EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XXII JORNADAS
VOLUMEN 18 (2012)

Luis Salvatico
Maximiliano Bozzoli
Luciana Pesenti

Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

El método de Arquímedes: la utilización de la mecánica en el contexto de descubrimiento de la matemática

Lucila Coll, Roberto O. Pautasso ◊, Christián C. Carman •*

Introducción

En 1902 se rescató cerca de las costas de Anticitera, a más de 40 metros de profundidad, los restos de un complejo mecanismo que luego fue datado como originario del siglo II a.C. Si bien hay importantes estudios en los años 70 (Price 1974), recién a principios de la presente década con los trabajos de Michael Wright (2002a, 2002b, 2003, 2005a, 2005b) y del equipo liderado por Tony Freeth (2006, 2008), se han esclarecido las funciones principales del mecanismo. Sin embargo, contaba con más de 30 engranajes y, mediante distintos punteros, mostraba la posición del Sol en el zodíaco, el día del año según el calendario egipcio, el día y mes en un complicado calendario lunisolar e, incluso, servía para predecir eclipses, entre muchas otras cosas. Como es bien sabido, una de las características más asombrosas del mecanismo de Anticítera es que, mediante un ingenioso mecanismo que utiliza una pequeña ranura y un perno, logra reflejar mecánicamente el sistema de epiciclos y deferentes. Hasta hace muy poco se creía unánimemente que el mecánico que desarrolló el aparato se habría inspirado, para su modelo, en el sistema de epiciclos y deferentes, surgido anterior e independientemente de su aplicación mecánica de elucubraciones matemáticas y geométricas (Freeth et al. 2004). Pero en los últimos años (Evans et al. 2008; Marchant 2010), se ha propuesto que hay razones para pensar que la relación podría invertirse: tal vez el sistema de epiciclos y deferentes surge como una solución mecánica que pretende dar cuenta de las regularidades babilónicas conocidas y luego, inspirado en esa solución mecánica, algún matemático propuso el modelo puramente geométrico. Las razones para sostener la inversión de la relación son variadas y complejas y aquí no las desarrollaremos, sólo diremos que tienen que ver con la datación del aparato (prácticamente contemporáneo o incluso un poco anterior al surgimiento del sistema de epiciclos y deferentes) y ciertas características puntuales del mecanismo que parecen mostrar que no fue inspirado en el sistema de epiciclos y deferentes sino que siguió una tradición distinta.

Por su naturaleza, la hipótesis no podrá ser más que una conjetura. Pero un punto crucial es analizar la plausibilidad histórica de que los matemáticos se inspiraran de hecho en los mecánicos porque, al menos a primera vista, parecería una violación a la jerarquía de las ciencias, tan presente en la antigua Grecia. En este trabajo, presentaremos un caso muy elocuente a nuestro favor, es decir, un caso de geometría pura, inspirada en mecánica. Es más elocuente todavía si se tiene en cuenta que uno de los candidatos a ser el artífice del mecanismo es, justamente, el protagonista de nuestro caso (Freeth et al. 2008).

Arquímedes: la historia del palimpsesto

El caso que desarrollaremos aparece en una obra de Arquímedes, conocida como *El Método* (Heiberg 1906, Heath 1912, Babini 1966, Netz et al. 2011: 69-127). Es una obra única en su

---

* UCA, lulicoll@hotmail.com

◊ UNTREF, UTN, robertopautasso@hotmail.com

• UNQ – CONICET, ccarman@gmail.com

especie porque en ella, el genio matemático de Siracusa devela su propio contexto de descubrimiento de muchos teoremas geométricos. Así, por ejemplo, nos muestra qué camino heurístico le permitió inferir que el volumen de un paraboloide es 3/2 del volumen del cono que tiene la misma base y la misma altura.

Como es bien sabido, es común que, en sus presentaciones, los científicos descuiden la descripción del contexto de descubrimiento focalizándose en el de justificación. Esta preferencia es todavía más acentuada en la geometría antigua, en la que prácticamente todas las obras seguían el estilo axiomático de Euclides, no dejando ningún lugar para revelaciones acerca de los caminos heurísticos. En este contexto, *El Método* constituye una obra de valor incalculable ya que, por un lado, es la única fuente de ciencia antigua que tenemos en la que se nos muestra cómo se descubren teoremas geométricos, convirtiéndose en una exquisita excepción y, por otro, el autor es nada menos que Arquímedes, sin duda el matemático más original de toda la antigüedad y, tal vez, de todos los tiempos.

