EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS VII JORNADAS
1997

Patricia Morey
José Ahumada
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Sandra Visokolskis
Universidad Nacional de Córdoba

VAGUEDAD Y CONTINUIDAD:LA PARADOJA DE SORITES REVISITADA

0. Introduccion

A los fines de presentar una versión alternativa de la Paradoja del Sorites, se seguirá el siguiente orden de exposición:

1. Breve descripción de la Paradoja .
2. Soluciones bivalentes clásicas. Solución difusa standard.
3. Críticas y comentarios a las posturas presentadas.
4. Presentación de una variante fuzzy.

1. Breve descripcion de la paradoja

La Paradoja del Sorites o del Montón, así como la Paradoja de Akrafos o del Calvo, son atribuidas a Eubúlides de Mileto (siglo IV a.C.), discípulo de Euclides, algunas de cuyas versiones más antiguas no originales (ya que estas últimas no se han conservado), fueron trasmitidas por Diógenes Laercio de la siguiente manera:

"-Dos granos de trigo, son un montón de trigo?
-No.
-Y añadiendo otro grano?
-Tampoco.
-Luego <u>nunca</u> habrá montón, por más granos que se añadan uno a otro. Pues si añadiendo uno a los que no eran montón, no lo hace, nunca llegará el caso de hacerlo otro grano, que <u>no tiene más fuerza</u> que el primero que se puso."

"-Dirías que un hombre es calvo si sólo tiene un pelo?
Sí.
Dirías que es calvo si sólo tiene dos?
Sí.
Dirías, ..., etc.? Donde sitúas entonces la línea divisoria entre ser calvo y no serlo?"

Otra caracterización de la paradoja que sigue el camino inverso:

"Si a quien no es calvo se le arranca un pelo, no queda calvo. Si se le quita otro, tampoco. Pero si el quitarle un pelo no lo hace calvo, el segundo que se le quita tampoco es más uno. Y así nunca será calvo."

Una presentación más actualizada de la misma, es la que sigue:

p_1 : Un hombre sin cabellos en su cabeza es calvo.

p_2 : $\forall k \in N_0 = N \cup \{0\}$, $0 \leq k \leq 1.000.000$ se cumple que si un hombre con k cabellos en su cabeza es calvo entonces un hombre con $(k+1)$ cabellos en su cabeza es calvo.

$\therefore$ c : Un hombre con 1.000.000 de cabellos en su cabeza es calvo.

Una versión más simplificada:

p_1 : x_0 es C.

p_2 : Si x_k es C entonces x_{k+1} es C , con $0 \leq k \leq 1.000.000$

$\therefore$ c : $c_{1.000.000}$ es C.

Aquí C es un predicado vago. Una argumentación de este tipo, donde C es un predicado vago, suele considerarse inválida.[1] Las razones que se emiten para probar la invalidez han sido muchas y de muy diversa índole. Pero, si en algo coinciden todos es en afirmar que la invalidez se debe a la presencia de **vaguedad**. Ese es el motivo por el cual suele llamarse al conjunto de sus distintas formulaciones como las *Paradojas de la Vaguedad.* Ver por ejemplo [Sainsbury, 1988] .

Claro es que no todos interpretan lo vago de igual manera, y no todos ponen idéntico énfasis en los mismos elementos vagos que ocurren en el argumento.

En lo que sigue se analizarán las evidencias que aportan algunos de sus más renombrados autores en la defensa o no de la validez del mismo, para luego introducir, a partir de las críticas, una manera más de encararla, que suponga alguna diferencia, en este caso concreto, de tipo epistémica.

Pero antes de esto, dentro de este punto, y con el objeto de llegar a un acuerdo bajo qué términos se desarrollará la presentación, y de qué manera se hará este análisis, daremos:

1°) una definición de vaguedad de predicados, en relación con una definición standard de "predicado" [2], y 2°) un procedimiento metodológico para atacar las distintas versiones, que permitirá mostrar diferencias y similitudes entre ellas.

---

[1]Cabe acotar que ésto no siempre ha sido presentado así. Algunos autores de textos de Lógica expresan el Sorites como un tipo de argumentación encadenada de varios silogismos cuyas conclusiones han sido omitidas, cada una de las cuales es premisa del silogismo siguiente. Aquí, la conclusión no necesariamente resulta falsa ni el argumento inválido. Ver por ejemplo [Trevijano ,1993]. Los casos paradójicos son aquellos (y sólo aquellos?) en los cuales figuran predicados vagos.

