EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS V JORNADAS
1995

Alberto Moreno
Editor

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Javier Legris
Universidad de Buenos Aires - CONICET

DEMOSTRACIONES DE CONSISTENCIA Y DERIVABILIDAD FORMAL: A 60 AÑOS DE LAS "INVESTIGACIONES SOBRE LA DEDUCCION LOGICA" DE G. GENTZEN.

Las "Investigaciones sobre la deducción lógica", la tesis doctoral de Gerhardt Gentzen, ocupan un lugar central entre las obras que iniciaron la fase madura de la lógica matemática a comienzos de la década de 1930. Su publicación en el *Mathematische Zeitschrift*, en el volumen de 1935, abrió nuevos caminos no sólo en el ámbito específico de la teoría de la demostración sino también en la lógica matemática en general y en la filosofía de la lógica, pues permitió una mejor comprensión de la relación de deducción y del significado de las constantes lógicas.

El aporte de Gentzen en esta obra puede resumirse en los dos resultados siguientes. En primer lugar, las inferencias deductivas son analizadas en un conjunto de inferencias básicas, justificables por el significado mismo otorgado a las constantes lógicas. En segundo lugar, se establece que toda demostración en la lógica de primer orden puede reformularse en una forma normal. El primer resultado se dió a través de su sistema de Deducción Natural; el segundo resultado, expresado en el *Hauptsatz* o teorema fundamental surge a partir de su sistema de secuentes.

En lo que sigue se expondrá brevemente la génesis, algo idealizada, de ambos resultados, haciendo un análisis interpretativo de las motivaciones y la línea de pensamiento que guiaron a su autor en la elaboración de los mismos.

1. El problema de la consistencia, el programa de Hilbert y los teoremas de Gödel

En el contexto de la crisis de fundamentos de las matemáticas de principios de siglo, el programa metamatemático de David Hilbert tenía entre sus objetivos básicos el de demostrar la consistencia de la matemática con procedimientos aceptables desde el llamado "punto de vista finito", pues la consistencia de un sistema era considerada prueba suficiente de su confiabilidad. Esto significaba, antes que nada, que los predicados básicos debían ser decidibles y que las totalidades infinitas no podían considerarse en acto. Pero, además, la consistencia debía demostrarse respecto de sistemas axiomáticos formalizados, aplicando inducciones completas lo más simples posible sobre el proceso de derivación de los teoremas, para mostrar luego que ninguno de ellos era una contradicción (v., p. ej., Hilbert 1928 y von Neumann 1931, p. 119.)

Los resultados que Kurt Gödel dió a conocer en 1931 con sus teoremas de incompletud dieron la impresión de echar por tierra el programa de Hilbert. Según estos resultados, ningún sistema formalizado de la aritmética podía demostrar todas las verdades aritméticas (incompletud) y, además, era imposible demostrar con métodos finitos (i.e. desde el punto de vista finito) la consistencia de la aritmética, ya que toda demostración interna ("absoluta") de su consistencia la tornaría inconsistente (v. Gödel 1931, sección 4).

Frente a esto, la única salida que tenía el programa metamatemático consistía -tal como lo sugirió el mismo Hilbert- en una reformulación del punto de vista finito, admitiendo métodos más poderosos que los finitos, tales como reglas de inducción infinita (v. la introducción de Hilbert a Hilbert-Bernays 1934). Sin embargo, debía darse al mismo tiempo una justificación de la confiabilidad de tales métodos. Esta era la empresa que debían acometer Hilbert y sus discípulos de Göttingen, entre los cuales se encontraba el joven Gentzen.

2. El método de Gentzen y la propiedad de la subfórmula

Fue justamente Gentzen quien, ocupado con su tesis doctoral, vió la posibilidad de un método nuevo para demostrar la consistencia de sistemas formales en concordancia con el punto de vista finito. La idea central era la siguiente. Supóngase que, a diferencia de lo que ocurría en los sistemas axiomáticos existentes a la sazón, todo teorema pueda ser demostrado de una manera directa, es decir, de una manera tal que toda fórmula que aparezca en la derivación que constituye la demostración sea subfórmula del teorema, de modo que niguna fórmula desaparece durante la derivación. Un sistema semejante cumpliría con lo Gentzen llamó "propiedad de la subfórmula" (v. 1935, 2.513). En otras palabras, la demostración del teorema "no da rodeos", sino que en aquella aparecen únicamente los términos y fórmulas que aparecen en éste. Una demostración así es una "demostración normal". El concepto de demostración normal abriría nuevos caminos en la teoría de la demostración y posteriormente sería la base para la llamada "demostración mecánica de teoremas".

Una vez establecida la propiedad de la subfórmula es relativamente fácil determinar si el sistema es consistente o no, pues, si fuera inconsistente, una contradicción debería aparecer en algún teorema, o, dicho de otro modo, la contradicción debería estar contenida ya en los axiomas.