Antes de desarrollar el contenido de la obra, repasemos un poco la historia de la obra en sí misma, que es tan fascinante como su contenido.

El *Método* tiene la forma de una carta escrita por Arquímedes a su amigo Eratóstenes en el siglo III a.C. Sabíamos de su existencia por una referencia de Suidas a un comentario que Teodosio habría hecho a esta obra (Heath 1912:6), pero se creía perdida y durante mucho tiempo no se supo nada acerca de su contenido.

Sin embargo, a comienzos del siglo XX cambió el rumbo de la historia del *Método*: en el año 1906 el filólogo danés Johan Ludvig Heiberg sacó a la luz lo que había permanecido oculto durante tantos años. Heiberg se enteró –casi por casualidad– de que un librito medieval de oraciones religiosas que se encontraba en Constantinopla probablemente fuera un palimpsesto. Al leer un fragmento de lo que estaba debajo de las oraciones, Heiberg reconoció que esos manuscritos pertenecían a obras de Arquímedes. Cuando comenzó a estudiarlos, descubrió que lo que allí se encontraba era nada más y nada menos que el *Método*, la obra hasta entonces perdida de Arquímedes. Con gran esfuerzo y una experticia sin igual, Heiberg logra editar el texto y traducirlo (Heiberg 1906). Años después, Heath incluye esa obra en sus obras completas de Arquímedes (Heath 1912). Existe, incluso, una traducción castellana publicada por Eudeba (Babini 1966).

Sabemos que durante los siglos IX y X había en Constantinopla copias de esta obra. Por esos años se comienzan a transcribir todos los manuscritos a letras minúsculas por motivos de practicidad y espacio. Así es como toda la obra de Arquímedes queda reunida en 3 códices: códices A, B y C. Todas las copias anteriores desaparecen ya que no se necesitaban. Los códices A y B se perdieron. El códice C es el que se recupera y contiene el *Método*.

En el año 1229, un monje se dispuso a escribir un libro de oraciones religiosas, tarea habitual dentro de un monasterio. Como era habitual también, para esta tarea se empleaban muchas veces pergaminos ya utilizados en obras que en ese momento ya no eran importantes que, previamente borrados, podían ser reciclados, ya que los pergaminos eran sumamente costosos. Fue una fortuna que este monje reciclara el códice C de Arquímedes porque, su poco aprecio por la ciencia fue, paradójicamente, la causa de su supervivencia, oculto detrás de un libro de piedad.

El palimpsesto de Arquímedes, sigue el procedimiento habitual de reciclado: para reutilizar un pergamino primero hay que raspar lo escrito anteriormente. Por lo tanto, el monje desarmó el códice C y borró el texto de Arquímedes. Luego cortó cada bifolio a la mitad, quedándose con dos folios. Cada folio fue girado 90° y doblado nuevamente a la mitad. Entonces, el tamaño del libro de oraciones es la mitad del códice C. Y las oraciones están escritas de manera perpendicular al texto de Arquímedes (es decir, para leer a Arquímedes, debo girar el libro de oraciones 90°).

Luego de muchas idas y vueltas, a lo largo de ocho siglos, el palimpsesto llegó a las manos indicadas: a las de Heiberg. Si bien nadie puede dudar de la capacidad de Heiberg, su trabajo con el palimpsesto padeció de ciertas limitaciones técnicas propias de la época. En primer lugar, las debidas a las complicaciones físicas que le impone el palimpsesto: por un lado, el hecho de que la obra de Arquímedes haya sido borrada y, por otro lado, el lomo del libro de oraciones esconde 3 o 4 líneas de Arquímedes que no podían ser leídas sin destruir el libro de oraciones –cosa que a Heiberg, por supuesto, no le fue permitido hacer. Por lo tanto, no tuvo manera de leer esas líneas y debió adivinar lo que allí dice. En segundo lugar, para leer el texto oculto, Heiberg no utilizó ninguna tecnología en particular, solo una lupa y su experticia. Sin duda, la tarea bajo estas circunstancias era casi heróica y, mirando los resultados, uno no puede sino admirar el trabajo del filólogo danés.