[2] Los predicados en sentido standard se llamarán aquí "fregeanos", siguiendo para este desarrollo la versión de Enric Trillas y Joseph-María Terricabras en [Terricabras & Trillas, 1988]

1.1 Predicados vagos.

Un predicado P que refiere a un objeto x de un conjunto universal X se denomina ***fregeano*** si y sólo si $\exists\ V \subset X$, $V \neq \varnothing$ tal que $X = V \cup V^C$ donde

$V = \{ x \in X$: "x es P" es una oración verdadera $\}$ y $V^C = \{ x \in X$: "x es P" es una oración falsa $\}$

Esto vale si y sólo si $\exists\ v : X \longrightarrow [0,1]$ que satisface

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{sii "x es P" es verdadera} \qquad \text{("x es P")} \\ 0 & \text{sii "x es P" es falsa} \qquad \text{("x no es P")} \end{cases}$$

Así $X = v^{-1}(\{0\}) \cup v^{-1}(\{1\})$ donde $v^{-1}(\{0\}) \cap v^{-1}(\{1\}) = \varnothing$ y $v(X) = \{0,1\}$.

En general, dado cualquier subconjunto no vacío A de X, $X = A \cup A^C$ y el predicado P: " es un elemento de A" cumple que $v = \chi_A$ [3], la función característica de A ,donde

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Un predicado P se denomina *vago sobre un conjunto X* si y sólo si existen biparticiones$\{V,V^C\}$ de X, como las citadas previamente para predicados fregeanos. Esto equivale a decir que $\forall\ \{V, V^C\}$ bipartición de X , $X = V \cup V^C$, $V \neq \varnothing$, **ni V ni** $\mathbf{V^C}$ son iguales a los conjuntos $\{ x \in X$: "x es P"$\}$ o $\{ x \in X$:"x es no P"$\}$. De allí que no se cumple la ley del tercero excluido, con lo cual

$\exists\ x \in X$ tal que la proposición expresada por "x es P" **no** es ni verdadera ni falsa. Así,

$X = \{x \in X$: "x es P"$\} \cup \{ x \in X$: "x es no P"$\} \cup R$ donde

$R = \{ x \in X$: no es el caso que "x es P" ni que "x es no P"$\}$ **y necesariamente** $R \neq \varnothing$.

En nuestro caso concreto, el predicado P : "es calvo" es vago sobre X = { número de cabellos en la cabeza del sujeto S }. Si $x_o = 0$ entonces la afirmación $P(x_o)$ es verdadera. En cambio, si $x_k = 1.000.000$ resulta $P(x_k)$ falsa. Pero para ciertos casos "intermedios", no existen estas garantías.

1.2. Procedimiento metodologico

Siguiendo ahora a Sainsbury en su tratamiento general de las paradojas, éstas se atacan desde tres puntos de vista diferentes:

a) O bien las premisas **parecen aceptables** pero no lo son.

b) O bien la conclución es aceptable aunque **parezca** que **no** lo es.

---

[3] Dados X, A, P existe una única función valuación v que verifica las condiciones mencionadas.

c) O bien el tipo de razonamiento aplicado para pasar de premisas a conclusión es incorrecto.

2. Soluciones conocidas

En nuestro ejemplo concreto, la paradoja del Sorites (en cualquiera de sus versiones) desde sus primeras exposiciones hubo consenso en que: [4]la conclusión resulta falsa. Puesto que, como la primera premisa se asume como verdadera, entonces por aplicación reiterada (1.000.000 de veces) de la regla de inferencia Modus Ponens y la instanciación universal a las premisas p_1 y p_2 , se llega a la conclusión c falsa. Con respecto a la aceptación de la primera premisa como verdadera, es difícil (pero no imposible) hallar autores que nieguen ésto. En lo que refiere a la segunda premisa, el argumento que generalmente se expone para garantizar su verdad es el siguiente: Si por absurdo p_2 no fuera verdadera, entonces no es cierto que para todo número k comprendido entre 0 y 1.000.000 se dé lo que se expresa allí.Por ende existirá un número k_o entre dichos valores tal que:

un hombre con k_o cabellos en su cabeza es calvo pero con (k_o +1) cabellos en su cabeza, deja de ser calvo.Pero esto entonces contradice la definición de la calvicie como una característica vaga, es decir , contradice la anterior definición de predicado vago. Si p_1 y p_2 son aceptadas entonces como premisas verdaderas, nuevamente concluimos por un razonamiento análogo que p_3 es verdadera. Y así sucesivamente, en un número finito de pasos arribamos a la última afirmación, que, por tanto, resultará verdadera.

