EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS VII JORNADAS
1997

Patricia Morey
José Ahumada
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Horacio Faas
U.N.C.

MULTIVALENCIA Y METALOGICA

Se analizan las condiciones necesarias para que un sistema de lógica pueda operar como metalógica de otro sistema de lógica (o de sí mismo), según las exigencias de veritativo-funcionalidad y las condiciones impuestas por Rescher para que un sistema sea autodescriptivo; en relación con la pretendida supremacía de la lógica bivalente. Se muestra que los sistemas de Lukasiewicz no son autodescriptivos, mientras se sabe que la bivalente sí lo es.

Argumentaré en favor de la lógica bivalente como medio último de expresión de estructuras formales, es decir, intentaré mostrar que en la formulación de cualquier sistema simbólico, uno termina por formular las cosas según la bivalencia. En otros términos : la metalógica final que uno utiliza es bivalente. Sin embargo, esta argumentación no es concluyente en cuanto a que pueda yo demostrar la imposibilidad de formular un sistema mediante otras lógicas, sino que mostraré que una formulación en contrario, la de Rescher (1969), fracasa.

Me centraré en dos aspectos : por un lado, las ventajas de la lógica bivalente en lo que hace a completud funcional ; y por el otro, a que no se da la posibilidad para los sistemas multivalentes de Lukasiewicz de ser autodescriptivos, mientras que la lógica bivalente sí lo es.

Completud funcional

Un sistema de lógica proposicional es funcionalmente completo (con respecto a un grupo de conectivas) si todas sus conectivas pueden definirse a partir de algunas determinadas de ellas. Se dice también del grupo de conectivas iniciales que es funcionalmente completo.

La lógica proposicional clásica es funcionalmente completa ya que todas sus conectivas pueden definirse a partir de grupos de dos de ellas (p.ej., negación y condicional), y aún de una sola (p.ej., la función `flecha' de Sheffer). Existe un conocido y sencillo método absolutamente general para expresar la tabla de verdad de una conectiva cualquiera que liga a un número cualquiera (finito) de variables proposicionales, mediante las conectivas binarias conjunción y disyunción y la unitaria negación: basta con seleccionar los lugares de la tabla en que la conectiva es verdadera, construir mediante negación y conjunción una proposición que sea verdadera sólo en ese lugar, repetir el expediente para cada lugar verdadero de la conectiva inicial, y ligar luego mediante disyunciones a todas ellas en una sola proposición.

La lógica trivalente de Lukasiewicz no es funcionalmente completa a partir de las conectivas más usadas -negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional-, por una razón sencilla: las cinco conectivas a que nos hemos referido se comportan como sus homólogas bivalentes si limitamos los valores a V o F, y no habría entonces manera de expresar una conectiva que uniformemente produjera I en todos sus lugares. Una conectiva unitaria que produjera uniformemente I en todos sus lugares (llamémosla T) tendría esta tabla:

p	Tp
V	I
I	I
I	I

Si, en cambio, se agrega esa conectiva al sistema, se logra otro que sí es funcionalmente completo.[1]

Cabe hacerse la pregunta si un sistema multivalente de infinitos valores puede ser funcionalmente completo. La respuesta es bastante obvia; y negativa. En efecto, si la tabla de verdad de una conectiva tiene infinitos lugares, nunca podremos saber si hemos agotado las apariciones de V en la tabla, lo cual no sólo impide aplicar el sencillo método del que ya hablamos, sino que patentiza la indeterminación obligada de toda cuestión en que aparezca el infinito (por supuesto que no para casos particulares).

Toda lógica de infinitos valores construida a partir de las de Lukasiewicz es, así, funcionalmente incompleta, y también lo es la difusa -que toma como lógica de base la de Lukasiewicz de infinitos valores reales en el intervalo [0,1]-, pero en este caso el problema -si de algún modo pudiere encararse- se complica aún más: la cantidad de lugares de la tabla de verdad de una conectiva difusa tiene la cardinalidad del continuo, y el número total de conectivas posibles, si se aplica la fórmula correspondiente:

$$\mathbf{C = n^{n^{j}}}$$

donde **C** es la cantidad total de conectivas posibles, **n** la cantidad de valores de verdad, y **j** la cantidad de proposiciones que la conectiva liga, resulta en el continuo elevado al continuo (para una cantidad finita de proposiciones), es decir, un infinito de orden superior al del continuo.

