tolerancia* de los predicados vagos, resulta justamente de que no tienen límites de aplicación precisos. Es decir, que no hay una división precisa entre casos en los cuales se aplican claramente y casos en los cuales no se aplican, 'tolerando' de este modo cambios marginales en parámetros decisivos para su aplicación. Con respecto a cualquier predicado difuso existe, por consiguiente, la noción de un "grado positivo de cambio", insuficiente no obstante, para alterar su aplicación correcta.

En estructuras más generales que las álgebras de Boole, como los retículos ortocomplementados, contradicción e incompatibilidad no son solamente relaciones diferentes sino que la primera es más fuerte que la segunda. De este modo, siguiendo las sugerencias de E. Trillas, parece adecuado extender las leyes de contradicción y tercero excluido usando los siguientes criterios:[10]

-Para cualquier enunciado p, "p y no-p" es autocontradictorio

-Para cualquier enunciado p, "no (p o no-p)" es autocontradictorio.

De este modo, en los retículos ortocomplementados, debido al carácter especial del orden parcial, estas leyes extendidas implican las usuales: "p y no-p es siempre falso" y "p o no-p es siempre verdadera". Ninguna teoría de conjuntos difusos es en general un retículo ortocomplementado (solamente en algunos casos se verifican las leyes $a \cup a' = \mu_1$, $a \cap a' = \mu_0$) pero <F(E), T, S, N> verifica las leyes de NC y TE extendidas, que se afirman para una fórmula α como: "$\alpha \wedge \neg\alpha$ es autocontradictoria" y "$\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ es autocontradictoria", respectivamente.[11]

Sobre la base de estas distinciones se puede concluir que cabe considerar más afín con el análisis de los predicados difusos una lógica en la que, aunque no se sostenga la forma clásica de LTE y NC, tampoco se excluyan estos principios completamente, manteniendo de este modo cierto equilibrio en la estructura que nos permite representar y manejar estos predicados.

Notas

[1] Cfr. R. Sorensen, "The metaphysics of words", *Phil. Studies*, 81, 2-3, 1996.

[2] Wright, C., "On the coherence of vague predicates", *Synth.*, 30, 1975.

[3] Cfr. por ejemplo, Horwich, P., "The nature of vagueness", Phil and Phen. Res. Vol. LVII, No. 4, Dec. 1997.

[4] Cabe advertir aquí que 'compatibilidad' es una relación binaria que es reflexiva y simétrica, llamada usualmente también relación de 'tolerancia'. De hecho está vinculada en el lenguaje de la lógica proposicional con la conectiva más conocida como 'barra de Sheffer', a la que se le da también la denominación de 'incompatibilidad', por razones más que obvias.

[5] Al respecto Cfr. John P. Cleave, *A study of logics*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[6] $x \to y := x' \cup (x \cap y)$ (':=' indica la definición).

[7] Como se sabe por cuestiones más que elementales de teoría de retículos, se dice que un elemento x conmuta con otro y cuando:

$$(x \cap y) \cup (x \cap y') = x$$

Esta relación generalmente no es simétrica. Si L (el retículo) es distributivo, todo par x, y conmuta. Esta es la prueba de la cuestión:

$$x = x \cap 1 = x \cap (y \cup y') = (x \cap y) \cup (x \cap y')$$

De aquí se puede probar que es necesario y suficiente para que sean contradictorios dos elementos incompatibles, que uno conmute con el otro. Esto es así:
Si $x \cap y = 0$ y dado que, $x = (x \cap y) \cup (x \cap y')$, entonces $x = (x \cap y')$ o sea $x \leq y'$. En el otro sentido, si $x \leq y'$, entonces $(x \cap y) = 0$. Así, $(x \cap y) \cup (x \cap y') = 0 \cup x = x$; como también $y \leq x'$, $(x \cap y) \cup (y \cap x') = 0 \cup y = y$.

[8] i.e., el elemento es él mismo una contradicción.

[9] Cfr. Trillas, E. y Terricabras, J.M., "Some remarks on vague preciates", *Theoria*, 10, 1988.

[10] Trillas, E., Alsina, C. y Jacas, J., "On logical connectives for a fuzzy set theory with or without non-empty self contradictions", a publicarse en *Int. Jour. Intell. Syst.* y "On contradictions in fuzzy logic", a publicarse en *Soft Computing*.

[11] Siendo en $\langle F(E), T, S, N \rangle$, T una T-norma y S una T-conorma y N una negación fuerte.