Pero, como es evidente, todavía quedaba mucho por hacer. Sin embargo, luego del trabajo de Heiberg, la obra de Arquímedes nuevamente se perdió para ser reecontrada recién a fines del siglo XX. Increíblemente, durante este último siglo, el palimpsesto sufrió más deterioro que todo el acumulado en todos los siglos anteriores. El palimpsesto no pudo permanecer en su monasterio y salió a recorrer el mundo en el tumultoso siglo XX.

Durante la década del 20 los turcos recuperaron Constantinopla (donde se encontraba el palimpsesto), aboliendo todas las órdenes religiosas. Por tanto, todos los libros debieron ser trasladados de Constantinopla para su conservación. El palimpsesto cae en las manos privadas de un tal Salomon Guerson y es llevado a París. Por supuesto, Salomon sabía que el manuscrito contenía textos de Arquímedes.

En 1940, durante la segunda guerra mundial, los alemanes entran en París. Dos años después, Salomon debe abandonar la ciudad para escapar de los campos de concentración y salvar su vida. El palimpsesto fue uno de los pocos bienes que conservó hasta ese momento debido a su gran valor. Pero antes de marcharse decide venderlo. Marie Louis Sirieix, una posible compradora, le dice que los alemanes no iban a creer que el palimpsesto contenía textos de Arquímedes y que, además, a los alemanes sólo les interesaba el arte. Le sugiere que el libro tendría valor si contuviera pinturas. En su desesperación por vender el palimpsesto, Salomon falsifica pinturas de los cuatro Evangelios en cuatro folios del palimpsesto, como si fueran originales del manuscrito medieval de oraciones. Cuatro páginas de Arquímedes tienen, ahora, un nuevo obstáculo para ser leídas.

Finalmente, en 1942 el palimpsesto pasa a manos de Marie Louis Sirieix, quien no le da demasiada importancia y lo esconde en un sótano húmedo donde empieza a ser comido por el moho. En 1970, Anne Guersan, hija de Sirieix, intenta venderlo y el 29 de octubre de 1998 el palimpsesto es rematado en la famosa casa de remates Christie de New York y comprado por un anónimo que se hace llamar "Sr.B", quien ha entregado el palimpsesto al Walters Art Museum, en Baltimore, para nuevos estudios e, incluso, los ha financiado.

El nuevo equipo de investigación, liderado por Reviel Netz y William Noel, se enfrenta hoy, por tanto, a un palimpsesto mucho más deteriorado que el que estudió Heiberg, debido a la tortuosa travesía que debió atravesar durante el siglo XX. Pero el equipo cuenta con dos ventajas: en primer lugar, aplicarán nuevas tecnologías para la lectura del texto oculto y, en segundo, el dueño del palimpsesto ha autorizado que sea desarmado. La primera tarea fue, por lo tanto, el desarmado del palimpsesto, lo que permite tener acceso a todas las líneas ocultas en el lomo. Además se utiliza luz ultravioleta para obtener imágenes, con distintos colores para las oraciones y el texto de Arquímedes. Por otro lado, la digitalización del palimpsesto permite estudiarlo desde cualquier lugar del mundo. La investigación todavía continua, pero lo esencial, y lo relevante para este trabajo, ya está claro (Netz et al. 2011a, 2011b). En la próxima sección desarrollaremos el contenido del *Método*, centrándonos en un ejemplo.

La balanza como instrumento heurístico de la geometría en Arquímedes

En apoyo a la conjetura que hemos enunciado en la introducción, mostraremos en esta sección cómo Arquímedes se vale de un instrumento mecánico para establecer un posible teorema geométrico. Lo haremos analizando su Proposición 1 del *Método*.

Primero debemos explicitar algunas definiciones previas (ver figura 1). Se llama *segmento parabólico* ABC a la figura plana delimitada por un arco de parábola ABC y una secante AC, llamada *base* del segmento parabólico. Se llama *vértice* del segmento parabólico a aquel punto B –sobre el arco de parábola–cuya tangente es paralela a la base AC del segmento parabólico.

La Proposición 1 del *Método* afirma que, siendo B el vértice[ii] del segmento parabólico ABC, la razón entre la superficie de este segmento y la superficie del triángulo ABC –inscripto en él– vale 4/3

Arquímedes circunscribe primero al segmento parabólico ABC en el triángulo AFC, donde AF es paralelo al eje de simetría de la parábola, FC es tangente a la parábola en el punto C y AC es la base del segmento parabólico.