Aunque esta indeterminación es insalvable, se puede caracterizar algo a la lógica difusa proposicional, si se admite su isomorfismo con el sistema de Lukasiewicz de infinitos valores reales : podría admitirse, por ejemplo, que sus tautologías son las mismas de $L_{\aleph}$.

---

[1] Esta conectiva -la "función T"- fue introducida por el lógico polaco Jerzy Slupecki en 1936, y fue el mismo Slupecki quien demostró la completud del nuevo sistema. (Cf. Rescher,1969,p.64)

Sistemas autodescriptivos y metalógica

Está bastante extendida la creencia de que la lógica bivalente es la más adecuada para ser usada como metalógica en la consideración teórica de cualquier otra (o de ella misma); lo cual le brindaría una suerte de supremacía que a veces ha sido puesta en duda. Aquí intentaré ubicar el problema en una perspectiva adecuada, ya que me parece que hasta ahora se ha estado equivocando el enfoque. Uno de los apoyos para tal creencia radica en la probada posibilidad de definir conectivas multivalentes mediante bivalentes. Sin embargo, la recíproca también es verdadera (v. Rescher, 1969, p.33).

Según cita Rescher[2], en su libro sobre lógica multivalente Zinov'ev sostiene que: "Todas las construcciones conocidas [de lógicas multivalentes]. . . parten de la presuposición de la bivalencia de las proposiciones [que asignan valores de verdad].", y, además: "El metalenguaje del lenguaje de la lógica trivalente pertenece a la bivalente; i.e., las proposiciones del tipo ‘*p* tiene el valor de verdad *i*' son bivalentes". Como dice Rescher con respecto a la primera cita, puede que sea así, pero quizás se describa una circunstancia contingente; habría que ver si necesariamente debe ser así. Rescher opina que no, y plantea que una lógica multivalente puede servir como metalógica de cualquiera sobre la base de la presentación de las condiciones necesarias para que un sistema lógico pueda operar como metalógica. Limita su tratamiento a la definición de las tablas de verdad de las conectivas, para lo cual haría falta vincular argumentos con valores; si los argumentos son por lo menos dos, hay que tomarlos juntos, i.e., en *conjunción*; y *si* valen tal y tal cosa, *entonces* la expresión en que aparece la conectiva que definimos vale tal otra cosa. Es decir, habría que afirmar:

Si el valor de p es i y el valor de q es j,
entonces el valor de $p \otimes q$ es $<i \otimes j>$.

En términos de funciones, esto corresponde a decir que al par de argumentos i y j, le corresponde el valor $<i \otimes j>$. La característica de veritativo-funcionalidad, o extensionalidad, es fundamental para definir tipos de lógica. Tanto la bivalente clásica como la mayoría de las multivalentes son extensionales; y creo que aquí es donde debe ponerse el acento cuando se postula la indicada preeminencia de la lógica bivalente: tanto el conjunto de los argumentos como el de los valores tienen un único valor determinado en cada caso particular[3]. Si el conjunto de los argumentos y el de los valores se reducen a conjuntos cuya cardinalidad es dos, la lógica es bivalente, si a tres, trivalente, y así sucesivamente. Se han ideado situaciones en las que no hay coincidencia; tal es el caso de la reescritura de las fórmulas de una lógica multivalente mediante la anteposición del operador **W** a cada variable proposicional. Ese operador es una conectiva que asigna el valor *falso* al argumento *falso*, y

---

[2] op.cit.,p.33.

[3] Lo que quiero decir es que, si bien los argumentos pueden ser varios y distintos según el dominio al que pertenezcan, al igual que los valores, una vez fijado un argumento o una n-tupla de ellos para un caso, se mantienen así fijos; y lo mismo para los valores.

el valor *verdadero* a todos los otros argumentos. W se llama *afirmación débil (weak assertion)*. Pero aquí se advierte fácilmente que se pierde la riqueza de la lógica multivalente; aunque los argumentos son multivalentes, sus correspondientes valores son sólo *verdadero* y *falso*. Se ha retornado voluntariamente a la bivalencia.