El hecho de que los sistemas axiomáticos puedan tener derivaciones que no sean normales, o sea, derivaciones que contengan fórmulas que no aparezcan en la conclusión final, se debe a la propiedad de transitividad que tiene la relación de consecuencia lógica subyacente a todo sistema deductivo, la cual se formula del siguiente modo: Si una fórmula A es consecuencia de un conjunto G de fórmulas y C es consecuencia de G y A, entonces C es consecuencia de G. (En los sistemas axiomáticos del tipo Frege-Hilbert, esta propiedad se hace manifiesta en la sucesivas aplicaciones de la regla del *modus ponens.*) Junto con la reflexividad y la monotonía, la propiedad de transitividad caracteriza la relación de consecuencia lógica.

Por lo tanto, demostrar que, para un sistema axiomático de características especiales, toda derivación podía llevarse a una forma normal equivalía a demostrar que no era necesario en la derivación apelar a la propiedad de transitividad, y éste es, esencialmente, el significado del *Hauptsatz* o teorema fundamental. Ahora bien, resulta evidente que la formulación de este teorema fundamental implicaba tematizar la relación misma de consecuencia lógica y convertirla en objeto de análisis, estableciendo principios para ella.

3. El concepto de secuente y la relación de consecuencia lógica

Gentzen llevó a cabo este análisis introduciendo el concepto de *secuente*, para lo cual se basaba en unos trabajos anteriores del matemático Paul Hertz, en los que se hablaba de afirmaciones de consecuencia (Hertz 1929). Gentzen llama secuente a una expresión de la forma $A_1,...,A_m$ ® $B_1,...,B_n$, donde las fórmulas $A_1,...,$ A_m reciben el nombre de antecedentes y las $B_1,...,$ B_n el de sucedentes del secuente (v. Gentzen 1935, p. 180). Gentzen mismo interpretaba un secuente semejante como un enunciado condicional con el antecedente $A_1\&...\&A_m$ y el consecuente $B_1v...vB_n$. Sin embargo, parece más cercano a sus propósitos interpretar la flecha secuencial ® como una relación generalizada o extendida de consecuencia lógica, que admite más de una fórmula en el codominio de la relación. Así, alguno de los B_1, ..., B_n son consecuencia de todos los A_1, ..., A_m. (En 1943, Rudolf Carnap presentará una idea semejante con su concepto de involución lógica.) Es de observar el carácter finito de la relación secuencial; tanto el conjunto de antecedentes como sucedentes es finito.

Sobre la base del concepto de secuente, Gentzen formalizó las propiedades de esta relación de consecuencia lógica generalizada, presentándolas mediante un conjunto de reglas a las que llama "reglas estructurales". Cuando se considera el caso de una única fórmula en el sucedente, las reglas del sistema reflejarán las propiedades de reflexividad, monotonía y transitividad de la relación de consecuencia lógica.

Las ideas de Gentzen pueden compararse con las que, de manera independiente, desarrolló Alfred Tarski un poco antes, a partir de 1930. Tarski se proponía formular un sistema axiomático para la relación de consecuencia lógica, empleando para ello la teoría de conjuntos. (Véase sobre todo Tarski 1930.) También consideraba definitorias las tres propiedades mencionadas, pero la relación era reconstruida en términos de una operación entre conjuntos de enunciados. No existían restricciones para los conjuntos de fòrmulas, pudiendo ser conjuntos infinitos. Tarski llevaba a cabo esta investigación al mismo tiempo que postulaba una nueva disciplina que se ocupara de las propiedades de sistemas deductivos, que veía emparentada con la metamatemática de Hilbert y a la que llamó "metodología de las ciencias deductivas". Gentzen, por su parte, tenía en mente algo semejante, pero como una continuación del programa de Hilbert. Mientras que las ideas de Tarski cristalizaron más tarde en la teoría de modelos, las de Gentzen ampliaron los alcances y métodos de la teoría de la demostración hilbertiana. Tarski, en su trabajo de 1936 sobre la consecuencia lógica ponìa el acento en la necesidad de una caracterización general, metateórica, de la relación de consecuencia lógica, no restringida a los procedimientos de dereivación en un sistema determinado, y esto es lo que lo llevaría más tarde a desarrollar la teoría de modelos. Gentzen, por su parte, también formulaba su sistema de secuentes como un metasistema, en el cual se caracterizaba también de manera general la consecuencia lógica, dando lugar a lo que puede llamarse una teoría *general* de la demostración.

Gentzen llamó *corte* a la regla estructural que correspondía a la relación de transitividad de la relación de consecuencia generalizada, y cuya forma es:

G, ® A, D   G', A ® , D'

G, G' ® D, D'

De este modo, el teorema fundamental afirmaba que en el sistema de secuentes en cuestión, toda demostración podía convertirse en otra en la que no hubiera aplicación alguna de esta regla. Posteriormente, se formularían diferentes versiones de la lógica de primer orden mediante sistemas "libres de corte".