La semirecta con origen en C que pasa por el punto B, corta al lado AF en el punto K. Arquímedes conocía las siguientes dos propiedades geométricas:

AB es una mediana del triángulo AKC.
KC es una mediana del triángulo AFC.

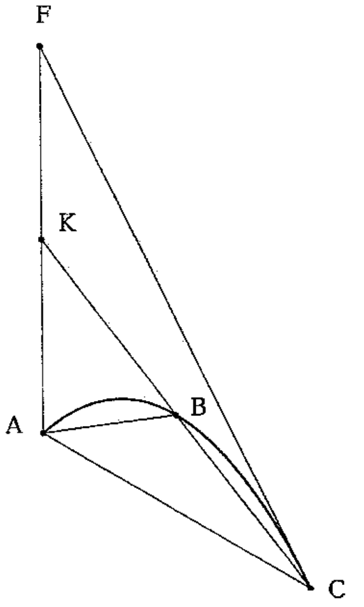

Figura 1

Recordemos que una *mediana* de un triángulo es un segmento que une el punto medio de uno cualquiera de sus lados con el vértice opuesto. En el *Apéndice* se muestra cómo las dos propiedades arriba enunciadas, podrían demostrarse usando los recursos geométricos disponibles en los tiempos de Arquímedes[iii].

La propiedad característica de una mediana es la de dividir al triángulo en otros dos, de igual superficie.

Consecuentemente:

(superficie de AFC) = 2 (superficie de AKC)
(superficie de AKC) = 2 (superficie de ABC)

Combinando estas dos, resulta:

(superficie del triángulo AFC) = 4 (superficie del triángulo ABC)

Mediante un corte genérico MO (ver figura 2), Arquímedes establece una correspondencia entre el segmento genérico MO del triángulo AFC (paralelo a AF) y el segmento OP que ese corte determina sobre el segmento parabólico ABC.

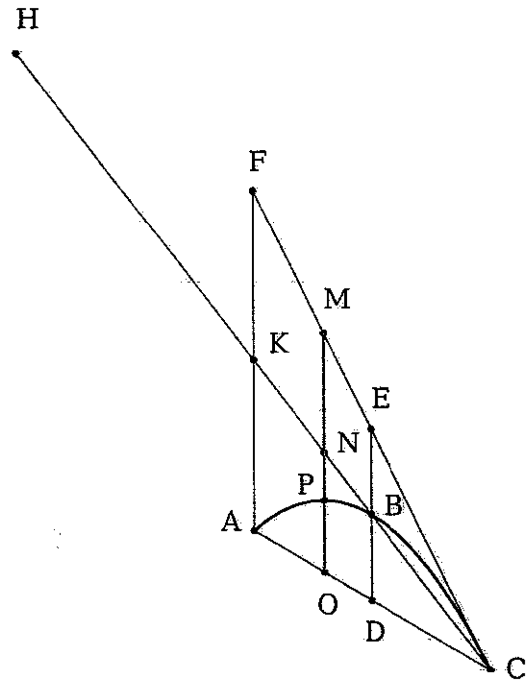

Figura 1. Proposición 1 del *Metodo*.

En la Proposición 5 de *La Cuadratura de la Parábola*, Arquímedes había demostrado la siguiente propiedad de la parábola:

$$CO:OA=MP:PO$$

Equivalentemente, podemos escribir[iv]:

$$MO:OP=CA:AO$$

Y como AF es paralelo a MO (Euclides, VI, 2):

CA:AO=CK:KN

Arquímedes introduce el segmento auxiliar HK=CK. Entonces:

CA:AO=HK:KN

Combinando las últimas proporciones, obtenemos:

MO:OP = HK:KN

Llegados a este punto Arquímedes nos invita a participar de la magia de su heurística. Sugiere que el segmento HC de la figura 2 materializa a los brazos de una balanza con el fulcro en K. Nos invita, además, a que tratemos a cualquier segmento geométrico (tal como el MO) como si fuera un objeto físico. En particular, como teniendo peso y pudiendo transportarse de un lugar a otro.