Como ya dije, la lógica bivalente es funcionalmente completa, es decir, hay un grupo de conectivas (p.ej., negación y conjunción), sobre cuya base pueden definirse todas las demás; las multivalentes normales -las construidas de modo tal que sus valores de verdad coincidan con los de la bivalente cuando los argumentos son los de la bivalente- no lo son. En términos de expresión funcional, la lógica clásica bivalente proposicional ($\mathbf{C}_2$) define semánticamente sus conectivas mediante una familia de funciones de valuación - llamémosla F_2^i- que van del conjunto **B** = {V,F} - o del producto cartesiano **B** × **B**- al mismo conjunto **B**. Así. por ejemplo, la conjunción clásica se define: F_2^1(V,V) = V; F_2^1(V,F) = F; F_2^1(F,V) = F; F_2^1(F,F) = F. La trivalente de Lukasiewicz ($\mathbf{L}_3$), mediante otra familia de funciones -F_3^i- que van del conjunto **T** = {V,I,F} -o del producto cartesiano **T** × **T** × **T**- al mismo conjunto **T**[4]. El conjunto de llegada es el mismo que el de cada uno de los factores del producto cartesiano que constituye el de partida. Hay algunas funciones que reducen el conjunto de llegada; en $\mathbf{C}_2$ son las tautologías y las contradicciones, en $\mathbf{L}_3$ son también las tautologías y las contradicciones, y las que producirían uniformemente I -con las limitaciones que indiqué en cuanto al operador de Slupecki-, pero también, y esto es lo que quiero destacar, las que producen sólo V y F. Si desestimamos las que producen I en algún lugar (o en todos), las otras se limitan al conjunto de llegada **B**.

Uno de los requisitos más importantes de $\mathbf{C}_2$ es su facultad para distinguir las tautologías de las fórmulas que no lo son; precisamente, si un sistema bivalente es inconsistente con respecto a la negación y tiene como teorema a la ley de Escoto, se trivializa: toda fórmula es tautología. En este caso, las fórmulas toman uniformemente el valor V, y el conjunto de llegada se reduce, de hecho, a {V}. Podría uno imaginarse una situación análoga en la que el conjunto de llegada fuera {F}, todas serían contradicciones. Las indicadas reducciones de la cardinalidad del conjunto de llegada tienen una consecuencia desastrosa para el avance del conocimiento: no podríamos distinguir semánticamente ninguna fórmula de otra. He planteado en términos de funciones lo que constituye una obviedad: para hablar de distinguibilidad hacen falta por lo menos dos cosas -piénsese en sistemas numéricos; el de menor léxico es el binario, con dos símbolos; aún si el léxico se redujese a un solo símbolo, como el palote ‘ | ’ en las máquinas de Turing, con cuya simple iteración se representan los números, hace falta reconocer la separación entre dos iteraciones con un espacio, que es en definitiva, otro símbolo; o piénsese en la fonología, donde el reconocimiento de un fonema se produce por *oposición con otros (al menos uno) fonemas.*

La caracterización que hace Rescher de un sistema de lógica que puede hablar de sí mismo es la siguiente : Mediante un operador paramétrico V*v* se puede indicar que el valor de verdad de *p* es *v*. La expresión que así se forma V*vp* es una proposición que habla acerca del valor de verdad de una proposición *p* y dice que ese valor es *v*. Las condiciones que se

---

[4] Obviamente, utilizo aquí el símbolo T para designar un conjunto, y no la función de Slupecki.

imponen a ese operador permiten que cualquier conectiva multivalente pueda expresarse en términos de la lógica bivalente. Dos de esas condiciones son las siguientes :

1) Unicidad : $\mathrm{V}up \& \mathrm{V}vp \supset u=v$
2) Bivalencia : $/\mathrm{V}vp/ = 1$ ssi $/p/ = v$ y $/\mathrm{V}vp/ = 0$ ssi $/p/ \neq v$

La condición de unicidad asegura que el operador es veritativo-funcional. La condición de bivalencia hace referencia a las restricciones en el conjunto de llegada de la función, de lo cual hablé antes, y que queda patentizado en la Tabla 1.

Un sistema de lógica que pueda operar como metalógica de sí mismo se llama *autodescriptivo* (la proposición (I) a que se hace referencia en la cita que sigue figura un poco más abajo) :

> Un sistema de lógica multivaluada que provea este instrumental, será llamado *autodescriptivo* con respecto a su operador de asignación de verdad $\mathrm{V}ip$ si la traducción dentro del sistema de la información contenida en todas y cada una de las entradas de la tabla de verdad de la manera que se indica en la proposición (I) es una tautología del sistema. El rasgo esencial de un sistema tal será que puede ser descrito por su propio instrumental, y esta descripción constituye un grupo de verdades lógicas.[5]