Cuáles han sido las respuestas que se han dado a esta primera aproximación general? Comenzaremos con la respuesta más afamada en la actualidad en el ámbito de la Filosofía, que es la ofrecida por Kit Fine [Fine, 1975] y seguidores, y que recibe el nombre de *supervaluacionismo.* En qué consiste sintéticamente esta propuesta? En primer lugar, Fine propone una solución de tipo semántico.Es decir, caracteriza la vaguedad en términos de *indeterminación semántica.*El problema está en el significado de los predicados vagos, tal como hasta aquí hemos descripto la situación.[5]

K.Fine considera que una oración con un predicado vago "puede hacerse más precisa, y que esta operación debería preservar valores de verdad". Para ello define un espacio de especificación (o simplemente una especificación) como un conjunto no vacío de elementos en el cual hay un orden parcial. En este contexto, una oración vaga es verdadera si y sólo si es verdera para toda especificación admisible completa. Dicho de otra manera, es verdadera si y sólo si es verdadera para todas las maneras de hacer dicha oración completamente precisa. Así, esta teoría sostiene que la premisa p_2 es falsa pues existe un

---

[4] A partir de aquí, nos situamos en la última versión de dicha paradoja citada en este trabajo.

[5] Hay otro tipo distinto de soluciones que describen la vaguedad a nivel epistémico, es decir, la vaguedad se asimila a la ignorancia, a la falta de conocimiento y no ya al significado de los términos presentes en la argumentación.

número k para cada especificación completa y admisible del predicado "calvo" que no la hace verdadera.

Por otra parte, Michael Dummett [Dummett, 1975] argumenta que la paradoja es irresoluble y la contradicción es inevitable. Dummett se apoya en la relación de *indiscernabilidad* y concluye que la misma no es transitiva. En un intento de preservar bivalencia, llegamos a contradicciones: o bien la segunda premisa no es ni verdadera ni falsa, o bien la inferencia lógica clásica es incorrecta. Como esto último no es posible y no se quiere abandonar la bivalencia, de allí el absurdo.

Hay posturas un tanto extremas, como es el caso de P. Unger [Unger,1979] que consideran que los predicados que dan lugar a este tipo de paradojas, como por ejemplo el predicado "calvo" atribuido a los hombres, son nociones inconsistentes, sin referencia alguna. En este caso lo que se está negando es directamente la premisa p_1 . Si un término no es preciso, entonces, según esto, la afirmación de su existencia sería falsa.

Una respuesta similar en algún sentido a la dada por Dummett es la que presenta Parikh [Parikh,1988]. El mismo propone un lenguaje localmente consistente aunque globalmente no lo sería, tal que permita excluir las demostraciones excesivamente largas por considerarlas incontrastables. De esta manera, cuando el índice k toma valores demasiado grandes, la inferencia debe rechazarse.

Frente a todas estas alternativas bivalentes, la Lógica difusa ofrece un modelo relativamente adecuado, con un cambio de óptica. En primer lugar, se acepta la premisa p_1 y la inferencia incluida en p_2 como aproximadamente verdadera, de lo cual se deduce que el valor de verdad de la conclusión disminuye a medida que aumenta la longitud de la cadena de inferencias necesarias para derivar la conclusión c. Aquí ya no vale más la regla de inferencia modus ponens sini que ésta se reemplaza por otra regla llamada usualmente *modus ponens generalizada* . Más concretamente, la regla clásica de modus ponens no alcanza para *describir* el problema. En cambio, modus ponens generalizada es más abarcativa desde el punto de vista descriptivo.

3. Criticas y comentarios

En primer lugar, cabe acotar aquí que, en lo que refiere a la versión standard propuesta por la Lógica difusa, la misma consigue la disolución de la paradoja, pero, al igual que muchas otras versiones bivalentes, a costa de terminar por aceptar que la conclusión es falsa, y, en consecuencia, tampoco puede aceptar la segunda estrategia b) presentada por Sainsbury.