En su obra *Sobre el Equilibrio de los Planos* Arquímedes trata la ley del equilibrio de la balanza. Dos pesas iguales dispuestas a iguales distancias del fulcro, equilibran la balanza. Si una de las pesas pesara el triple que la otra, el equilibrio de la balanza exigiría que la más pesada estuviera tres veces más cerca del fulcro que la otra. La condición de equilibrio es esta:

La razón de los pesos es igual a la razón inversa de las distancias al fulcro

Arquímedes transporta el segmento OP al punto H e interpreta la proporción

MO:OP=HK:KN

en términos mecánicos:

> El peso del segmento MO, situado a la distancia KN del fulcro, equilibra al peso del segmento OP situado a la distancia HK del fulcro.

Arquímedes nos invita a pensar –aunque no lo afirma explícitamente– que al barrer todas las posiciones posibles, el segmento MO cubriría toda la extensión de la superficie del triángulo AFC y, análogamente, el segmento OP cubriría toda la extensión del segmento parabólico ABC. Además, nos exhorta a tratar también a las superficies como si fueran objetos físicos.

Como *cada* segmento MO del triángulo AFC, allí donde está en la figura, está en equilibrio con el correspondiente segmento OP de la parábola, situado en H, se sigue entonces que:

> El peso del triángulo AFC, allí donde está en la figura, equilibra al peso del segmento parabólico ABC colgado del punto H

Ahora bien, el peso de un cuerpo sólido está aplicado en su centro de gravedad (CG). Tratado como objeto físico, un triángulo tiene su CG sobre una mediana cualquiera y a 2/3 del vértice perteneciente a ella (o bien, a 1/3 del lado opuesto a dicho vértice).

La condición de equilibrio de la balanza se aplica a los CG de los cuerpos sólidos,

(peso del triángulo AFC):(peso del segmento ABC)=HK:(KC:3)

y como HK=KC:

(peso del triángulo AFC) : (peso del segmento ABC) = 3:1

Resumiendo lo hecho hasta aquí:

(área del triángulo AFC) : (área del triángulo ABC) = 4:1

(peso del triángulo AFC) : (peso del segmento ABC) = 3:1

Está claro que Arquímedes trata al peso de una figura plana como una *medida* de su área. Dicho de otro modo, dadas dos superficies planas cualesquiera, la razón de sus pesos sería idéntica a la razón entre sus áreas. Entonces en la última proporción escrita, puede sustituirse la razón de los pesos por la de las áreas:

(área del triángulo AFC) : (área del triángulo ABC) = 4:1

(área del triángulo AFC) : (área del segmento ABC) = 3:1

Finalmente podemos combinar estas dos últimas proporciones, dividiendo la primera por la segunda, para obtener:

(área del segmento ABC) : (área del triángulo ABC) = 4:3

Esta proporción *geométrica* –expresión de la Proposición 1 del *Método*– es lo que *descubre* el uso del instrumento mecánico y lo que Arquímedes *demostrará* de manera rigurosamente matemática entrando, al hacerlo, en el contexto de justificación de la Proposición 1 del *Método* al usar el célebre *método exhaustivo*.

Conclusión

En este trabajo nos propusimos mostrar, en un caso concreto, sin duda fascinante, cómo la relación entre las ciencias puras, como la geometría y las aplicadas, como la mecánica, estaban en una relación mucho más estrecha en la Antigüedad de lo que suele pensarse, al menos en lo que se refiere al contexto de descubrimiento. Ello sirve para prestar apoyo como marco de posibilidad para la hipótesis que propone que el sistema de epiciclos y deferentes podría haber sido inspirado en una solución mecánica a la representación del movimiento de los planetas.

Apéndice

En Euclides VI, 2, se afirma que si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, ella corta a los otros dos lados proporcionalmente. Aplicando esta proposición al triángulo AKC de nuestra figura 2 y teniendo en cuenta que BD es paralelo a AK, obtenemos:

$$AD/DC=KB/BC,$$

y como D ha sido definido por Arquímedes como el punto medio del segmento AC, entonces B ha de ser el punto medio del segmento KC. En otras palabras, AB es una mediana de AKC.