Hace falta, por ende, disponer de algo que exprese la conjunción y de algo que exprese el condicional. Supongamos que en una lógica multivalente cualquiera expresamos la conjunción por '∧' y el condicional por '→', y, además, que V*ip*' quiere decir que el valor de verdad de '*p*' es '*i*'; entonces cada una de las casillas de valores de una tabla de verdad de la conectiva, digamos, '⊗', será una realización de la siguiente expresión de esa lógica multivaluada:

$$\mathrm{V}ip \wedge \mathrm{V}jq \rightarrow \mathrm{V}{<}i\otimes j{>}(p\otimes q) \qquad \text{(I)}$$

Las expresiones como (I), que permiten establecer valores de verdad para definir conectivas, deben ser tautológicas. El operador V*v* es un operador paramétrico cuyo parámetro es *v*. Recordemos que V*vp* indica que *v* es el valor de verdad de la proposición *p*. Las condiciones de verdad de esa proposición V*vp* (que es algo así como una metaproposición) establecen que será verdadera si y sólo si el valor de verdad de *p* es *v*, i. e. $/p/ = v$. En cualquier otro caso, es falsa. Su representación mediante una tabla es la siguiente, para una lógica trivalente :

	V*vp*		
p╲v	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	0	1	0
0	0	0	1

Tabla 1

---

[5] Rescher, op.cit., p. 84

Como se advierte, V*vp* nunca toma el valor ½. Gracias a eso, puede asegurarse la tautologicidad de (I), aún considerando como metalógica una multivalente de Lukasiewicz, ya que tendríamos, por ejemplo, para la negación :

$$\mathrm{V}ip \rightarrow \mathrm{V}j{<}\neg p{>}$$

cuyo valor de verdad será

$$/\,\mathrm{V}ip \rightarrow \mathrm{V}j{<}\neg p{>}/ = \text{Mín}\,\{1, 1\text{-}/\mathrm{V}ip/\text{+}/\,\mathrm{V}j{<}\neg p{>}/\}$$

Lo cual retrotrae a la cuestión de que el conjunto de llegada de la función V es menor que el de partida, y toma los valores de la bivalente.

Un operador de asignación de valores de verdad será *diversificado* si V*ip* puede tomar *todos* los valores del conjunto de verdad del sistema. Si, además, la tabla de V*ip* tiene las características siguientes : (1) /V*ip*/ está designado si y sólo si $i = /p/$, (2) la implicación cumple con el *modus ponens*, y (3) si la conjunción $p \wedge q$ toma un valor designado, también lo hacen *p* y *q* ; entonces puede mostrarse que el sistema es autodescriptivo. Rescher afirma que los sistemas de Lukasiewicz L_3 y $L_{\aleph}$ son autodescriptivos.

Permitamos que el conjunto de llegada tenga tres valores, haciendo, por ejemplo, que la función tome valores similares a los de la equivalencia material ; sería, entonces :

V*vp*

v \ p	1	1/2	1
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
0	0	1/2	1

Tabla 2

Las expresiones como (I) para cada una de las cinco conectivas habituales deberían ser tautologías de L_3 . Así ocurre con negación, conjunción y disyunción, pero para el caso de la implicación material, que simbolizamos con →, tendremos :

$$/\,\mathrm{V}ip \wedge \mathrm{V}jq \rightarrow \mathrm{V}(i\rightarrow j)(p\rightarrow q)/ = \text{Mín}\{1,\ 1\text{-}/\,\mathrm{V}ip \wedge \mathrm{V}jq\,/ + /\,\mathrm{V}(i\rightarrow j)(p\rightarrow q)/$$

Ya que, como se sabe, las tautologías en L_3 tienen valor 1, la única posibilidad de que la expresión anterior tome un valor menor que uno se daría si $/\mathrm{V}ip \wedge \mathrm{V}jq/ > /\mathrm{V}(i\rightarrow j)(p\rightarrow q)/$, lo cual, a su vez, puede darse según dos casos : a) $/\mathrm{V}ip \wedge \mathrm{V}jq/ = 1$ y $/\mathrm{V}(i\rightarrow j)(p\rightarrow q)/ < 1$, o b) $/\mathrm{V}ip \wedge \mathrm{V}jq/ \geq ½$ y $/\mathrm{V}(i\rightarrow j)(p\rightarrow q)/ < ½$