Como se mencionó más arriba, la "eliminación de corte" proveía finalmente un método para demostrar la consistencia de un determinado sistema formal formulado en términos de secuentes. En efecto, la consistencia se seguía directamente del hecho de que todo teorema se demostraba en el sistema de modo directo mediante una demostración normal.

En el caso de un sistema formal para la aritmética, la demostración del teorema fundamental exigiría inducción hasta un cierto ordinal transfinito, la cual era objetable desde el punto de vista finito. Gentzen intentaría en los años posteriores a las "Investigaciones" darle un significado intuitivo y claro a esta inducción transfinita (véase, por ejemplo, Gentzen 1936).

Por lo demás, este "método de Gentzen" fue aplicado posteriormente para mostrar la consistencia de diferentes sistemas más ricos o poderosos que la lógica de primer orden, tales como la teoría simple de tipos, sistemas de lógica modal y de lógica de segundo orden.

4. La consecuencia lógica y la deducción natural. El programa de Gentzen

Ahora bien, para extender este concepto de consecuencia lógica al caso de las diferentes constantes lógicas (conectivas y cuantores), Gentzen dio un conjunto de reglas lógicas en términos de secuentes, las cuales -puede decirse- caracterizan a éstas en términos de sus condiciones de derivabilidad. Estas reglas no eran, en realidad, más que traducciones a secuentes de las reglas de Deducción Natural, sistema que constituia el otro aporte, junto con el *Hauptsatz*, que Gentzen ofrecía en sus "Investigaciones".

La Deducción Natural también se originó a partir de un análisis de la consecuencia lógica. En efecto, Gentzen consideraba esencial la manera en que se llega a determinar que una fórmula es consecuencia lógica de otra, y aquí entran en juego los mecanismos demostrativos que se emplean para obtener un enunciado a partir de otros. Con más exactitud, una adecuada justificación de por qué un enunciado es consecuencia lógica de otros debía indicar cómo es una demostración canónica del enunciado a partir de los otros. Este punto de vista condujo a Gentzen a emprender una reconstrucción de las demostraciones efectuadas en contextos deductivos. Así, concluyó que una demostración lógica se reduce a una serie de aplicaciones de reglas de inferencia elementales, mediante las cuales se introducen y se eliminan las constantes lógicas. Este conjunto de reglas constituyó su "cálculo de la deducción natural" (v. Gentzen 1935, sección 2). Con este cálculo, Gentzen iniciaba de manera programática una línea de investigación muy diferente a la originada a partir de Tarski con la teoría de modelos, en la cual el significado de las constantes lógicas se daría en términos del concepto de regla de inferencia y de la función que éstas cumplen en demostraciones. Así, las reglas del sistema de Deducción Natural cumplían la misma función que las condiciones de verdad para las constantes lógicas de la semàntica tarskiana, y, en este mismo sentido, pueden verse también sus formulaciones equivalentes en términos de secuentes.

Más precisamente, las reglas de introducción dan el significado de las constantes lógicas. Dice Gentzen: "Las introducciones representan -por así decirlo- las `definiciones' de los corrrespondientes signos, y las eliminaciones son sólo -en definitiva- consecuencias de éstas." (Gentzen 1935, p. 189). Con variantes, esta interpretación fue continuada más tarde (H.B. Curry, P. Lorenzen, etc.) y finalmente fue incluida en una teoría más general del significado. De este modo, los sistemas tanto de Deducción Natural como de secuentes constituian un análisis metateórico de la consecuencia lógica.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Gentzen, G. 1934-1935. "Untersuchungen über das logische Schließen". En *Mathematische Zeitschrift* **39** (1935), 176-210, 405-431.

\- 1936. "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie". En *Mathematische Annalen* **112** (1936), 493-565.

Gödel, K. 1931. "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I". En *Monatshefte für Mathematik und Physik* **38**, 173-198.

Hertz, P. 1929. "Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme". En *Mathematische Annalen* **101** (1929), 457-514.

Hilbert, D. 1928. "Die Grundlagen der Mathematik". En *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **6** (1928), 65-85.

Hilbert, D.- Bernays, P. 1934. *Grundlagen der Mathematik.* vol.I, Berlin, Springer, 1934.

Neumann, J. von. 1931. "Die formalistische Grundlegung der Mathematik". En *Erkenntnis* **2** (1931), 116-121.

Tarski, A. 1930. "Fundamentale Begriffe der deduktiven Wissenschaften I". En *Monatshefte für Mathematik und Physik* **37** (1930), 361-40

\- 1936. "Über den Begriff der logischen Folgerung". En *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, vol. 7, Paris, 1936, 1-11.