En Euclides VI, 4, se afirma que dados dos triángulos semejantes, dos lados cualesquiera de uno de los triángulos, forman la misma razón que los lados correspondientes del otro triángulo. Aplicando esta proposición al triángulo FKC de nuestra figura 2, obtenemos:

$$FK/KC=EB/BC$$

Aplicándola ahora al triángulo AKC de la misma figura, obtenemos:

$$AK/KC=DB/BC$$

De las dos últimas proporciones obtenemos (en términos modernos, basta dividirlas miembro a miembro):

$$FK/KA=EB/BD$$

Y como ya sabemos que B es el punto medio del segmento ED, entonces K ha de ser el punto medio del segmento FA. En otras palabras, KC es una mediana de AFC.

Notas

[i] Para esta narración seguimos fundamentalmente Lowden (2011) y Netz & Noel (2007).

[ii] Arquímedes no dice *explícitamente* que el punto B sea el vértice de la parábola, pero afirma que su pie sobre la base (D en la figura 2) divide a esta en dos partes idénticas, lo que es una consecuencia bien conocida de que B sea efectivamente el vértice de la parábola.

[iii] No estamos afirmando que Arquímedes lo haya probado de esa manera.

[iv] En términos modernos, basta con sumar uno miembro a miembro, para convencerse de ello.

Bibliografía

BABINI, J. *El método de Arquímedes.* Buenos Aires: Eudeba, 1966.

EVANS, J., CARMAN, C.C., THORNDIKE, A. S. "Solar Anomaly and Planetary Displays in the Antikythera Mechanism", *Journal for the History of Astronomy* xli: 1-39, 2010.

FREETH, T., BITSAKIS, Y., MOUSSAS, X., SEIRADAKIS, J., TSELIKAS, A., MANGOU, H., *et al.* "Decoding the ancient Greek astronomical calculator known as the Antikythera Mechanism", *Nature.* 11/2006, Volume 444: 587-591, 2006.

FREETH, T., JONES, A., STEELE, J. AND BITSAKIS, Y. "Calendars with Olympiad display and eclipse prediction on the Antikythera Mechanism", *Nature.* 07/2008, Volume 454: 614-617, 2008

HEATH, THOMAS L. *The Method of Archimedes: Recently Discovered by Heiberg.* Cambridge: Cambridge University Press, 1912.

HEATH, THOMAS L. "Quadrature of the Parabola" en *The Works of Archimedes.* Cambridge: Cambridge University Press. 233-252, 2009.

HEIBERG, J.L. "Eine neue Archimedeshandschrift (Nebst einer Tafel)", *Hermes*, 42: 235-303, 1907.

MARCHANT, J. "Ancient astronomy: Mechanical inspiration", *Nature* 468: 496-498, 2010.

NETZ, REVIEL AND NOEL, WILLIAM. *The Archimedes Codex: How a medieval prayer book is revealing the true genius of antiquity's greatest scientist.* Philadelphia, PA: Da Capo Press, 2007

PRICE, DEREK J DE SOLLA. "Gears from the Greeks," *Transactions of the American Philosophical Society* (New Series). Volume 64, Part 7, 1974.

WRIGHT, M T. "A Planetarium Display for the Antikythera Mechanism (a)". *Horological Journal* 144: 169–173, 2002a.

WRIGHT, M T. "A Planetarium Display for the Antikythera Mechanism (b)". *Horological Journal* 144: 193, 2002b.

WRIGHT, M T. "The Antikythera Mechanism and the early history of the Moon Phase Display". *Antiquarian Horology* 29: 319 – 329, 2005a.

WRIGHT, M T. "Counting Months and Years: the Upper Back Dial of the Antikythera Mechanism", *Bulletin of the Scientific Instrument Society.* 87, 8–13, 2005b.

WRIGHT, M T. AND BROMELY, A. "Towards a New Reconstruction of the Antikythera Mechanism", *Extraordinary Machines and Structures in Antiquity*. Ancient Olympia: 81 – 94, 2003.

NETZ, R., W. NOEL, N TCHERNETSKA AND N. WILSON. *The Archimedes Palimpsest. Vol I: Catalogue and Commentary*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011a.

NETZ, R., W. NOEL, N. TCHERNETSKA AND N. WILSON. *The Archimedes Palimpsest. Vol II: Images and Transcriptions.* Cambridge: Cambridge University Press, 2011b.

LOWDEN, J. "The Strange and Eventful history of the Archimedes Palimpsest" en Noel et al.: 97-126, 2011a.