En segundo lugar, en lo que concierne a la crítica general que presentan las versiones epistémicas a las posturas netamente semánticas, es importante destacar que puede que existan casos limítrofes aún en predicados vagos, pero, quizás el problema radica no en su existencia o no, sino en el hecho de que los podamos reconocer, y esto es un problema de tipo epistémico. A todo esto, Kit Fine afirma que "la inhabilidad para conocer no afecta la habilidad para significar".El hecho de que no podamos distinguir perceptivamente entre dos situaciones similares no implica que no se pueda dar cuenta predicativamente de cada una de ellas. no implica que no se le pueda asociar con precisión un predicado. Podemos no percibir distinciones con total claridad, y sin embargo poder asignarles a ellos un valor de verdad específico y distintivo.

En tercer lugar, parece un tanto artificial caracterizar la calvicie de un individuo a través de una propiedad numérica como el número de cabellos en su cabeza. Parece una reducción indebida equiparar un uso cualitativo vago de términos como "calvo" o "montón" , con un uso cuantitativo preciso. Hay aquí una sustitución por equivalentes que carece de rigor, ya que justamente para predicados nítidos, hay al menos un índice k_0 natural para el cual la propiedad se satisface, y tal que para el siguiente, deja de cumplirse. Pero esto parece no preservarse para predicados vagos.Si lo que se quiere resaltar como característica general de los predicados vagos es la no existencia de límites numéricos precisos convencionales que demarquen casos, entonces esta correspondencia biunívoca con números naturales parece fallar.Justamente se quiere mostrar un rasgo prototípico de los predicados vagos: su *indeterminación o inconmensurabilidad* con los números naturales.A todo esto, la Lógica difusa pretende solucionar esto presuponiendo que hay correspondencia con los números reales, y es por esto último que todo *argumento de gradualidad* parece sostenible.Pero, de entrada estamos conviniendo que *es posible atomizar al predicado vago*, en el sentido que *podemos descomponerlo y encontrar una propiedad numérica característica que lo genere*. Y esto no siempre parece ocurrir.Reducimos la descripción de un objeto (por ejemplo aquel representado por el término "montón") a la suma o agregado de muchas partes, a las cuales les vamos a aplicar aisladamente la segunda premisa.

En cuarto lugar, aún suponiendo que tal reducción fuera posible, nos encontraríamos con la situación de que puede ser indeterminado en general el valor de verdad resultante de la aplicación reiterada de algún tipo de modus ponens, como el de la Lógica difusa por ejemplo. Aquí vemos que los valores de verdad de cada oración van disminuyendo progresivamente y se acercan al valor cero. No es que concluimos que el razonamiento es absolutamente inválido, sino que "*muchas pequeñas* diferencias pueden, *acumuladas*, hacer una *gran* diferencia".Desde la Matemática, sabemos que la indeterminación se caracteriza simbólicamente por "∞. 0", donde esto quiere decir -desde una descripción sobresimplificada- que sumar en general agregados de infinitas cantidades pequeñas puede arrojar cualquier resultado, en el sentido que no está determinado de antemano si este resultado será un número finito o no. Depende concretamente de dichas cantidades y de la manera en que tal agregado se produzca.Análogamente, aquí vemos que, en cada caso, para cada predicado vago concreto, y para cada caracterización del espacio de valuaciones, tendremos distintas maneras de determinar el grado de validez de la argumentación.

En quinto lugar, se quiere hacer énfasis ahora no tanto en decidir si la argumentación resultó válida o no para cada una de estas propuestas, sino *qué quiere decir "vaguedad"*. En este sentido, parece ser claro que la indeterminación es generada por el paso, la transición de una afirmación *A* al comienzo de la argumentación, a otra *noA* al final del proceso, dentro de lo cual aparece un predicado vago. Aquí es donde la Lógica difusa, al parecer, y, de acuerdo a lo hasta ahora conocido en el momento de realizar este trabajo, no aporta una solución completa , ya que tiende a establecer correspondencias biunívocas con los números reales en el intervalo [0,1] e instancias del predicado vago. Sin embargo, *la vaguedad parece implicar una no uniformización del dominio de valuaciones*. Tal vez más apropiado sea hallar otro tipo de dominio en el cual se contemple una variación no constante, no homogénea, y que permita caracterizar intensidades en la aplicación de la propiedad que describe la vaguedad presente. Un dominio de valuaciones veritativo-funcional que capture la idea de *heterogeneidad selectiva* en la distribución de valores.