Caso b) $/\mathrm{V}(i\rightarrow j)(p\rightarrow q)/ = 0$ Subcaso b1 : $/(i\rightarrow j)/ = 0$ y $/(p\rightarrow q)/ = 1$. Entonces, Mín{1, 1-i+j} =0 , o sea i = 1 y j = 0 ; y también Mín{1, 1- /p/+/q/} = 1, lo cual se da solamente si $/p/ \leq /q/$, que origina a su vez cinco situaciones : b1.1. ambos igual a 0; b1.2. ambos igual a ½ ; b1.3. ambos igual a 1; b1.4. $/p/ = ½$ y $/q/ = 1$; y b1.5. $/p/ = 0$, y $/q/ = ½$ o $/q/ = 1$. En b1.1. tendríamos $/\mathrm{V}ip/ = 0$, y la expresión es tautología ; en b1.2. , $/\mathrm{V}ip/ = ½$ y $/\mathrm{V}jq/ = ½$, y la expresión ya no es tautología. Un análisis similar mostraría que es imposible elaborar un sistema multivalente autodescriptivo de más de tres valores de verdad -finito o infinito (enumerable o no)- si la tabla de verdad de V*ip* se construye en concordancia con la de la equivalencia material trivalente (diagonal principal con valor distinguido, valor antidistinguido en los extremos opuestos a esa diagonal, y simetría de valores con respecto a ella). Como ejemplo, supongamos que los valores de verdad son los siguientes once : 0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 y 1. La tabla de V*ip* sería así :

V*ip*

p ╲ *i*	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
1	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
0,9	0,9	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
0,8	0,8	0,9	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
0,7	0,7	0,8	0,9	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
0,5	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	0,9	0,8	0,7	0,6
0,3	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	0,9	0,8	0,7
0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	0,9	0,8
0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	0,9
0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1

Tabla 3

y con ella, y la definición habitual de las conectivas de Lukasiewicz, es fácil construir instancias de la expresión (I) que no son tautologías. Nuevamente, para la implicación material , eso se daría si

$/Vip \wedge Vjq/ > /V(i \rightarrow j)(p \rightarrow q)/$, situación que ocurre, por ejemplo, cuando $/p/ = 0{,}9$, $/q/ = 0{,}2$, $i = 0{,}8$ y $j = 0{,}3$. Si se ha establecido como requisito para que un sistema sea autodescriptivo que las expresiones tipo (I) sean tautológicas, entonces los sistemas de Lukasiewicz, ya desde L_3 en adelante, con V*ip* definido con tablas de verdad como las de Tabla 2 o Tabla 3, no son autodescriptivos.

Como dije al comienzo, aunque no se ha demostrado la imposibilidad de que los sistemas multivalentes sean autodescriptivos, sí se ha mostrado que algunos de los que se pretendía que lo fueran, no lo son. La lógica bivalente, además de funcionalmente completa, es autodescriptiva, y ambos hechos abonan la creencia de que nos siga pareciendo la más adecuada para operar como metalógica de cualquier otro sistema.

Podría argüirse, como hace Rescher[6], que esa situación de privilegio de la lógica bivalente se apoya en el hecho de que el carácter veritativo-funcional de un sistema de lógica exige que en un lugar determinado de una tabla de verdad haya un valor y sólo uno -a lo que me referí antes (ver nota 3) ; y que eso no es en absoluto necesario, pues se puede establecer sistemas (bivalentes o multivalentes) que sean cuasi-veritativo-funcionales en los que esa exigencia no existe. Pero en ese caso, uno no sabría cuál es el valor de verdad que corresponde a determinados argumentos, y sin duda preferiríamos que nuestras funciones definitorias de conectivas sean funciones totales y no parciales.

Creo que convendría recordar lo que el inspirador de una familia de lógicas que según S. Haack[7] constituye un desafío radical a la lógica clásica, L. Zadeh, afirma con respecto a la teoría de conjuntos difusos, en que se originó la lógica difusa :

"Merece destacarse una afirmación muy precisa - ¡la teoría de conjuntos difusos nunca ha sido una invitación al pensamiento difuso !"[8]

Y creo que la precisión que da el uso de la bivalencia para una metalógica no ha sido aún igualada.

Referencias

Gaines, B.R., L. Zadeh, y H.J. Zimmeramann (1984) : Fuzzy Sets and Decision Analysis - A Perspective, en Fuzzy Sets and Decision Analysis, Studies in the Management Sciences, North Holland.

Haack, Susan (1982) : Filosofía de las Lógicas, Cátedra, Madrid.

Rescher, Nicholas (1969) : Many Valued Logic, McGraw-Hill.

---

[6] Cf. Rescher, op.cit., p.87, nota 5.

[7] Cf. Haack (1982), p.191.

[8] Cf. Gaines (1984), p. 4.