4. Presentacion de una propuesta

En lo que sigue se mostrará una alternativa que contemple las críticas arriba mencionadas en el inciso anterior, salvo la cuestión de la no homogeinización, que forma parte de un estudio más específico a presentar más adelante, y que constituye un refinamiento de la propuesta aquí planteada. La estrategia llevada a cabo es de tipo epistémica, y se propone mostrar que, pese a que todo indica que la conclusión es falsa, en realidad no lo es. Y esto no trae aparejado, como pareciera deducirse inmediatamente, que el argumento se invalida. Aquí, el razonamiento resulta válido en cierto grado. Es curioso notar que Sainsbury descarta de plano la segunda de las propuestas metodológicas, justamente la que se utiliza en este punto del trabajo. Para dicho autor, la segunda posibilidad trivialmente no es aceptable, ya que, en realidad, en el texto hay una presunción oculta o implícita, que inunda todas las "soluciones" bivalentes de la paradoja, y es que la conclusión es falsa. Así, no es posible derrotar tal enunciado como estrategia para disolver la paradoja.

Para la siguiente descripción, tomaremos la última versión de la paradoja expuesta al comienzo del trabajo: dado que allí tenemos un millón de afirmaciones incluidas en la premisa p_2 , dividiremos convencionalmente el espacio de valuaciones [0,1] en n = 1.000.000 de partes equidistantes:

$$1 = n / n \ , \ n\text{-}1 / n \ , \ n\text{-}2 / n , \ldots , 2 / n , 1 / n , 0 / n = 0$$

Tendremos así (n+1) (con n = 1 millón) valores de verdad (en adelante abreviado por v.v.). Denotaremos con $p^k(S)$ al sujeto S al cual se le han agregado k pelos en la cabeza. Así, $p^o(S)$ es el sujeto S con ningún cabello en su cabeza. Partimos del supuesto que S no posee previamente al análisis cabellos en su cabeza. En consecuencia resulta $p^o(S) = S$. Las oraciones que conforman el argumento son ahora las siguientes:

p_1 : \`$p^o(S)$ es calvo' es totalmente verdadera.

p^1_2: Si \`$p^o(S)$ es calvo' tiene v.v. 1 entonces \`$p^1(S)$ es calvo' tiene v.v. 999.999 / 1.000.000.

$p^{1.000.000}_2$: Si \`$p^{999.999}(S)$ es calvo' tiene v.v.1/1.000.000 entonces\`$p^{1.000.000}(S)$ es calvo'tiene v.v. 0

Y la conclusión es c : \`$p^{1.000.000}(S)$ es calvo' tiene v.v. 0.

Así, la primera oración de p_2 , es decir p^1_2 , se lee: Si S es calvo entonces el sujeto S con un cabello agregado es calvo. En general, si el resultado de agregarle 1 cabello a $p^k(S)$ lo caracteriza como calvo, entonces el resultado de agregarle 1 cabello a $p^{k+1}(S)$ lo caracteriza como calvo.

Los valores de verdad se van degradando, siguiendo la división de valuaciones de la manera arriba arbitrariamente prefijada, hasta llegar al v.v. cero en la última afirmación de la conclusión. Esto implica que la conclusión es equivalente a decir que: `$p^{1.000.000}(S)$ no es calvo'es verdadera con v.v. 1, lo cual no contradice lo afirmado en la primera premisa p_1 ,con lo cual se evita caer en una conclusión falsa., disolviendo así la paradoja.

5. Referencias

* Dummett, M.A. (1975): *"Wang's Paradox"* , Synthese, 30, pp. 301-324.
* Fine,K. (1975): *"Vagueness, Truth and Logic"* , Synthese, 30, pp.265-300.
* Sainsbury, R.M. (1988): *"Paradoxes",* Cambridge University Press, Cambridge.
* Terricabras J.M. & Trillas E. (1988): *"Some Remarks on Vague Predicates"* , Theoría, 10, pp.1-12.
* Trevijano, G. (1993): *"El Arte de la Lógica"* , Editorial Tecnos,S.A., Madrid.
* Unger,P. (1979): *"There are no Ordinary Things"* , Synthese, 41, pp. 117-154.

---

[i]Véase por ejemplo W. Alston "Varietes of Privileged Access" en *American Philosophical Quarterly* 1971. 8: 223-41.